# 必修 1

> 目录 (Table of Content)



## 生词

- **intersection [ˌɪntə'sekʃn] --n.交集；十字路口；交叉点**
  - --> intersection set. 交集

    - --> You are gonna make a right at the intersection. 十字路口往右转。
    - --> Turn right at the next intersection. 在下个十字路口右转。
- **complementary [kɒmplɪ'ment(ə)rɪ] --adj.补充的，互补的**
    - --> complementary set 补集
    - --> complementary angles 余角，互余角
    - --> complementary function 余函数
- **radical ['rædɪk(ə)l] --n.根号,根式。 --adj.根本的,基本的**
- **radicand ['rædɪkænd] n.被开方数。**
- **exponential [ˌekspə'nenʃ(ə)l] --n.指数. --adj.指数的**
    - --> Exponential growth. 指数生长
    - --> exponential function 指数函数

---

# 第 1 章 —— 集合与函数概念

## 1.1 集合

> 1.1.1 集合的含义与表示

- 一般地，我们把研究对象统称为**元素 (element)**, 把一些元素组成的总体叫做**集合 (set)** 简称为(**集**)
- 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这 2 个集合是相等的。
- 我们通常用大写拉丁字母 $A, B, C$, ... 表示集合； 用小写拉丁字母 $a, b, c$, ... 表示 集合中的元素。
    - 如果 $a$ 是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 属于(belong to) 集合 $A$, 记作 $a \in A$
    - 如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 不属于(not belong to) 集合 $A$, 记作 $a \notin A$
    - 数学中一些常用的数集及其记法:
        - 全体非负整数组成的集合称为非负整数集 (或自然数集)， 记作 $N$
        - 所有正整数组成的集合称为正整数集，记作 $N^*$ 或 $N_+$
        - 全体整数组成的集合称为整数集， 记作 $Z$
        - 全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $Q$
        - 全体实数组成的集合称为实数集，记作 $R$
- 集合的读法:例如: $A = \{x \in R | x^2 - 2 = 0\}$ (读作: 集合 A 包含 $x$ 属于 R 且, $x^2 - 2 = 0$ [不确定是不是这样读,因为没找到范例])
- Add Content:
    - 质数(又称 素数): 质数是大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身外，不能被其他自然数 (0 除外) 整数的数。
    - 互质 (co-prime) 符號：⊥， 又称互素、在数论中，如果2个或2个以上的整数的 最大公因数是 1，则称它们为互质。
        - 1.如果数域是正整数(N+), 那么 1 与所有正整数互质
        - 2.如果数域是整数(Z), 那么 1 和 -1 与所有整数互质, 而且他们是唯一与 0 互质 的整数。两個整数 a 与 b 互质，记为 a ⊥ b。

        - 互质的例子:
            - 例如 8 与 10 的最大公因数是 2， 不是 1，因此他们并不互质。
            - 又例如 7, 10, 13 的最大公因数是 1， 因此他们互质。
    - 有理数: 人們將所有能表示成 $\frac{p}{q}$ (p q 是整數 p,q互質)的數稱之為有理數。
        - 任何带有"有限小数部分"或"无限循环小数部分"的数都可以写成 $\frac{p}{q}$ 的形式， 因而都是有理数;
        - 而带有无限不循环小数部分的数不能写成 $\frac{p}{q}$ 的形式，因而是无理数。
    - 无理数: 人們將這些不是有理數的數稱為無理數。
    - 实数(R): 將有理數和無理數統稱為實。
    - 实数系: 全体实数组成的数集称为实数系， 也称为 "实数集"。
    - 实数的连续性: 实数这种能与数轴上的点一一对应的特点称为实数的连续性。

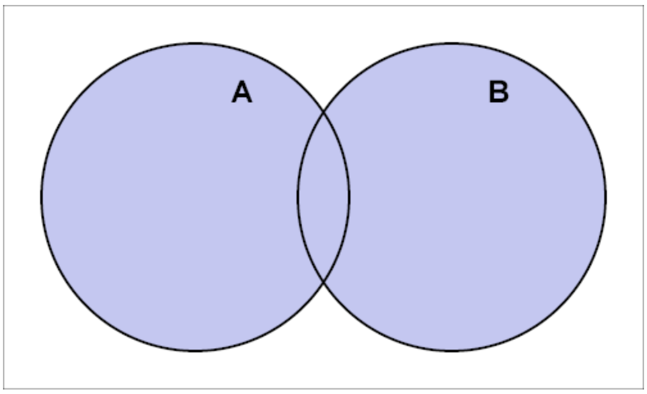
### 1.1.2 集合间的基本关系

- 子集 (subset): $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$
- 文氏图 (Venn 图): 在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图。
- 相等: 集合 $A$ 与 集合$B$中的元素是一样的，说集合 $A$ 和 集合$B$ 相等，记作: $A = B$
- 真子集（proper subset）: $$
- 空集 (empty set): 把不包含任何元素的集合叫做空集。

