Combinatorics Homework. Dmitry Semenov, M3100, ISU 409537

1. One of the classical combinatorial problems is counting the number of arrangements of n balls into k boxes. There are at least 12 variations of this problem: four cases $(a–d)$ with three different constraints $(1–3)$. For each problem $(case + constraint)$, derive the corresponding generic formula.

   Additionally, pick several representative values for n and k and use your derived formulae to find the numbers of arrangements. Visualize several possible arrangements for the chosen n and k.

https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way

Пусть $X-$ множество коробок, $N-$множество шаров ($|X| = x, |N| = n$)

$(a)\ U \to L:$ Balls are Unlabeled, Boxes are Labeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

Этот случай эквивалентен подсчету подмножеств из n элементов множества X, также называемых $n-$комбинациями X. Задача сводится к нахождению (подсчёту) биномиального коэффициента.

Таким образом, формула: $\binom{x}{n}$

Например, $X = \{a, b, c, d\}, N = \{1, 2\}$

$$|\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

Этот случай эквивалентен подсчету мультимножеств из n элементов из множества X, в котором каждый элемент X встречается как минимум один раз. Это также эквивалентно подсчету композиций числа n с x (ненулевыми) членами, путем перечисления кратностей элементов x. Требование сюръективности означает, что все кратности равны как минимум одному. Уменьшая все кратности на 1, это сводится к случаю 3 (при этом n также уменьшается на x).

Таким образом, формула: $\binom{n-1}{x-1}$

Например: $X = \{a, b\}, N = \{1, 2, 3\}$

$$|\{\{a, a, b\}, \{a, b, b\}\}| = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$$

3. Arbitrary number of balls per box.

Этот случай эквивалентен подсчету мультимножеств из n элементов из множества X. Для каждого элемента из X определяется, сколько элементов из N отображается на него с помощью функции f, в то время как две функции, которые дают те же самые "кратности" для каждого элемента из X, всегда могут быть преобразованы друг в друга путем перестановки N. Количество $n-$мультисочетаний из множества с x элементами можно рассматривать как количество $n-$сочетаний из множества с $x+n-1$ элементами.

Таким образом, формула: $\binom{x+n-1}{n}$

Например: $X = \{a,b,c\}, N = \{1,2\}$

$|\{\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,b\},\{b,c\},\{c,c\}\}| = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

$(b)\ L \to U$: Balls are Labeled, Boxes are Unlabeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

Наиболее очевидный случай из всех - по принципу Дирихле, ели такое распределение шариков по коробкам существует, то оно единственное и требует, чтобы $n \leq x$.

Таким образом, формула: $(n \leq x\ ?\ 1\ :\ 0)$

Например, $X = \{a,b,c\}, N = \{1,2,3\}$

$|\{\{1\},\{2\},\{3\}\}| = [n \leq x] = [3 \leq 3] = true = 1$

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

Этот случай эквивалентен подсчету разбиений множества N на x (непустых) подмножеств или подсчету отношений эквивалентности на множестве N с точно x классами. Действительно, для любой сюръективной функции $f : N \to X$ отношение "иметь одинаковый образ под действием f" является таким отношением эквивалентности, и оно не меняется при перестановке элементов в X; обратно, такое отношение эквивалентности можно превратить в сюръективную функцию, назначив элементы X каким-либо образом в x классов эквивалентности. Количество таких разбиений или отношений эквивалентности по определению является числом Стирлинга второго рода $S(n,x)$.

Таким образом, формула: $\left\{{n \atop x}\right\}$

Например: $X = \{a,b,c\}, N = \{1,2,3\}$

$|\{\{1\},\{2\},\{3\}\}| = \left\{{n \atop x}\right\} = \left\{{3 \atop 3}\right\} = 1$

3. Arbitrary number of balls per box.

Этот случай аналогичен соответствующему случаю для сюръективных функций, но некоторые элементы из x могут и не соответствовать ни одному классу эквивалентности (поскольку рассматриваются функции с точностью до перестановки множества X, не имеет значения, какие элементы, важно лишь их количество). В результате подсчитываются отношения эквивалентности на N с не более чем x классами, и результат получается из упомянутого случая путем суммирования значений до x.

