# 定积分的应用

## 定积分的元素法

能用定积分解决的问题特征

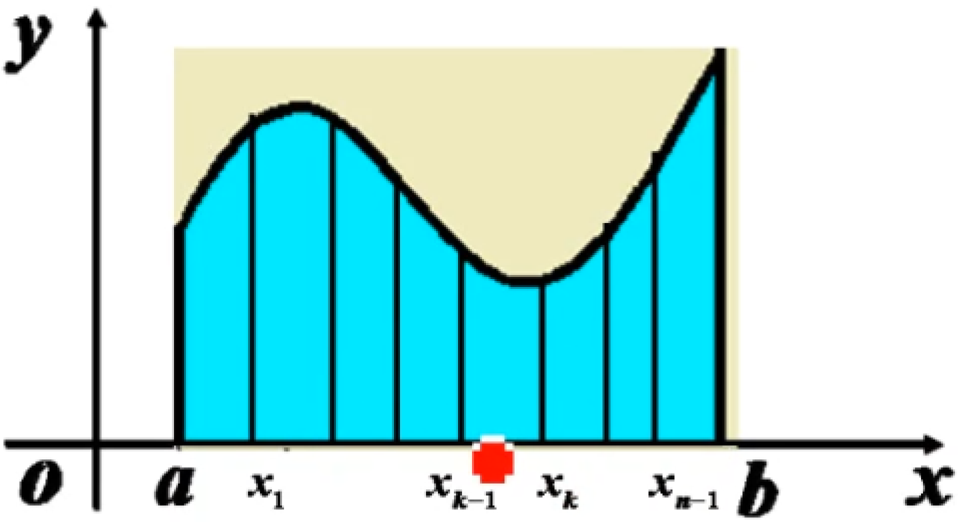
1）非均匀连续分布在$[a,b]$上的量

2）所求量对区间有可加性

例1 曲边梯形的面积问题

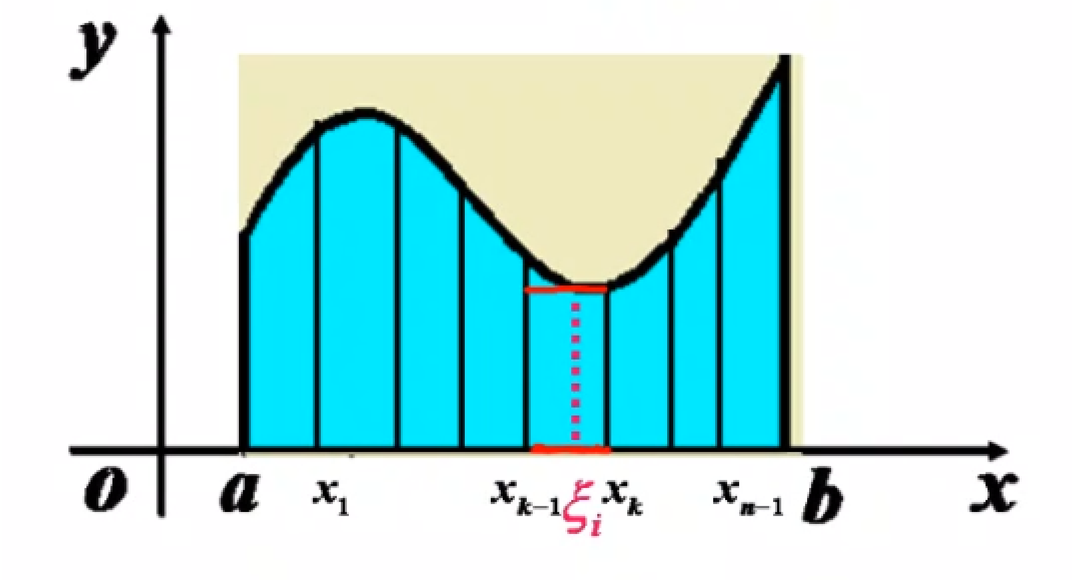
1）分 $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

