# 第二章　　$\lambda$—矩阵与矩阵的Jordan标准形

## $\lambda$ --矩阵的基本概念

定义：设$a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

为数域 $F$ 上的多项式，则称

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或 $\lambda$ -矩阵.

$a_{ij}(\lambda)(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 中最高的次数为 $A(\lambda)$ 的次数。

特例：数字矩阵，特征矩阵 $\lambda E - A$.

定义 如果 $\lambda$ -矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 $r$ 阶 $(r \geq 1)$ 子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话)全为零，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 $r$，记为

$$\operatorname{rank} A(\lambda) = r$$

零矩阵的秩为0。

**定义** 一个 $n$ 阶 $\lambda$-矩阵称为**可逆**的，如果有一个 $n$ 阶 $\lambda$-矩阵 $B(\lambda)$ ，满足

$$\boldsymbol{A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E}$$

这里 $E$ 是 $n$ 阶单位矩阵。$B(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 矩阵的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A^{-1}(\lambda)}$ 。

**定理2.1.1** 一个 $n$ 阶 $\lambda$-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $\det \boldsymbol{A(\lambda)}$ 是一个非零的常数。

**定义** 下列各种类型的变换，叫做 $\lambda$-矩阵的初等变换：

(1) 矩阵的任二行(列)互换位置；

(2) 非零常数 $c$ 乘矩阵的某一行(列)；

(3) 矩阵的某一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行(列)上去，其中 $\varphi(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的一个多项式。

对单位矩阵施行上述三种类型的初等变换便得相应得三种 $\lambda$ 矩阵得初等矩阵

$$P(i,j),\quad P(i(c)),\quad P(i,j(\varphi))$$

$$P(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},\qquad P(i(c))=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & \boldsymbol{i}\text{ 列} & & \end{array} \end{array}$$

$$P(i,j(\varphi))=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \varphi(\lambda) & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{i}\text{ 行} \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

**定理** 对一个 $m\times n$ 的 $\lambda$-矩阵$A(\lambda)$ 的行作初等行变换，相当于用相应的 $m$ 阶初等矩阵左乘 $A(\lambda)$ 。对 $A(\lambda)$ 的列作初等列变换，相当于用相应的 $n$ 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$ 。

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),\qquad P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1})),$$

$$P(i,j(\varphi))^{-1}=P(i,j(-\varphi)).$$

**定义** 如果 $A(\lambda)$ 经过有限次的初等变换之后变成 $B(\lambda)$ ，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记之为

$$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$$

定理　$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是存在两个可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$，使得

$$\boldsymbol{B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)}$$

**P66 推论2.1.2**

$\lambda$ 矩阵的等价关系满足：

（1）自反性：　$\boldsymbol{A(\lambda) \simeq A(\lambda)}$;

（2）对称性：$\boldsymbol{A(\lambda) \simeq B(\lambda)}$则$\boldsymbol{B(\lambda) \simeq A(\lambda)}$;

（3）传递性：若$\boldsymbol{A(\lambda) \simeq B(\lambda)}$，$\boldsymbol{B(\lambda) \simeq C(\lambda)}$,则$\boldsymbol{A(\lambda) \simeq C(\lambda)}$.

## $\lambda-$矩阵Smith标准形的存在性

定 理　任意一个非零的$m\times n$型的$\lambda$-矩阵都等价于一个“对角矩阵”，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r \geq 1$， $d_i(\lambda)$ 是首项系数为1的多项式且

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

称这种形式的 $\lambda$-矩阵为$A(\lambda)$ 的 **Smith标准形**。

$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 不变因子。

例 1

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

将其化成Smith标准形。

解：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\quad\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

**例 2** $$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4\\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

将其化为 **Smith** 标准形。 学生自己看

**解：**

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1\\ 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3\\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-1 \\ 3\lambda-3 & 4\lambda^2+3\lambda-7 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

**练习题：**

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

将其化为 Smith 标准形。

# $\lambda$--矩阵标准形的唯一性

定义： $A(\lambda)$ 为一个 $\lambda$-矩阵且$\mathrm{rank}(A(\lambda))=r$， 对于任意的正整数 $k$ ，$1\le k\le r$， $A(\lambda)$ 必有非零的 $k$ 阶子式，$A(\lambda)$ 的全部 $k$ 阶子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$称为 $A(\lambda)$ 的 $k$ 阶行列式因子。

显然，如果 $\mathrm{rank}(A(\lambda))=r$,则行列式因子一共有 $r$个。

例 1　　求

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

的各阶行列式因子。

解：　由于　$(1-\lambda,\lambda)=1,$　　$D_1(\lambda)=1$

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda(-\lambda^2-\lambda+1)=f(\lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=\lambda^3(-\lambda-1)=g(\lambda)$$

显然 $(f(\lambda),g(\lambda))=\lambda,$ 而且其余的各2 阶子式也都包含 $\lambda$ 作为公因子，所以 $D_2(\lambda)=\lambda.$

另外

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$|A(\lambda)|=-\lambda^3-\lambda^2$$

$$\Rightarrow D_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2$$

注意：观察 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), D_3(\lambda)$ 三者之间的关系。

定理：等价 $\lambda$ 矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩。

设 $\lambda$-矩阵 $A(\lambda)$ 的 **Smith** 标准形为

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1(\lambda) & & & & & & \\ & \boldsymbol{d}_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boldsymbol{d}_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算上面的标准形的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$$

$$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$

$$\vdots$$

$$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$$

显然有

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$$

$$\vdots$$

$$d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

由于 $A(\lambda)$ 与上面的Smith标准形具有相同的各阶行列式因子，所以 $A(\lambda)$ 的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$$

