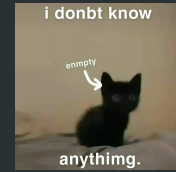


Treffpunkt Mathematik II für Informatik

Sitzung 06



Sommersemester 2023
Themen:
Relevante Foliensätze:
Abgabe der Hausübung:

v1.0
Differenzierbarkeit
alle
23. Mai 2023

Anmerkung:

Keine Garantien über Richtigkeit oder Vollständigkeit.
Dies ist ein freiwilliger Mitschrieb.

6.1

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - 1}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{-\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)}{-\cos(x)} = -1$$

Anmerkung:

Man darf den Satz von de l'Hospital auch mehrmals anwenden.

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\ln(x)} = \infty$$

Anmerkung:

Nicht ganz sicher: Grenzwert muss nach dem Ableiten noch existieren, es darf also nicht oszillieren, bestimmt divergieren ist jedoch gestattet

d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$$

6.5

$$f(x) = x^3 + x$$

$$\rightsquigarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \text{ auf ganz } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend}$$

$$x = f^{-1} \circ f(x) \stackrel{\frac{d}{dx}}{\rightsquigarrow} 1 = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x))(*) \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \rightsquigarrow (f^{-1})'(0) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$\text{Taylorpolynom: } T_{k,j}(x; a) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1} \circ f(0) = f^{-1}(0)$$

$$(f^{-1})''(0)? : \frac{d}{dx} \text{ auf } (*) \text{ angewandt liefert } 0 = f''(x)(f^{-1})'(f(x)) + f'(x)^2(f^{-1})''(f(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{-f''(x)(f^{-1})'(f(x))}{f'(x)^2} = (f^{-1})''(f(x)) \Rightarrow (f^{-1})''(0) = 0$$

$$T_{2,f^{-1}}(x; 0) = f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)x + \frac{(f^{-1})''(0)x^2}{2} = x$$

Anmerkung:

Taylorpolynome sind da, um Funktionen zu approximieren, z.B. Sinus ist bei 0 näherungsweise linear, Restgliedabschätzung dient dann dazu, um Abweichung festzustellen.

6.6

$$f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -x + 3, & x \in [0, 2] \\ -x^2 + 4x - 3, & x \in [2, 4] \end{cases} \rightsquigarrow \lim_{x^+ \rightarrow 2} f(x) = -2 + 3 = 1 = \lim_{x^- \rightarrow 2} f(x) = -4 + 8 - 3 = 1 \rightsquigarrow \text{stetig}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} -1 = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 2} -2x + 4 = 0 \rightsquigarrow f \text{ nicht differenzierbar in } x = 2$$

Anmerkungen:

⚠ Die Funktion wurde leicht von der Aufgabenstellung abgeändert ⚠

Differenzierbarkeit bedeutet die Abwesenheit von Knicken, daher heißt es auch glatt

6.7

nicht bearbeitet

cat $\geq_w \leq$

