2-3 圓方程式

林信安老師編寫

(甲)圓的方程式

◆ 圓的標準式

一、圓的定義：

平面上與定點 O 等距離 r 的點所成的軌跡稱為**圓**，其中 O 稱為圓心，r 稱為半徑

二、圓的標準式

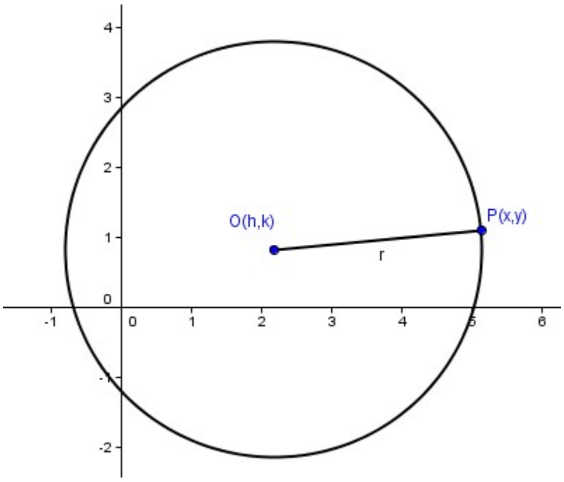
從坐標幾何的觀點來看，給定圓心 O(h,k)，半徑 r，如何用方程式來描述圓呢？

若設圓心 O(h,k)，半徑為 r，則此圓的方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

[推導]：設 P(x,y)為圓上的點，

$$\Leftrightarrow \overline{PO}=r \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



從圓的標準式可以得知：

(1)已知圓心 Q(h,k)，半徑為 r，可得圓的標準式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

(2)方程式$(x-h)^2+(y-k)^2=A$ (A>0) 代表圓心(h,k)，半徑$\sqrt{A}$ 的圓。

換句話說：

(1) 給定圓心與半徑，就可以寫出圓的方程式。

(2) 給定標準式，就可以直接看出圓心與半徑。

結論：

求一個圓的方程式主要是要求得圓心與半徑。

[例題1] 試求下列兩個小題：

(1)寫出圓心(4,−1)，半徑為 3 的圓方程式。

(2)圓方程式為$(x+2)^2+(y+4)^2=5$ 的圓心與半徑為何？

Ans：(1) $(x-4)^2+(y+1)^2=9$　　(2)圓心(−2,−4)，半徑 $\sqrt{5}$

[例題2] 設 A（-1，2），B（3，4），求以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓的方程式。

Ans：$(x-1)^2+(y-3)^2=5$。

(練習1) 試求合乎下列各條件的圓方程式：

(1) 圓心在（-1，2），半徑為 3。

(2) 圓心在（-1，2），並且通過點（2，-2）。

Ans：(1) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ (2)$(x+1)^2+(y-2)^2=25$

(練習2) 設圓 C 的圓心在原點上，且其半徑與圓 C'：$(x+1)^2+(y+2)^2=6$ 的半徑相等，求圓 C 的方程式。 Ans：$x^2+y^2=6$

(練習3) 設圓 C 與圓 C'：$(x-1)^2+(y-7)^2=16$ 為同心圓，且其面積為圓 C'面積的一半，求圓 C 的方程式。 Ans：$(x-1)^2+(y-7)^2=8$

(練習4) 設 A（1，-2），B（-3，4），求以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓的方程式。

Ans：$(x+1)^2+(y-1)^2=13$

◆ 圓的一般式：

圓的標準式$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$可化成二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$的形式。
反過來說，一個二元二次方程式$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$，是否就代表圓呢？
例如：

$2x^2+2y^2-4x+6y+1=0 \Rightarrow 2(x^2-2x+1)+2(y^2+3y+(\frac{3}{2})^2)=-1+2+\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{2} \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{11}{4} \Rightarrow$圓心$(1,\frac{-3}{2})$，半徑$=\frac{\sqrt{11}}{2}$。

一般而言：二元二次方程式：$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$

配方成 $(x+\frac{C}{2})^2+(y+\frac{D}{2})^2=\frac{C^2+D^2-4E}{4}$

當$C^2+D^2-4E>0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一圓，

圓心$(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2})$半徑$=\sqrt{\frac{C^2+D^2-4E}{4}}$

