

## 1-2 絕對值

### (甲)數線的幾何性質

◆ 絕對值的意義：

一、定義絕對值：

在數線上，要描述兩點的距離（非負數），我們引進絕對值的概念。每一個實數  $a$  對應數線上一個點  $A(a)$ ，用符號  $|a|$  表示原點  $O$  與點  $A(a)$  的距離， $|a|$  讀做  $a$  的絕對值。

例如： $2$  (或  $-2$ ) 與原點  $O$  之距離為  $|2|$  (或  $|-2|$ )， $|2|=2=|-2|$ 。



絕對值的意義：

- (1) 當  $a \geq 0$  時， $|a| = a$ 。
- (2) 當  $a < 0$  時， $|a| = -a$ 。

二、用絕對值表示兩點距離：

給定數線上兩個點  $A(a)$  與  $B(b)$ ，如何用它們的坐標  $a, b$  來描述“ $A$  與  $B$  兩點的距離”呢？

在數線上， $\overline{AB}$  長等於“右邊的點坐標”減去“左邊的點坐標”。

當  $a > b$  時， $\overline{AB} = a - b = |a - b|$ ，當  $a < b$  時， $\overline{AB} = b - a = |a - b|$ ，故不論  $a$  與  $b$  的大小，

$A$  與  $B$  兩點的距離都可以表示成  $\overline{AB} = |a - b|$ 。



絕對值的幾何意涵：

- (1)  $|x|$  代表數線上代表  $x$  的點到原點的距離。
- (2) 在數線上，設原點  $O(0), A(a), B(b)$ ，則  $\overline{OA} = |a|$ ， $\overline{AB} = |a - b|$ 。

(練習1) (1)說明 $|x|=3$ 的幾何意義。(2)若實數 $x$ 滿足 $|x|=3$ ，試求 $x$ 的值。

Ans：(1) $x$  與原點的距離 (2) $\pm 3$

(練習2) 設  $x$  是實數，試說明下列各式的幾何意義：

(1) $|x-5|$             (2) $|x+3|$             (3) $|x+2|+|x-1|$

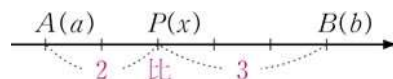
Ans：(1) $x$  與 5 的距離    (2) $x$  與 -3 的距離    (3) $x$  分別與 -2、1 的距離和

◆ 數線上的分點公式：

設  $A(a)$ ， $B(b)$  是數線上給定的兩點 ( $a < b$ )，點  $P(x)$  在線段  $\overline{AB}$  上，將  $\overline{AB}$  分成兩段，如何由  $a, b$  的值與  $P$  點與  $A$ 、 $B$  距離的比例求出分點  $P$  的坐標  $x$  呢？  
先看一個實例：

如右圖，設  $A(a)$ ， $B(b)$  是數線上給定的兩點 ( $a < b$ )，點  $P(x)$  在線段  $\overline{AB}$  上，將  $\overline{AB}$  分成兩段，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ ，如何由  $a, b$  的值求出分點  $P$  的坐標  $x$  呢？

因為  $a < x < b$ ，故  $\overline{AP} = |x-a| = x-a$ ， $\overline{BP} = |x-b| = b-x$



由題意得

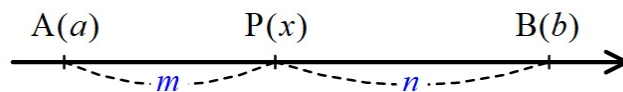
$$\frac{2}{3} = \frac{|x-a|}{|x-b|} = \frac{x-a}{b-x} \iff 3(x-a) = 2(b-x)$$

$$\iff (3+2)x = 3 \cdot a + 2 \cdot b \iff x = \left(\frac{3}{3+2}\right)a + \left(\frac{2}{3+2}\right)b。$$

一般而言，設  $A(a)$ ， $B(b)$  是數線上給定的兩點，點  $P(x)$  在線段  $\overline{AB}$  上，將  $\overline{AB}$  分成兩段，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，可以用  $A(a)$ 、 $B(b)$  的坐標與比例  $m : n$  來表示  $P$  點坐標  $x$ 。

不失一般性，可令  $a < b$

因為  $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$



$$\text{所以 } \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{|x-a|}{|x-b|} = \frac{x-a}{b-x} = \frac{m}{n} \iff nx - an = bm - mx \iff (m+n)x = an + bm \iff x = \frac{na + mb}{m+n}。$$

