Hermite二次型 (Hermite二次齐次多项式)

定义: 由 n 个复变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，系数为复数的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j$$

称为 Hermite二次型, 这里 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

如果记

$$X=\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^T \in C^n,$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

那么上面的 **Hermite** 二次型可以记为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H A X$$

称为**Hermite二次型对应的矩阵**，并称 A 的秩为**Hermite二次型的秩.**

对于 **Hermite** 二次型作可逆的线性替换

$$X = CY$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H A X = Y^H (C^H A C) Y = Y^H B Y$$

这里 $B=C^{H}AC$， $B^{H}=B$.

Hermite 二次型中最简单的一种是只含有纯的平方项无交叉项的二次型

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\lambda_1 \overline{y_1} y_1+\lambda_2 \overline{y_2} y_2+\cdots+\lambda_n \overline{y_n} y_n$$

称为Hermite 二次型的标准形.

定理: 对于任意一个 Hermite 二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=X^{H}AX$$

必存在酉线性替换

$$X = UY$$

可以将 **Hermite** 二次型 $f(x)$ 化为标准形

$$\boxed{f(x) = \lambda_1 \overline{y_1} y_1 + \lambda_2 \overline{y_2} y_2 + \cdots + \lambda_n \overline{y_n} y_n}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 **H-**矩阵 A 的特征值.

正定Hermite二次型与正定Hermite矩阵

定义： 对于给定的 Hermite 二次型

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j=X^HAX$$

如果对于任意一组不全为零复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0(\geq 0)$$

则称该 **Hermite** 二次型为**正定的(半正定的)**，并称相应的**H-**矩阵 A 为**正定的(半正定的).**

例: 判断下列 **Hermite** 二次型的类别

$$f(y_1,y_2,y_3)=4\overline{y_1}y_1+8\overline{y_2}y_2+3\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1,y_2,y_3)=12\overline{y_2}y_2+9\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1,y_2,y_3)=-7\overline{y_1}y_1+6\overline{y_2}y_2+\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -\overline{y_1}y_1 - 4\overline{y_2}y_2 - 3\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -6\overline{y_1}y_1 - 13\overline{y_3}y_3$$

与正定的实二次型一样，关于正定的 Hermite 二次型我们有

$$f(X) = X^H AX$$

(1) $f(X)$ 是正定的

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P 都有 $P^H AP$ 为正定矩阵.

(3) A 的 n 个特征值都大于零

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^H AP = I$

(5) 存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$

(6)* 存在正线上三角矩阵 R 使得 $A = R^H R$，且此分解是唯一的.

定理：n 阶 Hermite（实对称）矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是 A 的 n 个顺序主子式全大于零。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

了解

例 1： 设 A 是一个正定的**H-**阵，且又是酉矩阵，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}.$$

证明: 由于A 是一个正定 **H-**阵，所以必存在

酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{H},\quad 0\le\lambda_i\in\boldsymbol{R}$$

由于A 又是酉矩阵，所以 $|\lambda_i| = 1$

这样必有 $\lambda_i = 1$ ，从而 $A = I.$

例 2： 设 A 是一个正定的 **H**-阵，B 是一个反 **H**-阵，证明 AB 与 BA 的特征值实部为零.

证明: 设 λ 为矩阵 AB 的任意一个特征值，那么有 $|\lambda I - AB| = 0$. 由于 A 是一个正定 **H**-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^H \boldsymbol{Q}$$

将其代入上面的特征多项式有

$$0 = \left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}\right| = \left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^{H}\boldsymbol{QB}\right|$$

$$= \left|\lambda \boldsymbol{Q}^{H}(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1} - \boldsymbol{Q}^{H}\boldsymbol{QBQ}^{H}(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1}\right|$$

$$= \left|\boldsymbol{Q}^{H}\right|\left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{QBQ}^{H}\right|\left|(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1}\right|$$

$$= \left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{QBQ}^{H}\right|$$

这说明 λ 也是矩阵 $\boldsymbol{QBQ}^{H}$ 的特征值. 另一方面注意矩阵 $\boldsymbol{QBQ}^{H}$ 为 **H**-反阵, 从而 λ 实部为零. 同样可以证明另一问.

例 3： 设 A 是一个正定的 H-阵，B 是一个反H-阵，证明： $A+B$ 是可逆矩阵.

证明： 由于A 是一个正定 H-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$A=Q^{H}Q$$

这表明 A 是可逆的. 于是

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

另一方面注意矩阵 A^{-1} 仍然为正定H-阵， 而矩阵 B 为H-反阵，由上面的例题结论可知

矩阵 AB^{-1} 的特征值实部为零，那么矩阵

$$I + AB^{-1}$$

的特征值中不可能有零，从而

$$\left|I + AB^{-1}\right| \neq 0$$

定理: 设 A是正定(半正定) **Hermite** 矩阵，那么存在唯一正定(半正定) **Hermite** 矩阵 G 使得

$$A = G^2$$

例 4： 设 A 是一个半正定的 **H-**阵且 $\boldsymbol{A} \neq 0$，证明:

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}| > 1$$

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，由于 A 是半正定的，所以 $\lambda_i \geq 0$. 于是有

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}| = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \cdots (1 + \lambda_n) > 1$$

例5,6,7不讲, 但属于考试范围!

