Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ
О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 4

По дисциплине «Практическая линейная алгебра»
на тему: «Динамические системы»

Студенты:
Гизбрехт В.Д. группа 1
Ли Х.С. группа 1
Лаврик В.В. группа 4

Проверил:

г. Санкт-Петербург
2024

Задание 1.

Подготовка

Придумайте неколлинеарные вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Придумайте непрерывное

Пункт 1. Асимптотическая устойчивость

Собственные векторы $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ассоциируем с собственными значениями, имеющими отрицательную действительную часть, например:

$$\mathrm{A} = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

Эта система асимптотически устойчива. Если x(0)=v_1, то x(t)∈*Span*{v_1}. Аналогично для v_2

Собственные числа:

Решим $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Собственные векторы:

Для $\lambda_1 = -1$:

$$(A - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = -2$:

$$(A - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщённые собственные векторы:

Отсутствуют, так как матрица диагональна.

Пункт 2. Неустойчивость

Выберем матрицу A, у которой есть только один собственный вектор (например, жорданова клетка):

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Здесь все решения x(t) расходятся при $t \to \infty$, и система неустойчива.

Собственные числа:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0.$$

Собственное число: $\lambda = 1$ (кратность 2).

Собственные векторы:

Для $\lambda = 1$:

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обобщённые собственные векторы:

Найдём w, удовлетворяющий $(A-I)^2 w = 0$, но $(A-I)w \neq 0$:

$$(A - I)w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для ненулевого w с $y \neq 0$, например:

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пункт 3. Неустойчивость, при этом $x(0)=v_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t)=0$

Матрица A должна иметь одно положительное и одно отрицательное собственное значение. Например:

$$A = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

Если $x(0)=v_1$, то компоненты, связанные с отрицательным собственным значением, затухают, а с положительным расходятся. Подбор начальных данных $x(0)$ так, чтобы компонента по направлению v_2 была нулевая, приводит к затуханию.

Пункт 4. Асимптотическая устойчивость, А имеет комплексные собственные векторы

Выберем матрицу с собственными значениями λ=−1±i, чтобы обеспечить устойчивость. Например:

$$A = \begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Собственные векторы в пространстве C^2: $v_1 + v_2 i$ и $v_1 - v_2 i$ Система асимптотически устойчива с вращением.

Собственные числа:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)^2+1=0.$$

$$\lambda=-1\pm i.$$

Собственные векторы:

Для $\lambda=-1+i$:

$$(A-\lambda I)v=\begin{pmatrix}-1-(-1+i) & -1\\ 1 & -1-(-1+i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0.$$

Решая, получаем собственный вектор:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}.$$

Для $\lambda=-1-i$ собственный вектор:

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}.$$

Обобщённые собственные векторы:

Не требуются, так как все собственные значения имеют геометрическую кратность 1.

Пункт 5. Неустойчивость, собственные векторы

Собственные значения должны иметь положительную действительную часть. Например, $\lambda = 1 \pm i$

$$\mathrm{A}=\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

Решения расходятся, что делает систему неустойчивой.

Собственные числа:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0.$$

$$\lambda = 1 \pm i.$$

Собственные векторы:

Для $\lambda = 1 + i$, собственный вектор:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda = 1 - i$, собственный вектор:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Обобщённые собственные векторы:

Не требуются.

Пункт 6. Не асимптотически устойчива, но и не неустойчива, собственные векторы

Выберем собственные значения $\lambda = \pm\, i$, чтобы система была нейтрально устойчивой. Например:

$$A = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Система описывает чистое вращение без затухания или расходимости. Решения остаются ограниченными, но не стремятся к нулю.

Собственные числа:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

$$\lambda = \pm i.$$

Собственные векторы:

Для $\lambda = i$, собственный вектор:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

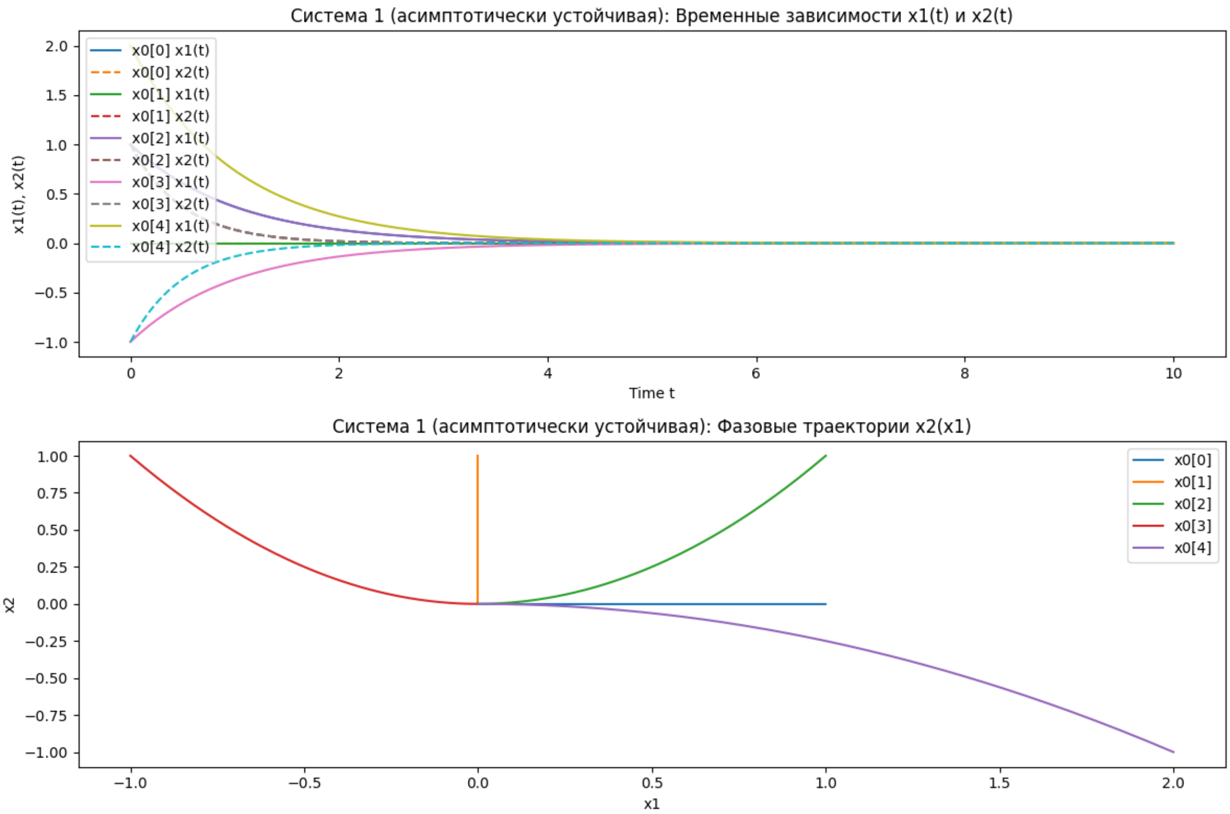
Для $\lambda = -i$, собственный вектор:

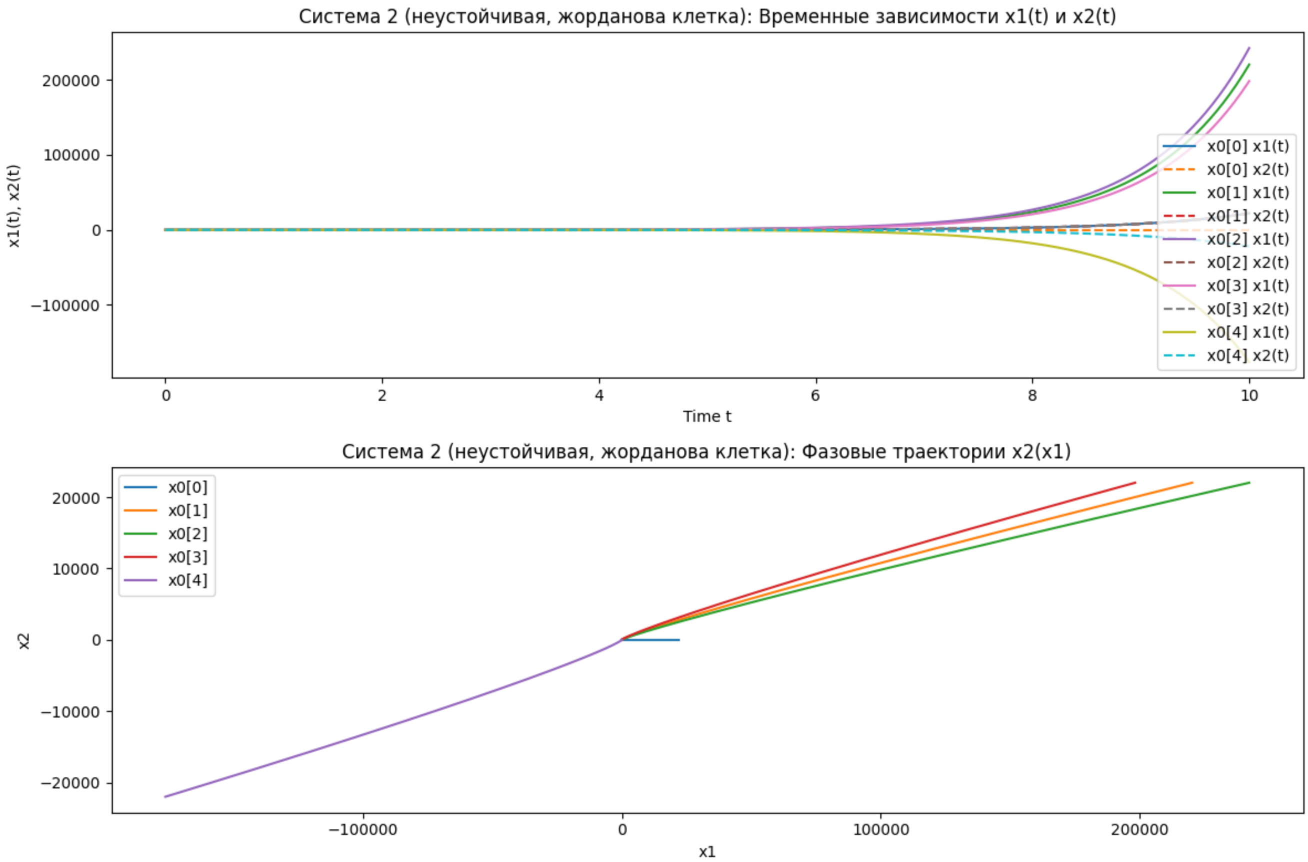
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

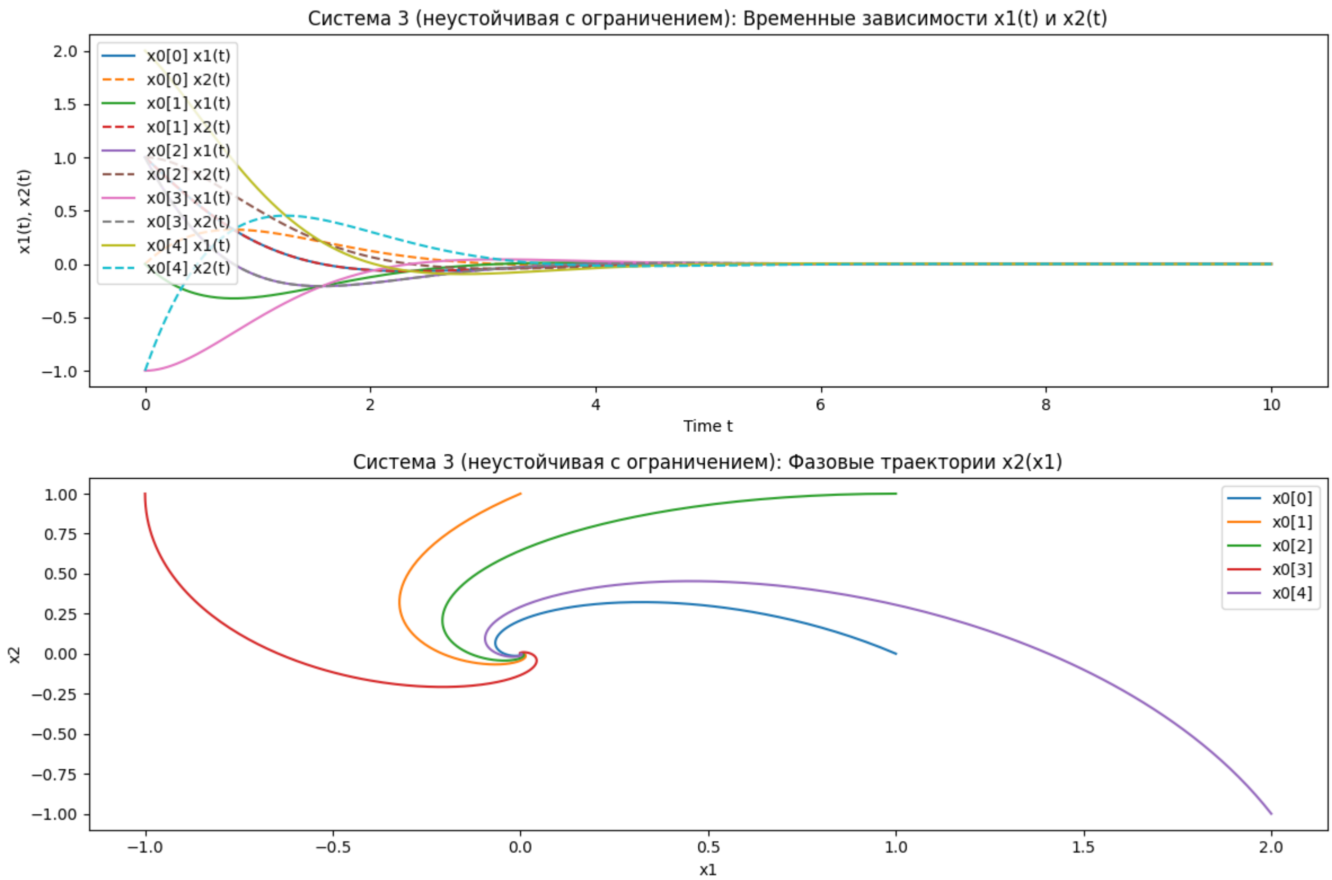
Обобщённые собственные векторы:

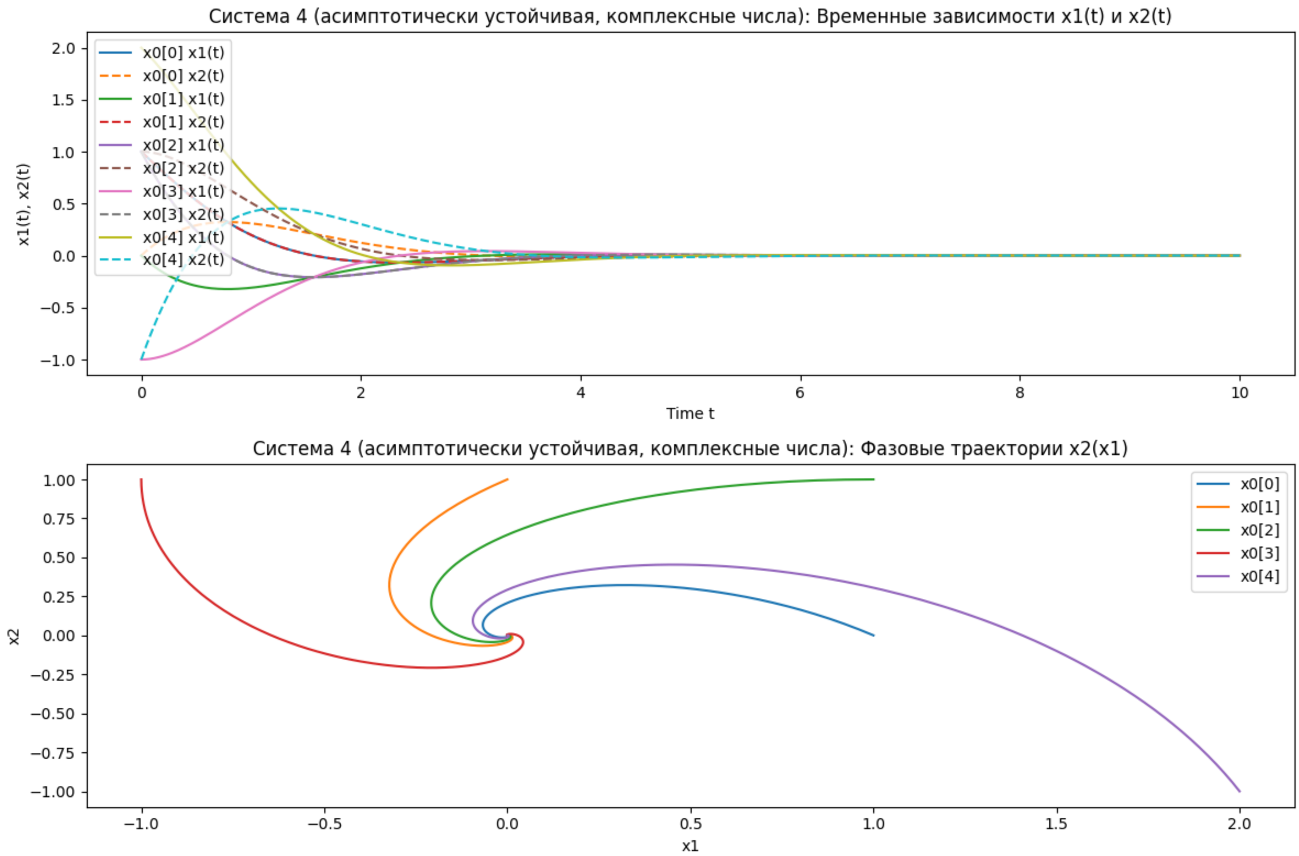
Не требуются.

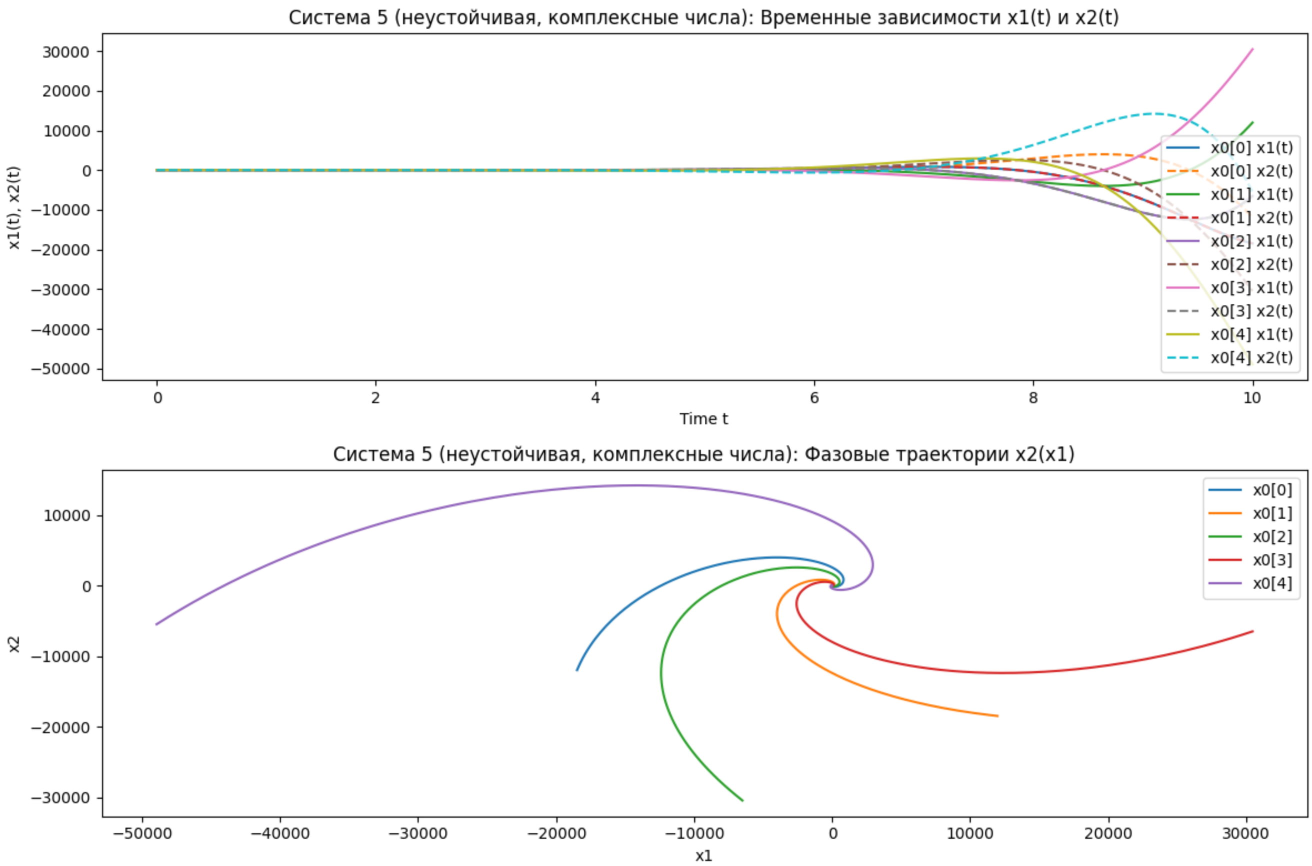
Моделирование непрерывного




Система 2 (неустойчивая, жорданова клетка): Временные зависимости x1(t) и x2(t)
x1(t), x2(t)
Time t
x0[0] x1(t)
x0[0] x2(t)
x0[1] x1(t)
x0[1] x2(t)
x0[2] x1(t)
x0[2] x2(t)
x0[3] x1(t)
x0[3] x2(t)
x0[4] x1(t)
x0[4] x2(t)
Система 2 (неустойчивая, жорданова клетка): Фазовые траектории x2(x1)
x2
x1
x0[0]
x0[1]
x0[2]
x0[3]
x0[4]


