2.7 二维图形的变换

- 二维几何变换
- 三维几何变换

变换的数学基础(1/4)

- 矢量

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

- 矢量和

$$U + V = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{bmatrix}$$

变换的数学基础(2/4)

- 矢量的数乘

$$k \bullet U = \begin{bmatrix} ku_x \\ ku_y \\ ku_z \end{bmatrix}$$

- 矢量的点积

$$U \bullet V = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

  - 性质

$$U \bullet V = V \bullet U$$

$$U \bullet V = 0 \Leftrightarrow U \perp V$$

$$U \bullet U = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

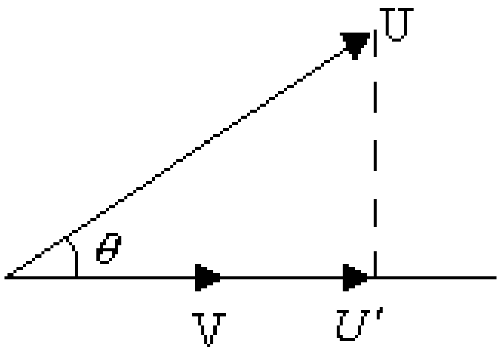
变换的数学基础(3/4)

- 矢量的长度

$$\|U\| = \sqrt{U \bullet U} = \sqrt{u_x{}^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

  - 单位矢量
  - 矢量的夹角

$$\cos\theta = \frac{U \bullet V}{\|U\| \bullet \|V\|}$$



- 矢量的叉积

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

变换的数学基础(4/4)

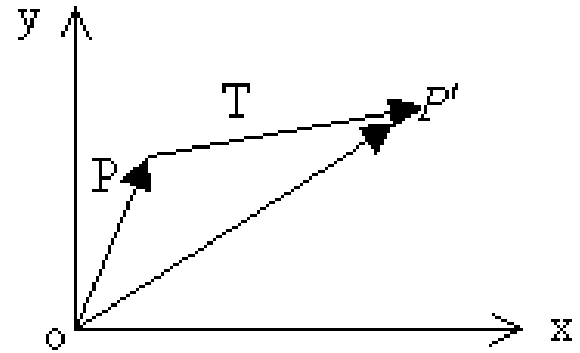
矩阵

- $m \times n$阶矩阵
- n 阶方阵
- 零矩阵
- 行向量与列向量
- 单位矩阵(恒等矩阵)
- 矩阵的加法
- 矩阵的数乘
- 矩阵的乘法
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆

二维基本变换（1/3）

- 平移变换

$$P' = P + T$$



$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

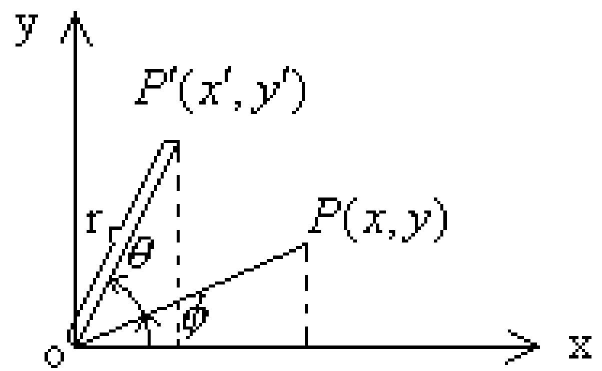
$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

旋转变换

- 点$P(x,y)$的极坐标表示
- 绕坐标原点旋转角度θ(逆时针为正，顺时针为负)

$$P' = R \bullet P$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

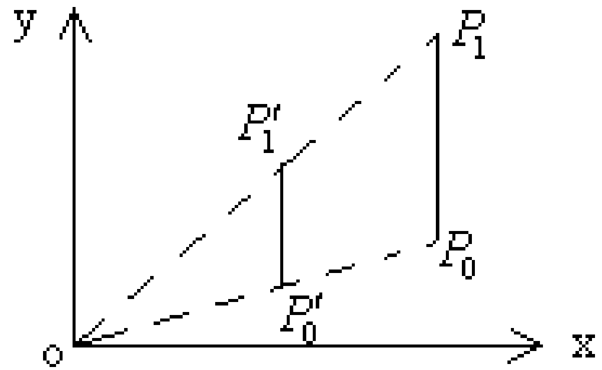


二维基本变换（3/3）

放缩变换

$$P' = S \bullet P$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$



- 以坐标原点为放缩参照点
- 不仅改变了物体的大小和形状，也改变了它离原点的距离

齐次坐标与二维变换的矩阵表示（1/3）

齐次坐标

定义

- (x,y)点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, h)

$$x_h = hx, y_h = hy, h \neq 0$$

- (x,y)点对应的齐次坐标为三维空间的一条直线

$$\begin{cases} x_h = hx \\ y_h = hy \\ z_h = h \end{cases}$$

齐次坐标与二维变换的矩阵表示（2/3）

- 标准齐次坐标$(x, y, 1)$
- 二维变换的矩阵表示
  - 平移变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} T(t_x, t_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - 旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标与二维变换的矩阵表示（3/3）

