程序员的数学 (1)

第 1 章 -- 0 的故事 —— 无即是有

10进制计数法

- 什么是 10 进制计数法?
  - 使用的数字有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 共 10 种。
  - 数位有一定的意义, 从右往左分别表示 个位、十位、百位、千位......
- 分解 2503: 这样并排的数字, 因数位不同而意义相异。
  - 2 表示 "1000 的个数"
  - 5 表示 "100 的个数"
  - 0 表示 "10 的个数"
  - 3 表示 "1的个数"
- 10 进制计数法的数位全都是 10^n (Read: 10 的 n 次方) 的形式, 这个 10 称作 10 进制计 数法的**基数**或**底**。
- 基数 10 右上角的数字 —— **指数**, 是 3、2、1、0 这样有规律地顺次排列的, 这点请记住。
- E.g.: 2503
  = 2×1000 + 5×100 + 0×10 + 3×1
  = 2×10^3 + 5×10^2 + 0×10^1 + 3×10^0

2进制计数法

- 什么是二进制?
  - 使用的数字只有 0 和 1。
  - 从右往左分别表示 1位、2位、4位、8位......
- 用 2 进制计数法来数数, 首先是 0, 然后是 1, 接下去......不是2, 而是在 1 上面进位变成 10, 继而是 11, 100, 101......
- 0 到 99 的数的 10 进制计数法和 2 进制计数法

- 表 1-1 0 到 99 的数的 10 进制计数法和 2 进制计数法

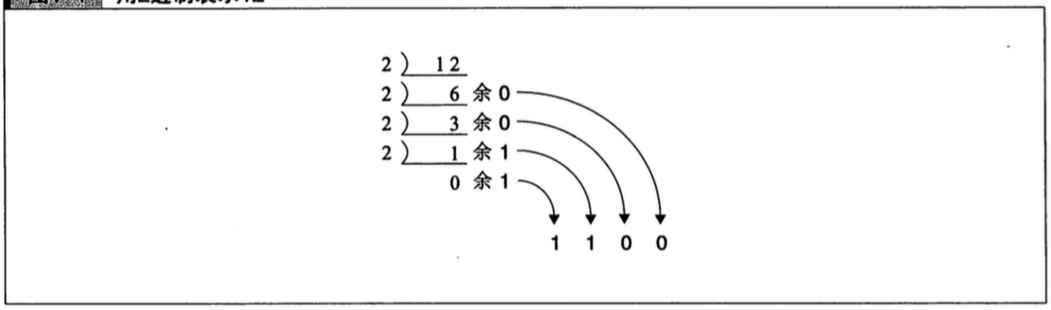
10 进制	2 进制	10 进制	2 进制	10 进制	2 进制	10 进制	2 进制	10 进制	2 进制
0	0	20	10100	40	101000	60	111100	80	1010000
1	1	21	10101	41	101001	61	111101	81	1010001
2	10	22	10110	42	101010	62	111110	82	1010010
3	11	23	10111	43	101011	63	111111	83	1010011
4	100	24	11000	44	101100	64	1000000	84	1010100
5	101	25	11001	45	101101	65	1000001	85	1010101
6	110	26	11010	46	101110	66	1000010	86	1010110
7	111	27	11011	47	101111	67	1000011	87	1010111
8	1000	28	11100	48	110000	68	1000100	88	1011000
9	1001	29	11101	49	110001	69	1000101	89	1011001
10	1010	30	11110	50	110010	70	1000110	90	1011010
11	1011	31	11111	51	110011	71	1000111	91	1011011
12	1100	32	100000	52	110100	72	1001000	92	1011100
13	1101	33	100001	53	110101	73	1001001	93	1011101
14	1110	34	100010	54	110110	74	1001010	94	1011110
15	1111	35	100011	55	110111	75	1001011	95	1011111
16	10000	36	100100	56	111000	76	1001100	96	1100000
17	10001	37	100101	57	111001	77	1001101	97	1100001
18	10010	38	100110	58	111010	78	1001110	98	1100010
19	10011	39	100111	59	111011	79	1001111	99	1100011

