第一章實數與指對數

林信安老師編寫

1-1 數與式

(甲)有理數與數線

◆ 有理數的意義

日常生活中，常常會接觸到數字，從飲料包裝上的營養標示表(如右圖)可以看到許多數字，例如每一份量 300 毫升，含糖 12.6 公克，每 100 毫升含熱量 18 大卡，(即每毫升含熱量$\frac{18}{100}$大卡)等等，這些數字 300、12.6、$\frac{18}{100}$都可以用分數來表示。

營養標示		
每一份量	300毫升	
本包裝含	2份	
	每份	每100毫升
熱量	54大卡	18大卡
蛋白質	0公克	0公克
脂肪	0公克	0公克
飽和脂肪	0公克	0公克
反式脂肪	0公克	0公克
碳水化合物	13.5公克	4.5公克
糖	12.6公克	4.2公克
鈉	33毫克	11毫克

凡是可以表示成分數形式的數都稱為有理數。

有理數的定義：

設 m，n 都是整數，且 n 不等於 0，凡是可以表成「整數比$\frac{m}{n}$」的數都稱為**有理數**。

根據有理數的意義，可以得知：

(1)任何整數 m 都可寫成$\frac{m}{1}$，故所有的整數都是有理數。

(2)任何有理數的表示法都不是唯一的。例如$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\dots$。

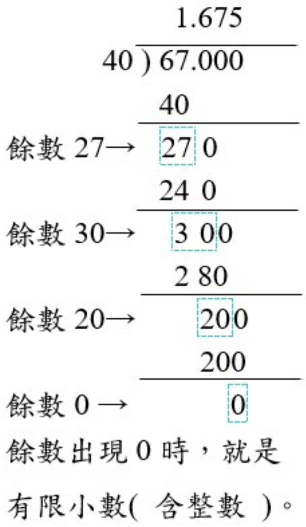
(3)任意兩個有理數作加減乘除(除數不為 0)後仍然是有理數。

例如$\frac{2}{3}+\frac{7}{2}=\frac{4+21}{6}=\frac{25}{6}$、$\frac{4}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{63}$、$\frac{4}{9}\div\frac{3}{7}=\frac{4}{9}\times\frac{7}{3}=\frac{28}{27}$。

◆ 用小數表示有理數

利用除法，可以將有理數化成整數與小數，例如：因為 12 可以被 4 整除，所以$\frac{12}{4}$等於整數 3。另外如$\frac{67}{40}$、$\frac{3}{7}$ 等數，其分子無法被分母整除，透過除法可以將它們化成小數。

$\frac{67}{40}=\frac{67}{2^3\cdot 5}=\frac{67\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{1675}{10^3}=1.675$。



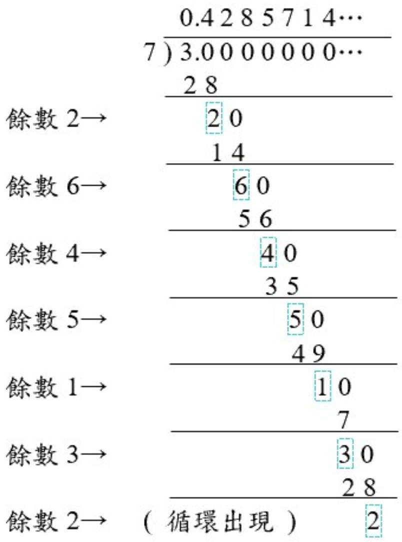
利用直式除法，當餘數為 0 時，就可將分數表為有限小數。

利用直式除法，不管進行多少次除法，餘數都不會 0 時，分數會化成循環小數。

$\frac{3}{7}=0.4285714\cdots=0.\overline{428571}$ 。

(428571 循環出現，稱 $\overline{428571}$ 為循環節，

故$\frac{3}{7}$化成小數為循環節 6 位數的循環小數)



從上例的解題的過程中，可以看出：

(1)將$\frac{67}{40}$擴分成$\frac{1675}{10^3}$，此時分母成為 10^3，故$\frac{67}{40}$是有限小數。

(2)在$\frac{3}{7}$化成小數的除法過程中，無法使得餘數等於 0，因此雖然無法化成有限小數。因為任意正整數 m 除以 7 的餘數有七種：0，1，2，3，4，5，6，這表示從第一個“餘數”開始觀察，“至多”經過七次除以 7 的操作，“餘數”出現的數字就會重複（ 循環 ）出現。