Таким образом, формула: $\sum_{k=0}^{x} \left\{{x \atop k}\right\} = B_x$

Например, $X = \{a,b,c\}, N = \{1,2,3\}$

$|\{\{1,2,3\},\{\},\{\}\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\{\{1,2\},\{3\},\{\}\},\{\{1,3\},\{2\},\{\}\},\{\{2,3\},\{1\},\{\}\}| = \sum_{k=0}^{x} \left\{ {x \atop k} \right\} = B_x = B_3 = 5$

$(c)\ L \to L:$ Balls are Labeled, Boxes are Labeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

В этом случае подсчет эквивалентен подсчету последовательностей из n различных элементов множества X, также называемых $n-$перестановками X.

Этот случай отличается от случая без ограничений тем, что на второй элемент остается на один выбор меньше, на третий - на два меньше и так далее. Поэтому вместо обычной степени x значение определяется убывающей факториальной степенью x, в которой каждый последующий множитель на единицу меньше предыдущего.

Таким образом, формула: $\frac{x!}{(x-n)!}$

Например, $X = \{a,b,c,d\}, N = \{1,2\}$

$|\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}| = \frac{x!}{(x-n)!} = \frac{4!}{2!} = 12$

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

Случай практически аналогичен $(b.2)$, за исключением того, что теперь существуют номера коробок, а значит, их перестановки также стоит учитывать.

Таким образом, формула: $x! \left\{ {n \atop x} \right\}$

Например, $X = \{a,b\}, N = \{1,2,3\}$

$|\{(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a),(a,b,b),(b,a,b),(b,b,a)\}| = x! \left\{ {n \atop x} \right\} = 2! \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 6$

3. Arbitrary number of balls per box.

В этом случае подсчет эквивалентен подсчету последовательностей из n элементов множества X без ограничений: функция $f : N \to X$ определяется n образами элементов множества N, каждый из которых может быть независимо выбран из элементов X.

Таким образом, формула: x^n

Например, $X = \{a,b,c\}, N = \{1,2\}$

$|\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}| = x^n = 3^2 = 9$

$(d)\ U \to U:$ Balls are Unlabeled, Boxes are Unlabeled.

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.

Идентично случаю $(b.1)$, поскольку все последовательности из n различных элементов множества X могут быть преобразованы друг в друга путем применения перестановки множества X к каждому из их членов, дополнительно разрешение переупорядочивания членов не приводит к возникновению новых размещений.

Таким образом, формула: $(n \leq x\ ?\ 1\ :\ 0)$

Например, $X = \{a, b, c\}, N = \{1, 2, 3\}$

$|\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}| = [n \leq x] = [3 \leq 3] = true = 1$

2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.

Этот случай эквивалентен подсчету разбиений числа n на x ненулевых частей. По сравнению с случаем подсчета сюръективных функций с учетом только перестановок множества X $\left\{ n \atop x \right\}$, здесь сохраняются только размеры классов эквивалентности, на которые функция разбивает множество N (включая кратность каждого размера), поскольку два отношения эквивалентности можно превратить одно в другое путем перестановки множества N тогда и только тогда, когда размеры их классов совпадают. По определению получается число $p_x(n)$ разбиений числа n на x ненулевых частей.

Таким образом, формула: $p_x(n)$

Например, $X = \{a, b\}, N = \{1, 2, 3, 4\}$

$|\{\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}\}| = p_x(n) = p_2(4) = 2$

3. Arbitrary number of balls per box.

Этот случай эквивалентен подсчету разбиений числа n на не более чем x частей. Как и в предыдущем случае, за исключением того, что теперь некоторые части разбиения могут быть равны нулю. Каждое разбиение числа n на не более чем x ненулевых частей можно расширить до такого разбиения, добавив необходимое количество нулей, поэтому результат дается суммой: $\sum_{k=0}^{x} p_k(n)$.
Прибавив 1 к каждой из
x частей, мы получаем разбиение числа $n + x$ на x ненулевых частей.

