下推自动机

- 下推自动机
- 下推自动机接受的语言
  - 从终态方式到空栈方式
  - 从空栈方式到终态方式
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

下推自动机接受的语言

定义

PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, 以两种方式接受语言:

- P 以终态方式接受的语言, 记为$\mathbf{L}(P)$, 定义为

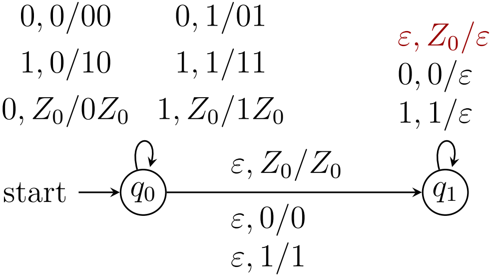
$$\mathbf{L}(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma),\ p \in F\}.$$

- P 以空栈方式接受的语言, 记为$\mathbf{N}(P)$, 定义为

$$\mathbf{N}(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

续例 2. 识别 L_{wwr} 的 PDA P, 从终态方式接受, 改为空栈方式接受.

用 $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ 代替 $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ 即可.



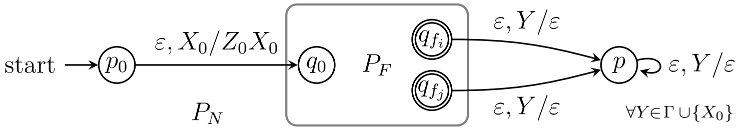
从终态方式到空栈方式

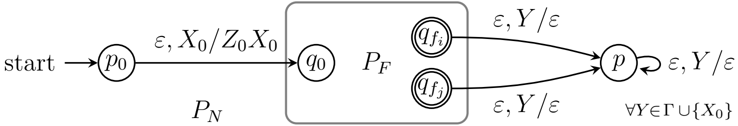
定理 25

如果 *PDA* P_F 以终态方式接受语言 L, 那么一定存在 *PDA* P_N 以空栈方式接受 L.

证明: 设 $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, 构造 PDA P_N,

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \{X_0\},\ \delta_N,\ p_0,\ X_0,\ \varnothing).$$





其中 δ_N 定义如下:

❶ P_N 首先将 P_F 的栈底符号压栈, 开始模拟 P_F:

$$\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\};$$

❷ P_N 模拟 P_F 的动作: $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_N(q, a, Y) \text{ 包含 } \delta_F(q, a, Y) \text{ 的全部元素};$$

❸ 从 $q_f \in F$ 开始弹出栈中符号, 即 $\forall q_f \in F, \forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:

$$\delta_N(q_f, \varepsilon, Y) \text{ 包含 } (p, \varepsilon);$$

❹ 在状态 p 时, 弹出全部栈中符号, 即 $\forall Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$:

$$\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_F} (q_f, \varepsilon, \gamma) & \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_F} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) & \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) & P_N\text{模拟}P_F \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) & \delta_N\text{构造}\, p_0 \text{ 部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash^*_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \vdash^*_{P_N} (p, \varepsilon, \varepsilon) & \delta_N\text{构造}\, q_f\text{和}p \text{ 部分} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N) &
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{L}(P_F) \subseteq \mathbf{N}(P_N)$.

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash^*_{P_N} (p, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_N} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_N} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \text{第一个动作必然到 } q_0 \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma X_0) \vdash^*_{P_N} (p, \varepsilon, \varepsilon) && \text{必经 } q_f \in F \text{ 消耗完 } w \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_N} (q_f, \varepsilon, \gamma) && P_N \text{ 中未用过栈底的 } X_0 \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_F} (q_f, \varepsilon, \gamma) && \text{均为模拟 } P_F \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$.

所以 $\mathbf{N}(P_N) = \mathbf{L}(P_F)$. $\square$

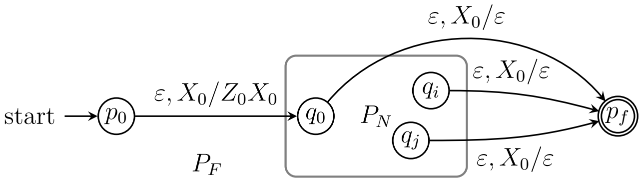
从空栈方式到终态方式

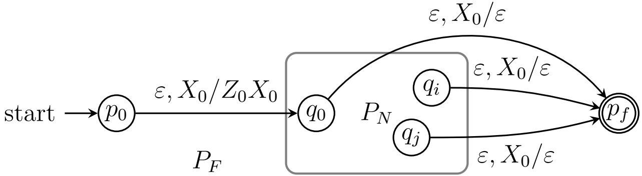
定理 26

如果 *PDA* P_N 以空栈方式接受语言 L, 那么一定存在 *PDA* P_F 以终态方式接受 L.

证明: 设 $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0, \varnothing)$. 构造 PDA P_F,

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \{X_0\},\ \delta_F,\ p_0,\ X_0,\ \{p_f\})$$





其中 δ_F 定义如下:

❶ P_F 开始时, 将 P_N 栈底符号压入栈, 并开始模拟 P_N,

$$\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\};$$

❷ P_F 模拟 P_N, $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\forall Y \in \Gamma$:

$$\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y);$$

❸ 在 $\forall q \in Q$ 时, 看到 P_F 的栈底 X_0, 则转移到新终态 p_f:

$$\delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}.$$

对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{N}(P_N) &\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P_N}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{P_N}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) && \text{定理23} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) && P_F \text{ 模拟 } P_N \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \underset{P_F}{\vdash} (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) && \delta_F \text{构造}, p_0 \text{ 部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, X_0) \underset{P_F}{\vdash} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) && \delta_F \text{构造}, p_f \text{ 部分} \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{L}(P_F)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_N) \subseteq \mathbf{L}(P_F)$.

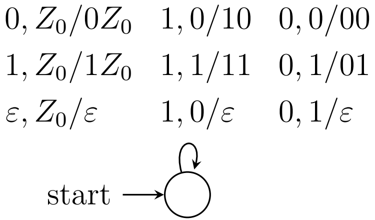
对 $\forall w \in \Sigma^*$ 有

$$
\begin{aligned}
w \in \mathbf{L}(P_F) &\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\vdash}_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \overset{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon) && \text{经 } q \text{ 才可达 } p_f \\
&\Rightarrow (p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) && P_F \text{ 第一个动作} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0X_0) \overset{*}{\vdash}_{P_F} (q, \varepsilon, X_0) && \text{即上式} \\
&\Rightarrow (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{P_N} (q, \varepsilon, \varepsilon) && P_N \text{ 与 } X_0 \text{ 无关} \\
&\Rightarrow w \in \mathbf{N}(P_N)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{N}(P_F) \subseteq \mathbf{L}(P_N)$.

所以 $\mathbf{L}(P_F) = \mathbf{N}(P_N)$. $\square$

例 3. 接受 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 中字符 0 和 1 的数量相同$\}$ 的 PDA.



例 4. 接受 $L = \{0^n 1^m \mid 0 \le n \le m \le 2n\}$ 的 PDA.