- 放缩变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} S(s_x, s_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

变换具有统一表示形式的优点

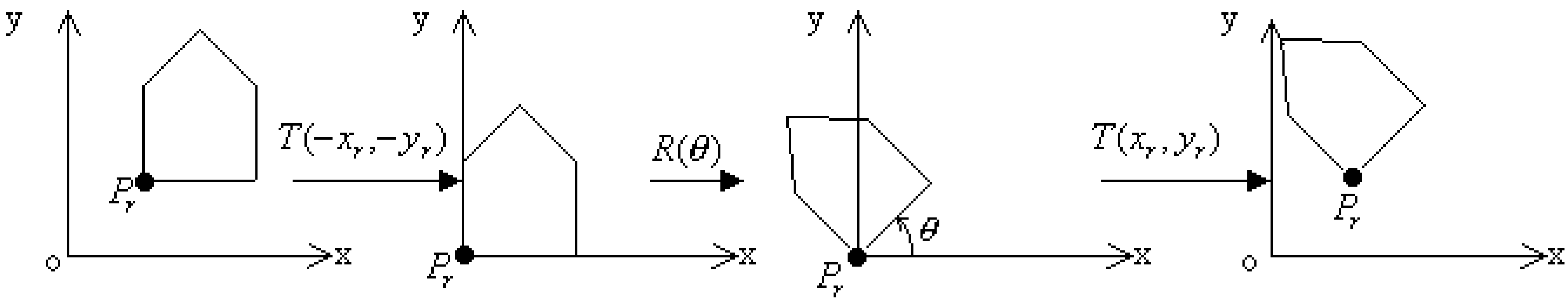
- 便于变换合成
- 便于硬件实现

复合变换（1/2）

- 问题：如何实现复杂变换?

变换分解 → 变换合成

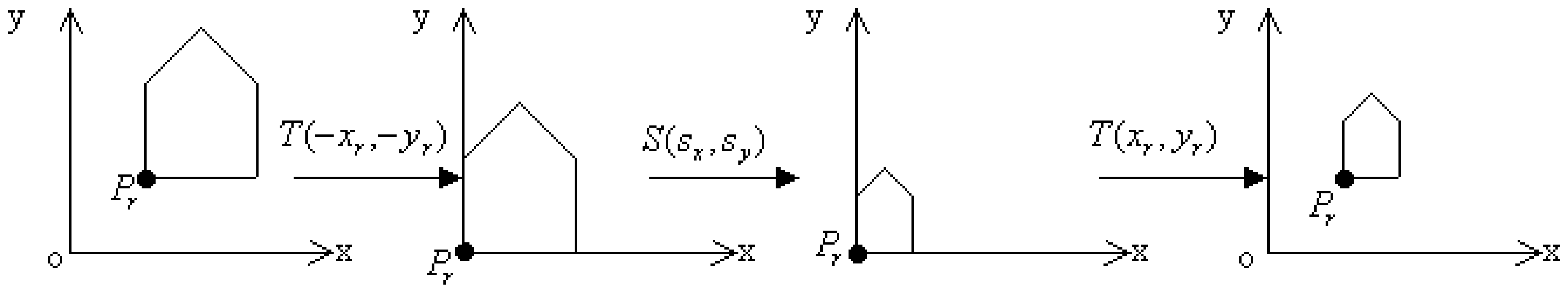
- 关于任意参照点 $P_r(x_r, y_r)$的旋转变换



$$R(x_r, y_r; \theta) = T(x_r, y_r) \bullet R(\theta) \bullet T(-x_r, -y_r)$$

复合变换（2/2）

- 关于任意参照点 $P_r(x_r, y_r)$ 的放缩变换

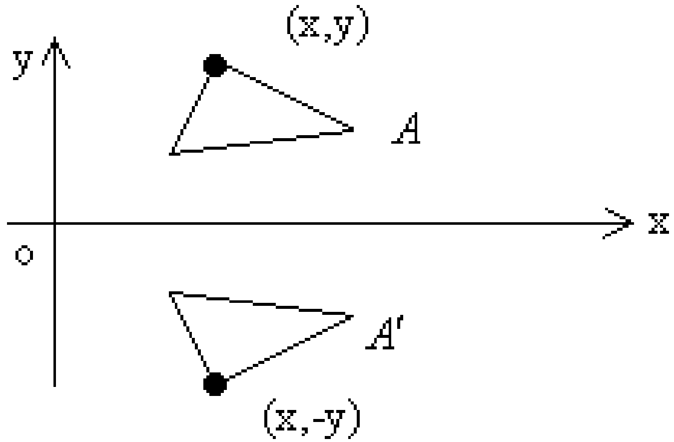


$$S(x_r, y_r; s_x, s_y) = T(x_r, y_r) \bullet S(s_x, s_y) \bullet T(-x_r, -y_r)$$

