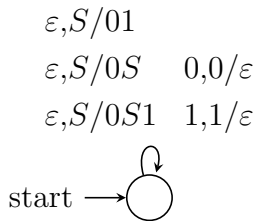
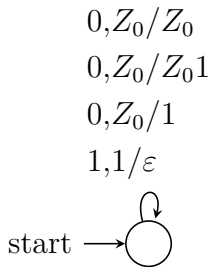
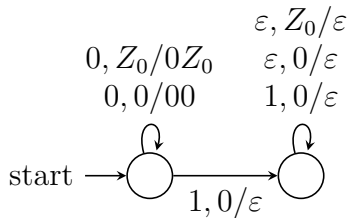


下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
 - 由 CFG 到 PDA
 - 由 PDA 到 CFG
- 确定型下推自动机

由 CFG 到 PDA

例5. 设计语言 $L = \{0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$ 的 PDA.



续例 5. 设计语言 $L = \{0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$ 的 CFG.

CFG G :

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0B1 \mid 01$$

字符串 00011 的最左派生:

$$S \xRightarrow{\text{lm}} AB \xRightarrow{\text{lm}} 0AB \xRightarrow{\text{lm}} 0B \xRightarrow{\text{lm}} 00B1 \xRightarrow{\text{lm}} 00011$$

续例5. 语言 $L = \{0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$.

用 PDA 栈顶符号的替换, 模拟文法的最左派生:

PDA		CFG	
PDA 的 ID 转移	PDA 的动作	产生式	最左派生
$(q_0, 00011, S)$			S
$\vdash (q_0, 00011, AB)$	$\varepsilon, S/AB$	$S \rightarrow AB$	$\xRightarrow{\text{lm}} AB$
$\vdash (q_0, 00011, 0AB)$	$\varepsilon, A/0A$	$A \rightarrow 0A$	$\xRightarrow{\text{lm}} 0AB$
$\vdash (q_0, 0011, AB)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 0011, B)$	$\varepsilon, A/\varepsilon$	$A \rightarrow \varepsilon$	$\xRightarrow{\text{lm}} 0B$
$\vdash (q_0, 0011, 0B1)$	$\varepsilon, B/0B1$	$B \rightarrow 0B1$	$\xRightarrow{\text{lm}} 00B1$
$\vdash (q_0, 011, B1)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 011, 011)$	$\varepsilon, B/01$	$B \rightarrow 01$	$\xRightarrow{\text{lm}} 00011$
$\vdash (q_0, 11, 11)$	$0, 0/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, 1, 1)$	$1, 1/\varepsilon$		
$\vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$	$1, 1/\varepsilon$		

续例 5. 语言 $L = \{0^n 1^m \mid 1 \leq m \leq n\}$.

$$S \rightarrow AB$$

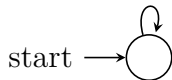
$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0B1 \mid 01$$

$$\varepsilon, S/AB$$

$$\varepsilon, A/0A \quad \varepsilon, A/\varepsilon \quad 0, 0/\varepsilon$$

$$\varepsilon, B/0B1 \quad \varepsilon, B/01 \quad 1, 1/\varepsilon$$



定理 27

任何 CFL L , 一定存在 PDA P , 使 $L = \mathbf{N}(P)$.

构造与文法等价的 PDA

如果 CFG $G = (V, T, P', S)$, 构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset),$$

其中 δ 为:

① $\forall A \in V:$

$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in P'\}$$

② $\forall a \in T:$

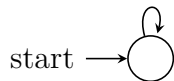
$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$$

那么 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{N}(P)$.

例 6. 为文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 构造 PDA.

$\varepsilon, S/aAA \quad \varepsilon, A/aS \quad a, a/\varepsilon$

$\varepsilon, A/a \quad \varepsilon, A/bS \quad b, b/\varepsilon$



证明: 往证

$$S \xRightarrow{*} w \iff (q, w, S) \vdash_{\mathbb{P}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

[充分性] 往证

$$S \xRightarrow{\text{lm}}^* w \implies (q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

设 $S \xRightarrow{\text{lm}}^* w$ 中第 i 个左句型为 $x_i A_i \alpha_i$, 其中 $x_i \in \Sigma^*$, $A_i \in V$, $\alpha_i \in (V \cup T)^*$. 并将 S 看作第 0 个左句型 $x_0 A_0 \alpha_0 = S$, 那么

$$x_0 = \varepsilon, A_0 = S, \alpha_0 = \varepsilon.$$

将 w 看作为第 n 个左句型 $x_n A_n \alpha_n = w$, 那么

$$x_n = w, A_n = \varepsilon, \alpha_n = \varepsilon.$$

再对派生步骤 i 归纳, 往证

$$S \xRightarrow{\text{lm}}^i x_i A_i \alpha_i \wedge w = x_i y_i \implies (q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i).$$

归纳基础: 当最左派生要 0 步时, 显然成立

$$(q, w, S) \vdash^* (q, y_0, A_0 \alpha_0) = (q, w, S).$$

归纳递推: 假设 i 步时上式成立. 当第 $i+1$ 步时,
一定是 $A_i \rightarrow \beta$ 应用到 $x_i A_i \alpha_i$

$$S \xrightarrow[\text{lm}]{i} x_i A_i \alpha_i \xrightarrow[\text{lm}]{} x_i \beta \alpha_i = x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1}.$$

