

九年级数学上册

目录(Catalog)

- 第 21 章: 二次根式
 - 21.1 二次根式 (2)
 - 阅读材料: 蚂蚁和大象一样重吗? (4)
 - 21.2 二次根式的乘除 (5)
 - 21.2.1 二次根式的乘法 (5)
 - 21.2.2 积的算术平方根 (6)
 - 21.2.3 二次根式的除法 (7)
 - 21.3 二次根式的加减 (10)
 - 21.4 小结 (13)
 - 21.5 复习题 (15)
- 第 22 章: 一元二次方程
 - 22.1 一元二次方程 (18)
 - 22.2 一元二次方程的解法 (20)
 - 22.2.1 直接开平方法和因式分解法 (20)
 - 22.2.2 配方法 (25)
 - 22.2.3 公式法 (28)
 - 22.2.4 一元二次方程根的判别式 (31)
 - 22.2.5 一元二次方程的根与系数的关系 (33)
 - 阅读材料 "代数学之父" 韦达 (37)
 - 22.3 实践与探索 (28)
 - 22.4 小结 (43)
 - 22.5 复习题 (45)
- 第 23 章: 图形的相似
 - 23.1 成比例线段 (48)
 - 23.1.1 成比例线段 (48)
 - 23.1.2 平行线分线段成比例 (51)

- 阅读材料 黄金分割 (56)
- 23.2 相似图形 (57)
- 23.3 相似三角形 (61)
 - 23.3.1 相似三角形 (61)
 - 23.3.2 相似三角形的判定 (64)
 - 23.3.3 相似三角形的性质 (71)
 - 23.3.4 相似三角形的应用 (72)
- 23.4 中位线 (77)
- 23.5 位似图形 (80)
- 阅读材料 数学与艺术的美妙结合--分形 (82)
- 23.6 图形与坐标 (84)
 - 23.6.1 用坐标确定位置 (84)
 - 23.6.2 图形的变换与坐标 (88)
- 23.7 小结 (94)
- 23.8 复习题 (95)
- 第 24 章: 解直角三角形
 - 24.1 测量 (100)
 - 24.2 直角三角形的性质 (102)
 - 24.3 锐角三角函数 (105)
 - 24.4 解直角三角形 (111)
 - 阅读材料 葭生池中 (118)
 - 24.5 小结 (119)
 - 24.6 复习题 (120)
 - **总和与实践 高度的测量** (124)
- 第 25 章: 随机事件的概率
 - 25.1 在重复试验中观察不确定现象 (126)
 - 阅读材料
 - 计算机帮我们画趋势图 (134)
 - 搅匀对保证公平很重要 (135)
 - 25.2 随机事件的概率 (136)
 - 25.2.1 概率及其意义 (136)
 - 25.2.2 频率与概率 (141)
 - 阅读材料 电脑键盘上的字母为何不按字母顺序排列 (147)
 - 25.2.3 列举所有机会均等的结果 (149)
 - 阅读材料

- *The Birthday Problem* 生日问题 (155)
 - 模拟实验 (157)
- 25.3 小结 (158)
- 25.4 复习题 (159)
- 综合与实践 骰(tou)子与概率 (162)
- 数学实验附图
 - 方格图 (163)
 - 点格图 (165)

