Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической статистики

Болотин Данила Александрович

# Хеджирование позиции поставщика ликвидности в автоматическом маркет мейкере с использованием бессрочных фьючерсов

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**
д.ф.-м.н., профессор
Колокольцов Василий Никитич

Москва, 2024

# Содержание

# Словарь используемых терминов

**Смарт-контракт** — программа, исполняемая в распределенной компьютерной сети, в которой обеспечивается возможность совершать транзакции и исполнять программы, а также достигать консенсуса относительно результатов исполнения программ. С каждым пользователем данной сети и программой связан отдельный аккаунт, позволяющий учитывать баланс доступных активов и совершать транзакции для перемещения активов или взаимодействия с программами.

**Децентрализованная биржа (DEX)** — набор смарт-контрактов, реализующий автоматизированный обмен активами в распределенной компьютерной сети.

**Трейдер** — пользователь децентрализованной биржи, совершающий обменные операции.

**Поставщик ликвидности** — пользователь децентрализованной биржи, предоставляющий активы для их последующего использования в обменных операциях.

**Пул ликвидности** — аккаунт, связанный со смарт-контрактом децентрализованной биржи, на котором размещаются резервы, сформированные из предоставленных провайдерами ликвидности активов.

**Автоматический маркетмейкер (AMM)** — способ организации работы децентрализованной биржи, определяющий правила изменения резервов в пуле ликвидности, а также вычисления цен, используемых в обменных операциях.

**Хеджирование** — открытие сделок на одном рынке для компенсации воздействия ценовых рисков равной, но противоположной позиции на другом рынке.

**Numéraire** - безрисковый актив.

# Введение

В современном финансовом мире цифровые активы и децентрализованные финансовые протоколы (DeFi) играют все более значимую роль, предлагая новые способы управления капиталом. В этой среде с использованием воможностей, предоставляемых технологией блокчейн, реализованы такие базовые финансовые сервисы, как кредитные площадки, биржи, платежные системы и инструменты управления активами. Подробное описание отрасли DeFi можно найти в работе [1], где систематизируются существующие инфраструктурные решения, приводятся примеры децентрализованных финансовых сервисов и предпринимаются усилия по определению места децентрализованных финансов в контексте классической финансовой отрасли.

Одним из ключевых элементов в этой экосистеме является децентрализованная биржа. Это сервис, обеспечивающий возможность совершения обменных сделок с цифровыми активами для участников рынка. Существует достаточно обширный набор подходов для организации обменов в децентрализованной среде, их обзор можно найти в работах [2] и [3].

В текущем исследовании изучается децентрализованная биржа работающая по принципу автоматического маркетмейкера, позволяющего организовать взаимодействие двух типов участников рынка: трейдеров и поставщиков ликвидности. Подобные сервисы имеют обширную историю развития, однако в контексте децентрализованных финансов наибольшего внимания заслуживают разработки, сделанные при создании биржи Uniswap, доступные в работах [4] и [5]. Здесь трейдер получает возможность совершать обменные операции, а поставщик ликвидности предоставляет капитал, используемый для сделок трейдеров, и получает за это доходность в виде торговых комиссий. Свойства позиции поставщика ликвидности на децентрализованной бирже изучаются в данной работе, ее анализ также проделан в литературе, например, в работе [6], где в предположении о динамике цены в пуле ликвидности, заданной геометрическим броуновским движением, выводится стоимость активов поставщика ликвидности, а также анализируется ее чувствительность к изменению цены актива.

С точки зрения поставщика ликвидности децентрализованная биржа является одним из финансовых инструментов, позволяющий получать доходность на размещенные в нем активы без дополнительных издержек, связанных с доступом к традиционной финансовой инфраструктуре брокеров, централизованных бирж, депозитариев и пр. Однако, несмотря на преимущества децентрализованных платформ, поставщики ликвидности сталкиваются со специфическим риском изменения стоимости активов, размещенных на децентрализованной бирже, связанным с переоценкой стоимости активов из-за действий арбитражных трейдеров. Этот риск в литературе, посвященной децентрализованным финансам, носит название impermanent loss, о его происхождении и инструментах контроля этого риска подробно написано в работах [7], [8] и [9]. В частности, для контроля этого риска поставщик ликвидности может применять различные стратегии хеджирования, включая дельта-хеджирование с использованием линейных деривативов. Подробно о таком подходе написано в работах [10] и [11].

В данной дипломной работе исследуется эффективность использования капитала поставщика ликвидности на децентрализованной бирже, прибегающего к стратегии хеджирования с использованием такого инструмента, как бессрочный фьючерс. Данный инструмент был разработан в 1993 году Робертом Шиллером [12], однако широко стал применяться лишь с ростом рынка децентрализованных финансов. Существует ряд работ, где изучается как механизм работы бессрочных фьючерсов и их модификаций [13], [14], [15], так и их использование в контексте задачи хеджирования [16]. Стоит отметить, что результаты по оценке стоимости бессрочного фьючерса, описанные в перечисленных выше работах, развиваются и частично критикуются в работе [17], где устранена проблема из [13] с ненулевой стоимостью открытия деривативной позиции в бессрочном фьючерсе при ненулевой ставке. В текущем исследовании особенности функционирования децентрализованных бирж, устроенных по принципу автоматического маркетмейкера с инвариантом в форме постоянного произведения, изучается механизм работы бессрочных фьючерсов и их применимость для снижения рисков поставщика ликвидности.

Целью работы является вычисление оптимальных параметров стратегии хеджирования позиции поставщика ликвидности и анализ доходности получающегося инвестиционного портфеля на примере децентрализованной биржи, работающей по принципу автоматического маркетмейкера с инвариантом в форме постоянного произведения. Результаты исследования представляют новизну с точки зрения дизайна децентрализованной биржи и площадок по выпуску бессрочных фьючерсов и имеют высокую практическую ценность с точки зрения инвестора, рассматривающего инструменты децентрализованных финансов в качестве инвестиционных продуктов для управления капиталом в децентрализованной финансовой среде.

# 1 Базовые концепции

Перед тем, как начать полноценное исследование стратегии хеджирования позиции поставщика ликвидности в автоматическом маркет мейкере, введем математическое определение AMM.

## 1.1 Децентрализованные биржи

**Определение 1 (AMM)** Automatic market maker (AMM) - это протокол для автоматического обмена активами в блокчейн-среде. AMM состоит из резервов активов $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и инвариантной функции $F : \mathbb{R}^n_{>0} \to \mathbb{R}$ такой, что множество $\{X : F(X_1, \ldots, X_n) = C\}$ $\forall C \geq 0$ замкнуто и строго выпукло. $F$ строго возрастающая и дважды дифференцируемая функция. AMM (1) поддерживает любую возможную цену на рынке, (2) не генерирует цены, которые невозможны на рынке, и (3) предотвращает истощение запасов.

В AMM разрешен своп для приращений резервов $(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n) \in R^n$, если

$$F(X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_n + \Delta X_n) \geq F(X_1, \ldots, X_n).$$

Пример: Uniswap V2 [4]: 2 актива, $C \geq 0$, инвариант $F = X_1 X_2 - C$. Линией уровня для данного AMM является $F = 0$. Далее мы подробнее рассмотрим устройство именного этого типа AMM.

## 1.2 Uniswap V2

Uniswap V2 - это децентрализованная биржа, которая работает на основе концепции автоматического маркетмейкера (AMM). Он представляет собой сеть смарт-контрактов на блокчейне Ethereum, с которыми взаимодействует 2 типа пользователей: трейдеры (активные участники рынка) и поставщики ликвидности. Трейдеры обменивают токены через AMM, а поставщики ликвидности за вознаграждение поставляют ликвидность в соответствующие пулы ликвидности для обмена активными участниками рынка. Далее мы будем подробнее рассматривать именно позицию поставщика ликвидности пула AMM.

