

例：求下列矩阵的奇异值分解表达式

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解：（1）容易计算 AA^H 的特征值为 5, 0, 0，所以 A 的奇异值为 $\sqrt{5}$ 。下面计算 AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与 5, 0, 0 对应的三个标准正交特征向量

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由这三个标准正交特征向量组成矩阵 U ，所以有

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } \mathbf{V}_1 = \mathbf{A}^H \mathbf{U}_1 \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

取 $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ 与 \mathbf{V}_1 正交.

由这两个标准正交特征向量组成矩阵 V , 那么有

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

于是可得奇异值分解式为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^H \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解：（2）先求 $B = A^H$ 的奇异值分解。

$$A^H = B = U \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

推论： 设 $A \in C_r^{m \times n}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值, 那么存在**酉矩阵** $U_r \in U_r^{m \times r}$, $V_r \in U_r^{n \times r}$ 使得

$$A = U_r \Delta V_r^H \quad \left(= [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} \right)$$

矩阵的极分解

定理： 设 $A \in C_n^{n \times n}$, 那么必存在**酉矩阵** $U \in U^{n \times n}$ 与**正定的 H-矩阵** H_1, H_2

使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

且这样的分解式是**唯一**的。同时有

$$A^H A = H_2^2, \quad A A^H = H_1^2$$

称分解式

$$A = H_1 U = U H_2$$

为矩阵 A 的**极分解表达式**。

定理： 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，则存在 $U \in U^{n \times n}$

与半正定 \mathbf{H} -矩阵 H_1 , H_2 使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

且满足

$$A^H A = H_2^2, \quad A A^H = H_1^2$$

证明：根据矩阵的奇异值分解定理可知，存在酉矩阵 U_1, U_2 使得

$$A = U_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} U_2$$

其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$
 $> \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$ 为 A 的 r 个奇异值。

于是有

$$A = (U_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} U_1^H)(U_1 U_2)$$

$$= (U_1 U_2)(U_2^H \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} U_2)$$

如果令

$$H_1 = U_1 \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) U_1^H$$

$$H_2 = U_2^H \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) U_2$$

$$U = U_1 U_2$$

从而有

$$A = H_1 U = U H_2$$

$$\underline{A^H A = H_2^2, \quad A A^H = H_1^2}$$

不一定唯一

其中 H_1, H_2 是半正定的 \mathbf{H} -矩阵, U 是酉矩阵。

由上面的结论可以给出正规矩阵的另外一种刻划。

定理: 设 $A \in C^{n \times n}$, 则 A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$A = HU = UH$$

其中 H 是半正定的 **H**-矩阵, U 是酉矩阵, 且

$$A^H A = H^2$$

矩阵的谱分解

主要讨论两种矩阵的谱分解: 正规矩阵与可对角化矩阵。

设 A 为正规矩阵, 那么存在 $U \in U^{n \times n}$ 使得

$$A = \overset{U}{\left[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right]} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \overset{U^H}{\begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix}}$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^H + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^H + \dots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^H$$

其中 α_i 是矩阵 A 的特征值 λ_i 所对应的单位特征向量。我们称上式为正规矩阵 A 的谱分解表达式。

设正规矩阵 A 有 r 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$,
特征值 λ_i 的代数重数为 n_i , λ_i 所对应的个两两
正交的单位特征向量为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{n_i}}$, 则 A 的
谱分解表达式又可以写成

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \alpha_{ij}^H = \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i$$

其中 $G_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \alpha_{ij}^H$, 并且显然有

$$G_i^H = G_i = G_i^2, \quad G_i G_k = 0 (i \neq k)$$

由上面的谱分解表达式又可以给出正规矩阵的一种刻画。

定理： 设 A 为一个 n 阶矩阵，其有 r 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ， λ_i 的代数重数为 n_i ，那么 A 为正规矩阵的充分必要条件是存在 r 个 n 阶矩阵 G_1, G_2, \dots, G_r 且满足

