Set - Theory Homework. Dmitry Semenov, M3100, ISU 409537

1. **Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что $a \neq b$ – урэлементы.**

(a) $a \notin \{\{a\}, b\}$ - так как ***a* ≠ *{a}***

(b) $a \in \{a, \{b\}\}$

(c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

(d) $\{a\} \subset \{a, b\}$

(e) $\{a\} \nsubseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ - второе множество не содержит элемент ***a***, только ***{a}***

(f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$

(g) $\{\{a\}, b\} \nsubseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$ - второе множество не содержит элемент ***{a}***, только ***a*** и не содержит ***b***, только ***{b}***

(h) $\varnothing \notin \varnothing$ - по свойству пустого множества

(i) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(j) $\varnothing \not\subset \varnothing$ - по свойству пустого множества

(k) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(l) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$

(m) $\{\varnothing, \varnothing\} \not\subset \{\varnothing\}$ - так как левое множество равно правому

(n) $\{\{\varnothing\}\} \not\subset \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$ - так как левое множество равно правому

(o) $a \notin 2^{\{a\}}$ - так как ***a*** в левой части выражения - урэлемент, а не множество

(p) $2^{\{a, \varnothing\}} \subset 2^{\{a, b, \varnothing\}}$

(q) $\{a, b\} \nsubseteq 2^{\{a, b\}}$ - булеан множество не содержит урэлементы ***a*** и ***b*** в отдельности, лишь в виде множества ***{a, b}***

(r) $\{a, a\} \in 2^{\{a, a\}}$

(s) $\{\{a\}, \varnothing\} \subseteq 2^{\{a, a\}}$

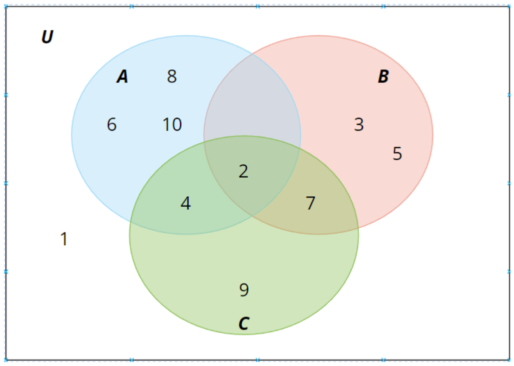
(t) $\{a, \{a\}\} \not\subset 2^{\{a, 2^{\{a\}}\}}$ - так как булеан множество не содержит в себе урэлемент ***a***

(u) $\{\{a, \{\varnothing\}\}\} \subseteq 2^{\{a, 2^{\varnothing}\}}$

2. Дано множество-универсум $\mathfrak{U} = \{1, 2, ..., 10\}$ и его подмножества:

$A = \{x | x\text{–чётное}\}$, $B = \{x | x\text{–простое}\}$, $C = \{2, 4, 7, 9\}$.

Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств,
отметьте на ней все элементы и найдите:



(a) $B\triangle(A\cap C)=\{2,3,5,7\}\triangle\{2,4\}=\{3,4,5,7\}$

(b) $\overline{B}\setminus(A\triangle C)=\{1,4,6,8,9,10\}\setminus\{6,7,8,9,10\}=\{1,4\}$

(c) $\overline{A\cup C}\cup(C\triangle B)=\{1,3,5\}\cup\{3,4,5,9\}=\{1,3,4,5,9\}$

(d) $|\{A\cup B\cup 2^{\varnothing}\cup 2^{\mathfrak{U}}\}|=|\{\{2,4,6,8,10\}\cup\{2,3,5,7\}\cup\{\varnothing\}\cup 2^{\mathfrak{U}}\}|=|\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}|=$ 1

(e) $(2^A\cap 2^C)\setminus 2^B$ = $\{\{\varnothing\},\{2\},\{4\},\{2,4\}\}\setminus 2^B=\{\{4\},\{2,4\}\}$

(f) $2^{B\cap C}\setminus\{2^{|2^{\{\varnothing\}}|},|\overline{B\cap C}|\}=2^{\{2,7\}}\setminus\{2^{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}},8\}=\{\varnothing,\{2\},\{7\},\{2,7\}\}$

3. Даны следующие множества:

- $A=\{1,2,4\}$
- $B=\{\square,black\_cat\}\cup\varnothing=\{\square,black\_cat\}$
- $C=2^{\varnothing}\setminus\{\varnothing\}=\varnothing$
- $D=\{black\_cat,|2^{\{\varnothing,C\}}|\}=\{black\_cat,2\}$
- $E=2^{A\setminus D}\cap 2^{\{|B\setminus D|\}}=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}\cap\{\varnothing,\{1\}\}=\{\varnothing,\{1\}\}$
- $F=2^{\{\{\varnothing,\varnothing\}\setminus\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\triangle C,\{\varnothing,C\},2^{\varnothing}\}}=2^{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$