其它变换（1/5）

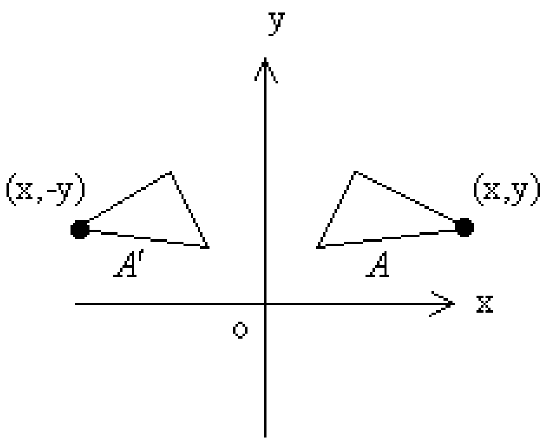
- 对称变换
  - 关于x轴的对称变换

$$SY_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



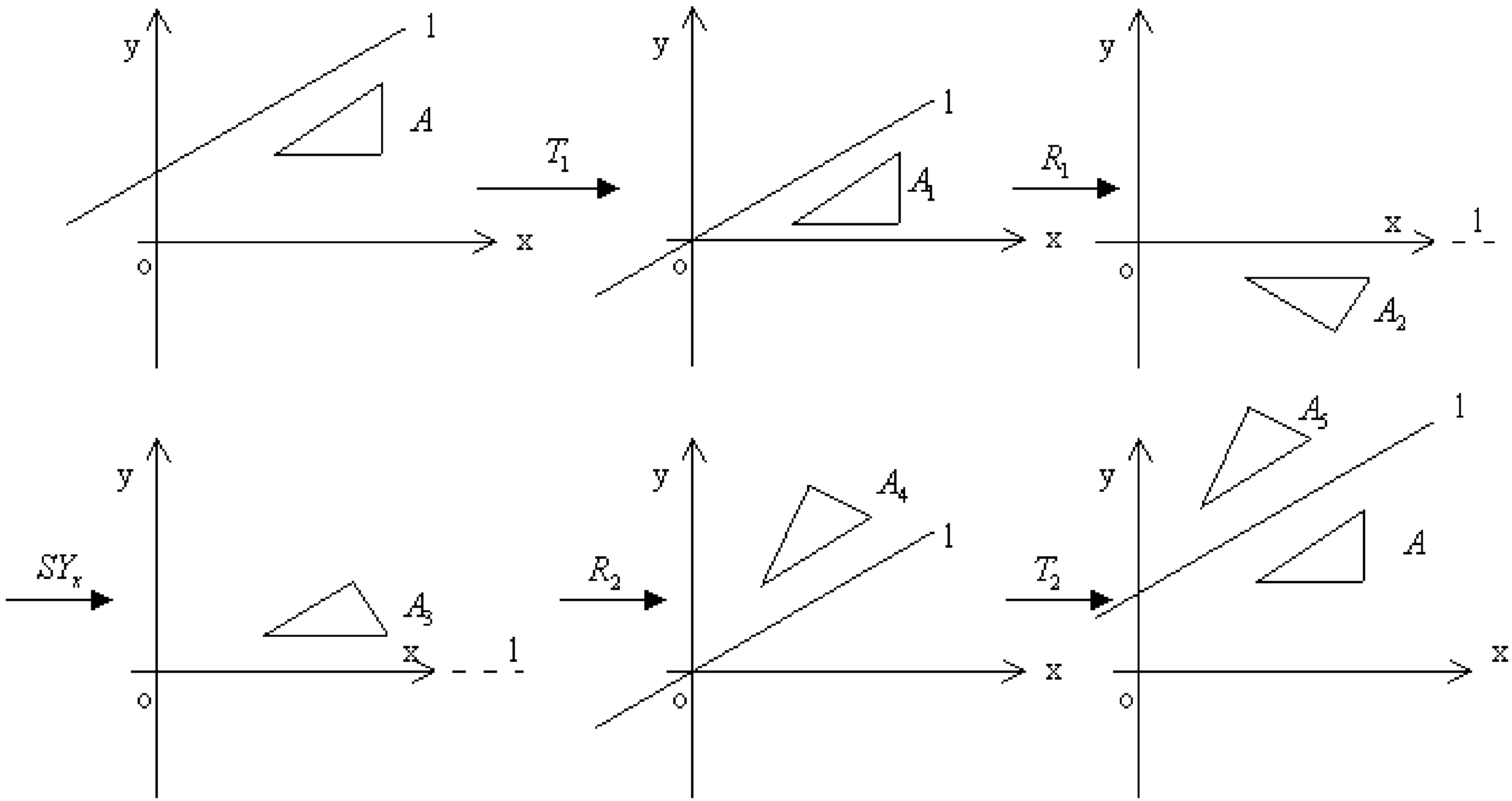
  - 关于y轴的对称变换

$$SY_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



其它变换(2/5)

- 关于任意轴的对称变换

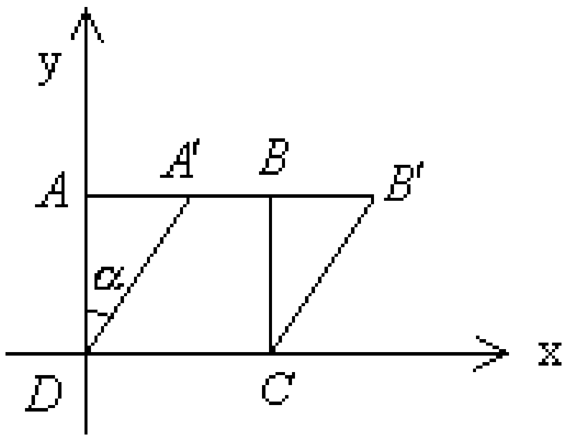


其它变换(3/5)

错切变换

- 以y轴为依赖轴的错切变换

以$y=0$为参考轴



$$\begin{cases} x' = x + sh_x y \\ y' = y \end{cases}$$

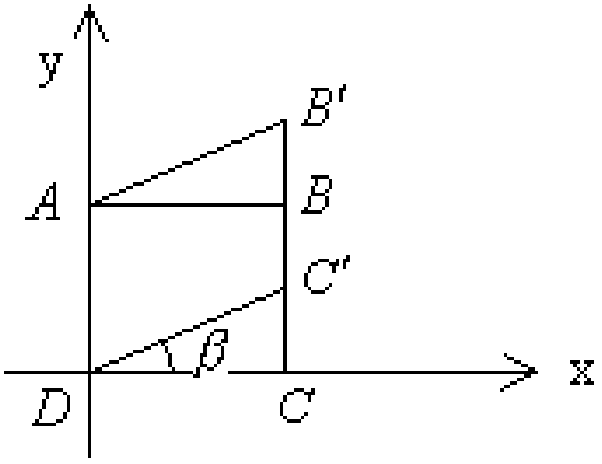
$$SH_y(sh_x) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

切变程度 $sh_x = \mathrm{tg}\,\alpha$

- 以x轴为依赖轴的错切变换

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = sh_y x + y \end{cases}$$

$$SH_x(sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



切变程度 $sh_y = \mathrm{tg}\,\beta$

三维几何变换（1/5）

三维齐次坐标

