1-3 指數

林信安老師編寫

(甲)整數指數

◆ 正整數指數與指數律

一、正整數指數與指數律：

實數 a 自乘 n 次（n 是正整數）$a\times a\times\cdots\times a$ 簡記作 a^n，讀作「a 的 n 次方」。

式子"a^n"稱為指數式，其中 a 稱為底數，n 稱為指數。

a^2 與 a^3 通常又分別讀做「a 的平方」與「a 的立方」。

觀察以下的例子：

(1) $2^3\times2^4=(\underbrace{2\times2\times2}_{3\text{ 個}})\times(\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4\text{ 個}})=2^7=2^{3+4}$.

(2) $(2^3)^4=\underbrace{2^3\times2^3\times2^3\times2^3}_{4\text{ 個}}=2^{3+3+3+3}=2^{3\times4}$.

(3) $2^3\times5^3=(\underbrace{2\times2\times2}_{3\text{ 個}})\times(\underbrace{5\times5\times5}_{3\text{ 個}})=(\underbrace{2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5}_{3\text{ 個}})=(2\times5)^3$.

指數式的運算滿足下面的指數律：

設 m，n 是正整數，底數 a，b 是實數，則
(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。
(2) $(a^m)^n=a^{mn}$。
(3) $a^nb^n=(ab)^n$。

上述的規律，都是用於乘法，除法的運算對於指數式會有規律嗎？

觀察下例：

$\dfrac{3^6}{3^2}=\dfrac{3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3}=3^4=3^{6-2}$。

因此可得指數式的除法規律：

當 m、n 為正整數，且 $m>n$，底數 $a\neq0$ 時，$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。

(練習1) 利用指數律，求下列各式的值：

(1)$(-\sqrt{2})^3\times(-\sqrt{2})^5$　(2)$\dfrac{(6^3)^2}{2^5\times3^5}$

(練習2) 若 $9^3\times12^5\times18^{10}=2^x\times3^y$，求自然數 x, y 之值。

Ans：$(x, y)=(20, 31)$

◆　負整數與指數律

回顧前面指數式的除法規律，

「當 m、n 為正整數，且 $m>n$，底數 $a\neq 0$ 時，$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。」

當 $m=n$ 或 $m<n$ 時，會如何呢？觀察以下的例子：

(1)$\dfrac{3^4}{3^4}=1$。(2)$\dfrac{3^4}{3^6}=\dfrac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3}=\dfrac{1}{3\times3}=\dfrac{1}{3^2}$

若(1)(2)中的結果要符合指數式的除法規律，那麼$\dfrac{3^4}{3^4}=3^{4-4}=3^0=1$，　$\dfrac{3^4}{3^6}=3^{4-6}=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}$

因此 $3^0=1$、$3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}$，才能使得指數式的除法規律成立。

一般而言，設底數 a 不等於 0，n 是正整數，規定： $a^0=1$，　　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。

整數指數亦符合指數律：

設 m，n 是整數，底數 a，b 是非零實數，則 (1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。 (2) $(a^m)^n=a^{mn}$。 (3) $a^n b^n=(ab)^n$。

檢驗指數律(1)：$a^{-m}\cdot a^n=\dfrac{1}{a^m}\cdot a^n=\begin{cases} a^{-m+n}, & n\geq m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}}=a^{-m+n}, & n\leq m \end{cases}$。 ($m,n$ 為正整數)

檢驗指數律(2)：$(a^{-m})^n=(\dfrac{1}{a^m})^n=\dfrac{1}{(a^m)^n}=\dfrac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$。($m,n$ 為正整數)

其餘情形自行討論

檢驗指數律(3)：$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ 自行討論。

(練習3)　將下列等式中的□填上"整數"：

(1) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^{\square}}$。　(2) $10^{\square}=1$。　(3) $0.001=10^{\square}$。

(4) $\dfrac{1}{16}=2^{\square}$。　(5) $\dfrac{1}{81}=3^{\square}$。

Ans：(1)2　(2)0　(3)−4　(4)−4　(5)−4

(練習4)　化簡下列各式：

(1)$2^{b-c}\cdot 2^{c-b}$　(2)$(-3)^3\div(-3)^5$　(3)$\dfrac{3a^{-2}}{5x^{-1}y}$　(4)$(a^2)^3-(a^3)^2$