将曲边梯形分成若干个

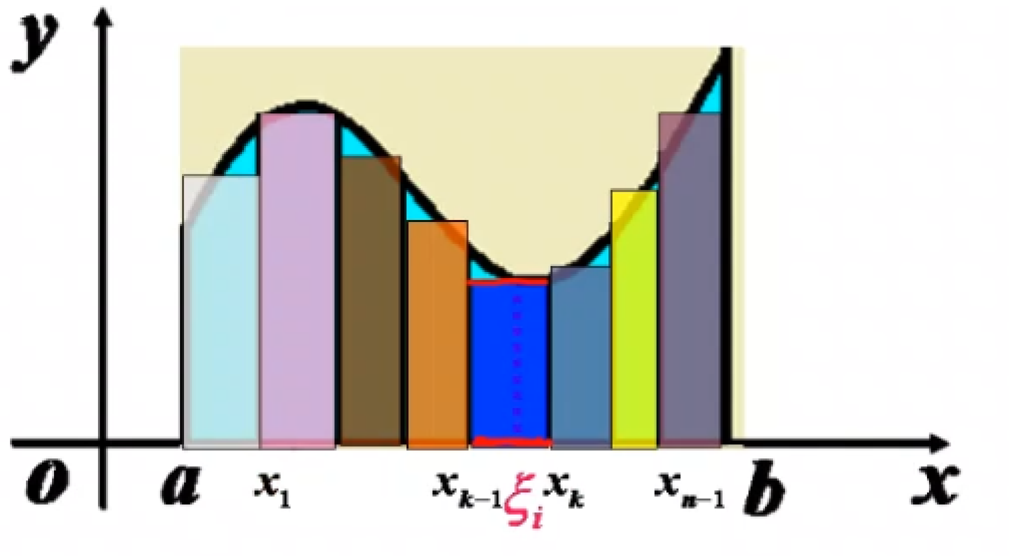



2）匀 （用这一点的高度代替其他点的高度）

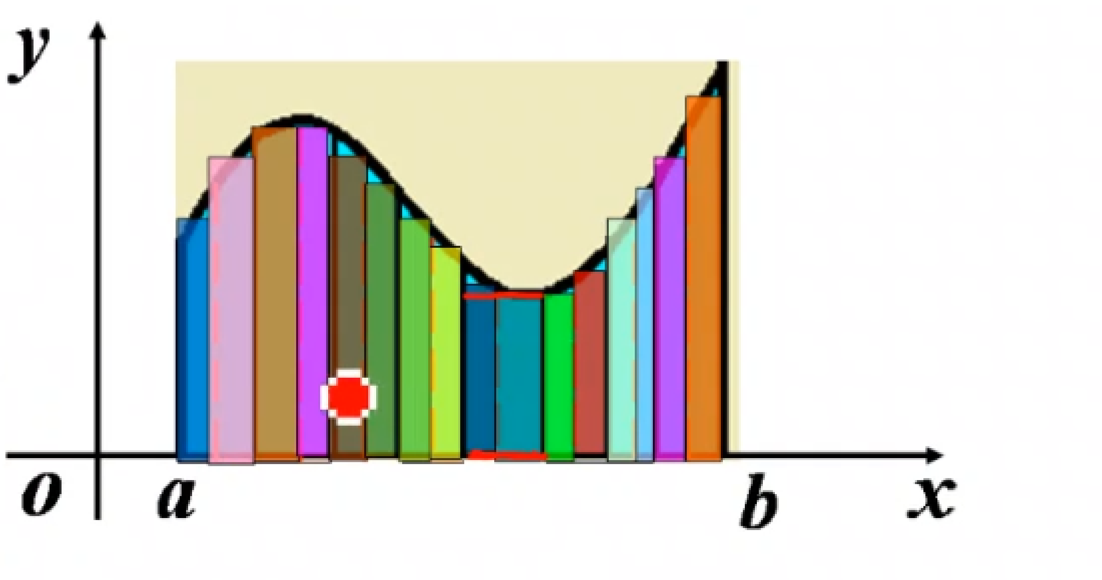
$\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k\ \left(\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\right)\ \xi_i \in [x_{k-1}, x_k]$