(練習1) 將下列有理數化成小數：

(1)$\frac{53}{4}$ 。　　(2)$\frac{47}{33}$。　　Ans：(1)13.25　(2)$1.\overline{42}$

從上面的討論，可以得知當我們利用除法將有理數化成小數時，若不能除盡成有限小數，就一定可以化成循環小數。

反過來說，是不是每個有限小數與循環小數都可以化成有理數呢？

例如：將(1)0.21　(2) $3.\overline{12}$ 化為分數：

(1)$0.21=\frac{2}{10}+\frac{1}{100}=\frac{20+1}{100}=\frac{21}{100}$。

(2)設 $x=3.\overline{12}=3.121212\ldots$則

$100x=3.12\overline{12}=312.121212\ldots$

兩式相減削去循環節得 $99x=312-3=309$

故 $x=\frac{309}{99}=\frac{103}{33}$。即 $3.\overline{12}=\frac{103}{33}$。

事實上，所有的有限小數與循環小數都可以化成有理數的形式，

例如：$0.13=\frac{13}{100}$、$0.\overline{2}=\frac{2}{9}$

至於每個循環小數都可以化成有理數的理論，需要用到無窮等比級數求和的理論。

根據前面的討論，我們可以得到以下結論：

有理數 $\frac{m}{n}$ 化成小數，就是"整數、有限小數或循環小數"。

(練習2) 將下列循環小數化成有理數 $\frac{m}{n}$ （m, n 為整數）的形式：

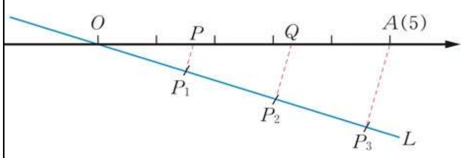
(1) $0.\overline{25}$　(2) $2.4\overline{17}$　Ans：(1) $\frac{25}{99}$　(2) $\frac{2393}{990}$

(練習3) 將 $\frac{5}{13}$ 化為小數後，小數點後第 123 位數字是多少？Ans：4

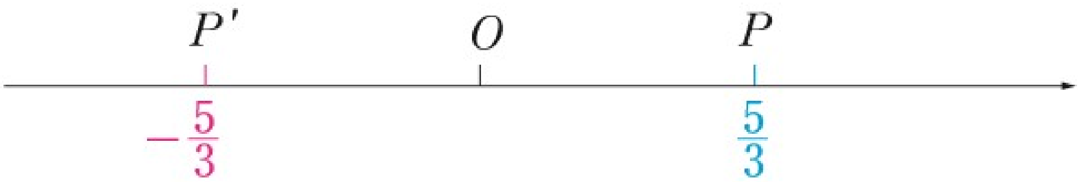
◆　在數線上作圖表示有理數

在數線上，取一固定長度為單位長，就可在數線上找出每個整數的位置。但任意給一個正有理數 $\frac{m}{n}$，在數線上如何標出它的位置呢？

以 $\frac{5}{3}$ 為例，說明如下：

步驟	作圖
(1)如右圖，在數線上標出 A(5)，過 O 點作不與數線重合的直線 L，在 L 取 P_1、P_2、P_3，使得$\overline{OP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}$。 (2) 連接$\overline{AP_3}$，過 P_1，P_2 分別作$\overline{AP_3}$的平行線交數線於兩點 P，Q，則 P，Q 就是線段$\overline{OA}$的三等分點。即$\overline{OP}=\frac{1}{3}\overline{OA}=\frac{5}{3}$， P 點對應的有理數就是$\frac{5}{3}$。	

將 P($\frac{5}{3}$)對原點 0 做對稱點 P'，則 P'代表$\frac{-5}{3}$



上述討論的方法，可以推及一般有理數$\frac{m}{n}$的尺規作圖法。

每一個有理數 r，都對應數線上一個點。數線上對應有理數的點，稱為**有理點**。

[例題1] 利用尺規作圖，在數線上作出$\frac{3}{7}$所代表的點。

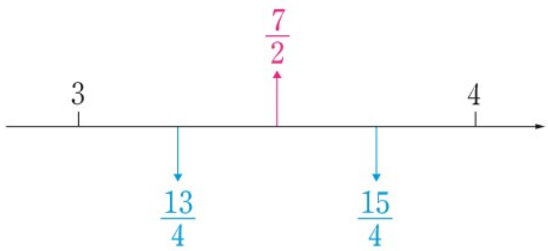
◆ 有理數的稠密性：

對於整數點來說，任意兩個相異整數點之間，不一定存在有整數點，例如連續整數 3 與 4 之間，就不存在其它整數點。但是對於任兩個相異的有理點，它們之間就一定可以找到有理點。

例如：有理點 3 與 4 之間，它們的中點$\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$就是一個位於其間的有理點；

同理，有理點$\frac{7}{2}$與 4 之間，它們的中點$\frac{\frac{7}{2}+4}{2}=\frac{15}{4}$也是一個位於其間的有理點。

有理點$\frac{7}{2}$與 3 之間，它們的中點$\frac{\frac{7}{2}+3}{2}=\frac{13}{4}$也是一個位於其間的有理點。



一般而言，設 r、s 為有理數，且 $r<s$，則中點$\frac{r+s}{2}$是介於 r,s 之間的有理數，($r<\frac{r+s}{2}<s$)。

由此可知，**任意兩個相異有理數，它們之間會有無限多個有理數。**

數線上，有理點在數線上的分布是“密密麻麻”，數線上不管多小的區段中，都有“無限多個”有理點，這個性質稱為有理數的**稠密性**。

有理數的稠密性： 任意兩個相異有理數之間，都可找到一個有理數。

[例題2] 設 r,s 為兩有理數，且 $r<s$，

(1)若 m, n 為正數，試證明：$r<\frac{mr+ns}{m+n}<s$。。

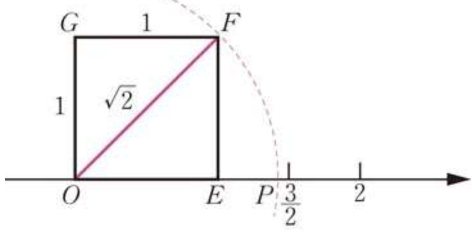
(2)根據(1)的結果，試問有多少個有理數介於 r,s 之間？

(乙)實數與數線

◆　無理數的存在

給任一個「有理數」，由前述的尺規作圖法，可以在數線上找出對應的有理點。有理點會填滿整個數線嗎？即數線上給任一個點 P，是否對應一個「有理數」呢？

如圖，單位長為 1 的正方形 $OEFG$ 中，以對角線長 $\sqrt{2}$ 為半徑，O 為圓心，畫弧截數線於一點 P，P 點對應的數是 $\sqrt{2}$ ，。其實在古<u>希臘</u>時期，<u>畢達哥拉斯</u>學派就已經證明了 $\sqrt{2}$ 無法表示成有理數的形式，



