图灵机与不可判定性

- 图灵机
- 不可判定性
  - 非递归可枚举的语言
  - 递归可枚举但非递归的语言

不可判定问题

定义

一个问题，如果它的语言是递归的，称为可判定问题，
否则称为不可判定问题.

- 递归可枚举语言 — 图灵机所识别的语言
- 递归语言 — 保证停机的图灵机所识别的语言

判定问题

“图灵机 M 接受输入 w 吗？”

第 i 个串 w_i

定义

将全部 $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$ 中的字符串按长度和字典序排序，那么
第 i 个串就是 w_i，而且刚好有

$$\text{binary}(i) = 1w_i.$$

即:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
binary(i)	1ε	10	11	100	101	110	111	1000	1001	$\cdots$
w_i	ε	0	1	00	01	10	11	000	001	$\cdots$

图灵机编码

将 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上的任意图灵机 M, 用二进制字符串编码

$$M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_1,\ B,\ F)$$

❶ $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_{|Q|}\}$, 开始状态为 q_1, 终态为 q_2 且停机;

❷ $\Gamma = \{X_1, X_2, \cdots, X_{|\Gamma|}\}$, 总有 $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = B$;

❸ 设带头移动方向 $D_1 = L$, $D_2 = R$;

❹ 任意的转移 $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ 编码为

$$C = 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m;$$

❺ 则全部 n 个转移的编码合并在一起, 作为图灵机 M 的编码:

$$C_1\, 11\, C_2\, 11\, \cdots\, C_{n-1}\, 11\, C_n.$$

第 i 个图灵机 M_i

定义

当图灵机 M 的编码为 w_i 时，则称其为第 i 个图灵机 M_i.

- 那么，任意图灵机 M，都对应于一个字符串 w;
- 而任意字符串 w，也都可以看作是一个图灵机 M;
- 当 w 的编码不合法时，则将其看作仅接受 $\varnothing$ 且立即停机的图灵机.

非递归可枚举的语言

定义

对角化语言 $L_d = \{w_i \mid w_i \notin \mathbf{L}(M_i),\ i \geq 1\}$.

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & \multicolumn{6}{l}{w_j \longrightarrow} \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
M_i & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\downarrow & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

定理 44

对角化语言 L_d 不是递归可枚举的.

证明:

假设存在识别 L_d 的图灵机 M, 那么 M 也可被编码,
不妨设它是第 i 个图灵机 $M_i = M$, 即 $\mathbf{L}(M_i) = L_d$.

那么, 考虑第 i 个串 w_i 是否会被 M_i 识别:

❶ 如果 $w_i \in \mathbf{L}(M_i) = L_d$, 那么由 L_d 的定义, 有 $w_i \notin \mathbf{L}(M_i)$;
❷ 如果 $w_i \notin \mathbf{L}(M_i)$, 那么由 L_d 的定义, 又有 $w_i \in L_d = \mathbf{L}(M_i)$.

无论如何都会矛盾, 因此假设不成立, 不存在接受 L_d 的图灵机. □

递归可枚举但非递归的语言

定义

图灵机 M 和输入串 w 组成的有序对 (M, w) 可编码为

$$M111w.$$

定义

通用语言 $L_u = \{M111w \mid w \in \mathbf{L}(M)\}.$

定理 47

通用语言 L_u 不是递归的.

证明:

假设存在算法 A 识别 L_u, 则可构造识别 L_d 的算法 B.

将 B 的输入 $w = w_i$ 转换为 $M_i 111 w_i$ 交给 A 判断:

- 当 A 接受, 表示 $w_i \in \mathbf{L}(M_i)$, 则 B 拒绝;
- 当 A 拒绝, 表示 $w_i \notin \mathbf{L}(M_i)$, 则 B 接受.

而由于 L_d 不是递归的, 所以 B 不可能存在, 所以 L_u 不可能是递归的. $\square$

定理 48

通用语言 L_u 是递归可枚举的.

证明:

构造图灵机 U, 当输入 $M111w$ 时, 用 3 条带模拟 M 处理串 w 的过程:

1. 第 1 带装载 M 的编码;
2. 第 2 带模拟 M 的带, 放置串 w;
3. 第 3 带存储 M 的状态.

因为 M 接受 w 时会停机, 因此 U 可以识别 L_u. $\square$

通用图灵机

定义

可模拟任意图灵机 M 的图灵机 U, 称为通用图灵机.

- 冯·诺伊曼通用数字电子计算机体系结构设计思想的灵感来源.
- 抽象理论的先期发展, 可以对实际问题有很大帮助.

通用图灵机

- 罗杰・彭罗斯在《皇帝新脑》中以另一种编码给出了 $U = M_i$ 的 i 为:

7244855335339317577198395039615711237952360672556559631108144796606505059404241090310483613632359365644443458382226883278767626556144692814117715017842551707554085657689753346356942478488597046934725739988582283827795294683460521061169835945938791885546326440925525505820555989451890716537414896033096753020431553625034984529832320651583047664142130708819329717234151056980262734686429921838172157333482823073453713421475059740345184372359593090640024321077342178851492760797597634415123079586396354492269159479654614711345700145048167337562172573464522731054482980784965126988788964569760906634204477989021914437932830019493570963921703904833270882596201301773727202718625919914428275437422351355675134084222299889374410534305471044368695876405178128019437530813870639942772823156425289237514565443899052780793241144826142357286193118332610656122755531810207511085337633806031082361675045635852164214869542347187426437544428790062485827091240422076538754264454133451748566291574299909502623009733738137724162172747723610206786854002893566085696822620141982486216989026091309402985706001743006700868967590344734174127874255812015493663938996905817738591654055356704092821332221631410978710814599786695997045096818419062994436560151454904880922084480034822492077304030431884298993931352668823496621019471619107014619685231928474820344958977095535611070275817487333272966789987984732840981907648512726310017401667873634776058572450369644348979920344899974556624029374876688397514044516657077500605138839916688140725455446652220507242623923792115253181625125363050931728631422004064571305275802307665183351995689139748137504926429605010013651980186945639498

(1654 位)