正则语言的性质

- 正则语言的泵引理
- 正则语言的封闭性
- 正则语言的判定性质
- 自动机的最小化

正则语言的封闭性

定义

正则语言经某些运算后得到的新语言仍保持正则，
称正则语言在这些运算下封闭.

正则语言 L 和 M, 在这些运算下封闭

- 并: $L \cup M$
- 连接: LM
- 闭包: L^*
- 补: $\overline{L}$
- 差: $L - M$
- 交: $L \cap M$
- 反转: $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$
- 同态: $h(L) = \{h(w) \mid w \in L, \text{同态 } h : \Sigma \to \Gamma^*\}$
- 逆同态:
  $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L \subseteq \Gamma^*, \text{同态 } h : \Sigma \to \Gamma^*\}$

定理 6 (并/连接/闭包的封闭性)

正则语言在并, 连接和闭包运算下保持封闭.

证明: 由正则表达式的定义得证. $\square$

定理 7 (补运算封闭性)

如果 L 是 Σ 上的正则语言, 那么 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ 也是正则的.

证明:
设接受语言 L 的 DFA

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F\,)$$

即 $\mathbf{L}(A) = L$. 构造 DFA

$$B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F\,)$$

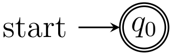
则有 $\overline{L} = \mathbf{L}(B)$, 因为 $\forall w \in \Sigma^*$

$$w \in \overline{L} \iff \hat{\delta}(q_0, w) \notin F \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in Q - F \iff w \in \mathbf{L}(B). \quad \square$$

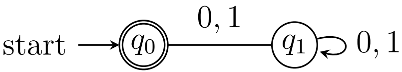
注意

使用这种方法求正则语言的补时, DFA 不能有缺失状态.

例 8.
若 $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{\varepsilon\}$ 的 DFA 如图, 请给出 $\overline{L}$ 的 DFA.



应使用完整的 DFA 去求补:



思考题

如何求正则表达式的补？

例 9. 证明 $L_{neq} =\{w \mid w$ 由数量不相等的 0 和 1 构成$\}$ 不是正则的.

- 由泵引理不易直接证明 L_{neq} 不是正则的

- 因为无论如何取 w, 将其分为三部分 $w = xyz$ 时,
  都不易产生 L_{neq} 之外的串

- 而证明 $L_{eq} = \overline{L_{neq}}$ 非正则很容易

- 由补运算的封闭性, 所以 L_{neq} 也不是正则的

定理 8

若 DFA A_L, A_M 和 A 的定义如下

$$
\begin{aligned}
A_L &= (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L) \\
A_M &= (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M) \\
A &= (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\delta : (Q_L \times Q_M) \times \Sigma \to Q_L \times Q_M& \\
\delta((p, q), a) = (\delta_L(p, a), \delta_M(q, a)).&
\end{aligned}
$$

则对任意 $w \in \Sigma^*$,

$$\hat{\delta}((q_L, q_M), w) = (\hat{\delta}(q_L, w), \hat{\delta}(q_M, w)).$$

证明: 通过对 w 的归纳来证明.

归纳基础：当 $w=\varepsilon$ 时

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}((q_L,q_M),\varepsilon) &= (q_L,q_M) && \hat{\delta}\text{ 的定义} \\
&= (\hat{\delta}_L(q_L,\varepsilon),\hat{\delta}_M(q_M,\varepsilon)) && \text{同理}
\end{aligned}$$

归纳递推：当 $w=xa$ 时

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}((q_L,q_M),xa) &= \delta(\hat{\delta}((q_L,q_M),x),a) && \hat{\delta}\text{ 的定义} \\
&= \delta((\hat{\delta}(q_L,x),\hat{\delta}(q_M,x)),a) && \text{归纳假设} \\
&= (\delta_L(\hat{\delta}_L(q_L,x),a),\delta_M(\hat{\delta}_M(q_M,x),a)) && \delta\text{ 的构造} \\
&= (\hat{\delta}_L(q_L,xa),\hat{\delta}_M(q_M,xa)) && \hat{\delta}\text{ 的定义} \quad \square
\end{aligned}$$

定理 9 (交运算封闭性)

如果 L 和 M 是正则语言, 那么 $L \cap M$ 也是正则语言.

