Recurrences and Generating Functions. Dmitry Semenov, M3100, ISU 409537

1. For each given recurrence relation, find the first five terms, derive the closed-form solution, and
   check it by substituting it back to the recurrence relation.

$(a)\ a_n = a_{n-1} + n \text{ with } a_0 = 2$

$a_0 = 2$

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = 8$

$a_4 = 12$

Closed-form solution:

$a_n = \frac{(n+1)\cdot n}{2} + 2$

Докажем корректность:

$a_n = a_{n-1} + n$

$\frac{(n+1)\cdot n}{2} + 2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2} + 2 + n$

$n^2 + n + 4 = n^2 - n + 4 + 2n$

$n^2 + n + 4 = n^2 + n + 4$

$(b)\ a_n = 2a_{n-1} + 2 \text{ with } a_0 = 1$

$a_0 = 1$

$a_1 = 4$

$a_2 = 10$

$a_3 = 22$

$a_4 = 46$

Closed-form solution:

$a_n = 3 \cdot 2^n - 2$

Докажем корректность:

$a_n = 2a_{n-1} + 2$

$3 \cdot 2^n - 2 = 2 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 2) + 2$

$3 \cdot 2^n - 2 = 6 \cdot 2^{n-1} - 4 + 2$

$3 \cdot 2^n - 2 = 3 \cdot 2^n - 2$

$(c)\ a_n = 3a_{n-1} + 2^n \text{ with } a_0 = 5$

$a_0 = 5$

$a_1 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

Closed-form solution:

$a_n = 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$

$a_2 = 3 \cdot 17 + 4 = 55$

$a_3 = 3 \cdot 55 + 8 = 173$

$a_4 = 3 \cdot 123 + 16 = 535$

Докажем корректность:

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

$3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n = 3 \cdot (3 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1}) + 2^{n-1}$

$3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$

$(d)\ a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} \text{ with } a_0 = 1, a_1 = 17$

$a_0 = 1$

$a_1 = 17$

$a_2 = 4 \cdot 17 + 5 \cdot 1 = 73$

$a_3 = 4 \cdot 73 + 5 \cdot 17 = 292 + 85 = 377$

$a_4 = 4 \cdot 377 + 5 \cdot 73 = 1873$

Характеристическое уравнение:

$r^2 = 4r + 5$

$r^2 - 4r - 5 = 0$

$r_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \{-1, 5\}$

$a^n = a(-1)^n + b(5)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = a(5)^0 + b(-1)^0 \\ a_1 = 17 = a(5)^1 + b(-1)^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 17 = 5a - b \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = -2$$

Closed-form solution:

$a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$

Докажем корректность:

$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$

$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 4(3 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}) + 5(3 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot (-1)^{n-2})$

$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 12 \cdot 5^{n-1} - 8 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1} + 10 \cdot (-1)^{n-1}$

$3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$

$(e)\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ with $a_0 = 3, a_1 = 11$

$a_0 = 3$

$a_1 = 11$

$a_2 = 4 \cdot 11 - 4 \cdot 3 = 32$

$a_3 = 4 \cdot 32 - 4 \cdot 11 = 84$

$a_4 = 4 \cdot 84 - 4 \cdot 32 = 208$

Характеристическое уравнение:

$r^2 = 4r - 4$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$r_{1/2} = 2$

$a^n = (a + bn) \cdot 2^n$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = (a + b \cdot 0)2^0 \\ a_1 = 11 = (a + b \cdot 1)2^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a \\ a_1 = 11 = 2a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = \frac{5}{2}$$

Closed-form solution:

$a^n = (3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n$

Докажем корректность:

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

$(3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n = 4((3 + \frac{5}{2}(n-1)) \cdot 2^{n-1}) - 4((3 + \frac{5}{2}(n-2)) \cdot 2^{n-2})$

