4-1：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

对$\boldsymbol{A}$只进行初等行变换, 得行简化阶梯形,

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

取

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$, 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个满秩分解.

注：满秩分解不唯一。

一般方法：设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，秩$(A)=r$

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行简化阶梯形 } J$$

设主元在 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 列，则选取

A 中的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 列组成矩阵 $B\in\mathbb{C}^{m\times r}$，

去掉 J 中的零行，剩下的组成 $C\in\mathbb{C}^{r\times n}$

$\Longrightarrow$ $A=BC$

例：设矩阵的满秩分解为 $A=BC$，证明：

$$AX=0 \Leftrightarrow CX=0$$

充分性：$CX=0 \Longrightarrow BCX=0$，即 $AX=0$；

必要性：$AX=0 \Longrightarrow BCX=0$，

$A=BC$ 为满秩分解， 所以 B 的列向量线性无关，

$\Longrightarrow$ 方程组 $BY=0$ 只有零解.

所以 $CX=0$.

4 - 2 已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解.

$$AA^H=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1=6,\ \lambda_2=0.$$

所以 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{6}$. 属于 λ_1, λ_2 的标准正交向量

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T,\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T$$

记 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{U}_1=\eta_1$, 计算

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

计算与 $\boldsymbol{V}_1$ 正交的向量，需解方程

$$x_1+x_2+x_3=0$$

解得 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Schmidt 标准正交化得

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T, \ \beta_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T$$

于是

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

4-3(2) 已知

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

求 B 的谱分解.

$B=B^H$， 所以 B 是正规矩阵.

$$|\lambda I - B| = (\lambda+1)^2(\lambda-2) \longrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2=\lambda_3=-1.$$

$\lambda_1=2$ 对应的特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^T$,

$$\lambda_2=\lambda_3=-1 \longrightarrow \alpha_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T,\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$$

将 α_2, α_3 正交化和单位化得

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T$$

$$G_1 = \xi_1 \xi_1^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \xi_2\xi_2^H + \xi_3\xi_3^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

于是 $A = 2G_1 - G_2.$

4 -6 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解.

$$AA^H=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1=4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=0.$$

所以 A 的奇异值为 $\sigma_1=2, \sigma_2=1.$ 属于 $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3$ 的单位特征向量为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,\quad \eta_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \eta_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

记 $U=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}$, $U_1=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}$ 计算

$$V_1=A^H U_1 \Delta^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}=V.$$ 所以

$$A=UDV^H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}.$$

4 -7 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$$

是单纯矩阵, 求 a, 并且求矩阵 A的谱分解表达式.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$$

特征值: $\lambda_1=\lambda_2=6,\ \lambda_3=-2.$

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$,

$$6I - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A为单纯矩阵, **rank(6*I*-*A*)=1,** 所以 ***a*****=0.**
特征值 $\lambda = 6$ 的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$\lambda_3 = -2$ 对应的特征向量 $\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \xi_1\beta_1^T + \xi_2\beta_2^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \xi_3\beta_3^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = 6G_1 - 2G_2.$$

5 -3

对 $\alpha \in C^n, A \in C^{n\times n}$，设$\|A\|$ 是诱导范数,且 $\det A \neq 0$，试证:

(1) $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$，(2) $\|A^{-1}\|^{-1} = \min\limits_{\alpha\neq 0} \dfrac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|}$.

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| \rightarrow \|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}.$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{\alpha\neq 0} \frac{\|A^{-1}\alpha\|}{\|\alpha\|} = \max_{\alpha\neq 0} \frac{\|A^{-1}\alpha\|}{\|AA^{-1}\alpha\|} = \max_{\beta\neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|A\beta\|}$$

$$= \left(\min_{\beta\neq 0} \frac{\|A\beta\|}{\|\beta\|}\right)^{-1} \rightarrow \|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\alpha\neq 0} \frac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|}.$$

5 -5

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$，

证明：$\|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2\right)^{1/2}$ 是向量范数.

注意

$$\|\alpha+\beta\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{a_i}\, x_i + \sqrt{a_i}\, y_i\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{a_i}\, x_i\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{a_i}\, y_i\right|^2\right)^{1/2} = \|\alpha\| + \|\beta\|$$

或者令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \sqrt{\boldsymbol{a}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\boldsymbol{a}_n} \end{bmatrix}$$

则

$$\|\alpha\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\left|\boldsymbol{x}_i\right|^2\right)^{1/2}=\|A\alpha\|_2$$

5 -6 设 A 是正定 Hermite 矩阵，证明：若 $\alpha \in C^n$，则 $\|\alpha\| = \left(\alpha^H A \alpha\right)^{1/2}$ 是 α 的向量范数.

（椭圆范数）

提示：

A 正定，所以存在可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$

$$\|\alpha\| = \left(\alpha^H A \alpha\right)^{1/2} = \left(\alpha^H Q^H Q \alpha\right)^{1/2} = \|Q\alpha\|_2$$

$$\|\alpha + \beta\| = \|Q(\alpha + \beta)\|_2 \le \|Q\alpha\|_2 + \|Q\beta\|_2 = \|\alpha\| + \|\beta\|$$

例：对于任意的 $A\in C^{m\times n}$，

$$\|A\|_{m_\infty}=\max\{m,n\}\max_{i,j}|a_{ij}| \quad \text{是矩阵范数.}$$

$$\|AB\|=\max\{m,l\}\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right| \qquad \left(B\in C^{n\times l}\right)$$

$$\le\max\{m,l\}\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le\underline{\max\{m,l\}\cdot n}\max_{i,k}|a_{ik}|\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$\le\underline{\max\{m,n\}}\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\underline{\max\{l,n\}}\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$=\|A\|\|B\|$$

例：对于任意的 $A \in C^{m\times n}$，

$$\|A\| = \sqrt{mn}\ \max_{i,j}|a_{ij}|$$ 是矩阵范数.

$$\|AB\| = \sqrt{ml}\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \qquad \left(B \in C^{n\times l}\right)$$

$$\le \sqrt{ml}\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le \sqrt{ml}\cdot n\max_{i,k}|a_{ik}|\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$= \sqrt{mn}\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\sqrt{nl}\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$= \|A\|\|B\|$$

例：设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，证明：对任意的 $A\in C^{n\times n}$ 都有 $\rho(A)=\lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$.

$$\rho(A)=\max\left\{\left|\lambda_j(A)\right|,\quad j=1,2,\cdots,n\right\}$$

$$\rho(A)^k=\rho(A^k)\le\left\|A^k\right\|\longrightarrow\rho(A)\le\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

令 $\bar{A}=\left(\rho(A)+\varepsilon\right)^{-1}A,\quad \varepsilon>0\longrightarrow\ \rho(\bar{A})<1,$

$\longrightarrow\ \left\|\bar{A}^k\right\|\to 0.\longrightarrow$存在 $N>0$, 使得 $\left\|\bar{A}^k\right\|<1, k>N$

$\Leftrightarrow\ \left\|A^k\right\|\le\left(\rho(A)+\varepsilon\right)^k\longrightarrow\ \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\le\rho(A)+\varepsilon$,k>N