Система 3 (неустойчивая с ограничением): Временные зависимости x1(t) и x2(t)
x1(t), x2(t)
Time t
x0[0] x1(t)
x0[0] x2(t)
x0[1] x1(t)
x0[1] x2(t)
x0[2] x1(t)
x0[2] x2(t)
x0[3] x1(t)
x0[3] x2(t)
x0[4] x1(t)
x0[4] x2(t)
Система 3 (неустойчивая с ограничением): Фазовые траектории x2(x1)
x2
x1
x0[0]
x0[1]
x0[2]
x0[3]
x0[4]


Система 4 (асимптотически устойчивая, комплексные числа): Временные зависимости x1(t) и x2(t)
x0[0] x1(t)
x0[0] x2(t)
x0[1] x1(t)
x0[1] x2(t)
x0[2] x1(t)
x0[2] x2(t)
x0[3] x1(t)
x0[3] x2(t)
x0[4] x1(t)
x0[4] x2(t)
x1(t), x2(t)
Time t
Система 4 (асимптотически устойчивая, комплексные числа): Фазовые траектории x2(x1)
x0[0]
x0[1]
x0[2]
x0[3]
x0[4]
x2
x1


Система 5 (неустойчивая, комплексные числа): Временные зависимости x1(t) и x2(t)
x0[0] x1(t)
x0[0] x2(t)
x0[1] x1(t)
x0[1] x2(t)
x0[2] x1(t)
x0[2] x2(t)
x0[3] x1(t)
x0[3] x2(t)
x0[4] x1(t)
x0[4] x2(t)
x1(t), x2(t)
Time t
Система 5 (неустойчивая, комплексные числа): Фазовые траектории x2(x1)
x0[0]
x0[1]
x0[2]
x0[3]
x0[4]
x2
x1

Задание №2 Придумайте дискретное

Придумайте дискретные динамические системы, обладающие следующими собственными числами (при этом ни одна из приду-
манных вами матриц А не должна быть диагональной или жордановой!):

1. $\lambda_{1,2} = -1$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - матрица имеет два одинаковых собственных числа

$\lambda_{1,2}$ = -1, но она не является диагональной и не является жордановой, так как имеет ненулевой элемент вне диагонали.

2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ – Эта матрица описывает вращение на угол π/4 (45 градусов) с сжатием, что соответствует комплексным собственным числам с вещественной и мнимой частями. матрица имеет ненулевые элементы не только на главной диагонали, но и вне её. В частности, $A_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и , $A_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому матрица является диагональной.

3. $\lambda_{1,2} = \pm i$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - это матрица вращения на 90 градусов, и её собственные числа ±i связаны с вращением на комплексной плоскости

4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$- Эта матрица описывает вращение на угол и одновременно сжатие.

5. $\lambda_{1,2} = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-Эта матрица имеет два одинаковых собственных числа λ1=λ2=1, но не является диагональной или жордановой. Это структура, известная как матрица с кратными собственными числами, и она не диагонализуема, так как у неё не хватает линейно независимых собственных векторов для приведения к диагональному виду.

6. $\lambda_{1.2} = 1 \cdot c$, пусть c = 0,2

$A = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 1 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}$ -

- tr(A)=0.2+0.2=-0.4.
- det(A)=(0.2)(0.2)−(1)(0)=0.04.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} 0{,}2-\lambda & 1 \\ 0 & 0{,}2-\lambda \end{matrix})$ = (0.2−λ)2=λ^2+0.4λ+0.04.
- Таким образом, собственные числа матрицы A равны 0.2.

7. $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot c$, пусть c = 0,2

$A = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ –

- tr(A)=0+0=0.
- det(A)= (0)(0) − (0.2)(−0.2)=0.04.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} -\lambda & -0.2 \\ 0.2 & -\lambda \end{matrix})$ = = (-λ)(- λ) – (0.2)(−0.2)=λ2+0.04.
- Таким образом, собственные числа матрицы A равны ±0.2i.

8. $\lambda_{1.2} = -1 \cdot c$,, пусть c = 0,2

   $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ -

- tr(A)=0.2+0.2=0.4.
- det(A)=(0.2)(0.2)−(1)(0)=0.04.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} 0{,}2-\lambda & 1 \\ 0 & 0{,}2-\lambda \end{matrix})$ = (-0.2−λ)2=λ^2-0.4λ+0.04.
- Таким образом, собственные числа матрицы A равны 0.2.

9. $\lambda_{1.2} = 1 \cdot d$, пусть d = 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ -

- tr(A)=-2+(-2_=-4
- det(A)=(-2)(-2)−(1)(0)=4.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{matrix})$ = $(-2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$
- Таким образом, собственные числа матрицы A равны 2.

10.$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot d$, пусть c = 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ -

- tr(A)=0+0=0.
- det(A)=(0)(0)−(−2)(2)=4.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{matrix})$ = λ^2+4
- Таким образом, матрица A имеет собственные числа ±2i.

11.$\lambda_{1.2} = 1 \cdot d$, пусть c = 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ -

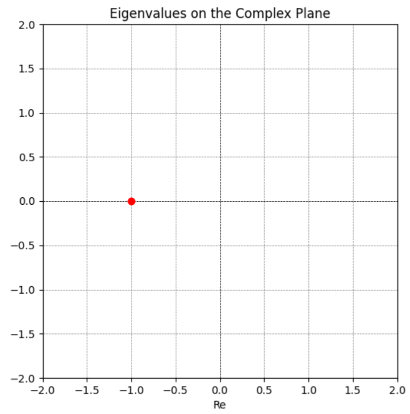
- tr(A)=2+2=4
- det(A)=(2)(2)−(1)(0)=4.
- det(A – λE) = $\det = (\begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{matrix})$ = $(2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$

12.$\lambda_{1,2} = 0$

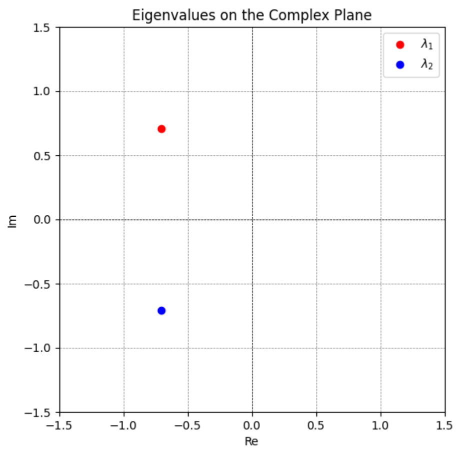
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ –

- Эта матрица имеет оба собственных числа λ1=0 и λ2=0.
- Она не является диагональной, так как имеет ненулевой элемент вне диагонали.
- Эта матрица имеет единственный линейно независимый собственный вектор, что делает её матрицей с дефектом, то есть она не является жордановой, потому что её нельзя привести к диагональной форме, имея два одинаковых собственных числа.