(5)$(x^{-2}+4)(x^{-2}-4)$　(6)$(c^x+2c^{-x}-7)(5-3c^{-x}+2c^{-x})$

(7)$(p^{2n}-1+p^{-2n})(5p^n-3p^{-n})$　(8)$(16a^{-3}+\dfrac{6}{a^2}+\dfrac{5}{a}-6)\div(2a^{-1}-1)$

Ans：(1)1(2)$\dfrac{1}{9}$(3)$\dfrac{3x}{5a^2y}$(4)0(5)$x^{-4}-16$(6)$2c^{2x}-9c^x-34+31c^{-x}-6c^{-2x}$

(7)$5p^{3n}-8p^n+8p^{-n}-3p^{-3n}(8)8a^{-2}+7a^{-1}+6$

(乙)有理數指數

◆　有理指數與指數律

通常描述具有固定成長率現象的數學模型(複利、放射性物質、生物組群的生長)都與指數有關。

[例題1]　在實驗室中進行某種細菌的培養，根據細菌生長的特性，每隔相等的時間細菌分布面積之增長倍率是一樣的。若開始觀察的 1 日後增為原來的 k 倍，且 3 日後、5 日後細菌分布的面積分別為 54 平方公分、486 平方公分，試求：

(1)k 的值。

(2)開始觀察時細菌分布的面積。

(3)開始觀察時的 4 日前細菌分布面積。

根據上例，觀察 t 日後細菌分布的面積，將時間 t 與細菌分布面積的關係列表如下：

時間 t	細菌分布的面積
0	代表開始觀察時細菌分布的面積為 $2=2\times3^0$ 平方公分
3	代表 3 日後細菌分布的面積為 $54=2\times3^3$ 平方公分
5	代表 5 日後時細菌分布的面積為 $486=2\times3^5$ 平方公分
-4	代表開始觀察前 4 日細菌分布的面積為 $\frac{2}{3^4}=2\times3^{-4}$ 平方公分

根據上表，可以建立數學模型：t 日後細菌分布的面積 2×3^t 平方公分。

若我們每隔 8 小時($\frac{1}{3}$日)觀察一次，那麼依循上述細菌生長的模型

開始觀察後$\frac{1}{3}$日、$\frac{2}{3}$日細菌分布的面積似乎可以用 $2\times3^{\frac{1}{3}}$、$2\times3^{\frac{2}{3}}$ 平方公分來表示。

開始觀察前$\frac{1}{3}$日、$\frac{2}{3}$日細菌分布的面積似乎可以用 $2\times3^{\frac{-1}{3}}$、$2\times3^{\frac{-2}{3}}$ 平方公分來表示。

那麼像是 $3^{\frac{1}{3}}$、$3^{\frac{2}{3}}$、$3^{\frac{-1}{3}}$、$3^{\frac{-2}{3}}$ 應如何定義呢？

回顧前面所學的指數律：

$(3^{\frac{1}{3}})^3=3^1=3$，因此 $3^{\frac{1}{3}}$ 代表一個正數，它的 3 次方等於 3。

$(3^{\frac{2}{3}})^3=3^2$，因此 $3^{\frac{2}{3}}$ 代表一個正數，它的 3 次方等於 3^2。

同理，一個正數的有理數次方若滿足指數律的話，就必須有如下的定義。

> 設 a 為正數，其中 n 為大於 1 的正整數，m 為整數，
>
> 定義 $a^{\frac{m}{n}}$ 為一個正數，此數的 n 次方為 a^m。即$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$。

根據上述的定義，$a^{\frac{1}{n}}$ 為一個正數，此正數的 n 次方等於 a。

當 $n=2$ 時，因為正數 $a^{\frac{1}{2}}$ 平方等於 a，故 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。