有理數表成十進位數，其形式就是「整數、有限小數、循環小數」三種。

用十分逼近法把 $\sqrt{2}$ 化成“十進位數”來觀察。

2 所在的範圍		$\sqrt{2}$的範圍		近似值		誤差範圍
$1^2<2<2^2$	→	$1<\sqrt{2}<2$	→	$\sqrt{2}=1.\cdots$	←	$\lvert\sqrt{2}-1\rvert<1$
$1.4^2<2<1.5^2$	→	$1.4<\sqrt{2}<1.5$	→	$\sqrt{2}=1.4\cdots$	←	$\lvert\sqrt{2}-1.4\rvert<0.1$
$1.41^2<2<1.42^2$	→	$1.41<\sqrt{2}<1.42$	→	$\sqrt{2}=1.41\cdots$	←	$\lvert\sqrt{2}-1.41\rvert<0.01$
$1.414^2<2<1.415^2$	→	$1.414<\sqrt{2}<1.415$	→	$\sqrt{2}=1.414\cdots$	←	$\lvert\sqrt{2}-1.414\rvert<0.001$
$1.4142^2<2<1.4143^2$	→	$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$	→	$\sqrt{2}=1.4142\cdots$	←	$\lvert\sqrt{2}-1.4142\rvert<0.0001$
		$\vdots$		$\vdots$		

把 $\sqrt{2}$所在的範圍（上限－下限）逐次縮小 10 倍，每次求得的近似值，
小數就增多了一位，而“誤差”愈來愈小。**十分逼近法**的工作，持續做下去可得
$\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$。(正確到十一位小數)
$\sqrt{2}$的小數位數似乎“永無終止”。$\sqrt{2}$ 表成十進位數，看來既不像有限小數，也不像循環小數。

事實上，$\sqrt{2}$ 不是有理數！證明如下：

> 假設 $\sqrt{2}$ 是有理數，可以令 $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ 其中 m 與 n 是正整數，
>
> 平方、移項得：$m^2=2n^2$，此時 $n>1$ 且 $m>1$
>
> |(若 $n=1$，$\sqrt{2}$ 為整數不成立，又 $\sqrt{2}>1$，故 $m>1$)
>
> 將 m^2 與 $2n^2$ 做質因數分解：m^2 質因數分解式中 2 是偶數次方，而 $2n^2$ 質因數分解式中 2 是奇數次方，因此 m^2 一定不等於 $2n^2$，此結果與 $m^2=2n^2$ 矛盾。
> 因此假設“$\sqrt{2}$ 是有理數”是不成立的！　故可以證明 $\sqrt{2}$是不是有理數。

上述的證法，一開始假設 $\sqrt{2}$ 是有理數，再以此為論證的根據，進而得到矛盾的結果，這樣的證明方法稱為「**反證法**」。

影片觀賞：$\sqrt{2}$ 不是有理數

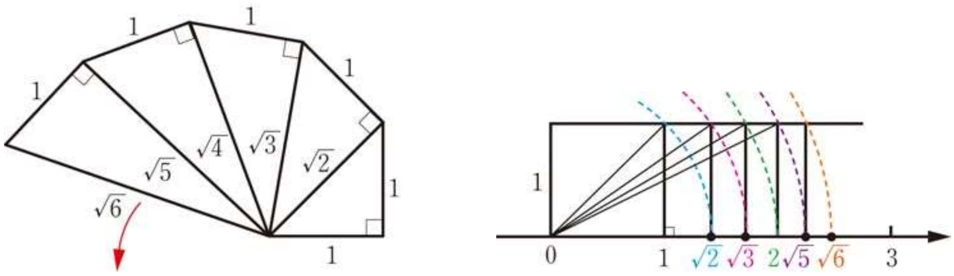
https://www.youtube.com/watch?v=sbGjr_awePE&t=169s

雖然數線上的有理點密密麻麻，但是數線上的點不全是有理點。

在數線上，這種不是有理數的數稱為**無理數**。

因為有理數$\dfrac{m}{n}$ 化成小數，就是「整數、有限小數或循環小數」，故無理數化成小數後是**不循環的無限小數**。

事實上，除了$\sqrt{2}$ 之外，像 3,5,6 的正平方根$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ 等線段的長度都是無理數，可以利用畢氏定理，用尺規作圖法描出它們在數線上的位置，可參照下圖。事實上，仿照$\sqrt{2}$為無理數的證明，也可以證明若正整數 n 不是完全平方數，則$\sqrt{n}$是無理數。



(a) (b)

