# 正则语言的性质

- 正则语言的泵引理
- 正则语言的封闭性
- 正则语言的判定性质
- 自动机的最小化

# 正则语言的判定性质

正则语言, 或任何语言, 典型的 3 个判定问题:

1. 以某种形式化模型描述的语言是否为空? 是否无穷?
2. 某个特定的串 $w$ 是否属于所描述的语言?
3. 以两种方式描述的语言, 是否是相同的? — 语言的等价性

我们想知道, 要回答这类问题的具体算法, 是否存在.

# 空性, 有穷性和无穷性

**定理 14**

具有 $n$ 个状态的有穷自动机 $M$ 接受的集合 $S$:

1. $S$ 是非空的, 当且仅当 $M$ 接受某个长度小于 $n$ 的串;
2. $S$ 是无穷的, 当且仅当 $M$ 接受某个长度为 $m$ 的串, $n \leq m < 2n$.

所以, 对于正则语言:

- 存在算法, 判断其是否为空, 只需检查全部长度小于 $n$ 的串;
- 存在算法, 判断其是否无穷, 只需检查全部长度由 $n$ 到 $2n-1$ 的串.

证明: 设接受正则语言 $S$ 的 DFA 为 $M$.

1. 必要性: 显然成立. 充分性:
   1. 如果 $S$ 非空, 设 $w$ 是 $M$ 接受的串中长度最小者之一;
   2. 必然 $|w| < n$, 否则由泵引理 $w = xyz$, 接受 $xz$ 更短.
2. 必要性: 由泵引理, 显然成立. 充分性:
   1. 如果 $S$ 无穷, 假设没有长度 $n$ 到 $2n-1$ 之间的串;
   2. 那么取 $w \in \mathbf{L}(M)$ 是长度 $\geq 2n$ 中最小者之一;
   3. 由泵引理 $w = xyz$, 且 $M$ 会接受更短的串 $xz$;
   4. 于是, 或者 $w$ 不是长度最小的, 或者长度 $n$ 到 $2n-1$ 之间有被接受的串, 因此假设不成立. □

**定理 15**

存在算法, 判定两个有穷自动机是否等价(接受语言相同).

证明:

1. 设 $M_1$ 和 $M_2$ 是分别接受 $L_1$ 和 $L_2$ 的有穷自动机;
2. 则 $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$ 是正则的, 所以可被某个有穷自动机 $M_3$ 接受;
3. 而 $M_3$ 接受某个串, 当且仅当 $L_1 \neq L_2$;
4. 由于存在算法判断 $\mathbf{L}(M_3)$ 是否为空, 因此得证. □

# 正则语言的性质

- 正则语言的泵引理
- 正则语言的封闭性
- 正则语言的判定性质
- 自动机的最小化

# 状态的等价性

**定义**

DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 中两个状态 $p$ 和 $q$, 对 $\forall w \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F,$$

则称这两个状态是等价的, 否则称为可区分的.

- 等价性只要求 $\hat{\delta}(p, w)$ 和 $\hat{\delta}(q, w)$ 同时在或不在 $F$ 中, 而不必是相同状态.

### 填表算法

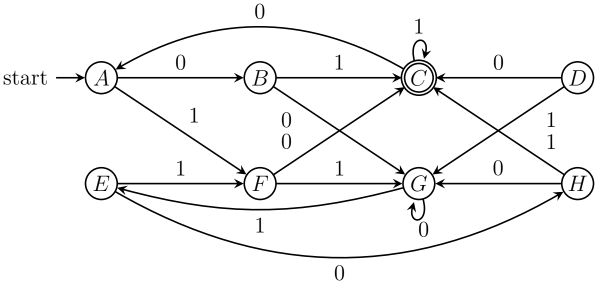
递归寻找 DFA 中全部的可区分状态对:

1. 如果 $p \in F$ 而 $q \notin F$, 则 $[p, q]$ 是可区分的;
2. $\forall a \in \Sigma$, 如果
$$[r = \delta(p, a), s = \delta(q, a)]$$
是可区分的, 则 $[p, q]$ 是可区分的.

### 定理 16

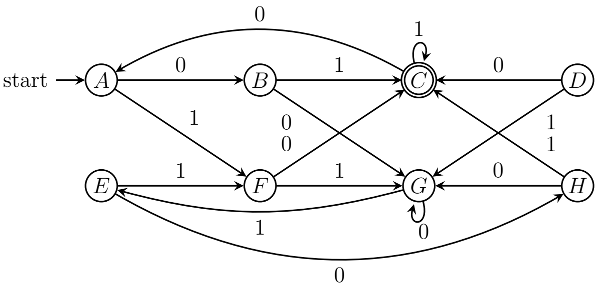
如果填表算法不能区分两个状态, 则这两个状态是等价的.

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | | | | | | | |
| C | | | | | | | |
| D | | | | | | | |
| E | | | | | | | |
| F | | | | | | | |
| G | | | | | | | |
| H | | | | | | | |

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.

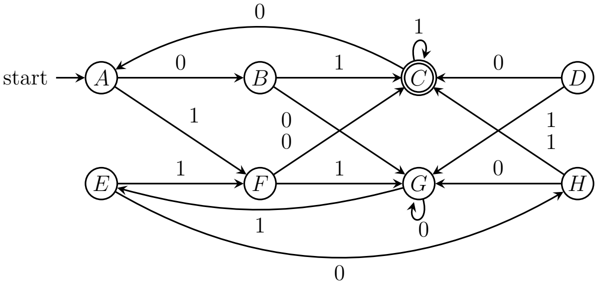



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | | | | | | | |
| $C$ | × | × | | | | | |
| $D$ | | | × | | | | |
| $E$ | | | × | | | | |
| $F$ | | | × | | | | |
| $G$ | | | × | | | | |
| $H$ | | | × | | | | |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |

❶ 直接标记终态和非终态之间的状态对:

$$\{C\}\times\{A, B, D, E, F, G, H\}.$$

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.

