九年级数学上册

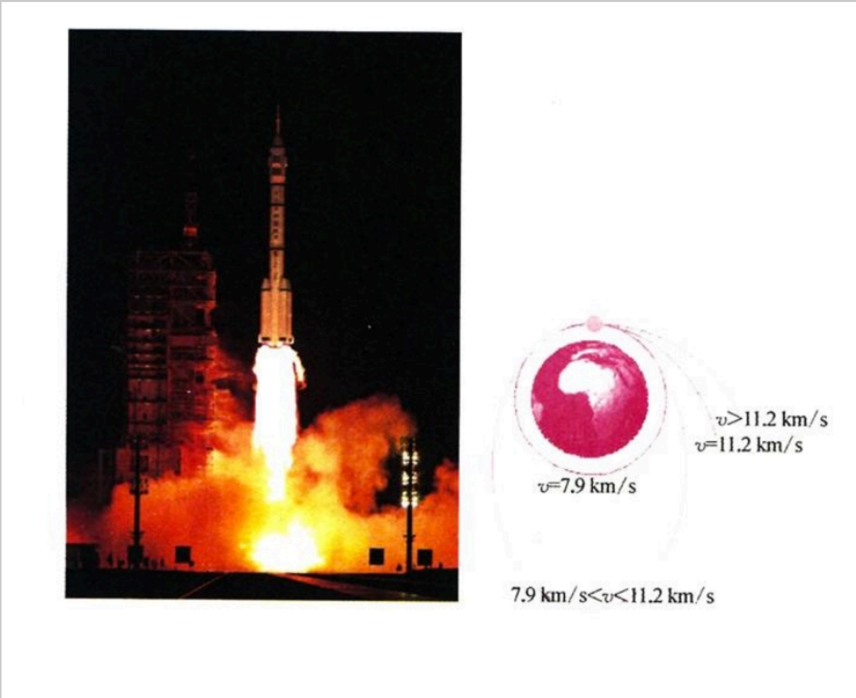
目录(Catalog)

生词(New Word)

- **Nu (ν) [nu:] --n.希腊字母的第13个字母**
- **quadratic [kwɒ'drætɪk] --adj.二次的。--n.二次方程式**
    - complete quadratic equation 完全二次方程
- **equation [ɪ'kweɪʒ(ə)n] --n.相等；均衡；方程式；等式**
    - I can't make this equation come out. 我不会解这个方程式。
    - an equation of the second degree. 二次方程式

内容(Content)

第 21 章: 二次根式

    - 

      人造地球卫星要冲出地球, 围绕地球运动, 发射时就必须达到一定的速度, 这个速度称为第一宇宙速度. 计算第一宇宙速度的公式是:

      $$\nu = \sqrt[2]{gR} \tag{1}$$

      其中 g 为重力加速度, R 为地球半径.
    - **概括(1):**
        - $\sqrt[2]{a}\ (a \geq 0)$ 表示非负数 a 的算术平方根, 也就是说, $\sqrt{a}\ (a \geq 0)$ 是一个非负数, 它的平方等于 a, 既有:
            - (1) $\sqrt{a}\ (a \geq 0)$ [读作: a 的二次方根 或 a 的平方根. 通常简读为: 根号 a]
            - (2) $(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geq 0)$ [读作: a 的平方根的平方]
              形如 $\sqrt{a}\ (a \geq 0)$ 的式子叫做 **二次根式**
    - **注意:**
        - 在 $\sqrt{a}$ 中, a 的取值必须满足 $(a \geq 0)$, 即二次根式的被开方数必须是非负数.
        - 例: x 是怎样的实数时, 二次根数 $\sqrt{x-1}$ 有意义? 答: 略.
    - **概括(2):**
        - $\sqrt{a^2}$ 等于什么?
            - (1) 当 $a \geq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = a$ [读作: a 的平方的二次方根等于 a]
            - (1) 当 $a \leq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = -a$
- *阅读材料: 蚂蚁和大象一样重吗?* (4)
- 21.2 二次根式的乘除 (5)
    - 21.2.1 二次根式的乘法 (5)
        - **公式(1):** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$ [简读为: 根号 a 乘以根号 b 等于根

号 a 乘以 b, a 大于等于 0, b 大于等于 0]
两个算术平方根的积, 等于它们被开房数的积的算术平方根.