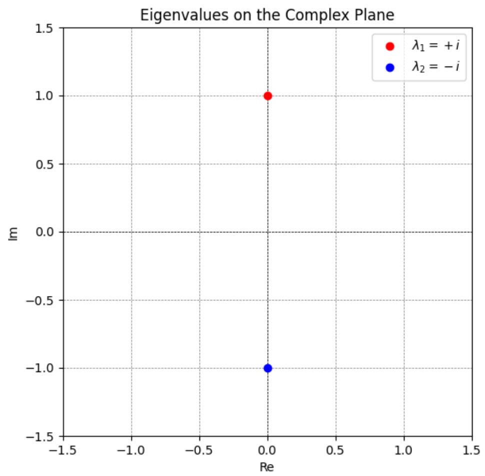
$$\lambda_{1,2} = -1$$



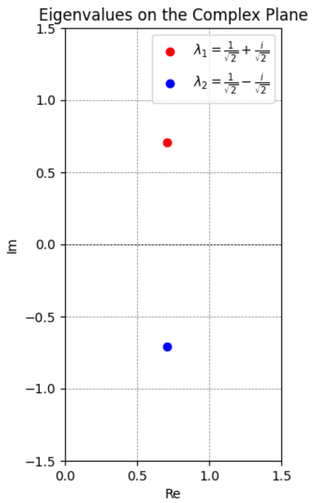
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$$



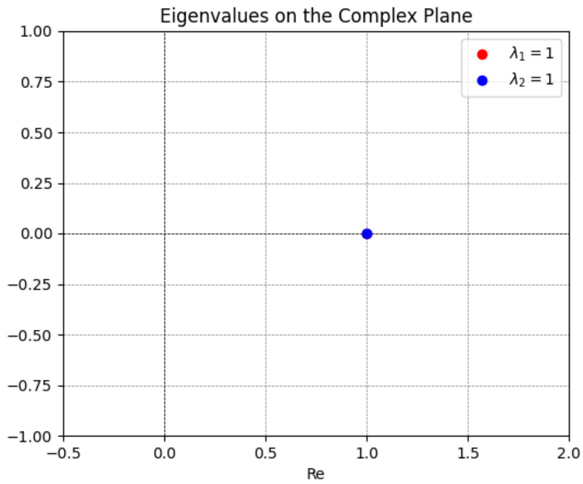
$$\lambda_{1,2} = \pm i$$



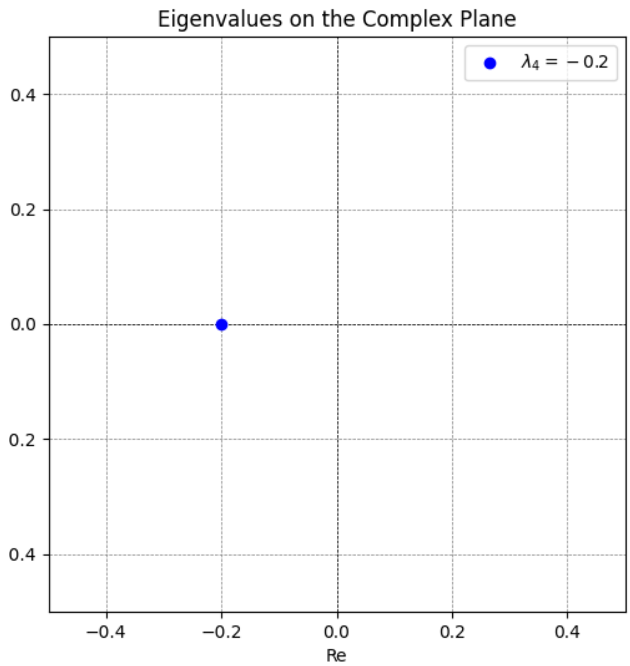
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$$



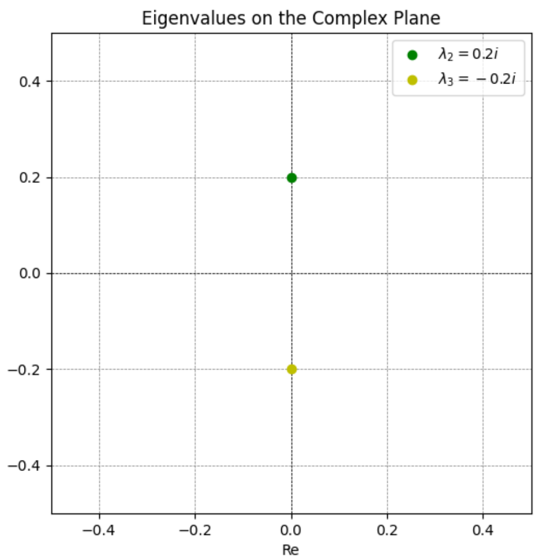
$$\lambda_{1,2} = 1$$



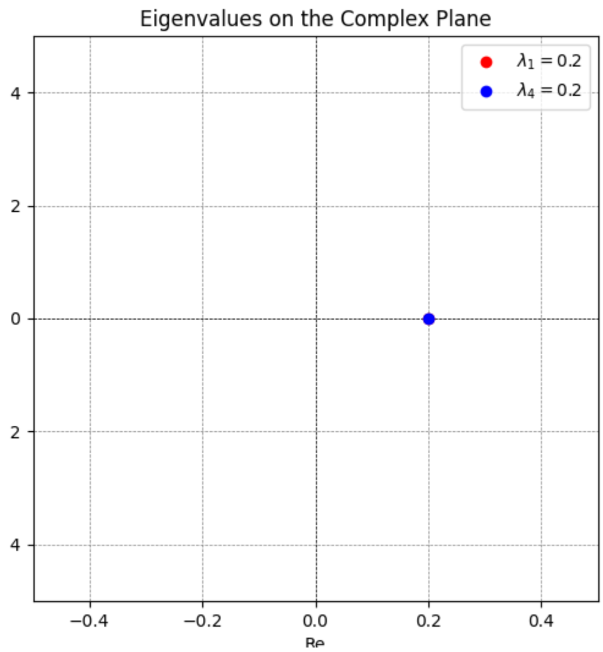
$$\lambda_{1,2} = -1 \cdot c \text{ , где c = 0,2}$$