圖 6

除了$\sqrt{n}$形式的無理數外，事實上像圓周率 π ＝3.141592653 …(不循環的無限小數)、$5+\sqrt{2}$等都是無理數。

[例題3] 已知$\sqrt{3}$為無理數，證明：(1)$5+\sqrt{3}$ 為無理數 (2)$5\sqrt{3}$為無理數。

[例題4] (1)證明：設 a,b 為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$。

(2)若 m,n 是有理數且$(3-\sqrt{2})m+(4\sqrt{2})n=6+2\sqrt{3}$，試求 m,n 的值。

Ans：(2)$m=2$、$n=1$

(練習4) 設 a,b 為有理數，$(2+\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})b=7-\sqrt{3}$，則 $a+b=$？ Ans：5

(練習5) 已知$\sqrt{2}$ 為無理數，試證明：(1)$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ (2)$\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 為無理數。

(2)提示：

令 $k=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 為無理數$\Rightarrow\sqrt{7}=\sqrt{2}-k$，兩邊平方後，得到$\sqrt{2}=\dfrac{k^2-5}{2k}$，再形成矛盾。

◆ 實數系

一、實數系的家譜：

有理數與無理數合在一起，統稱為**實數**。全體的實數”與“數線上所有的點”形成**一對一的對應**，因此數線上 A 點對應的“實數 a”稱為 ***A* 點的坐標**，記作 $A(a)$。

$$\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數}\begin{cases}\text{正整數}\\ \text{零}\\ \text{負整數}\end{cases}\\ \text{分數：有限小數, 循環小數}\end{cases}\\ \text{無理數：不循環的無限小數}\end{cases}$$

二、實數系的性質：

實數如有理數一樣，兩個實數經過加減乘除(除數不為 0)後還是實數，在運算上具有以下的性質：

(1)運算性質：

設 a，b，c 是任意實數。

(1°) 交換律：$a+b=b+a$，$ab=ba$。

(2°) 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$。

(3°) 配律：$a(b+c)=ab+ac$。

(4°) 消去律：(i)若 $a+c=b+c$，則 $a=b$。

(ii)若 $ac=bc$ 且 $c\neq 0$，則 $a=b$。

(2)次序性質：

數線上，愈往右邊的點所代表的數愈大，實數的大小次序具有以下的性質：

設 a，b，c 是任意實數。

(1°) 三一律：“$a>b$，$a=b$，$a<b$”三式中恰有一式成立。

(2°) 遞移律：若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$。

(3°) 運算律：(i)加法：若 $a>b$，則 $a+c>b+c$。

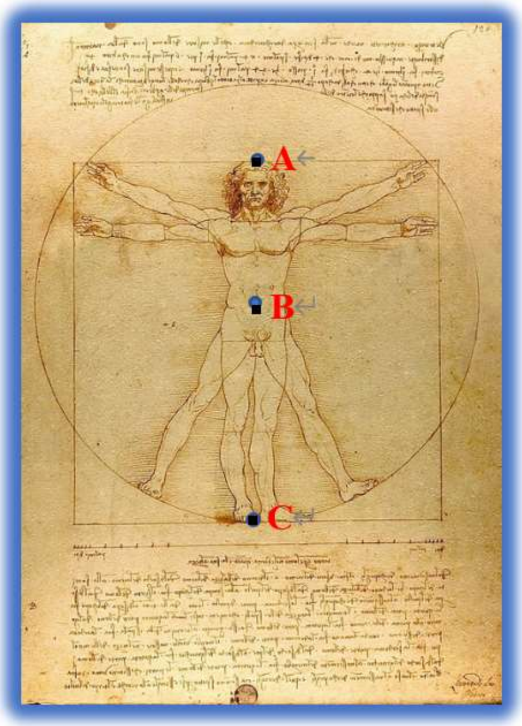
(ii)乘法：若 $a>b$，則 $ac>bc\ (c>0)$，

$ac<bc\ (c<0)$.

[例題5] 右圖是李奧納多-達文西在 1487 年前後創作的世界著名素描–「**維特魯威人**」，圖中達文西努力繪出了完美比例的人體。古希臘人認為最美的身材比例要滿足

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\phi$$

(A 為頭頂、B 為肚臍、C 為地面站立處)



(1)試求黃金比例ϕ的值。

(2)林小姐的身高為 150 公分，她的肚臍到腳底的距離為 90 公分，試問林小姐要穿多少公分的高跟鞋，才會使得身材比例達到黃金比例？(四捨五入至整數位)

Ans：(1) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(2)7 公分

[例題6] 我們知道：$\dfrac{5+7}{2}=6$，並且$\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}$。試問：

$\sqrt{6}$比較接近$\sqrt{5}$與$\sqrt{7}$中的哪一個數？

(練習6) 比較 $\sqrt{4}+\sqrt{5}$ 與 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 的大小。Ans：$\sqrt{4}+\sqrt{5}>\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(練習7) 比較 $\sqrt{10+n}-\sqrt{10}$ 與 $\sqrt{10}-\sqrt{10-n}$ $(0<n<10)$的大小。

Ans：$\sqrt{10+n}-\sqrt{10}<\sqrt{10}-\sqrt{10-n}$

(丙)乘法公式與分式根式化簡

◆ 乘法公式：

完全平方：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全立方：

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

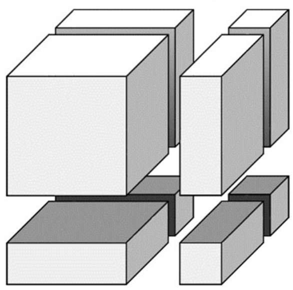
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

