第六章　矩阵函数

矩阵多项式与最小多项式

定义： 已知 $A \in C^{n\times n}$ 和关于变量 x 的多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

那么我们称

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

为 A 的矩阵多项式.

设 A为一个 n 阶矩阵， J 为其 **Jordan** 标准形，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_r)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1),\boldsymbol{J}_2(\lambda_2),\cdots,\boldsymbol{J}_r(\lambda_r))\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
f(A) &= a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I \\
&= a_n (PJP^{-1})^n + a_{n-1} (PJP^{-1})^{n-1} \\
&\quad + \cdots + a_1 (PJP^{-1}) + a_0 I \\
&= P(a_n J^n + a_{n-1} J^{n-1} + \cdots + a_1 J + a_0 I) P^{-1} \\
&= P f(J) P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_r)) P^{-1}
\end{aligned}
$$

我们称上面的表达式为矩阵多项式 $f(A)$ 的 **Jordan** 表示。其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i\times d_i} \quad (i=1,2,\cdots,r)$$

$$J_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^k & c_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & c_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

例　已知多项式

$$f(x)=x^4-2x^3+x-1$$

与矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$ 。

解： 首先求出矩阵的 A 的 **Jordan** 标准形 J 及其相似变换矩阵 P

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&3/2\\0&0&-1/2\\1&0&2\end{bmatrix}$$

那么有

$$f(A) = Pf(J)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(-1) & 0 & 0 \\ 0 & f(-1) & f'(-1) \\ 0 & 0 & f(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(-1)+4f'(-1) & 0 & 8f'(-1) \\ 3f'(-1) & f(-1) & 6f'(-1) \\ -2f'(-1) & 0 & f(-1)-4f'(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -35 & 0 & -72 \\ -27 & 1 & -54 \\ 18 & 0 & 37 \end{bmatrix}$$

定义： 已知 $A \in C^{n\times n}$ 和关于变量 x 的多项式

$$\boldsymbol{f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}$$

如果 $f(x)$ 满足 $\boldsymbol{f(A)=O_{n\times n}}$ ，那么称 $f(x)$ 为矩阵 A 的一个**化零多项式**。

定理： 已知 $A \in C^{n\times n}$， $f(\lambda)$ 为其特征多项式，则有

$$f(A) = O_{n\times n}$$

我们称此定理为 **Hamilton-Cayley** 定理。

证明： $A = PJP^{-1} = P\text{diag}\left(J_1(\lambda_1),\cdots,J_r(\lambda)\right)P^{-1}$

$$f(A) = P\text{diag}(f(J_1), f(J_2),\cdots, f(J_r))P^{-1}$$

其中

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

由于λ_i的代数重复度$\geq d_i$，所以

$$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(d_i-1)}(\lambda_i)=0.$$

$\therefore f(J_i)=0,\ i=1,2,\cdots,r.$ 从而 $f(A)=Pf(J)P^{-1}=0.$

例：考虑矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3$，显然 $f_A(A)=O$.

容易看出，多项式 $g(\lambda)=(\lambda-2)^2$ 也可使得 $g(A)=O$.

若$f(\lambda)$是 A 的化零多项式, $h(\lambda)$ 是任一多项式,则 $f(\lambda)h(\lambda)$ 也是A的化零多项式.

定义： 已知 $A \in C^{n\times n}$，在 A 的零化多项式中，次数最低且首项系数为 1 的化零多项式称为 A 的最小多项式，通常记为 $m(\lambda)$ 。

最小多项式的性质： 已知 $A \in C^{n\times n}$ ，那么

（1）矩阵的任何一个化零多项式均能被 $m(\lambda)$ 整除。

$$f(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda), \quad \underline{\deg r(\lambda)<\deg m(\lambda)}$$

$$\underline{O}=f(A)=m(A)q(A)+r(A)=\underline{r(A)},$$

$\because m(\lambda)$ 是最小多项式, $\quad \therefore r(\lambda)=0.$

$\Downarrow$

（2）矩阵 A 的最小多项式是唯一的。

（3）相似矩阵有相同的最小多项式。

$B = PAP^{-1}$， 对任一多项式 $f(\lambda)$ 有

$$f(B) = Pf(A)P^{-1}$$

$$m_A(B) = Pm_A(A)P^{-1} = O, \Longrightarrow m_B(\lambda) \mid m_A(\lambda)$$

$$m_B(A) = P^{-1}m_B(B)P = O, \Longrightarrow m_A(\lambda) \mid m_B(\lambda)$$

$$\therefore m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$$

以上结论掌握, 证明了解即可.