當$C^2+D^2-4E=0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$代表一點$(\frac{-C}{2},\frac{-D}{2})$。

當$C^2+D^2-4E<0$時，$x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$ 沒有實數解，沒有圖形。

[例題3] 設圓C通過$P(1,1)$，$Q(4,0)$，$R(5,1)$，試求圓C的方程式。

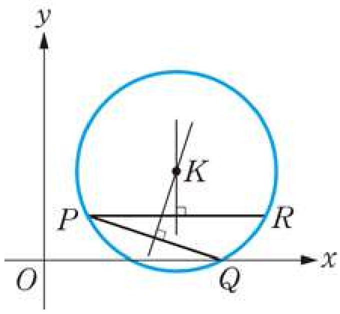
解：<法一>利用幾何觀點求圓心與半徑

因為$\overline{PQ}$與$\overline{PR}$都是圓C的弦，所以它們的中垂線的交點就是圓心。

而$\overline{PQ}$的中垂線方程式為$y-\frac{1}{2}=3(x-\frac{5}{2})$，即$3x-y=7$；

$\overline{PR}$的中垂線方程式為$x=3$，

解$\begin{cases}3x-y=7\\x=3\end{cases}$，得$(x,y)=(3,2)$。



故圓心為$K(3,2)$，又半徑$r=\overline{KP}=\sqrt{5}$，

所以圓C方程式為$(x-3)^2+(y-2)^2=5$，

亦可表為$x^2+y^2-6x-4y+8=0$。

<法二>利用代數方法

設圓C方程式為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

因為P，Q，R三點都在圓C上，

所以$\begin{cases}1^2+1^2+d+e+f=0，\\4^2+0^2+4d+0e+f=0，\\5^2+1^2+5d+e+f=0。\end{cases}$即$\begin{cases}d+e+f=-2，\\4d+f=-16，\\5d+e+f=-26。\end{cases}$

用加減消去法解得$d=-6$，$e=-4$，$f=8$，

所以圓C的方程式為$x^2+y^2-6x-4y+8=0$。

一般而言，在平面上，給定不共線的三點 A，B，C，恰可決定一圓，其中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 中垂線的交點就是圓心 Q（$\triangle ABC$ 的外心），而 $\overline{QA}$（$\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$）就是半徑，如此就可求得該圓的標準式。另一方面，將三點 A，B，C 的坐標分別代入圓的一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，可得三個方程式，解此三個聯立方程式，求出 d，e，f，即可得此圓的一般式。

[例題4] 設 $P_1(1,4)$、$P_2(3,-2)$為座標平面上兩點，若$\overline{P_1P_2}$為圓上的一弦，且距離圓心為 $\sqrt{10}$，則圓 C 的方程式為何？Ans：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

[例題5] 試就實數 k 值的範圍，討論二元二次方程式 $x^2+y^2+2x-2ky+k+3=0$ 的圖形。
Ans：(1) 當 $k<-1$ 或 $k>2$，圓心為（-1，k），半徑為$\sqrt{k^2-k-2}$的圓。
(2) 當 $k=-1$ 或 $k=2$，即 $k^2-k-2=0$，方程式的圖形為一點。
(3) 當$-1<k<2$，此方程式沒有圖形。

(練習5) 試求下列各圓的圓心與半徑：
(1) $x^2+y^2-2x+4y-11=0$。 (2) $2x^2+2y^2-8x-12y+1=0$。
Ans：(1)圓心是（1，-2），半徑是 4。(2) 圓心是（2，3），半徑是 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$。

(練習6) 求過三點 A(0,0)、B(0,4)、C(3,3)的圓方程式。Ans：$x^2+y^2-2x-4y=0$

(練習7)　將下列方程式化為$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，並說明幾何意義？

(1) $x^2+y^2+-2x+4y-31=0$　Ans：圓心$(1,-2)$半徑為 6 的圓

(2) $x^2+y^2+-2x+4y+5=0$　Ans：點$(1,-2)$

(3)$x^2+y^2+-2x+4y+8=0$　Ans：無圖形

(練習8)　$x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2-2=0$ 表一圓，

(1)求 m 範圍　(2)求此圓最大面積　Ans：(1)$-1<m<3$　(2) 4π

(練習9)　設一圓通過二點$(5,1)$、$(3,1)$，而圓心在直線 $x+2y-3=0$ 上，則此圓的方程式為何？

Ans：$(x-4)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{13}{4}$

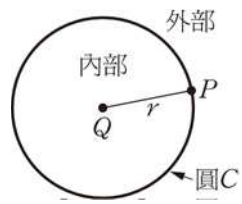
(練習10)　設 $P_1(2,0)$、$P_2(8,0)$且$\overline{P_1P_2}$為圓 O 上一弦，且弦心距為 4，則圓 O 的方程式為何？

