3-5(2) A 是正规矩阵，求酉矩阵 U 使得 $U^H AU$ 为对角矩阵.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：先计算矩阵的特征值

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda^2+2)$$

其特征值为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2=\sqrt{2}i,\ \lambda_3=-\sqrt{2}i.$

对于特征值 $\lambda_1 = 0$ 解线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$$

求得其一个基础解系

$$\boldsymbol{X}_1 = \left[\mathbf{0}, \boldsymbol{i}, \mathbf{1}\right]^T$$

现在将 X_1 单位化, 得到一个单位向量

$$\eta_1 = \left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\right]^T$$

对于特征值 $\lambda_2 = \sqrt{2}i$ 解线性方程组

$$(\sqrt{2}iI - A)X = 0$$

求得其一个基础解系

$$X_2 = \left[\sqrt{2}, -i, 1\right]^T$$

将其单位化得到一个单位向量

$$\eta_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$$

对于特征值 $\lambda_3 = -\sqrt{2}i$ 解线性方程组

$$(-\sqrt{2}iI - A)X = 0$$

求得其一个基础解系

$$X_3 = \left[-\sqrt{2}, -i, 1\right]^T$$

将其单位化得到一个单位向量

$$\eta_3 = \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$$

将这三个标准正交向量组成矩阵

$$Q=\left[\eta_1,\eta_2,\eta_3\right]=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{2} & \dfrac{-i}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则矩阵 Q 即为所求酉矩阵且有

$$Q^H A Q = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2}i & \\ & & -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

3-8 设n阶酉矩阵U的特征根不等于 -1, 试证：矩阵 $E+U$满秩，$W=i(E-U)(E+U)^{-1}$ 是Hermite矩阵，反之，若 W 是Hermite矩阵，则 $U=(E+iW)(E-iW)^{-1}$ 是酉矩阵。

$|E+U|\neq 0$, 否则-1就是 U 的特征根，与已知矛盾。矩阵 $E+U$满秩。

$$W^H=-i(E+U^H)^{-1}(E-U^H)$$
$$=-i(E+U^H)^{-1}U^{-1}U(E-U^H)$$
$$=-i(U+E)^{-1}(U-E)$$
$$=i(E+U)^{-1}(E-U)=W,$$

$$(E+U)(E-U)$$
$$=(E-U)(E+U)$$
$$\Downarrow$$
$$(E+U)^{-1}(E-U)$$
$$=(E-U)(E+U)^{-1}$$

反之，若 W 是Hermite矩阵，则 $\left|E-iW\right|\neq 0$,
否则 $-i$ 是W的特征根，而W 是Hermite矩阵，
特征值全是实数，矛盾。所以 $(E-iW)$ 可逆。

$$U^{H}U=(E+iW^{H})^{-1}(E-iW^{H})(E+iW)(E-iW)^{-1}$$

$$=(E+iW)^{-1}(E-iW)(E+iW)(E-iW)^{-1}$$

$$=(E+iW)^{-1}(E+iW)(E-iW)(E-iW)^{-1}=E$$

3-9 若S,T分别是实对称和反实对称矩阵，且 $\det(E-T-iS)\neq 0$，试证：$(E+T+iS)(E-T-iS)^{-1}$ 是酉矩阵。

令 $\quad W=(E+T+iS)(E-T-iS)^{-1}$

$$W^H W=(E-T^H+iS^H)^{-1}(E+T^H-iS^H)*$$

$$(E+T+iS)(E-T-iS)^{-1}$$

$$=(E+T+iS)^{-1}\underline{(E-T-iS)(E+T+iS)}(E-T-iS)^{-1}$$

$$\parallel$$

$$=(E+T+iS)^{-1}\underline{(E+T+iS)(E-T-iS)}(E-T-iS)^{-1}$$

$$=E$$

3-13 设 A 是 Hermite 矩阵，且 $A^2 = A$, 则存在酉矩阵 U 使得

$$U^H AU = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 是 Hermite 矩阵，所以存在酉矩阵 U 使得

$$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

$A^2 = A, \longrightarrow \quad \lambda_i^2 = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots n.$

设 秩$(A)= r$ $\longrightarrow$ 特征根有 r 个1，$(n\text{-}r)$ 个 0.

调整 U 的列向量(特征向量)的顺序，使得前 r 个对应特征值 1.

3-15 已知 Hermite 二次型，

$$f(X)=-ix_1\overline{x_2}-x_1\overline{x_3}+ix_2\overline{x_1}-ix_2\overline{x_3}-x_3\overline{x_1}+ix_3\overline{x_2}$$

求酉变换 $X=UY$ 将 $f(X)$ 化为标准形。

$f(X)=X^H AX$. 其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & i & -1\\ -i & 0 & i\\ -1 & -i & 0\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A\right| = (\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad X = UY,$$

$$U^H A U = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

3-18 设 A 是一个正定的 **H-阵**，B 是一个 **H-阵**，证明 AB 与 BA 的特征值都是实数.