Таким образом, формула: $p_x(n + x)$

Например, $X = \{a, b\}, N = \{1, 2\}$

$|\{\{\{1, 2\}, \{\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}| = p_x(n + x) = p_2(4) = 2$

2. How many different passwords can be formed using the following rules?

   The password must be exactly 8 characters long.

   The password must consist only of Latin letters $(a - z, A - Z)$ and Arabic digits $(0 - 9)$.

   The password must contain at least 2 digits $(0 - 9)$ and at least 1 uppercase letter $(A - Z)$.

   Each character can be used no more than once in the password.

   How long does it take to crack such a password?

- Общее количество $8-$символьных паролей, состоящих из латинских букв и цифр (62символа), без учета каких-либо ограничений:

  $P = \binom{62}{8} \times 8!$

- Пароли, не содержащие цифры, состоят только из латинских букв (52символа). Таким образом, число паролей:

  $P_1 = \binom{52}{8} \times 8!$

- Пароли с одной цифрой. Выбираем одну позицию для цифры и одну цифру из 10, оставшиеся 7 позиций заполняем латинскими буквами (52символа):

  $$P_2 = \binom{8}{1} \times 10 \times \binom{52}{7} \times 7!$$

- Пароли, не содержащие заглавных букв, состоят из строчных букв (26символов) и цифр (10символов), всего 36 символов:

  $$P_3 = \binom{36}{8} \times 8!$$

Используем принцип включений-исключений, чтобы найти мощность объединения:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Где:

- A — множество паролей, не содержащих цифр P_1
- B — множество паролей, содержащих ровно одну цифру P_2
- C — множество паролей, не содержащих заглавных букв P_3

Пересечение множеств:

1. $A \cap B$: пароли, не содержащие цифр, не могут содержать ровно одну цифру. Таким образом, $|A \cap B| = 0$.
2. $A \cap C$: пароли, не содержащие цифр и не содержащие заглавных букв. Состоят только из строчных букв (26символов). Число таких паролей:

   $$|A \cap C| = \binom{26}{8} \times 8!$$

3. $B \cap C$: пароли, содержащие ровно одну цифру и не содержащие заглавных букв. Выбираем одну цифру из 10 и одну позицию для цифры, оставшиеся 7 позиций заполняем строчными буквами (26 символов):

   $$|B \cap C| = \binom{8}{1} \times 10 \times \binom{26}{7} \times 7!$$

4. $A \cap B \cap C$: пароли, не содержащие цифр, содержащие ровно одну цифру, не существуют, поэтому $|A \cap B \cap C| = 0$.

Итак:

$$|A \cup B \cup C| = P_1 + P_2 + P_3 - |A \cap C| - |B \cap C|$$

$$P_{\text{valid}} = P - |A \cup B \cup C|$$

$$P_{\text{valid}} = \binom{62}{8} \times 8! - \left(\binom{52}{8} \times 8! + \binom{8}{1} \times 10 \times \binom{52}{7} \times 7! + \binom{36}{8} \times 8! - \binom{26}{8} \times 8! - \binom{8}{1} \times 10 \times \binom{26}{7} \times 7!\right)$$

$$P_{\text{valid}} = 62 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 - 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 - 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 80 - 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 + 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 80 + 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19$$

$P_{\text{valid}} = 51149739513600$

Теперь, если рассмотреть время, необходимое для взлома такого пароля при скорости перебора 10^9 паролей в секунду:

$$\text{Время взлома} = \frac{51149739513600}{10^9} = 51149.7395136 \text{ секунд}$$

$$\text{Время взлома в часах} = \frac{51149.7395136}{3600} \approx 14.2 \text{ часов}$$

3. Find the number of different $5-$digit numbers using digits $1–9$ under the given constraints. For each case, provide examples of numbers that comply and do not comply with the constraints, and derive a generic formula that can be applied to other values of n (total available digits) and k (number of digits in the number). Express the formula using standard combinatorial terms, such as $k-$combinations C_n^k and $k-$permutations $P(n, k)$.

