1-4 常用對數

林信安老師編寫

(甲)科學記號

◆ 科學記號與位數

科學記號不僅可以簡潔的表達一長串的數字，並且可以掌握數字的大小。

例如：

(1)美國 2014 年 GDP 為 17,420,000 百萬美元，其中 17,420,000 為 8 位整數，表為科學記號是 1.742×10^7 百萬美元。

(2)H1N1 流感病毒的大小約 0.000000054 公尺，0.000000054 公尺從小數點後開始第 8 位開始不為 0，它表為科學記號是 5.4×10^{-8} 公尺。

從前面的例子可以看出：

正數都可以表為科學記號 $a\times10^n$，其中係數 a 滿足 $1\le a<10$，指數 n 為整數。

將正數以「n 位有效數字表示」是指先將它寫成科學記號數字，再將它的係數四捨五入約至 $n-1$ 位小數，然後以普通記號或科學記號呈現其數值。

例如：

美國 2014 年 GDP 為 1.742×10^7 百萬美元，以 3 位有效數字表示即為 1.74×10^7 百萬美元。

(1)從科學記號可以很容易知道此正數的位數，

因為 $10^n\le a\times10^n<10^{n+1}$，

當 n 為正整數：

$10^n=100\ldots00$ 為 $n+1$ 位數，

$10^{n+1}=100\ldots000$ 為 $n+2$ 位數，

故 $a\times10^n$ 整數部分為 $n+1$ 位數。

例如：3.21×10^8 介於 10^8 與 10^9 之間，

故 3.21×10^8 的整數部分是 9 位數。

當 $n=-k$ (k 為正整數)：

$10^{-k}=0.0000\ldots.01$ 是從小數點後第 k 位開始出現 1，

$10^{-k+1}=0.0000\ldots.01$ 是從小數點後第 $k-1$ 位開始出現 1，

故 $a\times10^n$ 會從小數點後第 k 位開始出現不為 0 的數字。

例如：3.24×10^{-5} 介於 10^{-5} 與 10^{-4} 之間，

故 3.24×10^{-5} 從小數點後第 5 位開始出現不為 0 的數字 3。

10^n	位數
$1=10^0$	1
$10=10^1$	2
$100=10^2$	3
$1000=10^3$	4
…….	…….
$\underbrace{100\ldots000}_{(n+1)位}=10^n$	$n+1$

10^n	小數點開始不為 0 的位數
$0.1=10^{-1}$	1
$0.01=10^{-2}$	2
$0.001=10^{-3}$	3
$0.0001=10^{-4}$	4
…….	…….
$\underbrace{0.000\ldots001}_{k位}=10^{-k}$	k

(2)在很多電腦軟體中會用 aE+n(aE−n)來示有效數字 $a\times10^{n}$ 或 $a\times10^{-n}$。

A	B	C
123000000.00	1.23E+08	
0.0000123	1.23E-05	

1-3 節我們使用計算機可求 10^x 的近似值，其實利用科學記號與位數關係，可以不使用計算就可以估計其位數。

[例題1] 試回答下列問題：

(1)試問 $10^{23.4}$ 的整數部分為幾位數？

(2)試問 $10^{-13.7}$ 從小數點後第幾位開始不為 0。

Ans：(1)24　(2)14

◆　科學記號的運算

科學記號能夠簡潔表示數字與表達很大或很小的數外，也可以進行乘除或加減的運算。

[例題2] 美國航太總署的太空探測船航海家 1 號(Voyager 1)，2012 年 9 月 9 日時，在太空中以光速每秒約 3×10^{8} 公尺向地球傳送資料，經過 16 小時 23 分 20 秒後地面行控中心才開始接收到資料。

(1)試問當時航海家 1 號距離地球大約是多少公尺？(以科學記號表示)