3）合 $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

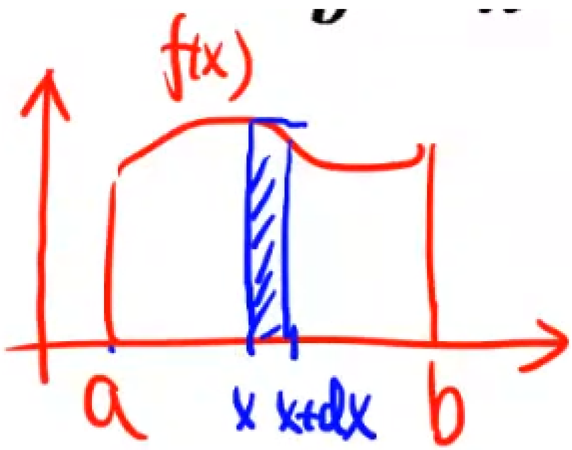



4）精 $\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 最大子区间长度趋向0




$A = \int_a^b f(x)dx$

确定区间$[a, b]$，确定被积式（匀是确定被积式的关键）




$dA=f(x)dx$叫作微元，面积就是$A=\int_a^b f(x)dx$

1）（找范围）找微元 2）微元积分

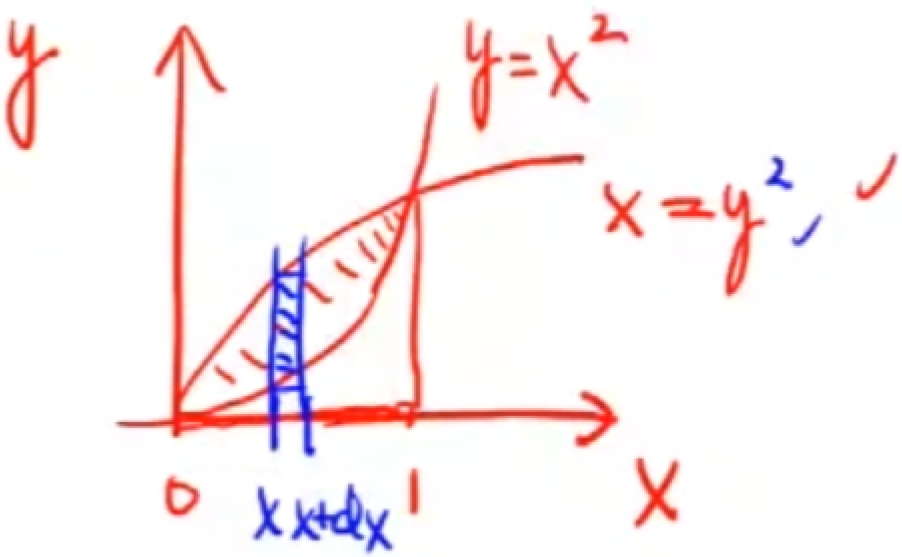
叫作定积分的元素法。

# 定积分在几何上的应用

## 一、平面图形的面积

例1 求曲线$y^2=x$与$y=x^2$所围面积。

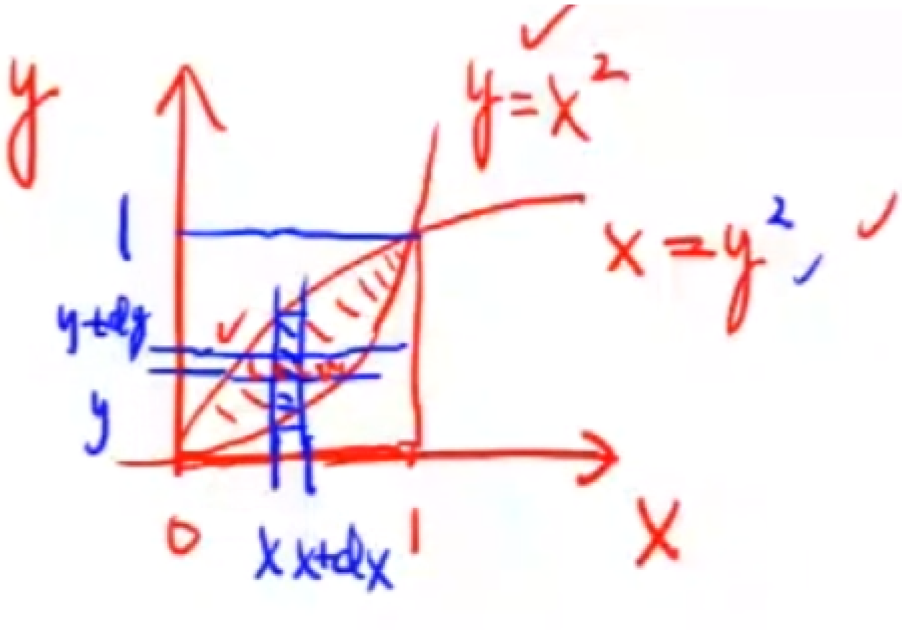
解：




1）范围$x\in[0,1]$

2）微元$ds=[\sqrt{x}-x^2]dx$

3）积分$s=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$



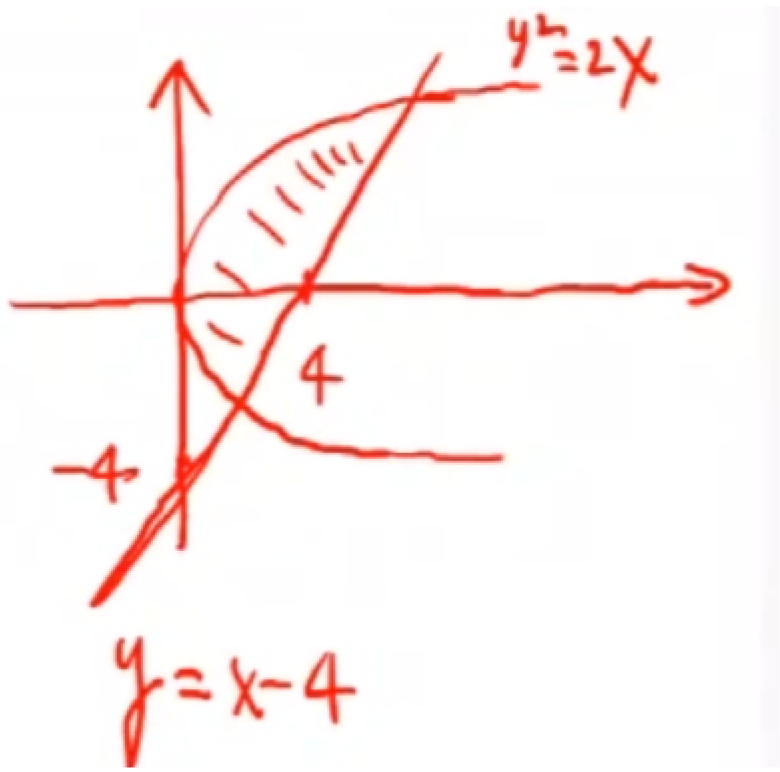

由y来做

1）范围$y \in [0,1]$

2）微元$ds=[\sqrt{y}-y^2]dy$

3）积分$s=\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)dy=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

例2 求曲线$y^2=2x$与$y=x-4$围成面积



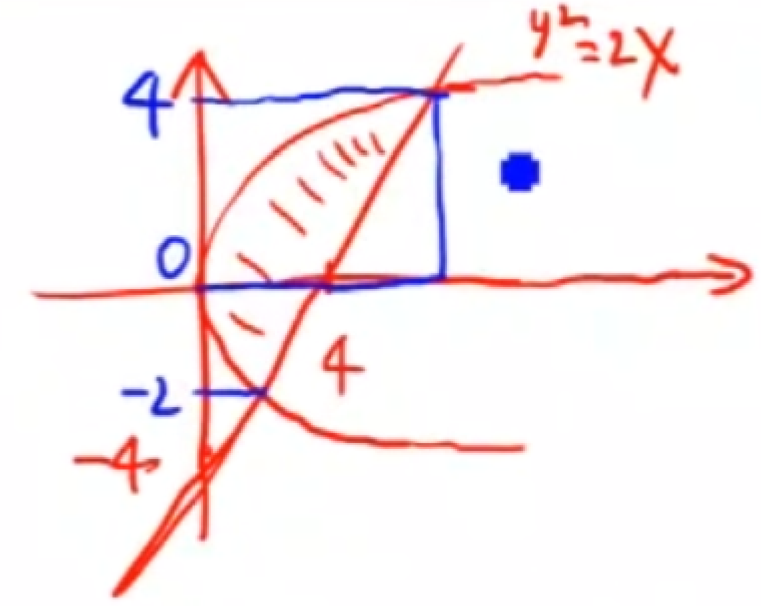

解:

1）$x \in [0,8]$

$y^2=2(y+4)$

$y^2-2y-8=0$

$y=-2$或$y=4$




2） $x \in [0,2]$  $ds = [2\sqrt{2x}]dx$

$x \in [2,8]$  $ds = [\sqrt{2x} - (x-4)]dx$

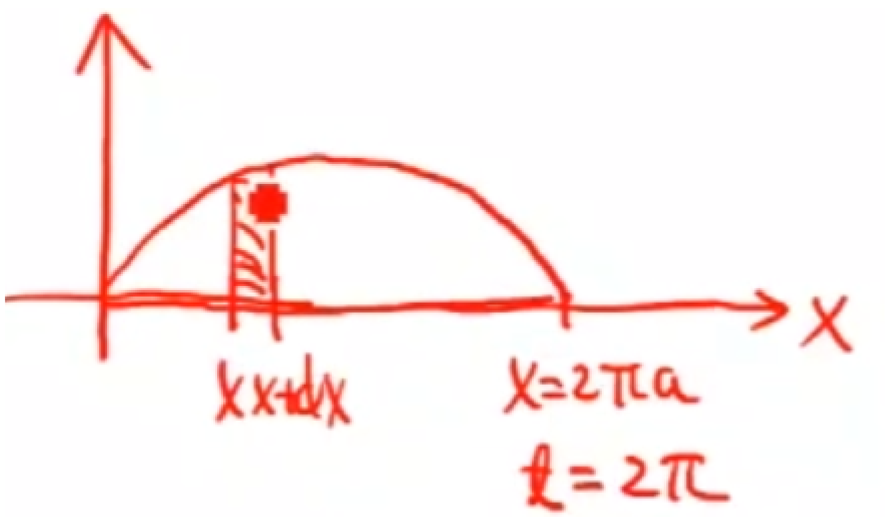
3） $s = \int_0^2 2\sqrt{2x}dx + \int_2^8 (\sqrt{2x} - (x-4))dx$

