Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ
О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2

По дисциплине «Практическая линейная алгебра»
на тему: «2D-преобразования»

Студенты:
Гизбрехт В.Д. группа 1
Ли Х.С. группа 1
Лаврик В.В. группа 3

Проверил:

г. Санкт-Петербург
2024

Подготовка

Выбор чисел a, b, c, d (не равны 0, 1, -1):

A = 2
B = -3
C = 4
D = -5

В качестве многоугольника возьмем квадрат:
[1, 1]
[2, 1]
[2, 2]
[1, 2]

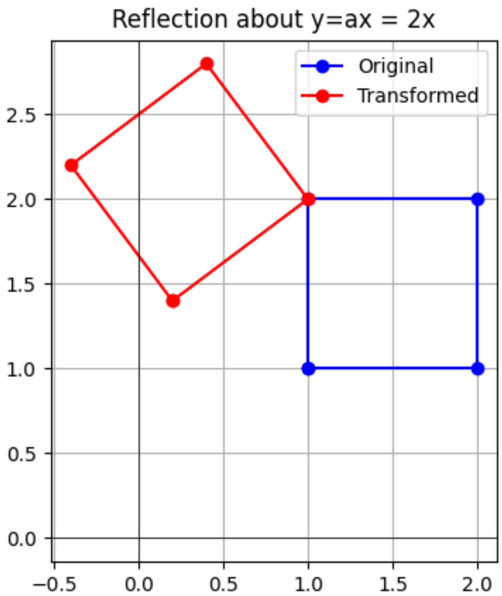
Задание 1

Пункт 1

Прямая y=ax имеет угол наклона θ, где tan(θ) = a

Чтобы отразить точку относительно прямой y = ax, можно использовать следующую формулу для матрицы отражения:

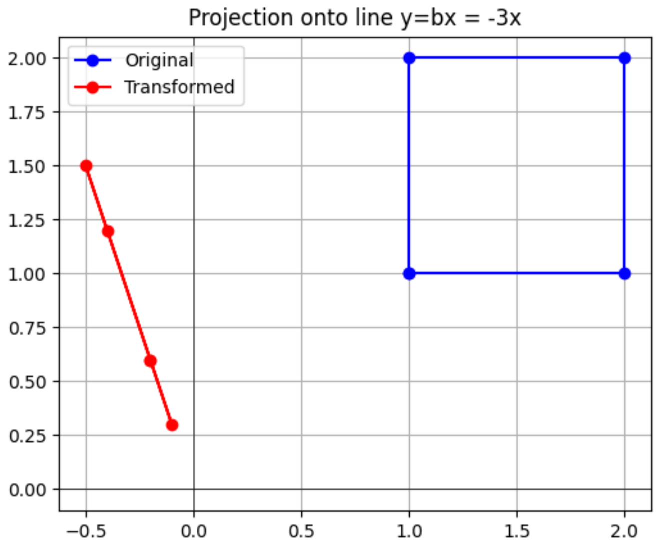
$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4 \\ 4 & 3\end{pmatrix}$$



Пункт 2

Проекция точки на прямую y=bx означает, что любая точка плоскости (x, y) отображается на ближайшую точку на прямой y = bx. Матрица проекции в данном случае имеет вид:

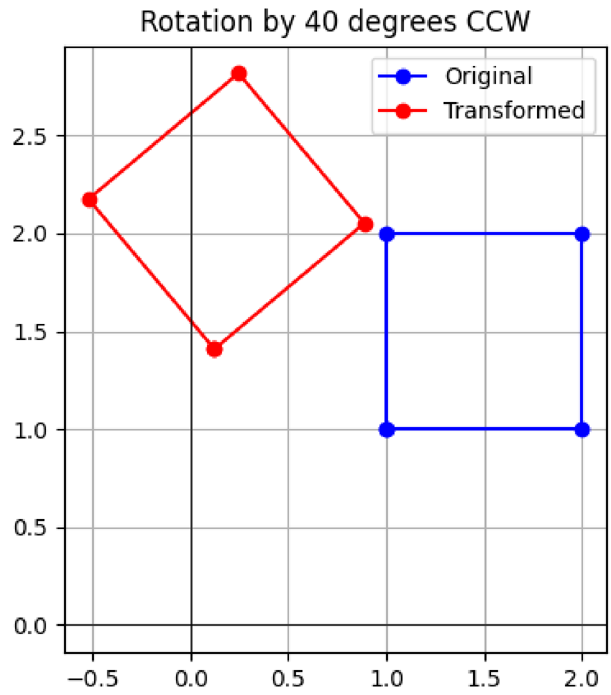
$$A = \frac{1}{1+b^2}\begin{pmatrix}1 & b \\ b & b^2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -3 \\ -3 & 9\end{pmatrix}$$