- 21.2.2 积的算术平方根 (6)
  - **公式(2):** $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad(a\geq 0,\ b\geq 0)$
    积的算术平方根, 等于个因式算术平方根的积.
- 21.2.3 二次根式的除法 (7)
  - **公式(3):** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0)$
    两个算术平方根的商, 等于商的算术平方根.
  - 公式(3)也可写成: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0)$
    商的算术平方根, 等于两个算术平方根的商.
  - **最简二次根式:**
    - 例2 化简 $\sqrt{12}$,使被开方数不含完全平方的因数.

      解 $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}$
      $=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}$
      $=2\sqrt{3}.$

      这里,被开方数 $12=2^2\times 3$, 含有完全平方的因数 2^2,通常可根据积的算术平方根的性质,并利用 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$, 将这个因数"开方"出来.

      例4 化简$\frac{1}{\sqrt{2}}$,使分母中不含二次根式,并且被开方数中不含分母.

      解 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\times 2}{2\times 2}}=\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

      这里,二次根式 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的被开方数中含有分母,通常可利用分数(或分式)的基本性质将分母"配"成完全平方,再"开方"出来.

    按照例2 和例4 的要求, 化简后的二次根式被开方数中不含分母, 并且被开方数中所有因数(或因式)的幂的指数都小于2, 像这样的二次根式称为最简二次根式.

- 21.3 二次根式的加减 (10)
  - **概括**
    - 与整式中同类项相类似, 我们把像 $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt{a}$ 与 $4\sqrt{a}$ 这样的几个二次根式, 称为同类二次根式.
    - 二次根式的加减, 与整式的加减类似, 关键是将同类二次根式合并.
    - 例如:

例 2 计算：

(1) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{25}{2}}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$.

解 (1) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$

$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{5}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{25}{2}}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$

$=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$=\left(\dfrac{5}{2}+4-3\right)\sqrt{2}$

$=\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$.

例 3 计算：

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$；　(2) $(\sqrt{2}-1)^2$.

解 (1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{2})^2-1^2$

$=2-1$

$=1$.

(2) $(\sqrt{2}-1)^2$

$=(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2$

$=3-2\sqrt{2}$.

第 22 章: 一元二次方程

- 问题

问题 1

绿苑小区在规划设计时,准备在两幢楼房之间,设置一块面积为 900 平方米的矩形绿地,并且长比宽多 10 米,那么绿地的长和宽各为多少?

分析 我们已经知道可以运用方程解决实际问题.

设绿地的宽为 x 米,不难列出方程

$$x(x+10)=900,$$

整理得

$$x^2+10x-900=0. \qquad (1)$$

问题 2

学校图书馆去年年底有图书 5 万册,预计到明年年底增加到 7.2 万册. 求这两年的年平均增长率.

分析 设这两年的年平均增长率为 x.

已知去年年底的图书数是 5 万册,则今年年底的图书数是 $5(1+x)$ 万册.

同样,明年年底的图书数又是今年年底图书数的 $(1+x)$ 倍,即 $5(1+x)(1+x)=5(1+x)^2$(万册).

可列得方程

$$5(1+x)^2=7.2,$$

整理可得

$$5x^2+10x-2.2=0. \qquad (2)$$

- **概括**:
  - 上述问题中 (1) 和 (2) 两个整式方程中都只含有一个未知数(x), 并且未知数的最高次数是 2 (注: x^2), 这样的方程叫做 **一元二次方程** (quadratic equation with one unknown). 一元二次方程的一般形式是:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0;\ a,b,c\text{是已知数}) \qquad (2)$$