### 1.1.3 集合的基本运算

- **并集 (union set)**: 一般地，由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合， 称为集合 $A$ 与集合 $B$的并集 (union set), 记作 $A \cup B$ (读作: A 并 B), 即:

$$A \cup B = \{x|x \in A, 或x \in B\} \tag{1}$$

    - 可用 Venn 图表示为:
    - 


- **交集 (intersection set)**: 一般地，由属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的所有元素组成 的集合，称为 $A$ 与 $B$的交集 (intersection set), 记作 $A \cap B$ (读作: A 交 B) , 即:

$$A \cap B = \{x|x \in A, 且x \in B\} \tag{2}$$

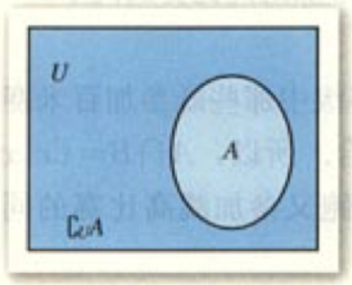
- **全集 (universe set)**: 一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么 就称这个集合为 全集 (universe set), 通常记作 $U$
- **补集 (complementary set)**: 对于一个集合 $A$, 在全集 $U$ 中不属于集合 $A$ 的所有 元素组成的集合称为 集合$A$ 相对于全集 $U$ 的补集 (complementary set)， 简称为集合 $A$ 的补集，记作 $\complement_U A$ = $\{x|x \in U, 且 x \notin A\}$
    - 可用 Venn 图表示为: 

图 1. 1-5

## 1.2 函数及其表示

### 1.2.1 函数的概念

- 设 A, B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 $f$,使对于集合 A 中任何一个数 $x$, 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f$: A $\rightarrow$ B 为集合 A 到 B 的一个 "函数 (function)", 记作:
$$y=f(x), x \in A. \tag{3}$$
其中 $x$ 叫做自变量， $x$ 的取值范围 A 叫做函数的 **定义域 (domain)**, 与 $x$ 的 值相对应的 $y$ 值叫做 "函数值", 函数值的集合 { $y=f(x)|x \in A\}$ [读作: 集合 $y=f(x)且x$ 属于 A] 叫做函数的 **值域 (range)**. 显然，值域是集合 $B$ 的子集。
- 我们所熟悉的一次函数 $y=ax+b(a \neq 0)$ 的定义域是 $R$，值域也是 $R$，对于 $R$ 中的任意一个数 $x$, 在 $R$ 中都有唯一的数 $y=ax+b(a \neq 0)$ 和它对应。
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的定义域是 $R$, 值域是 $B$.
    - 当 $a>0$ 时， $B=\{y|y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\}$
    - 当 $a<0$ 时， $B=\{y|y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\}$
    - 对于 $R$ 中的任意一个数 $x$, 在 $B$ 中都有唯一的数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 和它对应。
- 一元二次方程 —— 判别式：

- 根的判别式是判断"方程实根"个数的公式，在解题时应用十分广泛，涉及到解系数的取值范围、 判断方程根的个数及分布情况等。一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根的判别式是 $b^2-4ac$，(用 "Δ" 表示，读作 "delta")。
- 判别式定义: 判别式即判定"方程实根"个数及分布情况的公式。
- 一元二次方程，根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的推导过程? (20200202 Added: 来自九年级上册课本 P28)
  - 解: 因为一元二次方程的 $a\neq 0$, 所以两边同除以 $a$

$$
\begin{aligned}
& x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 && (4)\\
& \text{移项, 得} \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} && (5)\\
& \text{配方(关键步骤), 得} \quad x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a} && (6)\\
& \text{即} \quad (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && (7)\\
& \text{因为} a\neq 0, \text{所以} 4a^2>0. \text{当} b^2-4ac\geq 0 \text{时, 直接开平方, 得} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|} && (8)\\
& \text{当} a>0 \text{时}: x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (9)\\
& \text{当} a<0 \text{时}; x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (10)
\end{aligned}
$$

- 这里的 $b^2-4ac$ 叫做一元二次方程 **根的判别式** , 通常用符号 $\Delta$ 来表示, 用它可以直接判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的实根的情况:
  - 当 $\Delta>0$ 时, 方程有 2 个不相等的实数根;
  - 当 $\Delta=0$ 时, 方程有 2 个相等的实数根;
  - 当 $\Delta<0$ 时, 方程没有实数根.

