微分中值定理

一、罗尔定理

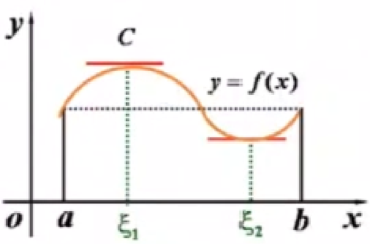
定义（极值） 若$\exists\delta>0$，使得
$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有$f(x)\geq f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$取极小值.
$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有$f(x)\leq f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$取极大值.

费马定理 若$f(x)$在x_0处取得极值，且$f(x)$在x_0处可导。则$f'(x_0)=0.$
证明：（这里取了是极大值，所以分式上面是小于0的）

$$\Delta x>0,\lim_{\Delta x_0\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)=f'(x_0)\leq 0$$

$$\Delta x<0,\lim_{\Delta x_0\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)=f'(x_0)\geq 0$$

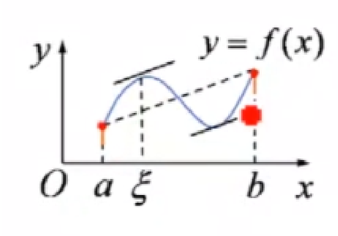
罗尔定理 若1）f在$[a,b]$上连续;
2）f在(a,b)内可导;
3）$f(a)=f(b)$,
则$\exists\xi\in(a,b)$, 使$f'(\xi)=0$



[证]由于$f(x)$在$[a,b]$连续，则存在最小值m，最大值M
1）若$m=M$，=》$f(x)=M$
2）若$m<M$，m,M至少有一个在(a,b)取到，不妨设$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=M$=>$f'(\xi)=0$

二、拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理 若
1）f在$[a,b]$上连续;
2）f在(a,b)内可导,
则$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$



注：1）$a > b, a < b$结论都成立
2)$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a) \quad (0 < \theta < 1)$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'[x_0 + \theta \Delta x]\Delta x$
$f'[x_0 + \theta \Delta x]$有限增量公式
证2：

$$\begin{gathered} f'(\xi) = f'[a + (\xi + a)] \\ = f'[a + \frac{\xi - a}{b - a}(b - a)] \\ 0 < \theta < 1 \end{gathered}$$

推论 设$f(x)$在区间I上连续，在I内可导，则在I上$f(x) \equiv C$是$f'(x) = 0$的充分必要。

例1 试证$|sinx - siny| \le |x - y|$
[证]

$$\begin{gathered} sinx - siny = cos\xi(x - y) \\ |sinx - siny| = |cos\xi||x - y| \le |x - y| \end{gathered}$$

例2 证明：当$x > 0$时，$\frac{x}{1+x} < ln(1 + x) < x.$
[证]

$$\begin{gathered} \text{将}ln(1 + x)\text{看成}ln(1 + x) - ln1,\text{所以令}f(x) = lnx \\ 1 < \xi < 1 + x \\ \frac{x}{1 + x} < ln(1 + x) - ln1 = \frac{x}{\xi} < x \end{gathered}$$

例3 证明：当$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时，$arctanx + arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$
[证]

$$\begin{gathered} f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1}{x})^2} = 0 \\ => f(x) \equiv C, f(1) = arctan1 + arctan1 = \frac{\pi}{2} \end{gathered}$$

重要公式:

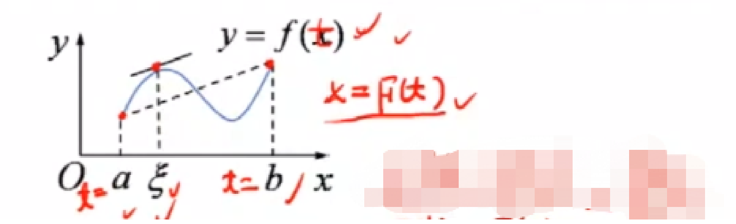
$$\begin{gathered} ①sinx < x < tanx, x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ ②\frac{1}{1 + x} < ln(1 + x) < x, x > 0 \end{gathered}$$