Пункт 3

Поворот на 40◦ против часовой стрелки. Из курса линейной алгебры мы знаем, что поворот в полярной системе координат осуществляется с помощью следующего оператора:

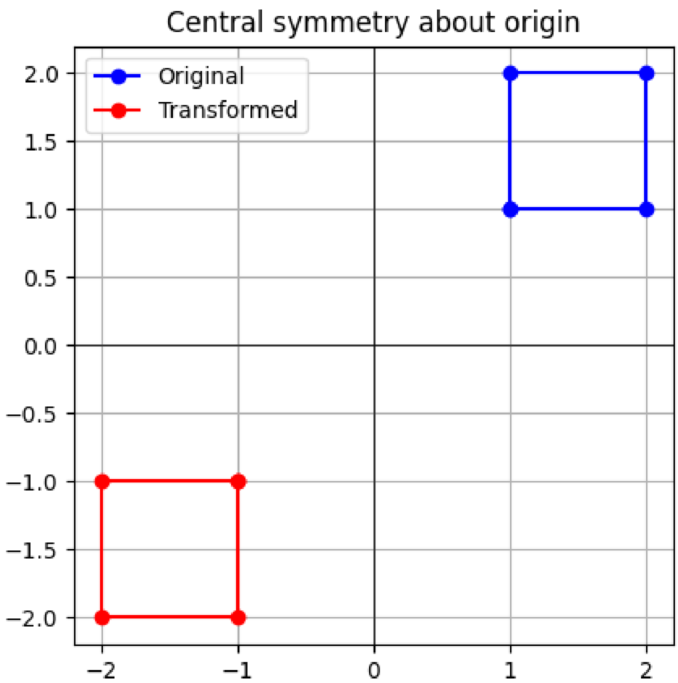
$$\begin{pmatrix} \cos(40^\circ) & -\sin(40^\circ) \\ \sin(40^\circ) & \cos(40^\circ) \end{pmatrix}$$



Пункт 4

Для инверсии используем матрицу:

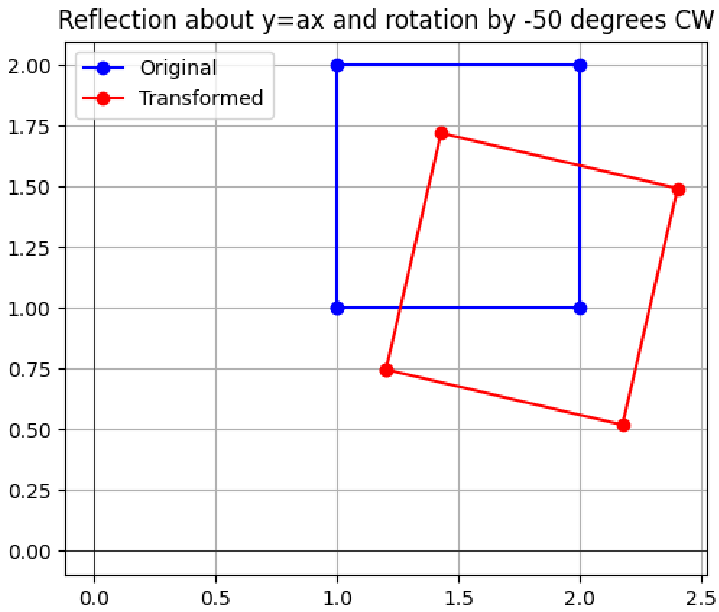
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Пункт 5

