2009 级硕士研究生〈矩阵分析〉终考试题

一、（10 分）设 f 为 3 维线性空间 V 上的一个线性变换，已知 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0]^T$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$$

（1）求 f 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=[3,0,0]^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=[0,2,0]^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=[0,0,1]^T$ 下的矩阵表示；

（2）求 f 的核与值域。

解：（1）令 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$，

则 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&-1\\3&-2&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/2&1/2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；

设 f 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=[3,0,0]^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=[0,2,0]^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=[0,0,1]^T$ 下矩阵表示为 $\boldsymbol{B}$，

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&2/3&-2/3\\-3/2&2&1/2\\-3&2&1\end{bmatrix}$。

（2）令 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in V$ 且 $f(\boldsymbol{X})=0$，则

$$f(\boldsymbol{X})=f[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0,$$

即求 $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，其基础解系为 $x_1=1,x_2=-1,x_3=1$；

故 $N(f)$ 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $N(f)=span\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\}$。

值域为

$$\begin{aligned}R(f)&=span\{f(\boldsymbol{\alpha}_1),f(\boldsymbol{\alpha}_2),f(\boldsymbol{\alpha}_3)\}\\&=span\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3\}\\&=span\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\}\end{aligned}$$

二、（10 分）已知 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}\overline{x_1}x_1+\frac{3}{2}i\overline{x_1}x_3+2\overline{x_2}x_2-\frac{3}{2}i\overline{x_3}x_1+\frac{1}{2}\overline{x_3}x_3,$$

求酉变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{UY}$ 并将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形的 Hermite 二次型。

解：由题设，$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{AX}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1/2&0&3i/2\\0&2&0\\-3i/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

其特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$，故 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$；

当 $\lambda=-1$ 时，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3/2&0&-3i/2\\0&-3&0\\3i/2&0&-3/2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&i\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以属于 $\lambda=-1$ 的单位特征向量 $\alpha_1=\left[1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}\right]^T$。

当 $\lambda=2$ 时，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3/2&0&-3i/2\\0&0&0\\3i/2&0&3/2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-i\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以属于 $\lambda=2$ 的单位特征向量为 $\alpha_2=\left[1/\sqrt{2},0,-i/\sqrt{2}\right]^T$，$\alpha_3=[0,1,0]^T$。

令 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1\\i/\sqrt{2}&-i/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{UY}$，$\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,y_3]^T$ 得

$f(y_1,y_2,y_3)=-\overline{y_1}y_1+2\overline{y_2}y_2+2\overline{y_3}y_3$。

三、（15 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -i\\0 & 0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式。

解： $\boldsymbol{AA}^H=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为

$\delta_1=2,\delta_2=1$，故 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$。

当 $\lambda=4$ 时，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AA}^H=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

所以属于 $\lambda=4$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{u}_1=[1,0,0]^T$。

当 $\lambda=1$ 时，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AA}^H=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

所以属于 $\lambda=4$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{u}_2=[0,1,0]^T$

取 $\boldsymbol{U}_1=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}^{-H}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}$。

由 $\boldsymbol{AA}^H$ 的零特征值对应的次酉矩阵 $\boldsymbol{U}_2=[0,0,1]^T$，所以

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UDV}^H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & i\end{bmatrix}^H$。

四、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ 型的复矩阵，证明：矩阵的谱范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_j\left(\lambda_j\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 酉 不 变 范 数， 即 对 任 意 的 m 阶 酉 矩 阵 $\boldsymbol{U}$ 和 任 意 的 n 阶 酉 矩 阵 $\boldsymbol{V}$ 都 有

$$\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\| \text{。}$$

证明：

$\|\boldsymbol{UA}\|_2=\max_j(\lambda_j\left\{\left(\boldsymbol{UA}\right)^H\left(\boldsymbol{UA}\right)\right\})^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{UA}\right))^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right))^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_2$ 由 于

$\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{AV}$ 与 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 酉相似，所以它们谱相同，故

$$\|\boldsymbol{AV}\|_2=\max_j(\lambda_j\left\{\left(\boldsymbol{AV}\right)^H\left(\boldsymbol{AV}\right)\right\})^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{AV}\right))^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right))^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

$$\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\max_j(\lambda_j\left\{\left(\boldsymbol{UAV}\right)^H\left(\boldsymbol{UAV}\right)\right\})^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{UAV}\right))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{AV}\right))^{\frac{1}{2}}=\max_j(\lambda_j\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right))^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

所以$\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\|_2$。

五、（15 分）已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=(10-\sqrt{10})\boldsymbol{I}_{3\times3},$$

这里 $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 表示 3 阶单位矩阵，

（1）求证：矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛；

（2）求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}\boldsymbol{A}^k$ 的收敛和。

（1）证明：由 $\boldsymbol{A}=(10-\sqrt{10})\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 得，$\rho\left(\boldsymbol{A}\right)=10-\sqrt{10}$。

又 $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+2}{10^{k+2}}\right)/\left(\frac{k+1}{10^{k+1}}\right)=\frac{1}{10}=\frac{1}{R}$，所以收敛半径 $R=10$，所以 $\rho\left(\boldsymbol{A}\right)<R$。

所以矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}\boldsymbol{A}^k$绝对收敛。

（2）由于$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}x^k=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{10}\right)^{k+1}\right]'=\frac{1}{10}\left(1-\frac{x}{10}\right)^{-2}$，