分點公式：

設  $A(a)$ ， $B(b)$  是數線上給定的兩點，點  $P(x)$  在線段  $\overline{AB}$  上，將  $\overline{AB}$  分成兩段，且

$$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n，\text{ 則 } x = \left(\frac{n}{m+n}\right)a + \left(\frac{m}{m+n}\right)b。$$

[例題1] 設  $A(-7), B(3), P(x)$  為數線上三點，且  $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 2$ ，

(1) 當  $P$  點在  $\overline{AB}$  上時，求  $x$  之值。

(2) 當  $P$  點在  $\overline{AB}$  外時，求  $x$  之值。 Ans : (1)3 (2)23

根據上例，可以得知數線上三點已知兩點的坐標與比例，就可以找出第三點的坐標。

(練習3) 設數線上兩點  $A(-5), B(11)$ ，

(1) 已知點  $P(x)$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 3$ ，試求  $x$ 。

(2) 已知點  $Q(y)$  在  $\overline{AB}$  外，且  $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 5 : 3$ ，試求  $y$ 。

Ans : (1) $x=5$  (2) $y=35$

(練習4) 設  $A, B, P$  在數線上的坐標分別為  $a, b, p$ ，其中  $P$  落在  $\overline{AB}$  上，已知  $p = \frac{3a+2b}{5}$ ，試問

$\overline{AP} : \overline{BP} = ?$  Ans :  $2 : 3$

### (乙)含絕對值的等式與不等式

右圖是產品說明書，此產品的尺寸標示為  $16 \times 20 \times 23 \text{cm} \pm 5\%$ ，這表示實際的體積  $V$  會介於  $(16 \times 20 \times 23 - 16 \times 20 \times 23 \times 5\%) \text{cm}^3$  與  $(16 \times 20 \times 23 + 16 \times 20 \times 23 \times 5\%) \text{cm}^3$  之間，故可將  $V$  的範圍表示成  $|V - 16 \times 20 \times 23| \leq 16 \times 20 \times 23 \times 0.05$ 。

絕對值不等式  $|V - a| \leq b$  的形式描述實際體積的範圍時， $b$  就代表誤差的範圍。

我們要用幾何或代數的想法來解含有絕對值的方程式與不等式，當合乎條件的解有無限多個，可以使用數線來圖示解的範圍。

幾何想法： $|x|$  表示點  $P(x)$  與原點的距離， $|a-b|$  代表  $A(a)$  與  $B(b)$  兩點的距離。

代數想法：當  $x \geq 0$  時， $|x| = x$ ；當  $x < 0$  時， $|x| = -x$ 。



[例題2] 解方程式：(1)  $|x|=5$ 。 (2)  $|2x+1|=5$ 。

[解法]：

(1)幾何想法：

$|x|=5$  表示數線上  $x$  與原點的距離等於 5

代數想法：

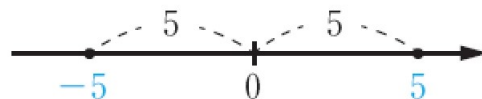
當  $x \geq 0$  時， $|x|=x=5$ ；

當  $x < 0$  時， $|x|=-x=5$ ， $x=-5$ ，故  $x=5$  或  $-5$ 。

代數想法：

當  $x \geq 0$  時， $|x|=x=5$ ；

當  $x < 0$  時， $|x|=-x=5$ ， $x=-5$ ，故  $x=5$  或  $-5$



(2)幾何想法：

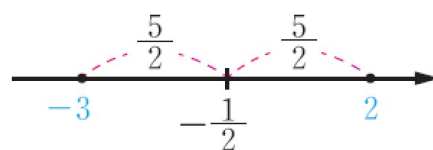
因為  $|2x+1|=2|x+\frac{1}{2}|=5$ ，所以  $|x+\frac{1}{2}|=\frac{5}{2}$

$|x+\frac{1}{2}|=|x-(-\frac{1}{2})|$  表示數線上  $x$  與  $-\frac{1}{2}$  的距離

故  $x=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$  或  $-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-3$