В Uniswap V2 используется функция инварианта, которая определяет, как изменяется цена токена в зависимости от его доступности в пуле ликвидности. Пусть $X$ - количество токенов $a$, $Y$ - количество токенов $b$ в пуле ликвидности. Будем считать токен $a$ - numéraire (например доллар США или его эквивалент USDT), а токен $b$ - рисковым активом.

Uniswap V2 использует инвариантную функцию:

$$XY = k, \tag{1}$$

где $k$ - константа.

График инвариантной функции представлен ниже на Рис. 1:

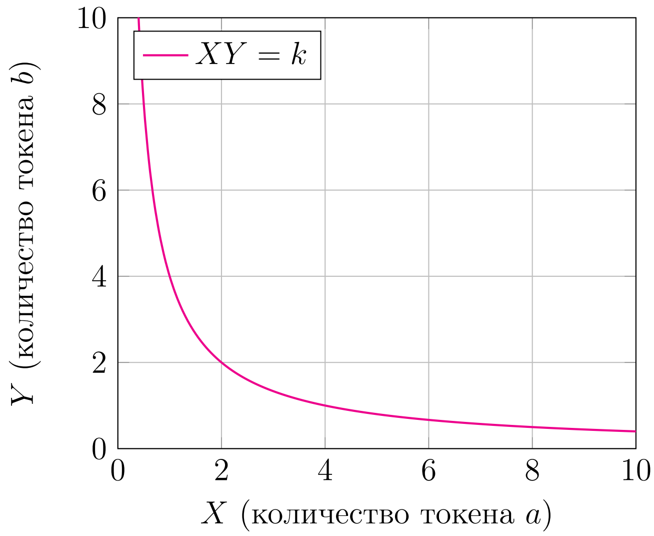


Рис. 1: График инварианта Uniswap V2

Математически Uniswap V2 основывается на принципах балансирования ликвидности и (будет доказано в следующей главе) определении цены токена на основе отношения между количеством токенов в пуле ликвидности. Этот подход обеспечивает автоматизированный механизм торговли без необходимости посредников и централизованных бирж.

Допустим, у нас есть позиция в пуле ликвидности AMM для активов $a$ и $b$. Цель данной исследовательской работы - захеджировать позицию поставщика ликвидности для снижения влияния движений цены на портфель. Позицией в пуле мы будем называть предоставление ликвидности (активов) для обмена участниками рынка (трейдерами).

Запишем функцию стоимости позиции поставщика ликвидности в пуле Uniswap V2, чтобы в дальнейшем захеджировать её.

## 1.3 Функция стоимости позиции Uniswap V2

Пусть $X$ - наше количество токенов $a$ по цене $p_a$ за токен, $Y$ - наше количество токенов $b$ по цене $p_b$ за токен. Тогда начальная стоимость активов поставщика ликвидности будет выглядеть следующим образом:

$$D_0 = p_a X + p_b Y \tag{2}$$

Теперь выразим стоимость активов поставщика ликвидности в токенах $a$:

$$D_a = X + \frac{p_b}{p_a} Y \tag{3}$$

Чтобы поместить наши токены в пул ликвидности, необходимо выполнение следующего равенства: $p_a X = p_b Y$. Мы получаем:

$$X = \frac{p_b}{p_a} Y = pY, \tag{4}$$

где $p$ - это цена актива $b$, выраженная в активе $a$.

Тогда $V_P = X + pY$ - это стоимость активов поставщика ликвидности в пуле, выраженная в numéraire.

Теперь выразим функцию стоимости позиции поставщика ликвидности в пуле Uniswap V2, зависящую от цены $p$.
Предположим, что в момент времени $t_0$ цена актива $b$ в пересчете на актив $a$ составляла $p(t_0)$, а в момент времени $t_1$ стала $p(t_1)$.

Таким образом, стоимость активов поставщика ликвидности на момент времени $t_1$ стал равен:

$$V_P = X + p(t_1)Y \tag{5}$$

Давайте воспользуемся тем фактом, что Uniswap V2 использует инвариантную функцию $XY = k$. Затем, используя выражение (4) получим:

$$X = \sqrt{pk} \tag{6}$$

и

$$Y = \sqrt{\frac{k}{p}} \tag{7}$$

Следовательно,

$$V_P = \sqrt{pk} + \sqrt{\frac{k}{p}} p = 2\sqrt{pk} \tag{8}$$

Полученное выражение верно для всех моментов времени. Оно представляет собой функцию стоимости позиции поставщика ликвидности без учета накопленных комиссий. С учетом накопленных комиссий функция выглядела бы следующим образом:

$$V(t_1) = 2\sqrt{p(t_1)k} + V_F$$

## 1.4 Стоимость накопленных комиссий

Принимая во внимание ставку дисконтирования $\lambda$ [1], накопленная стоимость комиссий имеет вид:

$$V_F = \int_{t_0}^{t_1} \beta V_{pool}(r) e^{-\lambda r}\, dr \tag{9}$$

Мы интерпретируем $\beta$ как годовую ставку доходности, которую мы получаем от всех активов, внесенных в пул ликвидности. Таким образом, $\beta V\left(\tau, p_\tau\right) d\tau$ - это мгновенный доход от пула ликвидности.

## 1.5 Бессрочные фьючерсы

Основная цель научной работы - изучить стратегию хеджирования позиции поставщика ликвидности в пуле АММ при помощи бессрочных фьючерсов. В этом параграфе мы определим, что такое бессрочные фьючерсы со ставкой финансирования, и рассмотрим модель ценообразования для них. Согласно [17]:

**Определение 2 (Бессрочный фьючерс)** Бессрочный фьючерс (или perpetual futures) - это тип деривативного финансового инструмента, который представляет собой контракт между двумя сторонами на покупку или продажу базового актива $b$, расчетной единицей которого является актив $a$ (numéraire), по фиксированной цене $f(t)$ в определенный момент в будущем, но без указания конечной даты исполнения контракта. В отличие от модели, предложенной [13], в данном определении заключение контракта на дату $t_0$ не требует затрат, и, как и в классическом фьючерсном контракте, позиция лонг на дату $t_1$ получает выплату равной изменению стоимости фьючерса между моментами времени $t_1$ и $t_0$:

$$f(t_1) - f(t_0) \tag{10}$$

**Определение 3 (Стоимость фьючерса)** Стоимость фьючерсного контракта - это отражение ожиданий покупателей и продавцов на рынке относительно цены базового актива в будущем. Стоимость фьючерсного контракта может быть больше, меньше или равна текущей стоимости базового актива. Разница между ценой фьючерса и ценой базового актива называется *базисным спредом.*

В идеальном мире стоимость фьючерса всегда равна стоимости базового актива, то есть $f = p$, но в реальности между ценой фьючерсного контракта и ценой базового актива есть разница. Базисный спред существует потому, что для бессрочных фьючерсов не существует фиксированного срока погашения, а значит нет момента време-

[1] для конкретного токена данную ставку можно получить, например, на децентрализованном лендинговом протоколе AAVE

ни, когда цена фьючерса станет равной цене базового актива. Чтобы цена фьючерса оставалась привязанной к базовому активу, нам необходимо ввести дополнительные периодические платежи от длинной стороны к короткой, которые называются *ставкой финансирования*. Платеж по ставке финансирования состоит из двух предсказуемых компонентов: премиальной части и процентной ставки. В момент времени $t$ премиальная часть составляет

$$\kappa_{t_0}(f(t) - p_t),$$

где курс $\kappa_t > 0$ определяет интенсивность привязки фьючерсной цены к цене базового актива (для простоты $\kappa$ будем считать константой). Интуитивно понятно, что если фьючерсная цена высока по отношению к цене базового актива (спотовой цене) в момент времени $t$, то по длинной позиции придется заплатить больше в момент времени $t$. Это, в свою очередь, делает длинную позицию менее привлекательной и должно подтолкнуть фьючерсную цену к спотовой. С другой стороны, процентная ставка периодического платежа по ставке финансирования определяется как

$$\iota_{t_0} p_t,$$

где коэффициент $\iota_t$ устанавливается биржей в качестве платы за возможность торговать деривативом, а именно бессрочным фьючерсным контрактом.

