函数 Function

目录(Catalog)

- (1) 多项式 : 能够表示为变量的加减和乘.
  - (01) 线性函数 : 图像为直线的函数, 可分为 2 类:
    - (a) 零次函数（常数函数）: 零次多项式, 图像为水平线.
    - (b) 一次函数 : 一次函数, 图像为斜直线.
  - (02) 二次函数 : 二次多项式, 图像为抛物线.
  - (03) 三次函数
  - (04) 四次函数
  - (05) 五次函数
  - (05) 六次函数
- (2) 有理函数 : 两个多项式函数的比.
- (3) 开方 :
  - (01) 平方根
  - (02) 立方根

- 4.2.2 基本超越函数 : 非代数函数即为 超越函数 .
  - (1) 指数函数
  - (2) 双曲函数 : 形式上相似于三角函数.
  - (3) 对数函数 : 指数函数的反函数; 用于求解指数方程
    - (01) 自然对数
    - (02) 常用对数
    - (03) 二进对数
    - (04) 不定对数
  - (4) 非有理次幂的 幂函数 :
  - (5) 周期函数
    - (01) 三角函数 : 正弦, 余弦, 正切等; 主要用于几何学和描述周期现象. 参阅 古德曼函数 .
    - (02) 锯齿波
    - (03) 方波
    - (04) 三角波

生词

- **theorem ['θɪərəm] --n.定理, 法则, 命题**
- **elementary [] --**
  - Elementary function. 初等函数
  -
- **trigonometric [ˌtrigənə'metrik] (trigono-metric) --adj.三角法的**
  - trigonometric functions 三角函数
- **trigonometry [ˌtrɪgə'nɒmɪtrɪ] (trigo-nometry) --n.三角学, 三角法, 三角函数**
  - Trigonometry formulas 三角函数公式

- sine [saɪn] --n.[数]正弦
- cosine ['kəʊsaɪn] (co-sine) --n.余弦
- tangent ['tæn(d)ʒ(ə)nt] --n.切线; 正切. --adj.接触的; 相切的
- cotangent [kəʊ'tændʒ(ə)nt] (co-tangent) --n.[数] 余切
- secant ['siːk(ə)nt] --n.正割; 割线. --adj.分割的; 交叉的
- cosecant ['ko'sikənt] (co-secant) --n.[数]余割

内容(Content)

1. 函数简介

1.1 函数是什么?

- 待看: 函数-Wikiwand
- `函数 (Function)` 在数学中为两不为空集的集合间的一种对应关系: 输入值集合中的每项元素皆能对应唯一一项输出值集合中的元素. 例如实数 x 对应到其平方 x^2 的关系就是一个函数, 若以 3 作为此函数的输入值, 所得的输出值便是9.

  为方便起见, 一般做法是以符号 f, g, h 等等来指代一个函数. 若函数 f 以 x 作为输入值, 则其输出值一般写作 $f(x)$(读作 $f of x$). 上述的平方函数关系写成数学式记为 $f(x) = x^2$. 函数的概念并不局限于数之间的映射关系; 表达函数有多种方式, 例如:

  - `解析法` 是用数学式表达两个变量之间的对应关系;
  - `图像法` 是用坐标系上的函数图形表达两个变量之间的对应关系;
  - `列表法` 用表格表达两个变量之间的对应关系.

  现代数学中, 函数所有输入值的集合被称作该函数的 `定义域` , 而其输出值所在的集合称为 `到达域` . 其中 `值域` : **特指该函数的输出值集合**, 意即 `上域` 包含了 `值域` , 值域为上域的 `子集` . 通常输入值称作函数的参数或参量, 输出值称作函数的值. **函数将有效的输入值变换为唯一的输出值, 同一输入总是对应同一输出, 但反之未必成立**.

  例如: 因此如 $Root(x) = \sqrt[2]{x}$ 这样的表达式并没有定义出一个函数, 因为输出值有两个可能. **定义函数时需确定每一个输入值只对应唯一输出值**, 因此必须明确地选择一个平方根. 例如定义 $Posroot(x) = \sqrt{x}$, 亦即对于任何非负输入值, 选择其非负平方根作为函数值.

- 定义来源 函数-Wiki

1.2 函数的定义.

- 高中《必须1》对函数的定义: `./## 基础数学/高中数学/必修1.md`
- 《托马斯大学微积分》对函数的定义:
  - 1.1.1 `函数` , `定义域` 与 `值域` . 见: `../../## 微积分-Calculus/《University Calculus》/Chapter01-函数`

2. 函数大致可以分为 2 类

2.1 初等函数

2.1.1 初等函数的定义

- 初等函数-Wiki
- **初等函数(基本函数)** 是由 `常(数)函数(constant function)`, `幂函数(power function)`, `指数函数(exponential function)`, `对数函数(logarithmic function)`, `三角函数(trigonometric function)`, `反三角函数(inverse trigonometric function)` 经过有限次的有理运算 (加, 减, 乘, 除, 有限次乘方, 有限次开方) 以及有限次 `函数复合` 所产生, 并且在 `定义域` 上能用一个 `方程式` 表示的函数.

  一般来说, 分段函数不是初等函数, 因为在这些分段函数的定义域上不能用一个解析式表示.

