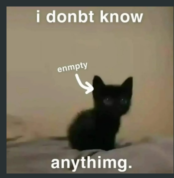
Treffpunkt Mathematik II für Informatik
Sitzung 07



Sommersemester 2023	v1.0
Themen:	Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen
Relevante Foliensätze:	alle
Abgabe der Hausübung:	30. Mai 2023

> **Anmerkung:**
>
> Keine Garantien über Richtigkeit oder Vollständigkeit.
> Dies ist ein freiwilliger Mitschrieb.

7.1

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y+y^2x}{x^2+y^2} & fr(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stetigkeit:
z.z.: $\forall \text{NF}(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$

$$\rightsquigarrow |f(x_n, y_n)| = |\frac{x_n^3 y_n + y_n^2 x_n}{x_n^2 + y_n^2}| \leq |\frac{x_n^3 y_n}{x_n^2 + y_n^2}| + |\frac{y_n^3 x_n}{x_n^2 + y_n^2}| \leq |\frac{x_n^3 y_n}{x_n^2}| + |\frac{y_n^2 x_n}{y_n^2}| = |x_n y_n| + |x_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Richtungsableitungen:
Richtungsableitung von f in Punkt x_0 in Richtung $v : 1$

$$\rightsquigarrow \partial_v f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4 v_1^3 v_2 + h^3 v_2^2 v_1}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h v_1^3 v_2}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{v_2^2 v_1}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^2 v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

Totale Differenzierbarkeit:
Angenommen f total differenzierbar. Dann $\partial_v f(0) = Df(0) \cdot v$ und wir rechnen

$$f(x) = f(0) + Df(0) \cdot x + r(x) \Leftrightarrow r(x, x_0) = \frac{x_1^3 x_2 + x_2^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_2^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Bestapproximation

$$\rightsquigarrow |\frac{r(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}| = |\frac{x_1^3 x_2 + x_2^2 x_1 - x_2^2 x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(x_1^2 + x_2^2)}| \leq |\frac{x_1^3 x_2}{x_1 x_1^2}| = |x_2|$$

> **Anmerkungen:**
>
> Total differenzierbar, wenn es gegen 0 geht, hier ist dies der Fall, da x_1, x_2 Nullfolgen sind.
> Die Bestapproximation findet man heraus, indem man durch Norm von Vektor (x_1, x_2) teilt.

Sandwich-Lemma:

$(a_n), (b_n), (c_n)$ mit GW $a.b.c$ und $a_n \leq b_N \leq c_n \Rightarrow a \leq b \leq c$

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)$$

Bsp zu Richtungsableitungen:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \frac{g(h) - g(0)}{h} = \begin{cases} 0, & \text{für } h > 0 \\ \frac{-1}{h}, & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

Totale Differenzierbarkeit:

$$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

$$\rightsquigarrow Dg : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m) \text{ ist lineare Bestapproximation von } g,$$

$$\text{i.e. } g(x) = g(x_0) + Dg(x_0) \cdot x + r(x, x_0) \text{ mit } \frac{||r(x, x_0)||}{||x - x_0||} \overset{x \to x_0}{\to} 0$$

7.2

nicht bearbeitet

7.3

nicht bearbeitet

cat ≧ω≦

Anmerkung:
Omg he’s literally me 🥺🥺🥺