В соответствии с этими определениями денежный поток, выраженный в numéraire на дату $t_1$ от удержания длинной позиции по фьючерсному контракту в течение периода с $t_0$ до $t_1$ с учетом накопленных платежей по ставке финансирования составляет

$$(f(t_1) - f(t_0)) - \int_{t_0}^{t_1} \left(\iota_{t_0} p(t) + \kappa_{t_0} \left(f(t) - p(t)\right)\right) dt \tag{11}$$

**Определение 5 (Маржинальное обеспечение)** Маржинальное обеспечение - это сумма активов, которую клиент должен внести заранее на свой маржинальный счет на централизованной бирже, чтобы обезопасить свою позицию по бессрочным фьючерсам. Маржинальное обеспечение может уменьшаться или увеличиваться засчет изменения позиции по фьючерсам либо же засчет платежей по ставке финансирования. В случае уменьшения маржинального обеспечения до 0 происходит ликвидация фьючерсной позиции.

Маржинальный счет имеет 4 свойства:

- Номинальная стоимость активов маржинального счета, на котором они учитываются.

- Размер позиции.

- Размер кредитного плеча (отношение объема позиции по фьючесам к маржинальному обеспечению).

- Цена ликвидации (цена фьючерса, при которой маржинальное обеспечение становится равным 0).

**Определение 6 (Ликвидация)** Ликвидация - это принудительное закрытие фьючерсной позиции при первом достижении цены ликвидации.

## 1.6 Модель ценообразования бессрочных фьючерсов

В ходе исследования было изучено несколько научных статей, таких как [14] и [13], в которых были представлены модели для цены фьючерсного конракта. Но в данной работе мы остановимся на модели, предложенной [17], так как она, в отличие других, является наиболее приближенной к реальности.

Время непрерывно и индексируется как $t \geq 0$. Неопределенность представлена пространством $(\Omega, F, \mathbb{F}, P)$, оснащенным фильтрацией, которая является непрерывной справа и $F = \cap_{t \geq 0} F_t$. Все процессы, рассматриваемые далее, считаются адаптированными к фильтрации $\mathbb{F}$.

Есть два актива $i \in \{a, b\}$, и мы обозначаем $p(t)$ обменный курс $b/a$ на дату $t$. Инвесторы могут свободно обменивать активы по этому курсу и имеют право инвестировать в два локально безрисковых актива: один, обозначенный в единицах $a$, и другой - в единицах $b$. Цены на эти активы удовлетворяют

$$dB_{it} = r_{it} B_{it} dt, \quad B_{i0} = 1, \quad i \in \{a, b\},$$

где $r_{it} > -1$ отражает доходность актива, обозначенного $i$, за бесконечно малый интервал времени, начинающийся в момент времени $t$. Чтобы обеспечить отсутствие арбитража между этими активами, предполагается, что существует вероятность $Q_a$, эквивалентная $P$ при ограничении на $F_t$ для любого конечного $t$, и такая, что

$$E_t^{Q_a} \left[ \frac{B_{bs}}{B_{as}} p(s) \right] = \frac{B_{bt}}{B_{at}} p(t), \quad \forall t \leq s \tag{12}$$

выполняется для всех вещественных $t \leq s$.

**Теорема 1.** Если $\iota < \kappa$ and $(r_a, r_b)$ являются такими константами, что

$$\kappa + r_b - r_a > 0$$

тогда цена бессрочного фьючерсного контракта равна:

$$f_t = \frac{(\kappa - \iota)}{\kappa + r_b - r_a} p_t \tag{13}$$

монотонно приближается к спотовой цене при $\kappa \to \infty$.

Здесь $r_a$ и $r_b$ ставки безрисковой доходности для токенов $a$ и $b$, взятых с лендингового протокола AAVE.

Мы будем использовать обозначение $\zeta = \frac{(\kappa-\iota)}{\kappa+r_b-r_a}$

Это выражение для стоимости бессрочных фьючерсов будет использоваться нами для корректировки позиции с учетом платежей по ставке финансирования.

# 2 Хеджирование позиции поставщика ликвидности

## 2.1 Цена базового актива

В данной работе будем предполагать, что мы имеем дело с рынком, на котором цена внутри децентрализованной биржи и на внешних рынках оказываются одинаковыми благодаря действиям арбитражных трейдеров. Далее мы не будем различать цену на внешнем рынке и внутри децентрализованной биржи и предполагаем, что цена рискового актива задается геометрическим броуновским движением:

$$p(t_1) = p(t_0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_{t_1 - t_0}}, \tag{14}$$

где $\mu$ обозначает среднее (ожидаемое) значение доходности актива $b$. Он определяет скорость, с которой цена актива изменяется со временем в среднем. Положительное значение $\mu$ указывает на ожидаемый рост цены актива, в то время как отрицательное значение $\mu$ указывает на ожидаемый спад. $\sigma$ обозначает стандартное отклонение доходности актива $b$. Он описывает степень случайности или волатильности в движении цены актива. $W_{t_1 - t_0}$ - винеровский процесс.

## 2.2 Дельта-хеджирование

Давайте взглянем на нашу позицию по бессрочным фьючерсам на пару активов $b$ и $a$, где $b$ - рисковый актив и $a$ - numéraire ($USDT$).

$$V_H = M_0 + H(f(t_1) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \left(\iota_{t_0} p(t) + \kappa_{t_0} \left(f(t) - p(t)\right)\right) dt), \tag{15}$$

где $M_0$ - маржинальное обеспечение, $f$ - цена фьючерса, которая отличается от цены базового актива $p$, а $H$ - количество фьючерсных контрактов, заключенных нами на момент времени $t_0$, $t_0$ - время открытия позиции.

Давайте рассчитаем размер нашей позиции (число фьючерсных контрактов) в стратегии дельта-хеджирования без учета платежей по ставке финансирования. Но для начала введем определение:

**Определение 7 (Дельта)** Дельта - важный параметр при ценообразовании и хеджировании производных финансовых инструментов. Это отношение изменения цены производного финансового инструмента к изменению цены базового актива. В математических терминах мы можем рассматривать дельту как наклон кривой зависимости цены производного финансового инструмента от цены базового актива:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial p},$$

где $f$ - цена деривативa.

**Определение 8 (Дельта-хеджирование)** - это процесс, который заключается в создании портфеля с дельтой, равной 0 в определенный момент времени. Портфель состоит из позиции в AMM и инструмента хеджирования (в нашем случае это бессрочные фьючерсы).

Рассчитаем, при каких условиях дельта нашего портфеля будет равна 0:

$$\frac{\partial(V_P + V_H^*)}{\partial p} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{p(t)}} + H\zeta = 0,$$

где $V_H^*$ - позиция по фьючерсам без учета выплат по ставке финансирования.

