A版-必修5

目录 (Table of Content)

生词

- **geometric [ˌdʒɪə'metrɪk] --adj.几何学的; 几何学图形的**
  - geometric shape 几何形状
  - geometric figures. 几何学图形
  - a geometric design. 几何图形
- **ratio ['reɪʃɪəʊ] --n.比率, 比值**
  - amplification ratio 放大比率
  - calculate the ratios to one decimal place. 比率计算至小数点后第一位.
  - It defines the aspect ratio of the image. 它定义了图像的纵横比

前置知识

- 连接圆上任意 2 点的线段叫做弦, 经过圆心的弦叫做直径, 直径是一个圆里最长的弦.
- 定点在圆周上, 并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.
- 定点在圆心上的角叫做圆心角.
- 圆周角定理:
  - 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角都等于这条弧所对的圆心角的一半.
  - 圆周角的读数等于它所对的弧的度数的一半.
  - 同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 相等圆周角所对的弧也相等.
  - 半圆 (或直径) 所对圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.
  - 圆的内接四边形的对角互补, 并且任何一个外角都等于它的内对角.
  - 在同圆或等圆中, 圆周角相等 $\Longleftrightarrow$ 弧相等 $\Longleftrightarrow$ 弦相等 $\Longleftrightarrow$ 弦心距 (圆心到弦的弦的垂直距离)相等.
- 圆心角定理
  - 在同圆或等圆中, 若两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等, 则对应的 其余各组量也相等
    - (1) 等弧对等圆心角
    - (2) 把顶点在圆心的周角等分成360份时, 每一份的圆心角是1°的角.
    - (3) 因为在同圆中相等的圆心角所对的弧相等, 所以整个圆也被等分成360份, 把每一份这样得到的弧叫做1°的弧
    - (4)圆心角的度数和它们对的弧的度数相等
- 公式:

- 弦长: 见 必修2
  - 弧长: 见 必修2
  - 扇形面积:见 必修2

第 1 章 —— 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

- 1.1.1 正弦定理
  - > 定义: 正弦定理是三角學中的一個定理.它指出：對於任意 $\triangle ABC$, a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边, R 为 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑, 则有 $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R$
  - 证明详见:

【正弦定理(sine law)】

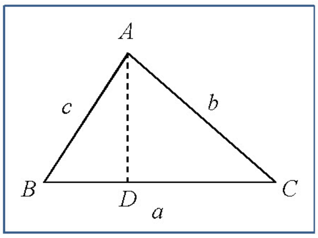
ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 ΔABC 之外接圓半徑。

[證明]

1. 如右圖，$\overline{AD}=c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$

   ΔABC 面積 $=\Delta=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$

   同理可證 $\Delta=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin A$



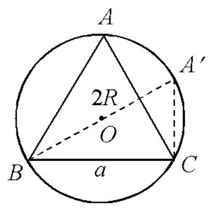
2. $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

   同乘以 $\frac{2}{abc}$ 可得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

3. (1) 若 ΔABC 為銳角 Δ，則作圖如右：

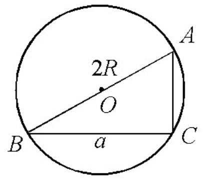
   因為 $\angle A'=\angle A$，所以 $\sin A'=\frac{a}{2R}\rightarrow\sin A=\frac{a}{2R}$

   故得 $\frac{a}{\sin A}=2R\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。



   (2) 若 ΔABC 為直角 Δ，則作圖如右：

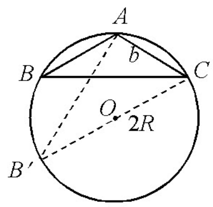
   $\sin A=\frac{a}{2R}\rightarrow\frac{a}{\sin A}=2R\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$



   (3) 若 ΔABC 為鈍角 Δ，則作圖如右：

   因為 $\angle B'=\angle B$，所以 $\sin B'=\frac{b}{2R}\rightarrow\sin B=\frac{b}{2R}$

   故得 $\frac{b}{\sin B}=2R\rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。



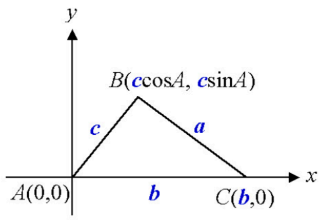
- 正弦定理常见变形:
  - $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$
- 1.1.2 余弦定理
  -
  - 第 1 种证明为:
    - Tip: 下图的 $\angle B$ 实际上是直角三角形.

