

函数 Function

目录(Catalog)

1. 函数简介

- 1.1 函数是什么?
- 1.2 函数的定义.

2. 函数大致可以分为 2 类

- 2.1 初等函数
 - 2.1.1 初等函数的定义
 - 2.1.2 初等函数可以划分为 6 大基本初等函数 (反 对 幂 三 指 常)
 - (1) 常(数)函数 (constant function)
 - (2) 幂函数 (power function)
 - (3) 指数函数 (exponential function)
 - (4) 对数函数(logarithmic function)
 - (5) 三角函数 (trigonometric function)
 - (6) 反三角函数 (inverse trigonometric function)
 - 2.1.3 其他常见初等函数
 - (1) 双曲函数
 - (2) 反双曲函数
- 2.2 非初等函数
 - 2.2.1 阶乘函数族
 - 2.2.2 误差函数与双指数积分
 - 2.2.3 贝塞尔函数族
 - 2.2.4 椭圆函数与椭圆积分
 - 2.2.5 Zeta 函数与多对数函数
 - 2.2.6 多项式正交基
 - 2.2.5 Q 级数
 - 2.2.6 模形式
 - 2.2.7 统一函数族
 - 2.2.6 数论函数

3. 关于函数的误区

- 3.1 误区 1: 超越函数不是初等函数
- 3.2 误区 2: 绝对值函数不是初等函数
- 3.3 误区 3: 有解析式的就是初等函数

4. 另外一种初等函数的划分

- 4.1 初等函数 是由基本运算 (例如, 加减乘除, 指数运算, 对数运算) 构成的函数.
- 4.2 初等函数的分类:

- 4.2.1 **代数函数** : 能够表示为多项式方程的函数.
 - (1) **多项式** : 能够表示为变量的加减和乘.
 - (01) **线性函数** : 图像为直线的函数, 可分为 2 类:
 - (a) **零次函数 (常数函数)** : 零次多项式, 图像为水平线.
 - (b) **一次函数** : 一次函数, 图像为斜直线.
 - (02) **二次函数** : 二次多项式, 图像为抛物线.
 - (03) **三次函数**
 - (04) **四次函数**
 - (05) **五次函数**
 - (05) **六次函数**
 - (2) **有理函数** : 两个多项式函数的比.
 - (3) **开方** :
 - (01) **平方根**
 - (02) **立方根**
- 4.2.2 **基本超越函数** : 非代数函数即为 **超越函数** .
 - (1) **指数函数**
 - (2) **双曲函数** : 形式上相似于三角函数.
 - (3) **对数函数** : 指数函数的反函数; 用于求解指数方程
 - (01) **自然对数**
 - (02) **常用对数**
 - (03) **二进对数**
 - (04) **不定对数**
 - (4) 非有理次幂的 **幂函数** :
 - (5) **周期函数**
 - (01) **三角函数** : 正弦, 余弦, 正切等; 主要用于几何学和描述周期现象. 参阅 **古德曼函数** .
 - (02) **锯齿波**
 - (03) **方波**
 - (04) **三角波**

生词

- theorem ['θiərəm] --n. 定理, 法则, 命题
- elementary [ˌɛlɪ'mɛntri] --adj. 初级的; 初步的;
 - Elementary function. 初等函数
 - elementary education. (美) 初等教育
- trigonometric [ˌtrɪɡənə'metrik] (trigono-metric) --adj. 三角法的
 - trigonometric functions 三角函数
- trigonometry [ˌtrɪɡə'nɒmɪtri] (trigo-nometry) --n. 三角学, 三角法, 三角函数

- Trigonometry formulas 三角函数公式
- sine [saɪn] --n.[数]正弦
- cosine ['kəʊsaɪn] (co-sine) --n.余弦
- tangent ['tæŋ(d)ʒ(ə)nt] --n.切线; 正切. --adj.接触的; 相切的
- cotangent [kəʊ'tændʒ(ə)nt] (co-tangent) --n.[数] 余切
- secant ['si:k(ə)nt] --n.正割; 割线. --adj.分割的; 交叉的
- cosecant ['ko'sikənt] (co-secant) --n.[数]余割

内容(Content)

1. 函数简介

1.1 函数是什么?

- 待看: [函数-Wikiwand](#)
- **函数 (Function)** 在数学中为两不为空集的集合间的一种对应关系: 输入值集合中的每项元素皆能对应唯一一项输出值集合中的元素. 例如实数 x 对应到其平方 x^2 的关系就是一个函数, 若以 3 作为此函数的输入值, 所得的输出值便是9.