Ans：$(x-5)^2+(y-4)^2=25$ 或$(x-5)^2+(y+4)^2=25$

(乙)點與圓的關係

◆　圓的外部與內部

在平面上，設圓 C 的圓心為 Q，半徑為 r，則一切滿足$\overline{PQ}=r$ 的點 P 都在圓 C 上，而滿足$\overline{PQ}\neq r$ 的點 P 都不在圓 C 上。



(1)當$\overline{PQ}<r$ 時，稱點 P 在圓 C 的內部，簡稱 P 點在圓內。

顯然地，圓心在圓內，如右圖。

(2)當$\overline{PQ}>r$ 時，稱點 P 在圓 C 的外部，簡稱 P 點在圓外。

(練習11)　在坐標平面上，圓 C 的方程式$(x-3)^2+(y+4)^2=25$，試判斷下列各點是在圓 C 上，或圓 C 的內部，或圓 C 的外部？

(1) $P_1(0,3)$。(2) $P_2(-1,10)$。(3) $P_3(0,0)$。(4)$P_4(4,-6)$。

Ans：(1)外部　(2)外部　(3)圓上　(4)內部

◆　圓的內部與外部的表示法

前面已經說明了，直線 $ax+by+c=0$ 可以將平面分成兩個半平面，分別可以用 $ax+by+c<0$ 與 $ax+by+c>0$ 來表示；類似地，圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 亦可將平面分成圓的內部與外部，這個區域可以如何表示呢？

先舉例說明：

設圓 C：$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的圓心 O(2,−1)，半徑為 3

設 $P(x,y)$在圓 C 的外部⇔ $\overline{OP}$>半徑=3 ⇔ $(x-2)^2+(y+1)^2>3^2$ ⇔ $x^2+y^2-4x+2y-4>0$

設 $P(x,y)$在圓 C 的內部⇔ $\overline{OP}$<半徑=3 ⇔ $(x-2)^2+(y+1)^2<3^2$ ⇔ $x^2+y^2-4x+2y-4<0$

由上面的說明可以得知：

圓 C：$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的外部區域可以用不等式「$x^2+y^2-4x+2y-4>0$」表示；內部區域可以用不等式「$x^2+y^2-4x+2y-4<0$」表示。

(練習12) 設圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，試證明：
圓 C 的外部區域可以用不等式 $x^2+y^2+dx+ey+f>0$ 表示。

結論：

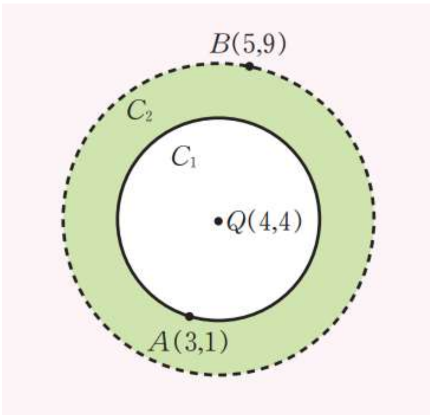
坐標平面上，圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $(x^2+y^2+dx+ey+f=0)$

(1)圓 C 外的區域以不等式$(x-h)^2+(y-k)^2>r^2$ $(x^2+y^2+dx+ey+f>0)$表示。

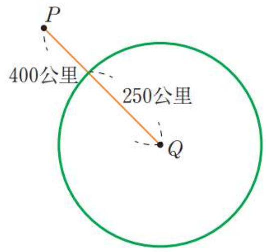
(2)圓 C 內的區域以不等式$(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$ $(x^2+y^2+dx+ey+f<0)$表示。