【餘弦定理(cosine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$。

[證明]

作圖如右：



$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= a^2 \\ &= (c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2 \\ &= c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A \\ &= b^2+c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)-2bc\cos A \\ &= b^2+c^2-2bc\cos A \end{aligned}$$

同理可證 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 與 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

由 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$ 移項整理可得 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

  - 第 2 种证明为:
    - 这个证明来自于 `必修 5` 书本, 但是理论上来说我认为不如上面

1.2 应用举例

海伦和秦九韶

1.3 实习作业

第 2 章 —— 数列

2.1 数列的概念与简单表示法

- 传说古希腊毕达哥拉斯[01]学派的数学家经常在沙滩上研究数学问题, 他们在沙滩上画点或用小石子来表示数. 比如, 他们研究过 1, 3, 6, 10, ... 见下图

- 01: 毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前 570 年 ~ 约公元前 500 年)

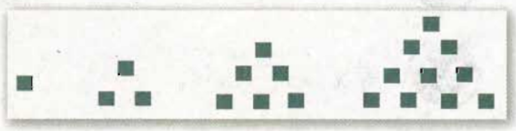


图 2.1-1

由于这些数可以用 图 2.1-1 中所示的三角形点阵表示, 他们就将其称为三角形数. 类似地, 1, 4, 9, 16, ..., 被称为正方形数、因为这些数能够表示成正方形. 即图 2.1-2

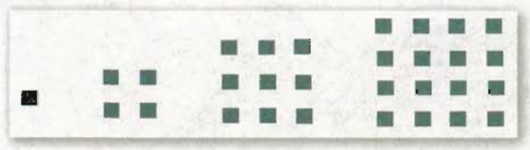


图 2.1-2

- 我们来分析一下 图 2.1-1 中的 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... 这些数的规律:

```
1  = 0 + 1,
3  = 1 + 2,
6  = 3 + 3,
10 = 6 + 4,
15 = 10 + 5,
21 = 15 + 6,
...
```

如果我们按照这种对应格式

```
1,   3,   6,   10,  15,  21,
|    |    |    |    |    |
a_1  a_2  a_3  a_4  a_5  a_6
```

- Tip: 上面的 a_1 = a_1, a_2 = a_2, a_3 = a_3, ... 由于无法在代码块中使用 LaTex 转换, 所以看起来很别扭, 为了排版好看, 只能讲究一下了.

把每一项和 a_n 对应起来, 那么上面的规律最终可以写成这样:

```
1  = 0 + 1,  <=>  a_1 = a_0 + 1
3  = 1 + 2,  <=>  a_2 = a_1 + 2
6  = 3 + 3,  <=>  a_3 = a_2 + 3
10 = 6 + 4,  <=>  a_4 = a_3 + 4
15 = 10 + 5, <=>  a_5 = a_4 + 5
21 = 15 + 6, <=>  a_6 = a_5 + 6
...
```

通过上面的现有规律我们可以总结一个公式即:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

, 我们可以确定对目前的已知项此公式是对的, 但是不能确定尚未写出的其他项是不是正确的, 实际上能够证明后面的其他项套用这个公式也是正确的, 这个牵扯到 "数学归纳法" 的证明, 在: ../如何证明数学归纳法是正确的.md 这个文件中会给出详细的证明, 但是目前对于刚学习数列概念的我们, 只需要知道此公式适用于下面未写出的其他项即可, 等学完整个 "第二章 -- 数列" 记得

回头来看证明即可.

图 2.1-2 的规律和上面 2.1-1 相同, 不再重复记录步骤, 你可以自己尝试证明.

- 下面我们给出有关 `数列` 的一些定义:
  - tip: 下面的定义可能和书本不太一样, 一些内容来自 维基百科-数列.

  `数列(sequence of number)` 是一列(两个以上)按顺序排列的数, 所组成的序列.

  - tip: 关于 `序列` 见 ../序列是什么.md

  数列中的每一个数叫做这个数列的 `项` . 数列中的每一项都和它的序号有关, 排在第一位的数称为这个数列的第 1 项(通常也叫做 `首项`), 排在第二位的数称为这个数列的第 2 项 $\cdots\cdots$ 排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项.

  所以, 数列的一般形式可以写成

  $$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots,$$

  记作: $<a_n>$, $\{a_n\}$ 或 (a_n).

  - tip: $\{a_n\}$ 是表示数列的一种方式, 不是无序的集合符号.
  - Added: 我们可能会见到另外一种叙述数列一般形式的说法, 如下, 记作: $<a_k>$, $\{a_k\}$ 或 (a_k): $\{a_k\}_{k=1}^{n} = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 其中 $n \in Z^+$, Z^+ 是正整数集.