(2)上述的距離(公尺)是幾位數？有效數字有幾位？

Ans：(1) 1.77×10^{13}(公尺)　(2)14 位數、3 位有效數字

(練習1)　統計至 2018 年 10 月止，台灣地區的人口總數約為 23,580,833 人，請將人口總數化為科學記號並以 3 位有效數字表示。

Ans：2.35×10^{7} 人

(練習2)　請在空格中填入正確的數字：

(1)地球的質量約為 5.97×10^{21} (公噸)整數部分為(　　)位數，(　　)位有效數字。

(2)H1N1 流感病毒直徑約為 5.4×10^{-8}(公尺)從小數點後第(　　)位開始不為 0，(　　)位有效數字。

Ans：

(1)22 位數，3 位有效位數

(2)小數點後第 8 位開始不為 0，2 位有效數字

(練習3)　covid 19 冠狀病毒的直徑約為 120 奈米，請問 covid 19 冠狀病毒的直徑約為約為多少公尺？　(請用科學記號表示)　奈米(nm)$=1\times10^{-9}$ 公尺

Ans：1.2×10^{-7} 公尺

(練習4)　試回答下列問題：

(1)試問 $10^{17.3}$ 的整數部分為幾位數？

(2)試問 $10^{-14.1}$ 從小數點後第幾位開始不為 0。

Ans：(1)18　(2)15

(練習5)　大腸桿菌的大小約 2.7 微米，H1N1 流感病毒的大小約 54 奈米，大腸桿菌的大小是 H1N1 流感病毒的幾倍？

(1 微米(um)$=1\times10^{-6}$ 公尺，奈米(nm)$=1\times10^{-9}$ 公尺)

Ans：50 倍

(乙)常用對數

一、引入常用對數

購買 3C 產品(例如：記憶體、行動硬碟、智慧型手機等)的時候，常常會聽到行動硬碟的容量是 500GB、1.5TB 或智慧型手機 RAM 的記憶體容量為 3GB，這些名詞代表甚麼意義呢？在電腦裡記憶一個字母的單位稱為位元組(byte)，由於電腦中的運算都是以 0、1 來表示資料，因此電腦資料容量的換算是以 2 的次方來表示。例如：

1KB=2^{10}(byte)、1MB=2^{10}KB、1GB=2^{10}MB、1TB=2^{10}GB

根據上述的換算關係可知 1GB=2^{30}(byte)，而 2^{30} 到底是幾位數呢？

若能估計 2 是 10 的幾次方，就可將 2^{30} 化成科學記號 $a\times10^{n}$，然後進一步得知 2^{30} 是幾位數，因此能夠估計一個正數是 10 的幾次方就可以知道它的位數。

接下來，我們用計算機來探討 2，是 10 的幾次方的問題：

(1°)先用計算機求出 $10^{0.1}\approx1.259$、$10^{0.2}\approx1.584$、$10^{0.3}\approx1.995$，$10^{0.4}\approx2.512$，

可知 $10^{0.3}<2=10^{a}<10^{0.4}$，故 $0.3<a<0.4$。

(2°)將 0.3 與 0.4 平分成十等分：

再用計算機算出 $10^{0.31}\approx 2.042$，故 $0.3<a<0.31$。

(3°)再將 0.3 與 0.31 平分成十等分：

使用計算機得出 $10^{0.301}\approx 1.999$，$10^{0.302}\approx 2.0045$，因為 $10^{0.301}<2=10^{a}<10^{0.302}$，

故 $0.301<a<0.302$，

因為 2 較接近 $10^{0.301}$，故 a 比較接近 0.301，可用 0.301 作為 a 的近似值。

重複使用計算機與十分逼近法，可以找到愈來愈接近 a 的近似值。

數學上，若正數 p 表示成 10 的乘冪，即 $p=10^{a}$，則稱 a 為 p 的**常用對數**。

設 p 為正數，若 p 表示成 10 的乘冪，即 $p=10^{a}$，則稱 a 為 p 的**常用對數**。 符號表為 $\boldsymbol{a=\log p}$。

根據定義，$p=10^{a}\ \Leftrightarrow\ a=\log p$，所以 $p=10^{\log p}$ 。

$p=10^{\log p}$ 這個符號就是說 **"$\log p$ 是一個數，而 10 的這個數的次方會等於 p"**。

故我們可用 log 這個符號將任何正數都表示成 10 的乘冪。

例如：$2=10^{\log 2}$，$3=10^{\log 3}$，$0.7=10^{\log 0.7}$。

(練習6)　(1)試著在空格中，填入正確數字？

$1000=10^{\square}\Leftrightarrow \log 1000=\square$　　$0.00001=10^{\square}\Leftrightarrow \log 0.00001=\square$