立方和：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

立方差：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

[討論]：

請根據右圖來說明完全立方公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



[例題7] 試證恆等式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$。

證明：

用代換法，令 $A=a+b$，原式變成 $(A+c)^2$。

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2=(A+c)^2&=A^2+2Ac+c^2\\
&=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2\\
&=(a^2+2ab+b^2)+2(ac+bc)+c^2\\
&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)。
\end{aligned}
$$

[例題8] 分解因式：

(1) x^3+8。 (2) x^3-8。 (3) $8x^3+y^3$。

(練習8) 利用乘法公式展開下列各式：

(1) $(2a-3b)^2$　(2) $(3x-2)^3$　(3) $(4x+3)(4x-3)$

Ans：(1) $4a^2-12ab+9b^2$　(2) $27x^3-54x^2+36x-8$　(3) $16x^2-9$

(練習9) 利用乘法公式展開下列各式：

(1) $(x-3)(x^2+3x+9)$　(2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

Ans：(1)x^3-27　(2) $8x^3+1$

(練習10) 展開下列各式：

(1)$(x+y-2)^2$　(2)$(a-b+c)^2$

Ans：(1) $x^2+y^2+2xy-4x-4y+4$　(2)$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

(練習11) 因式分解下列各式：

(1) $2x^2-18$　(2) $x^2-4x(b-a)+4(a-b)^2$ (3) $x^2-y^2+6yz-9z^2$

Ans：(1) $2(x+3)(x-3)$　(2) $(x+2a-2b)^2$　(3) $(x+y-3z)(x-y+3z)$

(練習12) 因式分解下列各式：

(1) $2x^3+54$　(2) x^3+x^2-2　(3) a^6-64b^6

Ans：(1) $2(x+3)(x^2-3x+9)$ (2) $(x-1)(x^2+2x+2)$

(3) $(a+2b)(a-2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2+2ab+4b^2)$

◆ 分式的化簡

分式運算的基本規則與分數運算相同：分子與分母有共同因式時可以約分，作加減運算時要先通分。

[例題9] 化簡下列分式：

(1) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$。　(2) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}\div\dfrac{x+3}{x-3}$。

Ans：(1) $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}$　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}$

[例題10] 已知 $x+\dfrac{1}{x}=6$，試求下列各式的值：

$(1)x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 。　　$(2)x^3+\dfrac{1}{x^3}$。　Ans：(1)34 (2)198

(練習13) 化簡下列分式：

(1) $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{2x^2+10x+12}$　(2)$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}\div\dfrac{x+2}{x}$ Ans：(1) $\dfrac{2x+1}{2(x-2)(x+3)}$　(2) 1

(練習14) 已知 $x-\dfrac{1}{x}=4$，試求下列各式的值：

$(1)x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 。　　$(2)x^3-\dfrac{1}{x^3}$。　Ans：(1)18(2)76

◆　根式的化簡

一般而言，含有根號的式子稱為根式。

給定一數 $a\geq 0$。若實數 x 滿足 $x^2=a$，則稱 x 為 a 的**平方根**。例如 25 有兩個平方根，正平方根是 5，負平方根是-5，分別記為$\sqrt{25}=5$，$-\sqrt{25}=-5$。在實數的運算中，非負實數才可以開平方，根號的運算具有以下性質：

> 設 a，b 均為正數，則
>
> (1)當 $a,b\geq 0$ 時，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ ；$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ 。
>
> (2)a 為任意實數，則$\sqrt{a^2}=|a|$。

(1)最簡根式：

將一個正有理數的平方根寫成$\dfrac{q}{p}\sqrt{n}$的形式，其中$\dfrac{q}{p}$為最簡分數，n 為大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除，稱這種形式的根式($\dfrac{q}{p}\sqrt{n}$)為「**最簡根式**」。

例如：$6\sqrt{10}$ 和 $\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ 都是最簡根式；但$\sqrt{360}$ 和 $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ 就不是最簡根式。

我們稱將平方根化成最簡根式的過程為「**平方根化簡**」。

(2)同類方根

當兩個根式經過化簡後，如果在它們的最簡根式的根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個方根為**同類方根**。

例如：$2\sqrt{3}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$（可化簡為$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$）,$-\sqrt{3}$都是同類方根；但$\sqrt{3}$與$\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$就不是同類方根。在求根式的值時，我們通常會將式中的同類方根合併，並且將結果的每一項化為最簡根式。

(3)根式分母有理化（有理化分母）

有理化因子：

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt{a^2}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2} \leftrightarrow \sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$

二重根號化簡

設 p, q 為正數，則：$\sqrt{p+q+2\sqrt{pq}}=\sqrt{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}=\sqrt{p}+\sqrt{q}$

$$\sqrt{p+q-2\sqrt{pq}}=\sqrt{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2}=\left|\sqrt{p}-\sqrt{q}\right|$$

[例題11] (1)設$1<a<3$，請化簡 $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$ 。

(2)設$0<a<3$，請化簡 $3\sqrt{a^2}+2\sqrt{a^2+4a+4}-2\sqrt{a^2-6a+9}$ 。

Ans：(1)$2a-4$　(2)$7a-2$

[例題12] 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $\sqrt{48}-\sqrt{27}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　Ans：(1) $\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

[例題13] 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$ (2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$

Ans：(1) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

(練習15) (1) 設 $-1<a<1$，試化簡 $\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(2a-3)^2}$ 。