拉格朗日证明：构造辅助函数，用罗尔定理

$$\begin{gathered} f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\text{分析，令左边为}F'(\xi) = 0 \\ \text{令}F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x \\ \text{证明}F(b) = F(a) \\ \text{根据罗尔 } => F'(\xi) = 0 \end{gathered}$$

三、柯西中值定理

柯西中值定理 若
1）f, F在$[a,b]$上连续;
2）f, F在(a,b)内可导，且$\forall x\in(a,b), F'(x)\neq 0$



$$\text{则}\exists\xi\in(a,b)$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

柯西证明

$$[f(b)-f(a)]F'(\xi)-[F(b)-F(a)]f'(\xi)=0$$
$$\varphi'(\xi)=0$$
$$\varphi(x)=[f(b)-f(a)]F(x)-[F(b)-F(a)]f(x)$$
$$①\text{连续}$$
$$②\text{可导}$$
$$③\varphi(a)=\varphi(b)$$
$$=>\exists\xi\in(a,b),\varphi'(\xi)=0$$

内容小结

1.意义
  建立局部和整体的关系
2.关系
罗尔定理(是拉格朗日定理的特例$f(a)=f(b)$）拉格朗日定理(是柯西定理的特例$F(x)=x$）柯西中值定理
从左到右是推广，从右到左是特例。
3.应用
（1）证明恒等式
（2）证明不等式
（3）证明有关中值问题的结论

洛必达法则

运用柯西定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-sinx)-(0-sin0)}{x^3-0^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\xi}{3\xi^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}$$

洛必达法则
若1）$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0;$
2）$f(x)$和$g(x)$在$U(x_0,\delta)$内可导，且$g'(x)\neq 0;$
3）$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或$\infty$）；

[证]
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'\xi}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[例] 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{tanx-x}{x-sinx}$
[解]

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0}\frac{sec^2x-1}{1-cosx}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{tan^2x}{\frac{1}{2}x^2}=2
\end{aligned}
$$

例2 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2cosx-2}{(e^x-1)^2 ln(1+x^2)}$

[解]

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2cosx-2}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x-2sinx}{4x^3}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}\\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

例3 求$\lim_{x\to +\infty}\frac{log_a x}{x^a}$与$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^a}{a^x}.(a>1,\alpha,\beta>0)$

[解]

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty}\frac{log_a x}{x^a}\\
&= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{xlna}}{ax^{a-1}}\\
&= \frac{1}{alna}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^a}=0\\
&\lim_{x\to +\infty}\frac{x^a}{a^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^{a-1}}{a^x lna}\\
&= \lim_{x\to +\infty}\frac{a(a-1)x^{a-2}}{a^x(lna)^2}\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

从上面得到结论，这里下面要判断$a\le 1$或$a\le 2$等等

$$
log_a x << x^a << a^x
$$

例4 求$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{ln(1+x)-\frac{1}{x}}]$

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0}\frac{x-ln(1+x)}{xln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-ln(1+x)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例5 求$\lim_{x\to 0^+}(x)^{sinx}$

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to 0^+}e^{sinxlnx}\\
&\lim_{x\to 0^+}sinxlnx\\
&= \lim_{x\to 0^+}xlnx\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

例6 求$\lim_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}arctanx)^x$

解

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{x\to+\infty} e^{ln\frac{2}{\pi}arctanx} \\
\lim_{x\to+\infty} xln\frac{2}{\pi}arctanx \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\frac{2}{\pi}arctanx}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}arctanx}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} \\
&= -\frac{2}{\pi} \\
原式 &= e^{-\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

内容小结

1）适用类型： $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\infty;\infty-\infty;1^\infty;\infty^0;0^0,$

$$
\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\begin{cases}0\infty\begin{cases}1^\infty\\ \infty^0\\ 0^0\end{cases}\\ \infty-\infty\end{cases}
$$

2）注意两点：

（1）化简。

（2）条件3） $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或$\infty$）；

泰勒公式

若$f(x)$在x_0处可微，则$\Delta y\approx dy$

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

问题：若$f(x)$在x_0处n阶可导，是否存在n次多项式

$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+......+a_n(x-x_0)^n$

使$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$

结论： $a_0=f(x_0),a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},k=1,2,......,n$