同樣的，有理數指數還是會滿足以下的指數律：

設 p，q 是有理數，底數 a，b 是正實數，則

(1) $a^p \times a^q = a^{p+q}$。

(2) $(a^p)^q = a^{pq}$。

(3) $a^p b^p = (ab)^p$。

[例題2] 試求下列各小題的值：

(1) $\dfrac{3^{1.8}\times 3^{0.6}}{3^{0.4}}$　(2) $(\dfrac{4}{25})^{\frac{-3}{2}}$　(3) $(40)^{\frac{1}{3}}\times\ [(625)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$

Ans：(1)9　(2) $\dfrac{125}{8}$　(3)10

[例題3] 已知 a 為正實數且滿足 $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=6$，試求下列各小題：

(1)$a+a^{-1}$　(2)a^2+a^{-2}

Ans：(1)34　(2)1154

我們可以利用計算機或電腦軟體求得如 $2^{0.3}$、$3^{\frac{2}{3}}$ 等無理數的近似值。

(1) 以 $2^{0.3}$ 為例，

依次輸入 2→ x^y →0.3 或於 Google 搜尋列中輸入 2→ ^ 6 →0.3，可得到 $2^{0.3}$ 的近似值 1.231144441334。

(2) 以 $3^{\frac{2}{3}}$ 為例，依次輸入

3→ x^y →2→ ÷ →3→ = 或於

Google 搜尋列中輸入

3→ ^ 6 → (9 →2→ ? / →3→) 0 →Enter，可得 $3^{\frac{2}{3}}$ 的近似值 2.08008382305

[例題4] 控制汙染已經成為全球共同面對的課題，科學家用電腦分析歷年的細懸浮微粒中汙染物質的資料，針對某個城市建立了一個汙染物質數量的模型：
已知 1980 年時細懸浮微粒中汙染物質為 14000(顆/立方公分)，1980 年後經過 t 年每立方公分汙染物的顆數為 P，其中

$$P=1000t^{\frac{5}{4}}+14000$$

(1) 利用這個模型來預測 81 年後(2061 年) 每立方公分汙染物的顆數為多少？
(2) 根據這個模型，到了哪一年每立方公分汙染物會達到 46000 顆？
Ans：(1) 257000(顆/立方公分) (2)1996 年

(練習5) 在各題括號中，填入適當的數字。

(1)$(3^{02.})^5=3$ $\Leftrightarrow$ $3^{0.2}$ 代表一個正數，它的( )次方等於 3

(2) $(5^{\frac{2}{5}})^5=5^2$ $\Leftrightarrow$ $5^{\frac{2}{5}}$ 代表一個正數，它的 5 次方等於( )

(3)$[2^{0.5}]^{10}=2^5$ $\Leftrightarrow$ $2^{0.5}$ 代表一個正數，它的( )次方等於 2^5。

Ans：(1)5 (2)5^2 (3)10

(練習6) 設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000，$4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，試求：

(1)a 的值 (2)5 日後的細菌數 (3)$\frac{3}{2}$ 日後的細菌數 (4)細菌數為 800000 時所需的日數。 Ans：(1)3 (2)3200000 (3)25000 (4)4 日

(練習7) 試求下列各小題的值：

(1)$\dfrac{2^{-0.3}\times 2^{-1.9}}{2^{-0.2}}$ (2)$(0.2)^{0.5}\times(0.8)^{0.5}$ (3) $(48)^{\frac{1}{4}}\times(81)^{\frac{3}{16}}$

Ans：(1)2^{-2} (2)0.04 (3)6

(練習8)　已知 a 為正實數且滿足 $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=3$，試求下列各小題：

(1)$a+a^{-1}$　(2)a^2+a^{-2}　(3)a^3+a^{-3}

Ans：(1)7　(2)47　(3)322

(練習9)　動物的地盤是指牠的防護區域或覓食區域，根據動物學家的研究，非洲地區一頭重 W 公斤獅子的地盤所分布的區域 T 平方公里可以近似表成：

$$\mathbf{T=W^{1.31}}$$

利用計算機或電腦軟體，計算一頭重 180 公斤的公獅子的地盤約多少平方公里？(四捨五入至小數點後第三位)

Ans：900.341(平方公里)