(a) Digits can be repeated.

Количество различных $5-$значных чисел, состоящих из цифр от 1 до 9, равно $9^5 = 59049$, так как на каждой из 5 позиций может стоять любая из 9 цифр.

Формула: n^k

Пример числа, которое соответствует ограничениям: 11345. Пример числа, которое не соответствует ограничениям: $\varnothing$

(b) Digits cannot be repeated.

Так как цифры в числе не могут повторяться, то исходная задача сводится к нахождению числа сочетаний C_n^k. Но есть нюанс - нужно учесть все перестановки для каждого различного числа. Таким образом, количество чисел равно $C_9^5 * P(5) = \frac{9!}{(9-5)!} = 15120$. Иначе это можно интерпретировать как $P(n, k)$

Формула: $C_n^k \cdot P(n) = P(n, k)$

Пример числа, соответствующего ограничениям: 13579. Пример числа, не соответствующего ограничениям: 11234

(c) Digits can be repeated and must be written in non-increasing order.

Запишем все цифры в порядке убывания и представим бесконечное мультимножество, составленное из них. Так, эта задача может свестись к проблеме stars and bars. Значит, количество чисел равно C_{k+s-1}^k, где k — число цифр в числе, s — мощность множества цифр. $C_{9+5-1}^9 = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287$.

Формула: C_{k+s-1}^k

Пример числа, соответствующего ограничениям: 99331. Пример числа, не соответствующего ограничениям: 12345.

(d) Digits cannot be repeated and must be written in strictly increasing order.
Эта задача о выборе
k уникальных чисел из набора мощности n. Так как число сочетаний в классической интерпретации — это способ выбрать числа без учёта порядка, то есть без учёта перестановок, то можно расценивать это как "всегда выбираем ту перестановку, при которой цифры идут в порядке возрастания". Таким образом, количество чисел равно $C_n^k = C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-4)!} = 126$

Формула: C_n^k

Пример числа, соответствующего ограничениям: 12349. Пример числа, не соответствующего ограничениям: 11245

(e) Digits can be repeated and the number must be divisible by 3 or 5.

Число делится на 5, если его последняя цифра $= 5$. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Случай похож на первый: на первые три позиции (старшие разряды) можем поставить любую из 9 цифр. Теперь рассмотрим случай, когда число делится на 3. На 4 позицию поставим любую цифру, на последнюю — любую из трёх (это обусловлено тем, что последняя цифра будет компенсировать остаток от деления на 3 суммы предыдущих четырёх цифр, таким образом она будет равна цифре из одного из трёх наборов $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$). Заметим, что если мы рассматриваем набор $\{2,5,8\}$, то при желании учесть случай, когда число делится на 5 (тривиально, на первые 4 позиции любую из 9 цифр, на последнюю — только 5), мы посчитаем одно и то же число дважды. То есть, на самом деле нас интересуют только 6 возможных цифр на предпоследнем месте. Таким образом, количество чисел рано $n^{k-1} \cdot 3 + n^{k-2} \cdot 6 = 9^4 \cdot 3 + 9^3 \cdot 6 = 24057$

Формула: $n^{k-1} \cdot 3 + n^{k-2} \cdot 6$

Пример числа, соответствующего ограничениям: 99978. Пример числа, не соответствующего ограничениям: 99979

(f) Digits cannot be repeated and the sum of the digits must be even.

