

# 形式语言与自动机理论

## 上下文无关语言的性质

王春宇

计算机科学与技术学院  
哈尔滨工业大学

# 上下文无关语言的性质

- 上下文无关语言的泵引理
  - 上下文无关语言的泵引理
  - 泵引理的应用
- 上下文无关语言的封闭性
- 上下文无关语言的判定性质
- 乔姆斯基文法体系

## 上下文无关语言的泵引理

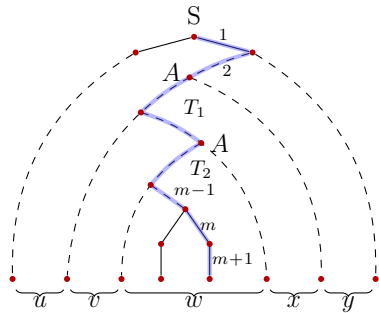
### 定理 33

如果语言  $L$  是 CFL, 那么存在正整数  $N$ , 对  $\forall z \in L$ , 只要  $|z| \geq N$ , 就可以将  $z$  分为五部分  $z = uvwxy$  满足:

- ①  $vx \neq \varepsilon$  (或  $|vx| > 0$ );
- ②  $|vwx| \leq N$ ;
- ③  $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$ .

证明:

- ① 设 CNF 格式 CFG  $G$  中变元数  $|V| = m$ , 令  $N = 2^m$ , 若有  $z \in L(G)$ , 且  $|z| \geq N$ .
- ② 则  $z$  的派生树内节点是二叉树, 最长路径长度至少  $m + 1$ , 节点至少  $m + 2$  个.
- ③ 该路径由下至上  $m + 1$  个内节点中, 必有两个  $T_2$  和  $T_1$  标记了相同的变元  $A$ .
- ④ 若记  $T_2$  产物为  $w$ , 且是  $T_1$  的子树,  $T_1$  的产物可记为  $vw x$ , 则有  $A \Rightarrow vAx$  和  $A \Rightarrow w$ .
- ⑤ 那么  $\forall i \geq 0, A \Rightarrow v^i w x^i$ . 不妨设  $z = uvwxy$ , 则  $S \Rightarrow uAy \Rightarrow uv^i w x^i y$ .
- ⑥  $T_1$  路径长不超过  $m + 1$ , 那么  $T_1$  产物长不超过  $2^m$ , 所以  $|vw x| \leq 2^m$ .
- ⑦  $T_2$  必在  $T_1$  的左/右儿子中, 所以  $v$  和  $x$  不可能同时为空, 即  $vx \neq \varepsilon$ .



□

## 泵引理的应用

例 1. 证明  $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$  不是上下文无关语言.

证明:

- ① 假设  $L$  是 CFL, 那么存在整数  $N$ , 对  $\forall z \in L (|z| \geq N)$  满足泵引理.
- ② 从  $L$  中取  $z = 0^N 1^N 2^N$ , 则显然  $z \in L$  且  $|z| = 3N \geq N$ .
- ③ 由泵引理,  $z$  可被分为  $z = uvwxy$ , 且有  $|vwx| \leq N$  和  $vx \neq \varepsilon$ .
- ④ 那么  $vwx$  可能
  - i 只包含 0, 1 或 2, 那么  $uwy \notin L$ ;
  - ii 只包含 0 和 1, 或只包含 1 和 2, 那么也有  $uwy \notin L$ ;
- ⑤ 与泵引理  $uwy = uv^0wx^0y \in L$  矛盾, 假设不成立.
- ⑥  $L$  不是上下文无关的.



例2. 证明  $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$  不是上下文无关的.

(错误的) 证明: 假设  $L$  是 CFL. 取  $z = 0^N 1 0^N 1$ , 那么  $z = uvwxy$  为

$$z = \underbrace{\overbrace{00 \cdots 00}^{0^N 1} 0}_{u} \underbrace{0}_{v} \underbrace{1}_{w} \underbrace{0}_{x} \underbrace{\overbrace{00 \cdots 01}^{0^N 1}}_{y}$$

则对任意  $i \geq 0$ , 有  $uv^iwx^i y \in L$ , 满足泵引理. □

(正确的) 证明: 假设  $L$  是 CFL. 取  $z = 0^N 1^N 0^N 1^N$ , 将  $z$  分为  $z = uvwxy$  时

- ① 若  $vw x$  在  $z$  中点的一侧,  $uv^0wx^0y$  显然不可能属于  $L$ ;
- ② 若  $vw x$  包括  $z$  中点, 那么  $uv^0wx^0y$  为  $0^N 1^i 0^j 1^N$ , 也不可能属于  $L$ .

所以假设不成立,  $L$  不是 CFL. □