

2-4 圓與直線的關係

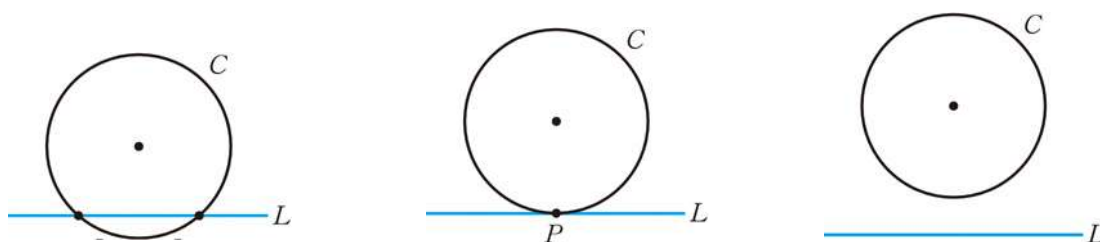
林信安老師編寫

(甲)圓與直線的關係

◆ 圓與直線的關係

在國中時，曾學過在平面上圓與直線的位置關係，有下列三種情形：

- (1) 若圓 C 與直線 L 交於相異兩點，如圖(a)，則稱直線 L 為圓 C 的割線。
- (2) 若圓 C 與直線 L 恰交於一點 P ，如圖(b)，則稱直線 L 為圓 C 的切線， P 為切點。
- (3) 若圓 C 與直線 L 沒有交點，如圖(c)，則稱直線 L 和圓 C 不相交（相離）。



(a) 交於相異兩點

(b) 恰交於一點

(c) 沒有交點

◆ 圓與直線的關係之判別：

一、代數觀點：

設圓方程式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，直線 L 為 $ax + by + c = 0$ ，利用「圖形的交點就是聯立方程式的實數解」的觀念判別之。

將聯立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ 中一次式代入二次式中，得到一元二次方程式，

則此一元二次方程式實數解的個數即為直線與圓的交點個數。

令一元二次方程式判別式為 D 。相離 $\Leftrightarrow D < 0$ 相切 $\Leftrightarrow D = 0$ 相割 $\Leftrightarrow D > 0$

二、幾何觀點：

利用「圓心到直線的距離」與「半徑」的關係判別之。

設圓 C 的圓心為 Q ，半徑為 r ，由 Q 到直線 L 的距離為 $d(Q, L)$ ，

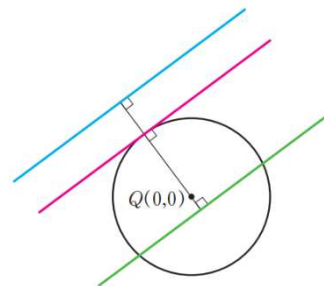
相離 $\Leftrightarrow d(Q, L) > r$ 相切 $\Leftrightarrow d(Q, L) = r$ 相割 $\Leftrightarrow d(Q, L) < r$

相交情形	交於相異兩點 (相割)	恰交於一點 (相切)	無交點 (相離)
對應圖形			
說明	$d(Q, L) < r$	$d(Q, L) = r$	$d(Q, L) > r$

[例題1] 試判斷圓 $C : x^2 + y^2 = 4$ 與下列各直線的相交狀況：

(1) $L_1 : 3x - 4y - 2 = 0$ (2) $L_2 : 3x - 4y + 10 = 0$ (3) $L_3 : 3x - 4y + 15 = 0$

Ans : (1)相割 (2)相切 (3)相離

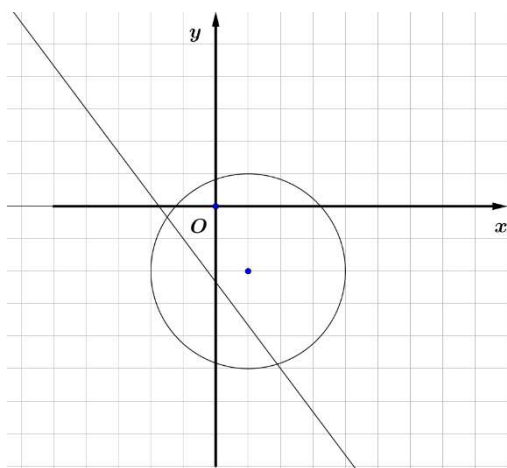


[例題2] 給定圓 $C : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ，及直線 $L : x - y + k = 0$ ，其中 k 為實數，試就 k 的值討論圓 C 與直線 L 相交狀況。