- 分解 2 进制表示的 1100：
  - 和 10 进制计数法一样, 并排的数字, 各个数位都有不同的意义。从左往右一次为:
    - 1 表示 "8的个数"
    - 1 表示 "4的个数"
    - 0 表示 "2的个数"
    - 0 表示 "1的个数"
  - 也就是说, 2 进制的 1100 是 1个8、1个4、0个2、和 0个1 累加的结果。这里出现的 8、4、2、1, 分别表示 2^3、2^2、2^1,、2^0, 即 2 进制计数法的 1100, 表示如下意思：
    - $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
  - 如此计算就能将 2 进制计数法的 1100 转换为 10 进制计数法:
    - $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
      $= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1$
      $= 8 + 4 + 0 + 0$
      = 12

> 基数转换

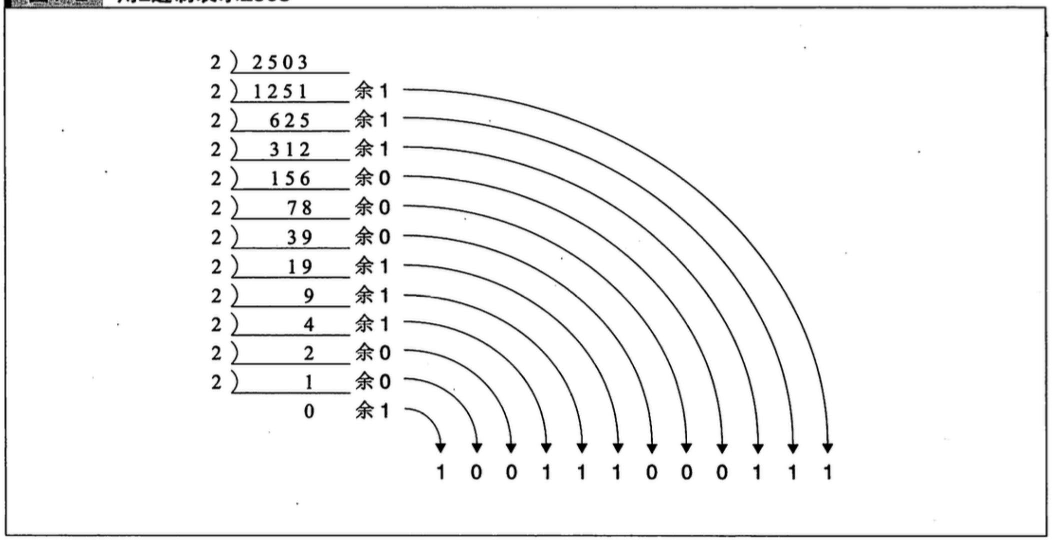
- 我们把 10 进制的 12 转化为 2 进制: 将 12 反复除以 2, 并观察每一步除 2 后的余数为 "1" 还是为 "0"。最后一步商为 0 则表示 "除完了"。随后再将每步所得的余数的列 (1 和 0 的列) 逆向排列, 由此就得到 2 进制表示了。

图1-1 用2进制表示12



同样地，我们试将 10 进制的 2503 转换为 2 进制计数法。

图1-2 用2进制表示2503



我们从图 1-2 可以知道 2503 用 2 进制表示为 100111000111。各个数位的权重如下：

$$1\times2^{11}+0\times2^{10}+0\times2^{9}+1\times2^{8}+1\times2^{7}+1\times2^{6}+0\times2^{5}+0\times2^{4}+0\times2^{3}+1\times2^{2}+1\times2^{1}+1\times2^{0}$$

在 10 进制中，基数为 10，各个数位是以 10^n 的形式表现的。而 2 进制中，基数为 2，各个数位是以 2^n 的形式表现的。从 10 进制计数法转换为 2 进制计数法，称作 10 进制至 2 进制的**基数转换**。

  - （这里的讲解也可以看下统计目录的 `进制转换.md` ）

- 在 10 进制中，基数为 10，各个数位是以 10^n 的形式表现的。而 2 进制中，基数为 2，各个 数位是以 2^n的形式表现的。　从 10 进制计数法转换为 2 进制计数法，称作 10 进制 至 2 进制的 **基数转换**。

> 计算机中为什么采用 2 进制计数法?