代數想法：

$|2x+1|=5$ ，則  $2x+1=5$  或  $-5$ ，故  $x=2$  或  $-3$



[例題3] 解下列不等式：

(1)  $|x| \geq 2$ 。 (2)  $|x-2| < 3$ 。

[解法]：

(1)根據絕對值的幾何意義：

$|x| \geq 2$  表示數線上  $x$  與原點距離大於或等於 2

如圖，所以解為  $x \geq 2$  或  $x \leq -2$ 。

(2)幾何想法：

因為  $|x-2|$  代表數線上  $x$  與 2 的距離，所以求  $|x-2| < 3$  的解

即為在數線上求  $x$ ，使得  $x$  與 2 的距離小於 3，

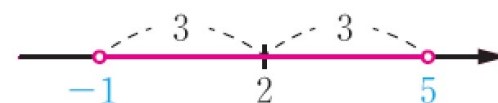
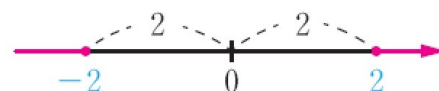
如右圖，可以得知  $2-3 < x < 2+3$ ，

故解為  $-1 < x < 5$ 。

代數想法：

將  $x-2$  視為一個數，滿足  $|x-2| < 3$ 。

因此  $-3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow 2-3 < x < 2+3$ ，故解為  $-1 < x < 5$ 。



數線上，某些範圍的實數可以用區間符號來表示：

名 稱	範 圍	符 號	數軸表示
閉區間	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
開區間	$a < x < b$	$(a, b)$	
半閉半開區間	$a \leq x < b$	$[a, b)$	
半開半閉區間	$a < x \leq b$	$(a, b]$	
閉區間	$a \leq x$	$[a, \infty)$	
開區間	$x < b$	$(-\infty, b)$	

[例題4] 編號 A、B、C 三隻螞蟥放在數線上，而且三隻螞蟥都沿著數線移動，在某個時刻三隻螞蟥的位置分別在 A(-3)、B(2)、C(x)，且三隻螞蟥彼此的距離和為 14，

(1) 試用絕對值方程式，來描述三隻螞蟥的位置關係。

(2) 試問  $x$  的值是多少？

[解法]：

(1) 依題意：

三隻螞蟥彼此的距離和為 14，因此三隻螞蟥的位置關係可以表為

$$|-3-2|+|2-x|+|x-(-3)|=5+|x-2|+|x+3|=14$$

上式可化簡為  $|x-2|+|x+3|=9$ 。

(2) 求解  $|x-2|+|x+3|=9$ ：

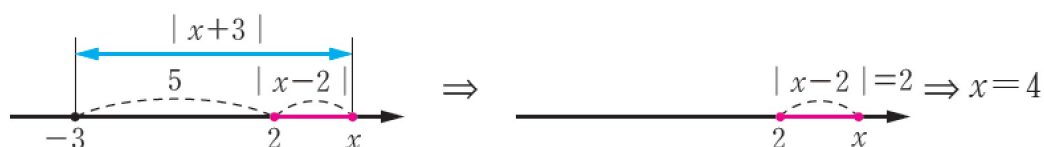
幾何想法：

求解  $|x-2|+|x+3|=9$  即在數線上找一點  $x$  使得它到點 2、-3 的距離和為 9

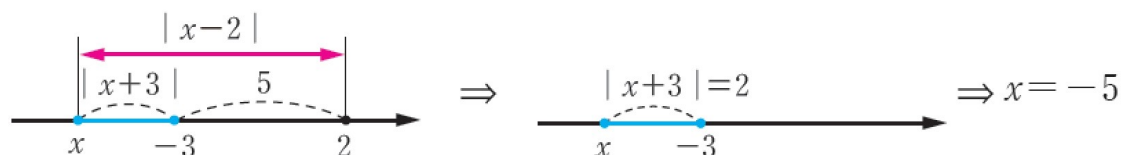
當  $-3 \leq x \leq 2$  時， $|x-2|+|x+3|=|2-(-3)|=5$  不合，

故分別在  $x > 2$  與  $x < -3$  的範圍內找解。

當  $x > 2$  時，如下圖，紅色線段與藍色線段的總和為 9，故  $x=4$



當  $x < -3$  時，如下圖，紅色線段與藍色線段的總和為 9，故  $x=-5$



[例題5] 解不等式 $|x+3|+|x-2|\geq 9$  Ans :  $x < -5$  或  $x > 4$

[例題6] 若 $|ax+1|\leq b$  之解為 $-1\leq x\leq 5$ ，求  $a, b$  之值。Ans :  $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{3}{2}$