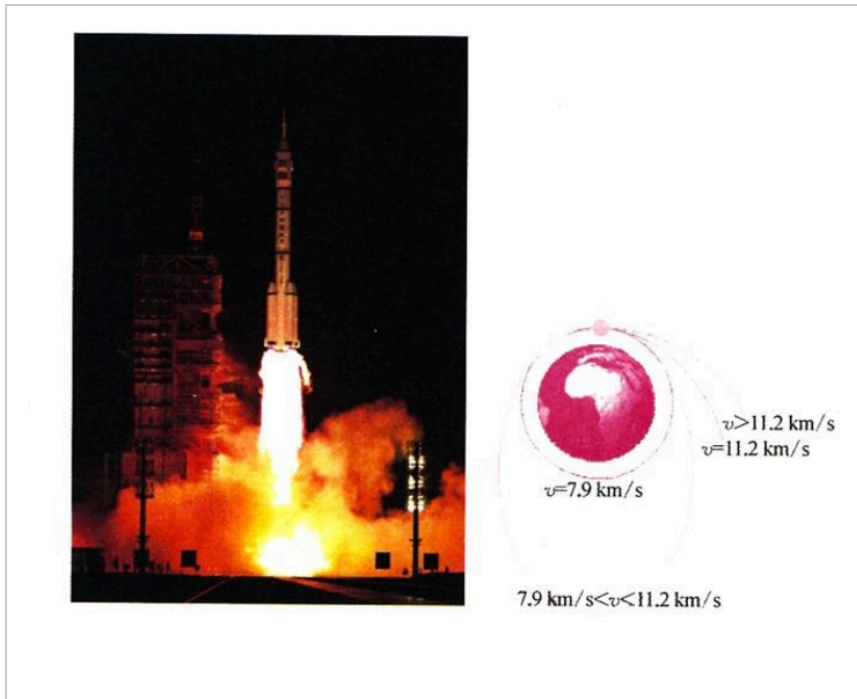
生词(New Word)

- Nu (ν) [nu:] --n.希腊字母的第13个字母
- quadratic [kwɒ'dræɪɪk] --adj.二次的。--n.二次方程式
 - complete quadratic equation 完全二次方程
- equation [ɪ'kweɪʒ(ə)n] --n.相等；均衡；方程式；等式
 - I can't make this equation come out. 我不会解这个方程式。
 - an equation of the second degree. 二次方程式

内容(Content)

第 21 章: 二次根式

- 21.1 二次根式 (2)



人造地球卫星要冲出地球, 围绕地球运动, 发射时就必须达到一定的速度, 这个速度称为第一宇宙速度. 计算第一宇宙速度的公式是:

$$\nu = \sqrt[3]{gR} \quad (1)$$

其中 g 为重力加速度, R 为地球半径.

○ 概括(1):

- $\sqrt[2]{a} (a \geq 0)$ 表示非负数 a 的算术平方根, 也就是说, $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 是一个非负数, 它的平方等于 a , 既有:
 - (1) $\sqrt{a} (a \geq 0)$ [读作: a 的二次方根 或 a 的平方根. 通常简读为: 根号 a]
 - (2) $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ [读作: a 的平方根的平方]
- 形如 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 的式子叫做 **二次根式**

○ 注意:

- 在 \sqrt{a} 中, a 的取值必须满足 $(a \geq 0)$, 即二次根式的被开方数必须是非负数.
- 例: x 是怎样的实数时, 二次根数 $\sqrt{x-1}$ 有意义? 答: 略.

○ 概括(2):

- $\sqrt{a^2}$ 等于什么?
 - (1) 当 $a \geq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = a$ [读作: a 的平方的二次方根等于 a]
 - (1) 当 $a \leq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = -a$

• 阅读材料: 蚂蚁和大象一样重吗? (4)

• 21.2 二次根式的乘除 (5)

○ 21.2.1 二次根式的乘法 (5)

- **公式(1):** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$ [简读为: 根号 a 乘以根号 b 等于根

号 a 乘以 b , a 大于等于 0, b 大于等于 0]

两个算术平方根的积, 等于它们被开方数的积的算术平方根.

○ 21.2.2 积的算术平方根 (6)

- 公式(2): $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

积的算术平方根, 等于个因式算术平方根的积.

○ 21.2.3 二次根式的除法 (7)

- 公式(3): $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

两个算术平方根的商, 等于商的算术平方根.

- 公式(3)也可写成: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

商的算术平方根, 等于两个算术平方根的商.

- 最简二次根式:

例 2 化简 $\sqrt{12}$, 使被开方数不含完全平方的因数.

解

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

这里, 被开方数 $12 = 2^2 \times 3$, 含有完全平方的因数 2^2 , 通常可根据积的算术平方根的性质, 并利用 $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$, 将这个因数“开方”出来.

例 4 化简 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 使分母中不含二次根式, 并且被开方数中不含分母.