为方便起见, 一般做法是以符号 f, g, h 等等来指代一个函数. 若函数 f 以 x 作为输入值, 则其输出值一般写作 $f(x)$ (读作 f of x). 上述的平方函数关系写成数学式记为 $f(x) = x^2$. 函数的概念并不局限于数之间的映射关系; 表达函数有多种方式, 例如:

- **解析法** 是用数学式表达两个变量之间的对应关系;
- **图像法** 是用坐标系上的函数图形表达两个变量之间的对应关系;
- **列表法** 用表格表达两个变量之间的对应关系.

现代数学中, 函数所有输入值的集合被称作该函数的 **定义域**, 而其输出值所在的集合称为 **到达域**. 其中 **值域**: 特指该函数的输出值集合, 意即 **上域** 包含了 **值域**, 值域为上域的 **子集**. 通常输入值称作函数的参数或参量, 输出值称作函数的值. 函数将有效的输入值变换为唯一的输出值, 同一输入总是对应同一输出, 但反之未必成立.

例如: 因此如 $Root(x) = \sqrt[2]{x}$ 这样的表达式并没有定义出一个函数, 因为输出值有两个可能. 定义函数时需确定每一个输入值只对应唯一输出值, 因此必须明确地选择一个平方根. 例如定义 $Posroot(x) = \sqrt{x}$, 亦即对于任何非负输入值, 选择其非负平方根作为函数值.

- 定义来源 [函数-Wiki](#)

1.2 函数的定义.

- 高中《必须1》对函数的定义: [./## 基础数学/高中数学/必修1.md](#)
- 《托马斯大学微积分》对函数的定义:
 - 1.1.1 **函数**, **定义域** 与 **值域**. 见: [../## 微积分-Calculus/《University Calculus》/Chapter01-函数](#)

2. 函数大致可以分为 2 类

2.1 初等函数

2.1.1 初等函数的定义

- [初等函数-Wiki](#)
- 初等函数(基本函数) 是由 常(数)函数(constant function), 幂函数(power function), 指数函数(exponential function), 对数函数(logarithmic function), 三角函数(trigonometric function), 反三角函数(inverse trigonometric function) 经过有限次的有理运算(加, 减, 乘, 除, 有限次乘方, 有限次开方) 以及有限次 函数复合 所产生, 并且在 定义域 上能用一个 方程式 表示的函数.

一般来说, 分段函数不是初等函数, 因为在这些分段函数的定义域上不能用一个解析式表示.

2.1.2 初等函数可以划分为 6 大基本初等函数 (反 对 幂 三 指 常)

- (1) 常(数)函数 (constant function)
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/1_常\(数\)函数_constant-function.md](#)
- (2) 幂函数 (power function)
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/2_幂函数_power-function.md](#)
- (3) 指数函数 (exponential function)
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/3_指数函数_exponential-function.md](#)
- (4) 对数函数(logarithmic function)
 - 对数函数: 指数函数的反函数; 用于求解指数方程.
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/4_对数函数_logarithmic-function.md](#)
- (5) 三角函数 (trigonometric function)
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/5_三角函数_trigonometric-function.md](#)
- (6) 反三角函数 (inverse trigonometric function) (即: 反函数)
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/6_反函数_inverse-trigonometric-function.md](#)

2.1.3 其他常见初等函数

- (1) 双曲函数
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/双曲函数.md](#)
- (2) 反双曲函数
 - 完整讲解见同目录: [./## 初等函数/反双曲函数.md](#)

2.2 非初等函数

- 笔记来自当前文件的上级目录: [../初等函数之上有无定义高等函数.pdf](#) .

2.2.1 阶乘函数族

2.2.2 误差函数与双指数积分

2.2.3 贝塞尔函数族

2.2.4 椭圆函数与椭圆积分

2.2.5 Zeta 函数与多对数函数

2.2.6 多项式正交

2.2.5 Q 级数

2.2.6 模形式

2.2.7 统一函数族

2.2.6 数论函数

3. 关于函数的误区

- 笔记来自当前文件的上级目录: [../初等函数之上有无定义高等函数.pdf](#)

3.1 误区 1: 超越函数不是初等函数

- 错, 事实上除了 **常函数** 与 **整数次幂函数**, 其他都叫 **初等超越函数**, 比如 $\sin(2)$, $\arcsin 2$, $\log_2 2$, e^2 ... 统统是 **超越数**, 刘维尔虽然是超越数的提出者, 但划分的时候并没有这方面的考虑, 而且当时也无法判断这些数的超越性.

3.2 误区 2: 绝对值函数不是初等函数

- 错, $\text{abs}(x) = |x| = \sqrt[2]{x^2}$ 难道不是基本初等函数符合而成的吗? 分段函数不一定不是初等函数, 事实上只要没有跳跃间断点就都能初等表达.