$(3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n = 2(3 + \frac{5}{2}(n-1)) \cdot 2^n - (3 + \frac{5}{2}(n-2)) \cdot 2^n$

$(3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n = (6 + \frac{5}{2}(n-1) - 3 - \frac{5}{2}(n-2)) \cdot 2^n$

$(3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n = (3 + \frac{5}{2}n) \cdot 2^n$

$(f)\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ with $a_{0,1,2} = 3, 2, 6$

$a_0 = 3$

$a_1 = 2$

$a_2 = 6$

$a_3 = 8$

$a_4 = 18$

Характеристическое уравнение:

$r^3 = 2r^2 + r - 2r$

$r^3 - 2r^2 - r + 2r = 0$

$r^2(r-2) - (r-2) = 0$

$(r-2)(r-1)(r+1) = 0$

$r_{1,2,3} = \{-1, 1, 2\}$

$a_n = a(-1)^n + b(1)^n + c(2)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a(-1)^0 + b(1)^0 + c(2)^0 \\ a_1 = 2 = a(-1)^1 + b(1)^1 + c(2)^1 \\ a_2 = 6 = a(-1)^2 + b(1)^2 + c(2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a + b + c \\ a_1 = 2 = -a + b + 2c \\ a_2 = 6 = a + b + 4c \end{cases}$$

$8 = 2b + 6c \Rightarrow b = 4 - 3c$

$3 = a + 4 - 3c + c \Rightarrow a = 2c - 1$

$6 = 2c - 1 + 4 - 3c + 4c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1$

Closed-form solution:

$a_n = (-1)^n + 1^n + 2^n = (-1)^n + 2^n + 1$

Докажем корректность:

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$

$(-1)^n + 2^n + 1 = 2((-1)^{n-1} + 2^{n-1} + 1) + ((-1)^{n-2} + 2^{n-2} + 1) - 2((-1)^{n-3} + 2^{n-3} + 1)$

$(-1)^n + 2^n + 1 = 2(-1)^{n-1} + 2^n + 2 + (-1)^{n-2} + 2^{n-2} + 1 - 2(-1)^{n-3} - 2^{n-2} - 2$

$(-1)^n + 2^n + 1 = (-1)^{n-2} + 2^n + 1$

$(-1)^n + 2^n + 1 = (-1)^n + 2^n + 1$

2. Solve the following recurrences by applying the Master theorem. For the cases where the Master theorem does not apply, use the Akra–Bazzi method. In cases where neither of these two theorems apply, explain why and solve the recurrence relation by closely examining the recursion tree. Solutions must be in the form $T(n) \in \Theta(\ldots)$.

$(a)\ T(n) = 2T(n/2) + n$

$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$
$a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) > 0$

$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n$

$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_2 2 = 1$

$f(n) \in \Theta(n^{c_{\text{crit}}} \log^k n),\ k = 0 > -1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{\text{crit}}} \log^{k+1} n)$

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

$(b)\ T(n) = T(3n/4) + T(n/4) + n$

$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i n + h_i(n))$
$a_i > 0,\ 0 < b_i < 1, f(n) \in O(n^c),\ h_i(n) \in \Theta(\frac{n}{log^2 n})$

Характеристическое уравнение: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

$(\frac{1}{4})^p + (\frac{3}{4})^p = 1$

$\Rightarrow p = 1$

$T(n) \in \Theta(n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt))$

$1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt = 1 + \int_1^n \frac{t}{t^2} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n$

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

$(c)\ T(n) = 3T(n/2) + n$

$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$
$a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) > 0$

$a = 3,\ b = 2,\ f(n) = n$

$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_2 3 > 1$

$f(n) \in O(n^c), c < c_{\text{crit}},\ c = 1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{\text{crit}}})$

$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$

$(d)\ T(n) = 2T(n/2) + n/logn$

$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$
$a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) > 0$