2.1.2 初等函数可以划分为 6 大基本初等函数 (`反` `对` `幂` `三` `指` `常`)

- (1) `常(数)函数 (constant function)`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/1_常(数)函数_constant-function.md`
- (2) `幂函数 (power function)`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/2_幂函数_power-function.md`
- (3) `指数函数 (exponential function)`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/3_指数函数_exponential-function.md`
- (4) `对数函数(logarithmic function)`
  - 对数函数: 指数函数的反函数; 用于求解指数方程.
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/4_对数函数_logarithmic-function.md`
- (5) `三角函数 (trigonometric function)`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/5_三角函数_trigonometric-function.md`
- (6) `反三角函数 (inverse trigonometric function)` (即: `反函数`)
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/6_反函数_inverse-trigonometric-function.md`

2.1.3 其他常见初等函数

- (1) `双曲函数`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/双曲函数.md`
- (2) `反双曲函数`
  - 完整讲解见同目录: `./## 初等函数/反双曲函数.md`

2.2 非初等函数

- 笔记来自当前文件的上级目录: `../初等函数之上有无定义高等函数.pdf` .

2.2.1 `阶乘函数族`

2.2.2 `误差函数与双指数积分`

2.2.3 `贝塞尔函数族`

2.2.4 `椭圆函数与椭圆积分`

2.2.5 `Zeta 函数与多对数函数`

2.2.6 `多项式正交击`

2.2.5 `Q 级数`

2.2.6 `模形式`

2.2.7 `统一函数族`

2.2.6 `数论函数`

3. 关于函数的误区

- 笔记来自当前文件的上级目录: `../初等函数之上有无定义高等函数.pdf`

3.1 误区 1: 超越函数不是初等函数

- 错, 事实上除了 `常函数` 与 `整数次幂函数` , 其他都叫 `初等超越函数` , 比如 $sin(2), arcsin2, log_2 2, e^2$ ... 统统是 `超越数` , 刘维尔虽然是超越数的提出者, 但划分的时候并没有这方面的考虑, 而且当时也无法判断这些数的超越性.

3.2 误区 2: 绝对值函数不是初等函数

- 错, $abs(x) = |x| = \sqrt[2]{x^2}$ 难道不是基本初等函数符合而成的吗? 分段函数不一定不是初等函数, 事实上只要没有跳跃间断点就都能初等表达.

3.3 误区 3: 有解析式的就是初等函数

- 解析式这个词, 是欧拉用的, 现在的等价术语是 `封闭形式` , 封闭解只要求闭包, 对具体的生成元没有要求, 初等函数符合正好符合而已. 在现代, 解析函数一般是指局部上由收敛幂级数给出的函数

4. 另外一种初等函数的划分

- 笔记来源: 函数列表-Wikiwand
- Notice: 下面这种对初等函数的划分, 从上面 "误区 1" 的回答便可以看出是一种更合理的划分方法:

4.1 `初等函数` 是由基本运算 (例如, 加减乘除, 指数运算, 对数运算) 构成的函数.

4.2 初等函数的分类:

- 4.2.1 `代数函数` : 能够表示为多项式方程的函数.
  - (1) `多项式` : 能够表示为变量的加减和乘.
    - (01) `线性函数` : 图像为直线的函数, 可分为 2 类:
      - (a) `零次函数 (常数函数)` : 零次多项式, 图像为水平线.
      - (b) `一次函数` : 一次函数, 图像为斜直线.
    - (02) `二次函数` : 二次多项式, 图像为抛物线.
    - (03) `三次函数`
    - (04) `四次函数`
    - (05) `五次函数`
    - (05) `六次函数`
  - (2) `有理函数` : 两个多项式函数的比.

- (3) 开方 :
    - (01) 平方根
    - (02) 立方根
- 4.2.2 基本超越函数 : 非代数函数即为 超越函数 .
  - (1) 指数函数
  - (2) 双曲函数 : 形式上相似于三角函数.
  - (3) 对数函数 : 指数函数的反函数; 用于求解指数方程
    - (01) 自然对数
    - (02) 常用对数
    - (03) 二进对数
    - (04) 不定对数
  - (4) 非有理次幂的 幂函数 :
  - (5) 周期函数
    - (01) 三角函数 : 正弦, 余弦, 正切等; 主要用于几何学和描述周期现象. 参阅 古德曼函数 .
    - (02) 锯齿波
    - (03) 方波
    - (04) 三角波

一次函数(线性函数 linear function)

- 在初等代数与解析几何中, 线性函数是指拥有一个变数的一阶多项式函数或是只有常数的函数, 因为在直角坐标系中这些函数的图形是直线。所在, 这些函数是线性的。
- 线性函数可以表达为 **斜截式**: $y = ax + b(a \neq 0)$ 的定义域是 R, 值域也 是 R, 对于 R 中的任意一个数 x, 在 R 中都有唯一的数 $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ 和它对应。其中 a 是斜率, b 是 y 轴截距, 即函数的图形与 y 轴 相交的 y 坐标, 改变斜率 a 会使直线更陡峭或平缓。改变 y 轴截距 b 会将直线向上或 向下平移.
- 高等数学用法: 在高等数学里, 线性函数是一种线性映射, 是在两个向量空间之间, 维持向量加法与标量乘法的映射。
  - $f(x + y) = f(x) + f(y)$
  - $f(ax) = af(x)$
  - 例如我们用 "坐标向量" 来表示 x 与 $f(x)$, 那么线性函数可以表达成 $f(x) = Mx$, 当中 M 为矩阵。

二次函数 (quadratic function)

- $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的定义域是 R, 值域是 B.
- 如果令二次函数的值等于0, 则可得一个二次方程。该方程的解称为方程的根或函数的零点.
- 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的 2 个根为:
  - x = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [读作: b^2 - 4ac 的 2 次方根]

-
- 解析式： $f(x) = x^2 - x - 2$
  - 当 a > 0 时, B = { y | y $\geq \frac{(4ac-b^2)}{4a}$ };
  - 当 a < 0 时, B = { y | y < $\frac{(4ac-b^2)}{4a}$ };
  - 对于 R 中的任意一个数 x, 在 B 中都有唯一的数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 和它对应。