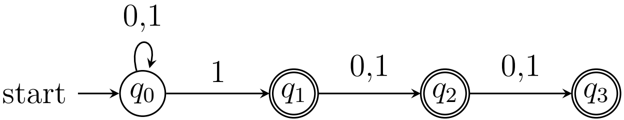
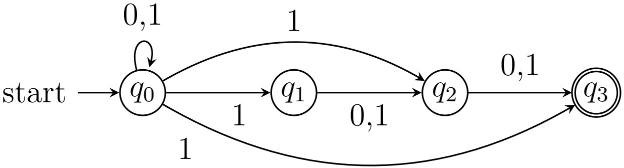
有穷自动机

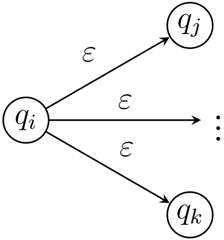
- 确定的有穷自动机
- 非确定有穷自动机
- 带有空转移的非确定有穷自动机
  - 形式定义
  - ε-闭包
  - 扩展转移函数与 ε-NFA 的语言
  - ε-NFA 与 DFA 等价性

例 11. 设计 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 NFA.



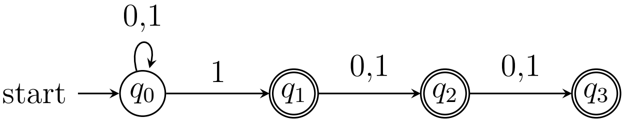


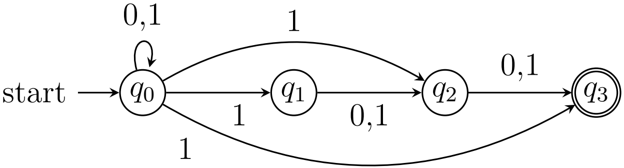
状态的 ε 转移

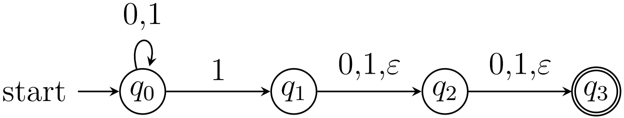


- 允许状态因空串 ε 而转移，即不消耗输入字符就发生状态的改变
- 使自动机的设计更容易

续例 11. 设计 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 NFA.







带空转移非确定有穷自动机的形式定义

定义

带空转移非确定有穷自动机(ε-NFA) A 为五元组

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

1. Q : 有穷状态集;
2. Σ : 有穷输入符号集或字母表;
3. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$, 转移函数;
4. $q_0 \in Q$: 初始状态;
5. $F \subseteq Q$: 终结状态集或接受状态集.

ε-NFA, NFA, DFA 之间的主要区别

❶ 自动机在某状态, 读入某个字符时, 可能有多个转移;

❷ 自动机在某状态, 读入某个字符时, 可能没有转移;

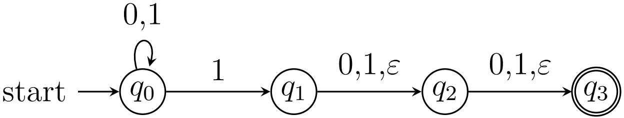
❸ 自动机在某状态, 可能不读入字符, 就进行转移.

注意

此后, 不再明确区分 ε-NFA 和 NFA,
而认为它们都是 NFA.

续例 11. 语言 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 ε-NFA.

利用 ε 转移设计:

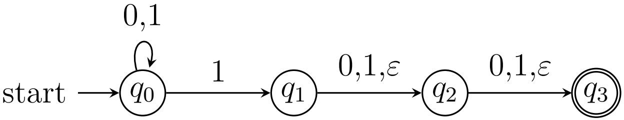


状态转移表:

	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
$*q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

续例 11. 语言 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 ε-NFA.

带有 ε 转移的状态转移图:



当输入字符串是 011 时, ε-NFA 的状态变化:

思考题

❶ 如果初始状态有 ε 转移, 第 1 个字符该如何处理?

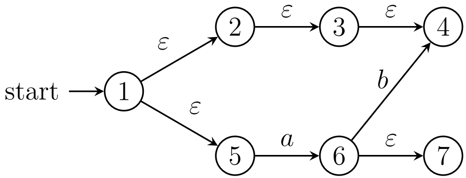
❷ 如果最后的字符所到的状态有 ε 转移呢?

状态的 ε-闭包

定义

状态 q 的ε-闭包(ε-Closure), 记为 $\textsc{Eclose}(q)$, 表示从 q 经过 $\varepsilon\varepsilon\cdots\varepsilon$ 序列可达的全部状态集合, 递归定义为:

1. $q \in \textsc{Eclose}(q)$;
2. $\forall p \in \textsc{Eclose}(q)$, 若 $r \in \delta(p, \varepsilon)$, 则 $r \in \textsc{Eclose}(q)$.