- 在 2 进制计数法中，数字的种类少，但是位数多。 --> 对计算机来说，这种比较易用。
- 10 进制 和 2进制 的加法表

- 图1-3 10进制的加法表

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

图1-4 2进制的加法表

+	0	1
0	0	1
1	1	10

按位计数法

- 什么是按位计数法?
    - A: 我们学习了 10 进制和 2 进制两种计数法, 这些方法一般称作 **按位计数法**。在编程中 也常常使用 8 进制和 16 进制计数法
- 8 进制计数法: 8 进制计数法的特征如下:
    - 使用的数字有 0、1、2、3、4、5、6、7 共 8 种。
    - 从右往左分别为 8^0 的位、8^1 的位、8^2 的位、8^3 的位...... (基数是 8)
- 16 进制基数法: 16 进制计数法的特征如下:
    - 使用的数字有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、A、B、C、D、E、F、 共 16 种。
    - 从右往左分别为 16^0 的位、16^1 的位、16^2 的位、16^3 的位......(基数是 16)

指数法则

0 所起的作用

第 2 章 -- 逻辑 —— 真假的二元世界

为何逻辑如此重要

乘车费用问题 —— 兼顾完整性和排他性

建立复杂命题

德·摩根定律

卡诺图

包含未定义的逻辑

第 3 章 -- 余数 —— 周期性和分组

星期数的思考题 (1)

星期数的思考题 (2)

乘方的思考题

1. $1234567^{987654321}$ 的个位数是多少呢?
    - A: **能影响 2 个数字乘方结果的个位数的, 只有这 2 个数字的个位数**。 也就是说, 将 1234567 的个位数 7 进行乘方, 只看乘方结果的个位数就行了, 1234567 的十位以上的数字 123456 可以暂时忽略。
    - 我们再来试算一下:
        - ![]

通过黑白棋通信

寻找恋人的思考题

铺设草席的思考题

一笔画的思考题

第 4 章 -- 数学归纳法 —— 如何征服无穷数列

高斯求和

- 前 n 项和:
    - $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

数学归纳法 —— 如何征服无穷数列

求出奇数的和 —— 数学归纳法实例

黑白棋思考题 —— 错误的数学归纳法

编程和数学归纳法

第 5 章 -- 排列组合 —— 解决计数问题的方法

计数 —— 与整数的对应关系

植树问题 —— 不要忘记 0

加法法则

- 我们先来看下面这个问题
  - 在一副扑克牌中，有 10 张红桃数字牌（A、2、3、4、5、6、7、8、9、10)，3 张红桃花牌（J、Q、K）。那么红桃共有多少张?

    数字牌 10 张，加上花牌 3 张，共有 13 张。

    答案：13 张
- 上面的问题非常简单，它所使用的就是加法法则. 加法法则就是将 "无重复" 元素的 2 个集合 A, B 相加，得到 $A \cup B$ (并)的元素数.
  - $A \cup B$ 的元素个数 = A 的元素个数 + B 的元素个数.