(練習10)　政治學中有個法則「議會規模立方根法則」，理想的國會人數 N 與該國人口數 P 的關係如下：N= $P^{\frac{1}{3}}$，台灣 2019 年的人口總數為 23,603,121 人，試問台灣理想的國會人數約多少人？(四捨五入至整數位)　Ans：287 人

◆　有理指數與方根

根據有理數指數的定義，

$3^{\frac{1}{2}}$是一個正數，此數的 2 次方等於 3，故$3^{\frac{1}{2}}$為方程式 $x^2=3$ 的正實數解。

$3^{\frac{1}{3}}$是一個正數，此數的 3 次方等於 3，故$3^{\frac{1}{3}}$為方程式 $x^3=3$ 的正實數解。…..

$3^{\frac{1}{n}}$是一個正數，此數的 n 次方等於 3，故$3^{\frac{1}{n}}$為方程式 $x^n=3$ 的正實數解。

事實上，

方程式 $x^n=a$ (a 為正數，n 為正整數)恰有一個正實數解，此正實數解可表成$\sqrt[n]{a}$，稱為 **a 的正 n 次方根**。

可以用正 n 次方根重新表示有理數指數：

設 a 為正數，m 為整數，n 為大於 1 的正整數，則

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，(2) $a^{\frac{m}{n}}=((a^m)^{\frac{1}{n}})=\sqrt[n]{a^m}$　(3)　$a^{\frac{m}{n}}=((a^{\frac{1}{n}})^m)=(\sqrt[n]{a})^m$

由(2)(3)可以得知：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$。

(練習11)　以根式表示下列各數：(1) $5^{\frac{1}{2}}$　(2) $2^{\frac{3}{4}}$　(3) $3^{\frac{-2}{3}}$

Ans：(1) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$　(2) $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$　(3) $3^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{3^{-2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

[例題5] 用指數律化簡下列各式：(1)$\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{4}$ (2)$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$ (3) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{4}$

Ans：(1) $\sqrt[5]{12}$ (2) $\sqrt[12]{7}$ (3)$\sqrt[6]{432}$

[例題6] 用指數律將根式化簡為指數的形式：

(1)$\sqrt[5]{a^{20}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^{12}}}$ (2)$(\sqrt{8})^{\frac{-2}{3}}\times(\sqrt[3]{10^2})^{\frac{9}{2}}\div\sqrt[3]{10^5}$ (3)$\sqrt[3]{3^{\frac{-3}{2}}\cdot(\frac{1}{3})^{-8}}$

Ans：(1)a^7 (2)$2^{-1}\times10^{\frac{-5}{3}}$ (3)$3^{\frac{13}{6}}$

(練習12) 用指數律化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ (2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{6}}$ (3) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}$

Ans：(1)$\sqrt[3]{8}=2$ (2)$\sqrt[15]{6}$ (3)$\sqrt[12]{432}$

(練習13) 化簡下列各式

(1)$1000\cdot(8^{-\frac{2}{3}})$ (2)$3(\frac{9}{4})^{-\frac{3}{2}}$ (3)$\dfrac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot 3a^{\frac{1}{3}}}$ (4)$\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2}}\cdot\sqrt[4]{x^6}}$

Ans：(1)250 (2)$\frac{8}{9}$ (3)$\frac{3}{2a}$ (4)y

◆ 有理指數的大小關係

先舉例說明同底的有理數指數之大小關係：

例如：比較下列各組數的大小：

(1) $(1.6)^{\frac{2}{3}}$ 與 $(1.6)^{\frac{3}{4}}$。 (2) $(0.3)^{\frac{2}{3}}$ 與 $(0.3)^{\frac{3}{4}}$。

[解答]：

(1)設 $A=(1.6)^{\frac{2}{3}}$、$B=(1.6)^{\frac{3}{4}}$

$A^{12}=((1.6)^{\frac{2}{3}})^{12}=(1.6)^8$，$B^{12}=((1.6)^{\frac{3}{4}})^{12}=(1.6)^9 \Rightarrow \frac{B^{12}}{A^{12}}=1.6>1$