(a) $A\triangle D=\{1,4,black\_cat\}$

(b) $E\triangle 2^C=\{\{1\}\}$

(c) $B\times E=\{\langle\square,\varnothing\rangle,\langle\square,\{1\}\rangle,\langle black\_cat,\varnothing\rangle,\langle black\_cat,\{1\}\rangle\}$

(d) $E\times 2^B=\{\varnothing,\{1\}\}\times\{\varnothing,\{\square\},\{black\_cat\},\{\square,black\_cat\}\}=$
$\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{\square\}\rangle,\langle\varnothing,\{black\_cat\}\rangle,\langle\varnothing,\{\square,black\_cat\}\rangle,$
$\langle\{1\},\varnothing\rangle,\langle\{1\},\{\square\}\rangle,\langle\{1\},\{black\_cat\}\rangle,\langle\{1\},\{\square,black\_cat\}\rangle\}$

(e) $D^{|C|}=D^{\varnothing}=\varnothing$

(f) $F^3=F\times F\times F=\{\langle\varnothing,\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\varnothing\rangle,$
$\langle\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\rangle,\langle\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\},\varnothing\rangle,\langle\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\}\rangle\}$

4. Найдите все множества A, B и C, которые удовлетворяют следующим условиям:

$A=\{1,|B|,|C|\}$

$B=\{2,|A|,|C|\}$

$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$

Заметим, что множество C всегда будет иметь мощность не больше 3, так как мощности множеств A, B могут принимать значения только от 1 до 3.

1) Пусть мощность множества A равна 3. Тогда $C = \{1, 2, 3, |B|\}$, его мощность будет равна 3 независимо от значения $|B|$. Отсюда понимаем: $B = \{2, 3, 3\} = \{2, 3\}$.

Получаем удовлетворяющее условию сочетание:
$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$

2) Пусть мощность множества A равна 2. Тогда $C = \{1, 2, 2, |B|\} = \{1, 2, |B|\}, B = \{2, 2, |C|\} = \{2, |C|\}$
.

Пусть мощность B равна 2; но тогда мощность C равна 2, а значит $B = \{2\}, |B| = 1$. Получаем противоречие.

Пусть мощность B равна 1. Тогда $C = 1, 2, |C| = 2, |B| = 1, A = 1, 1, 2 = 1, 2, |A| = 2$.

Получаем удовлетворяющее условию сочетание:

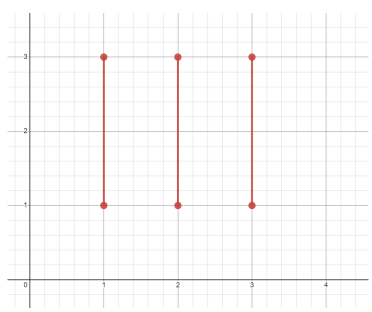
$A = \{1, 2\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}$

3) Пусть мощность множества A равна 1. Тогда $A = \{1, 1, 1\} = \{1\}, |B| = 1, C = 1$, что невозможно, так как мощность C не может быть меньше 2. Получаем противоречие.

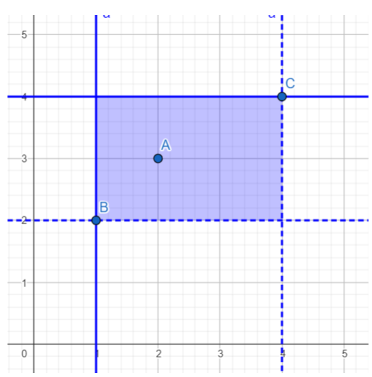
Таким образом, найденные выше 2 варианты единственны.

5. Изобразите на графиках $\mathbb{R}^2$ следующие множества точек:

(a) $\{1, 2, 3\} \times [1; 3]$

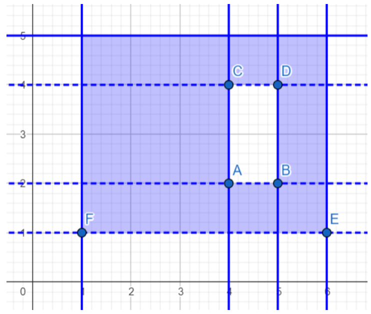


(b) $[1; 4) \times (2; 4] \backslash \{\langle 2, 3 \rangle\}$



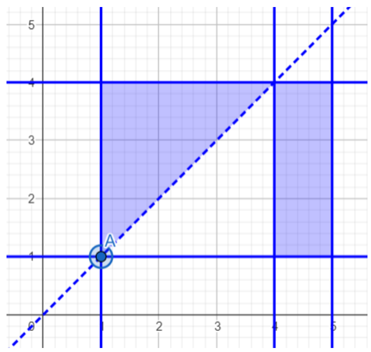
Множество точек декартового произведения - закрашенная область. A, B, C - выколотые точки