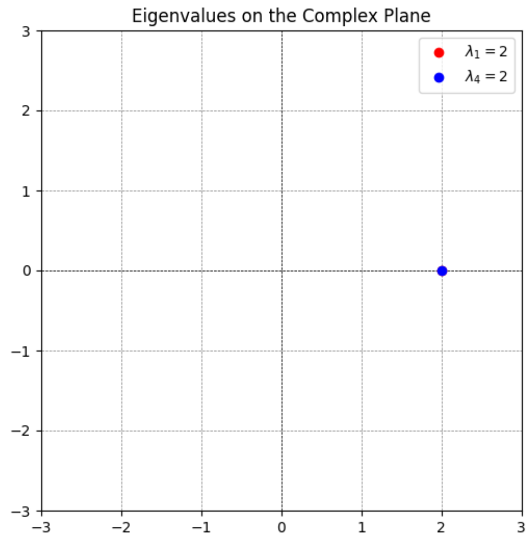
$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot c \text{ , где c = 0,2}$$



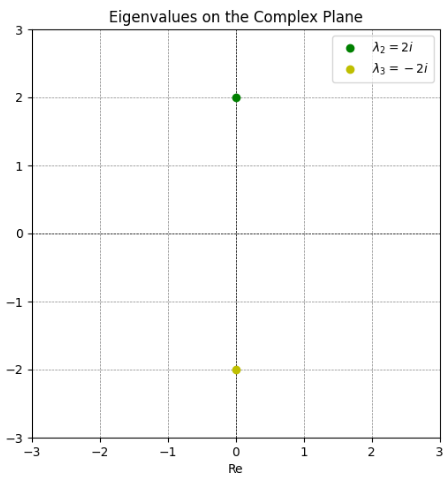
$$\lambda_{1,2} = 1 \cdot c \text{ , где c = 0,2}$$



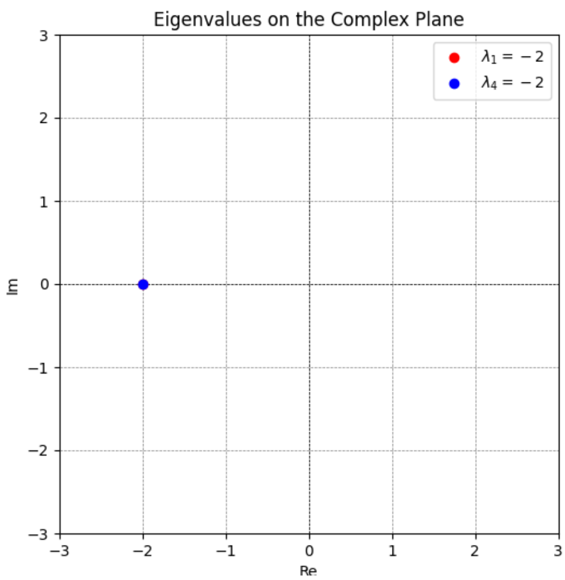
$$\lambda_{1.2} = -1 \cdot d\text{, где d = 2}$$



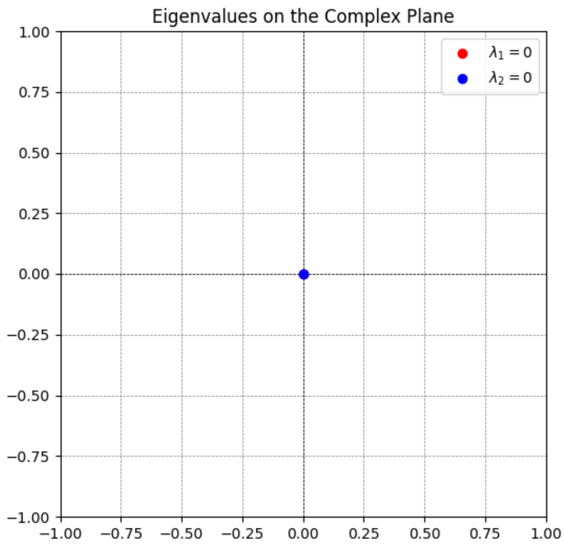
$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot d$, где d = 0,2