Возможны два случая:

- 2 нечётные цифры, 3 чётные
- 4 нечётные цифры, 1 чётная

Число выбрать каждую из групп равно C_n^k, а вместе $\mathrm{C}_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}$. Кроме того, нужно учесть перестановки для каждого сочетания. Таким образом, количество чисел равно $\mathrm{C}_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot P(k) + \mathrm{C}_{n_3}^{k_3} \cdot C_{n_4}^{k_4} \cdot P(k) = \mathrm{C}_5^2 \cdot C_4^3 \cdot P(5) + \mathrm{C}_5^4 \cdot C_4^1 \cdot P(5) = 10 \cdot 4 \cdot 5! + 5 \cdot 4 \cdot 5! = 7200$

Формула: $\mathrm{C}_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot P(k) + \mathrm{C}_{n_3}^{k_3} \cdot C_{n_4}^{k_4} \cdot P(k)$

В общем виде для любого числа цифр и любой системы счисления формула:

$k! \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \cdot \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k-2i} \cdot \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2i}$

Пример числа, соответствующего ограничениям: 99987. Пример числа, не соответствующего ограничениям: 13579

4. Let n be a positive integer. Prove the following identity using a combinatorial argument:

   $\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_k^n = n \cdot 2^{n-1}$

Чтобы доказать это комбинаторным методом, рассмотрим множество S с n элементами. Мы хотим посчитать количество способов выбрать непустое подмножество S и затем выбрать один элемент из этого подмножества в качестве особого.

Левая сторона:

- Сначала мы выбираем размер подмножества k, который может варьироваться от 1 до n.
- Затем мы выбираем один элемент из этого подмножества, что может быть сделано k способами.
- Наконец, мы выбираем оставшиеся $n-k$ элементов из оставшихся n - 1 элементов, что может быть сделано $\binom{n-1}{n-k} = C_n^k$ способами.

Таким образом, левая сторона тождества представляет собой сумму этих выборов:

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$

Правая сторона:

- Мы можем посчитать то же самое, сначала выбрав один особый элемент из S, что можно сделать n способами. Затем мы разбиваем оставшиеся $n-1$ элементов на два подмножества. Общее количество способов сделать это равно 2^{n-1}.

Таким образом, правая тождества идентичности равна: $n \cdot 2^{n-1}$

Поскольку обе формулы (левая и правая сторона тождества) представляют решение одной и той же комбинаторной задачи, их равносильность доказана.

5. Let r, m, n be non-negative integers. Prove the following identity using a combinatorial argument: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$

Способ доказательства будет аналогичен изложенному выше.

Рассмотрим два множества: множество M с m элементами и множество N с n элементами. Теперь мы хотим выбрать подмножество R с размером r из объединения M и N.

Левая сторона:

- Мы можем выбрать это подмножество прямо из объединения M и N, что может быть сделано $\binom{m+n}{r}$ способами по определению.

Правая сторона:

- Мы можем рассматривать все возможные способы разбить это подмножество на две части: одну из множества M размером k и вторую из множества N размером $r-k$. Здесь k может варьироваться от 0 до r, так как R полностью может быть подмножеством одного из двух исходных множеств. Суммируя все такие возможные разбиения, мы получим правую часть тождества $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$

Таким образом, обе формулы представляют собой количество способов выбрать подмножество размера r из объединения множеств M и N, их равносильность комбинаторно доказана.

6. Prove the Generalized Pascal's Formula (for $n \geq 1$ and $k_1, ..., k_r \geq 0$ with $k_1 + \cdots + k_r = n$): $\binom{n}{k_1,...,k_r} = \sum_{i=1}^{r}\binom{n-1}{k_1,...,k_i-1,...,k_r}$

Начнем с левой стороны тождества. По определению, $\binom{n}{k_1,...,k_r}$ представляет собой количество способов выбрать подмножество из n элементов, где k_1 элементов имеют первый тип, k_2 элементов имеют второй тип и так далее, а k_r элементов имеют $r-$й тип.

С другой стороны, мы можем рассматривать это как последовательный процесс выбора элементов из множества. Первый элемент можно выбрать из n элементов, затем второй элемент можно выбрать из оставшихся $n-1$ элементов, и так далее. То есть, фиксируем $i-\text{й}$ элемент и выбираем другие из оставшихся. Таким образом, сумма коэффициентов бинома для таких выборов равна:

$\binom{n-1}{k_1-1,k_2,...,k_r} + \binom{n-1}{k_1,k_2-1,...,k_r} + \ldots + \binom{n-1}{k_1,k_2,...,k_r-1}$

Можно преобразовать это выражение, чтобы каждый коэффициент бинома имел одинаковую сумму внутри, и это даст нам исходную формулу:

$\binom{n}{k_1,...,k_r} = \sum_{i=1}^{r}\binom{n-1}{k_1,...,k_i-1,...,k_r}$

Таким образом, мы доказали обобщенную формулу Паскаля.