(2) 設 $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{3}{4}$，試化簡 $\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{16x^2-24x+9}$ 。

Ans：(1) $3a-2$ (2) $8x-3$

(練習16) 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $(1+\sqrt{3})^4(1-\sqrt{3})^4$ (2) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^{11}(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{10}$

(3) $\sqrt{24}-\sqrt{54}-\sqrt{32}-\sqrt{18}$ (4) $\sqrt{6}\times(\sqrt{18}-\sqrt{15})$

Ans：(1) 16 (2) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ (3) $-\sqrt{6}-7\sqrt{2}$ (4) $6\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

(練習17) 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$ (3) $\dfrac{1}{2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Ans：(1) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ (2) $2+\sqrt{11}$ (3) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

(練習18) 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $\sqrt{9+2\sqrt{18}}$ (2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$ Ans：(1)$\sqrt{6}+\sqrt{3}$ (2)$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(練習19) 設 $a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}$ 的純小數部分為 b，試求$\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{b}=$？ Ans：$\dfrac{9}{4}$

(丁)算幾不等式

觀察下列形如$\frac{a+b}{2}$與$\sqrt{ab}$兩數的大小：

$$\frac{7+3}{2}>\sqrt{7\times 3}\;；\;\frac{6+4}{2}>\sqrt{6\times 4}\;；\;\frac{5+5}{2}\geq\sqrt{5\times 5}\;。$$

對非負實數 a,b 而言，$\frac{a+b}{2}$稱為 a 與 b 的**算術平均數**，$\sqrt{ab}$ 稱為 a 與 b 的**幾何平均數**。

不等式：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 簡稱為**算幾不等式**。

[例題14] 設 a，b 是非負實數，證明：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。當 $a=b$ 時，等號成立。

[證明]：

因為 a,b 為非負實數，所以 $a=(\sqrt{a})^2$，$b=(\sqrt{b})^2$，且$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)\quad=\frac{1}{2}〔(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2〕$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

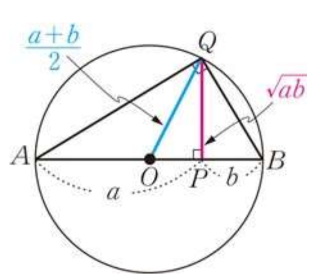
當 $a=b$ 時，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，故$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$（等號在“$a=b$ 時成立”）

當 $a\neq b$ 時，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$，故$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

故$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。

我們可以用圖形來說明算幾不等式：

在右圖中，P 點將直徑$\overline{AB}$分成$\overline{AP}$、$\overline{PB}$，令$\overline{AP}=a$、$\overline{PB}=b$，半徑$\overline{OQ}=\frac{a+b}{2}$。



由直角△APQ與直角△QPB相似，可得$\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{PB}}$，

故$\overline{PQ}^2=\overline{AP}\times\overline{PB}=ab$，即$\overline{PQ}=\sqrt{ab}$，

顯然$\overline{OQ}\geq\overline{PQ}$（當 P 與 O 重合時，$\overline{PQ}=\overline{OQ}$）。即

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。

[例題15] 周長固定為 20 公尺之所有矩形中，求“面積”最大是多少平方公尺？並求出最大面積之矩形的“長與寬”。

Ans：矩形的面積最大為 25 平方公尺，此時的矩形是一個“正方形”。〔長＝寬＝5 (公尺)〕

[例題16] (1)設 a,b 為正數，且滿足 $2a+3b=8$，則當(a,b)=？時，ab 有最大值=？

(2)設 x,y 為正數，且 $xy=6$，則 $3x+2y$ 的最小值為=？

Ans：(1) 最大值=$\frac{8}{3}$ 此時 $a=2$、$b=\frac{4}{3}$。(2) 最小值=12，此時 $x=2$，$y=3$

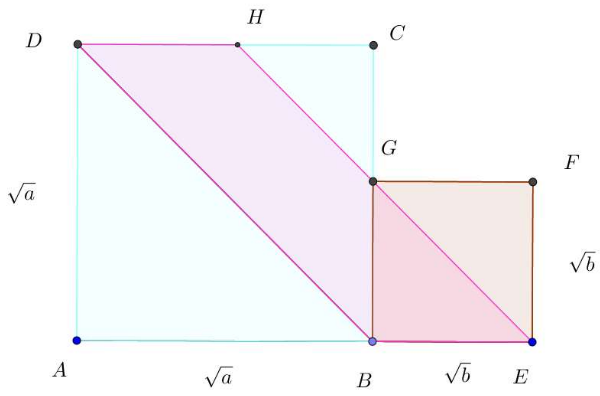
(練習20) 設 a,b 為正數，且滿足 $3a+4b=12$，則當(a,b)=？時，ab 有最大值=？

Ans：$(a,b)=(2,\frac{3}{2})$，3

(練習21) (1)下圖中，試問平行四邊形 BEHD 的面積等於多少？

並藉以說明「a,b 為相異正數且滿足$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ 」。

(2)想像移動 B 點，請問正數 a,b 滿足甚麼條件時，$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 。



習題 1–1

基本題

1. 下列各數何者是整數、有理數、無理數與實數，請將代號填入下列空格：

   (a)3.14159 (b) π (c)$\sqrt{200}$，(d)$\sqrt{49}$ (e)$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ (f)$5-\sqrt{2}$ (g)$0.3\overline{6}$。