$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = \frac{n}{\log n}$

$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_2 2 = 1$

$f(n) \in \Theta(n^{c_{\text{crit}}} \log^k n),\ k = -1 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{c_{\text{crit}}} \log \log n)$

$T(n) \in \Theta(n \log \log n)$

$(e)\ T(n) = 6T(n/3) + n^2 logn$

$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$
$a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) > 0$

$a = 6,\ b = 3,\ f(n) = \frac{n^2}{\log n}$

$c_{\text{crit}} = \log_b a = \log_3 6 = 1.63$

$f(n) \in \Omega(n^c),\ 2 = c > c_{\text{crit}} = 1.63 \Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

$(f)\ T(n) = T(3n/4) + nlogn$

$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i n + h_i(n))$
$a_i > 0,\ 0 < b_i < 1, f(n) \in O(n^c),\ h_i(n) \in \Theta(\frac{n}{log^2 n})$

Характеристическое уравнение: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

$(\frac{3}{4})^p = 1$

$\Rightarrow p = 0$

$T(n) \in \Theta(n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt))$

$1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt = 1 + \int_1^n \frac{t \log t}{t} dt = 1 + \int_1^n \log t dt = 1 + n \ln n - n$

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

$(g)\ T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$

Вследствие округления вверх и вниз, невозможно определить коэффициенты для Мастер Теоремы и метода Аккра-Бацци. Воспользуемся анализом дерева рекурсии.

1. На глубине 0 у нас есть один вызов $T(n)$
2. На глубине 1 у нас есть два вызова: $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ и $T(\lceil n/2 \rceil)$
3. На глубине 2 у нас будет четыре вызова: $T(\lfloor n/4 \rfloor)$, $T(\lceil n/4 \rceil)$, $T(\lfloor n/4 \rfloor)$, и $T(\lceil n/4 \rceil)$

На уровне i у нас 2^i вызовов, каждый из которых $T(\lfloor n/2^i \rfloor)$ или $T(\lceil n/2^i \rceil)$

Суммарное время на уровне i :

$$2^i \cdot O(n/2^i) = O(n)$$

Глубина дерева рекурсии равна $\log_2 n$

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

$(h)\ T(n) = T(n/2) + T(n/4) + 1$

$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i n + h_i(n))$
$a_i > 0,\ 0 < b_i < 1, f(n) \in O(n^c),\ h_i(n) \in \Theta(\frac{n}{log^2 n})$

Характеристическое уравнение: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{4})^p = 1$

$\Rightarrow p = \log_2 \varphi$ (можно свести к уравнению $x^2 + x - 1 = 0$)

$T(n) \in \Theta(n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt))$

$1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^{\log_2 \varphi + 1}} dt = 1 - \frac{1}{\log_2 \varphi} + \frac{n^{-\log_2 \varphi}}{\log_2 \varphi}$

$n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt) = n^{\log_2 \varphi} - \frac{n^{\log_2 \varphi}}{\log_2 \varphi} + \frac{1}{\log_2 \varphi}$

$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 \varphi} - \frac{n^{\log_2 \varphi}}{\log_2 \varphi} + \frac{1}{\log_2 \varphi})$

$(i)\ T(n) = T(n/2) + T(n/3) + T(n/6) + n$

$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i n + h_i(n))$
$a_i > 0,\ 0 < b_i < 1, f(n) \in O(n^c),\ h_i(n) \in \Theta(\frac{n}{log^2 n})$

Характеристическое уравнение: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1}{3})^p + (\frac{1}{6})^p = 1$

$\Rightarrow p = 1$

$T(n) \in \Theta(n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt))$

$1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt = 1 + \int_1^n \frac{n}{n^2} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n$

$n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt) = n(1 + \ln n) = n + n \ln n$

$T(n) \in \Theta(n \log n)$

$(j)\ T(n) = 2T(n/3) + 2T(2n/3) + n$

$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i n + h_i(n))$
$a_i > 0,\ 0 < b_i < 1, f(n) \in O(n^c),\ h_i(n) \in \Theta(\frac{n}{log^2 n})$

