A版-必修5

目录 (Table of Content)

生词:

-

前置知识

- 连接圆上任意 2 点的线段叫做弦，经过圆心的弦叫做直径，直径是一个圆里最长的弦。
- 定点在圆周上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角。
- 定点在圆心上的角叫做圆心角。
- 圆周角定理:
    - 在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角都等于这条弧所对的圆心角的一半。
    - 圆周角的读数等于它所对的弧的度数的一半。
    - 同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，相等圆周角所对的弧也相等。
    - 半圆 (或直径) 所对圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径。
    - 圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角。
    - 在同圆或等圆中，圆周角相等 $\Longleftrightarrow$ 弧相等 $\Longleftrightarrow$ 弦相等 $\Longleftrightarrow$ 弦心距 (圆心到弦的弦的垂直距离)相等。
- 圆心角定理
    - 在同圆或等圆中，若两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，则对应的 其余各组量也相等
        - (1) 等弧对等圆心角
        - (2) 把顶点在圆心的周角等分成360份时，每一份的圆心角是1°的角.
        - (3) 因为在同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆也被等分成360份，把每一份这样得到的弧叫做1°的弧
        - (4)圆心角的度数和它们对的弧的度数相等
- 公式:
    - 弦长: 见 **必修2**
        - 弧长: 见 **必修2**
        - 扇形面积:见 **必修2**

第 1 章 —— 解三角形

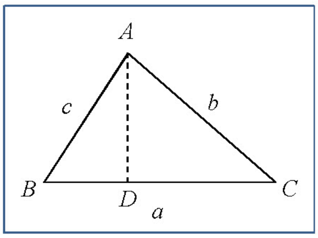
1.1 正弦定理和余弦定理

- 1.1.1 **正弦定理**
    - > 定义: 正弦定理是三角學中的一個定理。它指出：對於任意 $\triangle ABC$, a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边, R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则有 $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R$
    - 证明详见:

【正弦定理(sine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 ΔABC 之外接圓半徑。

[證明]



1. 如右圖，$\overline{AD}=c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$

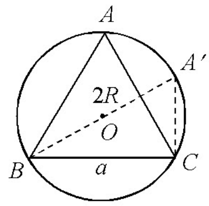
   ΔABC 面積 $=\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$

   同理可證 $\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin A$

2. $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

   同乘以 $\dfrac{2}{abc}$ 可得 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

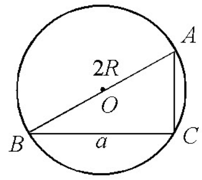
3. (1) 若 ΔABC 為銳角 Δ，則作圖如右：



   因為 $\angle A'=\angle A$，所以 $\sin A'=\dfrac{a}{2R}$ $\rightarrow$ $\sin A=\dfrac{a}{2R}$

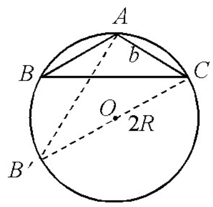
   故得 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

   (2) 若 ΔABC 為直角 Δ，則作圖如右：



   $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

   (3) 若 ΔABC 為鈍角 Δ，則作圖如右：



   因為 $\angle B'=\angle B$，所以 $\sin B'=\dfrac{b}{2R}$ $\rightarrow$ $\sin B=\dfrac{b}{2R}$

   故得 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

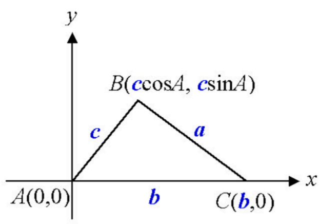
  - 正弦定理常见变形:
    - $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$
- 1.1.2 **余弦定理**
  - 第 1 种证明为:
    - Tip: 下图的 $\angle B$ 实际上是直角三角形.

【餘弦定理(cosine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$。

[證明]

作圖如右：



$$
\begin{aligned}
\overline{BC}^2 &= a^2 \\
&= (c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2 \\
&= c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A \\
&= b^2+c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)-2bc\cos A \\
&= b^2+c^2-2bc\cos A
\end{aligned}
$$

同理可證 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 與 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

由 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$ 移項整理可得 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

- 第 2 种证明为:
  - 这个证明来自于 `必修 5` 书本, 但是理论上来说我认为不如上面

1.2 应用举例

海伦和秦九韶

1.3 实习作业

第 2 章 —— 数列

2.1 数列的概念与简单表示法

斐波那契数列

估计 $\sqrt{2}$ 的值

2.2 等差数列

2.3 等差数列的前 n 项和

2.4 等比数列

- 等比数列，又称"几何数列"。 是一种特殊数列。它的特点时: 从第 2 项起，每一项与前一项的比都是 一个常数。
    - 例如: 数列 2, 4, 8, 16, 32, ... , 2^n , 2^{n+1}, ...。这就是一个等比数列， 因为第 2 项与第 1 项的比和第 3 项与第 2 项的比相同， 都等于 2， 2^198 与 2^197 的比也等于 2。如 2 这样，后一项与前一项的比称为**公比**， 符号为 "r".

> 公式:

- **等比公式**
    - 根据等比数列的定义可得:
        - $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}\ (n \geq 2)$
- **通项公式**
    - 可以任意定义一个等比数列 a_n, 这个等比数列从第一项起分别是 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, 公比为 r, 则有:

$$
\begin{align}
a_2 &= a_1 r \\
a_3 &= a_2 r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 r = a_2 r^2 = a_1 r^3 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{align}
$$

- 以此可推得，等比数列 a_n 的通项公式为:
    - $a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$
- **求和公式**
    - 对上面定义的等比数列 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ 的所有项累加。 $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ 称为**等比数列的和**或 **等比级数**， 记为 S_n 。
    - 如果该等比数列的公比为 q, 则有:

$$
\begin{align}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\
&= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} \text{利用等比数列通项公式}...(1)
\end{align}
$$

- 先将两边同时乘以公比 q, 有

$$
qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^n ...(2) \tag{9}
$$

- (1) - (2) 式，有:

$$
(1 - q) S_n = a_1 - a_1 q^n ...(3) \tag{10}
$$

- 然后进行讨论: 当 $q \neq 1$ 时， $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$; 而当 $q = 1$ 时， 由 (3) 式2无法得通项公式。
- 但可以发现, 此时:

$$
\begin{align}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \tag{11} \\
&= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} \tag{12} \\
&= a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 \qquad = na_1 \tag{13}
\end{align}
$$

- 综上所述，等比数列 a_n 得求和公式为:

$$
S_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} & (q \neq 1) \\ na_1 & (q = 1) \end{cases} \tag{14}
$$

    - 经过推导，可以得到另外一个求和公式: 当 $q \neq 1$ 时： $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1q^n-a_1}{q-1}$ (Tip：也既是上下项都乘以 -1)
- **当 $-1 < q < 1$ 时， 等比数列无限项之和**
    - 由于当 $-1 < q < 1$ 及 n 得值不断增加时，q^n 得值便会不断减少而且趋于 0，因此 无限项之和为:

$$S = \lim_{n \to \infty} \tag{15}$$

2.5 等比数列的前 n 项和

九连环

购房中的数学

第 3 章 —— 不等式

3.1 不等关系与不等式

3.2 一元二次不等式及其解法

3.3 二元一次不等式 (组) 与简单的线性

3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$