6-4： 已知

$$J_0(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda_0 & \mathbf{1} & & \\ & \lambda_0 & \mathbf{1} & \\ & & \lambda_0 & \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

求 $J_0^2(\lambda_0), J_0^3(\lambda_0), J_0^4(\lambda_0), J_0^k(\lambda_0), k \geq 5.$

$$
\boldsymbol{J}_0^2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & \\ & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 \\ & & \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ & & & \lambda_0^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{J}_0^3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & 1 \\ & \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 \\ & & \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 \\ & & & \lambda_0^3 \end{bmatrix}
$$

$$J_0^4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 \\ & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 \\ & & \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 \\ & & & \lambda_0^4 \end{bmatrix}$$

$k \geq 5,$

$$J_0^k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0^k & k\lambda_0^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_0^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\lambda_0^{k-3} \\ & \lambda_0^k & k\lambda_0^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_0^{k-2} \\ & & \lambda_0^k & k\lambda_0^{k-1} \\ & & & \lambda_0^k \end{bmatrix}$$

6-5：求矩阵A的最小多项式.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&-4\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

解： $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3.$

$$I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-2&4\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(I-A)=1.$

所以 A 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{bmatrix}$

A 的 最小多项式为 $(\lambda-1)^2$.

6-8：已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

求 $e^{A}, e^{tA}, \sin A.$

解：方法一（多项式表示法）

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -2 & -1\\ 2 & \lambda-6 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-4)^2\end{bmatrix}$$

所以 A 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix}4 & & \\ & 4 & 1 \\ & & 4\end{bmatrix}$

A 的 最小多项式为 $(\lambda-4)^2$.

设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$ ，则 $P'(\lambda)=a_1$.

所以 $f(4)=P(4)=a_0+4a_1$， $f'(4)=a_1$

解得：$a_0=f(4)-4f'(4)$， $a_1=f'(4)$.

所以 $f(A)=P(A)=[f(4)-4f'(4)]I+f'(4)A$.

$$f(A)=[f(4)-4f'(4)]I+f'(4)A$$

$$=\begin{bmatrix} f(4)-2f'(4) & 2f'(4) & f'(4) \\ -2f'(4) & f(4)+2f'(4) & f'(4) \\ 0 & 0 & f(4) \end{bmatrix}$$

当 $f(x)=e^x$ 时，$f(4)=e^4$, $f'(4)=e^4$.

$$e^A=e^4\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，$f(4)=e^{4t}$，$f'(4)=te^{4t}$.

$$e^{tA}=e^{4t}\begin{bmatrix} 1-2t & 2t & t \\ -2t & 1+2t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $f(x)=\sin x$ 时，$f(4)=\sin 4$, $f'(4)=\cos 4$.

$$\sin A=\begin{bmatrix} \sin 4-2\cos 4 & 2\cos 4 & \cos 4 \\ -2\cos 4 & \sin 4+2\cos 4 & \cos 4 \\ 0 & 0 & \sin 4 \end{bmatrix}$$

方法二：（Jordan 表示法）

A 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}$

设存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$，令 $P=[x_1\ x_2\ x_3]$，则

$$AP=[Ax_1\ Ax_2\ Ax_3]=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$Ax_1 = 4x_1, \quad Ax_2 = 4x_2, \quad Ax_3 = x_2 + 4x_3$$

解得

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(4) & & \\ & f(4) & f'(4) \\ & & f(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(4) - 2f'(4) & 2f'(4) & f'(4) \\ -2f'(4) & f(4) + 2f'(4) & f'(4) \\ 0 & 0 & f(4) \end{bmatrix}$$

6 -11 设 A 为 n 阶矩阵，证明:

(1) $e^{2\pi i I}=I, \quad e^{2\pi i I+A}=e^{A}$

(2) $\sin 2\pi I=0, \quad \cos 2\pi I=I;$

(3) $\left\|e^{A}\right\| \leq e^{\|A\|}$. ($\|.\|$ 是算子范数）

---

(1) $$e^{2\pi i I}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi i I)^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^{k}}{k!}I=e^{2\pi i}I=I$$

$$(2\pi i I)A=A(2\pi i I) \longrightarrow e^{2\pi i I+A}=e^{2\pi i I}e^{A}=Ie^{A}=e^{A}$$

同理 $e^{-2\pi i I}=e^{-2\pi i}I=I$

$$(2)\quad \sin 2\pi I=\frac{e^{i2\pi I}-e^{-i2\pi I}}{2i}=\frac{1}{2i}(I-I)=0,$$

$$\cos 2\pi I=\frac{e^{i2\pi I}+e^{-i2\pi I}}{2}=\frac{1}{2}(I+I)=I;$$

方法二：

$$2\pi iI=\begin{bmatrix}2\pi i & & \\ & \ddots & \\ & & 2\pi i\end{bmatrix}\longrightarrow e^{2\pi iI}=\begin{bmatrix}e^{2\pi i} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i}\end{bmatrix}=I$$

(3) $$\left\|e^{A}\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\|A^{k}\right\|}{k!}=\|I\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|A^{k}\right\|}{k!}$$

$$\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|^{k}}{k!}=e^{\|A\|}.$$

($\|.\|$ 是算子范数，所以 $\|I\|=1.$ ）

这里如果把算子范数去掉, 则结果不一定成立.
这是因为对于一般范数, 有 $\|I\|\ge 1$. 如果 $\|I\|>1$
比如我们取 Frobinius 范数, 取

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad e^{A}=\begin{bmatrix}e & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left\|e^{A}\right\|_{F}=\left\|\begin{bmatrix}e & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\|_{F}=\sqrt{e^{2}+1},$$

$$e^{\|A\|_{F}}=e^{\left\|\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\|_{F}}=e.$$

显然 $\left\|e^{A}\right\|_{F}\le e^{\|A\|_{F}}$ 不成立.

6-16: 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^k}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{bmatrix}^k$ 的和.

解: 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^k}x^k$ 的收敛半径 $R=10$.

矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值为 5, -3, 所以, $\rho(A)<R$,

矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^k}A^k$ 绝对收敛。另外，当

$|x|<10$ 时,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^k}x^k=10\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{k+1}}{10^{k+1}}\right)'=10\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{10^{k+1}}\right)'$$

$$=10\left(\frac{1}{1-\frac{x}{10}}\right)'=\left(1-\frac{x}{10}\right)^{-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^k}A^k=f(A)=\left(I-\frac{1}{10}A\right)^{-2}=\frac{1}{169}\begin{bmatrix}388 & 144\\ 576 & 388\end{bmatrix}$$