$\Rightarrow B^{12}>A^{12} \Rightarrow B>A$。

(2)設 $C=(0.3)^{\frac{2}{3}}$、$D=(0.3)^{\frac{3}{4}}$

$C^{12}=((0.3)^{\frac{2}{3}})^{12}=(0.3)^8$，$D^{12}=((0.3)^{\frac{3}{4}})^{12}=(0.3)^9 \Rightarrow \frac{D^{12}}{C^{12}}=0.3<1$

$\Rightarrow C^{12}>D^{12} \Rightarrow C>D$。

仿照上例的討論，可以得到有理數指數的大小關係：

> 設底數 a 為正數，p 與 q 都是有理數。
> (1) 當 $a>1$ 時， 若 $p<q$，則 $a^p<a^q$。
> (2) 當 $0<a<1$ 時，若 $p<q$，則 $a^p>a^q$。

[證明]：

(1)設 $p=\frac{n}{m}$ (m 為大於 1 的正整數，n 為整數)，$q=\frac{t}{s}$ (s 為大於 1 的正整數，t 為整數)

因為 $p<q$，所以 $\frac{n}{m}<\frac{t}{s} \Rightarrow ns<mt$ (因為 m,s 均為大於 1 的正整數)

$\frac{(a^q)^{ms}}{(a^p)^{ms}}=\frac{(a^{\frac{t}{s}})^{ms}}{(a^{\frac{n}{m}})^{ms}}=\frac{a^{mt}}{a^{ns}}=a^{mt-ns}>1$(因為 $mt-ns>0$ 且 $a>1$，假分數愈乘愈大)。

(2)同理可證！

(練習14) 比較下列各組的大小：

(1) $2^{1.3}$ 與 $2^{\frac{4}{3}}$ (2) $(0.3)^{0.2}$ 與 $(0.3)^{0.3}$

Ans：(1) $2^{1.3}<2^{\frac{4}{3}}$ (2) $(0.3)^{0.2}>(0.3)^{0.3}$

(丙)實數指數

前面已經定理了有理數指數，例如 $2^{-2}=\frac{1}{4}$ ，$2^0=1$，$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 等，指數可以推廣到無理數嗎？例如 $3^{\sqrt{2}}$ 、$2^{\sqrt{3}}$ 、…這些數如何定義呢？

以 $3^{\sqrt{2}}$ 為例：

1、1.4、1.41、1.414、1.4142….，這一系列的有理數可以當成 $\sqrt{2}$ 愈來愈準確的近似值。
那麼這一系列的有理數指數 3^1、$3^{1.4}$、$3^{1.41}$、$3^{1.414}$、$3^{1.4142}$、….也會愈來愈接近一個實數，這個實數就是 $3^{\sqrt{2}}$ 。

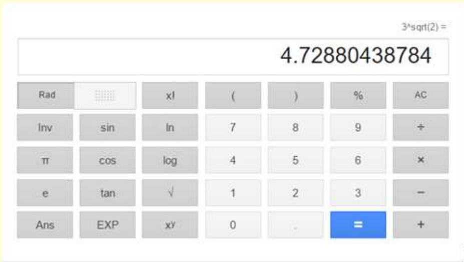
$\sqrt{2}$的近似值	1.4	1.41	1.414	1.4142	…..	→	$\sqrt{2}$
$3^{\sqrt{2}}$的近似值	$3^{1.4}$=4.655536	$3^{1.41}$=4.706965	$3^{1.414}$=4.727695	$3^{1.4142}$=4.728733	…..	→	$3^{\sqrt{2}}$

用計算機或電腦軟體可以算出 $3^{\sqrt{2}}$ 的近似值：

計算機中依次輸入 3→ x^y →√→ 2 →=，或於

Google 搜尋列中輸入 3→ ^ →sqrt(2)→Enter，

即可得 $3^{\sqrt{2}}$ 的近似值 4.72880438784。



一般而言，對於無理數 x，仿照定義 $3^{\sqrt{2}}$ 的方法；

找一系列越來越接近 x 的有理數 r_1、r_2、r_3….、，則 3^{r_1} 、3^{r_2} 、3^{r_3} 、….也會接近一個實數，此數就是 3^x。
同理，對於正實數 a，無理數 x，可以用相同方法定義無理數指數 a^x。
對於無理指數的運算，指數律依然成立。