解2：（按y积分）

1） $y \in [-2,4]$  $ds = [(y+4) - \frac{y^2}{2}]dy$

2） $s = \int_{-2}^{4} [(y+4) - \frac{y^2}{2}]dy$

例3 求摆线一拱$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$与$x$轴所围成面积

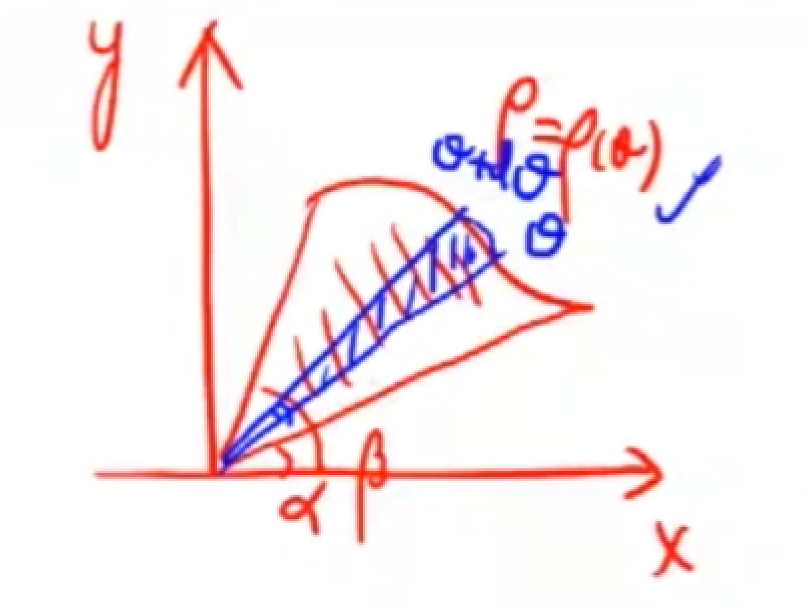



1） $x \in [0, 2\pi a]$

2） $ds = y(x)dx$

3)
$$
\begin{aligned}
s=\int_0^{2\pi a} y(x)dx &= \int_0^{2\pi} a(1-cost)a(1-cost)dt \\
=a^2\int_0^{2\pi}(2sin^2\frac{t}{2})^2dt &= 4a^2\int_0^{2\pi} sin^4\frac{t}{2}dt \\
&= 8a^2\int_0^{\pi} sin^4udu \\
=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4udu &= 16a^2\times\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

例4 求心形线$\rho=a(1+cos\theta)(a>0)$所围面积。



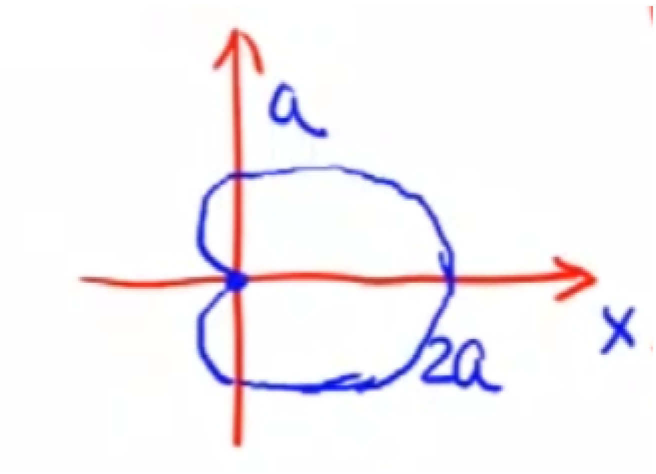

针对一般的来说。

$\rho=\rho(\theta) \ \ a\leq \theta \leq \beta $

$[\theta,\theta+d\theta]$

$ds=\dfrac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$ 扇形求面积

$$
s=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta
$$




1）根据对称性，只需要算上面一半就行。

$$s = 2 \times \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi} a^2(1+cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (2cos^2\frac{\theta}{2})^2 d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi} cos^4\frac{\theta}{2} d\theta \text{ 令} \frac{\theta}{2} = t$$

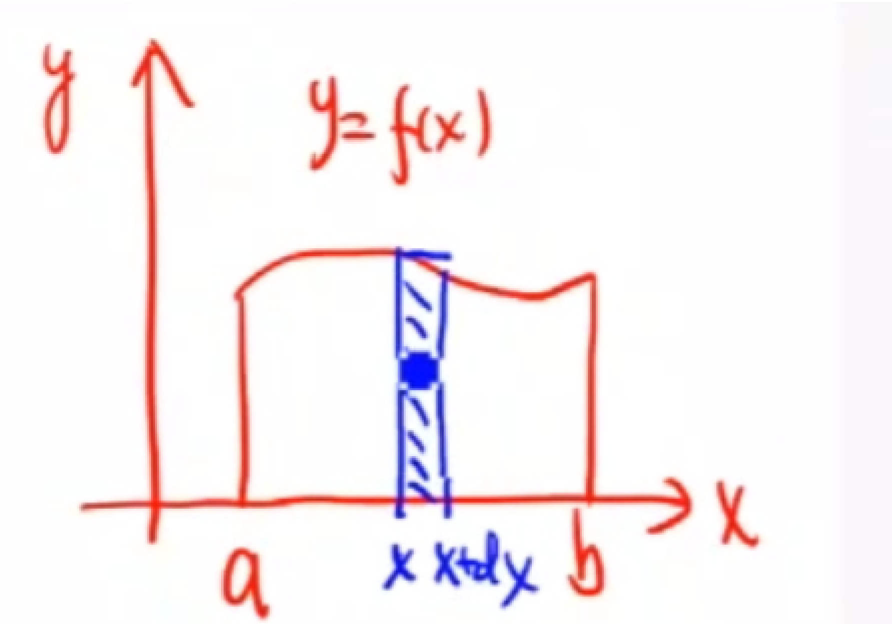
$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 t dt$$