Отображение y = ax берем из пункта 1, а поворот реализуем с помощью матрицы:

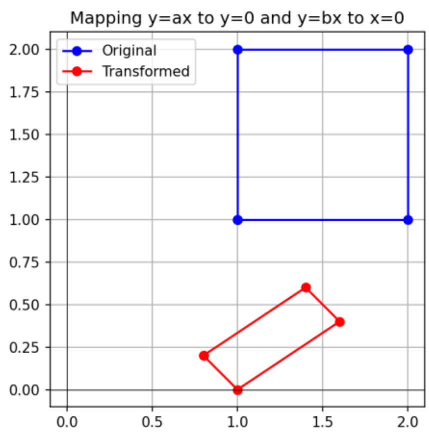
$$\begin{pmatrix} \cos(40^\circ) & -\sin(40^\circ) \\ \sin(40^\circ) & \cos(40^\circ) \end{pmatrix}$$



Пункт 6

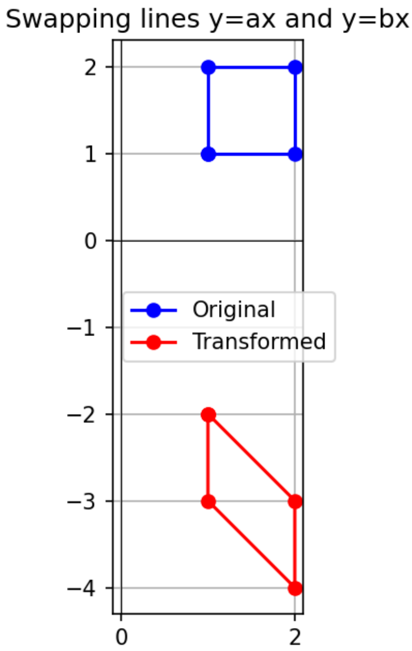
Данное отображение является обратным к предыдущему, где преобразовывались прямые y=0 и x=0. Получаем матрицу:

$$M = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b & -a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Пункт 7

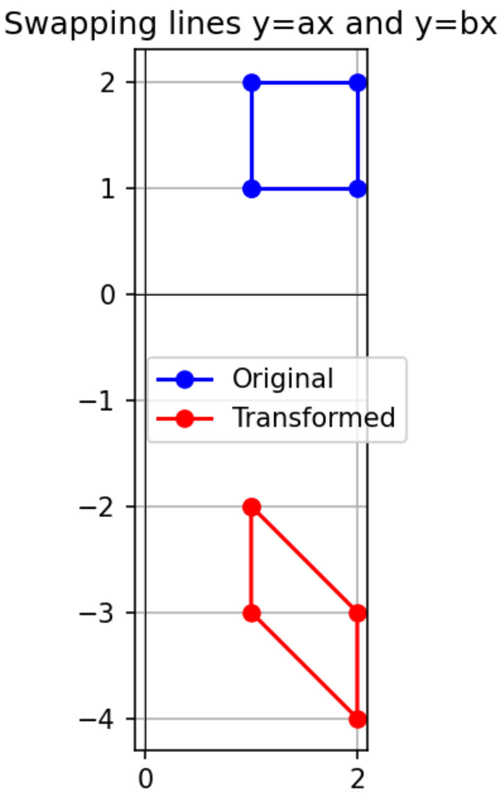
Здесь сначала преобразуем прямые y=ax и y=bx в y=0и x=0, а затем обратно.