$5=10^{(\cdots\cdots)}$　　$0.3=10^{(\cdots\cdots)}$　　$1=10^{(\cdots\cdots)}$

(2)試求下列各式的值：　$10^{\log 12}$ 、$10^{\log 0.0314}$

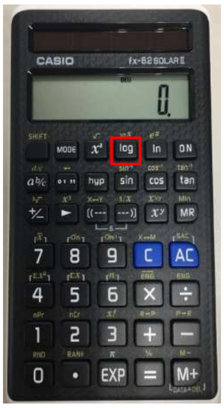
Ans：(2)12、0.0314

根據常用對數的定義，可得 $\log 10^{n}=n$，特別 $\log 1=0$。

(練習7)　請利用常用對數的定義，將適當的數填入方格中：

(1)$5=10^{\square}$　(2)$10^{\log 0.3}=\square$　(3)$0.26=10^{\square}$　(4)$10^{2\log 6}=\square$

Ans：(1)log5　(2)0.3　(3)log0.26　(4)36



另一方面，計算機中的　鍵就是常用對數的符號，可算出 $\log p$ (p 為正數)的近似值或正確值。

以 log2 為例：

在計算機中依次輸入　，可得 $\log 2\approx 0.301029995$。

因為 $10^{\log 2}=2$，所以 $10^{0.301029995}\approx 2$，0.301029995 比 0.301 更接近 log2。

[例題3] 若實數 x 滿足 $10^x=6$，

(1)試以常用對數來表示 x 的值。

(2)用計算機求 x 的近似值

(四捨五入至小數點後第四位)。

[解法]：

(1)因為 $10^x=6$，根據常用對數的定義，$x=\log 6$。

(2)在計算機中依次輸入⌐ ˜，

可得 log6≈0.7781511250，四捨五入至小數點後第四位為 log6≈0.7782。

(練習8) 用計算機計算下列各數的近似值(四捨五入至小數點後第四位)

log3、log300、log0.3、log0.003

Ans：log3=0.4771　log300=2.4771　og0.3=−0.5229　log0.003=−2.5229

(練習9) 用計算機求出下列各題 x 的近似值(四捨五入至小數點後第四位)

(1)$10^x=0.5$　(2)$10^x=28$　Ans：(1)−0.3010　(2)1.4772

[例題4] 試問下列各對數值會落在哪兩個整數之間：

(1)log21970

(2)log0.000357

Ans：(1)4 與 5 之間　(2)−4 與−3 之間

科學上很多公式都可用常用對數來表示，像溶液的酸鹼值就與常用對數有關。

[例題5] pH 值是衡量溶液酸鹼程度的標準，它的定義如下：

pH 值$=-\log[H^+]$，其中$[H^+]$為氫離子的濃度(莫爾/升)

(1)某酸性溶液氫離子的濃度為 10^{-3}(莫耳/升)，試問此酸性溶液的 pH 值。

(2)現在把 pH 值為 3 與 4 的酸性溶液依 1 比 1 混合，求混合溶液的 pH 值。

(用計算機四捨五入至小數點後第一位)

Ans：(1)3　(2)3.3

[例題6] 西元 1876 年法國數學家 Lucas(1842~1891)發現 $2^{127}-1$ 為質數。

(1)將 2^{127} 化成 10 的乘冪，即 $2^{127}=10^k$，請用常用對數表示 k。

(2)試問 $2^{127}-1$ 為幾位數。

Ans：(1)127log2　(2)39 位數

(練習10)　試問下列各對數值會落在哪兩個整數之間：

(1)log513000　　(2)log0.00289

Ans：(1)5 與 6 之間　(2)−2 與−3 之間

(練習11)　若有一種洗面乳 A 標示其 pH=5.1，洗面乳 B 標示 pH 值為 5.5，試用計算機估算洗面乳 A 中氫離子濃度約為洗面乳 B 中氫離子濃度的幾倍？