Обозначим: $D > 0$ - наш общий начальный капитал, $0 \leq \alpha \leq 1$ - доля капитала, размещаемая на маржинальном счете для обеспечения фьючерсной позиции, $M_0$ - начальный маржинальный баланс, $M_P$ - начальная стоимость активов поставщика ликвидности в пуле. Для момента времени $t_0$ согласно формуле (8):

$$D = M_0 + M_P = \alpha D + 2\sqrt{p(t_0)k}$$

Следовательно:

$$\sqrt{k} = \frac{D(1-\alpha)}{2\sqrt{p(t_0)}}$$

Тогда:

$$H = -\frac{\sqrt{k}}{\zeta\sqrt{p(t)}} = -\frac{D(1-\alpha)}{2\zeta p(t)}$$

Видно, что $H < 0$, а это значит, что в нашей стратегии мы открываем короткую позицию по фьючерсам (продаем $H$ фьючерсных контрактов), дабы сохранять дельту в окрестности 0.

## 2.3 Индикатор ликвидации

Теперь вновь вернемся к маржинальному обеспечению. Когда убыток по фьючерсам становится равным или почти равным нашему маржинальному балансу, биржа закрывает нашу фьючерсную позицию с убытком, равным нашему маржинальному обеспечению.

Чтобы учесть возможность ликвидации позиции в нашей стратегии, мы введем индикатор ликвидации или индикатор первого достижения цены ликвидации:

$$I_t = \begin{cases} 0, & M_0 + H(f(t) - f(0)) \leq 0 \text{ в первый раз} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}, \tag{16}$$

Мы понимаем, что для верного расчета вероятности ликвидации необходимо учитывать накопленную выплату по ставке финансирования, но для упрощения вычислений мы намеренно не будем учитывать её.

Как рассчитать вероятность ликвидации? Так как наша позиция по фьючерсам является короткой, цена ликвидации будет выше цены открытия позиции. Поэтому рассмотрим максимум цены на временном интервале от 0 до $t$ и запишем выражение для случая ликвидации:

$$P[\sup_{0 \leq \tau \leq t}(f(\tau)) > f(0) - M_0/H] = P_L$$

Давайте преобразуем $f(\tau)$:

$$f(\tau) = \zeta p(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau) + \sigma W_\tau}$$

Пусть $\nu = \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$. Тогда

$$f(\tau) = \zeta p(t_0) e^{\sigma^2 \nu \tau + \sigma W_\tau}$$

Пусть

$$y = \frac{f(0) - M_0/H}{\zeta p(0)}$$

$$V_\tau = e^{\sigma^2 \nu \tau + \sigma W_\tau} \tag{17}$$

$x = 1$ - стартовая точка нашего процесса GBM.

Используя формулу 1.1.4 из Andrei N. Borodin, Paavo Salminen (Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae, стр. 606), мы можем записать вероятность ликвидации в виде:

$$P_L = \mathbf{P}_x \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} V_\tau \geq y \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left( \frac{\ln(y/x)}{\sigma\sqrt{2t}} - \frac{\nu\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} \right)^{2\nu} \operatorname{Erfc} \left( \frac{\ln(y/x)}{\sigma\sqrt{2t}} + \frac{\nu\sigma\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \right) \tag{18}$$

Цена ликвидации равна:

$$p_l = p(0) - \frac{M_0}{H\zeta} \tag{19}$$

Маржинальный баланс описывается стохастическим процессом, который следует за некоторой динамикой, вызванной ценой фьючерса $f(t)$, до момента, когда произойдет ликвидация. После этого процесс всегда остается на одном и том же уровне - следовательно, мы получаем остановленный стохастический процесс.

Теперь выражение для нашей фьючерсной позиции выглядит следующим образом:

$$V_H = (M_0 + H(f(t_1) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} (\iota_{t_0} p(t) + \kappa_{t_0} (f(t) - p(t)))\, dt)) I_t \tag{20}$$

## 2.4 Стоимость позиции поставщика ликвидности с учетом хеджирования

Если мы сложим выражения для стоимости позиции в пуле, стоимости накопленных комиссий и позицию по фьючерсам, то получим следующее уравнение:

$$V = V_P + V_F + V_H$$

или

$$V(t_0, t_1) = 2\sqrt{p(t_1)k} + \int_{t_0}^{t_1} 2\beta \sqrt{p(r)k} e^{-\lambda r}\, dr + \tag{21}$$

$$+ (M_0 + H\zeta(p(t_1) - p(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} (\iota_{t_0} p(t) + \kappa_{t_0} (f(t) - p(t)))\, dt)) I_{t_1}$$

В этом разделе мы изучим модель немного глубже. Мы уделим большое внимание доле маржинального счета от общего капитала, рассмотрим её влияние на стоимость нашего портфеля, а также попытаемся соприкоснуться с вероятностью ликвидации нашей фьючерсной позиции. И в результате мы рассчитаем математическое ожидание цены нашего портфеля, которое будет напрямую зависеть от параметра - доли маржинального счета от общего капитала.

## 2.5 Математическое ожидание стоимости портфеля

В разделе 1.7 мы ввели индикатор ликвидации, который обнулит наш маржинальный счет и, таким образом, ликвидирует фьючерсную позицию при первом же касании цены ликвидации. С учетом возможности ликвидации наша позиция будет выглядеть следующим образом:

$$V(t_0, t_1) = 2\sqrt{p(t_1)k} + \int_{t_0}^{t_1} 2\beta \sqrt{p(r)k} e^{-\lambda r}\, dr + \tag{22}$$

$$+ (M_0 + H(f(t_1) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} (\iota_{t_0} p(t) + \kappa_{t_0} (f(t) - p(t)))\, dt)) I_{t_1},$$

где $f(t_1) = \zeta p(t_1) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1 + \sigma W_{t_1}}$

Давайте рассчитаем среднее значение цены нашей позиции при $t_0 = 0$ и $t_1 = t$:

$$\mathbb{E}V = \mathbb{E}(V_P + V_F + V_H) = \mathbb{E}V_P + \mathbb{E}V_F + \mathbb{E}V_H$$

$$\mathbb{E}V_P = 2\sqrt{p(0)k}e^{(\frac{\mu}{2} - \frac{\sigma^2}{8})t}$$

Для того, чтобы внести математическое ожидание под знак интеграла, воспользуемся теоремой Фубини:

$$\mathbb{E}V_F = \mathbb{E}(\int_0^t 2\beta\sqrt{p(t)k}(r)e^{-\lambda r}\,dr) = 2\beta\sqrt{p(0)k}\int_0^t \mathbb{E}(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\frac{(r)}{2} + \frac{\sigma}{2}W_r}e^{-\lambda r})\,dr =$$

$$= 2\beta\sqrt{p(0)k}\frac{1}{C_0}e^{C_0 t},$$

где $C_0 = \frac{\mu}{2} - \frac{\sigma^2}{8} - \lambda$

Перед тем, как расчитать математическое ожидание позиции по фьючерсам, скорректируем общее выражение для $V_H$. Попытавшись посчитать математическое ожидание от текущего выражения, мы получим математическое ожидание от интеграла от геометрического броуновского движения, умноженного на индикатор ликвидации:

$$\mathbb{E}(\int_0^t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W_\tau} d\tau \times I_t)$$

Анализ данного выражения необходимо делать численно, а явный вид решения оказывается излишне громоздким, не добавляя качества получаемым результатам. Поэтому, для упрощения расчетов и удобства, без потерь в качестве, мы заменим всю выплату по ставке финансирование на:

$$\tilde{\kappa}(f(t) - p(t)),$$

где $\tilde{\kappa}$ определяет не мгновенную выплату по ставке финансирования, а усредненное значение выплаты за период. Такое упрощение позволяет получить явный вид математического ожидания:

$$\mathbb{E}V_H = (M_0 + H\zeta p(0)\mathbb{E}((e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} - 1 - \tilde{\kappa}\frac{(\zeta - 1)}{\zeta}e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t})))I_t =$$

$$= H\zeta p(t_0)(1 - \tilde{\kappa}\frac{r_a - r_b - \iota}{\tilde{\kappa} - \iota})\mathbb{E}(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}I_t) - H\zeta p(t_0)\mathbb{E}I_t + M_0\mathbb{E}I_t =$$