   整數______________ 有理數__________________，

   無理數______________ 實數____________________。

2. 下列敘述那些是正確的？

   (A) 若$a, b, a-b$均為無理數，則$a+b$為無理數

   (B) 若$a, b, \frac{a}{b}$均為無理數，則ab為無理數

   (C) 設a, b均為有理數，且$ab \neq 0$，則$a+b\sqrt{3} \neq 0$

   (D) 可以找到兩個無理數a, b，使得$\frac{a}{b}$為無理數，且ab為有理數

   (E) 若a^3與a^5均為有理數，則a為有理數

   (F) 若a, b為實數，且滿足$a+b$為有理數，ab不為有理數，則$a-b$不為有理數。

3. (1)將有理數$\frac{4}{9}$與$\frac{2}{11}$化為循環小數。

   (2)將下列循環小數化成“最簡分數$\frac{m}{n}$（m與n是互質的正整數）。

   (a)$0.\overline{2}$。 (b) $2.\overline{13}$。 (c)$3.2\overline{4}$。

4. 設x為有理數，且$(x^2-1)+(x^2-2x-3)\sqrt{5}=0$，試求$x$的值。

5. 設a,b為有理數，若$(3-\sqrt{5})a+(\sqrt{5}+4)b=1-5\sqrt{5}$，試求$a,b$的值。

6. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

   (1) $\sqrt{13}>3.5$ (2) $\sqrt{13}<3.6$ (3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

   (2014 學科能力測驗)

7. (1) 比較$\sqrt{13}-\sqrt{10}$與$\sqrt{10}-\sqrt{7}$的大小。

(2) 設 n,p 為正數且 $p<n$ ，試比較$\sqrt{n+p}-\sqrt{n}$與$\sqrt{n}-\sqrt{n-p}$的大小。

8. 利用乘法公式展開下列各式：

(1) $(3x-5)(9x^2+15x+25)$ (2) $(x-2y+3)^2$ (3) $(3x-2)^3$

9. 因式分解下列式子：

(1) $8x^3+125$ (2) x^4-16 (3) x^3+x^2+x+1 (4) $2ax^2-3x+2ax-3$

10. 化簡下列各分式：

(1) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$ (2)$\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{ab-b^2}{ab-a^2}$ (3) $(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a-b}{a+b})\times\dfrac{a-b}{2ab}$

11. 化簡下列各根式為最簡根式：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ (2) $\sqrt{363}-4\sqrt{27}+3\sqrt{108}-\sqrt{75}$ (3) $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

12. 化簡下列各根式為最簡根式：

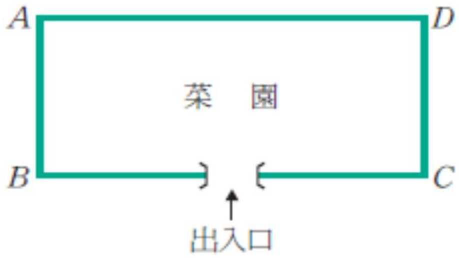
(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ (2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ (3) $\sqrt{9+\sqrt{72}}$ (4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

13. 試回答下列兩小題：

(1)設 a,b 為正實數，且滿足 $2a+3b=6$，試求 ab 的最大值，並問此時 a,b 的值。

(2)設 a,b 為正實數，且滿足 $ab=18$，試求 $a+2b$ 的最小值，並問此時 a,b 的值。

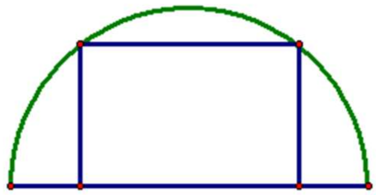
14. 農夫想用長 66 公尺的竹籬笆圍成一座長方形的菜園，如右圖所示，其中$\overline{BC}$ 邊的中央留著寬 2 公尺的出入口。設$\overline{AB}=x$ 公尺，$\overline{AD}=y$ 公尺。



(1) 將竹籬笆的長度 66 公尺，用 x，y 表示。

(2) 將菜園的面積 A 用 x，y 表示，然後求出面積 A 的最大值是多少平方公尺？

15. 在半徑 8 公尺的半圓中開闢一個內接矩形的苗圃，且其一邊與半圓的直徑重合，試問此苗圃的最大面積為多少？



16. 小安想要設計一個文創禮品的長方體包裝盒，已知長方體的高須為 5 公分，體積須為 245 立方公分，若想要最節省材料，則此長方體的包裝盒長與寬應設計為多少公分？

17. 設$\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$的整數部分為 a，小數部分為 b

(1) 試求 a , b 的值。　　(2) 請計算 $a^2+2ab+3b^2$ 的值。

18. 設 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(1) 試求 a^2-a-1的值。

(2) 利用(1)的結果，將 a^3, a^4 化成 $ma+n$ （m, n 為整數）的形式。

19. 設 x=$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ，試求下列各小題的值：

(1)$x+\dfrac{1}{x}$　(2)$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(3)$x^3+\dfrac{1}{x^3}$。

20. 設 $0<x<1$ ，試求 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}=$ ？

進階題

21. 設 n 為任意正整數，試證明：

(1) $n<\sqrt{n(n+2)}<n+1$　　(2) $\sqrt{n(n+2)}$ 為無理數。

22. 已知 $\sqrt{3}$ 為無理數，試證明 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 亦為無理數。