$P_n^{(k)}(x_0)=f^k(x_0)$

$$
\begin{gathered}
P_n''(x_0)=a_2 2! \\
a_2=\frac{P_n''(x_0)}{2!} \\
P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k
\end{gathered}
$$

定理1（Taylor） 设$f(x)$在x_0处n阶可微，则

$$
f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)
$$

上式称为带Peano余项的Taylor公式：

$$
P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k
$$

$f(x)$在x_0处的n次$Taylor$多项式

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ $f(x)$的Peano余项

证明：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}[\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{P_n^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x_9)}{x-x_0}]$$

$$=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)]=0$$

缺点：1）只给出余项的定性描述，不能进行定量分析；

2）使用范围小
若$f(x)$在区间I中可微，$x_0\in I, x\in I,$
$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \qquad f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

定理2($Taylor$定理)设$f(x)$在区间I中$n+1$阶可导，$x_0\in I$，则$\forall x\in I,\exists\xi\in I$（$\xi$在$x_0$与$x$之间），使

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

上式称为带Lagrange余项的Taylor公式；

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为$f(x)$的Lagrange余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \theta\in(0,1)$$

若$|f^{(n+1)}(x)|\le M$，则$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{(n+1)}$
若$x=0$，则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

上式称为$f(x)$的Maclaurin公式
几个初等函数的Maclaurin公式

$$1）e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$2）sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$3）cosx=x-\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^m\frac{cos\theta x}{(m+1)!}x^{2m+2}$$

$$4）ln(1+x)=x-\frac{x}{2}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}$$

$$5）(1+x)^a=1+ax+\cdots\cdots+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad x\in(-1,+\infty)$$

内容小结

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

1）Peano余项 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$
2）Lagrange余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

小结：1.本质：用多项式逼近$f(x)$
用已知点的信息表示未知点
2.Peano: 定性：局部（极限，极值）
3.Lagrange: 定量：整体（最值，不等式）
4.Lagrange定理是Taylor定理的特例。
四大中值定理:前三个建立$f(x)$与一阶导数的关系；Taylor建立$f(x)$与高阶导数之间的关系。

例1 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解： 局部

$$
\begin{aligned}
cosx &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\\
e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}\\
&= -\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

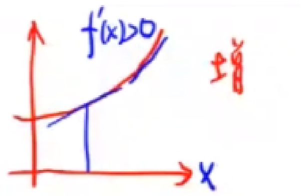
例2 设$f''(x)>0$，当$x\to 0$时，$f(x)$与x是等价无穷小。证明：当$x\neq 0$时，$f(x)>x$。

解： 整体$(-\infty,+\infty)$

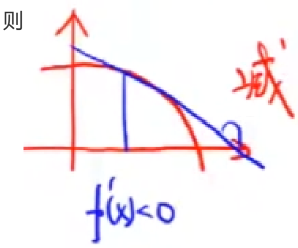
$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\text{得到}f(0)=0,f'(0)=1
$$

$$
f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2>x
$$

函数的单调性与曲线的凹凸性



定理1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则



(1)如果在(a,b)内$f'(x)\geq 0$，且等号只在有限个点上成立，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加。
(2)如果在(a,b)内$f'(x)\leq 0$，且等号只在有限个点上成立，则$f(x)$在$[a,b]$上单调减少。

证明：

$$
\begin{gathered}
f(x_2)>f(x_1)\qquad f(x_2)-f(x_1)>0\\
f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0\\
\text{证明}\geq\text{的话分为两个区间}[a,x_0]\text{和}[x_0,b]\text{，在前面区间单增，在后面区间也是单增。所以整体单调增加。}
\end{gathered}
$$

例1 确定$f(x)=e^x-x-1$的增减区间。

解

$$
\begin{gathered}
f'(x)=e^x-1=0=>x=0\\
(-\infty,0),f'(x)<0=>f(x)\text{单调减}\\
(0,+\infty),f'(x)>0=>f(x)\text{单调增}
\end{gathered}
$$