证明 1: 由 $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$ 得证. $\square$

证明 2: 由定理 8 构造识别 $L \cap M$ 的 DFA A, 则 $\forall w \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} w \in L \cap M &\iff \hat{\delta}_L(q_L, w) \in F_L \wedge \hat{\delta}_M(q_M, w) \in F_M \\ &\iff (\hat{\delta}_L(q_L, w), \hat{\delta}_M(q_M, w)) \in F_L \times F_M \\ &\iff \hat{\delta}((q_L, q_M), w) \in F_L \times F_M \\ &\iff w \in \mathbf{L}(A). \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{L}(A) = L \cap M$, 所以 $L \cap M$ 也是正则的. $\square$

例 10. 如果已知语言

$$L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

不是正则的，请用封闭性证明语言

$$L_{eq} = \{w \mid w \text{ 由数量相等的 0 和 1 构成}\}$$

也不是正则的.

证明:

❶ 首先，因为 $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ 是正则语言;

❷ 而 $L_{01} = \mathbf{L}(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*) \cap L_{eq}$;

❸ 如果 L_{eq} 是正则的，L_{01} 必然也是正则的;

❹ 因为已知 L_{01} 不是正则的，所以 L_{eq} 一定不是正则的. □

思考题

为什么又能用 L_{eq} 的子集 L_{01} 是非正则的，来证明 L_{eq} 是非正则的呢?

例 11. 如果 L_1 和 L_2 都不是正则的, 那么 $L_1 \cap L_2$ 一定不是正则的吗?

不一定. 因为, 如果令

$$L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

显然两者都不是正则语言, 但

$$L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$$

是正则语言.

定理 10 (差运算封闭性)

如果 L 和 M 都是正则语言, 那么 $L - M$ 也是正则的.

证明: $L - M = L \cap \overline{M}$. $\square$

定义

字符串 $w = a_1a_2\dots a_n$ 的反转, 记为 w^R, 定义为

$$w^R = a_na_{n-1}\dots a_1.$$

语言 L 的反转, 记为 L^R, 定义为

$$L^R = \{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\}.$$

定理 11 (反转的封闭性)

如果 L 是正则语言, 那么 L^R 也是正则的.

两种证明方法:

- 对正则表达式 E 的结构归纳, 往证
$$\mathbf{L}(E^R) = (\mathbf{L}(E))^R.$$
- 由识别 L 的 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$, 构造识别 L^R 的 ε-NFA
$$B = (Q, \Sigma, \delta_B, q_s, \{q_0\})$$
  1. 将 A 的初始状态 q_0, 改为唯一的接受状态;
  2. 将 A 的边调转方向: 如果 $\delta_A(q, a) = p$, 那么 $\delta_B(p, a) = q$;
  3. 新增初始状态 q_s, 且令 $\delta_B(q_s, \varepsilon) = F$;
  4. 往证 $\mathbf{L}(B) = L^R$.

例 12. 语言 L 及其反转 L^R 分别为

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ends in 01.}\}$$

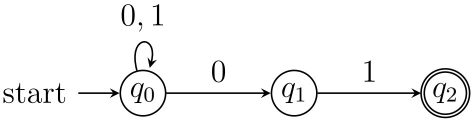
$$L^R = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ starts with 10.}\}$$

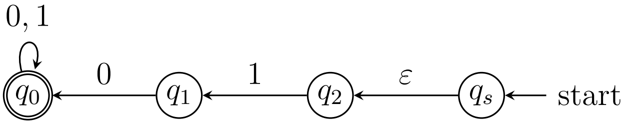
正则表达式分别为

$$L = (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$$

$$L^R = \mathbf{10}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*.$$

自动机分别为





证明:
往证如果有正则表达式 E, 则存在正则表达式 E^R 使

$$\mathbf{L}(E^R) = (\mathbf{L}(E))^R.$$

归纳基础:

1. 当 $E = \emptyset$ 时, 有 $\emptyset^R = \emptyset$;
2. 当 $E = \boldsymbol{\varepsilon}$ 时, 有 $\boldsymbol{\varepsilon}^R = \boldsymbol{\varepsilon}$;
3. $\forall a \in \Sigma$, 当 $E = \mathbf{a}$ 时, 有 $\mathbf{a}^R = \mathbf{a}$;

都满足 $\mathbf{L}(E^R) = (\mathbf{L}(E))^R$, 因此命题成立.

