1. 设 $R[x]_4$ 表示所有次数小于或等于 4 的实系数多项式组成的线性空间，求多项式

$$p(x)=1+2x^3$$

在基底 $1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3$ 下的坐标。

解： $$p(x)=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

所以所求坐标为 (3,6, 6, 2).

2. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，对某个 $\xi\in V$ 有 $\phi^{k-1}(\xi)\neq 0, \phi^{k}(\xi)=0.$ 试证：

$$\xi, \phi(\xi), \phi^{2}(\xi), \cdots, \phi^{k-1}(\xi)$$

线性无关。

证：假设存在常数 $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}$ 使得

$$l_0\xi+l_1\phi(\xi)+l_2\,\phi^{2}(\xi)+\cdots+l_{k-1}\phi^{k-1}(\xi)=0.$$

两边同时作线性变换 ϕ^{k-1}（即作 $k-1$ 次变换 ϕ），

$$l_0\phi^{k-1}\xi+l_1\phi^{k}(\xi)+l_2\,\phi^{k+1}(\xi)+\cdots+l_{k-1}\phi^{2k-2}(\xi)=0.$$

$$\phi^k(\xi)=0 \longrightarrow l_1\phi^k(\xi)+l_2\,\phi^{k+1}(\xi)+\cdots+l_{k-1}\phi^{2k-2}(\xi)=0.$$

$$\therefore\quad l_0\phi^{k-1}\xi=0.$$

$$\because\quad \phi^{k-1}(\xi)\neq 0, \longrightarrow l_0=0.$$

$$\therefore\quad l_1\phi(\xi)+l_2\,\phi^2(\xi)+\cdots+l_{k-1}\phi^{k-1}(\xi)=0.$$

两边同时作线性变换 ϕ^{k-2}， 可得 $l_1=0.$ 以此类推，可得 $l_2=\cdots=l_{k-1}=0.$ 由线性无关的定义，可知

$$\xi,\phi(\xi),\phi^2(\xi),\cdots,\phi^{k-1}(\xi)$$

线性无关。

3. 试证：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})^k = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})^k, \quad \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C}^{n\times m}, k = 1, 2, \cdots$$

证：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} b_{jl} a_{lj}\right) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})^k = \mathrm{tr}\Big((\boldsymbol{ABAB}\cdots\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\Big)$$

$$= \mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{ABAB}\cdots\boldsymbol{A})\Big) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})^k$$

4. 试证：$\mathrm{tr}(A^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$， λ_i 是 A 的特征值，k 是一正整数。

证：设 $\lambda_i, i=1,2,\ldots,n$ 是 A 的特征值，x 是相应的特征向量， $Ax=\lambda_i x$. 则

$$A^2x=A\cdot Ax=A(\lambda_i x)=\lambda_i Ax=\lambda_i^2 x.$$

同理可得，$A^3x=A\cdot A^2x=A(\lambda_i^2 x)=\lambda_i^2 x$. 从而归纳可得 $A^k x=\lambda_i^k x$， $i=1,2,\ldots,n$. 所以

$$\lambda_i^k, i=1,2,\ldots,n$$

是 A^k 的 n 个特征值，从而 $\mathrm{tr}(A^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$.

5. 设 $A^2 = A$，试证：A 的特征值只能是 0 或 1。

证：设 λ 是 A 的特征值，x 是相应的特征向量，
则 $Ax = \lambda x$. $A^2 x = A \cdot Ax = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$.
因为 $A^2 = A$, 所以 $\lambda^2 x = A^2 x = Ax = \lambda x$. 从而

$$(\lambda^2 - \lambda)x = 0,$$

因为 x 是特征向量，$x \neq 0$, 所以 $(\lambda^2 - \lambda) = 0$,

即 A 的特征值只能是 0 或 1。