例2 试证$x>0$时，$x-\frac{x^3}{6}<sinx<x$

解

$$
\begin{gathered}
sinx<x,x-sinx>0\\
\text{证：令}f(x)=x-sinx,f(0)=0\\
f'(x)=1-cosx\geq 0,f(x)\text{在}[0,a]\text{上单调递增}=\text{》}(0,+\infty)\\
=>f(x)>0\\
\text{令}g(x)=sinx-x+\frac{x^3}{6},g(0)=0\\
g'(x)=cosx-1+\frac{x^2}{2}>0\\
g''(x)=x-sinx>0=>g'(x)\text{单调增},g'(0)=0=>g'(x)>0=>g(x)>0
\end{gathered}
$$

曲线的凹凸性与拐点

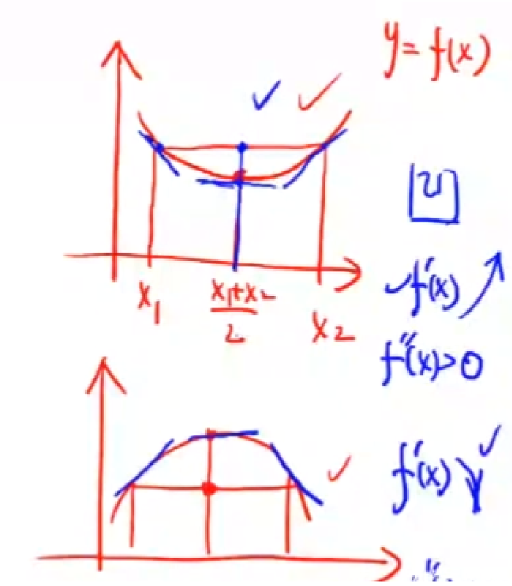
定义 设函数$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1,x_2恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在I上的图形是凹的；如果恒有

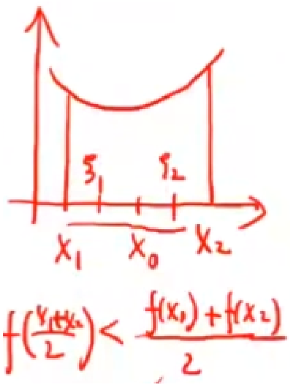
$$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在I上的图形是凸的。



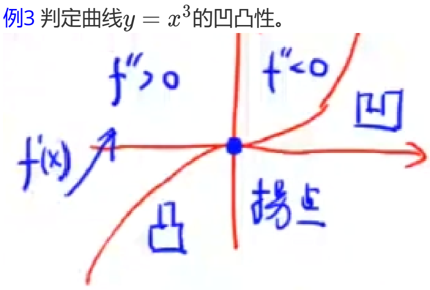
一阶导数的增减，需要看二阶导数的正负。

定理2 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导。
(1)若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；
(2)若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的；



$$\begin{gathered}
\text{证明（1）}\\
\text{不妨设}x_1<x_2\text{，且令}\frac{x_1+x_2}{2}=x_0\\
f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)>0\\
=[f(x_2)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_1)]\\
=f'(\xi_2)(x_2-x_0)-f'(\xi_1)(x_0-x_1)\qquad\text{这里}x_2-x_0\text{和}x_0-x_1\text{都是区间的一半}\\
=\frac{x_2-x_1}{2}[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]>0\qquad\text{前面}>0\text{后面因为二阶导数大于0所以推出大于0}
\end{gathered}$$

例3 判定曲线$y=x^3$的凹凸性。



解

$$\begin{gathered}
y'=3x^2,y''=6x\\
(-\infty,0),y''<0,\text{凸}\\
(0,+\infty),y''>0,\text{凹}
\end{gathered}$$

从这个例来看在$x=0$的左边是凸的$x=0$的右边是凹的，所以$x=0$处是拐点，**$f''(x_0)=0$是拐点的必要条件。**

例4 求下列曲线的凹、凸区间及拐点

1）$f(x)=x^4-6x^3+12x^2+x+1$

解

$$\begin{gathered}f'(x)=4x^3-18x^2+24x\\ f''(x)=12x^2-36x+24=12(x^2-3x+4)\\ =12(x-4)(x+1)\\ 令f''(x)=0\quad => x_1=-1,x_2=4\\ (-\infty,-1),f''(x)>0,凹\\ (-1,4),f''(x)<0,凸\\ (4,+\infty),f''(x)>0，凹\\ 拐点(-1,f(-1)),(4,f(4))\end{gathered}$$