(四捨五入取到小數點後第一位)　Ans：2.5

(練習12)　西元 1883 年 Pervushin 證明了 $2^{61}-1$ 為質數，試問 $2^{61}-1$ 為幾位數？　Ans：19

習題

基本題

1. 下列各式請判斷正確與否，正確在格子中填入 O，不正確填入×：
 _____ (1)2.34×10^{21} 是 22 位數。
 _____ (2)3.11×10^{-12} 小數點後第 12 位開始不為 0。
 _____ (3)$10^{8.91}$ 整數部分是 8 位數。
 _____ (4)$10^{-6.12}$ 小數點後第 6 位開始不為 0。
 _____ (5)log1409 介於 4 與 5 之間。
 _____ (6)log0.0314 介於整數-2、-1 之間。

2. 試回答下列各問題？
 (1)人類平均一天眨眼 1.5×10^4 次，如果老奶奶活了 100 歲(1 年以 365 天計算)，則老奶奶一生大約共眨眼多少次？(以科學記號表示) (5.475×10^8 次)
 (2)美國發射的第一艘火星探測器「鳳凰號」，在太空中歷經 6.8×10^8 公里的航程後，終於登陸火星表面。若發射第一天鳳凰號行進了 1.4×10^5 公里，第二天行進了 2.82×10^6 公里，則這兩天鳳凰號一共行進了多少公里？(以科學記號表示)
 (3)已知太陽的質量約 1.987×10^{30}kg，地球的質量為 5.975×10^{24}kg，試問太陽的質量約為地球質量的多少倍？(化為 2 位有效數字的科學記號)

3. 試求下列各式的值：
 (1)$10^{\log 29}$ (2)$10^{\log 0.072}$ (3)$10^{2\cdot\log 3}$ (4)$10^{-\log 3}$

4. 試回答下列各問題：
 (1)若 x 滿足 $10^x=17$，用常用對數來表示 x 的值，
 並用計算機求 x 的近似值(四捨五入至四位小數)。
 (2)若 t 滿足 $10^t=0.055$，用常用對數來表示 t 的值，
 並用計算機求 x 的近似值(四捨五入至四位小數)。

5. 試回答下列各問題：
 (1)log1409 介於哪兩個整數之間？
 (2)log0.0314 介於哪兩個整數之間？

6. 有兩個正實數 a、b，已知 $a^3b^4=10^7$，$a^2b=10^2$，則 $\log b=$_________。(化為最簡分數)

7. 若 x,y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}}y^2=1$ 及 $2\log y=1$，則 $\frac{x-y^2}{10}=$_________。

8. 在真實世界中，很多類型的數據通常都遵守「班佛定律：一堆從實際生活得出的數據中首位數字為 a 的比例約為 $\log(1+\dfrac{1}{a})$。」審計部門常會用此定律來檢查帳目是否作假。試問一堆數據中首位數字為 7 的比例約為多少？
(利用計算機四捨五入至小數點後第二位)

9. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲　音的最小強度為 $I_0=10^{-12}(W/m^2)$；當測得的聲音強度為 $I(W/m^2)$ 時，所產生噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$
(1)人類能感覺出聲音的最大強度為 $10^2 W/m^2$，這個強度相當於多少分貝？
(2)無形的，不同音量的噪音會對人體有不同的影響程度，捷運的噪音約為 90 分貝會使得內分泌與心電圖產生變化，使問 90 分貝的聲音等於多少強度(W/m^2)。

10. 天文學上用「視星等」與「絕對星等」來衡量恆星的亮度，這兩個星等的關係為：M = m + 5−5logd，其中 m、M 分別代表該恆星的目視星等、絕對星等，d 代表恆星與地球的距離(秒差距，1 秒差距≈3.26 光年)。已知牛郎星的目視星等為 0.77，絕對星等為 2.2，
(1)請用指數表示牛郎星與地球的距離(單位：秒差距)。
(2)利用計算機求牛郎星距離地球約為多少光年？(四捨五入至整數位)。

11. 網際網路梅森質數大搜索(GIMPS)計畫是透過網路連接全球各地的電腦資源搜尋梅森質數(形如 2^p-1 的質數，其中 p 為質數)。
已知 $2^{607}-1$ 為一個質數，試回答下列各問題：
(1)根據常用對數的定義 $2=10^{\log 2}$，令 $2^{607}=10^k$，試用 log2 來表示 k。
(2)用計算機求出 log2 的值，並且進一步找出 k 的近似值。
(四捨五入到小數點後第一位)
(3)請問質數 $2^{607}-1$ 是幾位數？