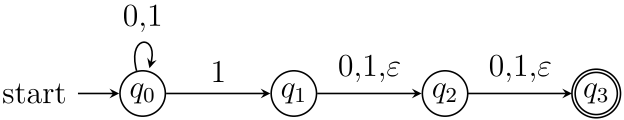
状态集合的 ε-闭包

定义

状态集 S 的 ε-闭包为

$$\text{ECLOSE}(S) = \bigcup_{q \in S} \text{ECLOSE}(q).$$

续例 11. 语言 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 NFA.



状态转移表及每个状态的闭包:

	0	1	ε	$\textsc{Eclose}(\sqcup)$
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$*q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$

扩展转移函数

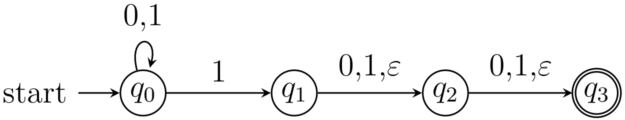
定义

扩展 δ 到字符串，定义**扩展转移函数** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ 为

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \textsc{Eclose}(q) & w = \varepsilon \\ \textsc{Eclose}\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right) & w = xa \end{cases}$$

其中 $a \in \Sigma$, $w, x \in \Sigma^*$.

续例 11. 若 $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ 倒数 3 个字符至少有一个是 $1\}$ 的 ε-NFA 如下, 求 $\hat{\delta}(q_0, 10) =$?



$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) &= \textsc{Eclose}(q_0) = \{q_0\} \\
\hat{\delta}(q_0, 1) &= \textsc{Eclose}(\cup_{p\in\hat{\delta}(q_0,\varepsilon)}\delta(p, 1)) \\
&= \textsc{Eclose}(\hat{\delta}(q_0, 1)) = \textsc{Eclose}(\{q_0, q_1\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\hat{\delta}(q_0, 10) &= \textsc{Eclose}(\cup_{p\in\hat{\delta}(q_0,1)}\delta(p, 0)) \\
&= \textsc{Eclose}(\delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) \cup \delta(q_3, 0)) \\
&= \textsc{Eclose}(\{q_0, q_2, q_3\}) = \{q_0, q_2, q_3\}
\end{aligned}
$$

ε-NFA 的语言

回顾

DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 和 NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 的语言分别为

$$\mathbf{L}(D) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\},$$
$$\mathbf{L}(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

定义

若 $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 是一个*ε-NFA*, 则 E **接受的语言**为

$$\mathbf{L}(E) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

构造与 ε-NFA 等价的 DFA

子集构造法 (ε-NFA 消除空转移)

如果 ε-NFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$, 构造 DFA

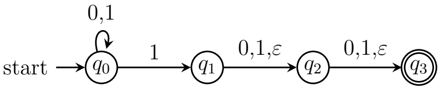
$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

1. $Q_D = 2^{Q_E}$, 或 $Q_D = \{S \subseteq Q_E \mid S = \textsc{Eclose}(S)\}$;
2. $q_D = \textsc{Eclose}(q_E)$;
3. $F_D = \{S \mid S \in Q_D, S \cap F_E \neq \emptyset\}$;
4. $\forall S \in Q_D, \forall a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \textsc{Eclose}\left(\bigcup_{p \in S} \delta_E(p, a)\right).$$

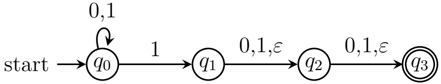
那么 $\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(E)$.

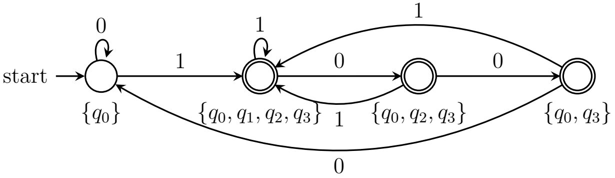
续例 11. 将下图 L 的 ε-NFA, 转为等价的 DFA.



	0	1	ε	$\textsc{Eclose}()$
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$*q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$

续例 11. 将下图 L 的 ε-NFA, 转为等价的 DFA.





	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$*\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$*\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$*\{q_0, q_3\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

ε-NFA 与 DFA 等价性

定理 2

如果语言 L 被 ε-NFA 接受，当且仅当 L 被 DFA 接受.

证明: 必要性显然成立, 因为任何 DFA 都是 ε-NFA.
为证明充分性, 对 w 归纳, 往证 $\hat{\delta}_E(q_E, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$.

❶ 当 $w = \varepsilon$ 时

$$\hat{\delta}_E(q_E, \varepsilon) = \textsc{Eclose}(q_E) = q_D = \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon).$$

❷ 当 $w = xa$ 时

$$\hat{\delta}_E(q_E, xa) = \textsc{Eclose}\Bigg(\bigcup_{p\in\hat{\delta}_E(q_E,x)} \delta_E(p,a)\Bigg) = \textsc{Eclose}\Bigg(\bigcup_{p\in\hat{\delta}_D(q_D,x)} \delta_E(p,a)\Bigg)$$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, x), a) = \hat{\delta}_D(q_D, xa) \quad \square$$

例 12. Design ε-NFA for language: $\{0^k \mid k \text{ is a multiple of 2 or 3}\}$.