Характеристическое уравнение: $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

$2(\frac{1}{3})^p + 2(\frac{2}{3})^p = 1$

$\Rightarrow p = 2.2$

$T(n) \in \Theta(n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt))$

$1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt = 1 + \int_1^n \frac{n}{n^{2.2}} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{n^{1.2}} dt = 6 - 5n^{-0.2}$

$n^p(1 + \int_1^n \frac{f(t)}{t^{p+1}} dt) = n^{2.2}(6 - 5n^{-0.2}) = 6n^{2.2} - 5n^2$

$T(n) = \Theta(n^{2.2})$

$(k)\ T(n) = \sqrt{2n}T(\sqrt{2n}) + \sqrt{n}$

Сделаем замену переменной n

$n = 2^{m+1}$

$\sqrt{2n} = 2^{m/2+1}$

$\sqrt{n} = 2^{m/2}$

Перейдём к новой функции

$S(m) = \frac{T(2^{m+1})}{2^{m+1}} = \frac{T(n)}{n}$

$T(n) = 2^{(m+1)/2} T(2^{(m+1)/2}) + 2^{m/2}$

$$S(m) = \frac{T(2^{m+1})}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)/2}T(2^{(m+1)/2})+2^{m/2}}{2^{m+1}}$$

$$S(m) = \frac{2^{(m+1)/2}T(2^{(m+1)/2})}{2^{m+1}} + \frac{2^{m/2}}{2^{m+1}}$$

$$S(m) = \frac{T(2^{(m+1)/2})}{2^{(m+1)/2}} + \frac{1}{2^{m/2+1}} = 2S\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{1}{2^{m/2+1}}$$

По Мастер теореме:

$$T(n)/n \in \Theta(\log_2 n - 1)$$

$$T(n) \in \Theta(n \log n)$$

$(l)\ T(n) = \sqrt{2n}T(\sqrt{2n}) + n$

Аналогично предыдущему пункту

$$n = 2^{m+1}$$

$$\sqrt{2n} = 2^{(m+1)/2}$$

$$n = 2^{m+1}$$

$$S(m) = \frac{T(2^{m+1})}{2^{m+1}}$$

$$T(n) = 2^{(m+1)/2}T(2^{(m+1)/2}) + 2^{m+1}$$

$$S(m) = \frac{T(2^{m+1})}{2^{m+1}} = \frac{2^{(m+1)/2}T(2^{(m+1)/2})+2^{m+1}}{2^{m+1}}$$

$$S(m) = \frac{2^{(m+1)/2}T(2^{(m+1)/2})}{2^{m+1}} + 1$$

$$S(m) = \frac{T(2^{(m+1)/2})}{2^{(m+1)/2}} + 1$$

$$2S\left(\frac{m+1}{2}\right) + 1$$

По Мастер теореме:

$$T(n)/n \in \Theta(\log_2 n - 1)$$

$$T(n) \in \Theta(n \log n)$$

3. Consider a recurrence relation $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ with $a_0 = a_1 = 2$. Solve it (i.e. find a closed formula) and show how it can be used to estimate the value of $\sqrt{3}$ (hint: observe $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$). After that, devise an algorithm for constructing a recurrence relation with integer coefficients and initial conditions that can be used to estimate the square root $\sqrt{k}$ of a given integer k.