例 5 ：　设 A 是一个半正定的 H-阵且 $A\neq 0$, B 是一个正定的 H-阵, 证明

$$|A+B|>|B|$$

证明:　由于 B 是一个正定的H-阵, 所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$B=Q^HQ$$

这样有

$$|A+B|=|A+Q^HQ|=|Q^H||(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+I||Q|$$

$$=|B||(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+I|$$

注意矩阵

$$(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

仍然是一个半正定的 **H**-阵，有上面的例题可知

$$\left|\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\right|>1$$

从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\left|(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{I}\right|>|\boldsymbol{B}|$$

例 6： 证明：

（1）半正定H-矩阵之和仍然是半正定的;

（2）半正定H-矩阵与正定H-阵之和和是正定的;

证明：设 A, B 都是半正定 H-阵，那么二者之和 $A+B$ 仍然是一个 H-阵，其对应的Hermite二次型为

$$f(X)=X^H(A+B)X,$$

其中

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

由于 A, B 都是半正定 **H**-矩阵，所以对于任意一组不全为零的复数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{X}^H(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} \\ &= \boldsymbol{X}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \geq 0 \end{aligned}$$

这说明 $A+B$ 为一个半正定**H**-阵。

类似地，可以证明另外一问。

例 7： 设 A, B 都是 n 阶正定 **H-**阵，则

$$|\lambda B - A| = 0$$

的根全为正实数。

证明：因为 B 是正定的，所以存在可逆矩阵 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$P^H BP = I$$

另一方面注意到 $P^H AP$ 是一个正定 **H-**阵，从而有

$$|\lambda I - P^H AP| = 0$$

的根全为正实数。 又由于

$$\left|\lambda I - P^H AP\right| = \left|\lambda P^H BP - P^H AP\right|$$

$$= \left|P^H\right|\left|\lambda B - A\right|\left|P\right|$$

故 $\left|\lambda B - A\right| = 0$ 的根全为正实数。

Hermite 矩阵偶在复合同（复相合）下的标准形

例： 设 A, B 均为 n 阶 Hermite-阵，且 $\boldsymbol{B}$ 又是正定的，证明必存在 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P^H A P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P^H B P = I_{n\times n}}$$

同时成立，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是与 P 无关的实数。

证明： 由于 B 是正定 H-阵，所以存在 $\boldsymbol{P}_1 \in \boldsymbol{C}_n^{\boldsymbol{n \times n}}$ 使得

$$\boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n \times n}}$$

又由于 $P_1^H A P_1$ 也是 H-阵，那么存在 $\boldsymbol{P}_2 \in \boldsymbol{U}_n^{\boldsymbol{n \times n}}$ 使得

$$\boldsymbol{P}_2^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P}_1^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 **H-**阵 $P_1^H A P_1$ 的 n 个实特征值。如果记 $P = P_1 P_2$ ，则有

$$\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^H \boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}.$$

下面证明 n 个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 与 P 无关。令 $Q = P_1^H A P_1$，那么 λ_i 是特征方程

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}| = 0$$

的特征根。又由于

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}| &= \left|\lambda \boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1\right| \\ &= \left|\boldsymbol{P}_1^H\right||\lambda \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}_1|\end{aligned}$$

因此 λ_i 是方程

$$|\lambda \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=0$$

的根。它完全是由 A, B 决定的，与 P 无关。

由此可以得到下面的 **H-**阵偶标准形定理：

定理：对于给定的两个二次型

$$f_1(X) = X^H A X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_i} x_j$$

$$f_2(X) = X^H B X = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \overline{x_i} x_j$$

其中 $f_2(X)$ 是正定的，则存在非退化的线性替换

$$X = PY$$

可以将 $f_1(X)$, $f_2(X)$ 同时化成标准形

$$f_1 = \lambda_1 y_1 \overline{y_1} + \lambda_2 y_2 \overline{y_2} + \cdots + \lambda_n y_n \overline{y_n}$$

$$f_2 = y_1 \overline{y_1} + y_2 \overline{y_2} + \cdots + y_n \overline{y_n}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是方程 $|\lambda B - A| = 0$ 的根，而且全为实数。

定义：设 A, B 均为 n 阶 **Hermite-阵,**且 B 又是正定的，则方程

$$AX = \lambda BX$$

有非零解的充分必要条件是

λ 是次 n 代数方程方程

$$\left|\lambda B - A\right| = 0$$

的根。我们称此方程是 A 相对于 B 的特征方程。它的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为 A 相对于 B 的广义特征值。将 λ_i 代入到方程

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\lambda BX}$$

中所得非零解向量 X 称为与 λ_i 相对应的广义特征向量。

广义特征值与广义特征向量的性质（了解）

（1）有 n 个实的广义特征值；

（2）有 n 个线性无关的广义特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，即

$$AX_i = \lambda_i BX_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

（3）这 n 个广义特征向量可以这样选取，使得其满足

$$\boxed{\begin{aligned} X_i^H BX_j &= \delta_{ij} \\ X_i^H AX_j &= \lambda_j \delta_{ij} \end{aligned}}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。