  如果将集合 A 的元素数写作 $|A|$，集合 B 的元素数写作 $|B|$，那么加法法则就可以用以下等式表示.

  $$|A \cup B| = |A| + |B|$$

  在上题中，集合 A
- 加法法则只在集合中没有重复元素的条件下成立。

乘法法则

置换

- `置换(substitution): 将 n 个事物按顺序进行排列称为置换.`
- 如果将 A, B, C 这 3 章牌按照 ABC, ACB, BAC......等顺序排列，那么共有多少种排法?
  - A: 经过思考，我们发现 3 张牌共有 6 种排法 (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA). 如 本题这般，将 n 个事物按顺序进行排列称为 置换 (substitution).
  - A, B, C 3 张牌的置换总数，可以通过下述步骤得出.
    - 第 1 张牌 (最左边的牌)，从 A, B, C 3 张中选出 1 张. 即，第 1 张牌有 3 中选法.
    - 第 2 张牌，从已选出的第 1 张牌以外的 2 张中选出 1 张. 即，第 2 张牌与第 1 张 牌的选法相对，分别有 2 种选法.
    - 第 3 张牌，只有一张可选.
  - 因此，3 张牌的所有排列方法 (置换的总数)，可以通过如下计算得出.
  - 第 1 张拍的选法 × 第 2 张牌的选法 × 第 3 张牌的选法 = 3 × 2 × 1.
- `阶乘 (factorial)` : $5!$ 称为 5 的阶乘，阶乘因呈阶梯状递减而得名. 要注意 0 的阶乘 ($0!$) 不是 0，而被定义为 1. 这是数学里的规定.
- 思考题：将一副扑克牌里的 52 张 (不包括王牌) 摆成一排，共有多少种摆法?

    - A: 这是 52 张牌的置换, 因此有 52!
- Tips: $1!$ $52!$ 的阶乘. 随着 n 的增大, 阶乘 $n!$ 的结果呈爆炸式增长.

排列

- 从 n 个事物中取出一部分进行 "排列".
- `排列 (permutation): 我们将从 n 个不同元素中取出 k 个并按照一定顺序排列的方法称作排列`, `排列的总数记作:` P_n^k
- 思考题 -- 从 5 张牌中取出 3 张进行排列.
    - 你现在手上持有 A, B, C, D, E 共 5 张牌. 要从这 5 张牌中取出 3 张进行排列. 请问 有多少种排法? 答: 60 种. 如下图
    -

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

- 我们将上题那样的排法称作从 5 张里面取出 3 张的排列 (permutation).

组合

- 置换和排列都需要考虑顺序, 而本节我们要介绍的是 "不考虑顺序的方法" -- 组合.
- `组合(combination): 我们将从 n 个不同元素中取出 k 个, 但是不考虑它们的顺序, 这种取法称为 组合.`
- 假设现在有 A, B, C, D, E 五张牌. 要从这 5 张牌中取出 3 张牌, 并且不考虑它们的顺序, 即以 3 张牌为 1 组进行选择. 例如, ABE 和 BAE 应视为同一组. 这时, 3 张牌的取法如下, 共有 10 种. $ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$
- 这种取法称为 **组合 (combination)**. "置换"和"排列"是考虑顺序的, 而 "组合" 则不考虑 顺序.
- 要计算 5 张里面取 3 张的组合总数, 只要这样考虑就行了.
    - 首先, 和排列一样 "考虑顺序" 进行计数.
    - 其次, 除以重复计数的部分 (重复度: 即 3 张牌的置换总数 3 x 2 x1).
- 5 张里面取 3 张的组合的总数 = C_5^3

$$
\begin{aligned}
C_5^3 &= \frac{5\text{张里面取}3\text{张的排列总数}}{3\text{张的置换总数}} \quad \frac{\cdots\cdots\text{考虑顺序排列的数}}{\cdots\cdots\text{重复度}} \\
&= \frac{P_5^3}{P_3^3}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 10$$

- **归纳一下**
- 接下来我们将牌数抽象化, 求出 n 张牌中取出 k 张的组合总数.
- 首先, 从 n 张牌中按顺序取出 k 张牌. 而这时 k 张的置换总数是重复的, 所以要除以这个重复度.