(練習5) 解方程式：

(1)  $|x-1|=2$ 。 (2)  $|3x+2|=6$ 。

Ans : (1)  $x=3$  或  $-1$  (2)  $x = \frac{4}{3}$  或  $-\frac{8}{3}$

(練習6) 求下列絕對值不等式的解，並用區間符號來表示：

(1)  $|x-2|\geq 3$  (2)  $|2x+3|\leq 5$  (3)  $|x-1|\geq |x+2|$

Ans : (1)  $[5, \infty) \cup (-\infty, -1]$  (2)  $[-1, 4]$  (3)  $(-\infty, \frac{-1}{2}]$

(練習7) 若在某個時刻三隻螞蟻的位置分別在 A(-5)、B(4)、C(x)，而且 A 與 C 的距離為 B 與 C 距離的 2 倍，

(1) 請利用絕對值方程式表示三隻螞蟻的位置關係。

(2) 試問  $x$  的值是多少？

Ans : (1)  $|x+5|=2|x-4|$  (2)  $x=13$  或  $1$

(練習8) 解下列不等式：

(1)  $|x-1|\geq |2x+3|$  (2)  $|x-1|+|x-2|< 3$  Ans : (1)  $-4\leq x\leq \frac{-2}{3}$  (2)  $0<x<3$

(練習9) 設  $x\in\mathbb{R}$ ，且滿足  $3\leq|x+1|<5$ ，試求  $x$  的範圍。

Ans :  $2\leq x<4$  或  $-6<x\leq -4$

(練習10) 若 $|ax+3|\leq b$ 之解為 $-3\leq x\leq 7$ ，則 $a=?$   $b=?$  Ans： $a=\frac{-3}{2}$ ， $b=\frac{15}{2}$

(練習11) 方程式 $|2x-a|\leq b$ 之解為 $-2\leq x\leq 5$ ，則 $a=?$   $b=?$  Ans： $a=3$ ， $b=7$

(練習12) 試問有都少個整數 $x$ 滿足 $3|x|+2x<20$

(1)22 個 (2) 23 個 (3) 24 個 (4) 25 個 (5)無窮多個。Ans：(3)

[例題7] 設 $a, b$ 為兩實數，證明： $|a\pm b|\leq |a|+|b|$ 。

[例題8] 當 $x$ 在數線上移動時，試求 $|x-3|+|x+8|$ 的最小值。 Ans：11

(練習13) 設 $a, b$ 為實數，試證：

(1) $-|a|\leq a\leq |a|$  (2) $|ab|=|a||b|$  (3) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$  ( $b\neq 0$ )

(練習14) 當 $x$ 在數線上移動時， $|x-3|+|x-5|$ 的最小值等於多少？ Ans：2

## 習題 1-2

### 基本題

1. 試求下列各小題：

(1)數線上，有 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=3$ ，已知 A(-6)、B( $x$ )，試求  $x$  的值。

(2)數線上，有 A、B、C 三點，其中 B 在 A、C 之間，且 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$ ，  
已知 A(-4)、B( $y$ )、C(6)，試求  $y$  的值。

(3)數線上，有 A、B、C 三點，其中 B 在 A、C 之間，且 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$ ，  
已知 A(-4)、B(1)、C( $t$ )，試求  $t$  的值。

2. 數線上，有 A( $a$ )、B( $b$ )、C( $\frac{2a+3b}{5}$ )、D( $\frac{3a+2b}{5}$ )四點且 A 點在 B 點左方，  
試選出正確選項：

(1) $\overline{AB}=|a-b|$ 。(2)B 點在 C 點左方 (3)D 點在 C 點左方 (4) $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

(5) $\overline{AD}=\overline{BC}$ 。

3. 三個相異實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  滿足  $b=\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}c$ ，如果將  $a,b,c$  標註在數線上，則

(1)  $b$  在  $a$  與  $c$  之間

(2)  $c>b$

(3) 若  $d=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}c$ ，則  $d$  在  $a$  與  $c$  之間

(4)  $a$  到  $c$  的距離是  $a$  到  $c$  距離的 5 倍

(5) 如果 $|b|=\frac{4}{5}|a|+\frac{1}{5}|c|$ ，則  $a \cdot b \cdot c>0$  (2014 指定乙)