了解

$$(1) \quad A = \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i; \quad (2) \quad G_i^H = G_i = G_i^2$$

$$(3) \quad G_i G_k = 0 (i \neq k); \quad (4) \quad \sum_{i=1}^r G_i = I$$

(5) 满足上述性质的矩阵 G_i 是唯一的。

(6) $\text{rank}(G_i) = n_i$

称 G_i 为正交投影矩阵。(投影到特征子空间 V_{λ_i})

例 1：求正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的谱分解表达式。

解：首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -3$$

当 $\lambda = 1$ 时，求得三个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1 = [1, 1, 0, 0]^T, \quad \alpha_2 = [1, 0, 1, 0]^T$$

$$\alpha_3 = [-1, 0, 0, 1]^T$$

当 $\lambda = -3$ 时, 求得一个线性无关的特征向量为

$$\alpha_4 = [1, -1, -1, 1]^T$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化与单位化可得

$$\eta_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right]^T$$

$$\eta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right]^T$$

$$\eta_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}} \right]^T$$

将 α_4 单位化可得: $\eta_4 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$

于是有

$$\begin{aligned} G_1 &= \eta_1 \eta_1^H + \eta_2 \eta_2^H + \eta_3 \eta_3^H \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G_2 = \eta_4 \eta_4^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为

$$A = G_1 - 3G_2$$

例 2 : 求正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -1 & i \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

的谱分解表达式。

解：首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda^2 + 2)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \sqrt{2}i, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}i, \quad \lambda_3 = 0$$

可以求出分别属于这三个特征值的三个线性无关的特征向量

$$\lambda_1 \rightarrow \alpha_1 = [-\sqrt{2}, -i, 1]^T$$

$$\lambda_2 \rightarrow \alpha_2 = [\sqrt{2}, -i, 1]^T$$

$$\lambda_3 \rightarrow \alpha_3 = [0, i, 1]^T$$

再将其单位化可得三个标准正交的特征向量

$$\eta_1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$$

$$\eta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$$

$$\eta_3 = \left[0, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$$

于是有

$$G_1 = \eta_1 \eta_1^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/4 \, i & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \, i & 1/4 & -i/4 \\ -\sqrt{2}/4 & i/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \eta_2 \eta_2^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/4 \, i & \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \, i & 1/4 & -i/4 \\ \sqrt{2}/4 & i/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \eta_3 \eta_3^H$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/2 & i/2 \\ \mathbf{0} & -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为

$$A = -\sqrt{2}iG_1 + \sqrt{2}iG_2 + \mathbf{0}G_3$$

下面我们讨论可对角化矩阵的谱分解表达式。

设 A 是一个 n 阶可对角化的矩阵，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，与其相应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，如果记

$$P = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$$

那么

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \beta_2^T + \dots + \lambda_n \alpha_n \beta_n^T$$

其中

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}$$

可对角化矩阵的谱分解步骤:

(1) 首先求出矩阵 A 的全部互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 及每个特征值 λ_i 所决定的线性无关特征向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}$

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n_1} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n_2} & \cdots & \alpha_{rn_r} \end{bmatrix}$$

(2) 计算

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}$$

(3) 令 $G_i = \alpha_{i1}\beta_{i1}^T + \alpha_{i2}\beta_{i2}^T + \cdots + \alpha_{in_i}\beta_{in_i}^T$

(4) 最后写出

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_r G_r$$

例：已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

为一个可对角化矩阵，求其谱分解表达式。

解：首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$$

可以求出分别属于这三个特征值的三个线性无关的特征向量

$$\lambda_1 \rightarrow \alpha_1 = [2, -1, 0]^T$$

$$\lambda_2 \rightarrow \alpha_2 = [0, 0, 1]^T$$

$$\lambda_3 \rightarrow \alpha_3 = [-1, 1, 1]^T$$

于是

$$P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{bmatrix}$$

取

$$\beta_1 = [1, 1, 0]^T$$

$$\beta_2 = [-1, -2, 1]^T$$

$$\beta_3 = [1, 2, 0]^T$$

令

$$G_1 = \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \alpha_3 \beta_3^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

那么其谱分解表达式为

$$A = G_1 - 2G_2$$