Пункт 8

Это композиция из двух матриц: сначала прямые y=ax и y=bx преобразуются в y=0 и x=0, затем наоборот. Итоговая матрица

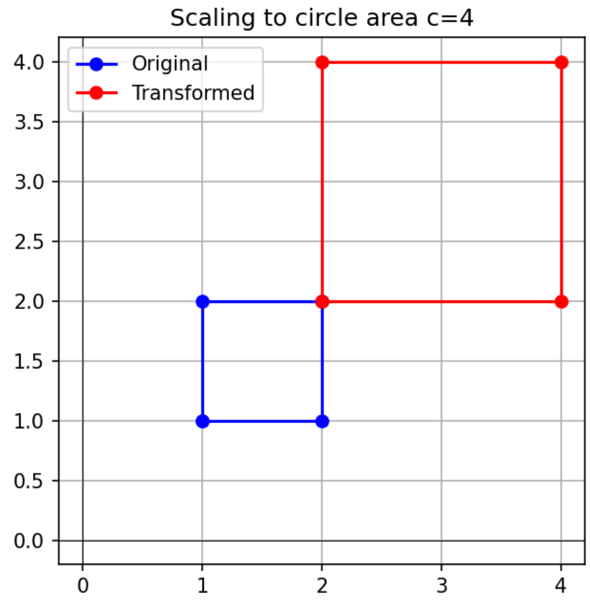
$$M = M_2 * M_1 = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b-1 & 1-a \\ b^2-a & a-ab \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$



Пункт 9

Здесь используется матрица растяжения на константу t, которая пропорционально увеличивает площадь круга до c:

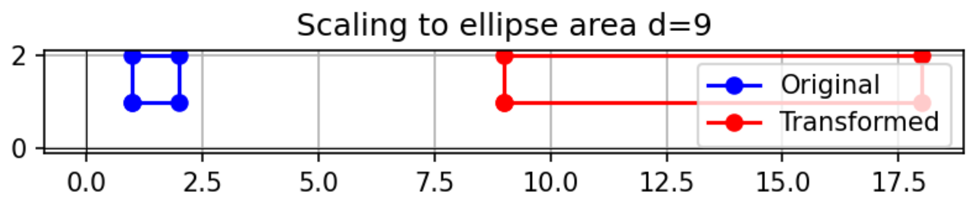
$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{c} & 0 \\ 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Пункт 10

Используется аффинное преобразование, увеличивающее площадь до d, но с различным коэффициентом по осям

$$M = C \cdot J \cdot C^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 95 & 45 \\ 45 & 143 \end{pmatrix}$$