归纳递推:

❶ 当 $E = E_1 + E_2$ 时, 有 $(E_1 + E_2)^R = E_1^R + E_2^R$

$$
\begin{aligned}
& (\mathbf{L}(E_1 + E_2))^R \\
&= (\mathbf{L}(E_1) \cup \mathbf{L}(E_2))^R && \text{正则表达式的加} \\
&= \{w^R \mid w \in \mathbf{L}(E_1) \cup w \in \mathbf{L}(E_2)\} && \text{语言的反转} \\
&= (\mathbf{L}(E_1))^R \cup (\mathbf{L}(E_2))^R && \text{同上} \\
&= \mathbf{L}(E_1^R) \cup \mathbf{L}(E_2^R) && \text{归纳假设} \\
&= \mathbf{L}(E_1^R + E_2^R) && \text{正则表达式的加}
\end{aligned}
$$

归纳递推:

❶ 当 $E = E_1 + E_2$ 时, 有 $(E_1 + E_2)^R = E_1^R + E_2^R$

❷ 当 $E = E_1 E_2$ 时, 有 $(E_1 E_2)^R = E_2^R E_1^R$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{L}(E_1E_2))^R &= (\mathbf{L}(E_1)\mathbf{L}(E_2))^R && \text{正则表达式的连接} \\
&= \{w_1w_2 \mid w_1 \in \mathbf{L}(E_1), w_2 \in \mathbf{L}(E_2)\}^R && \text{语言的连接} \\
&= \{(w_1w_2)^R \mid w_1 \in \mathbf{L}(E_1), w_2 \in \mathbf{L}(E_2)\} && \text{语言的反转} \\
&= \{w_2^R w_1^R \mid w_1 \in \mathbf{L}(E_1), w_2 \in \mathbf{L}(E_2)\} && \text{字符串的反转} \\
&= \{w_2^R \mid w_2 \in \mathbf{L}(E_2)\}\{w_1^R \mid w_1 \in \mathbf{L}(E_1)\} && \text{语言的连接} \\
&= (\mathbf{L}(E_2))^R(\mathbf{L}(E_1))^R && \text{语言的反转} \\
&= \mathbf{L}(E_2^R)\mathbf{L}(E_1^R) = \mathbf{L}(E_2^R E_1^R) && \text{正则表达式的连接}
\end{aligned}
$$

归纳递推:

❶ 当 $E = E_1 + E_2$ 时, 有 $(E_1 + E_2)^R = E_1^R + E_2^R$

❷ 当 $E = E_1E_2$ 时, 有 $(E_1E_2)^R = E_2^RE_1^R$

❸ 当 $E = E_1^*$ 时, 有 $(E_1^*)^R = (E_1^R)^*$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{L}(E_1^*))^R \\
&= \{w_1w_2\ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1)\}^R && \text{正则表达式的闭包} \\
&= \{(w_1w_2\ldots w_n)^R \mid n \geq 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1)\} && \text{语言的反转} \\
&= \{w_n^Rw_{n-1}^R\ldots w_1^R \mid n \geq 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1)\} && \text{字符串的反转} \\
&= \{w_n^Rw_{n-1}^R\ldots w_1^R \mid n \geq 0, w_i^R \in \mathbf{L}(E_1^R)\} && \text{归纳假设} \\
&= \{w_1w_2\ldots w_n \mid n \geq 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1^R)\} && \text{变量重命名} \\
&= \mathbf{L}((E_1^R)^*) && \text{正则表达式的闭包}
\end{aligned}
$$

都满足 $(\mathbf{L}(E))^R = \mathbf{L}(E^R)$, 因此命题成立, 所以 L^R 也是正则语言. □

同态

定义

若 Σ 和 Γ 是两个字母表，**同态**定义为函数 $h : \Sigma \to \Gamma^*$

$$\forall a \in \Sigma,\ h(a) \in \Gamma^*.$$

扩展 h 的定义到字符串，

$$\begin{aligned} &(1) \quad h(\varepsilon) = \varepsilon \\ &(2) \quad h(xa) = h(x)h(a) \end{aligned}$$