Ans : 相離： $k > 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $k < 3 - 2\sqrt{2}$ ；相切： $k = 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$ ；

相交： $3 - 2\sqrt{2} < k < 3 + 2\sqrt{2}$

[例題3] 已知圓 $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 與直線 $L : 4x + 3y + 7 = 0$ 相割，試求割線段的弦心距與長度。 Ans : 1, $4\sqrt{2}$



(練習1) 試判斷圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ 與下列各直線的相交狀況，若有交點，請求出其交點坐標。

(1) $L_1: y = 3x - 3$ 。 (2) $L_2: y = 3x + 7$ 。 (3) $L_3: y = 3x + 12$ 。

Ans：

(1) 交於 $(0, -3)$ 和 $(2, 3)$ 兩點 (相交)

(2) 恰交於一點 $(-2, 1)$ 。(相切) (3) 不相交

(練習2) 已知圓 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 與直線 $L: 3x - 4y + k = 0$ 相交於相異兩點，試求 k 的範圍。

Ans： $-26 < k < 4$

(練習3) 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ 與直線 $L: 3x - 4y + 21 = 0$ 相交於 A、B 兩點，試求割線

段 \overline{AB} 的長度 Ans：8

(練習4) 已知圓 $C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 169$ 與直線 $L: 4x + 3y + k = 0$ 相交於 A、B 兩點，已知割線段

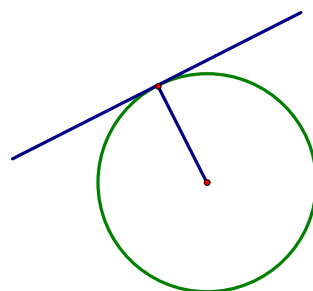
\overline{AB} 的長度為 24，試求 k 的值。 Ans： $k = 30$ 或 -20