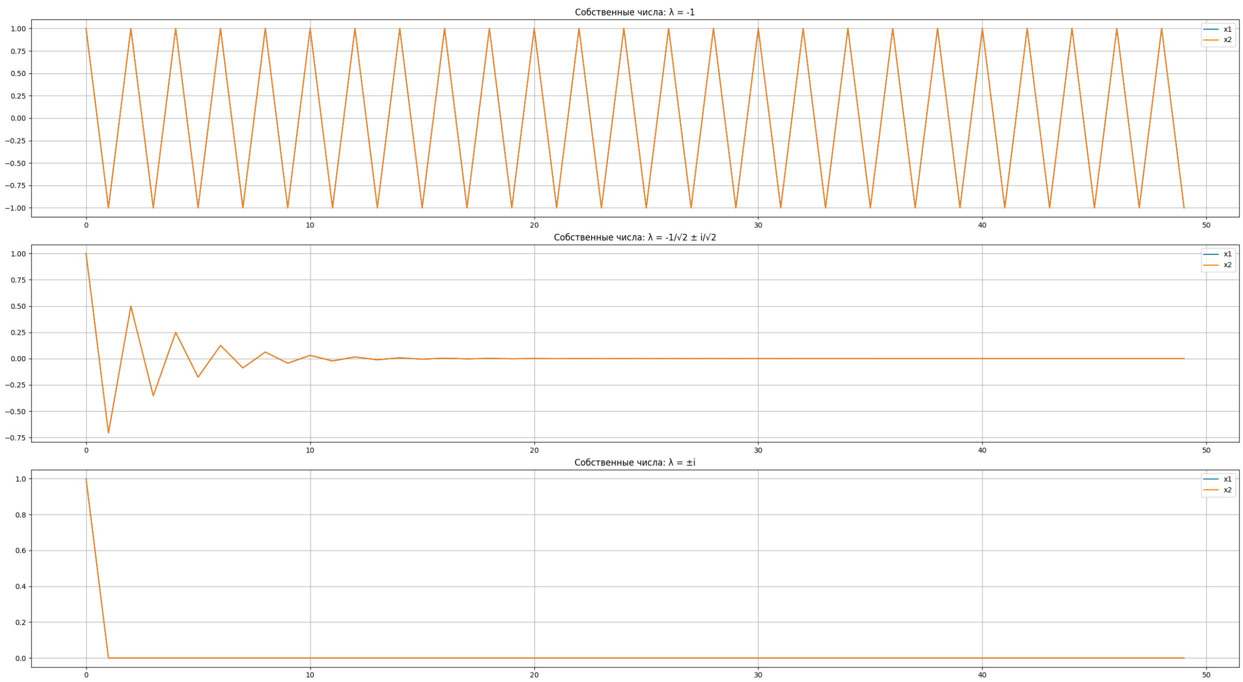
$\lambda_{1.2} = 1 \cdot d$, где d = 2



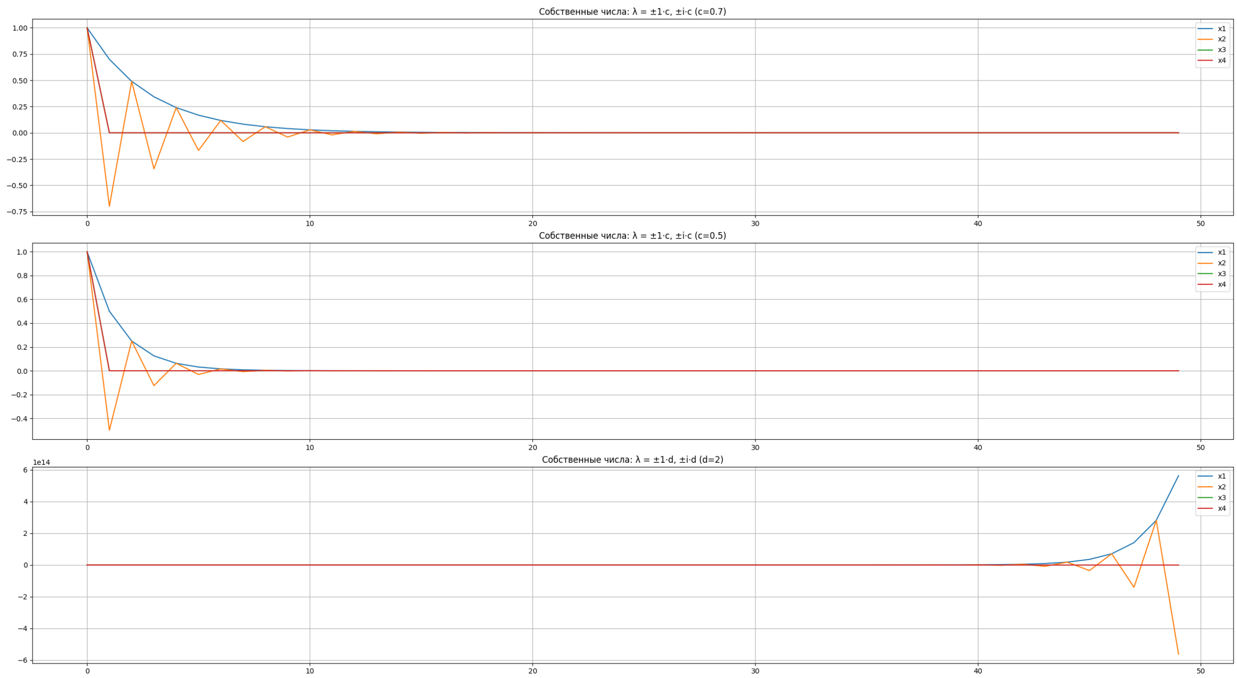
$\lambda_{1,2} = -0$



Моделирование:




Собственные числа: λ = 1/√2 ± i/√2
x1
x2
Собственные числа: λ = 1
x1
x2
Собственные числа: λ = ±1·c, ±i·c (c=0.2)
x1
x2
x3
x4


Собственные числа: λ = ±1·c, ±i·c (c=0.7)
x1
x2
x3
x4
Собственные числа: λ = ±1·c, ±i·c (c=0.5)
x1
x2
x3
x4
Собственные числа: λ = ±1·d, ±i·d (d=2)
1e14
x1
x2
x3
x4

Задание 3. Осциллятор

Дана непрерывная система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

Необходимо проанализируйте устойчивость и характер движения данной системы при

1. $a < 0$, $b = 0$.
2. $a < 0$, $b < 0$.
3. $a > 0$, $b = 0$.
4. $a > 0$, $b < 0$.

Для каждого из 4-х случаев придумать физическую систему, движение которой приближённо подчиняется указанному уравнению. Построить графики движения x(t). Дать физическую интерпретацию переменных x_1, x_2, а также параметров a и b.

Первым делом запишем систему в матричном виде:

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} x$, отсюда получим, что $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

Собственные значения матрицы A определяют характер движения системы.

Собственные значения находятся из характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0$$

Случай 1: a < 0, b = 0:

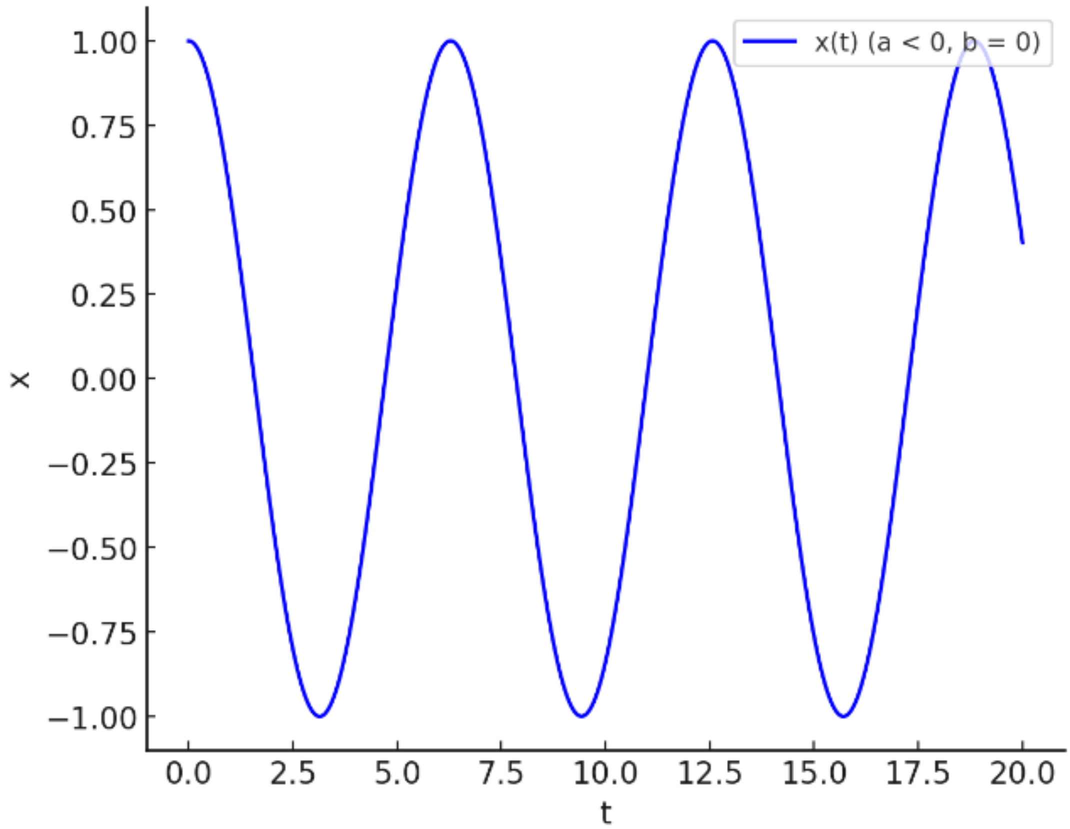
Характеристическое уравнение: $\lambda^2 = -a$, откуда $\lambda = \pm i\sqrt{-a}$

Решение показывает, что система имеет только мнимые корни. Это означает, что движение является **гармоническими колебаниями без затухания.**

Система является **нейтрально устойчивой.**

Физическая интерпретация: свободные колебания без затухания, например, движение маятника или пружины без трения.

График:



Случай 2: a < 0, b < 0:

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - b\lambda - a = 0$.

Дискриминант: $D = b^2 - 4(-a) = b^2 + 4|a| > 0$.