> 設 r，s 是實數，底數 a，b 是正實數，則
> (1) $a^r \times a^s=a^{r+s}$。
> (2) $(a^r)^s=a^{rs}$。
> (3) $a^r b^r=(ab)^r$。

實數指數的大小關係與有理數指數的大小關係是一致的。

> 設底數 a 為正數，r 與 s 是任意實數。
> (1) 當 $a>1$ 時，若 $r<s$，則 $a^r<a^s$。
> (2) 當 $0<a<1$ 時，若 $r<s$，則 $a^r>a^s$。

[例題7] 求下列各式的值：

(1) $36^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}\times 6^{\sqrt{2}}$　(2) $(2^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{9^{\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{12}}}$

Ans：(1)6　(2)64　(3)1

[例題8] (1)已知 $a^{\frac{3}{5}}=27$，求 a 之值。

(2)已知 $25^{x}=81$，求 125^{-x}。Ans：(1)243　(2)$\dfrac{1}{729}$

[例題9] 設實數 x,y 滿足：$(67)^{x}=27$，$(603)^{y}=81$，

(1)說明 x,y 均為無理數。

(2)若 $67=27^{k}$，以 x 表示 k。

(3)試求$\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}$ 的值

Ans：(2)$k=\dfrac{1}{x}$　(3)-2

(練習15)　化簡下列各式：

(1) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$　(2)$2^{\pi+1}\cdot 2^{-\pi}$　(3) $36^{\sqrt{5}}\div 6^{\sqrt{20}}$

Ans：(1)9 (2)2 (3)1

(練習16)　　試求下列問題：

(1)已知 $a^{\frac{3}{7}}=8$，試求 a 的值。　　(2)已知 $9^x=25$，試求 3^{-x} 的值。

Ans：(1)128　　(2)$\frac{1}{5}$

(練習17)　　設 x,y 為實數，$53^x=9$，$477^y=243$，$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=$？ Ans：-2

習題

基本題

1. 設 a 為正數，下列各式，請判別正確與否。
正確在括號中填入O，不正確填入×

(　　) $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$。

(　　) $a^5\ \cdot\ a^2=a^7$。

(　　) $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{a^4}$

(　　) $a^{\frac{2}{3}}$ 與 $a^{\frac{3}{2}}$ 互為倒數

(　　) $a^{\frac{1}{3}}$ 與 $a^{\frac{-1}{3}}$ 互為倒數

(　　) $(a^{\sqrt{2}})^2=a^2$

2. 求下列式子的值：

(1) $27^{\frac{2}{3}}$。　(2) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{\frac{-1}{4}}$。　(3) $1000^{\frac{-2}{3}}$。(4) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{-8}$。

3. 設 $a>0$，將下列指數式化成根式：

(1) $a^{\frac{1}{5}}$　(2) $a^{\frac{2}{3}}$。　(3) $a^{\frac{-3}{4}}$。

4. 設 $a>0$，將下列根式化成指數式：

(1) $\sqrt{a^3}$。　(2) $\sqrt[5]{a^3}$。　(3) $\dfrac{a^3}{\sqrt[5]{a}}$。　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}}$。

5. 化簡下列各小題：

(1) $(6^2)^{-3}\times(6^6)^3\times(6^5)^{-2}$ (2) $\dfrac{9a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\cdot 3a^{\frac{1}{3}}}$

(3) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}\times 27^{\frac{2}{3}}\times\dfrac{(3^{\frac{1}{2}})^3}{3^{\frac{1}{2}}}$ (4) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-0.5}\times\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2}$

6. 若 $2^a=3$，試求下列各式的值：
(1)4^{a-2}　(2)$7\times 8^{-a}+1$

7. 物理學上，放射性元素的原子數衰變減少一半所需的時間，稱為半衰期。
今有一半衰期為 6 日之甲元素，問：
(1) n 日後的原子數是 $n+3$ 日後原子數的幾倍？
(2) 1 個月(30 日)後的原子數是 2 個月後原子數的幾倍？
(3)若 3 個月後甲元素的數量為 N，則幾天後的甲元素的數量為 $16N$？