Чтобы посчитать $\mathbb{E}(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}I_t)$ нам необходимо знать плотность совместного распределения GBM и индикатора ликвидации $I_t$. Возьмем формулу совместной плотности вероятности из раздела 1.1.8 на странице 606 в [18]:

$$\mathbf{P}_x\left(\sup_{0\le s\le t} V_s \ge y, V_t\in dz\right)=\begin{cases}\frac{z^{\nu-1}}{x^\nu\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\nu^2\sigma^2 t/2}e^{-\ln^2(z/x)/2\sigma^2 t}dz, & y\le z\\ \frac{z^{\nu-1}}{x^\nu\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\nu^2\sigma^2 t/2}e^{-\ln^2\left(y^2/zx\right)/2\sigma^2 t}dz, & z\le y\end{cases}$$

Теперь, зная плотность вероятности совместного распределения, мы можем найти математическое ожидание $\mathbb{E}(e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}I_t)$, домножив на $z$ и проинтегрировав плотность по всей прямой $\mathbb{R}$. Поскольку нам известно математическое ожидание индикатора ликвидации, мы можем записать итоговую формулу (подставив значения для $H$ и $\sqrt{k}$):

$$\mathbb{E}V = D\left(1-\alpha\right)e^{\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)t}+\frac{\beta D\left(1-\alpha\right)\left(e^{\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}-\lambda\right)t}-1\right)}{\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}-\lambda}+$$

$$+\left(\frac{k}{k-i}\left(n-r-i\right)-1\right)\frac{D\left(1-\alpha\right)}{2}\left(e^{\mu t}-\frac{1}{2}e^{\mu t}\left(1\ -\ \operatorname{erf}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)-\sigma^2 t\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\ +\frac{1}{2}\right)\right)}{\sigma\sqrt{2t}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\right)^{2\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)}\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)+\sigma^2 t\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\ +\frac{1}{2}\right)\right)}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{D\left(1+\alpha\right)}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{\ln\left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\right)}{\sigma\sqrt{2t}}-\frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}\right)^{\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}-1\right)}\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{\ln\left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\right)}{\sigma\sqrt{2t}}+\frac{\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)\right)$$

## 2.6 Задача оптимального управления

Чтобы максимизировать прибыль от нашей стратегии, мы должны найти решение следующей задачи:

$$V_O=\sup_{0\le\alpha\le1}\mathbb{E}(V_P+V_F+V_H),$$

где $\alpha$ - доля капитала, размещаямая на маржинальном счете для обеспечения фьючерсной позиции. Именно $\alpha$ будет являться нашим управлением.

Попробуем решить данную задачу в общем виде. Для того, чтобы найти оптимальное нетривиальное (не равное 0 или 1) значение параметра $\alpha$, нам необходимо, чтобы максимальная доходность достигалась при $0<\alpha<1$, то есть иметь максимум функции в этом промежутке, а значит выполнение двух условий: равенства нулю первой производной $V$ по $\alpha$ и положительности значения второй производной $V$ по $\alpha$ на том же промежутке. Посчитанное значение первой производной по $\alpha$ в явном виде представлено в Приложении 1 (формула 23). Общий вид формулы второй производной $V$

по $\alpha$ будет, без сомнения, еще более громоздким, из чего понятно, что явно вывести уравнение для оптимального $\alpha$ достаточно затруднительно, а вложенные усилия не будут стоить той прибавки к качеству, которую они дадут. Поэтому в данной работе представлено численное решение задачи оптимального управления с использованием среды моделирования Jupyter Notebook и языка программирования Python. Для подбора оптимального $\alpha$ была задана решетка параметров, по которой был сделан перебор возможных значений функции $V$ (метод Grid Search). Для вычисления значения функции $V$ в разных узлах сетки была использована библиотека SymPy. Примерное время вычисления одного значения функции $V$ при помощи библиотеки SymPy составляет около 0.5 секунды, что достаточно долго, но в обозримое время позволяет нам перебрать около 40 тысяч значений для определения набора параметров, при которых доходность будет максимальной.

Перед тем, как искать оптимальное значение параметра $\alpha$, необходимо понять допустимые значения остальных параметров, таких как $\mu$, $\sigma$, $\beta$, $\lambda$ $t$, $\tilde{\kappa}$, $\iota$, $r_a$, $r_b$, $D$ и создать сетку возможных значений этих параметров. Для определения параметров $\mu$ и $\sigma$ была взята история дневных торгов Ethereum (ETH) за 5 лет (спотовые цены на конец дня, взятые с биржи Binance), по которым были вычислены скользящие значения смещенного математического ожидания ($\mu - \frac{\sigma^2}{2}$) и дисперсии $\sigma$ с окном в 180 дней. Значения скользящих смещенного математического ожидания и дисперсии были приведены к годовым значениям. Получен следующий результат:

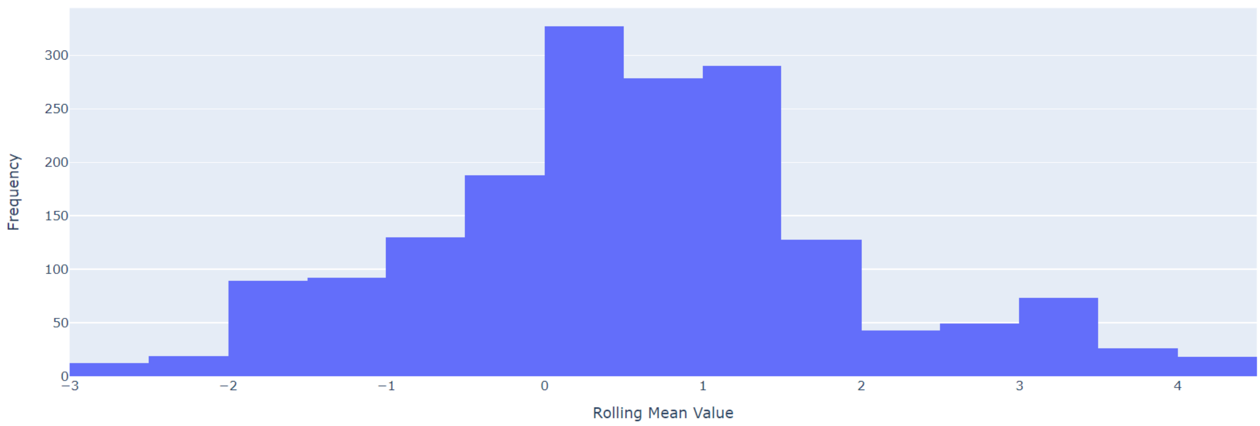


Рис. 2: Гистограмма скользящего смещенного математического ожидания


Рис. 3: Гистограмма скользящей дисперсии

Из гистограмм выберем диапазон $-1 \leq \mu \leq 2$ и $0.5 \leq \sigma \leq 1.2$, как самые встречающиеся значения параметров. Параметр $0.1 \leq \beta \leq 0.3$ - средняя годовая доходность пула, $\lambda = 0.01$ - взята с лендингового протокола AAVE для актива Ethereum, $0 \leq t \leq 1$, $\tilde{\kappa} = 0.01$ и $\iota = 0.01$ - были взяты с сайта Binance, $r_a = 0.0514$ и $r_b = 0.0174$ - были также взяты с лендингового протокола AAVE для актива USDT и Ethereum соответственно, $D = 1$ - возьмем для простоты.

