# 形式语言与自动机理论

## 下推自动机

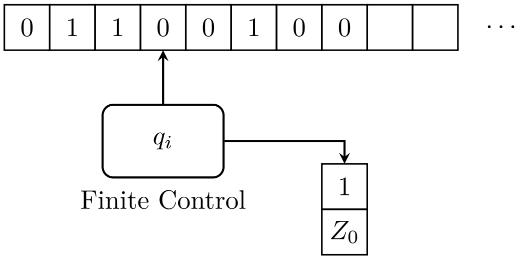
王春宇

计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

# 下推自动机

- 下推自动机
  - 形式定义
  - 瞬时描述和转移符号
- 下推自动机接受的语言
- 下推自动机与文法的等价性
- 确定型下推自动机

# 下推自动机



# 下推自动机的形式定义

**定义**

下推自动机(*PDA*, *Pushdown Automata*) $P$ 为七元组

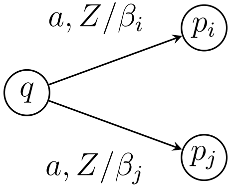
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

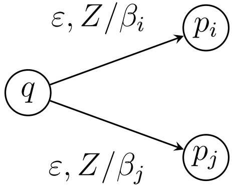
1. $Q$, 有穷状态集;
2. $\Sigma$, 有穷输入符号集;
3. $\Gamma$, 有穷栈符号集;
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, 状态转移函数;
5. $q_0 \in Q$, 初始状态;
6. $Z_0 \in \Gamma - \Sigma$, 栈底符号;
7. $F \subseteq Q$, 接收状态集或终态集.

# PDA 的动作和状态转移图

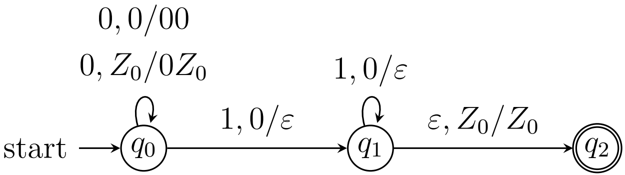
如果 $q, p_i \in Q \ (1 \leq i \leq m)$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$, $\beta_i \in \Gamma^*$,
可以有动作:

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\}, \text{ 或}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2), \cdots, (p_m, \beta_m)\}.$$

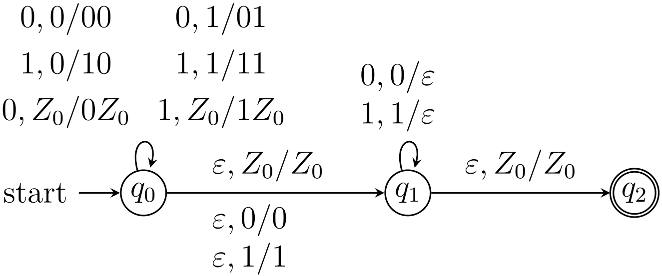


例 1. 设计识别 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA.



例 2. 设计识别 $L_{wwr} = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$ 的 PDA.



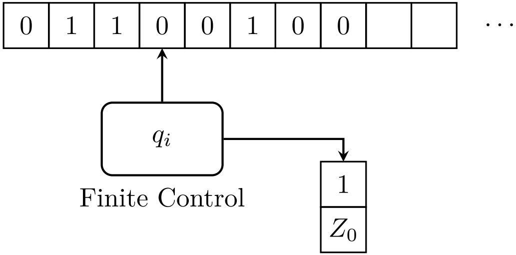
# 瞬时描述

**定义**

为描述 *PDA* 瞬间的格局，定义 $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ 中三元组

$$(q, w, \gamma)$$

为瞬时描述(*ID*, *Instantaneous Description*)，表示此时 *PDA* 处于状态 $q$，剩余输入串 $w$，栈为 $\gamma$.



# 转移符号

**定义**

在 PDA $P$ 中如果 $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$, 由 $(q, aw, Z\alpha)$ 到 $(p, w, \beta\alpha)$ 的变化, 称为 $ID$ 的**转移** $\vdash_P$, 记为

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash_P (p, w, \beta\alpha)$$

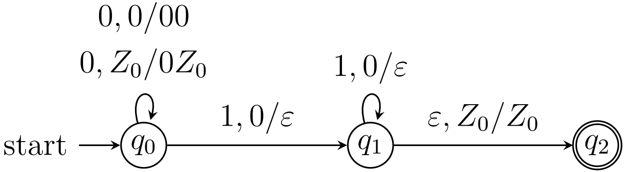
其中 $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

若有 $ID$ $I$, $J$ 和 $K$, 递归定义 $\overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$ 为:

1. $I \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} I$;
2. 若 $I \vdash_P J$, $J \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} K$, 则 $I \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} K$.

若 $P$ 已知, 可省略, 记为 $\vdash$ 和 $\overset{*}{\vdash}$ .

续例 1. 语言 $L_{01} = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ 的 PDA, 识别 0011 时的 ID 序列.



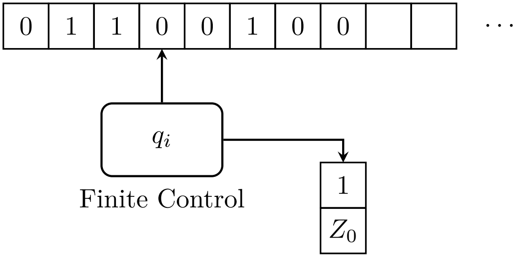
**定理 23**

对 $\forall w \in \Sigma^*, \forall \gamma \in \Gamma^*$, 如果

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta),$$

那么

$$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (p, yw, \beta\gamma).$$



**定理 24**

对 $\forall w \in \Sigma^*$，如果

$$(q, xw, \alpha) \vdash_P^* (p, yw, \beta),$$

那么

$$(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta).$$