如何求一个矩阵的最小多项式? 首先我们考虑 **Jordan** 标准形矩阵的最小多项式。

例 **1**： 已知一个 **Jordan** 块

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

求其最小多项式。

解：注意到其特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$ ，

则由上面的定理可知其最小多项式 $m(\lambda)$ 一定具有如下形状

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{k}$$

其中 $1\le k\le d_i$ 。但是当 $k<d_i$ 时

$$m(J_i)=(J_i-\lambda_i I)^k$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \neq O_{d_i\times d_i}$$

第 $k+1$ 列

因此有

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$$

定理： 已知对角块矩阵

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_r)$$

$m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)$ 分别为子块 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 的最小多项式，则 A 的最小多项式为 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)$ 的最小公倍数 $[m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_r(\lambda)]$

注：

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 是 d_i 阶的Jordan块,其最小多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{d_i}$, $i=1,2,\cdots,s$, 构成 A 的初等因子组.

所以 A 的最小多项式是其初等因子组的最小公倍式.

例：求下列矩阵的最小多项式

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

解： 首先求出其 **Jordan** 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

所以其最小多项式为 $(\lambda+1)^2$ 。

(2) $$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

此矩阵的**Jordan**标准形为

$$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

从而其最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-3)^2$。

(3) $D=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

此矩阵本身就是一个**Jordan**标准形，所以其最小多项式 $(\lambda-5)(\lambda-3)^2$

矩阵函数及其计算

函数在矩阵谱上的值与矩阵函数

定义： 设 $A \in C^{n\times n}$， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为 A 的 r 个互不相同的特征值，$m(\lambda)$ 为其最小多项式且有

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{d_r}$$

其中

$$d_i \geq 1(i=1,2\cdots,r), \quad \sum_{i=1}^{r} d_i = m$$

如果函数 $f(x)$ 具有足够高阶的导数并且下列 m 个值

$$\{ f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \cdots, f^{(d_i-1)}(\lambda_i), \quad i=1,2,\cdots,r \}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的影谱上有定义。

例：设

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

又已知

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

容易求得矩阵A的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

并且

$$f(2)={}^{1}\!/_{2},\ f(1)={}^{1}\!/_{6},\ f'(1)={}^{5}\!/_{36}$$

所以 $f(x)$ 在 A 的谱上有定义。但是如果取

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

容易求得矩阵 B 的最小多项式为

$$\boldsymbol{m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2}$$

显然 $f(3)$ 不存在，所以在 B 的谱上无定义。

考虑下面问题：

（1）设 $A \in C^{n\times n}$ ，如果 $f(A)$ 有定义，那么 $f(A^T)$ 是否也有定义？

（1） $f(A)$ 有定义 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 A 的影谱上有定义

$\because$ A 与 A^T 相似, $\Longrightarrow$ 有相同的最小多项式

$\therefore$ $f(x)$ 在 A 与 A^T 的影谱上的值相同

定义：设矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{d_r}$$

函数 $f(x)$在矩阵 A 的谱上有定义，如果存在多项式 $p(x)$且满足

$$f^{(k)}(\lambda_i) = p^{(k)}(\lambda_i),\quad i = 1, 2, \cdots, r;\quad k = 0, 1, \cdots, d_i - 1$$

则定义矩阵函数为

$$f(A) = p(A)$$

注1：满足上述定义的多项式 $p(x)$ 是不唯一的.

注2：矩阵函数 $f(A)$ 是与 A 相同阶数的矩阵.