[例題6] 設坐標平面上滿足不等式 $5\le(x-1)^2+(y+3)^2\le25$ 的點所形成的區域為 R，試求 R 的面積。 Ans：16π

[例題7] 如圖代表一個環形區域，試用不等式來表示此環形區域。
(虛線表示不含邊界)
Ans：$10\le(x-4)^2+(y-4)^2<26$



[例題8] 根據氣象預報得知，今天早上 9 時有一個暴風半徑 250 公里的中度颱風在距離恆春東南方 400 公里的海面上，正以每小時 15 公里直線朝恆春前進。假設將颱風視為一個圓且颱風的路徑與暴風半徑不變，試問恆春幾小時之後開始進入暴風範圍？　Ans：10 小時

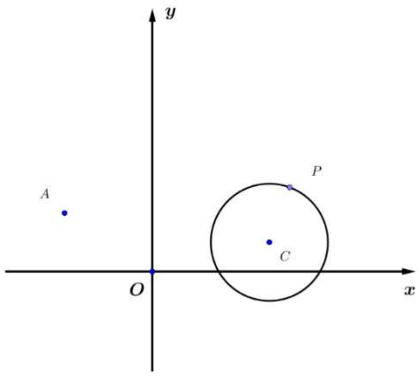


[例題9] 坐標平面上，已知 A(−3,2)，圓 C：$(x-4)^2+(y-1)^2=4$

(1)試判別 A 點在圓 C 的外部或內部？

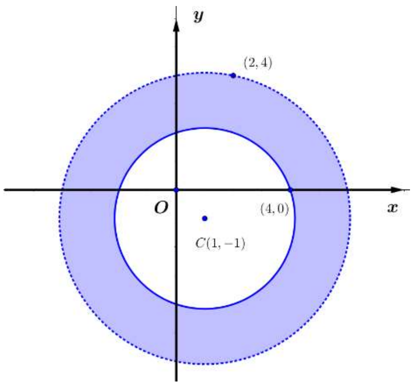
(2)設 P 點在圓 C 上移動，試問$\overline{AP}$的最大值與最小值。

Ans：(1)外部　(2)最大值$5\sqrt{2}+2$，最小值$5\sqrt{2}-2$



(練習13)　設坐標平面上滿足不等式 $11\le(x-1)^2+(y+3)^2\le35$ 的點所形成的區域為 R，試求 R 的面積。　Ans：14π

(練習14)　如右圖，請用不等式來表示環狀區域。(虛線表示不含邊界)



(練習15)　坐標平面上，已知 A(2,−1)，圓 C：$(x+1)^2+(y-3)^2=64$

(1)試判別 A 點在圓 C 的外部或內部？

(2)設 P 點在圓 C 上移動，試問$\overline{AP}$的最大值與最小值。

Ans：(1)內部　(2)最大值 13，最小值 3

習題

基本題

1. 求合乎下列所予條件的圓方程式：
(1) 圓心在點（-2，5），半徑為 2 的圓。
(2) 圓心在點（4，-1），且通過點（0，2）的圓。
(3) 以 A（5，-3），B（3，7）為直徑兩端點的圓。
(4) 通過 A（3，6），B（8，1），C（11，10）三點的圓。

2. 設圓 C 通過（2，0），（-4，0），且圓心在直線 $y=4$ 上，求圓 C 的方程式。

3. 在坐標平面上，以 $(1,1), (-1,1), (-1,-1)$ 及 $(1,-1)$ 等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個 (2014 學科能力測驗)

4. 設圓 C：$x^2+y^2+2x+4y+k=0$ 之半徑為 5，且圓心在直線 L：$y=ax+3$ 上，
試求實數 k 與 a 的值。

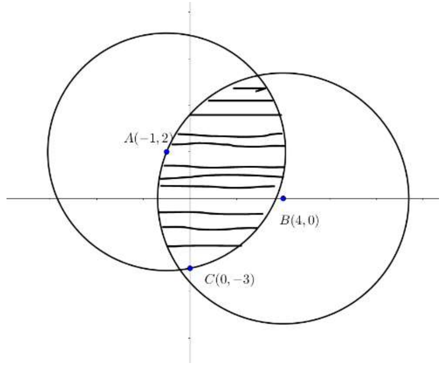
5. 試就 k 值，討論方程式 $x^2+y^2+4x-4y+5-k=0$ 的圖形。