(乙)圓的切線

◆ 切線的定義：

國中時圓的切線是這樣定義的：

「與圓恰有一個交點的直線稱為圓的切線，該交點稱為切點。」



◆ 圓切線的性質：

(1) 圓心與切點的連線必垂直於切線。

(2) 圓心到切線的距離等於半徑。

◆ 切線的求法：

求圓切線之型態分成三類：

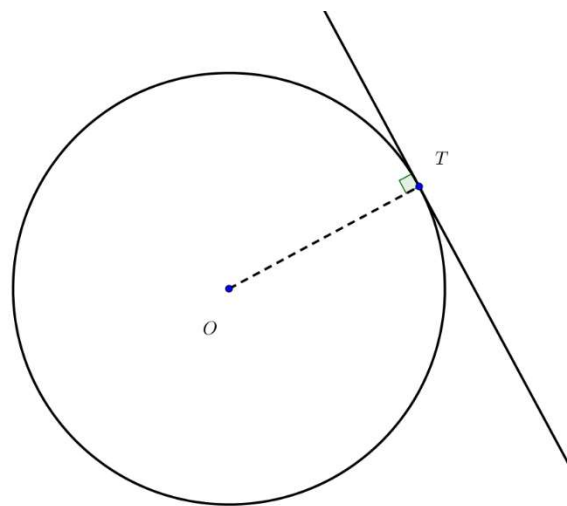
過已知點求切線、已知切線斜率求切線、通過圓外一點求切線。

不管是那一種型態，求圓的切線均可利用「圓心到切線的距離等於半徑」、

「圓心與切點的連線必垂直於切線」這些觀念去解決。

(1)過圓上一點求切線的方法：

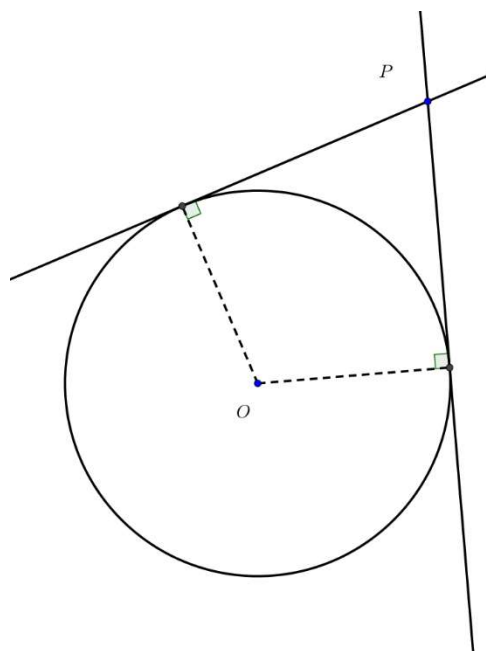
設 $T(x_1, y_1)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 上給定的一點，求以 T 為切點的直線，可以利用「**圓心與切點的連線必垂直於切線**」這個觀念去解決。



(2)過圓外一點求切線的方法：

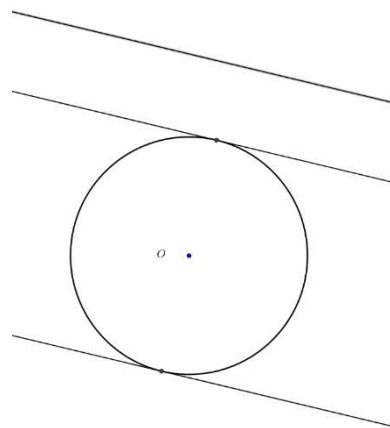
設 $P(x_1, y_1)$ 在圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 外，則過此點之切線方程式求法：

設所求切線方程式為 $y - y_1 = m(x - x_1)$ ，利用「**圓心到切線的距離等於半徑**」，求斜率 m 。(注意：當 m 只有一個值時，還有一切線為鉛直線 $x - x_1 = 0$)



(3)已知切線斜率(m)求切線：

設切線斜率為 $y=mx+k$ ，利用「圓心到切線的距離等於半徑」，求 y 截距 k 。



[例題4] (1)求通過 $x^2+y^2=25$ 上一點 $A(3,4)$ 的切線方程式。

(2)已知點 $B(2,7)$ 在圓 $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 上，試求過 B 點的切線方程式。

Ans：(1) $3x+4y=25$ (2) $3x+4y-34=0$

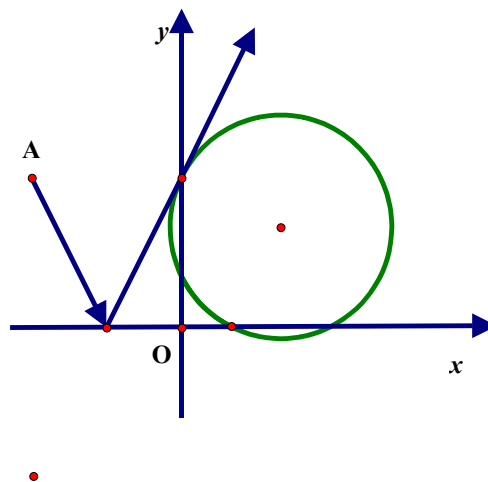
[例題5] 求通過 $A(4,2)$ 與圓 $x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切的直線。

Ans： $y-2=\frac{1}{3}(x-4)$ 或 $y-2=-3(x-4)$

[例題6] 試求斜率為 -1 ，圓 $x^2+y^2-6x-4y+5=0$ 的切線。 Ans： $y=-x+1$ 或 $y=-x+9$

[例題7] 自點 $A(-3,3)$ 發出的光線 L 射到 x 軸上，被 x 軸反射，其反射光線所在直線與圓 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ 相切，求光線 L 所在的直線方程式。

Ans : $2x+y+3=0$



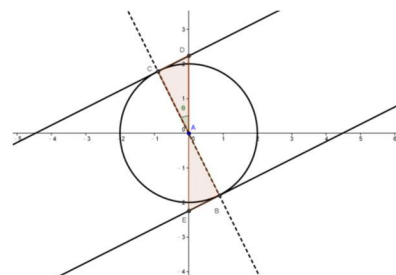
(練習5) 圓 $C : (x-2)^2+(y+1)^2=5$ 上一點 $T(3,1)$ ，試求以 T 為切點的切線方程式。