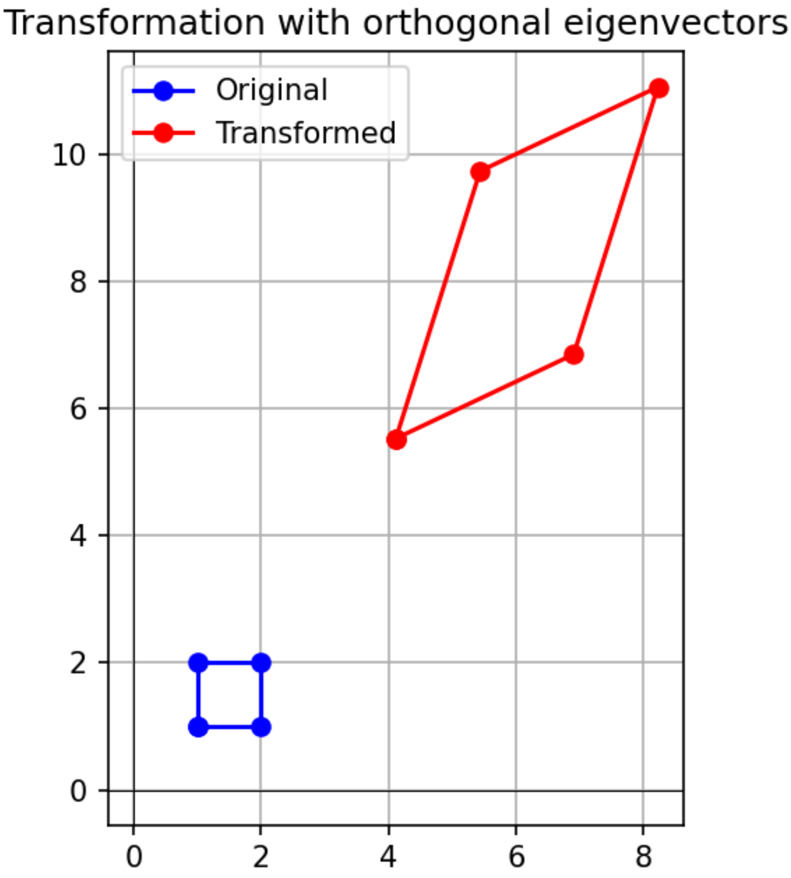


Пункт 11

Используем матрицу вида

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

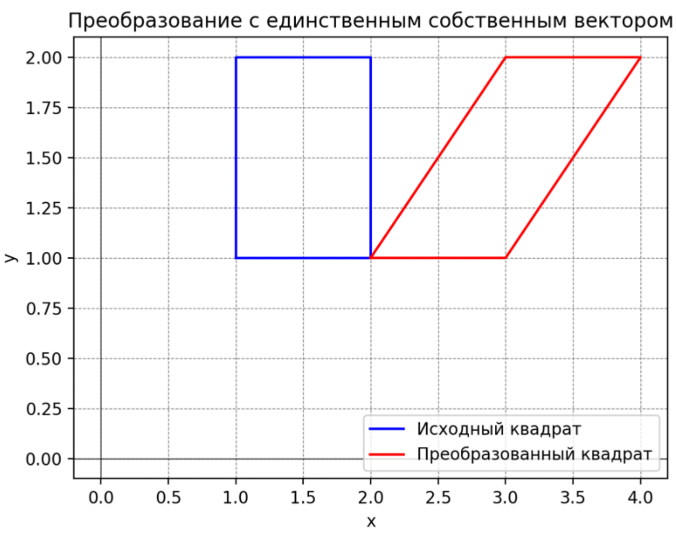
У такой матрицы единственное собственное значение λ=a, а собственные векторы коллинеарные, так, как только один собственный вектор.



Пункт 12

Матрица, имеющая один собственный вектор:

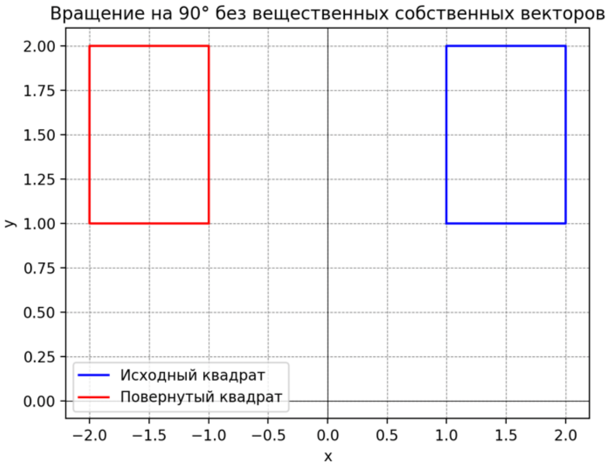
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = 1, v = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$



Пункт 13

Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора, часто задаётся вещественной матрицей вращения**.** Для вращения на угол 90° матрица вращения будет:

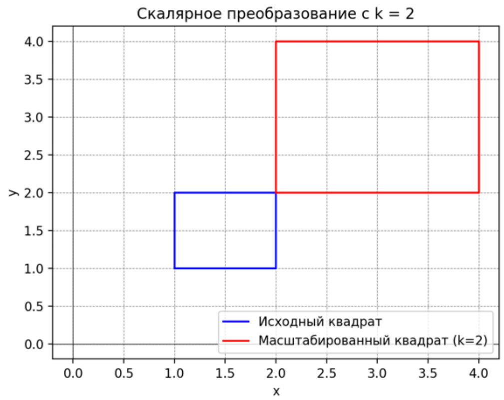
$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Пункт 14

Для отображения, при котором любой ненулевой вектор является собственным**,** используется скалярное преобразование**.** Это отображение задаётся матрицей, являющейся скалярным множителем от единичной матрицы.