$$= 8a^2 \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2$$

## 二、体积

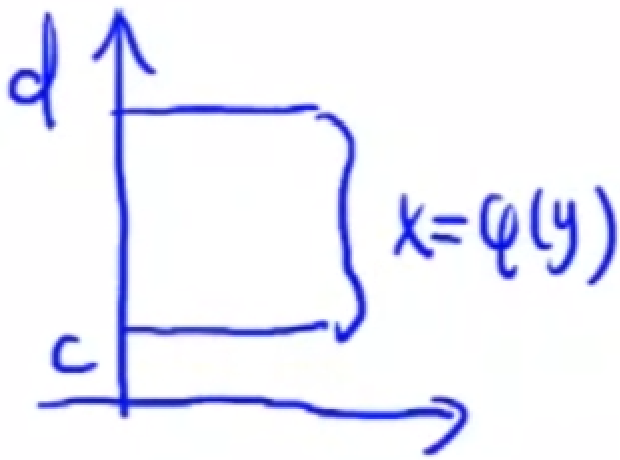
1、旋转体的体积



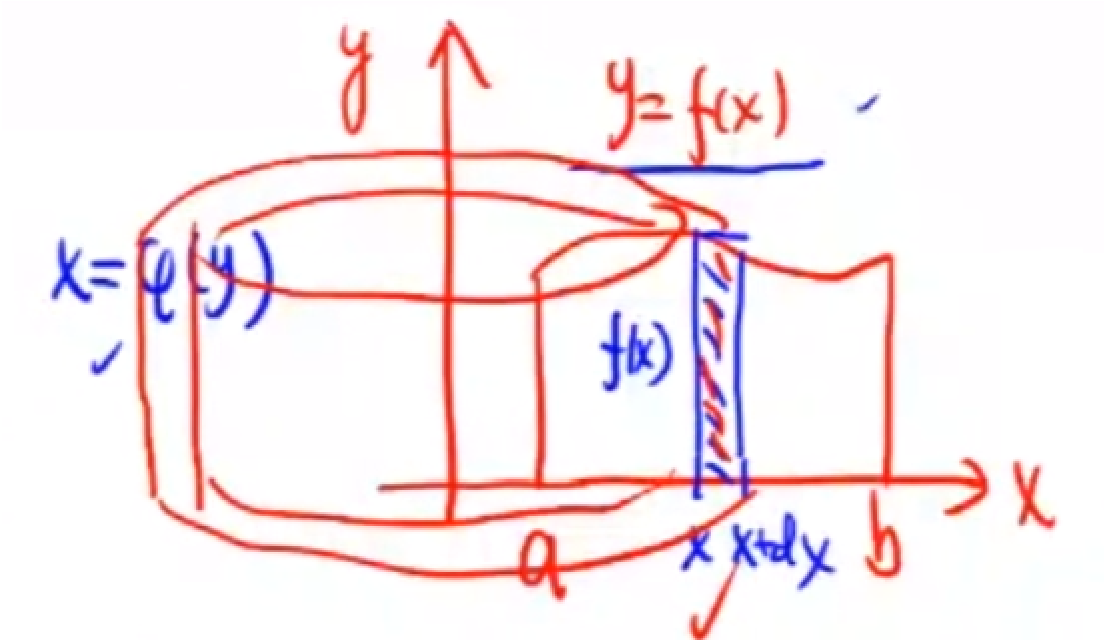

1）$[a,b]$

2）$dv_x = \pi f^2(x)dx$　底面圆半径$f(x)$，高$dx$

3）$Vx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$




3）$V_y = \pi \int_c^d \phi^2(y)dy$




$$dV_y = 2\pi x f(x) dx$$

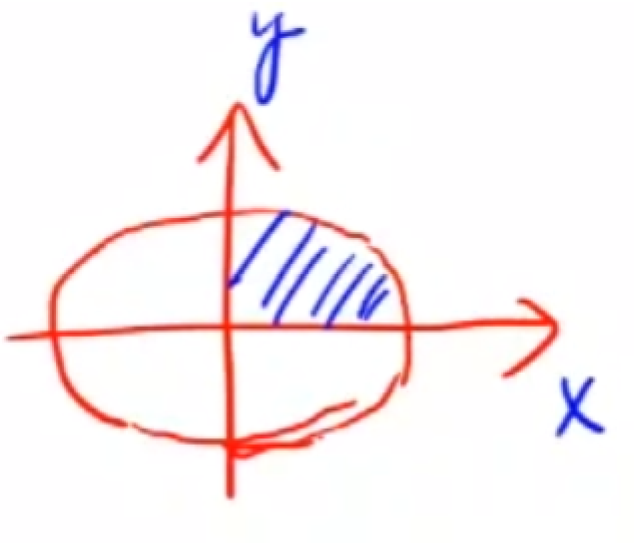
$$= V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

总结:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

例5 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积。



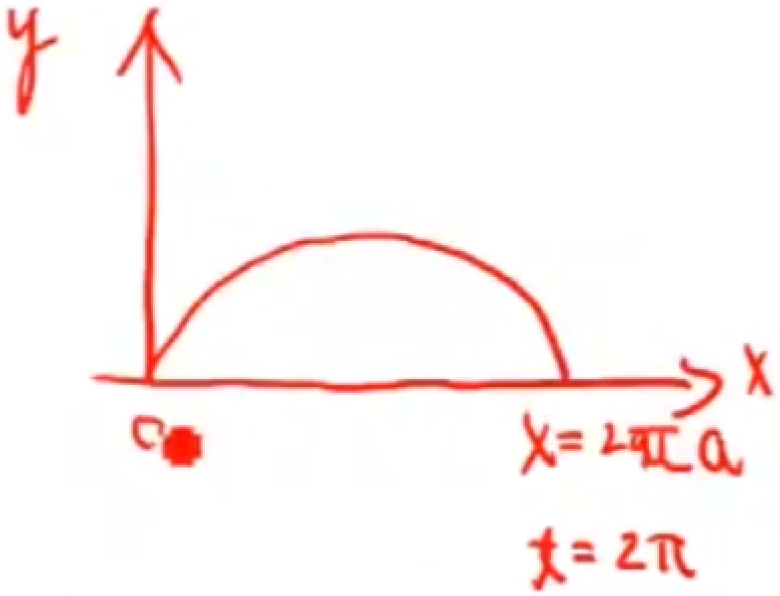

解：上面和下面是重复的，所以只需要计算上面的就行了，左右对称，所以只需要计算右边部分再乘2即可。

$y^2 = b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$

$$V_x = 2\pi \int_0^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx$$
$$= 2\pi b^2(a-\frac{a}{3})$$
$$= \frac{4\pi ab^2}{3}$$

例6 计算由摆线$\begin{cases} x=a(t-sint) \\ y=a(1-cost) \end{cases}(0 \le t \le 2\pi)$与$x$图形分别绕x轴，y轴旋转而成的旋转体的体积。