12. 在電腦裡記憶一個字母的單位稱為位元組(byte)，由於電腦中的運算都是以 0、1 來表示資料，因此電腦資料容量的換算是以 2 的次方來表示。，例如：
1KB=2^{10}(byte)、1MB=2^{10}KB、1GB=2^{10}MB、1TB=2^{10}GB，試回答下列問題：
(1)容量為 1TB 的行動硬碟是 2^{α}(byte)，試求α的值。
(2)承(1)請問 2^{α}是幾位數？

13. 有個社會學的研究發現：生活在總人口為 p(千人)的城市中的人，其步行速度 v(公尺/秒)，可以近似於以下的關係式：

$v=0.26\times\log p+0.02$

請根據這個關係式回答以下問題：

(1)台北市的人口約 267 萬人，試問台北市市民步行速度約是多少公尺/秒？(四捨五入至小數點後第二位)

(2)社會學家在某個小城市中估計人們步行速度約為 0.5 公尺/秒，利用上述關係來估計此城市的人口數為多少人。(四捨五入至整數位)

14. 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設發生芮氏規模 M_L 地震時震央所釋放出來的能量為 E (爾格)，其關係為 $\log E=11.8+1.5M_L$

日本 2011 年宮城大地震的芮氏規模為 9.0；1999 年台灣發生集集大地震芮氏規模為 7.3。請利用計算機回答下列問題

(1)請問宮城大地震震央釋放的能量 E 為幾位數？

(2)請問宮城大地震震央釋放的能量約為集集大地震震央釋放的能量幾倍？(利用計算機四捨五入約至整數位)

進階題

15. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實面積的α次方成正比。例如：大圖形是小圖形面積的 3 倍，眼睛感覺到的只有 3^{α} 倍。觀察某個國家與其中一個縣的地圖，已知全國的面積約為該縣面積的 27 倍，而眼睛感覺全國面積約為該縣面積的 10 倍，

(1)試求 27^{α}的值。

(2)根據常用對數的定義，$10^{\log 27}=27$ ，試以 log27 表示α。

(3)利用計算機α的近似值。(四捨五入至小數點後第一位)

16. 若一張 A4 影印紙的厚度約為 0.05 公分，

(1)將它對折 4 次後，試問紙張的厚度為多少公分？

(2)假設一張 A4 的紙，可以一直對折下去，則對折 n 次後，紙張的厚度為多少公尺？(用 n 表示)

(3)將 A4 對折幾次後，折紙厚度會超過臺北市地標 101 大樓的高度？|

(101 大樓高度為 509 公尺)

17. 由實驗室製造的放射性碘 I_{131}，可以應用在醫療方面使用。有甲狀腺問題的病患在手術後一段時間，要檢查是否還有新生成不好的甲狀腺細胞，通常會使用 I_{131} 來檢驗：放射性碘經由人體吸收，會累積在甲狀腺的組織中，如果身體內還殘留甲狀腺細胞，I_{131} 將附在上面，可藉由掃瞄偵測出來，以判斷是否需要做進一步治療。但經過一段時間，體內的 I_{131} 會自然的減少或消失。碘 I_{131} 經過 t 天後，其數量會由 N_0 變成 $N_0 \times a^t$，其中 a 為常數。

已知碘 I_{131} 的半衰期是 8 天 (八天後放射性元素的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{2}$)，

(1)試求 a 的值。(以指數的形式表示)

(2)請問至少要過多少天後，碘 I_{131} 的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$。 (四捨五入至整數位)

18. (1)已知 $10^{167}<47^{100}<10^{168}$，根據這個關係式，請估計 log47 的值精確到小數點後第二位。(提示：$47=10^{\log 47}$)
(2)試問 47^{17} 是幾位數？