解

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \times 2}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

这里, 二次根式 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的被开方数中含有分母, 通常可利用分数(或分式)的基本性质将分母“配”成完全平方, 再“开方”出来.

按照例2 和例4 的要求, 化简后的二次根式被开方数中不含分母, 并且被开方数中所有因数(或因式)的幂的指数都小于2, 像这样的二次根式称为最简二次根式.

● 21.3 二次根式的加减 (10)

○ 概括

- 与整式中同类项相类似, 我们把像 $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt{a}$ 与 $4\sqrt{a}$ 这样的几个二次根式, 称为同类二次根式.
- 二次根式的加减, 与整式的加减类似, 关键是将同类二次根式合并.
- 例如:

例 2 计算:

$$(1) \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{45}; \quad (2) \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{32} - \sqrt{18}.$$

解 (1) $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{45}$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{3} + 3\sqrt{5}.$$

$$(2) \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{5}{2} + 4 - 3\right)\sqrt{2}$$

$$= \frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

例 3 计算:

$$(1) (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1); \quad (2) (\sqrt{2} - 1)^2.$$

解 (1) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

$$= (\sqrt{2})^2 - 1^2$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1.$$

$$(2) (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2$$

$$= 3 - 2\sqrt{2}.$$

- 21.4 小结 (13)
- 21.5 复习题 (15)

第 22 章: 一元二次方程

- 22.1 一元二次方程 (18)

问题

问题 1

绿苑小区在规划设计时,准备在两幢楼房之间,设置一块面积为 900 平方米的矩形绿地,并且长比宽多 10 米,那么绿地的长和宽各为多少?

分析 我们已经知道可以运用方程解决实际问题.

设绿地的宽为 x 米,不难列出方程

$$x(x+10) = 900,$$

整理得

$$x^2 + 10x - 900 = 0. \quad (1)$$

问题 2

学校图书馆去年年底有图书 5 万册,预计到明年年底增加到 7.2 万册. 求这两年的年平均增长率.

分析 设这两年的年平均增长率为 x .

已知去年年底的图书数是 5 万册,则今年年底的图书数是 $5(1+x)$ 万册.

同样,明年年底的图书数又是今年年底图书数的 $(1+x)$ 倍,即 $5(1+x)(1+x) = 5(1+x)^2$ (万册).

可列得方程

$$5(1+x)^2 = 7.2,$$

整理可得

$$5x^2 + 10x - 2.2 = 0. \quad (2)$$

概括:

- 上述问题中 (1) 和 (2) 两个整式方程中都只含有一个未知数(x), 并且未知数的最高次数是 2 (注: x^2), 这样的方程叫做 **一元二次方程** (quadratic equation with one unknown). 一元二次方程的一般形式是:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0; a, b, c \text{ 是已知数}) \quad (2)$$

22.2 一元二次方程的解法 (20)

22.2.1 直接开平方方法和因式分解法 (20)

■ 直接开平方方法 :

- (1) 解方程 $x^2 = 4$;

- 解: 对于题 (1) 有这样的解法:

方程 $x^2 = 4$ 意味着 x 是 4 的平方根, 所以 $x = \pm\sqrt{4}$, 即 $x = \pm 2$. 这里得到了方程的 2 个根, 通常也表示成

$$x_1 = 2, x_2 = -2.$$

这种解一元二次方程的方法叫做 **直接开平方方法**.

■ 因式分解法 :

- (2) 解方程 $x^2 - 1 = 0$.

- 解: 对于题 (2) 有这样的解法:

将方程左边用平方差公式分解因式, 得

$$(x-1)(x+1) = 0,$$

必有 $x-1=0$ 或 $x+1=0$.

分别解这 2 个一元一次方程, 得

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

这种解一元二次方程的方法叫做 **因式分解法**.