解：

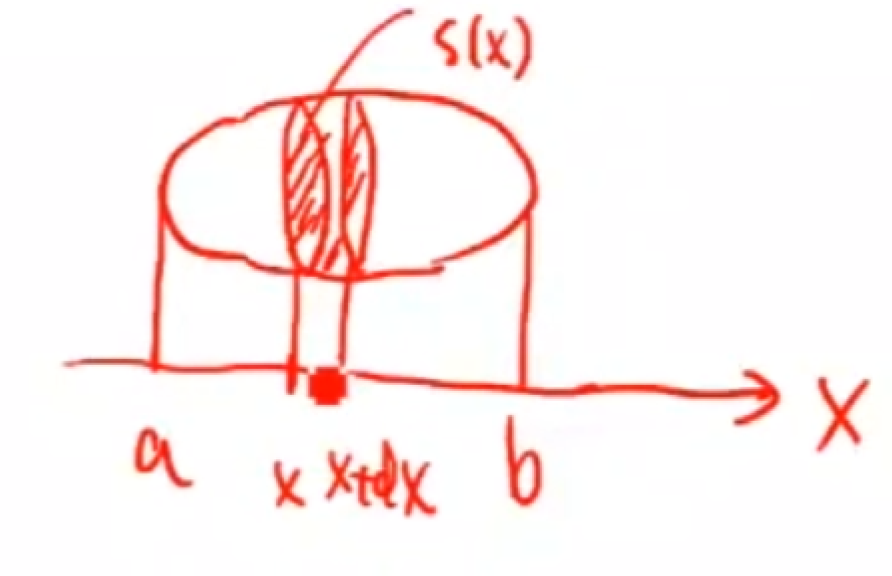



$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$
$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-cost)^2 a(1-cost)dt$$
$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (2sin^2\frac{t}{2})^3$$
$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} sin^6\frac{t}{2}dt令\frac{t}{2}=u$$
$$= 16a^3 \int_0^{\pi} sin^6 udu$$
$$= 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 udu$$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi} xy(x)dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-sint)a^2(1-cost)^2 dt$$
$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-sint)4sin^4\frac{t}{2}dt拆开$$
$$= 8\pi a^3[\int_0^{2\pi} tsin^4\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi} sintsin^4\frac{t}{2}dt]$$

运用到$\int_0^\pi xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sinx)dx$

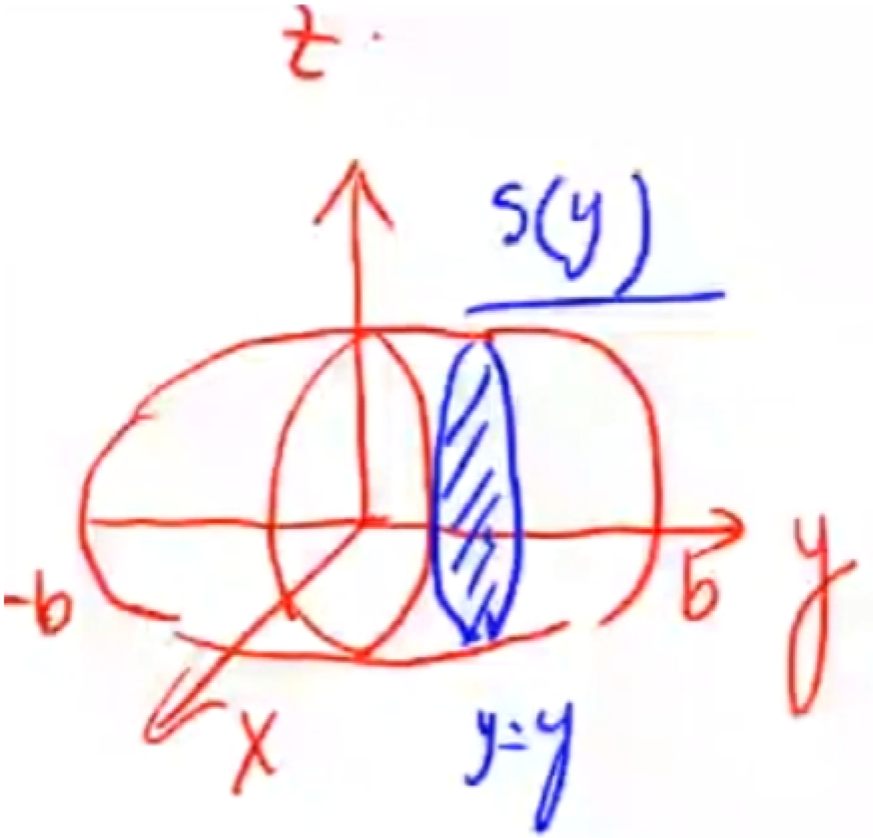
2.平行截面积为已知的立体的体积




$dv = s(x)dx$底面×高度

$V = \int_a^b S(x)dx$

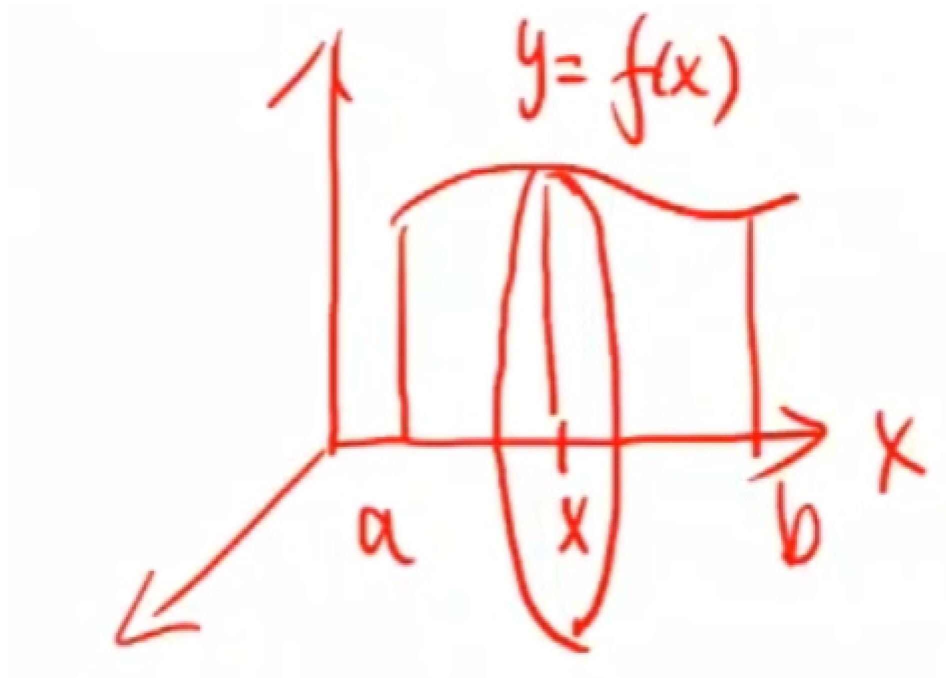
例7 计算由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成椭球体的体积。




解:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$
$$s(y)=\pi ac(1-\frac{y^2}{b^2})$$
$$V=2\int_b^0 ac(1-\frac{y^2}{b^2})dy$$