证明: 设 λ 为矩阵 AB 的任意一个特征值，那么有 $|\lambda I - AB| = 0$. 由于 A 是一个正定 **H-阵**，所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^H \boldsymbol{Q}$$

将其代入上面的特征多项式有

$$
\begin{aligned}
0 &= \left|\lambda I - AB\right| = \left|\lambda I - Q^H QB\right| \\
&= \left|\lambda Q^H (Q^H)^{-1} - Q^H QBQ^H (Q^H)^{-1}\right| \\
&= \left|Q^H\right|\left|\lambda I - QBQ^H\right|\left|(Q^H)^{-1}\right| \\
&= \left|\lambda I - QBQ^H\right|
\end{aligned}
$$

这说明 λ 也是矩阵 QBQ^H 的特征值. 另一方面注意矩阵 QBQ^H 为 **H-**阵, 从而 λ 为实数. 同样可以证明另一问.

方法二：由于 A 是一个正定 H-阵, 所以存在可逆矩阵 Q 得 $A=Q^HQ$.

$$AB=QQ^HB=Q(Q^HBQ)Q^{-1}$$

所以 AB 相似于 Q^HBQ ，从而有相同的特征根，而

$$\left(Q^HBQ\right)^H=Q^HB^HQ=Q^HBQ$$

是H-阵，所以 AB 的特征值为实数。

3-25 设 A 是Hermite矩阵，证明：总存在 $t>0$，使得 $A+tI$ 是正定矩阵，$A-tI$ 是负定矩阵。

$$\lambda_i(A+tI)=\lambda_i(A)+t$$
$$\lambda_i(A-tI)=\lambda_i(A)-t$$

取　$t>\max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\cdots|\lambda_n|\}$，则

$A+tI$ 是正定矩阵，$A-tI$ 是负定矩阵.

3-29 设 $A \in C^{m\times n}$, 证明：$AA^H, A^H A$ 都是半正定矩阵, 且 $AA^H, A^H A$ 的非零特征值相同.

$$x^H AA^H x = \left(A^H x\right)^H A^H x \geq 0, \quad x \in C^m$$

$$y^H A^H Ay = \left(Ay\right)^H Ay \geq 0, \quad y \in C^n$$

$\Longrightarrow$ 半正定

$AA^H x = \lambda_i x \rightarrow A^H AA^H x = \lambda_i A^H x \quad (A^H x \neq 0,$

否则 $AA^H x = \lambda_i x = 0, \rightarrow \lambda_i = 0$, 或 $x = 0$,矛盾）

$\Downarrow$

λ_i 是 AA^H 的非零特征值, x 是对应于 λ_i 的特征向量,

则λ_i 也是 $A^H A$ 的特征值, $A^H x$ 是对应于 λ_i 的特征向量. 设 λ_i 代数重数为 p_i ,则几何重数也为 p_i.

设 $x_{i1},\cdots x_{ip_i}$ 线性无关, 是 对应于 $\lambda_i \neq 0$ 的特征向量, 则 $A^H x_{i1},\cdots,A^H x_{ip_i}$ 也线性无关.

$$(k_1 A^H x_{i1} + k_2 A^H x_{i2} + \cdots + k_{p_i} A^H x_{ip_i} = 0$$

$$0 = k_1 A A^H x_{i1} + \cdots + k_{p_i} A A^H x_{ip_i} = \lambda_i \left(k_1 x_{i1} + \cdots + k_{p_i} x_{ip_i} \right)$$

$$\longrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_{p_i} = 0)$$

$\therefore A^H A$ 的特征值 λ_i 的重数不小于 p_i.

又$\because r(AA^H) = r(A^H A)$, AA^H 与 $A^H A$ 非零特征值的个数相同.

$\therefore AA^H$ 与 $A^H A$ 非零特征值的完全相同.

3-32 设 $A \in C^{n\times n}$，那么 A 可以唯一地写成 $A=S+iT$,其中 S, T 是 Hermite 矩阵，且 A 可以唯一地写成 $A=B+C$，其中 B 是 Hermite 矩阵，C 是反 Hermite 矩阵.

设 $A=S+iT$,其中 $S=S^H, T=T^H$， 则

$$\begin{cases} A=S+iT \\ A^H=S^H-iT^H=S-iT \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad S=\frac{A+A^H}{2}, \quad T=\frac{A^H-A}{2}i$$

设 $A=B+C$, 其中 $B=B^H, C=-C^H$， 则

$$\begin{cases} A=B+C \\ A^H=B^H+C^H=B-C \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad B=\frac{A+A^H}{2}, \quad C=\frac{A-A^H}{2}$$

（唯一性）设 $A=B_1+C_1=B_2+C_2$,

$$C_2-C_1=B_1-B_2=\left(B_1-B_2\right)^H=\left(C_2-C_1\right)^H=C_1-C_2$$

$$\therefore C_1=C_2, \text{ 从而 } \quad B_1=B_2.$$

注：其实从求解的过程可知，S,T,B,C 被唯一确定。

例: 设 A, B 为两个正定矩阵，证明：

$$\det(A)+\det(B)\le\det(A+B)$$

由 Hermite 矩阵偶在复相合下的标准形定理知，存在可逆矩阵 P， 使得

$$P^H AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad P^H BP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$\lambda_i>0,\quad i=1,2,\cdots n.$

$$P^H(A+B)P=\begin{bmatrix}1+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\lambda_n\end{bmatrix},$$

$$\det(P^H AP)+\det(P^H BP)$$

$$=\underline{\left|\det(P)\right|^2\left(\det(A)+\det(B)\right)}=(1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

$$\det\left(P^H(A+B)P\right)=\underline{\left|\det(P)\right|^2\det(A+B)}=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$$

$$\longrightarrow \det(A)+\det(B)\le\det(A+B)$$