Выполняя перебор по сетке параметров, обозначенной выше, получаем оптимальные параметры для достижения максимальной доходности: $\alpha$: 0.0, $\beta$: 0.3, $t$: 1.0, $\mu$: 2.0, $\sigma$: 0.5 Годовая доходность: 3.12645504359618

Из результата видно, что максимальная годовая доходность при заданных $\beta$, $\mu$ и $\sigma$ достигается при $\alpha = 0$. Действительно, если на рынке сильный возрастающий тренд, волатильность невысокая, а годовая доходность 30%, оптимальным решением будет положить все активы в пул ликвидности и не открывать фьючерсную позицию, которая стоит в противоложном направлении к позиции в пуле ликвидности.

Нетривиальное (неравное 0 или 1) значение параметра $\alpha$ для достижения максимальной годовой доходности можно получить при значении $\mu < 0$ (нисходящий тренд) и $\sigma = 0.5$, оставив остальные параметры неизменными. Пример представлен на графике ниже:

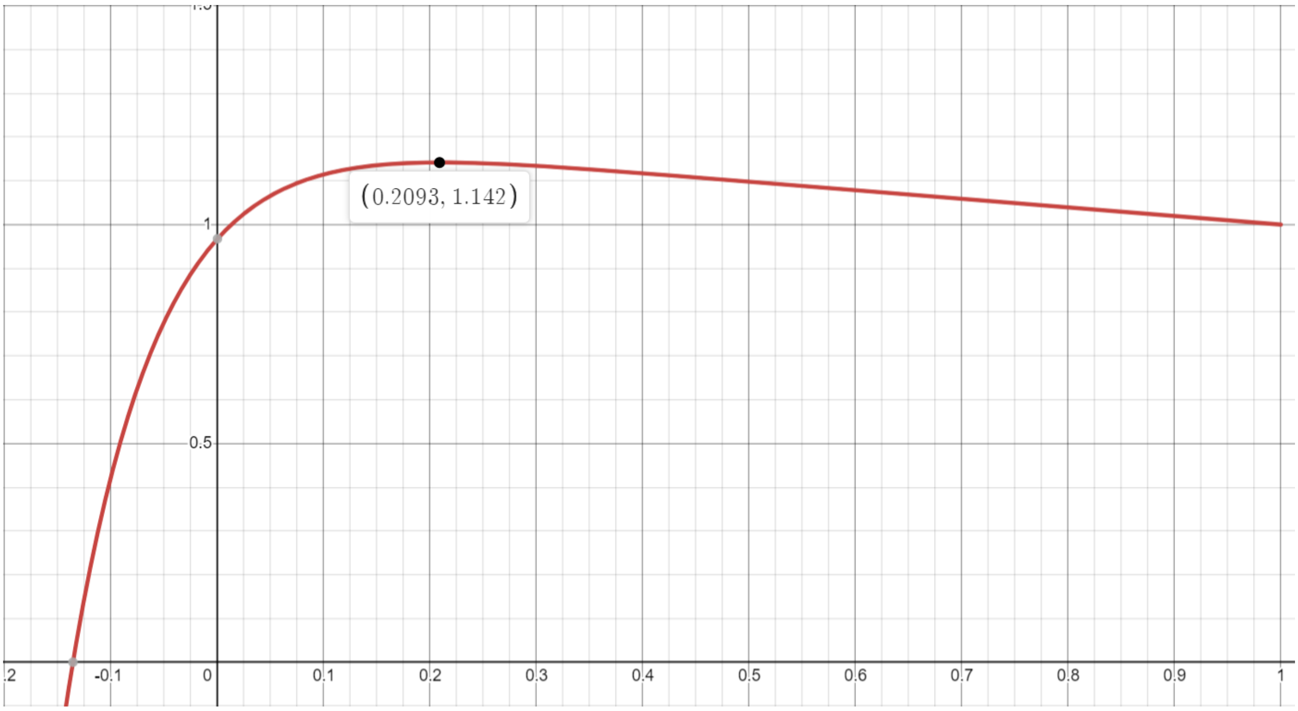

Рис. 4: График годовой доходности портфеля взависимости от параметра $\alpha$

График нарисован для параметров стратегии: $\alpha$: -, $\beta$: 0.3, $t$: 1.0, $\mu$: -0.6, $\sigma$: 0.5

Видно, что максимальная доходность (14% за год) при заданных параметрах получается при $\alpha = 0.20$, то есть при перенесении 20% капитала на маржинальный счет для дельта-хеджирования портфеля. Данный результат также отражает действительность, так как при нисходящем тренде для получения максимальной доходности выгодно защитить позицию в пуле ликвидности от падения хеджирующим инструментом, направленным в противоположную сторону. Причем для данного набора параметров и полученного оптимального значения $\alpha$ вероятность ликвидации $P_L = 0.07$. Зависимость вероятности ликвидации (18) от доли капитала, вложенной в маржинальный счет визуализирована ниже (обозначена черным цветом):

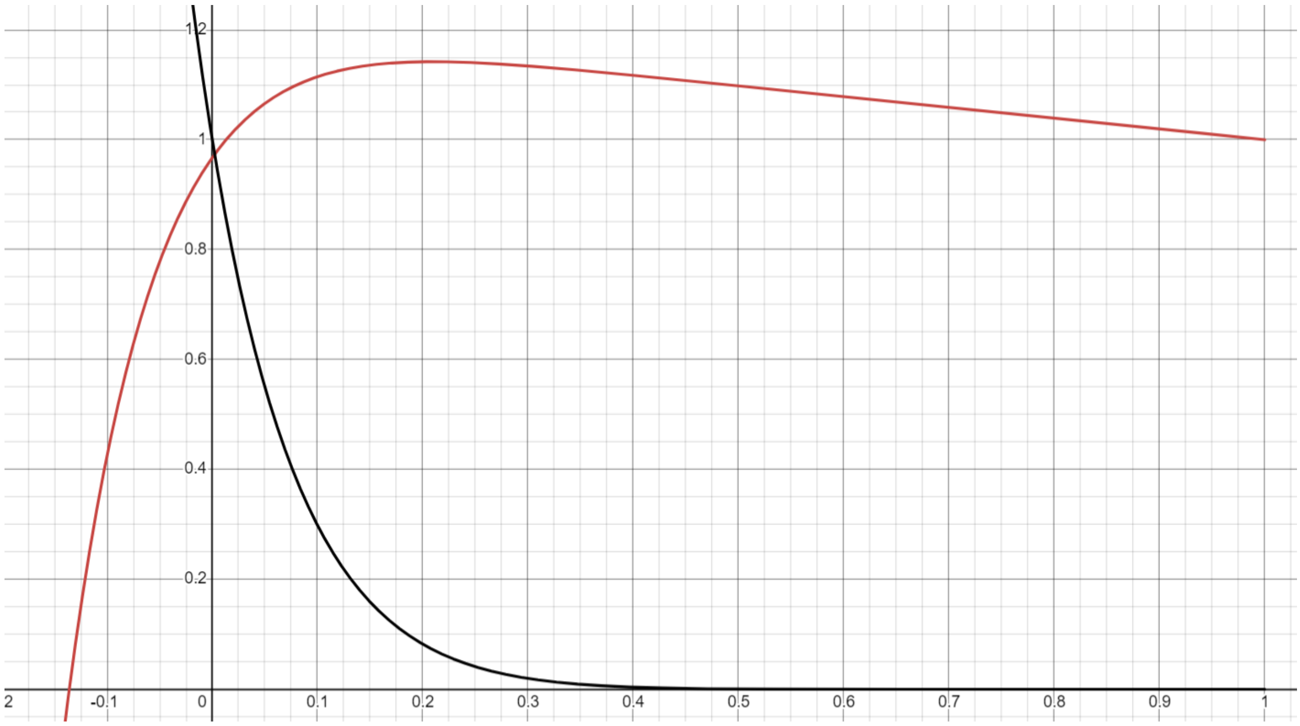


Рис. 5: Вероятность ликвидации фьючерсной позиции взависимости при изменении маржинального обеспечения