2）$g(x)=e^{-x^2}$

解:

$$\begin{gathered}f'(x)=-2xe^{-x^2}<0\\ f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\\ =2e^{-x^2}(2x^2-1)=0\\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ (-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}),f''(x)>0，凹\\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),f''(x)<0,凸\\ (\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty),f''(x)>0，凹\end{gathered}$$

3）$h(x)=^3\sqrt{x}$

解:

$$\begin{gathered}h'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}，x\neq 0,h'(0)不存在，h''(0)不存在\\ h''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\\ (-\infty,0),f''(x)>0，凹\\ (0,+\infty),f''(x)<0，凸\end{gathered}$$

可能的拐点$\begin{cases}f''(x_0)=0\\ f''(x_0)不存在\end{cases}$

内容小结

1.可导函数单调性判别

$f'(x)\geq 0,x\in I => f(x)在I上单调递增$

$f'(x)\leq 0,x\in I => f(x)在I上单调递减$

2.曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x)>0,x\in I =>曲线y=f(x)在I上向上凹$

$f''(x)<0,x\in I =>曲线y=f(x)在I上向上凸$

拐点——连续曲线上的凹凸分界点

函数的极值与最值

一、函数的极值及其求法

定义（极值） 若$\exists\delta>0$,使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有$f(x)\geq f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$取极小值.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有$f(x)\leq f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$取极大值.

可能极值点$\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f'(x_0)不存在\end{cases}$

定理1（极值的必要条件）

若$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$，称为驻点。

驻点不是极值点，比如$f(x)=x^3$，极值点也不是驻点，比如$f(x)=|x|$。

定理2（极值的第一充分条件）

设$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内可导，且$f'(x_0)=0$（或$f(x)$在x_0处连续）

（1）若$x<x_0$时，$f'(x)\geq 0;x>x_0$时，$f'(x)\leq 0$，则f在x_0处取极大值。

（2）若$x<x_0$时，$f'(x)\leq 0;x>x_0$时，$f'(x)\geq 0$，则f在x_0处取极小值。

（3）若$f'(x)$在x_0的两侧不变号，则f在x_0无极值。

定理3（极值的第二充分条件）设$f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq 0$

（1）当$f''(x_0)<0$，$f(x)$在x_0处取极大值.

（2）当$f''(x_0)>0$，$f(x)$在x_0处取极小值.

证明：

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$
$$\text{当在}x_0\text{左边时，}x-x_0>0\text{所以}f'(x)>0$$
$$\text{当在}x_0\text{右边时，}x-x_0<0\text{所以}f'(x)<0$$

例1 求函数$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$的极值

解

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-1)(x+1)=0$$
$$x_1=-1,x_2=3$$
$$x=-1,f'(x)+-\text{，极大}$$
$$x=3,f'(x)-+\text{，极小}$$
$$\text{用第二充分条件来做}$$
$$f''(x)=6x-6,f''(-1)=-12<0\text{，极大},f''(3)=12>0\text{，极小}$$

例2 求函数$y=(x-1)^3\sqrt{x^2}$的极值

解

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$
$$y'(\frac{2}{5})=0\text{，极小}$$
$$y'(0)\text{不存在，极大}$$

二、最大值与最小值问题

（1）求连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的最值

第一步：求出$f(x)$在(a,b)内的驻点和不可导点$x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$;

第二步：求出函数值$f(x_1),f(x_2),\ldots\ldots,f(x_n),f(a),f(b)$

第三步：比较以上各点函数值.