在体积刚开始中，下面图形

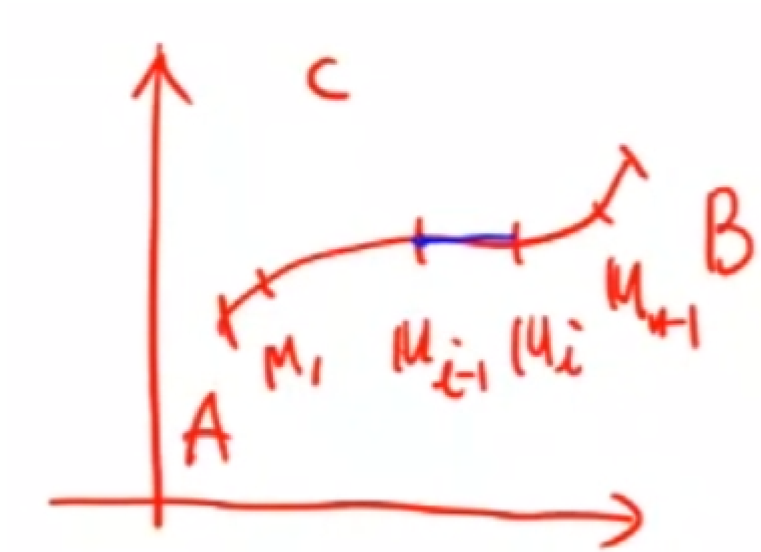



也可以用面积在做 $S(x)=\pi f^2(x)$

$V=\int_a^b S(x)dx$

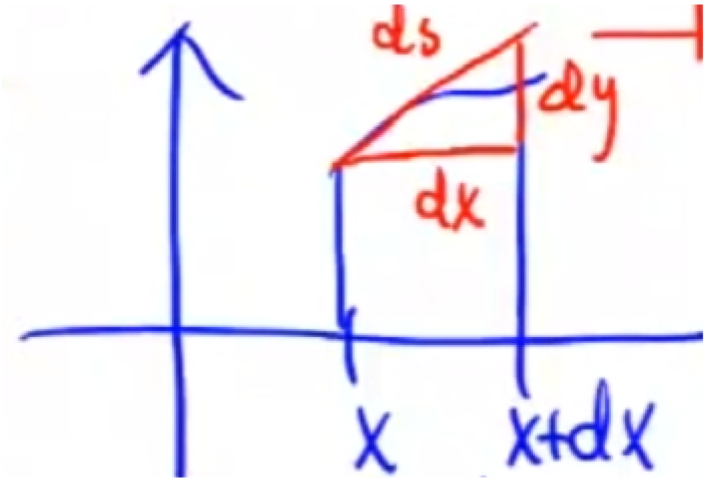
## 三、平面曲线的弧长

1.弧长的定义




$s_n=\sum_{i=1}^{n}||\overline{M_{i-1}M_i}||$

$s=lim_{\lambda\to 0}s_n=lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}||\overline{M_{i-1}M_i}||$




$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx$此处后面提取了一个$dx$

2.弧长的计算

1)$C:y=y(x),a\leq x\leq b.\ s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$

2)$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\ \alpha\leq t\leq\beta.\ s=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt$

3)$C:\rho=\rho(\theta),\alpha\leq\theta\leq\beta.\ s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$

例8 计算旋轮线一拱$x=a(t-sint),y=a(1-cost)\ \ (0\leq t\leq 2\pi)$的弧长

解:

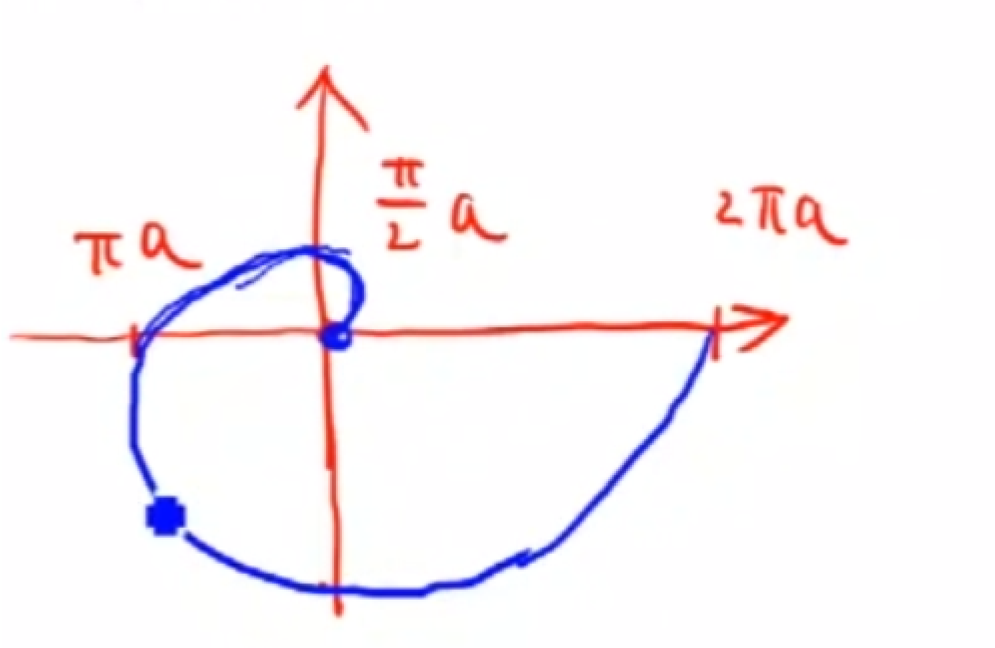
$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-cost)^2+a^2sin^2tdt}\\&=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-cost)}dt\\&=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2sin^2\frac{t}{2}}dt\\&=2a\int_0^{2\pi}sin\frac{t}{2}dt\end{aligned}$$

例9 求曲线$y=x^{\frac{3}{2}}(0\leq x\leq 1)$的弧长

解:

$$s=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy$$

例10 求阿基米德螺线$\rho=\alpha\theta(\alpha>0)$相应于$0\leq\theta\leq 2\pi$一段的弧长




解:

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$$

分部积分

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta$$
$$=\theta\sqrt{1+\theta^2}|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\theta^2+1-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$
$$=\theta\sqrt{1+\theta^2}|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta+ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})|_0^{2\pi}$$

移项，左边是2倍。

## 内容小结

1.平面图形的面积

$$\text{边界方程}\begin{cases}\text{直角坐标方程}\\\text{参数方程}\\\text{极坐标方程}A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\varphi^2(\theta)d\theta\end{cases}$$

2.体积

1）旋转体的体积

$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx\quad V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

