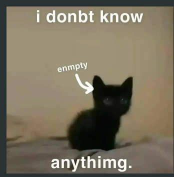
Treffpunkt Mathematik II für Informatik
Sitzung 06



Sommersemester 2023	v1.1
Themen:	Differenzierbarkeit
Relevante Foliensätze:	alle
Abgabe der Hausübung:	22. Juli 2023

Anmerkung:

Keine Garantien über Richtigkeit oder Vollständigkeit. Dies ist ein freiwilliger Mitschrieb.

6.1

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{-\cos(x)} = -1$$

Anmerkung: man darf den Satz von de l'Hospital auch mehrmals anwenden.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\ln(x)} = \infty$$

Anmerkung: Grenzwert muss nach dem Ableiten noch existieren, es darf also nicht oszillieren, bestimmt divergieren ist jedoch gestattet (?)

d)

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$$

6.5

$$f(x) = x^3 + x$$
$$\rightsquigarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \text{ auf ganz } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend}$$
$$x = f^{-1}\circ f(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\rightsquigarrow} 1 = f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x))(*) \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \rightsquigarrow (f^{-1})'(0) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

Taylorpolynom: $T_{k,j}(x;a) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}\circ f(0) = f^{-1}(0)$$
$$(f^{-1})''(0)? : \frac{d}{dx} \text{ auf } (*) \text{ angewandt liefert } 0 = f''(x)(f^{-1})'(f(x)) + f'(x)^2(f^{-1})''(f(x))$$
$$\Leftrightarrow \frac{-f''(x)(f^{-1})'(f(x))}{f'(x)^2} = (f^{-1})''(f(x)) \Rightarrow (f^{-1})''(0) = 0$$
$$T_{2,f^{-1}}(x;0) = f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)x + \frac{(f^{-1})''(0)x^2}{2} = x$$

Anmerkung: Taylorpolynome sind da, um Funktionen zu approximieren, z.B. Sinus ist bei 0 näherungsweise linear, Restgliedabschätzung dient dann dazu, um Abweichung festzustellen

6.6

$$f : [0,4] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -x+3, & x\in[0,2] \\ -x^2+4x-3, & x\in[2,4) \end{cases} \rightsquigarrow \lim_{x^+\to 2} f(x) = -2+3 = 1 = \lim_{x^-\to 2} f(x) = -4+8-3 = 1 \rightsquigarrow \text{stetig}$$
$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 2} -1 = -1 \neq \lim_{x\to 2} -2x+4 = 0 \rightsquigarrow f \text{ nicht differenzierbar in } x = 2$$

Anmerkung: ⚠️ Die Funktion wurde leicht von der Aufgabenstellung abgeändert ⚠️

Differenzierbarkeit bedeutet die Abwesenheit von Knicken, daher heißt es auch glatt

6.7

nicht bearbeitet

cat >ω<