■ 例1 解下列方程:

- (1) $x^2 - 2 = 0$. (2) $16x^2 - 25 = 0$

解 (1) 移项,得

$$x^2 = 2.$$

直接开平方,得

$$x = \pm \sqrt{2}.$$

即 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}.$

(2) 移项,得

$$16x^2 = 25.$$

方程两边都除以 16,得

$$x^2 = \frac{25}{16}.$$

直接开平方,得

$$x = \pm \frac{5}{4}.$$

即 $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = -\frac{5}{4}.$

■ **例2** 解下列方程:

■ (1) $3x^2 + 2x = 0.$ (2) $x^2 = 3x.$

解 (1) 方程左边分解因式,得

$$x(3x + 2) = 0.$$

所以 $x = 0$ 或 $3x + 2 = 0.$

得 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}.$

(2) 移项,得

$$x^2 - 3x = 0.$$

方程左边分解因式,得

$$x(x - 3) = 0.$$

所以 $x = 0$ 或 $x - 3 = 0.$

得 $x_1 = 0, x_2 = 3.$

■ **读一读: 什么时候两数的乘积为零** -- 谈谈因式分解法解方程的依据

- 用因式分解法解一元二次方程时,我们现将左边化为 2 个一次因式的乘积,右边是 0 的形式,如 "试一试" 中的 $(x - 1)(x + 1) = 0$; 然后由乘积等于 0, 得到 2 个因式中至少有一个等于 0, 从而将一元二次方程 "降次", 转

化为2个一元二次方程: $x - 1 = 0$ 和 $x + 1 = 0$ 来解.

这里方程变形的依据, 实际上还是关于等式的性质: **两数乘积等于零, 必须且只需其中至少有一个乘数等于 0**. 也就是说, 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时, $ab = 0$, 证明如下:

设 a, b 是两个实数, 如果 $a = 0$ 或 $b = 0$, 因为 0 乘以任何数都等于 0, 所以 $ab = 0$;

反过来, 如果 $ab = 0$, 那么必须有 $a = 0$ 或 $b = 0$. 我们不难用反证法证明这个结论. 事实上, 假设结论不成立, 即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 这时必有 $ab \neq 0$, 与已知 $ab = 0$ 矛盾, 所以假设不成立, 即 $a = 0$ 或 $b = 0$.

■ 例(3) 解下列方程:

■ (1) $(x + 1)^2 - 4 = 0$; (2) $12(2 - x)^2 - 9 = 0$.

■ 解: 略

○ 22.2.2 配方法 (25)

■ 例(4) 解方程: $x^2 + 2x = 5$.

要用直接开平方法求解, 首先希望能将方程化为

$$(\quad)^2 = a$$

的形式. 那么, 怎么实现呢?

为此, 通常设法在方程两边同时加上一个适当的数, 使左边配成一个含有未知数的完全平方式(右边是一个常数). 那么, 本题中, 要把 $x^2 + 2x = 5$ 的左边配成完全平方式, 这个“适当的数”是什么呢?

■ **解** 原方程两边都加上 1, 得

$$x^2 + 2x + 1 = 6,$$

即 $(x + 1)^2 = 6$.

直接开平方, 得

$$x + 1 = \pm \sqrt{6}.$$

所以 $x = -1 \pm \sqrt{6},$

即 $x_1 = -1 + \sqrt{6}, x_2 = -1 - \sqrt{6}.$

回想两数和的平方公式, 有

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

从中能得到什么启示?

■ **配方法**: 这里的解法, 是通过方程的简单变形, 将左边配成个含有未知数的完全平方式, 右边是一个非负常数, 从而可以直接开平方求解。这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**。

■ 例(5) 用配方法解方程:

- (1) $x^2 - 4x + 1 = 0$; (2) $4x^2 - 12x - 1 = 0$.

左边配上什么数能成完全平方?

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + \square^2 = (x - \square)^2.$$

这里应该怎样配方? 回顾例4和例5题(1)的解答, 归纳一下: 配方时, 方程两边加上的数是如何确定的?