Решим характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$r^2 = 2r + 2$

$r^2 - 2r - 2 = 0$

$r_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$a_n = a(1+\sqrt{3})^n + b(1-\sqrt{3})^n$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = a(1+\sqrt{3})^0 + b(1-\sqrt{3})^0 \\ a_1 = 2 = a(1+\sqrt{3})^1 + b(1-\sqrt{3})^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = a + b \\ a_1 = 2 = a + a\sqrt{3} + b - b\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

Closed-form solution:

$a_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$

Чтобы оценить значение корня из трёх, посчитаем следующий предел

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^{n-1} + (1-\sqrt{3})^{n-1}}$

$|1-\sqrt{3}| < 1$, $(1-\sqrt{3})^n$ стремится к нулю с увеличением n

$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^{n-1}} = 1 + \sqrt{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1$

Построим рекуррентное соотношение для оценки произвольного $\sqrt{k}$

- $b_n = Ab_{n-1} + Bb_{n-2}$
- Для простоты возьмём начальные условия $b_0 = b_1 = 1$

- Характеристическое уравнение $r^2 = Ar + B$ должно иметь корни $r = 1 \pm \sqrt{k}$

  $(r - (1 + \sqrt{k}))(r - (1 - \sqrt{k})) = 0$

  $r^2 - r(1 + \sqrt{k}) - r(1 - \sqrt{k}) + (1 + \sqrt{k})(1 - \sqrt{k}) = 0$

  $r^2 - r - \sqrt{k} - r + \sqrt{k} + 1 - k = 0$

  $r^2 - 2r + 1 - k = 0$

$\Rightarrow A = 2, B = k - 1$

$b_n = 2b_{n-1} + (k-1)b_{n-2}$

4. Find a closed formula for the $n - th$ term of the sequence with generating function $\frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$

Разделим производящую функцию $G(x) = \frac{3x}{1-4x} + \frac{1}{1-x}$ на части

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

   $\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

2. $\frac{3x}{1-4x} = 3x \cdot \frac{1}{1-4x} = 3x \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n = 3x \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

   Сдвигаем индекс на 1:

   $= 3 \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{n+1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n$

   Реиндексируем сумму:

   $= 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n$

Теперь объединим два ряда:

$G(x) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$G(x) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$G(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 4^{n-1} + 1) x^n$

Отсюда можно перейти к closed-form solution для последовательности a_n

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 3 \cdot 4^{n-1} + 1 & \text{если } n \geq 1. \end{cases}$$

5. Given the generating function $G(x)=\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}$, decompose it into partial fractions and find the sequence that it represents

Начнем с разложения данной производящей функции на простые дроби:

$\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}$

Чтобы найти коэффициенты A, B и C, приравняем числители:

$5x^2+2x+1=A(1-x)^2+B(1-x)+C$

$5x^2+2x+1=A(1-2x+x^2)+B(1-x)+C$

$=A(x^2-2x+1)+B(1-x)+C$

$=Ax^2-2Ax+A+B-Bx+C$

$=Ax^2+(-2A-B)x+(A+B+C)$

- Коэффициент при x^2: $A=5$
- Коэффициент при x : $-2A-B=2 \Rightarrow -2(5)-B=2 \Rightarrow -10-B=2 \Rightarrow B=-12$
- Свободный член : $A+B+C=1 \Rightarrow 5-12+C=1 \Rightarrow -7+C=1 \Rightarrow C=8$

Таким образом, разложение на простые дроби:

$\frac{5x^2+2x+1}{(1-x)^3}=\frac{5}{1-x}-\frac{12}{(1-x)^2}+\frac{8}{(1-x)^3}$

Теперь используем известные разложения в ряды для $\frac{1}{(1-x)^k}$:

$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n$

- $\frac{5}{1-x}=5\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}5x^n$
- $\frac{-12}{(1-x)^2}=-12\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$
- $\frac{8}{(1-x)^3}=8\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$

$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}5x^n-12\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+8\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$

Перейдём у последовательности:

$a_n=5-12(n+1)+8\binom{n+2}{2}$

$a_n = 5 - 12(n+1) + 8 \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$= 5 - 12(n+1) + 4(n+2)(n+1)$

$= 5 - 12n - 12 + 4(n^2 + 3n + 2)$

$= 5 - 12n - 12 + 4n^2 + 12n + 8$

$= 4n^2 + 1$

Таким образом, последовательность, представленная производящей функцией $G(x)$:

$a_n = 4n^2 + 1$

6. Pell–Lucas numbers are defined by $Q_0 = Q_1 = 2$ and $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ for $n \geq 2$. Derive the corresponding generating function and find a closed formula for the $n-$th Pell–Lucas number

$G(x)$ — порождающая функция для чисел Пелла–Лукаса $\{Q_n\}$:

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$

Используя рекуррентное соотношение, можно выразить $G(x)$ через себя:

$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Умножим обе стороны на x^n и просуммируем для всех $n \geq 2$:

$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2Q_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2} x^n$

Переиндексируем суммы в правой части:

$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$

$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n = 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n - Q_0\right) + x^2 G(x)$

$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n = 2x \left(G(x) - Q_0\right) + x^2 G(x)$

Так как $Q_0 = Q_1 = 2$:

$G(x) = Q_0 + Q_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n$

$G(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n x^n$

Подставим выражение для ряда:

$G(x) = 2 + 2x + 2x(G(x) - 2) + x^2 G(x)$

$G(x) = 2 + 2x + 2xG(x) - 4x + x^2 G(x)$

$G(x) = 2 - 2x + 2xG(x) + x^2 G(x)$

$G(x) - 2xG(x) - x^2 G(x) = 2 - 2x$

(

$1 - 2x - x^2)G(x) = 2 - 2x$

$G(x) = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$

Характеристическое уравнение:

$r^2 = 2r + 1$

$r^2 - 2r - 1 = 0$

$r_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$a_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = a(1+\sqrt{2})^0 + b(1-\sqrt{2})^0 \\ a_1 = 2 = a(1+\sqrt{2})^1 + b(1-\sqrt{2})^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = a + b \\ a_1 = 2 = a + a\sqrt{2} + b - b\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

$a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$

7. For each given recurrence relation, derive the corresponding generating function and find a closed formula for the $n-$th term of the sequence

$(a)\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ with $a_0 = 3, a_1 = 5$

Найдём производящую функцию

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

$G(x) - a_0 - a_1 x = 2x(G(x) - a_0) - x^2 G(x)$

$G(x) - 3 - 5x = 2xG(x) - 6x - x^2 G(x)$

$G(x) - 3 - 5x = (2x - x^2)G(x) - 6x$

$G(x) - (2x - x^2)G(x) = 3 + 5x - 6x$

$G(x)(1 - 2x + x^2) = 3 - x$

$G(x) = \frac{3-x}{1-2x+x^2}$

Найдём closed-form solution:

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$

$r_{1/2} = 1$

$a^n = (a + bn) \cdot 1^n$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = (a + b \cdot 0) \cdot 1^0 \\ a_1 = 5 = (a + b \cdot 1) \cdot 1^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 3 = a \\ a_1 = 5 = a + 2 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 2$$

$a^n = 3 + 2n$

$(b)\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ with $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 5$

Найдём производящую функцию:

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n$

$G(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 = x(G(x) - a_0) + x^2(G(x) - a_0 - a_1 x) - x^3 G(x)$

$G(x) - 1 - x - 5x^2 = xG(x) - x + x^2 G(x) - x^2 - x^3 G(x)$

$G(x) - xG(x) - x^2 G(x) + x^3 G(x) = 1 - x + 5x^2 - x - x^2$

$(1 - x - x^2 + x^3)G(x) = 1 - 2x + 4x^2$

$G(x) = \frac{1-2x+4x^2}{1-x-x^2+x^3}$

Найдём closed-form solution:

$r^3 = r^2 + r - 1$

$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$

$r^2(r-1) - (r-1) = 0$

$(r-1)^2(r+1) = 0$

$r_{1/2} = 1, r_3 = -1$

$a_n = a(1)^n + b \cdot n(1)^n + c(-1)^n = a + bn + c(-1)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = a + c \\ a_1 = 1 = a + b - c \;\; \Rightarrow a = 0,\ b = 2,\ c = 1 \\ a_2 = 5 = a + 2b + c \end{cases}$$

