矩阵的Jordan标准形

定义：　称 n_i 阶矩阵

$$J_i=\begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

为 **Jordan 块**。设 $J_1,J_2,\cdots,J_s$ 为 **Jordan** 块，称准对角形矩阵

$$
\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}
$$

为 **Jordan 标准形**。

由前面的例题和定理可知 **Jordan** 块的初等因子为 $(\lambda-a_i)^{n_i}$，从而**Jordan**标准形矩阵的初等因子为

$$
(\lambda-a_1)^{n_1},(\lambda-a_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-a_s)^{n_s}
$$

定理： 设 $A\in C^{n\times n}$， A 的初等因子为

$$(\lambda-a_1)^{n_1},(\lambda-a_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-a_s)^{n_s}$$

则

$$A\sim J$$

这里

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_i & 1 & & & \\ & \boldsymbol{a}_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (\boldsymbol{i} = 1, 2, \cdots, \boldsymbol{s})$$

称 J 是矩阵 A 的 **Jordan 标准形**。特别地，我们有

定理2.3.2: A 可以对角化的充分必要条件是 A 的初等因子都是一次因式。

例 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I - A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$， $\lambda-2$.

故 A 的标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

或

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I-A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & 2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为$\lambda, \lambda, \lambda-2$.

故 A 的 **Jordan** 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

或

$$J=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

例　用矩阵秩的方法求出矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形。

解：　先求出 A 的特征多项式及其特征值

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

对于特征值 $\lambda_1 = 1$，它是 $f(\lambda)$ 的 **1** 重根，从而 λ_1 在 A 的 **Jordan** 标准形的主对角线上出现一次，因此 J 中主对角元为**1** 的 **Jordan** 块只有一个且为一阶。

对于特征值 $\lambda_2 = 3$，先求 $\text{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -14 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$， 从而 λ_2 的几何重数为

$$q_{\lambda_2}=n-2=3-2=1$$

特征值 $\lambda_2=3$ 是 $f(\lambda)$ 的两重根，从而 λ_2 在 A 的**Jordan**标准形 J 的主对角线上出现两次，因此

J 中主对角元为 **3** 的**Jordan**块只有一个且为二阶。

故 A 的标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix} \quad \text{或} \quad J=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

例：证明 n 阶非零矩阵 A 可对角化的充要条件是对于任意常数 k, 都有 $\mathrm{rank}(kI-A)=\mathrm{rank}(kI-A)^2$.

证：必要性，设 A 可对角化，则存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

对于任意常数 k，

$$\boldsymbol{kI} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{kI} - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} k - \lambda_1 & & & \\ & k - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k - \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

显然有

$$
(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}(k-\lambda_1)^2 & & & \\ & (k-\lambda_2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (k-\lambda_n)^2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
$$

因此 $\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2.$

充分性，设A的Jordan标准形为 J，存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}$$

显然 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{kI}-\boldsymbol{A})^l=\mathrm{rank}(\boldsymbol{kI}-\boldsymbol{J})^l$， $l=1,2,\cdots$

对于每个 J_i ，用反证法，假设 $n_i>1$， 由于 k 的任意性，可取 $k=a_i$， 则

$$a_iI-J_i=\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(a_i I - J_i\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

由此可见，$\operatorname{rank}(a_i I - J_i) > \operatorname{rank}(a_i I - J_i)^2$. 从而

$\operatorname{rank}(a_i I - A) > \operatorname{rank}(a_i I - A)^2$, 这与已知条件矛盾，

所以每个**Jordan**块的阶数都为**1**，即 A 相似于对角形。

求Jordan标准形的另一种方法

(计算 rank$(\lambda_i I - A)^k$，得出对应于 λ_i 的Jordan 块的个数，阶数)

