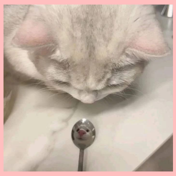
Treffpunkt Mathematik II für Informatik
Sitzung 04



Keine Garantien über Richtigkeit oder Vollständigkeit.

Sommersemester 2023
13. Juli 2023

Grenzwerte von Funktionen:

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = f^* \equiv \text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^*$$

$$x_n = x^* + \frac{1}{n} \quad y_n = x^* + \frac{1}{n^2}$$

Stetigkeit von Funktionen:

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \equiv \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Häufungspunkte einer Menge D:

$$x_0 \in D \text{ Häufungspunkt von D } \equiv \exists (x_n) \subset D \text{ mit } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \text{ und } x_n \neq x_0$$

Aufgabe 4.1

i) $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ Überprüfe, ob ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) = \alpha$
Müssen uns anschauen $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{x_n})$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Reziproke(??): $\widetilde{x_n} := \frac{\pi}{2} + n2\pi \Rightarrow \sin(\widetilde{x_n}) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\rightsquigarrow x_n = (\widetilde{x_n})^{-1} \Rightarrow \sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(\frac{1}{(\widetilde{x_n})^{-1}}) = \sin(\widetilde{x_n}) = 1$$

$$\rightsquigarrow \widetilde{y_n} := \pi + n2\pi \quad y_n := (\widetilde{y_n})^{-1} \Rightarrow \sin\frac{1}{y_n} = \sin(\frac{1}{(\widetilde{y_n})^{-1}}) = sin(\widetilde{y_n}) = 0 \ \lightning$$

ii)

$$\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x}) \overset{z.z.}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ Sei $(x_n)_n$ Nullfolge $|x_n \sin(x_n)| \leq |x_n|$

Aufgabe 4.2

Nicht bearbeitet

Aufgabe 4.3

Nicht bearbeitet

Aufgabe 4.4

a)

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 - \frac{|x|}{x}$$

Frage: Gibt es $f^*\mathbb{R}$, sodass $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 0 \\ f^*, & \text{sonst} \end{cases}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

Antwort: Angenommen f stetig fortsetzbar in 0. $f^* \stackrel{!}{=} \lim_{x\to 0^-} \widetilde{f}(x) = 3 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \stackrel{!}{=} f^*$ ↯

Kommentar von mir: $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$, das wurde angezeichnet

b)

Aufgabe 4.5

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{5}x + 1, x \in [1,2]$$

Zu zeigen: f besitzt in $f(1,2)$ genau einen FP, i.e. $\exists!\, x^* \in (1,2) : f(x^*) = x^*$
Banachscher Fixpunktsatz $\rightsquigarrow$ z.z.:

i) f ist Selbstabbildung, i.e. $f([1,2]) \subseteq [1,2]$

ii) $\exists\, q < 1 : |f(x) - f(y)| \leq q|x-y| \;\forall\, x,y \in [1,2] = I$

Beweis:

i)

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{5}x + 1 \leq \frac{4}{9} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{20+18}{45} + 1 \leq 2 \;\forall\, x \in I$$

$$f(x) \geq \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + 1 \geq 1$$

ii)

$$|f(x) - f(y)| = |\underbrace{\frac{1}{9}(x^2+y^2)}_{\dagger} + \frac{1}{5}(x-y)| \leq (\frac{4}{9} + \frac{1}{5})|x-y| \;\forall\, x,y \in I$$

$$\dagger : \frac{1}{9}|(x+y)(x+y)| \leq \frac{4}{9}|x+y| \;\forall\, x,y \in I$$

cat supremacy >ω<

cat ^ω^