定理：设 $p(\lambda)$ 与 $q(\lambda)$ 为两个不同的多项式，A 为 n 阶矩阵，则 $p(A)=q(A)$ 的充分必要条件是 $p(\lambda)$ 与 $q(\lambda)$ 在 A 的影谱上的值对应相等，即

$$p^{(k)}(\lambda_i)=q^{(k)}(\lambda_i),\quad (i=1,2,\cdots,s;\, k=0,1,\cdots,d_i-1)$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

$f(x)$ 为多项式.

如何求矩阵函数？矩阵函数的 Jordan 表示，幂级数表示

定理：设 $A\in C^{n\times n}$，J 为矩阵 A 的Jordan标准形，P 为其相似变换矩阵且使得

$$A=PJP^{-1}$$

如果函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的谱上有定义，那么

$$\boxed{\begin{aligned} f(A) &= Pf(J)P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_r))P^{-1} \end{aligned}}$$

其中

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f^{'}(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{''}(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \frac{1}{2!}f^{''}(\lambda_i) \\ & & & & & f^{'}(\lambda_i) \\ & & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

我们称此表达式为矩阵函数 $f(A)$ 的**Jordan**表示。

例： 设

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$ 的**Jordan**表示并计算 $e^A, e^{tA}, \sin A$.

解： 首先求出其 **Jordan** 标准形矩阵 J 与相似变换矩阵 P

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

从而 $f(A)$ 的 **Jordan** 表示为

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(1)&f'(1)\\0&0&f(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(1)-2f'(1)&-2f'(1)&6f'(1)\\-f'(1)&f(1)-f'(1)&3f'(1)\\-f'(1)&-f'(1)&f(1)+3f'(1)\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=e^x$ 时，可得 $f(1)=e$，$f'(1)=e$，从而有

$$e^{A}=\begin{bmatrix}-e & -2e & 6e\\ -e & 0 & 3e\\ -e & -e & 4e\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，可得 $f(1)=e^{t}, f'(1)=te^{t}$

于是有

$$e^{tA}=\begin{bmatrix}(1-2t)e^{t} & -2te^{t} & 6te^{t}\\ -te^{t} & (1-t)e^{t} & 3te^{t}\\ -te^{t} & -te^{t} & (1+3t)e^{t}\end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，可得

$$f(1)=\sin 1,\quad f'(1)=\cos 1$$

同样可得

$$\sin A=\begin{bmatrix} \sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1 \\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1 \end{bmatrix}$$

例：设

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$ 的**Jordan**表示并计算

$$e^{tA}, \quad \sin \pi A, \quad \cos \pi/2\, A$$

解：首先求出其 **Jordan** 标准形矩阵 J 与相似变换矩阵 P

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

从而 $f(A)$ 的 **Jordan** 表示为

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(-1) & 0 & 0\\ 0 & f(-1) & f'(-1)\\ 0 & 0 & f(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 3/2\\ 0 & 0 & -1/2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(-1)+4f'(-1) & 0 & 8f'(-1)\\ 3f'(-1) & f(-1) & 6f'(-1)\\ -2f'(-1) & 0 & f(-1)-4f'(-1)\end{bmatrix}$$

当$f(x)=e^{tx}$时，可得 $f(-1)=e^{-t}$，$f'(-1)=te^{-t}$

于是有

$$e^{tA}=\begin{bmatrix} e^{-t}+4te^{-t} & 0 & 8te^{-t} \\ 3te^{-t} & e^{-t} & 6te^{-t} \\ -2te^{-t} & 0 & -4te^{-t} \end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\sin\pi x$ 时，可得

$$f(-1)=0,\quad f'(-1)=-\pi$$

故

$$\sin \pi A = \begin{bmatrix} -4\pi & 0 & -8\pi \\ -3\pi & 0 & -6\pi \\ 2\pi & 0 & 4\pi \end{bmatrix}$$

类似可求得

$$\cos \frac{\pi}{2} A = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 4\pi \\ 3\pi/2 & 0 & 3\pi \\ -\pi & 0 & -2\pi \end{bmatrix}$$