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad \begin{aligned} &\text{rank}(\lambda_i I - J_i) = n_i - 1, \\ &\text{rank}(\lambda_i I - J_i)^2 = n_i - 2, \\ &\qquad \vdots \\ &\text{rank}(\lambda_i I - J_i)^{n_i - 1} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{rank}(\lambda_i I - J_i)^h = 0, \ (h \geq n_i)$$

$$
\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i},
$$

如果 $\lambda_j \neq \lambda_i$，则

$$
\operatorname{rank}(\lambda_j \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}_i)^l = n_i \qquad (l = 1, 2, \cdots)
$$

$$J=\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & \boldsymbol{O} & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & \\ & \boldsymbol{O} & & 0 & 2 & \\ \hline & & & & & 2 \end{array}\right],\quad 2I-J=\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & \boldsymbol{O} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & \\ & \boldsymbol{O} & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$(2I-J)^2=\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \boldsymbol{O} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & \\ & \boldsymbol{O} & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & 0 \end{array}\right],\qquad (2I-J)^k=0,\quad k\geq 3$$

(1) 每个**Jordan** 块 J_i 对应属于 λ_i 的一个特征向量;

(2) 对于给定的 λ_i，其对应的**Jordan** 块的个数等于λ_i 的几何重复度;

(3) 特征值 λ_i 所对应的全体**Jordan** 块的阶数之和等于 λ_i 的代数重复度.

根据 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{kI}-\boldsymbol{A})^l=\operatorname{rank}(\boldsymbol{kI}-\boldsymbol{J})^l,\quad l=1,2,\cdots$

通过计算 $\operatorname{rank}(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^l$，得出对应于 λ_i 的**Jordan** 块的个数，阶数)

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \boldsymbol{J}_{1q_1} & & & & & & & \\ & & & \boldsymbol{J}_{21} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \boldsymbol{J}_{2q_2} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \boldsymbol{J}_{s1} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \boldsymbol{J}_{sq_s} \end{bmatrix}$$

例：已知 10 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^7(\lambda - 3)^3$$

$\boxed{\text{pp 103}}$

经过计算得到下面的数据：

$$\operatorname{rank}(2I - A) = 7,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^2 = 4,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^3 = 3,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^4 = 3.$$

$$\operatorname{rank}(3I - A) = 8,$$
$$\operatorname{rank}(3I - A)^2 = 7,$$
$$\operatorname{rank}(3I - A)^3 = 7.$$

确定 A 的 Jordan 标准形.

$\operatorname{rank}(2I - A) = 7,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda = 2$ 的Jordan块共有 $10 - 7 = 3$ 块;

$\operatorname{rank}(2I - A)^2 = 4$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda = 2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $7 - 4 = 3$ 块;

$\operatorname{rank}(2I - A)^3 = 3$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda = 2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 3 的有 $4 - 3 = 1$ 块;

$\operatorname{rank}(2I - A)^4 = 3$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda = 2$ 的Jordan块中最大阶数 $= 3$

从而，对应于 $\lambda = 2$ 的Jordan块分别为：3阶1块，2阶2块，共3块.

$\mathrm{rank}(3I-A)=8,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块共有 $10-8=2$ 块;

$\mathrm{rank}(3I-A)^2=7$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $8-7=1$ 块;

$\mathrm{rank}(3I-A)^3=7$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda=3$ 的Jordan块中最大阶数 $=2$

从而，对应于 $\lambda=3$ 的Jordan块分别为：2阶1块，1阶1块，共2块.

一般地，对 n 阶矩阵 A，若：

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = s_1, \qquad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^2 = s_2,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^3 = s_3, \cdots, \quad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^l = s_l,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^{l+1} = s_l.$$

则对于 A 的特征根 $\lambda = \lambda_i$，共有 $n - s_1$ 个Jordan块，其中阶数最高为 l 阶，阶数 ≥ 2 的Jordan块有 $s_1 - s_2$ 个，阶数 ≥ 3 的有 $s_2 - s_3$ 个，阶数 ≥ 4 的有 $s_3 - s_4$ 个，…，l 阶的有 $s_{l-1} - s_l$ 个。

如何求相似变换矩阵？

设 n 阶方阵 A 的 **Jordan** 标准形为 J，则存在可逆矩阵 P 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$$

称 P 为相似变换矩阵。对于相似变换矩阵的一般理论我们不作过多的讨论，只通过具体的例题说明求 P 的方法。

例1 求方阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形及其相似变换矩阵 P 。

解： 首先用初等变换法求其 **Jordan** 标准形：

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 8 \\ 3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda+1,(\lambda+1)^2$$