（2）最大最小值的应用题

第一步：建立目标函数

第二步：

例3 求$f(x)=2x^3-3x^2$在$[-1,2]$上最大值和最小值

解

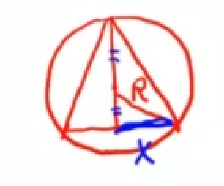
$$①f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0=>x_1=0,x_2=1$$
$$②f(0)=0,f(1)=-1,f(-1)=-5,f(2)=4$$
$$③f_{max}(2)=4,f_{min}(-1)=-5$$

例4 证明不等式$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^P+(1-x)^P\leq 1,(x\in[0,1],p>1)$

$$证：令f(x) = x^P + (1-x)^P$$
$$f'(x) = Px^{P-1} - P(1-x)^{P-1} = P[x^{P-1} - (1-x)^{P-1}] = 0 => x = \frac{1}{2}$$
$$f(0) = f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^P} + \frac{1}{2^P} = \frac{1}{2^{P-1}} < 1$$

例5 在半径为R的球中内接一直圆锥，试求圆锥的最大体积。

解



$$V = \frac{\pi}{3}x^2[R + \sqrt{R^2 - X^2}]$$
$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}h[R^2 - (h-R)^2] \\ &= \frac{\pi}{3}h^2(2R - h) \\ &= \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3) \end{aligned}$$
$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = 0$$

内容小结

1.连续函数的极值

（1）极值可疑点：$f'(x_0) = 0$或$f'(x_0)$不存在

（2）第一充分条件

$f'(x)$过x_0由正变负$=>$ $f(x_0)$为极大值

$f'(x)$过x_0由负变正$=>$ $f(x_0)$为极小值

（3）第二充分条件

$f'(x) = 0, f''(x_0) < 0$=>f(x_0)$为极大值

$f'(x) = 0, f''(x_0) > 0$=>f(x_0)$为极小值

2.连续函数的最值

（1）求连续函数$f(x)$在$[a, b]$上的最值

（2）最大最小值的应用题

函数图形的描绘

利用导数描绘函数图形的步骤

1.确定函数$y = f(x)$的定义域，并考察其就行及周期性

2.求$f'(x), f''(x)$，并求出$f'(x)$及$f''(x)$为0和不存在的点

3.列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点

4.求渐近线

5.确定某些特殊点，描绘函数图形

曲线的渐近线

1）若$\lim_{x\to\infty} f(x) = A(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$或$\lim_{x\to+\infty} = A)$那么$y = A$是曲线$y = f(x)$的水平渐近线

2）若$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$，那么$x = x_0$是$y = f(x)$的垂直渐近线.

3）若$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$,那么$y = ax + b$是$y = f(x)$的斜渐近线

例1 求曲线$y=\frac{(x-1)e^x}{e^x-1}$的渐近线

解

$$1）水平\quad \lim_{x\to-\infty} y=0$$

$$2）垂直\quad \lim_{x\to 0} y=\infty \quad x=0$$

$$3）斜\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{(x-1)e^x}{e^x-1}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x-x(e^x-1)}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^x+x}{e^x+1}=-1=b$$

$$斜渐近线为y=x-1$$

例2 设$y=\frac{x^3+4}{x^2}$，求

（1）函数的递减区间及极值；（2）函数图像的凹凸区间及拐点；

（3）渐近线　　　　（4）作出其图形

解

$$定义域(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)，当x=-\sqrt[3]{4}时，y=0$$

$$（1）y'=1-\frac{8}{x^3}.故驻点为x=2$$

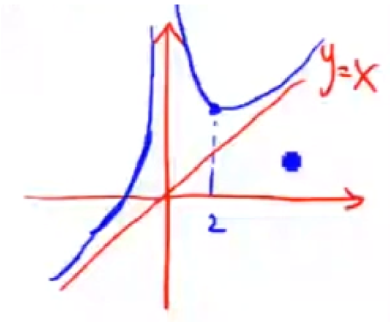
$$所以,(-\infty,0)及(2,+\infty)为增区间，(0,2)$$

$$为减区间，x=2为极小点，极小值为y=3$$

$$（2）y''=\frac{24}{x^4}>0，故(-\infty,0)(0,+\infty)均为凹区间，无拐点$$

$$（3）因\lim_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1=a\quad \lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}-x)=0=b$$



