Chapter 7

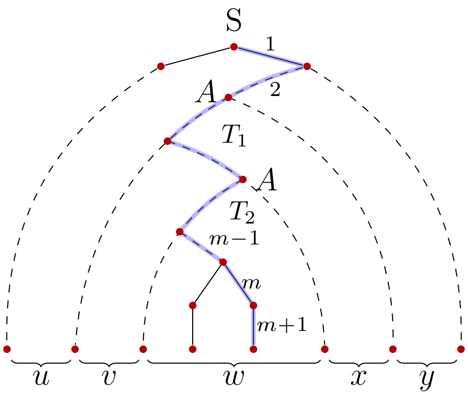
上下文无关语言的性质

7.1 上下文无关语言的泵引理

7.1.1 上下文无关语言的泵引理

定理 33. 如果语言 L 是 CFL, 那么存在正整数 N, 对 $\forall z \in L$, 只要 $|z| \geq N$, 就可以将 z 分为五部分 $z = uvwxy$ 满足:

1. $vx \neq \varepsilon$ (或$|vx| > 0$);
2. $|vwx| \leq N$;
3. $\forall i \geq 0$, $uv^iwx^iy \in L$.



证明:

1. 设 CNF 格式的 CFG G 接受语言 $L - \{\varepsilon\}$. 在 CNF 文法的派生树中, 如果从树根到叶子的最长路径长度为 k, 则该树产物的长度最多为 2^{k-1}. 因为该树内节点构成的是二叉树, 当最长路径为 k 时, 内节点二叉树部分最长路径长度为 $k-1$, 叶子最多为满二叉树时的 2^{k-1} 个. 如果设文法 G 中变元数 $|V| = m$, 则令 $N = 2^m$, 那么若有字符串 $z \in L(G)$, 且 $|z| \geq N$.

2. 则 z 的派生树内节点是二叉树, 树中最长路径长度至少也是 $m+1$, 该路径上节点至少有 $m+2$ 个, 除最后一个节点外, 其余标记都是变元.

3. 在该路径上接近树底部由下至上 $m+1$ 个内节点的标记中, 必有两个节点 T_2 和 T_1 标记了相同的变元 A. 不妨设这两棵 A 子树分别为 T_1 和 T_2, 且 T_1 比 T_2 更接近树根.
4. 那么, 若记 A 子树 T_2 的产物为 w, 且又因为它是 T_1 的子树, 那么 T_1 的产物可记为 vwx, 则有 $A \overset{*}{\Rightarrow} vAx$ 和 $A \overset{*}{\Rightarrow} w$.
5. 那么, 对 $\forall i \geq 0$, 有 $A \overset{*}{\Rightarrow} v^iwx^i$. 又因为 vwx 是 z 的一部分, 所以不妨设 $z = uvwxy$, 则 $S \overset{*}{\Rightarrow} uAy \overset{*}{\Rightarrow} uv^iwx^iy$, 即 $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$.
6. 又因为, 我们只考虑了接近树底部的 $m+1$ 个节点, 所以 T_1 子树中最长路径长度不超过 $m+1$, 那么 T_1 产物的长度不会超过 2^m, 所以 $|vwx| \leq 2^m = N$.
7. 而 T_1 子树派生 vwx 的第一个产生式必是 $A \to BC$, 那么 T_2 子树不是完全处于 B 中就是完全处于 C 中, 即 T_2 必定完全在 T_1 的左/右儿子中. 而不包括 T_2 的变元 B 或 C 都至少产生一个终结符, 所以 v 和 x 不可能同时为空, 即 $vx \neq \varepsilon$. □

7.1.2 CFL 泵引理的应用

例 1. 证明 $L = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 1\}$ 不是上下文无关语言.

证明:

1. 假设 L 是 CFL, 那么存在整数 N, 对 $\forall z \in L, (|z| \geq N)$ 满足泵引理.
2. 从 L 中取 $z = 0^N1^N2^N$, 则显然 $z \in L$ 且 $|z| = 3N \geq N$.
3. 由泵引理, z 可被分为 $z = uvwxy$, 且有 $|vwx| \leq N$ 和 $vx \neq \varepsilon$.
4. 那么 vwx 可能
   i 只包含 0, 1 或 2, 那么 $uwy \notin L$;
   ii 只包含 0 和 1, 或只包含 1 和 2, 那么也有 $uwy \notin L$;
5. 与泵引理 $uwy = uv^0wx^0y \in L$ 矛盾, 假设不成立.
6. L 不是上下文无关的. □

例 2. 证明 $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ 不是上下文无关的.