从而 A 的 **Jordan** 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为 P ，则 $P^{-1}AP=J$， P 按列分块记为

$$P=\left[X_1,X_2,X_3\right]$$

于是有

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\right] = \left[\boldsymbol{AX}_1, \boldsymbol{AX}_2, \boldsymbol{AX}_3\right]$$

$$= \boldsymbol{PJ} = \left[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\right]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-\boldsymbol{X}_1, -\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_3\right]$$

从而可得

$$\boldsymbol{AX}_1 = -\boldsymbol{X}_1, \quad \boldsymbol{AX}_2 = -\boldsymbol{X}_2, \quad \boldsymbol{AX}_3 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_3$$

整理以后可得三个线性方程组

$$(I+A)X_1 = 0$$

$$(I+A)X_2 = 0$$

$$(I+A)X_3 = X_2$$

前面的两个方程为同解方程组，可以求出它们的一个基础解系：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix}0, & 1, & 0\end{bmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{bmatrix}-2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$$

可以取 $X_1 = \alpha_1$，但是不能简单地取 $X_2 = \alpha_2$，这是因为如果 X_2 选取不当，会使得第三个非齐次线性方程组无解。由于

α_1, α_2 的任意线性组合都是前两个方程组的解，

所以应该取 $X_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

使得第三个非齐次方程有解，即其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩，容易计算出其系数矩阵的秩为 1，从而应该使得增广矩阵

$$\begin{bmatrix} I+A, & X_2 \end{bmatrix}$$

的秩也为 1。即

$$\begin{bmatrix} I+A, & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_2 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix}$$

容易看出只需令 $k_1 = 3, k_2 = -2$ 就会使得上述矩阵的秩为1，于是

$$X_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4, & 3, & -2 \end{bmatrix}^T$$

再由第三个方程解出一个特解为

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$

那么所求相似变换矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} X_1, X_2, X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

例 对于方阵

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求 A^{10} 。

解： 首先用初等变换法求其**Jordan**标准形：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda-1, (\lambda-1)^2$$

从而 A 的**Jordan**标准形为

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵 P 且 $P^{-1}AP=J$，那么

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}$$

按照前面例题的方式，容易计算出

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

从而

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19 & -20 & 60\\ -10 & -9 & 30\\ -10 & -10 & 31\end{bmatrix}$$

例 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵且存在正整数 n 使得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{I}$ ，证明：A 与对角矩阵相似且主对角线上的元素均为 n 次单位根。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & \mathbf{1} & & \\ & \lambda_i & \mathbf{1} & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}$$

由于 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{I}$，所以有

$$\boldsymbol{J}^n=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^n=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$$

从而有

$$\boldsymbol{J}_i^n=\begin{bmatrix}\lambda_i^n & * & \cdots & * \\ & \lambda_i^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i^n\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_k$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立，这样有 $t=n$ ，这表明 J 为对角矩阵，所以 A 与对角矩阵相似。

例　设 A 为数域 F 上的 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，证明：$A$ 与对角矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{1} & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

相似。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=J$.

由于 $A^2=A$，所以有

$$J^2=(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ=J$$

从而 $J_i^2 = J_i$, $i = 1, 2, \cdots, t$. 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立且 $\lambda_i^2=\lambda_i$，所以有

$$\lambda_i=1,\quad \lambda_i=0$$

这说明 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为**1** 或**0**，适当地调换主对角线上的元素次序可以得到方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵仍然与 A 相似。

例 试写出**Jordan**标准形均为

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的两个矩阵。

例：任意 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 相似.

pp 109

证明：设 $P^{-1}AP=J$ ，则 $A=PJP^{-1}$

$$\longrightarrow \quad P^T A^T (P^T)^{-1} = J^T \quad \longrightarrow \quad J^T \sim A^T$$

设 $J=\mathrm{diag}\left(J_1, J_2, \cdots J_s\right)$，令

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$P_i^{-1} = P_i$$

$$P_i J_i P_i = J_i^T$$