3.3 误区 3: 有解析式的就是初等函数

- 解析式这个词, 是欧拉用的, 现在的等价术语是 **封闭形式**, 封闭解只要求闭包, 对具体的生成元没有要求, 初等函数符合正好符合而已. 在现代, 解析函数一般是指局部上由收敛幂级数给出的函数

4. 另外一种初等函数的划分

- 笔记来源: [函数列表-Wikiwand](#)
- Notice: 下面这种对初等函数的划分, 从上面 "误区 1" 的回答便可以看出是一种更合理的划分方法:

4.1 **初等函数** 是由基本运算 (例如, 加减乘除, 指数运算, 对数运算) 构成的函数.

4.2 初等函数的分类:

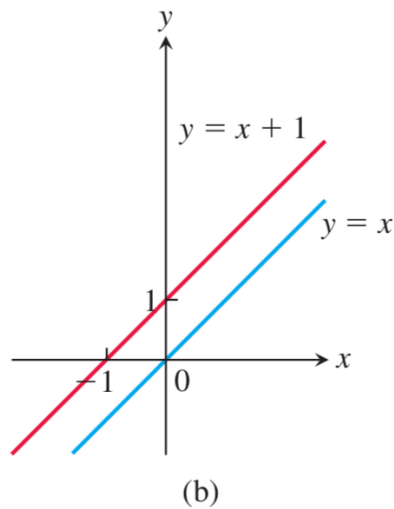
- 4.2.1 **代数函数** : 能够表示为多项式方程的函数.
 - (1) **多项式** : 能够表示为变量的加减和乘.
 - (01) **线性函数** : 图像为直线的函数, 可分为 2 类:
 - (a) **零次函数 (常数函数)** : 零次多项式, 图像为水平线.
 - (b) **一次函数** : 一次函数, 图像为斜直线.
 - (02) **二次函数** : 二次多项式, 图像为抛物线.
 - (03) **三次函数**
 - (04) **四次函数**
 - (05) **五次函数**

- (05) 六次函数
 - (2) 有理函数 : 两个多项式函数的比.
 - (3) 开方 :
 - (01) 平方根
 - (02) 立方根
 - 4.2.2 基本超越函数 : 非代数函数即为 超越函数 .
 - (1) 指数函数
 - (2) 双曲函数 : 形式上相似于三角函数.
 - (3) 对数函数 : 指数函数的反函数; 用于求解指数方程
 - (01) 自然对数
 - (02) 常用对数
 - (03) 二进对数
 - (04) 不定对数
 - (4) 非有理次幂的 幂函数 :
 - (5) 周期函数
 - (01) 三角函数 : 正弦, 余弦, 正切等; 主要用于几何学和描述周期现象. 参阅 高德曼函数 .
 - (02) 锯齿波
 - (03) 方波
 - (04) 三角波
-
-

一次函数(线性函数 linear function)

- 在初等代数与解析几何中, 线性函数是指拥有一个变数的一阶多项式函数或是只有常数的函数, 因为在直角坐标系中这些函数的图形是直线。所在, 这些函数是线性的。

线性函数可以表达为 **斜截式**: $y = ax + b (a \neq 0)$ 的定义域是 R , 值域也是 R , 对于 R 中的任意一个数 x , 在 R 中都有唯一的数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 和它对应。其中 a 是斜率, b 是 y 轴截距, 即函数的图形与 y 轴相交的 y 坐标, 改变斜率 a 会使直线更陡峭或平缓。改变 y 轴截距 b 会将直线向上或 向下平移。



- 高等数学用法: 在高等数学里, 线性函数是一种线性映射, 是在两个向量空间之间, 维持向量加法与标量乘法的映射。
 - $f(x + y) = f(x) + f(y)$
 - $f(ax) = af(x)$
 - 例如我们用 "坐标向量" 来表示 x 与 $f(x)$, 那么线性函数可以表达成 $f(x) = Mx$, 当中 M 为矩阵。

二次函数 (quadratic function)

- $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的定义域是 R , 值域是 B .
- 如果令二次函数的值等于0, 则可得一个二次方程。该方程的解称为方程的根或函数的零点.
- 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的 2 个根为:
 - $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [读作: $b^2 - 4ac$ 的 2 次方根]
-
- 解析式: $f(x) = x^2 - x - 2$
 - 当 $a > 0$ 时, $B = \{y \mid y \geq \frac{(4ac - b^2)}{4a}\}$;
 - 当 $a < 0$ 时, $B = \{y \mid y < \frac{(4ac - b^2)}{4a}\}$;
 - 对于 R 中的任意一个数 x , 在 B 中都有唯一的数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 和它对应。