$$A = k * I = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



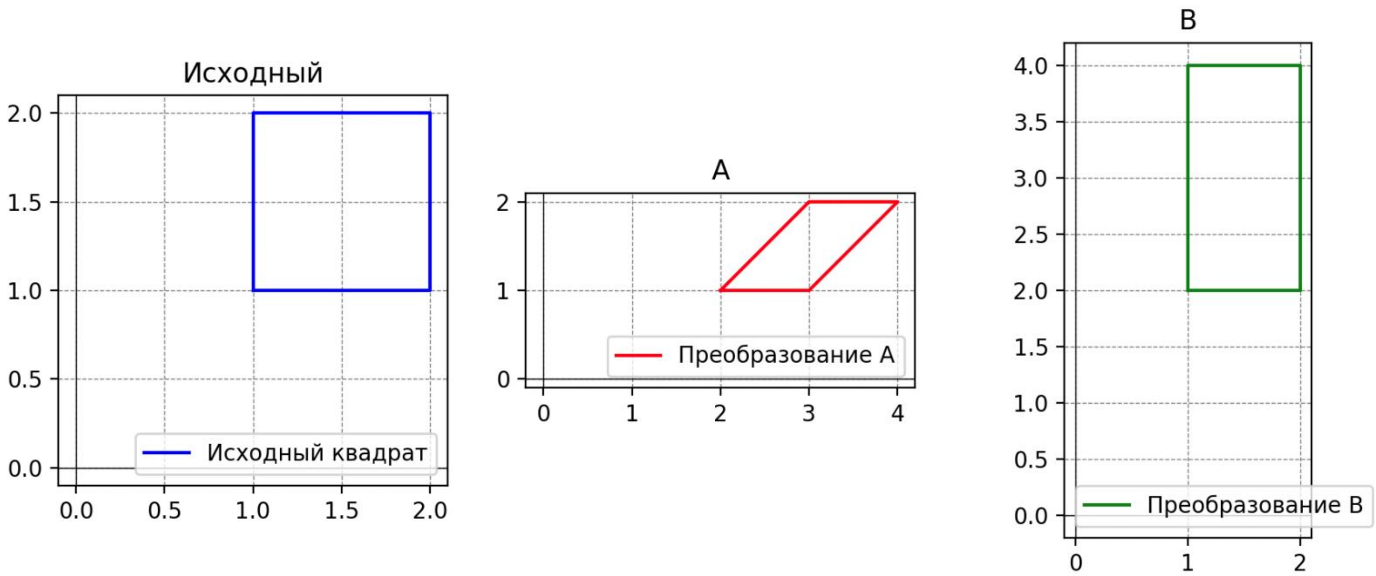
Пункт 15

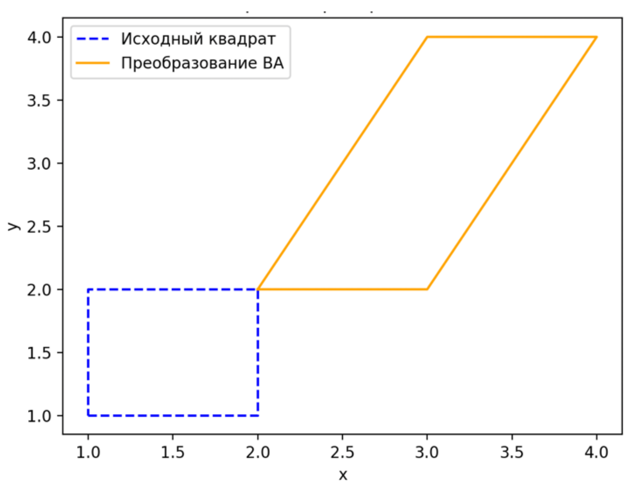
Матрица сдвига A: смещает точки по оси x на величину, зависящую от y:

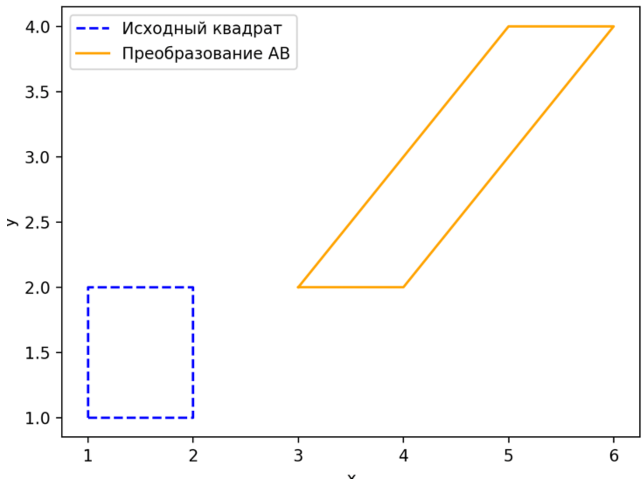
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица масштабирования B: масштабирует точки по оси y:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$