变元 A_{i+1} 一定在 $\beta \alpha_i$ 中. 设 A_{i+1} 之前的终结符为 x' , 则有

$$\beta \alpha_i = x' A_{i+1} \alpha_{i+1}.$$

又因为 $w = x_i y_i = x_i x' y_{i+1} = x_{i+1} y_{i+1}$, 所以有

$$y_i = x' y_{i+1}.$$

那么, 在 PDA 中从 $ID (q, y_i, A_i \alpha_i)$ 模拟最左派生,
用产生式 $A_i \rightarrow \beta$ 替换栈顶 A_i 后, 有

$$\begin{array}{ll}
 (q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i) & \text{归纳假设} \\
 \vdash (q, y_i, \beta \alpha_i) & A_i \rightarrow \beta \\
 = (q, x' y_{i+1}, x' A_{i+1} \alpha_{i+1}) & y_i = x' y_{i+1} \\
 \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1} \alpha_{i+1}) & \text{弹出终结符}
 \end{array}$$

因此 $S \xrightarrow[n]{lm} w \implies (q, w, S) \vdash^* (q, y_n, A_n \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon)$, 即充分性得证.

[必要性] 往证更一般的, 对任何变元 A , 都有:

$$(q, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \implies A \xRightarrow{*} x.$$

可以看作“从输入带中消耗掉 x ”与“从栈中弹出 A ”两种作用相互抵消.

对 ID 转移 $(q, x, A) \vdash^i (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的次数 i 归纳证明.

归纳基础: 当 $i = 1$ 次时, 只能是 $x = \varepsilon$ 且 $A \rightarrow \varepsilon$ 为产生式, 所以 $A \xRightarrow{*} \varepsilon$.

归纳递推: 假设 $i \leq n$ ($n \geq 0$) 时上式成立. 当 $i = n + 1$ 时, 因为 A 是变元, 其第 1 步转移一定是

$$(q, x, A) \vdash (q, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_m)$$

且 $A \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_m$ 是产生式, 其中 Y_i 是变元或终结符. 而其余的 n 步转移

$$(q, x, Y_1 Y_2 \cdots Y_m) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

中每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 将消耗掉的那部分 x 记为 x_i , 那么显然有

$$x = x_1 x_2 \cdots x_m.$$

而每个 Y_i 从栈中被完全弹出时, 都不超过 n 步, 所以由归纳假设,

$$(q, x_i, Y_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \implies Y_i \xRightarrow{*} x_i.$$

再由 A 的产生式 $A \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_m$, 有

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1 Y_2 \cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1 x_2 \cdots Y_m \\ &\stackrel{*}{\Rightarrow} x_1 x_2 \cdots x_m = x. \end{aligned}$$

因此当 $A = S$, $x = w$ 时,

$$(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \implies S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$$

成立, 即必要性得证.

所以, 任何 CFL 都可由 PDA 识别.



构造与 GNF 格式文法等价的 PDA

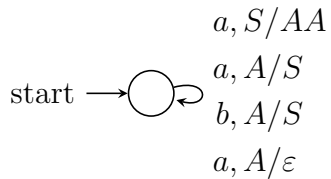
如果 GNF 格式的 CFG $G = (V, T, P', S)$, 那么构造 PDA

$$P = (\{q\}, T, V, \delta, q, S, \emptyset),$$

为每个产生式, 定义 δ 为:

$$\delta(q, a, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow a\beta \in P'\}.$$

续例 6. 文法 $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ 为 GNF 格式, 构造等价的 PDA.



由 PDA 到 CFG

定理 28

如果 PDA P , 有 $L = \mathbf{N}(P)$, 那么 L 是上下文无关语言.

构造与 PDA 等价的 CFG

如果 PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, 那么构造 CFG $G = (V, \Sigma, P', S)$, 其中 V 和 P' 为

- ① $V = \{[qXp] \mid p, q \in Q, X \in \Gamma\} \cup \{S\}$;
- ② 对 $\forall p \in Q$, 构造产生式 $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$;
- ③ 对 $\forall (p, Y_1 Y_2 \cdots Y_n) \in \delta(q, a, X)$, 构造 $|Q|^n$ 个产生式

$$[qXr_n] \rightarrow a[pY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \cdots [r_{n-1} Y_n r_n]$$

其中 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X, Y_i \in \Gamma$, 而 $r_i \in Q$ 是 n 次 $|Q|$ 种状态的组合; 若 $i = 0$, 为 $[qXp] \rightarrow a$.

例 7. 将 PDA $P = (\{p, q\}, (0, 1), \{X, Z\}, \delta, q, Z)$ 转为 CFG, 其中 δ 如下:

$$(1) \quad \delta(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$$

$$(2) \quad \delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$$

$$(3) \quad \delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$$

$$(4) \quad \delta(q, \varepsilon, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$(5) \quad \delta(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$(6) \quad \delta(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$$

δ	产生式
(0)	$S \rightarrow [qZq]$ $S \rightarrow [qZp]$
(1)	$[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$ $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$
(2)	$[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$ $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$
(3)	$[qXq] \rightarrow 0[pXq]$ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$
(4)	$[qZq] \rightarrow \varepsilon$
(5)	$[pXp] \rightarrow 1$
(6)	$[pZp] \rightarrow 0[qZp]$ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$

消除无用符号	重命名 (可选)
$S \rightarrow [qZq]$	$S \rightarrow A$
$[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$	$A \rightarrow 1BC$
$[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$	$B \rightarrow 1BD$
$[qXp] \rightarrow 0[pXp]$	$B \rightarrow 0D$
$[qZq] \rightarrow \varepsilon$	$A \rightarrow \varepsilon$
$[pXp] \rightarrow 1$	$D \rightarrow 1$
$[pZq] \rightarrow 0[qZq]$	$C \rightarrow 0A$