19. 設 a,b,s,t 均為正數，且滿足 $\log a=s$、$\log b=t$，試求下列各小題：

(1) 試以 s,t 表示 a^2b、$\frac{b}{a^3}$

(2) 試以 s,t 表示 $\log a^2b$、$\log\frac{b}{a^3}$。

20. 設 m,n 為正數，請利用常用對數的定義，證明下列各式：
(1)$\log mn=\log m+\log n$。

(2)$\log\frac{m}{n}=\log m-\log n$。

(3)$\log m^t=t\log m$。(t 為實數)

答案

1. (1)O：$10^{21}<2.34\times10^{21}<10^{22}\Rightarrow2.34\times10^{21}$ 為 22 位數。
   (2)O：$10^{-12}<3.11\times10^{-12}<10^{-11}\Rightarrow3.11\times10^{-12}$ 小數點後第 12 位開始不為 0。
   (3)×：$10^{8}<10^{8.91}<10^{9}\Rightarrow10^{8.91}$ 整數部分是 9 位數。
   (4)×：$10^{-7}<10^{-6.12}<10^{-6}\Rightarrow10^{-6.12}$ 小數點後第 7 位開始不為 0
   (5)×：令 $t=\log1409\Rightarrow10^{t}=1409=1.409\times10^{3}$
   $10^{3}<10^{t}=1.409\times10^{3}<10^{4}\Rightarrow3<t<4$，故 log1409 介於整數 3、4 之間。
   (6)O：令 $k=\log0.0314\Rightarrow10^{k}=0.0314=3.14\times10^{-2}$。不正確。
   $10^{-2}<10^{k}=3.14\times10^{-2}<10^{-1}$，故 log0.0314 介於整數−2、−1 之間。

2. (1) 5.475×10^{6}(次)。(2) 2.96×10^{6}(公里)。(3) $\approx3.3\times10^{5}$(倍)。

3. (1)29　(2)0.072　(3)9　(4)$\frac{1}{3}$

4. (1)$x=\log17\approx1.2304$　(2)$t=\log0.055\approx-1.2596$

5. (1)3 與 4 之間　(2)−2 與−1 之間

6. $\frac{8}{5}$
   [解法]：
   $a^3b^4=10^7\Rightarrow a^6b^8=10^{14}$
   $a^2b=10^2\Rightarrow a^6b^3=10^6$
   $\frac{a^6b^8}{a^6b^3}=\frac{10^{14}}{10^6}=10^8\Rightarrow b^5=10^8\Rightarrow b=10^{\frac{8}{5}}\Rightarrow\log b=\frac{8}{5}$。

7. 99
   [解法]：
   $2\log y=1\Rightarrow y=10^{\frac{1}{2}}$ 代入 $x^{\frac{-1}{3}}y^2=1$，可得 $x^{\frac{-1}{3}}\cdot10=1\Rightarrow x=(\frac{1}{10})^{-3}=10^3$
   因此 $\frac{x-y^2}{10}=\frac{1000-10}{10}=99$。

8. 0.06

9. (1)$d(10^2)=10\times\log\frac{10^2}{10^{-12}}=10\times\log10^{14}=140$(分貝)
   (2)設 I 為 90 分貝的聲音之強度
   $\Rightarrow90=10\times\log\frac{I}{10^{-12}}$　$\Rightarrow I=10^{-3}(W/m^2)$

10. (1)$10^{0.714}$ 秒差距　(2)17 光年

11. (1)607log2　(2)182.7　(3)183 位數

(1) $2^{607}=(10^{\log 2})^{607}=10^{k}$，所以 $k=607\times\log 2$

(2)$k=607\times\log 2\approx 182.7$

(3)$2^{607}-1\approx 2^{607}\approx 10^{182.7}$

$\because$ $10^{182}<2^{607}-1\approx 2^{607}<10^{183}$，$\therefore 2^{607}-1$ 為 183 位數。

12. (1)40　(2)13

13. (1)0.91(公尺/秒)　(2)70170 人

(1)台北市民步行速度 $v=0.26\times\log(2670)+0.02\approx 0.91$(公尺/秒)

(2)設小城市的人口為 p(千人)

$0.5=0.26\times\log p+0.02\Rightarrow\log p=\dfrac{0.48}{0.26}\Rightarrow p=10^{\frac{0.48}{0.26}}\approx 70.1704$(千人)