Порядок применения этих матриц важен, потому что AB ≠ BA. При умножении AB сдвиг будет применён после масштабирования, а в случае BA — наоборот.

Пункт 16

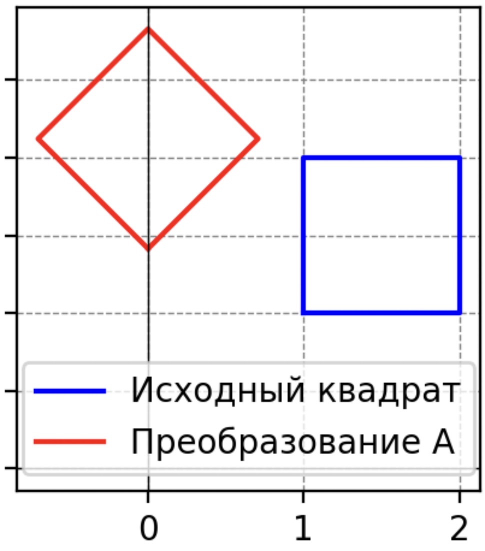
Для нахождения отображений, для которых результат не зависит от порядка применения (AB = BA), выберем матрицы поворота и масштабирования.

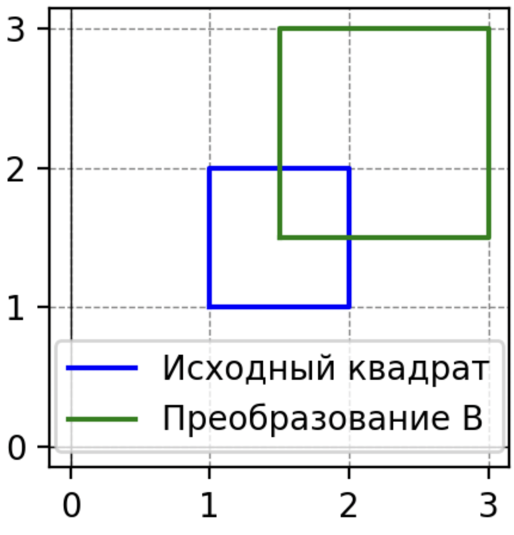
Матрица поворота A: поворачивает точки на фиксированный угол, равный 45°:

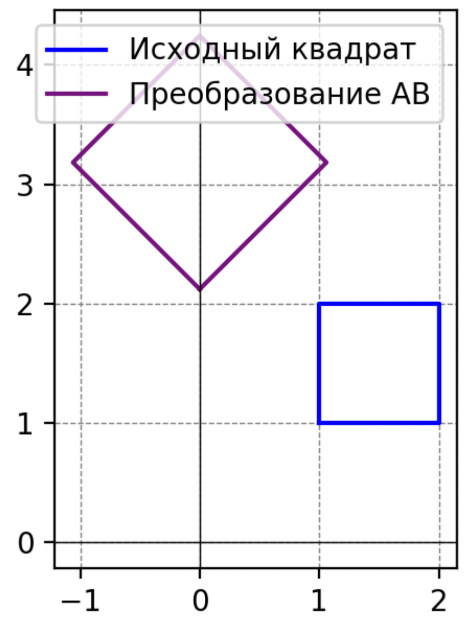
$$A = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix}$$