再扩展 h 到语言，对 $\forall L \subseteq \Sigma^*$，

$$h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}.$$

例 13. 若由 $\Sigma = \{0, 1\}$ 到 $\Gamma = \{a, b\}$ 的同态函数 h 为

$$h(0) = ab, \quad h(1) = \varepsilon.$$

则 Σ 上的字符串 0011, 在 h 的作用下

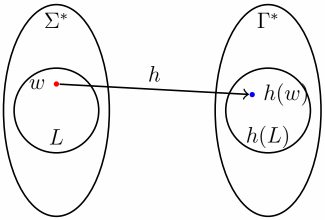
$$\begin{aligned} h(0011) &= h(0)h(0)h(1)h(1) \\ &= abab\varepsilon\varepsilon = abab. \end{aligned}$$

语言 $L = \mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}$, 在 h 的作用下, $h(L)$ 为:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}) &= (h(\mathbf{1}))^* h(\mathbf{0}) + (h(\mathbf{0}))^* h(\mathbf{1}) \\ &= (\varepsilon)^*(ab) + (ab)^*(\varepsilon) \\ &= (ab)^* \end{aligned}$$

定理 12 (同态的封闭性)

若 L 是字母表 Σ 上的正则语言, h 是 Σ 上的同态,
则 $h(L)$ 也是正则的.



- 若 L 的正则表达式为 E, 即 $L = \mathbf{L}(E)$, 按如下规则构造表达式 $h(E)$

$$
\begin{aligned}
h(\emptyset) &= \emptyset & \qquad h(\mathbf{r}+\mathbf{s}) &= h(\mathbf{r}) + h(\mathbf{s}) \\
h(\varepsilon) &= \varepsilon & h(\mathbf{rs}) &= h(\mathbf{r})h(\mathbf{s}) \\
\forall a \in \Sigma,\ h(\mathbf{a}) &= h(a) & h(\mathbf{r}^*) &= (h(\mathbf{r}))^*
\end{aligned}
$$

- 往证 $\mathbf{L}(h(E)) = h(\mathbf{L}(E))$, 而 $h(E)$ 显然也是正则表达式, 因此 $h(L)$ 正则

证明: 对 E 的结构归纳, 往证 $\mathbf{L}(h(E)) = h(\mathbf{L}(E))$.
归纳基础:

- 当 $E = \varepsilon$ 时

$$h(\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})) = h(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{L}(h(\boldsymbol{\varepsilon}))$$

- 当 $E = \emptyset$ 时

$$h(\mathbf{L}(\emptyset)) = h(\emptyset) = \emptyset = \mathbf{L}(\emptyset) = \mathbf{L}(h(\emptyset))$$

- $\forall a \in \Sigma$, 当 $E = \mathbf{a}$ 时

$$h(\mathbf{L}(\mathbf{a})) = h(\{a\}) = \{h(a)\} = \mathbf{L}(h(a)) = \mathbf{L}(h(\mathbf{a}))$$

所以命题成立.

归纳递推: 假设对正则表达式 F, G 分别有

$$\mathbf{L}(h(F)) = h(\mathbf{L}(F)), \quad \mathbf{L}(h(G)) = h(\mathbf{L}(G))$$

- 当 $E = F + G$ 时:

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{L}(F+G)) &= h(\mathbf{L}(F) \cup \mathbf{L}(G)) && \text{正则表达式的加} \\
&= h(\mathbf{L}(F)) \cup h(\mathbf{L}(G)) && h\ \text{作用在每个集合的串上} \\
&= \mathbf{L}(h(F)) \cup \mathbf{L}(h(G)) && \text{归纳假设} \\
&= \mathbf{L}(h(F) + h(G)) && \text{正则表达式的加} \\
&= \mathbf{L}(h(F+G)) && h(F+G)\ \text{的定义}
\end{aligned}$$

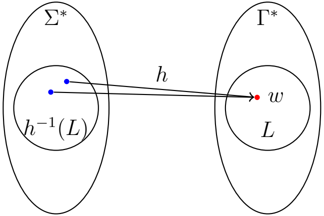
- 当 $E = FG$ 时: 略
- 当 $E = F^*$ 时: 略 $\square$