  项数有限的数列叫做 `有穷数列` , 项数无限的数列叫做 `无穷数列` .

  从第 2 项起, 每一项都大于它的前一项的数列叫做 `递增数列` ;

  从第 2 项起, 每一项都小于它的前一项的数列叫做 `递减数列` ,

  各项相等的数列叫做 `常数列` ;

  从第 2 项起, 有些项大于它的前一项, 有些项小于它的前一项的数列叫做 `摆动数列` .

- 数列可以看成以正整数集 N^+ (或它的有限子集 {1, 2, 3, $\cdots$, n}) 为定义域的函数 $a_n = f(n)$ 当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的一列函数值 (下图 2.1-3). 反过来, 对于函数 $y = f(x)$, 如果 $f(i)$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ 有意义, 那么我们可以得到一个数列

  $$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots.$$

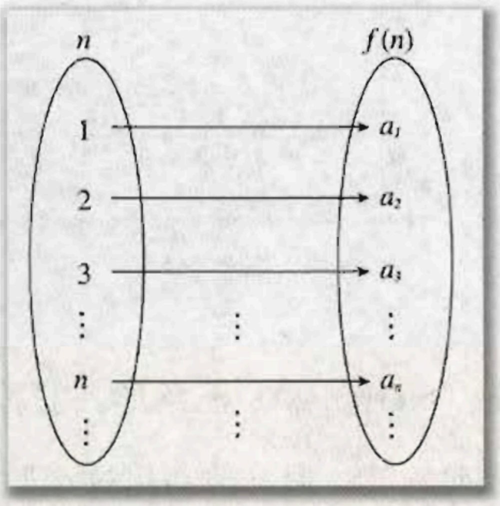


图 2. 1-3

斐波那契数列

估计 $\sqrt{2}$ 的值

2.2 等差数列

2.3 等差数列的前 n 项和

2.4 等比数列 (geometric sequence)

- 等比数列, 又称"几何数列". 是一种特殊数列. 它的特点是: 从第 2 项起, 每一项与前一项的比都是一个常数.
    - 例如: 数列 2, 4, 8, 16, 32, ... , 2^n, 2^{n+1}, ... 这就是一个等比数列, 因为第 2 项与第 1 项的比和第 3 项与第 2 项的比相同, 都等于 2, 2^{198} 与 2^{197} 的比也等于 2. 如 2 这样, 后一项与前一项的比称为 `公比(common ratio)` , 通常用字母 `r` 或 `q` .
- **等比公式**
    - 根据等比数列的定义可得: $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$
- **通项公式**
    - 可以任意定义一个等比数列 a_n, 这个等比数列从第一项起分别是 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. 公比为 `r` , 则有:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 r \\
a_3 &= a_2 r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 r = a_2 r^2 = a_1 r^3 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
$$

    - 以此可推得, 等比数列 a_n 的通项公式为:
        - $a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$
- **求和公式**
    - 对上面定义的等比数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ 的所有项累加. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ 称为 `等比数列的和` 或 `等比级数` , 记为 S_n.
    - 如果该等比数列的公比为 q, 则有:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \text{利用等比数列通项公式} \ldots (1)
\end{aligned}
$$

    - 先将两边同时乘以公比 q, 有

$$
qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n \ldots (2)
$$

    - (1) - (2) 式, 有:

$$
(1-q) S_n = a_1 - a_1 q^n \ldots (3)
$$

    - 然后进行讨论: 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$; 而当 $q = 1$ 时, 由 (3) 式2无法得通项公式.
    - 但可以发现, 此时:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \\
&= a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 \qquad\qquad = n a_1
\end{aligned}
$$

- 综上所述, 等比数列 a_n 得求和公式为:

$$
S_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} & (q \neq 1) \\ n a_1 & (q = 1) \end{cases}
$$

- 经过推导, 可以得到另外一个求和公式: 当 $q \neq 1$ 时： $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$ (Tip：也既是上下项都乘以 -1)

- **当 $-1 < q < 1$ 时, 等比数列无限项之和**
  - 由于当 $-1 < q < 1$ 及 n 得值不断增加时, q^n 得值便会不断减少而且趋于 0, 因此 无限项之和为:

$$
S = \lim_{n \to \infty}
$$

2.5 等比数列的前 n 项和

九连环

购房中的数学

第 3 章 —— 不等式

3.1 不等关系与不等式

3.2 一元二次不等式及其解法

3.3 二元一次不等式 (组) 与简单的线性

3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$