Теперь зафиксируем оптимальный параметр $\alpha = 0.20$ и проанализируем зависимость годовой доходности портфеля от параметра $\beta$, влияющего на размер накопленных комиссий поставщика ликвидности:

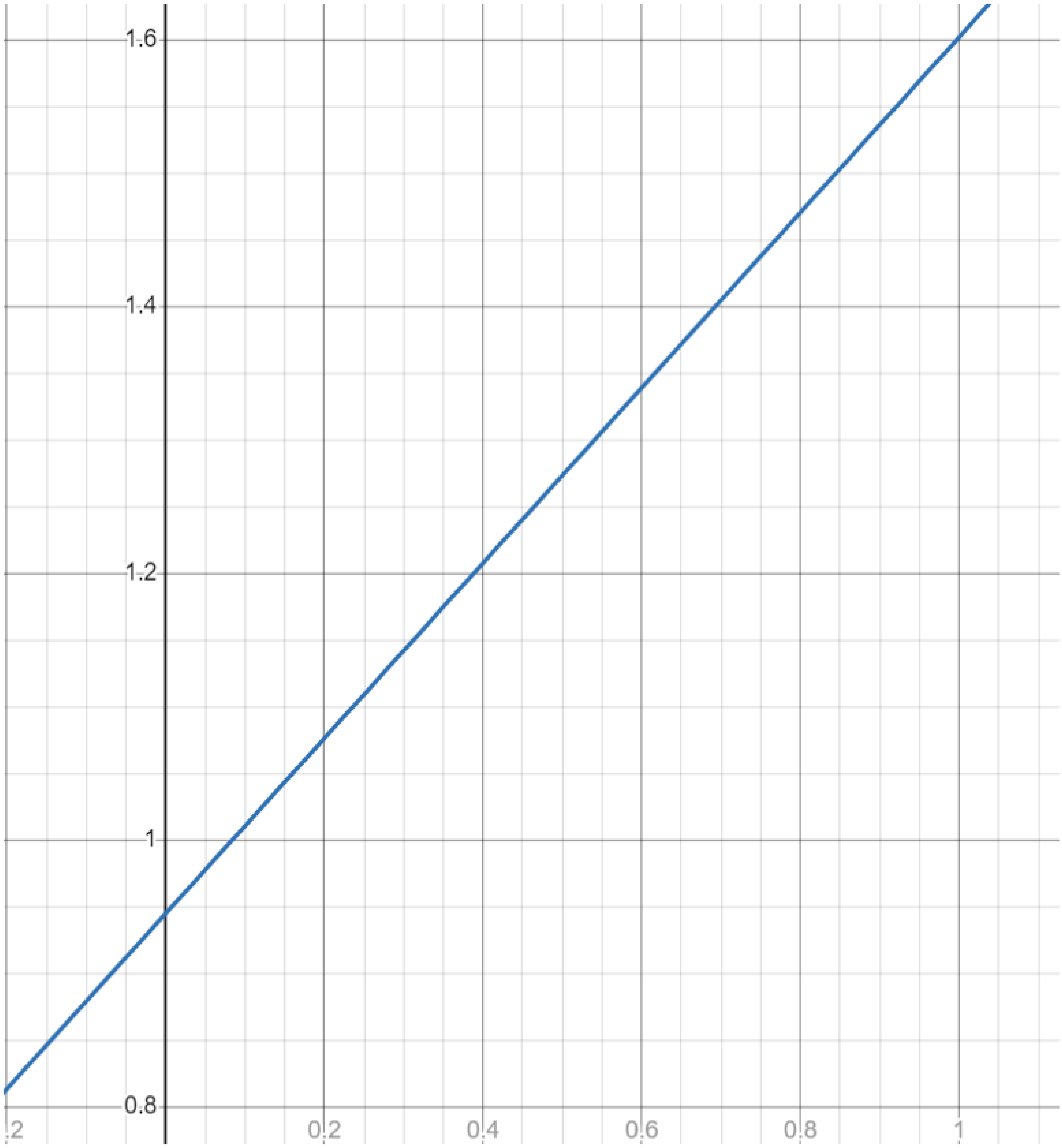


Рис. 6: Зависимость годовой доходности портфеля от параметра $\beta$

Текущий набор параметров: $\alpha$: 0.20, $\beta$: -, $t$: 1.0, $\mu$: -0.6, $\sigma$: 0.5

По графику видно, что годовая доходность портфеля линейно зависит от параметра $\beta$ из чего можно сделать вывод, что при нисходящем рыночном тренде основная доходность нашей стратегии дельта-хеджирования позиции поставщика ликвидности в пуле AMM бессрочными фьючерсами приходится на накопленные комиссии, полученные в качестве вознаграждения за предоставление ликвидности в пул. Такой результат полностью соответствует действительности по двум причинам: доходность по большей части зависит от накопленных комиссий и благодаря дельта-хеджированию наш портфель не имеет просадки в доходности.

Чтобы полностью проиллюстрировать позитивное влияние дельта-хеджирования в годовую доходность портфеля взглянем на график:

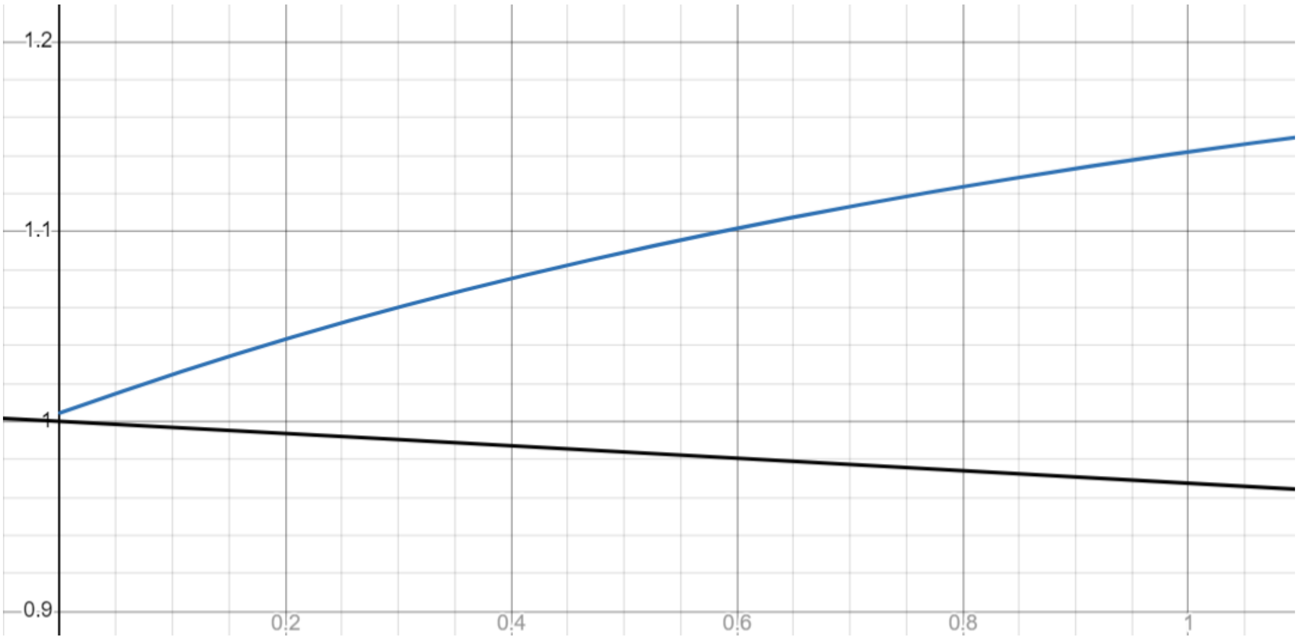


Рис. 7: Сравнение доходностей стратегий с дельта-хеджированием и без него

Синим цветом обозначена зависимость доходности от времени стратегии с дельта-хеджированием, а черным - стратегии без дельта-хеджирования.