2）平行截面积为已知的立体的体积

$V=\int_a^b S(x)dx$

3.平面曲线的弧长

弧微分：$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

**注意：求弧长时积分上下限必须上大下小**

1)$C: y=y(x), a\le x\le b. s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$

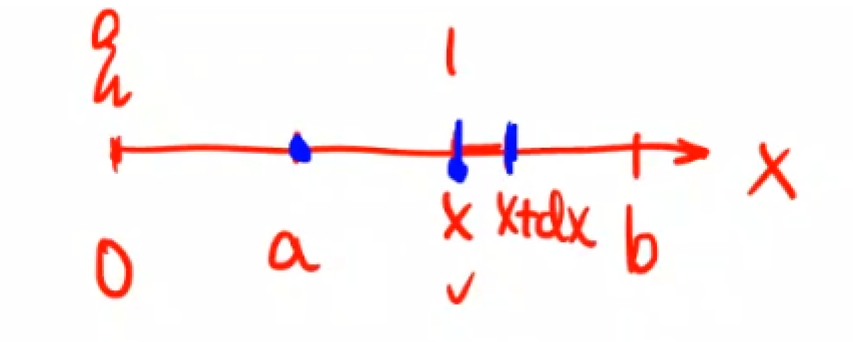
2)$C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \alpha\le t\le\beta. s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}dt$

3)$C: \rho=\rho(\theta), \alpha\le\theta\le\beta. s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$

# 定积分在物理上的应用

## 一、变力沿直线所做的功

例 在x轴的坐标原点处有一电量为$q$的正电荷，求在该电场力作用下将一单位正电荷$x=a$处沿$x$轴移动到$x=b$处所作的功$(0<a<b)$




$W=Fs$，做功大小

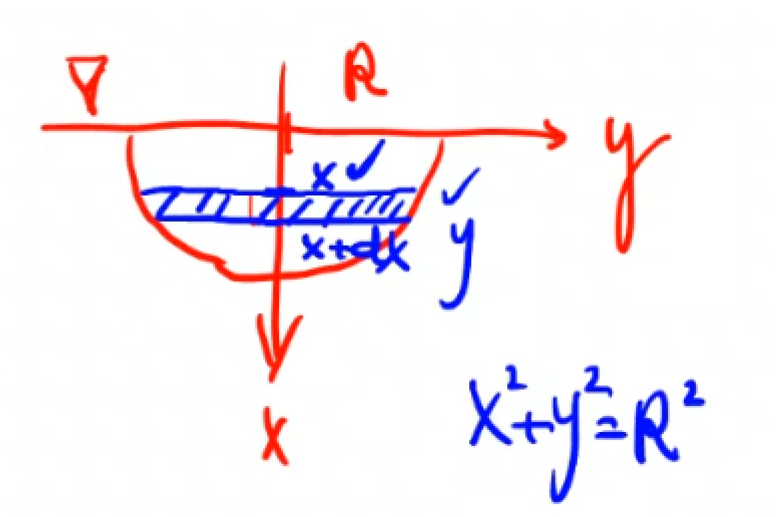
①找微元 $dW=\frac{kq}{x^2}dx$，前面是距离，dx是做功长度

②对上面的微元进行积分$W=\int_a^b\frac{kq}{x^2}dx=-\frac{kq}{x}|_a^b=kq(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

## 二、水压力

例 将半径为R的薄圆片垂直插入水中一半，问圆片一侧所受到压力。

解：




$P=\rho A$压力是密度乘上面积

在$x$的压强与密度、重力加速器，深度x有关，所以在X的压强为$P=\rho gx$

$dP=\rho gx2\sqrt{R^2-X^2}dx$

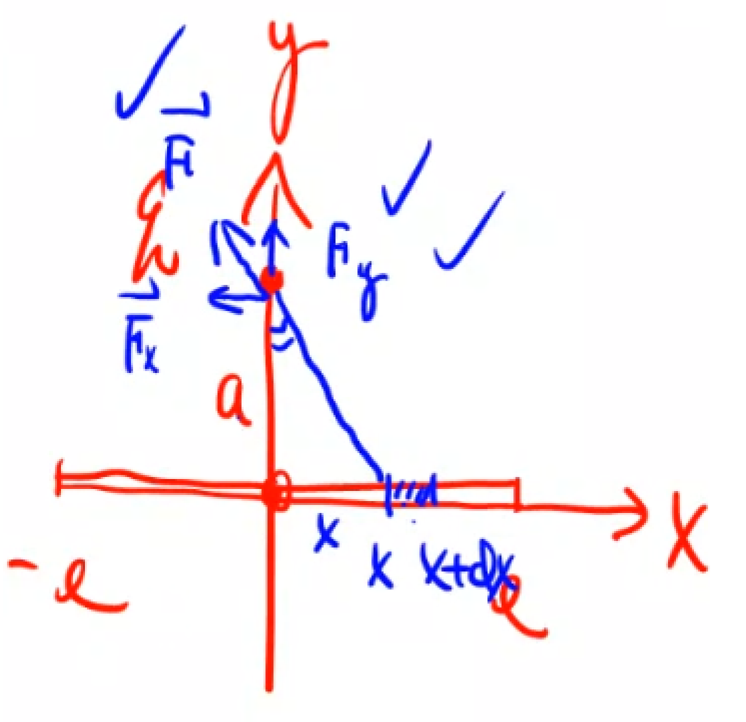
$P = 2\rho g \int_0^R x\sqrt{R^2 - X^2}dx = \frac{2\rho g}{3}R^3$

## 三、引力(力是矢量，需要分解)

例 有一长为$2l$的均匀带电直导线，电荷线密度为$\delta$，在其中垂线上且与导线距离为$a$处放置一个电量为$q$的点电荷，求它们之间的作用力。

$F = \frac{kqQ}{r^2}$ k为引力系数

解：




按照图示，$F_x$和相反方向的已经抵消，所以只需要求$F_y$即可。所以需要乘上$cos$的值

$dF_y = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{kq\delta dx}{a^2+x^2} = \frac{akq\delta}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$F_y = \int_{-l}^{l}\frac{k\delta qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

①找到元素

②微元积分

## 内容小结

1.用定积分求一个分布在某区间上的整体量Q的步骤：

（1）线用元素法求出它的微分表达式dQ

一般元素的几何形状有：条、段、环、带、扇、片、壳等。

（2）然后用定积分来表示整体量Q，并计算之

2.定积分的物理应用

变力作功，侧压力，引力