7. Find the coefficient of $x^5y^7z^3$ in the expansion of $(x+y+z)^{15}$.

Найдём мультиномиальный коэффициент перед $x^5y^7z^3$ в разложении $(x+y+z)^{15}$ по его определению.

Значение мультиномиального коэффициента $\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m}$ определено для всех целых неотрицательных чисел n и $k_1, k_2, \ldots, k_m$, таких, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$:

$\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$.

$\binom{15}{5,7,3} = \frac{15!}{5!\cdot 7!\cdot 3!} = 360'360$

8. Count the number of permutations of the multiset $\Sigma^* = \{2\cdot\triangle, 3\cdot\square, 1\cdot cat\}$

Число перестановок обычного множества уникальных элементов можно вычислить как $|\Sigma|!$

Число же перестановок мультимножества совпадает с формулой вычисления мультиномиального коэффициента и равно $\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$, где k_i- число вхождений $i-\text{ого}$ элемента в мультимножество. Действительно, это так, потому что перестановки одинаковых элементов неразличимы и нужно посчитать любую из них всего лишь раз.

$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$

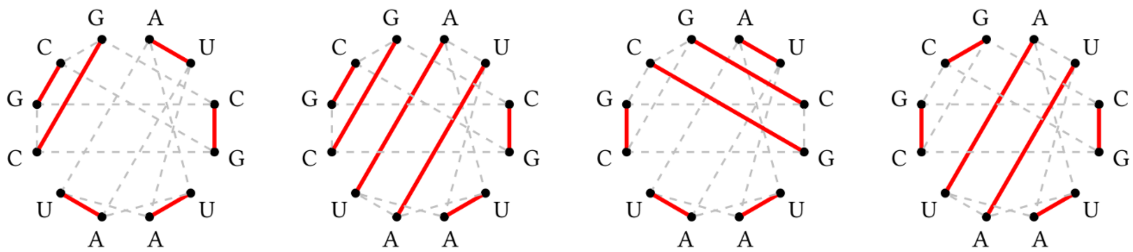
9. A non-crossing perfect matching in a graph is a set of pairwise disjoint edges that cover all vertices and do not intersect with each other. For example, consider a graph on $2n$ vertices numbered from 1 to $2n$ and arranged in a circle. Additionally, assume that edges are straight lines. In this case, edges $\{i, j\}$ and $\{a, b\}$ intersect whenever $i < a < j < b$.

(a) Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in a complete graph K_{2n}.

Расположим вершины графа на окружности таким образом, чтобы они образовали правильный $2n -$ угольник. Теперь задача о нахождении числа различных совершенных паросочетаний в полном графе свелась к задаче о нахождении количества способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами - по определению это числа Каталана.

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

(b) Consider a graph on vertices labeled with letters from $\{A, C, G, U\}$. Each pair of vertices labeled with A and U is connected with a basepair edge. Similarly, $C–G$ pairs are also connected. The picture below illustrates some of possible non-crossing perfect matchings in the graph with 12 vertices $AUCGUAAUCGCG$ arranged in a circle. Basepair edges are drawn dashed gray, matching is red.



Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in the graph on 20 vertices arranged in a circle and labeled with
$CGUAAUUACGGCAUUAGCAU$

```
def is_valid_pair(symbol1, symbol2):
    return ((symbol1 == 'A' and symbol2 == 'U') or
            (symbol1 == 'U' and symbol2 == 'A') or
            (symbol1 == 'C' and symbol2 == 'G') or
            (symbol1 == 'G' and symbol2 == 'C'))


def count_matching(seq, start, end, mem):
    if start >= end:
        return 1
    if (start, end) in mem:
        return mem[(start, end)]
```

```
    total_matching = 0
    for k in range(start + 1, end + 1, 2):
        if is_valid_pair(seq[start], seq[k]):
            left_matching = count_matching(seq, start + 1, k - 1, mem)
            right_matching = count_matching(seq, k + 1, end, mem)
            total_matching += left_matching * right_matching

    mem[(start, end)] = total_matching
    return total_matching


sequence = "CGUAAUUACGGCAUUAGCAU"
result = count_matching(sequence, 0, len(sequence) - 1, {})
print(result)
```

$\Rightarrow$ число совершенных непересекающихся паросочетаний для данной задачи $= 21$

10. How many integer solutions are there for each given equation?

https://github.com/W-y-I-t/Discrete-Math/tree/main/Combinatorics

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 0$

Это классическое представление задачи “stars and bars”. У нас есть $k = 20$ “звёздочек” (итоговая сумма) и $s = 3$ “палочки” (число слагаемых). Число целочисленный решений можно вычислить следующим образом:

$\binom{20+3-1}{3-1} = \binom{22}{2} = 231$

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 1$

Сведём эту задачу к предыдущей: для этого возьмём $y_i = x_i - 1$, тогда $y_1 + y_2 + y_3 = 17$.

$\binom{17+3-1}{3-1} = \binom{19}{2} = 171$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 5$

Опять же, сведём задачу к предыдущей: для этого возьмём $z_i = y_i - 4$, тогда $z_1 + z_2 + z_3 = 5$.

$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

(d) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, where $x_i \geq 0$

Сведём задачу к stars and bars для каждого $k \in [0; 20]$. По аналогии с предыдущими пунктами, ответ на эту задачу будет равен:

$\sum_{k=0}^{20} \binom{k+3-1}{3-1} = 1771$

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $1 \le x_1 \le x_2 \le x_3$

Пример классической задачи о целочисленном разбиении числа 20 на 3 положительных целых слагаемых.

$p_k(n) = p_3(20) = 33$

(f) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$

Сведём задачу к предыдущей: для этого возьмём $y_i = x_i + 1$, тогда $1 \le y_1 \le y_2 \le y_3$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 23$.

$p_k(n) = p_3(23) = 44$

(g) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 10$

```
count = 0
for i in range(0, 11):
    for j in range(i, 11):
        for k in range(j, 11):
            if i + j + k == 20:
                count += 1
print(count)
```

Число решений $= 14$

Все варианты:

$(0,10,10), (1,9,10), (2,9,9), (2,8,10), (3,8,9), (3,7,10), (4,8,8)$

$(4,7,9), (4,6,10), (5,7,8), (5,6,9), (5,5,10), (6,7,7), (6,6,8)$

(h) $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, where $-5 \le x_i \le 5$

```
count = 0
for i in range(-5, 6):
    for j in range(-5, 6):
        for k in range(-5, 6):
            if i + j + k == 5:
                count += 1
print(count)
```

Число решений $= 66$

Решим по-другому:

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$, where $-5 \le x_i \le 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \le x_i \le 10$

Будем перебирать x_1 от 0 до 10 включительно

Сумма x_2 и x_3 должна равняться соответственно $20 - x_1$. Теперь выберем $x_2 \in [10 - x_1; 10]$. Очевидно, что x_3 тогда имеет единственное возможное значение.

Таким образом, всё зависит от x_1

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{10}(k+1) = 66$

11. Consider three dice: one with 4 faces, one with 6 faces, and one with 8 faces. The faces are numbered
1 to 4, 1 to 6, and 1 to 8, respectively.