内容小结

1.函数图形的描绘——按作图步骤进行

2.曲线渐近线的求法

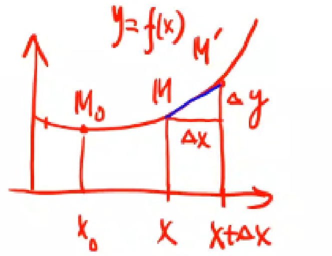
水平渐近线，垂直渐近线

斜渐近线

曲率

一、弧微分

设$y=f(x)$在(a,b)内有连续导数



$$s = s(x) = 弧长M_0M \quad (x > x_0)$$

$$(\frac{\Delta s}{\Delta x})^2 = (\frac{弧长MM'}{\Delta x}) = (\frac{弧长MM'}{|MM'|})^2(\frac{|MM'|}{\Delta x})$$

$$= (\frac{弧长MM'}{|MM'|})^2[1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]$$

$$\Delta x \to 0, M' \to M, \lim_{M' \to M} \frac{弧长MM'}{|MM'|} = 1$$

$$(\frac{ds}{dx})^2 = 1 + y'^2 => \frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$s'(x) = \sqrt{1 + (y')^2}$

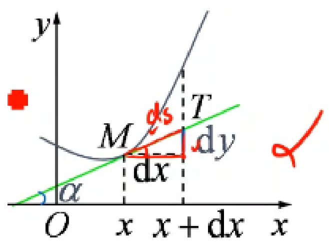
$\therefore \quad ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx或者ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

若曲线由参数方程表示：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

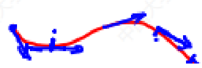
则弧长微分公式为$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

几何意义：$ds = |MT|$

$$\frac{dx}{ds} = cosa; \frac{dy}{ds} = sina$$



二、曲率及其计算公式



在光滑弧上自点M开始取弧段，其长为Δs，对应切线转角为Δa，定义

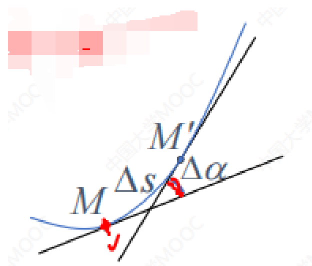
弧段Δs上的平均曲率

$$K = |\frac{\Delta a}{\Delta s}|$$

点M处的曲率

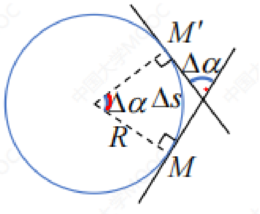
$$K = \lim_{\Delta x \to 0} |\frac{\Delta a}{\Delta s}| = |\frac{da}{ds}|$$

注意：直线上任意点处的曲率为0！



例1 求半径为R的圆上任意点处的曲率

解：如图所示



$$\Delta s = R\Delta a \quad \text{圆的弧长公式}$$

$$\therefore K = \lim_{\Delta s \to 0} |\frac{\Delta a}{\Delta s}| = \frac{1}{R}$$

可见：R越小，则K越大，圆弧弯曲得越厉害；

R越大，则K越小，圆弧弯曲得越小；

曲率K的计算公式

设曲线弧$y = f(x)$**二阶可导，则由**

$tana = y'$设$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$

得$a = arctany'$

$da = (arctany')'dx = \frac{y''}{1+y'^2}dx$

又$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$

故曲率计算公式为$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

例2 计算曲线$xy = 1$在点$(1,1)$处的曲率

$$y = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{套公式}K = \frac{|2|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

若曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$给出，则

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = \frac{y'}{x'}$$

$$y'' = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}$$

例3 计算椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$在点$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处的曲率。

$$x = acost, y = bsint, t = \frac{\pi}{4}$$

$$x' = -asint, y' = bcost$$

$$x'' = -acost, y'' = -bsint$$

$$K = \frac{|\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}|}{(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{ab}{(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

三、曲率圆与曲率半径

设M为曲线C上任一点，在点M处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点D使

$|DM| = R = \frac{1}{K}$

把以D为中心，R为半径的圆叫做曲线在点M处的曲率圆（密切圆），R叫作曲率半径，D叫作曲率中心。

在点M处曲率圆与曲线有下列密切关系：

（1）有公切线；（2）凹向一致；（3）曲率相同

内容小结

1.弧长公式$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$或$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

2.曲率公式$K=|\frac{da}{ds}|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

3.曲率圆

曲率半径$R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$