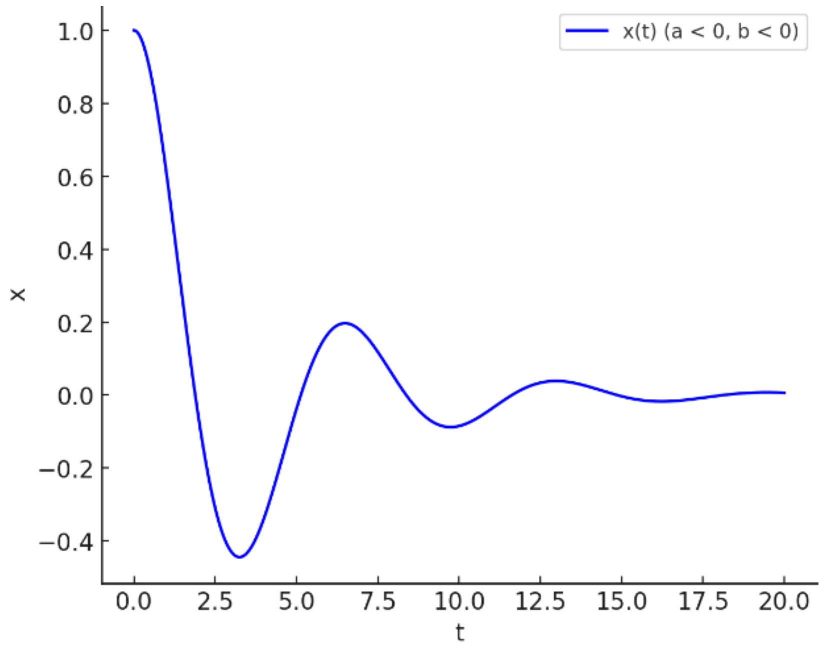
Так как дискриминант положителен, корни вещественные:

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4|a|}}{2}$$

Вещественные и отрицательные корни соответствуют **затухающему движению без колебаний.** Система **асимптотически устойчива**.

Физическая интерпретация: например, это система с трением, как затухающий маятник или колебания в контуре с сопротивлением.

График:



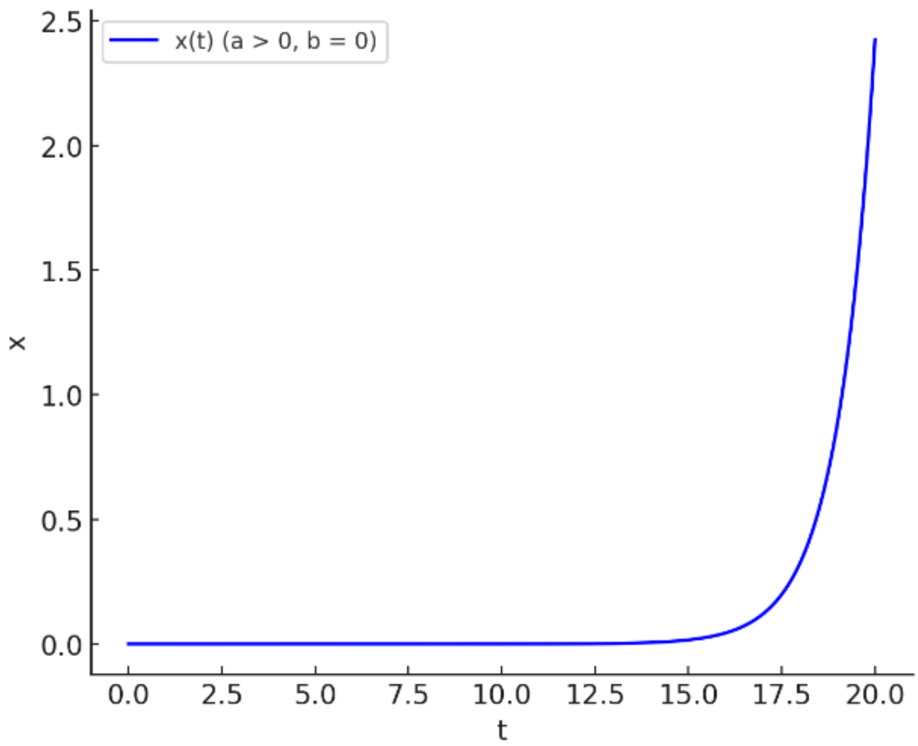
Случай 3: a > 0, b = 0:

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - a = 0$, откуда $\lambda = \pm a$.

Корни вещественные, один положительный, другой отрицательный — тип седло. **Система неустойчивая** (с ростом по экспоненте).

Физическая интерпретация: модель неустойчивого маятника (например, "перевернутого маятника").

График:



Случай 4: a > 0, b < 0:

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - b\lambda - a = 0$.

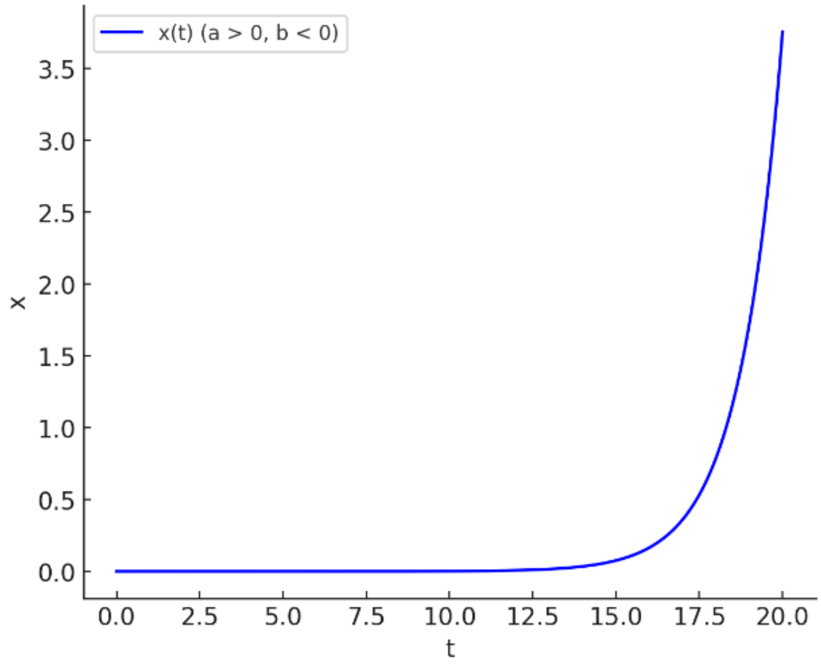
Дискриминант: $D = b^2 - 4a$. Возможны два случая:

Если $D > 0$, корни вещественные с разным знаком, система является **седлом**.

Если $D < 0$, корни комплексные с положительной вещественной частью. Это означает **спирально-неустойчивую систему**.

Физическая интерпретация: Это может быть колебательная система с "усилением", например, система с положительной обратной связью.

График:



Физическая интерпретацию переменных x_1, x_2 и параметров a и b:

- x_1: смещение (например, положение массы на пружине).
- x_2: скорость
- a: коэффициент жесткости пружины.
- b: коэффициент сопротивления среды (трения).