(错误的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取 $z = 0^N10^N1$, 那么 $z = uvwxy$ 为

$$z = \overbrace{\underbrace{00\cdots00}_{u}\underbrace{0}_{v}\underbrace{1}_{w}}^{0^N1}\overbrace{\underbrace{0}_{x}\underbrace{00\cdots01}_{y}}^{0^N1}$$

则对任意 $i \geq 0$, 有 $uv^iwx^iy \in L$, 满足泵引理. □

(正确的) 证明: 假设 L 是 CFL. 取 $z = 0^N1^N0^N1^N$, 将 z 分为 $z = uvwxy$ 时

1. 若 vwx 在 z 中点的一侧, uv^0wx^0y 显然不可能属于 L;
2. 若 vwx 包括 z 中点, 那么 uv^0wx^0y 为 $0^N1^i0^j1^N$, 也不可能属于 L.

所以假设不成立, L 不是 CFL. □

7.2 上下文无关语言的封闭性

7.2.1 代换的封闭性

定义. 两个字母表 Σ 到 Γ 的函数 $s : \Sigma \to 2^{\Gamma^*}$ 称为代换 *(substitution)*. Σ 中的一个字符 a 在 s 的作用下为 Γ 上的一个语言 L_a, 即

$$s(a) = L_a.$$

扩展 s 的定义到字符串,

$$s(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$s(xa) = s(x)s(a)$$

再扩展 h 到语言, 对 $\forall L \subseteq \Sigma^*$,

$$s(L) = \bigcup_{x \in L} s(x).$$

定理 34. 如果有 Σ 上的 *CFL* L 和代换 s, 且每个 $a \in \Sigma$ 的 $s(a)$ 都是 *CFL*, 那么 $s(L)$ 也是 *CFL*.

构造方法

设 CFL L 的文法 $G = (V, T, P, S)$, 每个 $s(a)$ 的文法 $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a)$. 那么 $s(L)$ 的文法可以构造为

$$G' = (V', T', P', S):$$

1. $V' = V \cup \left(\bigcup_{a \in T} V_a\right)$
2. $T' = \bigcup_{a \in T} T_a$
3. P' 包括每个 P_a 和 P 中产生式, 但是要将 P 的产生式中每个终结符 a 均替换为文法 G_a 的开始符号 S_a.

证明: 对 $\forall w \in s(L)$, 那么一定存在某个 $x = a_1a_2 \cdots a_n \in L$ 使

$$w \in s(x) = s(a_1)s(a_2)\cdots s(a_n).$$

那么 w 可以分为 $w = w_1w_2\cdots w_n$ 且 $w_i \in s(a_i)$, 即

$$S_{a_i} \overset{*}{\underset{G_{a_i}}{\Rightarrow}} w_i.$$

由于 $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x = a_1a_2\cdots a_n$, 所以

$$S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} S_{a_1}S_{a_2}\cdots S_{a_n} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w_1w_2\cdots w_n = w,$$

所以 $w \in \mathbf{L}(G')$, 即 $s(L) \subseteq \mathbf{L}(G')$.

因为 G' 的终结符仅能由每个 S_a 派生, 因此对 $\forall w \in \mathbf{L}(G')$ 有

$$S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} \alpha = S_{a_1}S_{a_2}\cdots S_{a_n} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w.$$

因为 G' 中的每个 S_a 在 G 中是终结符 a, 所以

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a_1a_2\cdots a_n = x \in L$$

又因为 $\alpha = S_{a_1}\cdots S_{a_n} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w = w_1\cdots w_n$, 所以 $S_{a_i} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w_i$, 即 $w_i \in s(a_i)$. 那么

$$w = w_1w_2\cdots w_n \in s(a_1)s(a_2)\cdots s(a_n) = s(a_1a_2\cdots a_n) = s(x) \subseteq s(L),$$

所以 $w \in s(L)$, 即 $\mathbf{L}(G') \subseteq s(L)$.

因此 $\mathbf{L}(G') = s(L)$.

例 3. 设 $L = \{w \mid w$ 有相等个数的 a 和 $b\}$, 代换

$$\begin{aligned} s(a) &= L_a = \{0^n1^n \mid n \geq 1\} \\ s(b) &= L_b = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\} \end{aligned}$$

求 $s(L)$ 的文法.