- 区间:
  - 闭区间: $[a,b]$
  - 开区间: $(a,b)$
  - 半开半闭区间: [a, b), (a, b]
  - 端点: 用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点。
- 分段函数
- 映射 (mapping): 设 $A,B$ 是非空的集合，如果按某一个确定的对应 关系 $f$，使对于集合 $A$ 中的任意一个元素 $x$，在集合 $B$ 中都有唯一确定的元素 $y$ 与 之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的一个映射 (mapping).

## 1.3 函数的基本性质

### 1.3.1 函数的基本性质

- 增函数 (increasing function)
- 减函数 (decreasing function)
- 最大值 (maximum value)
- 最小值 (minimum value)
- 奇函数 (odd function)

- 偶函数 (even function)

# 第 2 章 —— 基本初等函数 (1)

> Q: 幂函数和指数函数的区别?

- A: 幂函数 $y = x^a$ 底数 $x$ 为自变量，指数 $a$ 为常数。
  指数函数 $y = a^x$ (a > 0 且 $a \neq 1$) ($x \in R$) 底数 $a$ 为常数, 指数 $x$ 为自变量。

## 2.1 指数函数 (exponential function)

### 2.1.1 指数与指数幂的运算

> **根式**

- $n$次方根: 一般地 如果 $x^n = a$ 那么 $x$ 叫做 $a$ 的 $n$ 次方根 (n th root)，其中 $n > 1$, 且 $n \in N_+$
- 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做 根式 (radical), 这里 $n$ 叫做 根指数$(radical - exponent)$ , $a$ 叫做 被开方数$(radicand)$
- 例如:
  - 根据 n 次方根的意义可得: $(\sqrt[n]{a})^n$ = $a$.
  - $(\sqrt{5})^2$ = 5, $(\sqrt[5]{-3})^5$ = -3.
  - sqrt = square root 平方根

> **分数指数幂**

- Tip: **幂**: 指乘方运算的结果。$n^m$ 指将 $n$ 自乘 $m$ 次 ($m$ 为正整数)。把 $n^m$ 次方看作乘方的结果，叫做 "$n$的$m$次幂" 或 "$n$的$m$次方"。
- 我们规定正数的正分数指数幂的意义是:
  - $a^{\frac{m}{n}}$ = $\sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0, m, n \in N_+$, 且 $n > 1)$ [读作: $a$的$n$分之$m$次方 $=$ $a$的$m$次方的$n$次方根]
  - 于是，在条件 $a > 0, m, n \in N^*$, 且 $n > 1$ 下, 根式可以写成分数指数幂的形式.
  - 正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿，我们规定
    - $a^{-\frac{m}{n}}$ = $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ $(a > 0, m, n \in N^*$, 且 $n > 1)$
  - *0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义。*
  - 规定了分数指数幂的意义以后，指数的概念就从正数指数推广到了有理数指数。
  - 重要的运算法则: 来源: https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%86%AA
    - (1) 同底数相乘，底数不变，指数相加:
      - $a^m \cdot a^n$ = $a^{m+n}$
    - (2) 同底数相除，底数不变，指数相减:
      - $a^m \div a^n$ = $a^{m-n}$
    - (3) 同指数幂相除，指数不变，底数相除:

        - $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
    - 其他等式
        - $(a^m)^n = a^{mn}$
        - $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
        - $x^0 = 1 (x \neq 0)$
        - $x^1 = x$
        - $x^{-1} = \frac{1}{x} (x \neq 0)$

### 2.1.2 指数函数及其性质

- 指数函数$(exponential function)$:一般地, 函数 $y = a^x (a > 0, 且 a \neq 1)$ 叫做 "指数函数 (exponential function)", 其中 底数 $a$ 为常数, 指数 $x$ 为自变量, 函数的定义域是 $R$.