Ans : $y-1=\frac{-1}{2}(x-3)$

(練習6) 設圓 $C : (x-3)^2+(y-4)^2=5$ ，點 $P(2, 1)$ 在圓 C 外，試求過 P 點且與圓 C 相切的直線方程式。Ans : $2x+y-5=0$ 或 $x-2y=0$ 。

(練習7) $x^2+y^2=r^2$ ，則斜率為 m 的切線為 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 。

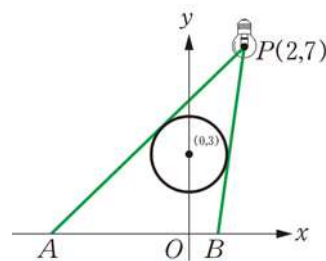
(練習8) 圓 $C : (x+2)^2+(y-1)^2=10$ ，直線 $L : x+3y=0$ ，試求平行直線 L 且與圓 C 相切的直線方程式。Ans : $x+3y=11$ 或 $x+3y=-9$



習題

基本題

- 是非題：
() 通過圓 C 外一點的切線恰有二條。
() 過圓 C 上一點的直線必為此圓的切線。
() 圓 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 與 x 軸、 y 軸相切。
() 給定一個圓，斜率為 3 的切線必有兩條。
- 點 $A(1,0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2+y^2=1$ 上。試問： Γ 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 $L: y=2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個 (2019 學科能力測驗)
- 試判斷下列直線 L 與圓 C 是否相交，如果相交，求其交點坐標。
(1) 直線 $L: 2x-y+1=0$ ，圓 $C: x^2+y^2=2$ 。
(2) 直線 $L: x+y+3=0$ ，圓 $C: x^2+y^2+4x-6y+11=0$ 。
- 已知圓 $C: x^2+y^2-2x+6y+k=0$ 與直線 $x+2y=0$ 相交，試求 k 的範圍。
- 已知圓 $C: x^2+y^2+2x+k=0$ 與直線 $8x-15y-9=0$ 交於 A 、 B 兩個相異點，且 $\overline{AB}=4$ ，試求實數 k 的值。
- 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14。則此圓的面積為_____。(2013 學科能力測驗)
- 試求過點 $A(-4,3)$ 且與圓 $C: (x+1)^2+(y-2)^2=10$ 相切的直線方程式。
- 試求過點 $A(1,6)$ 且與圓 $C: (x+2)^2+(y-2)^2=9$ 相切的直線方程式。
- 設圓 $C: x^2+(y-3)^2=2$ 及圓外一點 $P(2,7)$ 。
(1) 求過 P 點且與圓 C 相切的直線方程式。
(2) 若在坐標平面上 P 處有一光源，將圓 C 投射到 x 軸上，如右圖，求圓 C 在 x 軸上的影長。
(即求 \overline{AB} 之長)。
- 直線 $5x-y-a=0$ 與圓 $3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$ 相切於 $(c,-1)$ ，求實數 a, b, c 之值。
- 在坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7)$ ，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$ ，若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ，則 $(a, b, c)=$ _____。(2007 指定甲)



12. 設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？
 (1) Γ 的圓心坐標為(5,0)
 (2) Γ 上的點與直線 $L: 3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4
 (3) 直線 $L_1: 3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切
 (4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x+4y=0$ 的距離等於 2
 (5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x+4y-5=0$ 的距離等於 2 (2008 學科能力測驗)
13. 設 m 為實數。若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$ 與直線 $y=m(x+3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ，則 $a=$ _____， $b=$ _____。
 (2013 指考甲)
14. 已知圓 $C: x^2+y^2=5$ 與直線 $L: x-y+1=0$ 相交，試求其相交弦的中點座標。