# Заключение

В данной работе была изучена стратегия хеджирования позиции поставщика ликвидности на децентрализованной бирже с использованием бессрочных фьючерсов.

**Ключевые результаты работы:**

- Выведены выражения для стоимости активов и для математического ожидания стоимости активов поставщика ликвидности на децентрализованной бирже с учетом хеджирующей позиции в виде бессрочных фьючерсов.
- Выведено выражение для вероятности ликвидации позиции по бессрочным фьючерсам.
- Решена задача оптимального управления для разных состояний рынка.

В ходе данного исследования было показано, что стратегия дельта-хеджирования позиции поставщика ликвидности бессрочными фьючерсами является эффективным инструментом управления рисками и достижения стабильной доходности на финансовых рынках. В частности, было выявлено, что данная стратегия проявила себя наилучшим образом в условиях нисходящего рыночного тренда, имея достаточно низкую вероятность ликвидации хеджирующего инструмента (7%).

Проведенный анализ показал, что стратегия дельта-хеджирования позиции поставщика ликвидности в пуле AMM не только обеспечивает стабильную доходность в виде комиссий, но также позволяет снизить риски, связанные с изменениями цен активов. В сравнении со стратегией, не использующей дельта-хеджирование, данная стратегия на нисходящем рынке показала более высокую ожидаемую доходность на протяжении года.

Таким образом, результаты исследования подтверждают эффективность и значимость стратегии дельта-хеджирования позиции поставщика ликвидности бессрочными фьючерсами в контексте управления рисками и достижения финансовой устойчивости в различных рыночных условиях. Полученные результаты представляют практический интерес для применения в области финансового анализа и управления портфелем, и могут быть использованы для разработки эффективных стратегий инвестирования в будущем.

# Приложение 1

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = D\mathrm{e}^{t\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)}\left(1-\alpha\right) + \frac{Db\left(\mathrm{e}^{t\left(-\lambda+\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}\right)}-1\right)\left(1-\alpha\right)}{-\lambda+\frac{\mu}{2}-\frac{\sigma^2}{8}} +$$

$$\frac{D\left(1-\alpha\right)}{4}\left(\frac{\kappa\left(-r_b+r_a-\iota\right)}{\kappa-\iota}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{t\mu}-q_1\mathrm{e}^{t\mu}\left(\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)^{2\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)}-q_2\right)\right)+ \tag{23}$$

$$+\frac{D\left(\alpha+1\right)}{2}\left(1-\frac{q_3\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}-1}}{2}-\frac{q_4}{2}\right),$$

где

$$q_1 = \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)+\sigma^2 t\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{t}}\right),$$

$$q_2 = \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)-\sigma^2 t\left(\frac{\mu}{s^2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{t}}\right),$$

$$q_3 = \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)}{\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$q_4 = \operatorname{erfc}\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha}\right)}{\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

# Список литературы


[1] *Werner, Sam.* Sok: Decentralized finance (defi) / Sam Werner, Daniel Perez, Lewis Gudgeon, Ariah Klages-Mundt, Dominik Harz, William Knottenbelt // Proceedings of the 4th ACM Conference on Advances in Financial Technologies. — 2022. — Pp. 30–46.

[2] *Capponi, Agostino.* The adoption of blockchain-based decentralized exchanges / Agostino Capponi, Ruizhe Jia // *arXiv preprint arXiv:2103.08842.* — 2021.

[3] *Bartoletti, Massimo.* A theory of automated market makers in defi / Massimo Bartoletti, James Hsin-yu Chiang, Alberto Lluch-Lafuente // *Logical Methods in Computer Science.* — 2022. — Vol. 18.

[4] *Adams, Hayden.* Uniswap v2 Core / Hayden Adams, Noah Zinsmeister, Dan Robinson. — 2020. `https://uniswap.org/whitepaper.pdf`.

[5] *Adams, Hayden.* Uniswap v3 Core / Hayden Adams, Noah Zinsmeister, Moody Salem moody, Uniswaporg River Keefer, Dan Robinson. — 2021. `https://uniswap.org/whitepaper-v3.pdf`.

[6] *Bardoscia, Niccolò.* Liquidity Providers Greeks and Impermanent Gain / Niccolò Bardoscia, Alessandro Nodari // *arXiv preprint arXiv:2302.11942.* — 2023.

[7] *Heimbach, Lioba.* Risks and returns of uniswap v3 liquidity providers / Lioba Heimbach, Eric Schertenleib, Roger Wattenhofer // Proceedings of the 4th ACM Conference on Advances in Financial Technologies. — 2022. — Pp. 89–101.

[8] *Deng, Jun.* Static replication of impermanent loss for concentrated liquidity provision in decentralised markets / Jun Deng, Hua Zong, Yun Wang // *Operations Research Letters.* — 2023. — Vol. 51, no. 3. — Pp. 206–211.

[9] *Milionis, Jason.* Quantifying loss in automated market makers / Jason Milionis, Ciamac C Moallemi, Tim Roughgarden, Anthony Lee Zhang // Proceedings of the 2022 ACM CCS Workshop on Decentralized Finance and Security. — 2022. — Pp. 71–74.

[10] *Khakhar, Adam.* Delta hedging liquidity positions on automated market makers / Adam Khakhar, Xi Chen // *arXiv preprint arXiv:2208.03318.* — 2022.

[11] *Alexander, Carol.* Hedging with bitcoin futures: The effect of liquidation loss aversion and aggressive trading / Carol Alexander, Jun Deng, Bin Zou // *arXiv preprint arXiv:2101.01261.* — 2021.

[12] *Shiller, Robert J.* Measuring asset values for cash settlement in derivative markets: hedonic repeated measures indices and perpetual futures / Robert J Shiller // *The Journal of Finance.* — 1993. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 911–931.

[13] *He, Songrun.* Fundamentals of perpetual futures / Songrun He, Asaf Manela, Omri Ross, Victor von Wachter // *arXiv preprint arXiv:2212.06888.* — 2022.

[14] *Angeris, Guillermo.* A primer on perpetuals / Guillermo Angeris, Tarun Chitra, Alex Evans, Matthew Lorig // *SIAM Journal on Financial Mathematics.* — 2023. — Vol. 14, no. 1. — Pp. SC17–SC30.

[15] *Kim, Jack.* Pricing Power Perpetual Futures / Jack Kim, Kristof Lommers, Boris Skidan, Viktor Smits // *Available at SSRN 4422657.* — 2023.

[16] *Cheng, Zhiyong.* Liquidation, leverage and optimal margin in bitcoin futures markets / Zhiyong Cheng, Jun Deng, Tianyi Wang, Mei Yu // *Applied Economics.* — 2021. — Vol. 53, no. 47. — Pp. 5415–5428.

[17] *Ackerer, Damien.* Perpetual Futures Pricing / Damien Ackerer, Julien Hugonnier, Urban Jermann // *arXiv preprint arXiv:2310.11771.* — 2023.

[18] *Borodin, Andrei N.* Handbook of Brownian motion-facts and formulae / Andrei N Borodin, Paavo Salminen. — Springer Science & Business Media, 2015.