而 $$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

又是由这些行列式因子唯一确定的，于是

定理： $A(\lambda)$ 的Smith标准形是唯一的。

**定理2.1.7** $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是对于任何的 $k$，它们的 $k$ 阶行列式因子相同。

**定理2.1.8** $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子。

推论1 $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件为 $A(\lambda)$ 与单位矩阵等价。

**推论2** $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件为 $A(\lambda)$ 可以表示成一系列初等矩阵的乘积。

**P.66**

**例1**　求下列 $\lambda$ 矩阵的Smith标准形。

$$(1)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**解：**（1）容易计算出

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2, D_4(\lambda)=\lambda^4(\lambda-1)^4$$

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$
$$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2, D_4(\lambda)=\lambda^4(\lambda-1)^4$$

$$\Rightarrow d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$
$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1), d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$$

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda(\lambda-1) & & \\ & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} \lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda-a & c_{n-1} \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}$$

首先观察此矩阵的元素排列规律，显然

$$D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

下面看 $n-1$ 阶行列式因子。有一个$n-1$ 阶子式要注意，即

$$\begin{vmatrix} c_1 & & & \\ \lambda - a & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda - a & c_{n-1} \end{vmatrix} = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$$

容易计算出 $D_{n-1}(\lambda) = 1$ 从而

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1$$

$$\Rightarrow d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, \cdots, d_{n-1}(\lambda) = 1,$$

$$d_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$$

原 $\lambda$-矩阵的**Smith**标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\lambda-a)^n \end{bmatrix}$$

## 初等因子和矩阵的相似

设 $\lambda$-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

在复数域内将它们分解成一次因式的幂的乘积：

$$\boldsymbol{d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{12}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{1s}}}$$
$$\boldsymbol{d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{22}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{2s}}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{rs}}}$$

其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 是互异的复数，$e_{ij}$ 是非负整数。因为 $d_i \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,r-1)$， 所以满足如下关系

$$\mathbf{0 \le e_{11} \le e_{21} \le \cdots \le e_{r1}}$$

$$\mathbf{0 \le e_{12} \le e_{22} \le \cdots \le e_{r2}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{0 \le e_{1s} \le e_{2s} \le \cdots \le e_{rs}}$$

**定义** 在上式中，所有指数大于零的因子

$$\mathbf{(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}, e_{ij} > 0, i = 1,\cdots,r, j = 1,\cdots,s}$$

称为 $\lambda$-矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子。

例　如果 $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

则 $A(\lambda)$ 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,$

$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,(\lambda-2)$

例　如果 $5\times 6$ $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为4，其初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda+i)^3$ $(\lambda-i)^3$，求 $A(\lambda)$的Smith标准形。

解：首先求出 $A(\lambda)$ 的不变因子

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+i)^3(\lambda-i)^3$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_1(\lambda)=1$$

从而 $A(\lambda)$ 的**Smith**标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**定理2.2.1** $n$ 阶 $\lambda$-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们有相同的秩且有相同的初等因子。

**定理 2.2.3** 若 $\lambda$-矩阵

p.68, 71

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1(\lambda) & & & \\ & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t(\lambda) \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}_1(\lambda),\boldsymbol{A}_2(\lambda),\cdots,\boldsymbol{A}_t(\lambda)$ 各个初等因子的全体就是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的全部初等因子。

**定理 2.2.4** 若 $\lambda$-矩阵

p. 71

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & & \\ & f_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_t(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

则 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_t(\lambda)$ 所有一次因式幂的全体就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

**例 1** 求 $\lambda$矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

的初等因子，不变因子与标准形。

**解**：记 $A_1(\lambda)=\lambda^2+\lambda, A_2(\lambda)=\lambda,$

$$A_3(\lambda)=\begin{bmatrix} (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1(\lambda) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_3(\lambda)\end{bmatrix}$$

对于 $A_3(\lambda)$ ，其初等因子为 $\lambda, \lambda-1, \lambda+1$

由上面的定理可知 $A(\lambda)$ 的初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$$

因为 $A(\lambda)$ 的秩为**4**，故 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1), d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1),$$
$$d_2(\lambda)=\lambda, d_1(\lambda)=1$$

因此 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

**练习题** 判断下面两个 $\lambda$ 矩阵是否等价？

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**例 2** 求下列 $\lambda$ 矩阵的行列式因子与不变因子

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}$$

p.72, 86

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, \cdots, d_{n-1}(\lambda) = 1,$$

$$d_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

## 数字矩阵的相似与 $\lambda$ -矩阵的等价

**定理2.2.5**： 设 $A, B$ 是两个 $n$ 阶的数字矩阵，那么 $A$ 与 $B$ 相似的充分必要条件为它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 等价。

**定义**： 对于数字矩阵 $A$，我们称 $\lambda I - A$ 的不变因子为 $A$ 的不变因子，称 $\lambda I - A$ 的初等因子为 $A$ 的初等因子。

对于任何一个数字矩阵 $A$， $|\lambda I - A| \neq 0$， 所以，

$$\operatorname{rank}(\lambda I - A) = n$$

于是可得下面两个定理

**定理2.2.6**： 两个同阶的方阵 $A, B$ 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子。

**定理2.2.7**：两个同阶的方阵 $A, B$ 相似的充分必要条件是它们有相同的行列式因子（或不变因子）。

例　设$\varepsilon \neq 0$，证明：

（1）$n$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \text{与 } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & \varepsilon & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & a \end{bmatrix}$$

相似。

（**2**） $n$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \text{ 与 } B = \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & a \end{bmatrix}$$

不相似。