⇒故小城市約有 70170 人。

14. (1)26 位數　(2)355

(1)$\because$ $\log E=11.8+1.5M_L$，

設宮城大地震的能量為 E_1

$\therefore\log E_1=11.8+1.5\times 9.0=25.3$

$E_1=10^{25.3}\Rightarrow 10^{25}<10^{25.3}<10^{26}\Rightarrow$ E_1 為 26 位數。

(2) 設集集大地震的能量為 E_2

$\Rightarrow\log E_2=11.8+1.5\times 7.3=22.75\Rightarrow E_2=10^{22.75}$

$\Rightarrow\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{10^{25.3}}{10^{22.75}}=10^{2.55}\approx 354.813\approx 355$。

15. (1)$27^{\alpha}=10$　(2) $\dfrac{1}{\log 27}$　(3)0.7

[提示]：

(2) $10^{\log 27}=27\Rightarrow(10^{\log 27})^{\alpha}=10^{1}\Rightarrow\alpha=\dfrac{1}{\log 27}$

(3) $\alpha=\dfrac{1}{\log 27}\approx 0.6986\approx 0.7$。

16. (1)0.8 公分　(2)0.05×2^{n}　(3)20

提示：設對折 n 次後厚度會超過臺北市地標 101 大樓的高度

$\Rightarrow 0.05\times 2^{n}>505\times 100\Rightarrow 2^{n}>505\times 2000\Rightarrow(10^{\log 2})^{n}>1010000=10^{\log 1010000}$

$\Rightarrow n(\log 2)>\log 1010000\Rightarrow n>\dfrac{\log 1010000}{\log 2}\approx 19.94\Rightarrow n=20$。

17. (1)∵ 碘 I_{131} 的半衰期是 8 天，∴ $\frac{N_0}{2}=N_0\times a^8\Rightarrow a^8=\frac{1}{2}\Rightarrow a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{-1}{8}}$。

(2)設依題意，設 t 天後碘 I_{131} 的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$

$\frac{N_0}{2}=N_0\times a^8$……(1)　　　$\frac{N_0}{6}=N_0\times a^t$…….(2)

$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow 3=\frac{a^8}{a^t}\Rightarrow a^{8-t}=3$

$\Rightarrow 2^{\frac{t}{8}-1}=3\Rightarrow (10^{0.3010})^{\frac{t}{8}-1}=10^{0.4771}\Rightarrow 0.3010(\frac{t}{8}-1)=0.4771\Rightarrow t\approx 20.6803986711\approx 21$。

大約經過 21 天碘 I_{131} 的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$。

18. (1)1.67　(2)29 位數
(1)設 $\log 47=k\Leftrightarrow 47=10^k$
∵ $10^{167}<47^{100}<10^{168}$，∴ $10^{167}<(10^k)^{100}<10^{168}$
$\Rightarrow 167<100k<168\Rightarrow 1.67<k<1.68$
log47 精確到小數點後第二位=1.67。
(2)∵ $10^{167}<47^{100}<10^{168}$，∴ $10^{1.67}<47<10^{1.68}$
$\Rightarrow(10^{1.67})^{17}<47^{17}<(10^{1.68})^{17}\Rightarrow 10^{28.39}<47^{17}<10^{28.56}$，故 47^{17} 為 29 位數。

19. (1)$a^2b=10^{2s+t}$, $\frac{b}{a^3}=10^{t-3s}$ (2) $\log a^2b=2s+t$, $\log\frac{b}{a^3}=t-3s$

[提示：由常用對數的定義，$a=10^s$, $b=10^t$，再求 $a^2b=10^{2s+t}$, $\frac{b}{a^3}=10^{t-3s}$，再利用常用對數的定義求得 $\log a^2b=2s+t$, $\log\frac{b}{a^3}=t-3s$]

20. (1)根據常用對數的定義與指數律，$10^{\log m+\log n}=10^{\log m}\cdot 10^{\log n}=m\cdot n$，故得證。

(2)根據常用對數的定義與指數律，$10^{\log m-\log n}=\frac{10^{\log m}}{10^{\log n}}=\frac{m}{n}$，故得證。

(3)根據常用對數的定義與指數律，$10^{t\log m}=(10^{\log m})^t=m^t$，故得證。