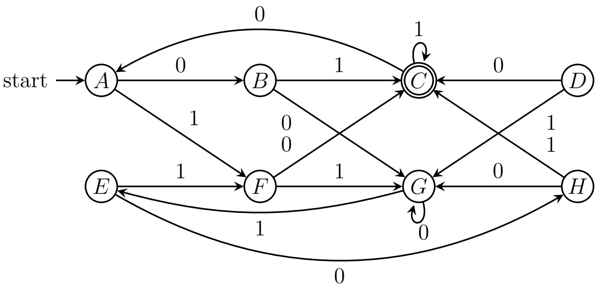



| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | | | | | | | |
| C | × | × | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | | | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | | | × | × | | × | |
| H | | | × | × | | × | |

❷ 标记所有经过字符 0 到达终态和非终态的状态对:

$$\{D, F\} \times \{A, B, C, E, G, H\}.$$

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.

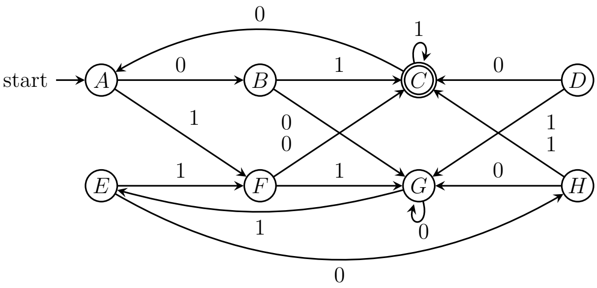



| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | × | | | | | | |
| C | × | × | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | | × | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | | × | × | × | | × | |
| H | × | | × | × | × | × | × |

❸ 标记所有经过字符 1 到达终态和非终态的状态对:

$$\{B, H\} \times \{A, C, D, E, F, G\}.$$

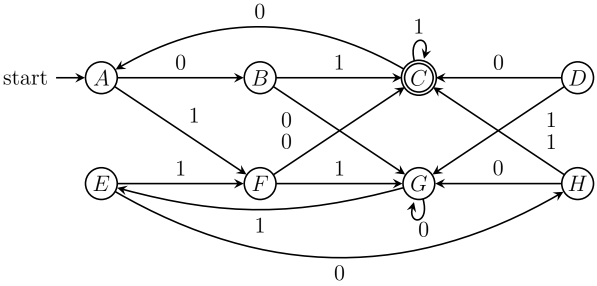
例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | × | | | | | | |
| C | × | × | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | | × | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | | × | × | × | | × | |
| H | × | | × | × | × | × | × |

❹ 此时还有 [A,E], [A,G], [B,H], [D,F], [E,G] 未标记, 只需逐个检查.

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.



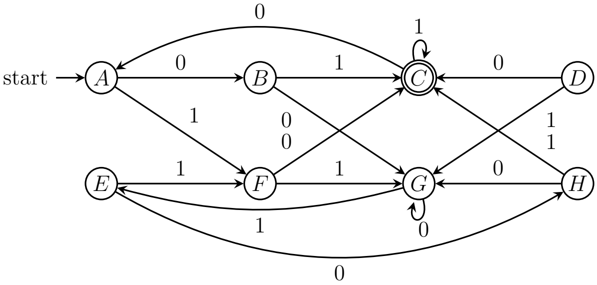

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | × | | | | | | |
| C | × | × | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | | × | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | × | × | × | × | × | × | |
| H | × | | × | × | × | × | × |

❹ 此时还有 [A,E], [A,G], [B,H], [D,F], [E,G] 未标记, 只需逐个检查.

× [A,G] 是可区分的, 因为经串 01 到可区分的 [C,E];

× [E,G] 是可区分的, 因为经串 10 到可区分的 [C,H].

例 16. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.



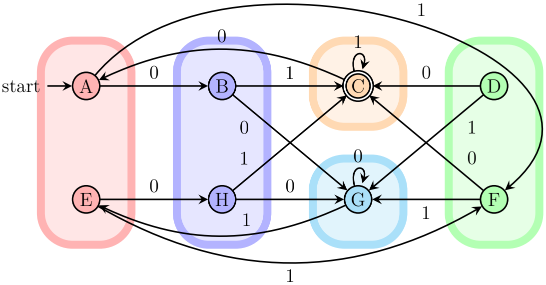

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | × | | | | | | |
| $C$ | × | × | | | | | |
| $D$ | × | × | × | | | | |
| $E$ | | × | × | × | | | |
| $F$ | × | × | × | | × | | |
| $G$ | × | × | × | × | × | × | |
| $H$ | × | | × | × | × | × | × |
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |

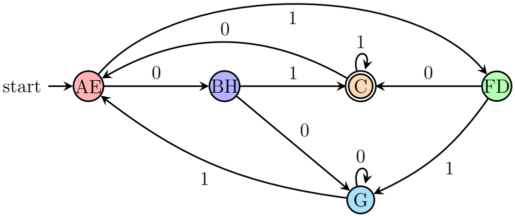
❺ 而 [A,E], [B,H] 和 [D,F] 在经过很短的字符串后, 都会到达相同状态, 因此都是等价的.

# DFA 最小化

根据等价状态, 将状态集划分成块, 构造等价的最小化 DFA.

续例 16. 构造其最小化的 DFA.



**思考题**

NFA 能否最小化?