進階題

15. 過 $P(1,2)$ 對圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 作兩切線，若切點為 $Q、R$ ，則
 (1)請問 ΔPQR 的外接圓方程式。(2)直線 QR 的方程式。(3)兩切線的方程式。
16. 試求過 $A(1,2)$ 且與 x 軸， y 軸均相切的圓方程式。
17. 直線 L 方程式 $y=m(x-1)$ ，直線 L 與圓 $C: x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 相割且其割線段長為 $\sqrt{2}$ ，試求 m 的值。
18. 已知兩平行線 $y=x+m$ 、 $y=x+n$ 將圓 $C: x^2+(y-2)^2=4$ 的圓周四等分，其中 $m>n$ ，試求實數 m,n 之值。
19. 已知圓 $C: (x+2)^2+(y-3)^2=16$ ，過圓 C 內點 $P(-1,2)$ 的所有弦之中，對短的弦為 \overline{AB} 。
 試求(1) \overline{AB} 的長度。(2)直線 AB 的方程式。
20. 設 Γ 為坐標平面上的圓，點(0,0)在 Γ 的外部且點(2,6)在 Γ 的內部。請選出正確的選項。
 (1) Γ 的圓心不可能在第二象限
 (2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於10
 (3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於10
 (4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於10
 (5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於10 (2017 學科能力測驗)

答案

1. O、×、O、O

2. (3)

3. (1) $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$ 、 $(-1, -1)$ (2) 沒有交點

4. $k \leq 5$

5. $k = -24$

6. 51π

7. $y - 3 = \frac{-1}{3}(x + 4)$

8. $7x - 24y = -137$ 或 $x = 1$

9. (1) $x - y + 5 = 0$ 或 $7x - y - 7 = 0$ (2) 6

10. $a = 11, b = -7, c = 2$

11. $a = 10, b = -6, c = 9$

12. (1)(2)(4)

[解法] : $\Gamma : x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 16$ ，圓心 $(5, 0)$ 半徑 4

可透過畫圖與計算圓心到直線 L 、 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離來判斷(2)(3)(4)(5)各選項。

故選(1)(2)(4)

13. $a = \frac{2}{3}$ 、 $b = \frac{5}{3}$

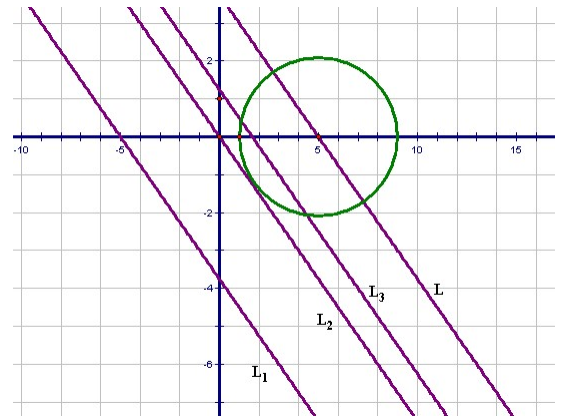
14. $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

15. (1) $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ (2) $x - 3y + 4 = 0$ (3) $y = 2$ 或 $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$

16. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 及 $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

17. -1 或 $\frac{-1}{7}$

18. $m = 4$ 、 $n = 0$



19. (1) $2\sqrt{14}$ (2) $x-y+3=0$

[提示：設圓心為 O ，最短弦 \overline{AB} 通過 P 點且與 \overline{OP} 垂直]

20. (5)

[解法]：

設 $A(0,0)$ 、 $B(2,6)$ ， Γ 的圓心為 C ，半徑為 r

依題意 $\overline{AC} > r > \overline{BC}$

因為當 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 時， C 點的軌跡是 \overline{AB} 中垂線：

$$x+3y=10,$$

故 $\overline{AC} > r > \overline{BC}$ ， C 點在 $x+3y=10$ 的上半平面，

如圖所示

(1) $x+3y>10$ 的區域會第二象限有交點，故(1)錯誤。

(2) $x+3y=10$ 不會通過第三象限，故(2)錯誤。

(3) 當 C 點在 $x+3y-10>0$ 的區域內，可以在 AB 射線上取 $\overline{BC}=11$ ， $\overline{AC}=11+2\sqrt{10}$ ，故

(3)錯誤

(4) $x+3y=10$ 與 x 軸的交點 $(10,0)$ ，故 C 點的 x 座標必大於 10，故(4)錯誤。

(5) 當 C 點在第四象限時， $C(x_0, y_0)$ ，其中 $x_0 > 10$ ，故 $\overline{AC} > 10$ 。故(5)正確。