    Find the probability of rolling a total sum of 12.

    https://github.com/W-y-I-t/Discrete-Math/tree/main/Combinatorics

```
good = 0
bad = 0
for i in range(1, 5):
    for j in range(1, 7):
        for k in range(1, 9):
            if i + j + k == 12:
                good += 1
            else:
                bad += 1
print(good / (good + bad))
```

    Вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равно 12 составляет 0.109375

12. Let $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Define an interesting subset of A as a subset in which no two elements have a difference of 3. Determine the number of interesting subsets of A.

    https://github.com/W-y-I-t/Discrete-Math/tree/main/Combinatorics

```
good = 0
A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]
for i in range(0, 1 << 12):
    temp = []
    for j in range(0, 12):
        if i & (1 << j) != 0:
            temp.append(A[j])
    flag = True
    for j in temp:
```

```
        if (j - 3) in temp:
            flag = False
            break
    good += flag
print(good)
```

Число подмножеств множества A, таких что абсолютная разность любых двух чисел не равна 3, равно 512.

Решим задачу по-другому

Распределим числа от 1 до 12 на три группы в зависимости от остатка от деления на 3

$\{1, 4, 7, 10\} \ \% \ 3 = 1$

$\{2, 5, 8, 11\} \ \% \ 3 = 2$

$\{3, 6, 9, 12\} \ \% \ 3 = 0$

Возможные варианты (обозначим за 1 то, что берём; за 0 — то, что не берём в подмножество):

$(1000), (1001), (1010), (0100), (0101), (0010), (0001), (0000)$

Таким образом, имеем 8 возможных вариантов выбора для каждой из 3 групп чисел.

$\Rightarrow$ число вариантов $= 8^3 = 512$

13. Find the number of ways to arrange five people of distinct heights in a line such that no three consecutive individuals form a strictly ascending or descending height sequence.

https://github.com/W-y-I-t/Discrete-Math/tree/main/Combinatorics

```
from itertools import permutations

good = 0
A = [1, 2, 3, 4, 5]

perms = permutations(A)

for perm in perms:
    if ((perm[0] < perm[1] and perm[1] < perm[2]) or
        (perm[1] < perm[2] and perm[2] < perm[3]) or
        (perm[2] < perm[3] and perm[3] < perm[4]) or
        (perm[0] > perm[1] and perm[1] > perm[2]) or
        (perm[1] > perm[2] and perm[2] > perm[3]) or
        (perm[2] > perm[3] and perm[3] > perm[4])):
        continue
    good += 1

print(good)
```

Число расположений пяти людей таким образом, чтобы три человека подряд не имели строго возрастающий или строго убывающий рост, равно 32.

14. GLaDOS, the mastermind AI, is testing a new batch of first-year students in one of her infamous test chambers. She assigns each test subject a unique number from 1 to n, and then splits the students into k indistinguishable groups. Furthermore, one student in each group is assigned as the group leader. GLaDOS wants to know how many different ways she can arrange the students into groups and select group leaders, so that the students can navigate through the test chambers without getting lost. She calls this arrangement a "GLaDOS Partition".
For example, consider
$n = 7$ students and $k = 3$ groups. Here are three (out of many!) different partitions, with the group leaders underlined: $(\underline{1}|2\underline{5}67|3\underline{4})$, $(\underline{1}|25\underline{6}7|\underline{3}4)$, and $(\underline{1}|25\underline{6}7|3\underline{4})$.
Let the number of GLaDOS Partitions for n students into k groups, where each group has a designated leader, be denoted as
$G(n, k)$. Your task is to find a generic formula and/or recurrence relation for $G(n, k)$ and justify it.

Разобьём процесс получения значения $G(n, k)$ на две подзадачи:

- Выбрать k лидеров групп из n студентов. Это можно сделать $C_n^k = \binom{n}{k}$ способами.
- После выбора лидеров у нас остаётся $n - k$ студентов для распределения по k группам. Сведём эту задачу к другой: у нас есть k пронумерованных "коробок" (уникальный номер задаётся номером уже выбранного лидера) и $n - k$ также пронумерованных "шариков". Причём, в каждую "коробку" мы можем положить любое число "шариков". Таким образом, это задача balls and boxes для свободного случая $L \to L$. Число способов распределения — k^{n-k} (доказано ранее).

Таким образом, $G(n, k) = \dbinom{n}{k} \cdot k^{n-k}$