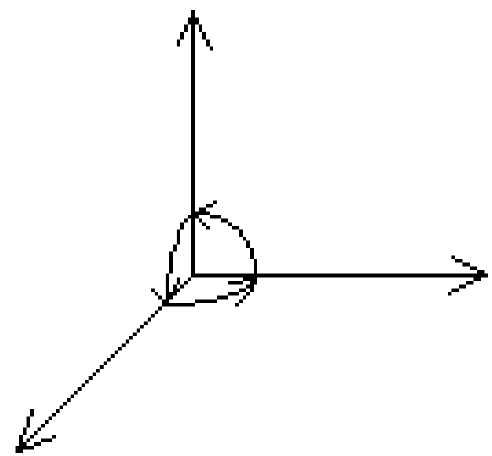
- (x,y,z)点对应的齐次坐标为

$$(x_h, y_h, z_h, h)$$

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

- 标准齐次坐标$(x,y,z,1)$

右手坐标系



三维几何变换（2/5）

- 平移变换

$$T(t_x,t_y,t_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 放缩变换

$$S(s_x,s_y,s_z)=\begin{bmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（3/5）

旋转变换

- 绕x轴

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 绕y轴

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（4/5）

- 绕z轴

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

错切变换

以z为依赖轴

$$SH_z(sh_x,sh_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & sh_x & 0\\ 0 & 1 & sh_y & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（5/5）

对称变换

- 关于坐标平面xy的对称变换

$$SY_{xy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

问题：绕空间任意一根轴的旋转和对称变换？