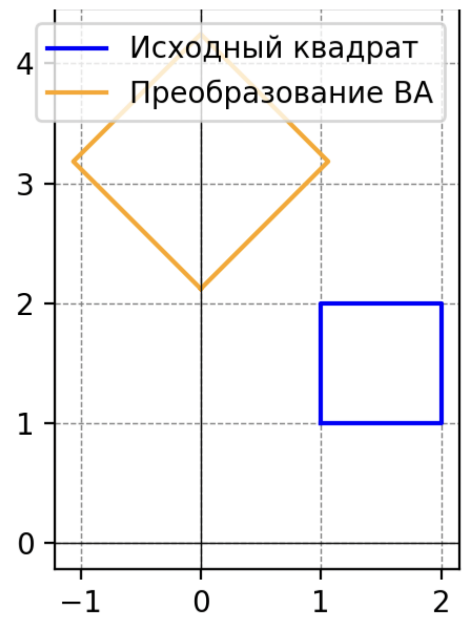
Матрица масштабирования B: масштабирует точки в 1.5 раза:

$$B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$









Порядок применения этих матриц не влияет на конечный результат, так как при повороте и последующем масштабировании (или наоборот) точки остаются в том же положении после обоих преобразований.

Задание 2

1. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Ядро $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Образ $= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Определитель: $-\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$

Собственные значения и векторы: $\lambda = \pm 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{3}{9} \\ -\frac{3}{9} & 1 \end{pmatrix}$

Ядро $= \begin{pmatrix} 3x \\ x \end{pmatrix}$ Образ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{3}{9} \end{pmatrix}$

Определитель: $\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$

Собственные значения и векторы: $\lambda = 0, \frac{10}{9}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} \mathbf{cos(40^\circ)} & \mathbf{-sin(40^\circ)} \\ \mathbf{sin(40^\circ)} & \mathbf{cos(40^\circ)} \end{pmatrix}$ Собственных векторов и чисел не существует для данного отображения, так как все точки пространства подвержены повороту.

$det\begin{pmatrix} \cos(40^\circ) & -\sin(40^\circ) \\ \sin(40^\circ) & \cos(40^\circ) \end{pmatrix} = \cos(40^\circ) * \cos(40^\circ) + \sin(40^\circ) * \sin(40^\circ) = 1$

4. $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Собственные значения и вектора: $(1 - \lambda)^2 = 0 => \lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определитель: $-1 * (-1) - 0 = 1$

5. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(40^\circ) & -\sin(40^\circ) \\ \sin(40^\circ) & \cos(40^\circ) \end{pmatrix}$

Определитель: $\begin{pmatrix} \frac{7}{125} & \frac{124}{125} \\ \frac{124}{125} & -\frac{7}{125} \end{pmatrix} = -\frac{617}{625}$

8.

Собственные числа и собственные вектора

$v = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}-2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственное значение $\lambda_1 = \frac{-i\cdot\sqrt{3}-6}{5}$

$v = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{3}-2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственное значение $\lambda_2 = \frac{i\cdot\sqrt{3}-6}{5}$

9.

Найдите определитель матриц

$$det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

10.

Найдите определитель матриц

$$det = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = -\sqrt{3}$$

11.

Собственные числа и собственные вектора

$v = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственное значение $\lambda_1 = 2$

$v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственное значение $\lambda_2 = 5$

12. A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Собственные значения: **λ = 1**

Собственные векторы: v = $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

13. R = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Собственные значения: λ_1 **= i,** λ_2 **= - i**

Собственные векторы: v_1 **= (** $\begin{matrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{matrix}$ **),** v_2 **= (** $\begin{matrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{matrix}$ **)**

14. A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Собственные значения: **λ = 2**

Собственные векторы: любые ненулевые векторы в пространстве R^2

15. AB = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Собственные значения: λ_1 **= 1,** λ_2 **= 2**

Собственные векторы: v_1 **= (** $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ **),** v_2 **= (** $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$ **)**

BA = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Собственные значения: λ_1 **= 1,** λ_2 **= 2**

Собственные векторы: v_1 **= (** $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ **),** v_2 **= (** $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ **)**

16. A = $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Собственные значения: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - $\frac{i\sqrt{2}}{2}$

Собственные векторы: $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

B = $\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$

Собственные значения: $\lambda_1 = \mathbf{1.5}$

Собственные векторы: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$