8. 研究機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X、Y。已知甲的數量每 2 小時成長為原來的 3 倍，例如 14 時甲的數量為 3X。乙的數量每 3 小時成長為原來的 3 倍，例如 15 時乙的數量為 3Y，該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。
(1)X<Y
(2)在 13 點時，甲細菌的數量為 $3^{\frac{1}{3}}X$
(3)在 18 點時，乙的數量為 3^2Y
(4)在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍
(5)在 24 點時，乙的數量為甲的 3 倍

9. 服用止痛藥經過 h 小時候，身體內殘留的藥量為原來的 y 倍，其中 y 與 h 的關係為 $y=(\frac{1}{2})^{\frac{h}{3}}$，當殘留藥量為原來的$\frac{1}{64}$倍時，才會被認定為代謝完成。試問：服用一顆止痛藥，至少需要幾個小時才能代謝完成？

10. 蛋糕從 194°C 的烤箱拿出來放在 25°C 的室溫下，經過 t 分鐘之後的溫度為 T°C，根據牛頓冷卻定律，T 與 t 的關係如下：
$T=25+(194-25)\times a^t$，其中 a 為正數。
已知兩分鐘之後測量蛋糕的溫度為 125°C，試求下列各小題：
(1)試求 a 的值。
(2)利用計算機估計 10 分鐘之後，蛋糕的溫度為多少°C？(四捨五入至整數位)

11. 根據動物專家的研究哺乳動物的表面積 S(平方公分)與身體質量 M(公斤)有以下的關係：$S=kM^{\frac{2}{3}}$，而比例常數 k 由哺乳動物的身體形狀決定。已知 70 公斤的人其表面積為 18600 平方公分，使用計算機來回答下列兩小題：
(1)根據題目提供的資料，求出人類對應的常數 k。(四捨五入至小數點後第一位)
(2)請利用(1)求出的 k，求出體重 60 公斤的人身體的表面積為多少平方公分，
(四捨五入至整數位)

12. 若 a 為正實數，且 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$，試求下列各式的值：

(1)$a+a^{-1}$ (2)$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ (3)a^2+a^{-2}

進階題

13. 一家公司在某城市試驗性地推出一項新產品。公司在電視上發布產品廣告，廣告播放 t 次後，聽過此產品者所佔的百分比 P 滿足以下的關係：

$$P(t)=\frac{100}{1+24\cdot(2.71)^{-0.28t}}\%$$

(1)請問沒有發布廣告時(t=0)，聽過此產品者所佔的百分比是多少？(4%)

(2)利用計算機完成以下的表格

T	5	10	15	20	25	30
P(t)	14.40%	40.45%			97.81%	99.45%

(四捨五入到小數點後第二位)

觀察上表，請問大約廣告播放幾次後，廣告的效果就沒那麼顯著了。

14. 假設地球與太陽的平均距離為 1 天文單位(AU)，天文學波德在 1766 年提出波德法則(Titius-Bode Law)：行星與太陽的距離 d(AU)可以用「$d=\alpha+\beta\cdot 2^n$」這個數學式子來表示：，下表是行星所對應的 n 值表：

行星	對應的 n 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5
天王星	6

已知火星與太陽的平均距離比金星與太陽的平均距離多 0.9(AU)，

試求下列各小題：

(1)火星與太陽的平均距離。

(2)天王星是繼土星之後，離太陽較近的行星，計算天王星與太陽的平均距離。

(3)高斯的朋友在高斯的幫忙下，在 1802 年發現第一顆小行星—「穀神星」，它距離太陽有 2.8(AU)。試問穀神星所對應的 n 值是多少？

(4)當 n 趨近於負無窮大時，波德公式就給出了水星與太陽的平均距離，試求水星到太陽的平均距離。

(註：有關波德法則(Titius-Bode Law)的內容，

查閱 http://en.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode_law)