$$C_5^3 = \frac{\text{从}n\text{张里面取}k\text{张的排列总数}}{k\text{张的置换总数}}$$

$$= \frac{P_n^k}{P_k^k}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

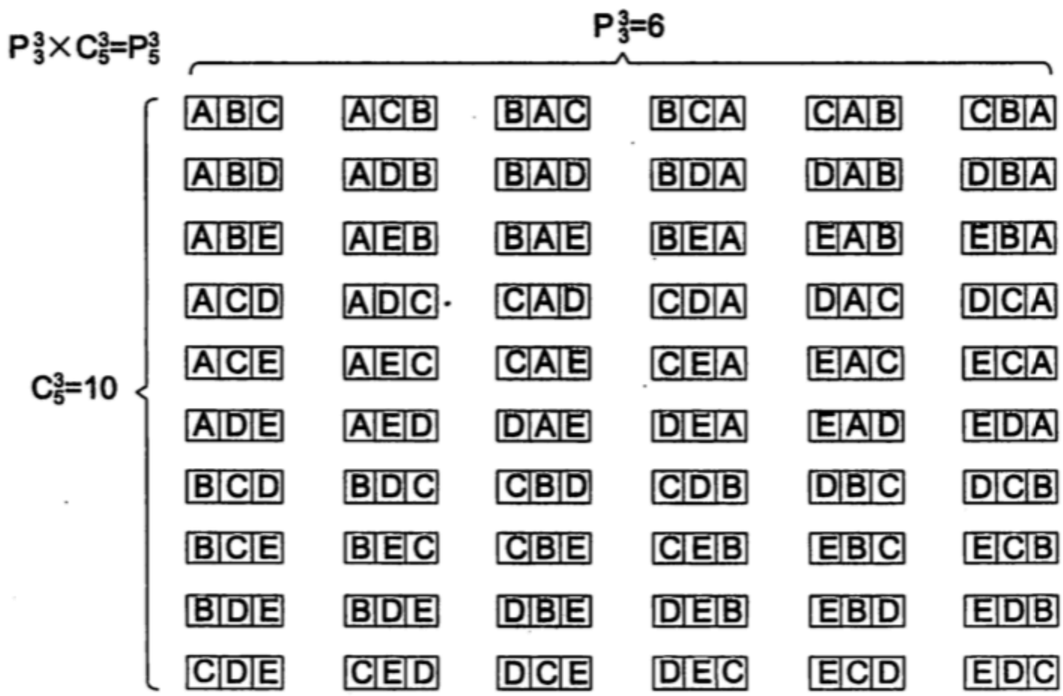
$$= \frac{n!}{(n-k)!} \cdots \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- 这样, 从 n 张里取 k 张的组合总数为

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- 置换和组合相结合就是排列, 大家知道为什么吗? 置换表示 "3 张牌的交替排列方法". 组合表示 "3 张牌的取法". 两者结合就是 "取出 3 张牌, 进行交替排列", 即表示排列.
- 通过图 5-17, 我们能清楚第了解到他们存在以下关系.



- "3 张的置换" $\times$ "从 5 张中取 3 张的组合" = "从 5 张中取 3 张的排列"
- 即, $P_3^3 \times C_5^3 = P_5^3$

- 这与前面求 C_5^3 时的 $C_5^3 = \frac{P_5^3}{P_3^3}$ 是一样的.

第 6 章 -- 递归 —— 自己定义自己

汉诺塔

再谈阶乘

斐波那契数列

帕斯卡三角形

递归图形

第 7 章 -- 指数爆炸 —— 如何解决复杂问题

什么是指数爆炸?

倍数游戏 —— 指数爆炸引发的难题

二分法查找 —— 利用指数爆炸进行查找

对数(logarithm) —— 掌握指数爆炸的工具

密码 —— 利用指数爆炸加密

如何处理指数爆炸

第 8 章 -- 不可解问题 —— 不可解的数、无法编写的程序

反证法

可数

对角论证法

不可解问题

停机问题

第 9 章 -- 什么是程序员的数学