逆同态

定义

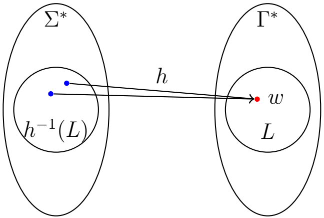
若 h 是字母表 Σ 到 Γ 的同态, 且 L 是 Γ 上的语言, 那么使 $h(w) \in L$ 的 w $(w \in \Sigma^*)$ 的集合, 称为语言 L 的 h 逆, 记为 $h^{-1}(L)$, 即

$$h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L\}.$$



定理 13 (逆同态的封闭性)

如果 h 是字母表 Σ 到 Γ 的同态，L 是 Γ 上的正则语言，那么 $h^{-1}(L)$ 也是正则语言.

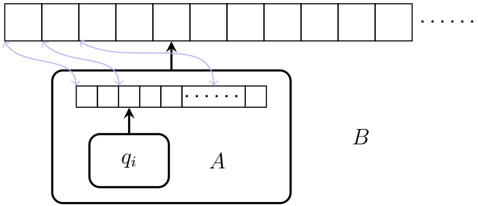


证明: 由 L 的 DFA $A = (Q, \Gamma, \delta, q_0, F)$, 构造识别 $h^{-1}(L)$ 的 DFA

$$B = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F),$$

其中

$$\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, h(a)).$$



为证明 $\mathbf{L}(B) = h^{-1}(L)$, 先证明 $\hat{\delta}'(q, w) = \hat{\delta}(q, h(w))$.

对 $|w|$ 归纳, 往证 $\hat{\delta}'(q,w)=\hat{\delta}(q,h(w))$.

❶ 归纳基础: 若 $w=\varepsilon$

$$\hat{\delta}(q,h(\varepsilon))=\hat{\delta}(q,\varepsilon)=q=\hat{\delta}'(q,\varepsilon),$$

❷ 归纳递推: 若 $w=xa$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}'(q,xa) &= \delta'(\hat{\delta}'(q,x),a) && \hat{\delta}' \text{ 定义} \\
&= \delta'(\hat{\delta}(q,h(x)),a) && \text{归纳假设} \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,h(x)),h(a)) && \delta' \text{ 构造} \\
&= \hat{\delta}(q,h(x)h(a)) && \text{DFA 节例 5} \\
&= \hat{\delta}(q,h(xa)).
\end{aligned}$$

所以 $\forall w\in\Sigma^*$, $\hat{\delta}'(q_0,w)=\hat{\delta}(q_0,h(w))\in F$, 即
w 被 B 接受当且仅当 $h(w)$ 被 A 接受, B 是识别 $h^{-1}(L)$ 的 DFA,
因此 $h^{-1}(L)$ 是正则的. □

例 14. Prove that $L = \{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$ is a language not regular.

证明: 设同态 $h : \{0, 1\} \to \{0, 1\}^*$ 为

$$h(0) = 0,$$

$$h(1) = 11,$$

那么

$$h^{-1}(L) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} = L_{01},$$

我们已知 L_{01} 非正则, 由封闭性, L 不是正则的. $\square$

例 15. 若语言 $L = (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$, 同态 $h : \{a, b\} \to \{0, 1\}^*$ 为

$$h(a) = 01, \quad h(b) = 10,$$

请证明 $h^{-1}(L) = (\mathbf{ba})^*$.

证明: 往证 $h(w) \in L \iff w = (ba)^n$.

$(\Leftarrow)$ 若 $w = (ba)^n$, 而 $h(ba) = 1001$, 因此 $h(w) = (1001)^n \in L$.

$(\Rightarrow)$ 若 $h(w) \in L$, 假设 $w \notin (\mathbf{ba})^*$, 则只能有四种情况:

1. w 以 a 开头, 则 $h(w)$ 以 01 开头, 显然 $h(w) \notin (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$;
2. w 以 b 结尾, 则 $h(w)$ 以 10 结尾, 显然 $h(w) \notin (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$;
3. w 有连续的 a, 即 $w = xaay$, 则 $h(w) = z1010v$, 则显然 $h(w) \notin (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$;
4. w 有连续的 b, 即 $w = xbby$, 则 $h(w) = z0101v$, 则显然 $h(w) \notin (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$;

因此 w 只能是 $(ba)^n, n \geq 0$ 的形式. $\square$