设计 L 的文法为:	$S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$
L_a 的文法为:	$S_a \to 0S_a1 \mid 01$
L_b 的文法为:	$S_b \to 0S_b0 \mid 1S_b1 \mid \varepsilon$
那么 $s(L)$ 的文法为:	$S \to S_aSS_bS \mid S_bSS_aS \mid \varepsilon$ $S_a \to 0S_a1 \mid 01$ $S_b \to 0S_b0 \mid 1S_b1 \mid \varepsilon$

7.2.2 并/连接/闭包/同态/逆同态/反转的封闭性

CFL 对并/连接/闭包/同态封闭

定理 35. 上下文无关语言在并, 连接, 闭包, 正闭包, 同态下封闭.

证明 1: 设 $\Sigma = \{1, 2\}$, L_1, L_2 是任意 CFL. 定义代换

$$s(1) = L_1, \quad s(2) = L_2.$$

语言 $\{1, 2\}$, $\{12\}$, $\{1\}^*$ 和 $\{1\}^+$ 显然都是 CFL, 那么

1. 由 $s(\{1, 2\}) = s(1) \cup s(2) = L_1 \cup L_2$, 所以并运算封闭;

2. 由 $s(\{12\}) = s(12) = s(\varepsilon)s(1)s(2) = L_1L_2$, 所以连接运算封闭;

3. 闭包和正比包运算封闭, 因为

$$\begin{aligned} s(\{1\}^*) &= s(\{\varepsilon, 1, 11, \cdots\}) \\ &= s(\varepsilon) \cup s(1) \cup s(11) \cup \cdots \\ &= \{\varepsilon\} \cup s(1) \cup s(1)s(1) \cup \cdots \\ &= L_1^*. \end{aligned}$$

若 h 是 Σ 上的同态, L 是 Σ 上的 CFL, 对 $\forall a \in \Sigma$ 令代换 $s'(a) = \{h(a)\}$, 则

$$h(L) = \{h(w) \mid w \in L\} = \bigcup_{w \in L} \{h(w)\} = \bigcup_{w \in L} s'(w) = s'(L),$$

所以同态运算封闭. □

证明 2: 用文法证明并/连接/闭包的封闭性. 设 CFL L_1,L_2 的文法分别为

$$G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1),\ G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$$

那么, 分别构造

1. $L_1 \cup L_2$ 的文法为
$$G_{\text{union}} = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S);$$
2. L_1L_2 的文法为
$$G_{\text{concat}} = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S);$$
3. L_1^* 的文法为
$$G_{\text{closure}} = (V_1 \cup \{S\}, T_1, P_1 \cup \{S \to S_1S \mid \varepsilon\}, S).$$

再证明所构造文法的正确性, 略. □

CFL 对反转封闭

定理 36. *如果 L 是 CFL, 那么 L^R 也是 CFL.*

证明:

设 L 的文法 $G = (V, T, P, S)$, 构造文法

$$G' = (V, T, \{A \to \alpha^R \mid A \to \alpha \in P\}, S),$$

则 $L(G') = L^R$. 证明略.

CFL 对逆同态封闭

定理 37. *如果 L 是字母表 Δ 上的 CFL, h 是字母表 Σ 到 Δ^* 的同态, 那么 $h^{-1}(L)$ 也是 CFL.*

设 PDA $P = (Q, \Delta, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $\mathbf{L}(P) = L$. 构造 $\mathbf{L}(P') = h^{-1}(L)$ 的 PDA

$$P' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', [q_0, \overline{\varepsilon}], Z_0, F \times \{\overline{\varepsilon}\})$$

在 P' 的状态中, 使用缓冲, 暂存字符 $a \in \Sigma$ 的同态串 $h(a)$ 的后缀

1. $Q' \subset Q \times \Delta^*$: 状态 $[q, \overline{x}]$ 中的 $\overline{x}$ 为缓冲;
2. 设 $q \in Q$, 那么 δ' 定义如下:

   i $\forall [q, \overline{\varepsilon}] \in Q \times \{\overline{\varepsilon}\}$, $\forall a \in \Sigma$, $\forall X \in \Gamma$
   $$\delta'([q, \overline{\varepsilon}], a, X) = \{([q, h(a)], X)\}$$

   ii 若 $\delta(q, \overline{a}, X) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_k, \beta_k)\}$, 则
   $$\delta'([q, \overline{ax}], \varepsilon, X) = \{([p_1, \overline{x}], \beta_1), ([p_2, \overline{x}], \beta_2), \cdots, ([p_k, \overline{x}], \beta_k)\}$$
   这里 $\overline{a} \in \Delta \cup \{\overline{\varepsilon}\}$, $\overline{x}$ 是某个 $h(a)$ 的后缀.