$a_n = 2n + (-1)^n$

$(c)\ a_n = a_{n-1} + n \text{ with } a_0 = 0$

Найдём производящую функцию:

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

$G(x) - a_0 = xG(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

$G(x) = xG(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

$G(x) = xG(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$

$G(x)(1-x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

$G(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$

Найдём closed-form solution:

Заметим, что перед нами сумма натуральных чисел от 0 до n

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$(d)\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n \text{ with } a_0 = 2, a_1 = 1$

Найдём производящую функцию:

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$

$G(x) - a_0 - a_1 x = x(G(x) - a_0) + 2x^2 G(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (2x)^n$

$G(x) - 2 - x = xG(x) - 2x + 2x^2 G(x) + \frac{4x^2}{1-2x}$

$G(x) - xG(x) - 2x^2 G(x) = 2 - x - 2x + \frac{4x^2}{1-2x}$

$G(x)(1 - x - 2x^2) = 2 - 3x + \frac{4x^2}{1-2x}$

$G(x) = \frac{2-3x+\frac{4x^2}{1-2x}}{1-x-2x^2}$

Найдём closed-form solution:

$r^2 = r + 2$

$r^2 - r - 2 = 0$

$r_1 = 2,\ r_2 = -1$

$a_n = a \cdot 2^n + b \cdot (-1)^n$

Будем искать свободный член 2^n в виде $a'_n = An2^n$

$$An2^n = A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} + 2^n$$

$$An2^n = A(n-1)2^n + 2A(n-2)2^n + 2^n$$

$$An2^n = A(n-1)2^n + 2A(n-2)2^n + 2^n$$

$$An = A(n-1) + 2A(n-2) + 1$$

$$An = An - A + 2A(n-2) + 1$$

$$An = An - A + 2An - 4A + 1$$

$$0 = A - 4A + 1$$

$$0 = -3A + 1$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$a'_n = \frac{1}{3}n2^n$$
$$a_n = a2^n + b(-1)^n + \frac{1}{3}n2^n$$

$$a_n = 2^n\left(a + \frac{1}{3}n\right) + b(-1)^n$$
$$\begin{cases} a_0 = 2 = a + b \\ a_1 = 1 = 2a + \frac{2}{3} - b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{9},\ b = \frac{11}{9}$$
$$a_n = 2^n\left(\frac{7}{9} + \frac{1}{3}n\right) + \frac{11}{9}(-1)^n$$

8. Find the number of non-negative integer solutions to the Diophantine equation $3x + 5y = 100$ using generating functions

Запишем порождающую функцию для каждого из членов уравнения.

Порождающая функция для $3x$ выглядит так:

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^{3x} = 1 + t^3 + t^6 + t^9 + \dots = \frac{1}{1-t^3}$$

Порождающая функция для $5y$ выглядит так:

$\sum_{y=0}^{\infty} t^{5y} = 1 + t^5 + t^{10} + t^{15} + \dots = \frac{1}{1-t^5}$

Чтобы найти количество решений уравнения $3x + 5y = 100$, нам нужно найти коэффициент при t^{100} в произведении этих порождающих функций:

$\frac{1}{(1-t^3)(1-t^5)}$

$\frac{1}{(1-t^3)} = \sum_{m=0}^{\infty} t^{3m}$

$\frac{1}{(1-t^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{5n}$

Их произведение:

$\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{3m}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{5n}\right)$

Нам нужно найти коэффициент при t^{100} в этом произведении, что эквивалентно нахождению числа пар (m, n), таких что $3m + 5n = 100$

Мы можем перебрать возможные значения n и решить уравнение для m:

$m = \frac{100-5n}{3}$

Чтобы m было целым числом, $100 - 5n$ должно делиться на 3:

$$100 - 5n \equiv 0 \pmod 3$$

$$100 \equiv 1 \pmod 3, \quad 5 \equiv 2 \pmod 3$$

$$1 - 2n \equiv 0 \pmod 3 \implies 2n \equiv 1 \pmod 3 \implies n \equiv 2 \pmod 3$$

Таким образом, n должно быть вида $n = 3k + 2$ для некоторого целого k

Теперь найдем диапазон значений k:

$$0 \le n \le 20 \implies 0 \le 3k + 2 \le 20 \implies -2 \le 3k \le 18 \implies 0 \le k \le 6$$

Таким образом, k может принимать значения от 0 до 6, что дает нам 7 возможных значений для n. Для каждого из этих значений n, m будет целым числом.

Количество неотрицательных целых решений уравнения $3x + 5y = 100$ равно 7

9. Consider a $2n-$digit ticket number to be “lucky” if the sum of its first n digits is equal to the sum of its last n digits. Each digit (including the first one!) in a number can take value from 0 to 9. For example, a $6-$digit ticket 345264 is lucky since $3+4+5=2+6+4$

(a) Find the number of lucky $6-$digit and $8-$digit tickets

Код для решения этой задачи:

```
import numpy as np


def count_lucky_tickets(digits):
    max_sum = digits * 9
    ways = np.zeros(max_sum + 1, dtype=int)
    ways[0] = 1

    for _ in range(digits):
        new_ways = np.zeros(max_sum + 1, dtype=int)
        for i in range(10):
            new_ways[i:] += ways[:-i or None]
        ways = new_ways

    return np.sum(ways ** 2)


lucky_6_digit_tickets = count_lucky_tickets(3)
lucky_8_digit_tickets = count_lucky_tickets(4)
print(lucky_6_digit_tickets)
print(lucky_8_digit_tickets)
```

Число счастливых билетов из 6 цифр: 55252

Число счастливых билетов из 8 цифр: 4816030

(b) Find the generating function for the number of $2n-$digit lucky tickets

Для $2n-$значных билетов $a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_n$ условие счастливого билета:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

Производящая функция для суммы n цифр:

$$G_n(x) = (C(x))^n = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^n$$

Производящая функция для числа счастливых $2n-$значных билетов:

$$G_{2n}(x) = (G_n(x))^2 = \left(\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{2n}$$

Общее количество счастливых билетов равно коэффициенту при x^{2n} в производящей функции

(c) Find a closed formula for the number of $2n-$digit lucky tickets

$$G_{2n}(x) = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{2n}$$

Рассмотрим $\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{2n}$ как произведение биномиальных коэффициентов:

$$G_{2n}(x) = \left(\sum_{k=0}^{9} \binom{2n}{k} x^k\right)^{2n}$$

Для нахождения $a_{2n}(k)$ для $G_{2n}(x)$, определим коэффициенты при x^k в разложении

Нам нужно суммировать произведения коэффициентов при x^k для каждого значения k:

$$a_{2n}(k) = \sum_{k=0}^{9} \binom{2n}{k}^2$$

Каждое $a_{2n}(k)$ может быть выражено через сумму биномиальных коэффициентов с помощью теоремы о числе решений линейного диофантова уравнения. Используем это, чтобы выразить значение $a_{2n}(k)$ как сумму квадратов этих биномиальных коэффициентов.

$$a_{2n}(k) = \sum_{k=0}^{9n} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor k/10 \rfloor} (-1)^i \binom{2n}{i} \binom{2n+k-10i-1}{2n-1}\right)^2$$

Таким образом, closed-form для числа счастливых $2n-$значных билетов:

$$a_{2n} = \sum_{k=0}^{9n} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor k/10 \rfloor} (-1)^i \binom{2n}{i} \binom{2n+k-10i-1}{2n-1} \right)^2$$