所以$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}\boldsymbol{A}^k=\frac{1}{10}\left(\boldsymbol{I}_{3\times3}-\frac{1}{10}\boldsymbol{A}\right)^{-2}=\boldsymbol{I}_{3\times3}$。

六、（20 分）分别求下列矩阵的矩阵函数$\sin 2\pi\boldsymbol{A}$和$\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}$。

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\1&3&0&0\\0&1&3&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

解：（1）$f\left(\boldsymbol{A}\right)=\left[f\left(\boldsymbol{A}^T\right)\right]^T=\begin{bmatrix}f\left(3\right)&0&0&0\\f'\left(3\right)&f\left(3\right)&0&0\\\frac{1}{2}f''\left(3\right)&f'\left(3\right)&f\left(3\right)&0\\0&0&0&f\left(3\right)\end{bmatrix}$

当$f\left(x\right)=\sin 2\pi x$时，$f\left(3\right)=0, f'\left(3\right)=2\pi, f''\left(3\right)=0$；

故$\sin 2\pi\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2\pi&0&0&0\\0&2\pi&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$。

当$f\left(x\right)=\cos\frac{\pi}{2}x$时，$f\left(3\right)=0, f'\left(3\right)=\frac{\pi}{2}, f''\left(3\right)=0$；

故$\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\\pi/2&0&0&0\\0&\pi/2&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$。

（2）$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形为$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$

令 $\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\right]$，由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$，可得

$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{X}_1$， $\boldsymbol{AX}_2=-\boldsymbol{X}_2$， $\boldsymbol{AX}_3=2\boldsymbol{X}_3$。

由 $\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}_1=0$ 得，取 $\boldsymbol{X}_1=[1,-1,-1]^T$；

由 $\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}_2=0$ 得，取 $\boldsymbol{X}_2=[1,-3,3]^T$；

由 $\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}_3=0$ 得，取 $\boldsymbol{X}_3=[1,0,0]^T$。

故 $\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\right]=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-3&0\\-1&3&0\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1/2&-1/2\\0&-1/6&1/6\\1&2/3&1/3\end{bmatrix}$

$$f\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{P}f\left(\boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-3&0\\-1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(1)&&\\&f(-1)&\\&&f(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1/2&-1/2\\0&-1/6&1/6\\1&2/3&1/3\end{bmatrix}$$

所以
$$=\begin{bmatrix}f(2)&-\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{6}f(-1)+\frac{2}{3}f(2)&-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{6}f(-1)+\frac{1}{3}f(2)\\0&\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)&\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)\\0&\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)&\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)\end{bmatrix}$$

当 $f\left(x\right)=\sin 2\pi x$ 时， $f(1)=f(-1)=f(2)=0$；

故 $\sin 2\pi\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

当 $f\left(x\right)=\cos\frac{\pi}{2}x$ 时， $f(1)=f(-1)=0, f(2)=-1$；

故 $\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-2/3&-1/3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

七、（10 分）设 k 为一个复数， A 为一个 n 阶复矩阵，证明：

$$\left|e^{k\cdot A}\right|=e^{k\cdot tr(A)}$$

证明：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PJP}^{-1}=\boldsymbol{P}diag(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_r)\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$$e^{k\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}diag(e^{k\boldsymbol{J}_1},e^{k\boldsymbol{J}_2},\cdots,e^{k\boldsymbol{J}_r})\boldsymbol{P}^{-1}$$

而 $e^{k\boldsymbol{J}_i}=\begin{bmatrix} e^{k\lambda_i} & ke^{k\lambda_i} & \frac{1}{2!}k^2e^{k\lambda_i} & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}k^{d_i-1}e^{k\lambda_i} \\ & e^{k\lambda_i} & ke^{k\lambda_i} & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & ke^{k\lambda_i} \\ & & & & e^{k\lambda_i} \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$

所以 $\left|e^{k\boldsymbol{A}}\right|=\left|\boldsymbol{P}\right|\left|diag\left(e^{k\boldsymbol{J}_1},e^{k\boldsymbol{J}_2},\cdots,e^{k\boldsymbol{J}_r}\right)\right|\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|=\left|e^{k\boldsymbol{J}_1}\right|\left|e^{k\boldsymbol{J}_2}\right|\cdots\left|e^{k\boldsymbol{J}_r}\right|$

$$=e^{d_1k\lambda_1}e^{d_2k\lambda_2}\cdots e^{d_rk\lambda_r}=e^{k\left(d_1\lambda_1+d_2\lambda_2+\cdots+d_r\lambda_r\right)}=e^{k\cdot tr(\boldsymbol{A})}$$

八、（5 分）已知函数矩阵

$$A(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^t & t^2 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

计算 $\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2}A(t)dt)$。（2010 级不考）

九、（5 分）已知不相容线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_4=1 \\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=0 \\ \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3=1 \\ \boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_4=0 \end{cases}$$

求其最佳最小二乘解。

解：系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以其满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 伪逆为

$$\boldsymbol{A}^{\dagger}=\boldsymbol{C}^{H}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}=\begin{bmatrix}3/8&3/8&-1/8&-1/8\\-1/8&3/8&3/8&-1/8\\-1/8&-1/8&3/8&3/8\\3/8&-1/8&-1/8&3/8\end{bmatrix}$$

所以其最佳最小二乘解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3/8&3/8&-1/8&-1/8\\-1/8&3/8&3/8&-1/8\\-1/8&-1/8&3/8&3/8\\3/8&-1/8&-1/8&3/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}$$