---

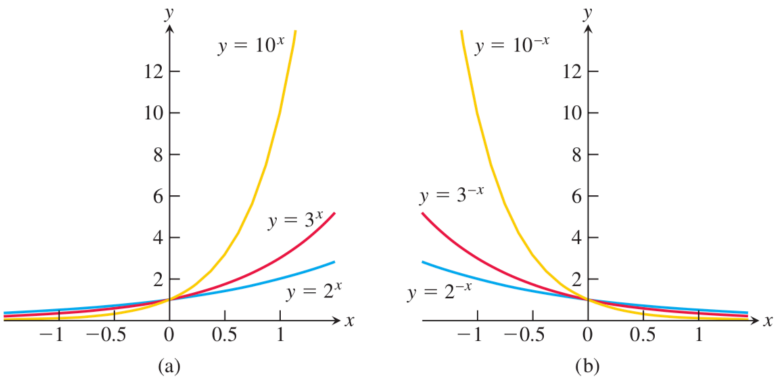
- Note: 这里给出指数函数和对数函数的图形
    - 

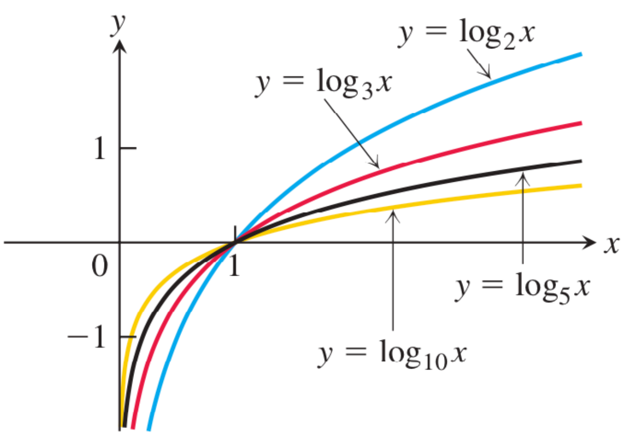

      FIGURE 1.22 Graphs of exponential functions.
    - 


      FIGURE 1.23 Graphs of four logarithmic functions.

---

## 2.2 对数函数 (logarithmic function)

- **logarithmic [ˌlɔɡə'riðmik] --adj.对数的**
    - Logarithmic functions 对数函数

### 2.2.1 对数及其运算

> 对数

- 对数：一般地，如果 $a^x = N(a > 0, 且 a \neq 1)$, 那么数 $x$ 叫做以 $a$ 为底 $N$ 的 "对数(logarithm)", 记作 $x = \log_a N$ (读作: 以 $a$ 为底 $N$ 的对数), 其中 $a$ 叫做对数的 "底数"， $N$ 叫做 "真数"。
- 常数对数: 通常我们将以 10 为底的对数叫做 "常用对数 (common logarithm)" 并把 $\log_{10} N$ 记作 $\lg N$.
- 自然对数: 在科学技术中常使用以无理数 $e = 2.718281828...$ 为底数的对数，以 $e$ 为底的对数称为"自然对数(natural logarithm)",并且把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$。
- 根据对数的定义，可以得到对数与指数间的关系:
    - 当 $a > 0, a \neq 1时$ , $a^x = N \leftrightarrow x = \log_a N$ . 由指数与对数的这个关系，可以得到关于对数的如下结论:
        - "负数和零都没有对数":
        - $\log_a 1 = 0$,
        - $\log_a a = 1$.

> 对数的运算

- 对数的运算性质: 如果 $a > 0$, 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么:
    - (1) $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$;
        - 读作: 以 $a$ 为底， $MN$ 的对数
    - (2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;
        - 同底数幂相减, 底数不变,指数相除
    - (3) $\log_a M^n = n \log_a M (n \in R)$.
- 对数运算 Wikipedia 公式总结( https://zh.wikipedia.org/zh-cn/%E5%AF%B9%E6%95%B0 )
    - **和差**:
        - 公式: 对数和公式 见上面的(1)， 对数差公式 见上面的 (2)
        - 推导:
            - 对数和公式推导: 设 $M = \beta^m, N = \beta^n$

$$
\begin{aligned}
\log_a MN &= \log_a \beta^m \beta^n && (11)\\
&= \log_a \beta^{m+n} && (12)\\
&= (m+n)\log_a \beta && (13)\\
&= m \log_a \beta + n \log_a \beta && (14)\\
&= \log_a \beta^m + \log_a \beta^n && (15)\\
&= \log_a M + \log_a N && (16)
\end{aligned}
$$

即: $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

- 对数差公式推导:

$$
\begin{aligned}
&\log_a \frac{M}{N} && (17)\\
&= \log_a M + \log_a \frac{1}{N} && (18)\\
&= \log_a M - \log_a N && (19)
\end{aligned}
$$