4. 解下列方程式與不等式：

(1)  $|x|=5$ 。(2)  $|x-3|=5$ 。(3)  $|x|\leq 3$ 。(4)  $|x-1|>5$

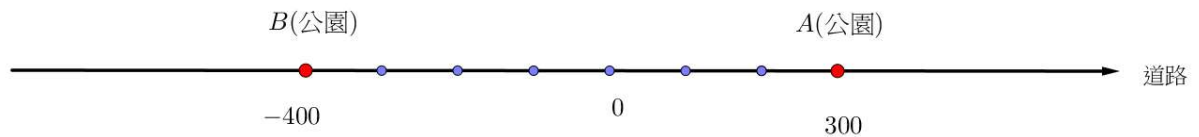
5. 試求滿足下列不等式的實數  $x$ ：

(1)  $|2x-5|\geq 4$  (2)  $|x+4|\geq|x-2|$  (3)  $3\leq|x+1|<5$



6. 試求下列各小題：
- (1)請說明 $|x-2|+|x+1|$ 的幾何意義。
- (2)試問那些選項中的方程式有解？
- (A) $|x-2|+|x+1|=7$  (B) $|x-2|+|x+1|=3$  (C) $|x-2|+|x+1|=2$  (D) $|x-2|+|x+1|=15$
7. 求滿足不等式 $|2x-3|\leq|x+1|$ 之 $x$ 範圍。(請用 $x$ 的不等式表示)
8. 請問滿足絕對值不等式 $|4x-12|\leq 2x$ 的實數 $x$ 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6 (2014 學科能力測驗)
9. 設整數 $n$ 滿足 $|5n-21|\geq 7|n|$ 。試選出正確的選項。
- (1) $|5n-7n|\geq 21$  (2) $-1\leq\frac{7n}{5n-21}\leq 1$  (3) $7n\leq 5n-21$
- (4) $(5n-21)^2\geq 49n^2$  (5)滿足題設不等式的整數 $n$ 有無窮多個。(2022 學測 A)
10. 已知 $a=5, b=\frac{16}{3}, c=2\sqrt{7}$ 和 $d$ ，且 $d$ 為有理數，將這四個數標註在數線上，即
- A(a)、B(b)、C(c)和D(d)。試選出正確的選項。
- (1) $a+b+c+d$ 必為一個有理數
- (2) $abcd$ 可能是有理數
- (3)點D有可能與點C的距離等於 $2\sqrt{7}+3$
- (4)點A和點B的中點位在點C的右邊
- (5)數線上和點B距離小於6的所有點中，共有12個整數點。
11. 若 $|ax-2|\geq b$ 之解為 $x\leq 0$ 或 $x\geq \frac{4}{3}$ ，求數對 $(a,b)$ 之值。
12. 已知數線上有相異四點A(-2)、B(x)、C(5)、D(3x-1)，且滿足 $\overline{AB}+2\overline{CD}=6$ ，試求 $x$ 之值。
13. 試求下列各小題：
- (1) 說明： $|x-1|+|x-5|$ 之幾何意涵。(x是數線上任意實數)
- (2) 當 $x$ 在數線上移動，試求 $|x-1|+|x-5|$ 之最小值。
- (3) 解方程式 $|x-1|+|x-5|=8$ 。
- (4) 解不等式 $|x-1|+|x-5|\leq 8$ 。

14. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。
- (1)  $|x+1|+|x-3|=3$
  - (2)  $|x+1|+|x-3|=4$
  - (3)  $|x+1|-|x-3|=2$
  - (4)  $|x+1|-|x-3|=10$
  - (5)  $|x+1|-|x-3|=-1$
15. 數線上有一部能左右移動的微型機器人，兩個操控站位於  $A(-2)$ 、 $B(4)$ ，此機器人會受到兩個操控站的操控。當機器人與兩操控站的距離和大於 12 時，機器人會無法正常的操控，請問在數線上，機器人能夠正常操控的範圍為何？
16. 已知道路上有  $A$ 、 $B$  兩座公園，其相關位置可以用數線來表示，如下圖所示，今小安想要在此道路上購屋且希望住家附近 500 公尺內有公園，請將小安適合購物的範圍以區間來表示。



### 進階題

17. 設  $a, b$  為實數，且  $|a| < 1$ ， $|b| < 1$ ，試證： $|a+b|+|a-b| < 2$ 。
18. 設  $a, b, c$  為實數，且  $|a| < 1$ ， $|b| < 1$ ， $|c| < 1$ ，試證：
- (1)  $ab+1 > a+b$
  - (2)  $abc+2 > a+b+c$ 。