解 (1) 原方程可化为

$$x^2 - 4x = -1.$$

配方(两边同时加上4), 得

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = -1 + 2^2,$$

即 $(x - 2)^2 = 3.$

直接开平方, 得 $x - 2 = \pm \sqrt{3},$

所以 $x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}.$

(2) 移项, 得 $4x^2 - 12x = 1.$

两边同除以4, 得 $x^2 - 3x = \frac{1}{4}.$

配方, 得

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

即 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}.$

直接开平方, 得 $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2},$

所以 $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}.$

- 配方时, 方程两边同时加上的数是如何确定的? (即: 配方法的一般步骤是:)
- (1) 方程两边同时除以二次项系数, 将二次项系数化为1. (Tip: 例(5)的第(2)个示例中, 两边同时除以4使 $4x^2$ 变成 x^2)
 - (2) 移项, 使方程左边只有二次项和一次项, 常数项在右边;
 - (3) 配方, 方程两边都加上一次项系数一半的平方, 使方程左边为一个完全平方式, 右边是一个常数; (Tip: \triangle 此步为重点)
 - (4) 通过(3)使方程变形为 $(x + m)^2 = n$ 的形式;
 - (5) 如果此时右边(n)是非负数, 两边直接开平方解这个一元二次方程.
 - (6) 如果右边是负数, 则方程无解.

○ 22.2.3 公式法 (28)

- 我们来解一般形式的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

因为 $a \neq 0$, 所以两边同除以 a 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (4)$$

移项, 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (5)$$

配方(关键步骤), 得

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (6)$$

$$\text{即 } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

因为 $a \neq 0$, 所以 $4a^2 > 0$. 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 直接开平方, 得

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

所以

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (8)$$

即当 $a > 0$ 时:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9)$$

当 $a < 0$ 时:

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (10)$$

- 由以上研究, 得到了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \geq 0). \quad (11)$$

- 公式法**: 将一元二次方程中系数 a, b, c 的值, 直接代入这个公式, 就可以求得方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做公式法

- 例(6)**解下列方程:

- (1) $2x^2 + x - 6 = 0$ (2) $x^2 + 4x = 2$;
- (3)

- 22.2.4 一元二次方程根的判别式 (31)
- 22.2.5 一元二次方程的根与系数的关系 (33)
- 阅读材料 "代数学之父" 韦达 (37)
- 22.3 实践与探索 (28)
- 22.4 小结 (43)
- 22.5 复习题 (45)

第 23 章: 图形的相似

- 23.1 成比例线段 (48)
 - 23.1.1 成比例线段 (48)
 - 23.1.2 平行线分线段成比例 (51)

- 阅读材料 黄金分割 (56)
- 23.2 相似图形 (57)
- 23.3 相似三角形 (61)
 - 23.3.1 相似三角形 (61)
 - 23.3.2 相似三角形的判定 (64)
 - 23.3.3 相似三角形的性质 (71)
 - 23.3.4 相似三角形的应用 (72)
- 23.4 中位线 (77)
- 23.5 位似图形 (80)
- 阅读材料 数学与艺术的美妙结合--分形 (82)
- 23.6 图形与坐标 (84)
 - 23.6.1 用坐标确定位置 (84)
 - 23.6.2 图形的变换与坐标 (88)
- 23.7 小结 (94)
- 23.8 复习题 (95)

第 24 章: 解直角三角形

- 24.1 测量 (100)
- 24.2 直角三角形的性质 (102)
- 24.3 锐角三角函数 (105)
- 24.4 解直角三角形 (111)
- 阅读材料 葭生池中 (118)
- 24.5 小结 (119)
- 24.6 复习题 (120)
- 总和与实践 高度的测量 (124)

第 25 章: 随机事件的概率

- 25.1 在重复试验中观察不确定现象 (126)
- 阅读材料
 - 计算机帮我们画趋势图 (134)
 - 搅匀对保证公平很重要 (135)
- 25.2 随机事件的概率 (136)
 - 25.2.1 概率及其意义 (136)
 - 25.2.2 频率与概率 (141)

- 阅读材料 电脑键盘上的字母为何不按字母顺序排列 (147)
 - 25.2.3 列举所有机会均等的结果 (149)
- 阅读材料
 - *The Birthday Problem* 生日问题 (155)
 - 模拟实验 (157)
- 25.3 小结 (158)
- 25.4 复习题 (159)
- 综合与实践 骰(tou)子与概率 (162)

数学实验附图

- 方格图 (163)
- 点格图 (165)