- 基变换 (换底公式)
  - 公式: $\log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$
  - 推导:

$$
\begin{aligned}
&\text{设} \log_a x = t && (20)\\
&\therefore x = a^t && (21)\\
&\text{两边取对数(同底数的对数，真数相同，对数相等)则有} \log_\beta x = \log_\beta \alpha^t && (22)\\
&\text{即} \log_\alpha x = t \log_\beta \alpha && (23)\\
&\text{又} \therefore \log_a x = t && (24)\\
&\because \log_a x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha} \quad (\text{读作：以}\beta\text{为底}x\text{的对数除以以}\beta\text{为底}a\text{的对数}) && (25)
\end{aligned}
$$

- 指系 (次方公式)
  - 公式: $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$
  - 推导:

$$
\begin{aligned}
&\log_{a^n} x^m = \frac{\log_e x^m}{\log_e a^n} && (26)\\
&= \frac{m \log_e x}{n \log_e a} && (27)\\
&= \frac{m}{n} \log_a x && (28)
\end{aligned}
$$

- 还原
  - 公式: $a^{\log_a x} = x = \log_a a^x$
  - 推导: 我们由对数的基本定义

$$
\begin{aligned}
&a^n = x \qquad (1) && (29)\\
&\log_a x = n \qquad (2) && (30)\\
&\text{把}(2)\text{代入}(1) && (31)\\
&a^{\log_a x} = x && (32)\\
&\text{右侧：因为：}a^1 = a\text{，所以：}\log_a a = 1.\text{因此：}x = \log_a a^x && (33)
\end{aligned}
$$

- 互换
  - 公式: $M^{\log_a N} = N^{log_a M}$
  - 推导:

$$
\begin{aligned}
&\text{设} b = log_a N, c = \log_a M && (34)\\
&\text{则有} a^c = M \text{和} a^b = N. && (35)\\
&M^b = N^c && (36)\\
&(a^c)^b = (a^b)^c && (37)\\
&\text{所以} M^{\log_a N} = N^{log_a M} && (38)
\end{aligned}
$$

- **倒数:**

$$
\begin{aligned}
& \log_a \theta && (39)\\
&= \frac{\log_e \theta}{\log_e a} && (40)\\
&= \frac{1}{\log_e a}\log_e \theta && (41)\\
&= \frac{1}{log_\theta a} && (42)
\end{aligned}
$$

- **链式:**

$$
\begin{aligned}
& \log_\gamma \beta \log_\beta \alpha && (43)\\
&= \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\frac{\ln \beta}{\ln \gamma} && (44)\\
&= \frac{\ln \alpha}{\ln \gamma} && (45)\\
&= \log_\gamma \alpha && (46)
\end{aligned}
$$

### 2.2.2 对数函数及其性质

- 对数函数: 我们把函数 y = $log_a x$ $(a > 0, 且 a \neq 1)$ 叫做对数函数, 其中 $x$ 是自变量，函数的定义域是 $(0, +\infty)$。
- 反函数: 详细见 微积分第一章笔记

## 2.3 幂函数 (power function)

- 详细见: <托马斯微积分> 1.1.6 幂函数

# 第 3 章 —— 函数的应用

## 3.1 函数与方程

> 3.1.1 方程的根与函数的零点

- 二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的定义域是 $R$, 值域是 $B$.
  - 当 $a > 0$ 时， $B = \{y|y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\}$
  - 当 $a < 0$ 时， $B = \{y|y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\}$
  - 对于 $R$ 中的任意一个数 $x$, 在 $B$ 中都有唯一的数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 和它对应。
- 一元二次方程 —— 判别式: *讲解见上面* .
- 根据判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 我们有:
  - (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 一元二次方程有 2 个不等的实数根 $x_1, x_2$, 相应的二次函数 的图像与 $x$ 轴有 2 个交点 $(x_1, 0), (x_2, 0)$
  - (2) 当 $\Delta = 0$ 时......
  - (3) 当 $\Delta < 0$ 时......
- 二次函数的图像与 $x$ 轴的焦点和相应的一元二次方程的根的关系，可以推广到一般情形，为此，先给函数零点的概念:

    - 对于函数 $y=f(x)$, 我们把使 $f(x)=0$ 的实数 $x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的 `零点(zero point)` .
    - 这样, 函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根, 也就是函数 $y=f(x)$ 的图像于 $x$ 轴的交点的横坐标, 所以
        - `方程` $f(x)=0$ `有实数根` $\Longleftrightarrow$ `函数` $y=f(x)$ `的图像与 x 轴有交点` $\Longleftrightarrow$ `函数` $y=f(x)$ `有零点` .
- 一般地, 我们有: **如果函数 $y=f(x)$ 在区间 [a, b] 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$, 那么,函数 $y=f(x)$在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 $c$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根.**

## 3.2 函数模型及其应用