## 答案

1. (1) $x=-3$  或  $-9$  (2) $y=\frac{3\times 6+2\times(-4)}{3+2}=-2$  (3) $1=\frac{3t+2\times(-4)}{3+2}\Rightarrow t=\frac{13}{3}$
2. (1)(3)(5)
3. (1)(4)
4. (1) $x=5$  或  $-5$  (2) $x=8$  或  $-2$  (3) $-3\leq x\leq 3$  (4) $x>6$  或  $x<-4$
5. (1)  $x\geq\frac{9}{2}$  或  $x\leq\frac{1}{2}$  (2)  $x\geq-1$  (3)  $2\leq x<4$  或  $-6<x\leq-4$
6. (1)數線上  $x$  到 2 與  $-1$  的距離和 (2) (A)(B)(D)
7.  $\frac{2}{3}\leq x\leq 4$  [提示：可以分段討論]
8. (4)  
(1°) $4x-12\geq 0$  原不等式化為  $4x-12\leq 2x\Leftrightarrow x\leq 6$ ，故解為  $3\leq x\leq 6$   
(2°) $4x-12\leq 0$  原不等式化為  $-4x+12\leq 2x\Leftrightarrow x\leq 6$ ，故解為  $2\leq x\leq 3$   
由(1°)(2°)可得解為  $2\leq x\leq 6$ ，故選(4)。

9. (2)(4)

[解法一]：

討論  $5n-21$  與  $n$  的正負，分段討論：

(1°) $5n-21\geq 0$  且  $n\geq 0$ ： $5n-21\geq 7n$  不合

(2°) $5n-21\geq 0$  且  $n\leq 0$ ： $5n-21\geq -7n\Leftrightarrow 12n\geq 21$  不合

(3°) $5n-21\leq 0$  且  $n\geq 0$ ：

$21-5n\geq 7n\Leftrightarrow 12n\leq 21$ ，故  $n=0,1$

(4°) $5n-21\leq 0$  且  $n\leq 0$ ：

$21-5n\geq -7n\Leftrightarrow n\geq 10.5$  不合

所以  $n=0,1$ ，代入各選項檢查，故選(2)(4)。

[解法二]：

根據足不等式  $|5n-21|\geq 7|n|$  可以得知  $|\frac{7n}{5n-21}|\leq 1$ ，

故(2) $-1\leq\frac{7n}{5n-21}\leq 1$  正確，(4)  $(5n-21)^2\geq 49n^2$  正確

(1)不正確反例  $n=0$  (3)不正確反例  $n=0$

(5)因為滿足  $(5n-21)^2\geq 49n^2$  的整數解為有限多個，因此滿足題設不等式的整數  $n$  有限多個。

10. (2)(3)(5)

[解法]：

(1)不正確：因為  $a, b, d$  為有理數， $c$  為無理數，所以  $a+b+c+d$  必為無理數

(2)正確：令  $d=0$ ， $abcd=0$  為有理數。

(3)正確：取  $d=-3$ ， $\overline{CD}=2\sqrt{7}+3$ 。

(4)不正確：點 A 和點 B 的中點  $M(\frac{5+16/3}{2})$ ， $\frac{5+16/3}{2}=\frac{31}{6}<2\sqrt{7}$

故點 A 和點 B 的中點位在點 C 的左邊

(5)正確：數線上和點 B 距離小於 6 的所有點(x)會滿足  $|x-\frac{16}{3}|<6$  解得

$$\frac{-2}{3} < x < 11\frac{1}{3}，若 x 為整數，可為 0,1,2,...,11。$$

11.  $(a,b)=(3,2)$

12.  $x=\frac{8}{5}$  或  $\frac{16}{7}$

13. (1)  $|x-1|+|x-5|$  代表數線上  $x$  到 1 與  $x$  到 5 的距離和。

(2)4 (3)7 或 -1 (4)  $-1 \leq x \leq 7$

14. (2)(3)(5)

15. -5 與 7 之間時，機器人能夠根據數據做正確判讀。

16.  $[-200,100]$

17. [提示：證明  $(|a+b|)^2 < (2-|a-b|)^2$  會成立]

18. (1)  $ab+1-a-b=(a-1)(b-1)>0$

(2) 利用(2)的結果： $(ab)c+1+1>ab+c+1=ab+1+c>a+b+c$