23. 實數 a 之小數部分為 b，若 $a^2+b^2=38$ ，求 $a+b=$ ？

24. 設 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ，試求下列各小題的值：

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2　(4) x^3+y^3

ϕ

答案

1. 整數 (d) 有理數 (a)(d)(g) 無理數 (b)(c)(e)(f) 實數 全 。

2. (C)(D)(E)(F)

   (B)反例：$a=3+\sqrt{2}$ 、$b=3-\sqrt{2}$

   (C)假設 $a+b\sqrt{3}=0$ ，因為 a,b 為有理數，所以 $a=b=0$(與 $ab\neq 0$ 矛盾)

   (D) $a=3+\sqrt{2}$ 、$b=3-\sqrt{2}$

   (E)$a=0$ 顯然成立，$a\neq 0$，$a=\dfrac{(a^3)^2}{a^5}$為有理數

   (F)假設 $a-b$ 為有理數，因為 $a+b$ 為有理數，所以 a,b 均為有理數，ab 為有理數 (與 ab 不為有理數矛盾)

3. (1)(a)$\dfrac{4}{9}=0.\overline{4}$ (b)$\dfrac{2}{11}=0.\overline{18}$

   (2) (a) $0.\overline{2}=\dfrac{2}{9}$ (b) $2.\overline{13}=\dfrac{211}{99}$ (c) $3.2\overline{4}=\dfrac{146}{45}$

4. -1

5. $a=3$、$b=-2$

6. (1)(4)
   [解法]：
   $\because$ $(3.5)^2=12.25$，$(3.6)^2=12.96$，$\therefore$ (1)正確，(2)不正確
   $\because$ $(\sqrt{13})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2$，$\therefore$ $\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$，(3)不正確
   $\because (\sqrt{13}+\sqrt{3})^2>(\sqrt{16})^2$，$\therefore$ $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$，(4)正確

   $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{10}$ ，故檢查$\sqrt{13}+\sqrt{3}<6$，所以$\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$ 不正確。故選(1)(4)。

7. (1) $\sqrt{13}-\sqrt{10}<\sqrt{10}-\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{n+p}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-p}$

8. (1) $27x^3-125$ (2) $x^2+4y^2-4xy+6x-12y+9$ (3) $27x^3-54x^2+36x-8$

9. (1)$(2x+5)(4x^2-10x+25)$ (2) $(x^4+4)(x^2-2)(x^2+2)$ (3)$(x+1)(x^2+1)$ (4)$(x+1)(2ax-3)$

10. (1) $\dfrac{2ab}{a+b}$ (2) $\dfrac{a}{b}$ (3) $\dfrac{1}{a+b}$

11. (1)$\sqrt{2}-1$ (2)$12\sqrt{3}$ (3)$4-\sqrt{3}$

12. (1)$2+\sqrt{3}$ (2)$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (3)$\sqrt{6}+\sqrt{3}$ (4) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

[提示：$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}$]

13. (1)ab 的最大值，$a=\dfrac{3}{2}$，$b=1$。

(2)$a+2b$ 的最小值$=12$ ，$a=6$、$b=3$。

14. (1)依題意

$2x+y+(y-2)=66 \Rightarrow 2x+2y-2=66$

(2)$A=xy$，$\because$ $2x+2y-2=66$，$\therefore$ $x+y=34$

$34=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leq 289$，

$xy=289$(平方公尺)最大值 $\Leftrightarrow x=y=17$。

15. 64 平方公尺

16. 長寬分別為 7 公分

17. (1) $a=1$，$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (2)$\dfrac{13+\sqrt{5}}{8}$

18. (1)0 (2)$a^3=2a+1, a^4=3a+2$

19. (1)$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}+\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}=10$。

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=10^2-2=98$。

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-1+\dfrac{1}{x^2})=10\times(98-1)=970$。

20. $\dfrac{2}{x}$ [提示：原式$=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}}=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|+\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$]

21. (1) 略

(2) 設$\sqrt{n(n+2)}$為有理數，則$\sqrt{n(n+2)}=\dfrac{q}{p}$，其中$p,q\in N$, $(p,q)=1$

$\Rightarrow$ $p^2n(n+2)=q^2$ $\Rightarrow$ $p^2|q^2$ $\Rightarrow$ $p|q$，因此$\sqrt{n(n+2)}$為整數且$p=1$，即

$n(n+2)=q^2$ $\Rightarrow$ $q=\sqrt{n(n+2)}$。由(1)知$n<\sqrt{n(n+2)}<(n+1)$，即$n<q<(n+1)$，但 n 與$n+1$間已無整數存在，故q不為正整數，發生矛盾！

22. 假設$a=\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$為有理數，$a-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}$ $\Rightarrow$ $a^3-3\sqrt{3}a^2+9a-3\sqrt{3}=2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}=\dfrac{a^3+9a-2}{3a^2+3}$，此為有理數與$\sqrt{3}$為無理數矛盾！

23. $2\sqrt{10}$ [提示：$0\le b<1$ $\Rightarrow$ $0\le b^2<1$ $\Rightarrow$ $a^2+0\le a^2+b^2<a^2+1$ $\Rightarrow$ $a^2\le 38<a^2+1$

$\therefore$ a的整數部分為 6，再令$a=6+b$，代入$a^2+b^2=38$求 b]

24. (1) 10 (2) 1 (3) 98 (4) 970 [提示：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$]