- 22.2 一元二次方程的解法 (20)
  - 22.2.1 直接开平方法和因式分解法 (20)
    - **直接开平方法** :
      - (1) 解方程 $x^2=4$;
      - 解: 对于题 (1) 有这样的解法:
        方程 $x^2=4$ 意味着 x 是 4 的平方根, 所以 $x=\pm\sqrt{4}$,
        即 $x=\pm 2$. 这里得到了方程的 2 个根, 通常也表示成
        $$x_1=2, x_2=-2.$$
        这种解一元二次方程的方法叫做 **直接开平方法**.
    - **因式分解法** :
      - (2) 解方程 $x^2-1=0$.
      - 解: 对于题 (2) 有这样的解法:
        将方程左边用平方差公式分解因式, 得
        $(x-1)(x+1)=0$,
        必有 $x-1=0$或$x+1=0$.
        分别解这 2 个一元一次方程, 得
        $$x_1=1, x_2=-1.$$
        这种解一元二次方程的方法叫做 **因式分解法**.
    - **例1** 解下列方程:
      - (1) $x^2-2=0$. (2) $16x^2-25=0$

- **解** (1) 移项，得

  $$x^2 = 2.$$

  直接开平方，得

  $$x = \pm\sqrt{2}.$$

  即 $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}.$

  (2) 移项，得

  $$16x^2 = 25.$$

  方程两边都除以 16，得

  $$x^2 = \frac{25}{16}.$$

  直接开平方，得

  $$x = \pm\frac{5}{4}.$$

  即 $x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = -\frac{5}{4}.$

- **例2** 解下列方程:
  - (1) $3x^2 + 2x = 0$.   (2) $x^2 = 3x$.
  - **解** (1) 方程左边分解因式，得

    $$x(3x + 2) = 0.$$

    所以 $x = 0$ 或 $3x + 2 = 0$.

    得 $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{2}{3}.$

    (2) 移项，得

    $$x^2 - 3x = 0.$$

    方程左边分解因式，得

    $$x(x - 3) = 0.$$

    所以 $x = 0$ 或 $x - 3 = 0$.

    得 $x_1 = 0,\ x_2 = 3.$

- **读一读: 什么时候两数的乘积为零** -- 谈谈因式分解法解方程的依据
  - 用因式分解法解一元二次方程时, 我们现将左边化为 2 个一次因式的乘积, 右边是 0 的形式, 如 "试一试" 中的 $(x-1)(x+1)=0$; 然后由乘积等于 0, 得到 2 个因式中至少有一个等于 0, 从而将一元二次方程 "降次", 转

化为 2 个一元二次方程: $x-1=0$ 和 $x+1=0$ 来解.

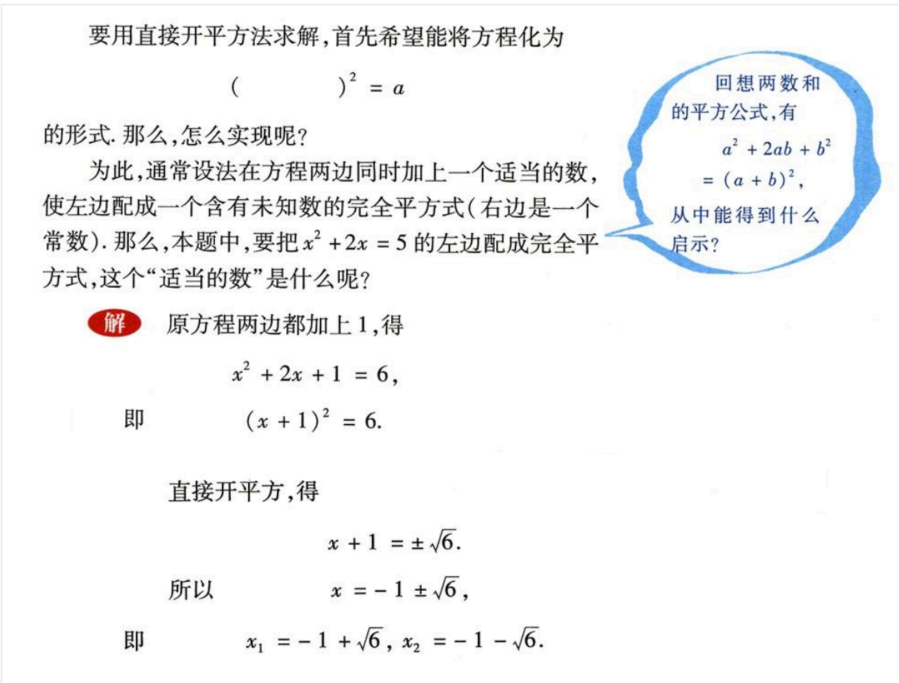
这里方程变形的依据, 实际上还是关于等式的性质: `两数乘积等于零, 必须且只需其中至少有一个乘数等于 0`. 也就是说, 当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$ 时, $ab=0$, 证明如下:

设 a, b 是两个实数, 如果 $a=0$ 或 $b=0$, 因为 0 乘以任何数都等于 0, 所以 $ab=0$;

反过来, 如果 $ab=0$, 那么必须有 $a=0$ 或 $b=0$. 我们不难用反证法证明这个结论. 事实上, 假设结论不成立, 即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 这时必有 $ab \neq 0$, 与已知 $ab=0$ 矛盾, 所以假设不成立, 即 $a=0$ 或 $b=0$.

- **例(3)** 解下列方程:
  - (1) $(x+1)^2-4=0$; (2) $12(2-x)^2-9=0$.
    - 解: 略

◦ 22.2.2 配方法 (25)

- **例(4)** 解方程: $x^2+2x=5$.
  - 思考: 

要用直接开平方法求解,首先希望能将方程化为

$$(\quad)^2=a$$

的形式. 那么,怎么实现呢?

为此,通常设法在方程两边同时加上一个适当的数,使左边配成一个含有未知数的完全平方式(右边是一个常数). 那么,本题中,要把 $x^2+2x=5$ 的左边配成完全平方式,这个"适当的数"是什么呢?

解 原方程两边都加上 1,得

$$x^2+2x+1=6,$$

即 $(x+1)^2=6.$

直接开平方,得

$$x+1=\pm\sqrt{6}.$$

所以 $x=-1\pm\sqrt{6},$

即 $x_1=-1+\sqrt{6},\ x_2=-1-\sqrt{6}.$

- `配方法`: 这里的解法, 是通过方程的简单变形, 将左边配成个含有未知数的完全平方式, 右边是一个非负常数, 从而可以直接开平方求解。这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**。
- **例(5)** 用配方法解方程:
  - (1) $x^2-4x+1=0$; (2) $4x^2-12x-1=0$.
    [Tip: 诚实的说, 这两个方程的配方并不容易.]

左边配上什么数能成为完全平方?

$x^2-2\cdot x\cdot 2+\square^2$

$=(x-\square)^2$.

解 (1) 原方程可化为

$$x^2-4x=-1.$$

配方(两边同时加上4),得

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=-1+2^2,$$

即

$$(x-2)^2=3.$$

直接开平方,得 $x-2=\pm\sqrt{3}$,

所以 $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$.

(2) 移项,得 $4x^2-12x=1$.

两边同除以4,得 $x^2-3x=\frac{1}{4}$.

配方,得

$$x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

即

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.$$

直接开平方,得 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$,

所以 $x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

这里应该怎样配方? 回顾例4和例5题(1)的解答,归纳一下:配方时,方程两边加上的数是如何确定的?

- 22.2.3 公式法 (28)
  - 我们来解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \tag{3}$$

因为 $a\neq 0$, 所以两边同除以 a 得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \tag{4}$$

移项, 得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \tag{5}$$

配方(关键步骤), 得

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a} \tag{6}$$

即 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

因为 $a\neq 0$, 所以 $4a^2>0$. 当 $b^2-4ac\geq 0$ 时, 直接开平方,得

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{7}$$

所以

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{8}$$

即当 a > 0 时:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{9}$$

第 23 章: 图形的相似

第 24 章: 解直角三角形

第 25 章: 随机事件的概率

数学实验附图