Linear Algebra

——Simple Note

Wu Yutian

2021.10.9

前言

在继微积分的简明笔记之后，同时也开始了线性代数的重新学习，并为后面的矩阵论的学习打好基础。

在线性代数的学习过程中主要参考了《Linear Algebra Done Right》这本书，另外同时也参考了它的中文版《线性代数应该这么学》，这本书不同于国内的教材，从向量空间的角度阐述了整个线性代数的知识体系，被国外很多学校作为教材，是一本很经典的书。另外还有一本和它名字很像的书，叫做《Linear Algebra Done Wrong》同样也是被广泛推荐的一本书，后续应该也会看一下，再对这份笔记进行补充。但是由于我手上有《Linear Algebra Done Right》的中文版，因此就从这本书开始看起，笔记的体系结构也是以此书为依据的。

Wu Yutian

2021.10.9

目录

Chapter 1

Vector Space

1.1 R^n与C^n

组（List）的概念：长度为 n 的组是 n 个有顺序的元素，用逗号隔开并且两端用括号包起来。（组有时也被称为是向量）

组与集合的不同：组中的元素是有顺序的并且允许重复，而集合中没有顺序，并且元素不能重复。

定义 0：0 表示长度为 n 且所有坐标都是 0 的组，即：

$$0 = (0, 0, ..., 0)$$

补充证明存在且唯一的方法：先证明存在一个这样的元素 a_1（存在性），然后再假设存在另一个元素 a_2 推导 $a_2 = a_1$（唯一性）。

1.2 向量空间的定义

在向量空间中定义加法和标量乘法：向量空间 V 在加法和标量乘法下封闭。

定义 1.2.1. *向量空间的定义：向量空间就是带有加法和标量乘法的集合 V，满足如下性质（拆分开一共 8 条）：*

交换性（commutativity）

$$\text{对所有 } u, v \in V\text{，都有 } u + v = v + u;$$

结合性 (associativity)

$$\text{对所有 } u, v, w \in V \text{ 都有 } (u + v) + w = u + (v + w);$$
$$\text{对所有 } v \in V \text{ 和 } a, b \in F \text{ 都有 } (ab)v = a(bv);$$

加法单位元 (additive identity)

$$\text{存在元素 } 0 \in V \text{ 使得对所有的 } v \in V \text{ 都有 } v + 0 = v;$$

加法逆元 (additive inverse)

$$\text{对每个 } v \in V \text{ 都存在 } w \in V \text{ 使得 } v + w = 0;$$

乘法单位元 (numltiplicative indentity)

$$\text{对所有 } v \in V \text{ 都有 } 1v = v;$$

分配性质 (distributive properties)

$$\text{对所有 } a \in F \text{ 和 } u, v \in V \text{ 都有 } a(u + v) = au + av;$$
$$\text{对所有 } a, b \in F \text{ 和 } v \in V \text{ 都有 } (a + b)v = av + bv;$$

注意：因为向量之间没有乘法，所以没有乘法逆元的性质。

定义 1.2.2. 实向量空间和复向量空间：

$\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间，则 $\boldsymbol{V}$ 为实向量空间；

$\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间，则 $\boldsymbol{V}$ 为复向量空间。

两个命题：

- 1、**R** 是 **R** 上的向量空间。（真）
- 2、**R** 是 **C** 上的向量空间。（假）

对于这两个命题的说法，前面的 **R** 表示的是在其中取向量，后面的 **R** 和 **C** 表示的是在其中取标量。这样的话，对于命题 2，就意味着：需要有对于 $\forall r \in \mathbf{R}$,$\forall z \in \mathbf{C}$，都有 $rz \in \mathbf{R}$，这显然不成立，也就是说命题 2 不符合封闭性！

空集不是向量空间，空集中没有加法单位元，因此最小的向量空间是：0。

1.3 (补充) 数域的定义

定义 1.3.1. 数域 $\boldsymbol{F}$ 是一个集合，拥有两种运算：加法、乘法。

加法：对于 $\forall x, y \in \boldsymbol{F}$, $\exists$ 唯一的 $x+y \in \boldsymbol{F}$ 与之对应。

乘法：对于 $\forall x, y \in \boldsymbol{F}$, $\exists$ 唯一的 $xy \in \boldsymbol{F}$ 与之对应。

对于定义中加法的要求：（类似于向量空间中的要求）

- 1、$x+y=y+x$（交换律）
- 2、$(x+y)+z=x+(y+z)$（结合律）
- 3、$\exists 0 \in \mathbf{F}$ 使得 $x+0=x$ 对 $\forall x \in \mathbf{F}$ 成立。
- 4、对于 $\forall x \in \mathbf{F}, \exists(-x) \in \mathbf{F}$ 使得 $x+(-x)=0$。

对于定义中乘法的要求：

- 1、$xy=yx$（交换律）（向量空间中没有乘法交换律）
- 2、$(xy)z=x(yz)$（结合律）
- 3、$\exists 1 \in \mathbf{F}$，$1 \neq 0$，使得 $1x=x$ 对 $\forall x \in \mathbf{F}$ 成立。（乘法单位元）
- 4、对于 $x \in \mathbf{F}, x \neq 0$，$\exists(\frac{1}{x}) \in \mathbf{F}$ 使得 $x(\frac{1}{x})=1$。（乘法逆元）（向量空间中没有乘法逆元）
-

乘法分配律：

- 只有一条：$x(y+z)=xy+xz$

1.4 子空间

定义 1.4.1. 如果 $\boldsymbol{V}$ 的子集 $\boldsymbol{U}$（采用与 $\boldsymbol{V}$ 相同的加法和标量乘法）也是向量空间，则称 $\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的子空间。