第八章　广义逆矩阵

定理：设 A 是数域 $\boldsymbol{F}$ 上一个 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵，则矩阵方程

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A} \qquad \textbf{(1)}$$

总是有解。如果 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}$，并且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q} \qquad \textbf{(2)}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 分别是 s 阶、n 阶可逆矩阵，则矩阵方程**(1)**的一般解**(**通解**)**为

$$X = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1} \qquad (3)$$

其中 B, C, D 分别是任意 $r\times(s-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(s-r)$ 矩阵。

证明：

可以证明(3)是矩阵方程(1)的解，现在任取(1)的一个解 $X = G$，则由(1)和(2)得

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QGP \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

因为 P,Q 可逆，所以从上式得

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} QGP \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

把矩阵 QGP 分块，设

$$QGP=\begin{bmatrix} H & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{5}$$

代入(4)式得

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此得出，$H = I_r$，代入 (5) 式便得出

$$G = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1}$$

这证明了矩阵方程 (1) 得任意一个解都能表示成 (3) 的形式，所以公式 (3) 是矩阵方程(1)的通解。

定义：设 A 是一个 $s \times n$ 矩阵，矩阵方程 $AXA = A$ 的通解称为 A 的广义逆矩阵，简称为 A 的广义逆。我们用记号 A^- 表示 A 的一个广义逆。

例：已知

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

求 A 的广义逆.

$$\left[\begin{array}{c:c} A & I_m \\ \hdashline I_n & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc:ccc} 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{对}\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix}\text{作列变换}]{\text{对}\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix}\text{作行变换}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 11/2 & -5/2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$ 其中

$$P=\begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则广义逆矩阵为

$$M=Q\begin{bmatrix} I_2 & X \\ Y & Z \end{bmatrix}P,$$ 其中 $X\in C^{2\times 1}, Y\in C^{2\times 2}$, $Z\in C^{2\times 1}$ 任意.

广义逆矩阵的性质

$$X = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1}$$

(1) $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^{-}$

(2) $A^{-}A$ 与 AA^{-} 都是幂等矩阵，且

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{-}A = \operatorname{rank} AA^{-}$$

证明：(1) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} AA^{-}A \le \operatorname{rank} AA^{-} \le \operatorname{rank} A^{-}$

(2) $(A^{-}A)^2 = A^{-}AA^{-}A = A^{-}A$

$$(AA^{-})^2 = AA^{-}AA^{-} = AA^{-}$$

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} AA^{-}A \le \operatorname{rank} AA^{-} \le \operatorname{rank} A$$

定义：设 $A\in C^{m\times n}$， 若存在矩阵 $A_L^{-1}\in C^{n\times m}$（或 $\left(A_R^{-1}\in C^{n\times m}\right)$ 使得

$$A_L^{-1}A=I_n \quad \text{或} \quad \left(AA_R^{-1}=I_m\right)$$

则称 A_L^{-1}（或 A_R^{-1} ）是 A 的左逆（或右逆）

行满秩　　列满秩

注：1. 若$m=n$, 且 A 是满秩的，则 $A^{-1}=A_L^{-1}=A_R^{-1}$.

2. 左、右逆（如果存在）是 A 的广义逆

伪逆矩阵

定义：设 $A\in C^{m\times n}$，若 $A^{+}\in C^{n\times m}$，且同时有

$$AA^{+}A=A,\qquad A^{+}AA^{+}=A^{+},$$

$$\left(AA^{+}\right)^{H}=AA^{+},\qquad \left(A^{+}A\right)^{H}=A^{+}A$$

则称 A^{+} 是 A 的伪逆矩阵. 上述条件称为**Penrose –Moore**方程.

例：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$， 那么 $A^{+}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}$.

下面我们讨论伪逆矩阵的求法:

定理：设 $A \in C^{m\times n}$, $A = BC$ 是 A 的一个满秩分解，则

$$X = C^H\left(CC^H\right)^{-1}\left(B^H B\right)^{-1} B^H$$

是 A 的伪逆矩阵。

验证

$$AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+,$$

$$\left(AA^+\right)^H = AA^+, \qquad \left(A^+A\right)^H = A^+A$$

例：设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解：利用满秩分解公式可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆矩阵是

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{C}^{H}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H})^{-1}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

例：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$， 求 A^{+} .

解：由满秩分解公式可得 $A=BC=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

于是其伪逆矩阵为

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/10 & 1/5\\1/10 & 1/5\end{bmatrix}$$

推论：若 $A\in C_r^{m\times r}$，则

$$A^{+}=(A^{H}A)^{-1}A^{H}$$

若 $A\in C_r^{r\times n}$，则

$$A^{+}=A^{H}(AA^{H})^{-1}$$

定理：伪逆矩阵 A^+ 唯一。 (证明了解)

证明：设 X, Y 都是 A 的伪逆矩阵，则

$$X = XAX = XAYAX = X(AY)^H(AX)^H$$

$$= X(AXAY)^H = X(AY)^H = XAY$$

$$= XAYAY = (XA)^H(YA)^H Y$$

$$= (YAXA)^H Y = (YA)^H Y = YAY = Y$$

根据此定理知，若 $A \in C_n^{n\times n}$, 则 $A^+ = A^{-1}$.

