1.

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$$

将其化成**Smith**标准形。

解:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & \lambda\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & \lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^4-2\lambda^3-\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

2. 设$A \neq 0$, $A^k = 0\ (k \geq 2)$. 证明: A 不能与对角形矩阵相似。

证明：（反证法）假设 A相似与对角形矩阵，则存在可逆矩阵 P， 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由于 $A^k = 0$ ，则

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = P^{-1}A^kP = 0$$

$$\to \lambda_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

$\to P^{-1}AP = 0,\quad \to A = 0.$ 与已知条件 $A \neq 0$ 矛盾。

假设不成立，所以 A 不能与对角形矩阵相似。

3. 求下面矩阵的**Jordan** 标准形和相似变换矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

解：

$$\lambda I-A$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

所以A 的初等因子为 $(\lambda-2),(\lambda-1)^2$，从而

$$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

若可逆矩阵 $P=[X_1\ \ X_2\ \ X_3]$ 满足 $AP=PJ$，则

$$AP=[AX_1\ \ AX_2\ \ AX_3]=[X_1\ \ X_2\ \ X_3]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=[2X_1\ \ X_2\ \ X_2+X_3]$$

所以 $\begin{cases} AX_1 = 2X_1 \\ AX_2 = X_2 \\ AX_3 = X_2 + X_3 \end{cases}$

解得

$$X_1 = [2,1,-6]^T,\ X_2 = [0,0,1]^T,\ X_3 = [-1/2,0,0]^T$$

所以相似变换矩阵可取

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad （不唯一）$$

4. 用求矩阵秩的方法求下面矩阵的**Jordan**标准形。

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

解：特征多项式为 $|\lambda I - A| = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

$$I-A=\begin{bmatrix} -7 & 3 & -6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathbf{2},$ 特征根 $\lambda=\mathbf{1}$ 对应**(3-2=1)**个**Jordan** 块。所以 ***A*** 的**Jordan** 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$