(c) $([1;6] \times (1;5]) \setminus ([4;5] \times (2;4))$



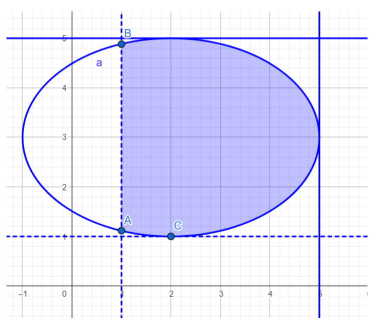
Множество точек декартового произведения - закрашенная область. A, B, C, D, E, F - выколотые точки

(d) $\{\langle x, y\rangle \in [1;5] \times [1;4] | (y > x) \vee (x \geqslant 4)\}$



Множество точек декартового произведения - закрашенная область, A - выколотая точка

(e) $\{\langle x, y\rangle \in (1;5]^2 | 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 \leqslant 36\}$



Множество точек декартового произведения - закрашенная область, A, B, C - выколотые точки

(f) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 | \exists z \in \mathbb{N} : x^3 + y^3 = z^3\}$ = $\varnothing$ - по Великой Теореме Ферма

6. Подробно докажите (или опровергните) следующие утверждения:

(a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : (x \in A) \Rightarrow (x \in B))$

2) $B \subseteq C \Leftrightarrow (\forall y : (y \in B) \Rightarrow (y \in C))$

3) Из 1 и 2 следует, что $(\forall x : (x \in A) \Rightarrow (x \in C)) \Leftrightarrow A \subseteq C$

(b) $|2^A| = 2^{|A|}$

1) $2^A -$ булеан множество - множество всех подмножеств множества A. Для каждого $B-$ подмножества A верно, что $\forall x : (x \in B) \wedge (x \in A)$.

2) Иначе говоря, каждый элемент из множества A может либо входить в подмножество B, либо нет (2 варианта): $\forall x : (x \in B) \Rightarrow (x \in A)$

3) Каждому подмножеству B = $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ поставим в соответствие набор длины n из нулей и единиц, в котором на местах с номерами $i_1, \ldots, i_m$ стоят единицы, а на остальных местах нули. Это соответствие является взаимно-однозначным.

4) Таким образом, мощность булеан множества определяется как произведение $|A|$ двоек, где $|A|-$ мощность исходного множества (по принципам комбинаторики):

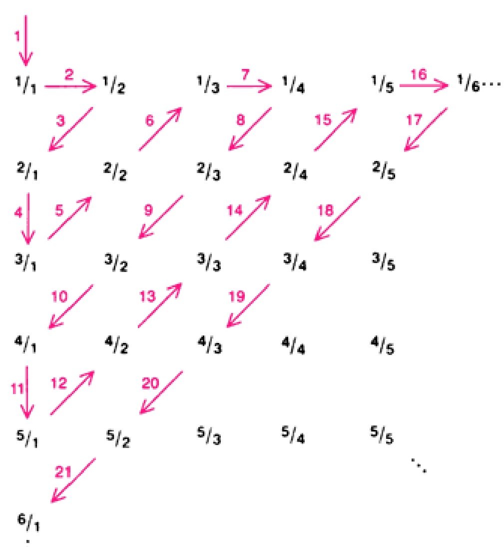
$|2^A| = 2_1 * 2_2 * ... * 2_{|A|} = 2^{|A|}$

(c) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётное.

Составим таблицу размером $|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{N}|$, где в i-й строчке j-ого столбца будет стоять число $\frac{i}{j}, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}$.

На каждой позиции нашей таблицы будет стоять несократимая дробь $\in \mathbb{Q}$, причём всякое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.

Будем нумеровать дроби начиная с левого верхнего угла, проходя по таблице линиями, параллельными побочной диагонали. Однозначное соответствие номеров и пар чисел достигается применением одной из функций сопряжения. Таким образом, каждое из рациональных чисел получит свой номер, а значит $\mathbb{Q} -$ счётно.



(d) $2^{\mathbb{N}} -$ несчётное множество.

1) Докажем, используя Диагональный метод Кантора.

2) $B^{\omega} = \{$строки из нулей и единиц бесконечной счётной длины$\}$, $\omega-$ супремум $\mathbb{N}$

3) Каждой строке из выше описанного множества однозначно соответствует какое - то подмножество из булеана натуральных чисел. Например, строке из всех нулей - пустое множество, и т.п.

4) Запишем строки друг под другом в виде матрицы

S_0	$\underline{0}$	0	0	0
S_1	1	$\underline{0}$	0	0
S_2	0	1	$\underline{0}$	0
S_3	0	0	1	$\underline{0}$
...	...	...	...	...

5) Начиная с $S_{0,0}$ будем выписывать инвертированные значения на позициях $S_{i,i}$

Таким образом, мы получим строку, отличающуюся от каждой из строк из B^{ω} хотя бы на один символ, т.е. не встречающуюся в этом множестве. Значит, пронумеровать булеан множество натуральных чисел. $2^{\mathbb{N}}$ — несчётное множество.