6. 已知 A（1，5）與 B（3，3）兩定點。
(1) 試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式。
(2) 若 P 是直線 $3x-2y=0$ 上一點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，求 P 點坐標。
(3) 若圓 C 通過 A，B 兩點，且其圓心在直線 $3x-2y=0$ 上，求圓 C 的方程式。

7. 下列哪一方程式所表圖形為一圓？
(A)$y=\sqrt{9-x^2}$ (B)$x=1+\sqrt{9-y^2}$(C)$\sqrt{x^2+y^2}=2$ (D)$x^2+y^2-6x+4y+15=0$ (E)$x^2+y^2+2x-8y+3=0$

8. 設 A$(-1,0)$、B$(7,0)$且$\overline{\text{AB}}$為圓 O 上一弦，且弦心距為 3，則圓 O 的方程式為何？

9. 如右圖，圓 A 的圓心 A$(-1,2)$通過 C$(0,-3)$，圓 B 的圓心 B$(4,0)$通過 A$(-1,2)$，斜線區域是由圓 A 與圓 B 內部區域重疊的部分，試以不等式表示斜線區域(含邊界)。



10. 坐標平面上，已知 A$(-6,-9)$，圓 C：$(x+1)^2+(y-3)^2=100$
設 P 點在圓 C 上移動，試問$\overline{\text{AP}}$的最大值與最小值。

進階題

11. 滿足不等式$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2x-3)\le 0$所有解所成區域的面積。

12. 設 A(0,0)，B(6,0)，試求滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$的 P 點軌跡方程式，並作出它的圖形。

13. A 與 B 是兩處垃圾集中場，B 在 A 的正東方 12 公里。當地市政府決定在連接 A、B 直線道路上的北面蓋一座焚化爐，焚化爐的選址原則如下：
(I)「焚化爐與集中場 A、B 的距離」與「前 5 年處理垃圾總重量的平均」成反比。
(II)焚化爐場址竟可能要遠離 A、B 直線道路
已知集中場 A、B 前 5 年處理垃圾總重量的平均分別為 4 萬公噸與 2 萬公噸。
設焚化廠的選址地點為 P
試回答下列問題：

(1)$\overline{PA}$：$\overline{PB}$。

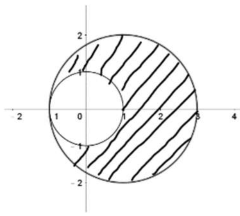
(2)所有可能的選址地點 P 會形成甚麼圖形？
(3)跟據原則(I) (II)焚化廠的選址地點應該蓋在何處？

答案

1. (1)$(x+2)^2+(y-5)^2=4$　(2)$(x-4)^2+(y+1)^2=25$　(3)$(x-4)^2+(y-2)^2=26$ (4)$x^2+y^2-16x-12y+75=0$
2. $(x+1)^2+(y-4)^2=25$
3. (2)
4. $k=-20$、$a=5$
5. 圓 $k>-3$；點 $k=-3$，無圖形 $k<-3$
6. (1)$x-y+2=0$　(2)(4,6)　(3)$(x-4)^2+(y-6)^2=10$
7. (C)(E)

   [$y=\sqrt{9-x^2}\geq 0$ 代表上半圓]

8. $(x-3)^2+(y-3)^2=25$ 或$(x-3)^2+(y+3)^2=25$
   [提示：圓心座標可以設為$(3,k)$]
9. $\begin{cases} (x-4)^2+y^2\leq 29 \\ (x+1)^2+(y-2)^2\leq 26 \end{cases}$
10. 最大值 23，最小值 3
11. 3π
    [提示：如右圖區域]



12. $(x-8)^2+(y-0)^2=4^2$

    設點 $P(x,y)$，滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$

    $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}$
    $\Leftrightarrow x^2+y^2=4[(x-6)^2+y^2]$
    $\Leftrightarrow (x-8)^2+(y-0)^2=4^2$
13. (1)1：2　(2)半圓不含頂點　(3)A 點往正西方 4 公里，再往正北方 8 公里處

    [提示：可以假設 A(0,0)、B(12,0)，$P(x,y)$ 其中 $y>0$，再利用$\overline{PB}=2\overline{PB}$，找出軌跡，並進一步求出最適合的 P 點]