15. 已知 $a^{2x}=5$，試求$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$之值。

16. 若$2^{\sqrt{3}}+2^{-\sqrt{3}}=a$，試以 a 表示下列各式：

(1) $4^{\sqrt{3}}+4^{-\sqrt{3}}$　　(2) $8^{\sqrt{3}}+8^{-\sqrt{3}}$

17. 已知 $x\,,y\in R$ ，若 $333^{x}=9$，$37^{y}=27$，求 $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}$ 之值。

答案

1. OO×OO×

2. (1) 9。(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\dfrac{1}{100}$。 (4) $\dfrac{1}{5}$。

3. (1) $\sqrt[5]{a}$ (2) $\sqrt[3]{a^2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$。

4. (1) $a^{\frac{1}{3}}$ (2) $a^{\frac{3}{5}}$ (3) $a^{\frac{24}{5}}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$。

5. (1)36(2) $\dfrac{9}{2}$。(3) 3^5。(4) 45。

6. (1)$\dfrac{9}{16}$ (2)$\dfrac{34}{27}$

7. (1)$\sqrt{2}$ (2)32 (3)66

8. (1)(2(3)
   [解法]：

   設在 12 點後 t 小時甲、乙兩個培養皿細菌數量分別為 $X\cdot 3^{\frac{t}{2}}$ 、$Y\cdot 3^{\frac{t}{3}}$

   ∵ 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，∴ t=6 時數量相等

   $\Rightarrow X\cdot 3^3 = Y\cdot 3^2 \Rightarrow$ Y=3X

   (1)正確。Y=3X⇒X<Y

   (2)正確：令 t=1，甲的數量是$3^{\frac{1}{3}}X$

   (3)正確：令 t=3，乙的數量是$Y\cdot 3^{\frac{6}{3}}$

   (4)不正確：令 y=7，$\dfrac{乙的數量}{甲的數量}=\dfrac{Y\cdot 3^{\frac{7}{3}}}{X\cdot 3^{\frac{7}{2}}}=\dfrac{3X\cdot 3^{\frac{7}{3}}}{X\cdot 3^{\frac{7}{2}}}=\dfrac{3^{\frac{10}{3}}}{3^{\frac{7}{2}}}=3^{\frac{-1}{6}}$ 。

   (5)不正確： 令 t=12，$\dfrac{乙的數量}{甲的數量}=\dfrac{Y\cdot 3^{\frac{12}{3}}}{X\cdot 3^{\frac{12}{2}}}=\dfrac{3X\cdot 3^4}{X\cdot 3^6}=\dfrac{1}{3}$ 。故選(1)(2)(3)。

9. 12 小時

10. (1)a=$\dfrac{10}{13}$ (2)37°C

11. (1)$18600=k\times 70^{\frac{2}{3}} \Rightarrow k=18600\times 70^{\frac{-2}{3}} \approx 1095.08437966 \approx 1095.1$

(2)$S=1095.1\times 60^{\frac{2}{3}} \approx 16783.7091883 \approx 16784$。

12. (1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=5^2-2=23$。

(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a-1+a^{-1})=5\times(23-1)=110$。

(3) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=23^2-2=527$。

13. (1)$P(0)=\dfrac{100}{1+24\cdot(2.71)^0}\%=\dfrac{100}{25}\%=4\%$。

(2)$P(15)=\dfrac{100}{1+24\cdot(2.71)^{-0.28\times 15}}\%\approx 73.28\%$

$P(20)=\dfrac{100}{1+24\cdot(2.71)^{-0.28\times 20}}\%\approx 91.72\%$

(3)可以發現 20 次之後聽過此產品者所佔的百分比變化就不大了，因此廣告播放 20 次後，廣告的效果就沒那麼顯著了。

14. (1)1.6(AU) (2)19.6(AU) (3)$n=3$ (4)0.4(AU)
[提示：利用$\alpha+2\beta=1$， $(\alpha+4\beta)-(\alpha+\beta)=0.9\Rightarrow\alpha=0.4$，$\beta=0.3$]

15. $\dfrac{21}{5}$

(提示：$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}-1+a^{-2x}$)

16. (1)a^2-2 (2)a^3-3a

17. 2