7.2.3 交和补运算不封闭

***CFL* 对交运算不封闭**
因为语言

$$L_1 = \{0^n 1^n 2^i \mid n \geq 1, i \geq 1\}$$
$$L_2 = \{0^i 1^n 2^n \mid n \geq 1, i \geq 1\}$$

都是 CFL, 而

$$L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$$

不是 CFL.

***CFL* 对补运算不封闭**
因为 $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

定理 38. *若 L 是 CFL 且 R 是正则语言, 则 $L \cap R$ 是 CFL.*

证明: 设 DFA $D = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ 且 $\mathbf{L}(D) = R$, PDA $P = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$ 且 $\mathbf{L}(P) = L$, 构造 PDA

$$P' = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, [q_1,q_2], F_1 \times F_2)$$

其中 δ 为:

$$\delta([p,q], a, Z) = \begin{cases} \{([p,s], \beta) \mid (s, \beta) \in \delta_2(q, a, Z)\} & a = \varepsilon \\ \{([r,s], \beta) \mid r = \delta_1(p, a) \wedge (s, \beta) \in \delta_2(q, a, Z)\} & a \neq \varepsilon \end{cases}$$

再往证 $\mathbf{L}(P') = L \cap R$, 略.

7.2.4 封闭性的应用

例 4. 请证明语言 L 不是 CFL

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \mathrm{n}_a(w) = \mathrm{n}_b(w) = \mathrm{n}_c(w)\},$$

其中 $\mathrm{n}_a(w)$ 表示 w 中 a 的个数.

证明:

1. 因为 $\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^*$ 是正则语言,
2. 而 $L \cap \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^* = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ 不是 CFL,
3. 由 CFL 与正则语言的交还是 CFL, 所以 L 不可能是 CFL. □

例. 请证明语言 $L = \{a^i b^j a^i b^j \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ 不是 CFL.

证明:

1. 因为 $\mathbf{a}^+\mathbf{b}^+\mathbf{a}^+\mathbf{b}^+$ 是正则语言,
2. 而 $L_{ww} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ 不是 CFL,
3. 所以 $L_{ww} \cap \mathbf{a}^+\mathbf{b}^+\mathbf{a}^+\mathbf{b}^+ = L$ 也不可能是 CFL. □

7.3 上下文无关语言的判定性质

可判定的 *CFL* 问题

- 空性: 只需判断文法的开始符号 S 是否是产生的.
- 成员性: 利用 CNF 范式, 有 CYK 算法检查串 w 是否属于 L.

不可判定的 *CFL* 问题

1. 判断 CFG G 是否歧义的?
2. 判断 CFL 是否固有歧义的?
3. 两个 CFL 的交是否为空?
4. 两个 CFL 是否相同?
5. 判断 CFL 的补是否为空? 尽管有算法判断 CFL 是否为空
6. 判断 CFL 是否等于 Σ^*?

7.4 乔姆斯基文法体系

如果文法 $G = (V, T, P, S)$, 符号串 $\alpha \in (V \cup T)^* V (V \cup T)^*$, $\beta \in (V \cup T)^*$, 产生式都形如

$$\alpha \to \beta$$

即每个产生式的左部 α 中至少要有一个变元, 那么:

1. 称 G 为 0 型文法或短语结构文法 (PSG, *Phrase Structure Grammar*), $L(G)$ 称为 0 型语言, 短语结构语言 (PSL, *Phrase Structure Language*), 或递归可枚举语言 (*Recursively Enumerable Language*);
2. 若 $|\beta| \geq |\alpha|$, 称 G 为 1 型文法或上下文有关文法 (CSL, *Context-Sensitive Language*), $L(G)$ 称为 1 型语言或上下文有关语言 (CSL, *Context-Sensitive Language*);
3. 若 $\alpha \in V$, 称 G 为 2 型文法或上下文无关文法, $L(G)$ 称为 2 型语言或上下文无关语言;
4. 若 $\alpha \to \beta$ 都形如 $A \to aB$ 或 $A \to a$, 其中 $A \in V$, $a \in T$, 称 G 为 3 型文法, 右线性文法或正则文法, $L(G)$ 称为 3 型语言或正则语言.

乔姆斯基把文法分成这 4 种类型, 0 型文法的能力等价于图灵机, 1 型文法的能力等价于线性界限自动机. 2 型文法能力等价于非确定的下推自动机. 3 型文法也称右线性文法, 能力等价于有穷自动机. 文法描述语言的能力, 0 型文法最强, 3 型文法最弱.