广义逆与线性方程组(了解)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-}$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{\beta}$$

在有解的情况下，则它的一般解(通解)为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{-}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个广义逆.

证明：必要性：设 $AX=\beta$ 有解 $X=\alpha$ ，则 $A\alpha=\beta$ 。因为 $A=AA^{-}A$ ，所以

$$\beta=A\alpha=AA^{-}A\alpha=AA^{-}\beta$$

充分性：设 $\beta=AA^{-}\beta$ ，则取 $\alpha=A^{-}\beta$ 得

$$A\alpha=A(A^{-}\beta)=\beta$$

所以 $\alpha=A^{-}\beta$ 是 $AX=\beta$ 的解。

注：如果存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-}$ 使得 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{\beta}$，则对 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个广义逆矩阵 $\boldsymbol{X}$，满足 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$.

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{\beta}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\right)$$

定理：设 $A \in C^{m\times n}$，$b \in C^{m}$， 则矩阵方程

$$AX = b$$

有解的充要条件是存在 A 的广义逆矩阵 A^{-} 使得

$$AA^{-}b = b$$

成立. 在有解的情况下，矩阵方程的通解为

$$X = A^{-}b + Y - A^{-}AY = A^{-}b + (I_n - A^{-}A)Y$$

其中 $Y \in C^{n}$ 任意, A^{-} 是任意给定的 A 的广义逆.

定义：称相容方程组 $Ax=b$ 的所有解中模（2-范数）最小的解是 $Ax=b$ 的**最小模解**.

定理：设 B 是 $A\in C^{m\times n}$ 的一个广义逆矩阵，则对于任意的 $b\in R(A)$，$x=Bb$ 是 $Ax=b$ 的最小模解的充要条件是 $\left(BA\right)^{H}=BA$.

不相容线性方程组 $Ax=b$ 的解

定义：设 $A\in C^{m\times n}$，$b\in C^{m}$，如果 n 维向量 x_0，对于任何一个 n 维向量 x，都有

$$\|Ax_0-b\|^2\le\|Ax-b\|^2$$

则称 x_0 是方程组 $Ax=b$ 的一个最小二乘解.

若 u 是最小二乘解，如果对于任一个最小二乘解 x_0 都有不等式

$$\|u\|\le\|x_0\|$$

则称 u 是最佳最小二乘解.

定理：设 $A \in C^{m\times n}$，$b \in C^{m}$ ，则 $x = A^{+}b$ 是方程组 $Ax = b$ 的最佳最小二乘解.

$$\|Ax - b\|^2 = \|(AA^{+}b - b) + (Ax - AA^{+}b)\|^2$$

$$= \|AA^{+}b - b\|^2 + \|Ax - AA^{+}b\|^2 +$$

$$\underbrace{(AA^{+}b - b)^H (Ax - AA^{+}b)}_{\substack{\| \\ b^H \underline{(AA^{+} - I)A}(x - A^{+}b) = 0}} + \underbrace{(Ax - AA^{+}b)^H (AA^{+}b - b)}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$$\geq \|AA^{+}b - b\|^2$$

$$\|Ax-b\|^2=\|AA^+b-b\|^2+\|Ax-AA^+b\|^2$$

x 是最小二乘解 $\Longleftrightarrow \|Ax-b\|^2=\|AA^+b-b\|^2$

$\Longleftrightarrow \|Ax-AA^+b\|^2=0 \Longleftrightarrow Ax=AA^+b$

所有相容方程组 $Ax=AA^+b$ 的解就是 $Ax=b$ 的最小二乘解.

$\because \left(A^+A\right)^H=A^+A,\quad \therefore x=A^+(AA^+b)=A^+b$ 是 $Ax=AA^+b$ 的最小模解，即 $x=A^+b$ 是 $Ax=b$ 的最佳最小二乘解.

或者根据 $Az = AA^{+}b$

通解：$$z = A^{+}(AA^{+}b) + (I - A^{+}A)w, \quad \forall w$$

$$= A^{+}b + (I - A^{+}A)w,$$

$$\|z\|^2 = \|A^{+}b\|^2 + \|(I - A^{+}A)w\|^2,$$

最小模 $\Longleftrightarrow$ $(I - A^{+}A)w = 0.$

所以最佳最小二乘解为 $x = A^{+}b$.

例 1：求不相容方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ \qquad x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

的最佳最小二乘解。

练习：求不相容方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

最佳最小二乘解。