矩阵函数的多项式表示

定理： 设函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在矩阵 A 的谱上都有定义，那么 $f(A)=g(A)$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 A 的谱上的值完全相同。

设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 的最小多项式为

$$\boldsymbol{m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{d_r}}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为矩阵A 的 r 个互异特征值且

$$d_i \ge 1(i = 1, 2\cdots, r), \quad \sum_{i=1}^{r} d_i = m$$

如何寻找多项式 $p(x)$ 使得 $p(A)$ 与所求的矩阵函数 $f(A)$ 完全相同？ 根据计算方法中的 **Lagrange-Sylvester 内插多项式**定理可知，在众多的多项式中有一个次数为 $m-1$ 次的多项式

$$p(x) = a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

且满足条件

$$p^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, r; \quad k = 0, 2, \cdots, d_i - 1$$

这样，多项式

$$p(x)=a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

中的系数 $a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_1,a_0$ 完全可以通过关系式

$$p^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i),\quad i=1,2,\cdots,r;\quad k=1,2,\cdots,d_i-1$$

确定出来。 我们称

$$f(A)=a_{m-1}A^{m-1}+a_{m-2}A^{m-2}+\cdots+a_1A+a_0I$$

为矩阵函数 $f(A)$ 的多项式表示。

例：设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$ 的多项式表示并且计算 e^{tA}

解：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

A 的 Jordan 标准形为 $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

该矩阵的最小多项式为 $\varphi_A(x) = (x-2)^2$

这是一个**2**次多项式，从而存在一个次数为**1** 的多项式

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_0$$

且满足

$$\boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{f}(2),\ \ \boldsymbol{p}'(2) = \boldsymbol{f}'(2)$$

于是有

$$\boldsymbol{f}(2) = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_0,$$

$$\boldsymbol{f}'(2) = \boldsymbol{a}_1$$

解得

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{f}(2) - 2\boldsymbol{f}'(2)$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}'(2)$$

于是矩阵函数 $\boldsymbol{f(A)}$ 的多项式表示为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = [\boldsymbol{f}(2) - 2\boldsymbol{f}'(2)]\boldsymbol{I} + \boldsymbol{f}'(2)\boldsymbol{A}$$

当 $f(x) = e^{tx}$ 时，可得

$\boldsymbol{f}(2) = \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}}$，$\boldsymbol{f}'(2) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}}$，代入得

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{t}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{t} & 1-\boldsymbol{t} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{t} & -\boldsymbol{t} & 1+\boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

矩阵函数的幂级数表示

设 $A \in C^{n\times n}$，一元函数 $f(x)$ 能够展开成关于 x 的幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

并且该幂级数的收敛半径为 R． 当矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<R$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k (\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k \boldsymbol{P}^{-1})$$

$$= \boldsymbol{P}(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}^k)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}\mathrm{diag}[\sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_2^k(\lambda_2),$$

$$\cdots, \sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_r^k(\lambda_r)]\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

$$C_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (l \le k)$$

$$C_k^l = 0 \quad (l > k)$$

下面等式成立：

$$f(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_i^k,$$

$$f'(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kC_k^1\lambda_i^{k-1},$$

$$\frac{f''(\lambda_i)}{2!}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kC_k^2\lambda_i^{k-2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{f^{(d_i-1)}(\lambda_i)}{(d_i-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kC_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

$$\rho(A)<R$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k(\lambda_i) =$$

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) \\ & & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

$$= f(J_i)$$ （根据矩阵函数的定义）

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P\mathrm{diag}[\sum_{K=0}^{\infty} c_k J_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} c_k J_2^k(\lambda_2),$$

$$\cdots, \sum_{K=0}^{\infty} c_k J_r^k(\lambda_r)]P^{-1}$$

$$= P\mathrm{diag}[f(J_1), f(J_2),$$

$$\cdots, f(J_r)]P^{-1} = f(A)$$

-----矩阵函数的幂级数表示

$$e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}$$

$$-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots \qquad (|x|<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}$$

$$-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

时，我们有

$$e^{A}=I+A+\frac{1}{2!}A^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}A^{n}+\cdots$$

$$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^{3}+\frac{1}{5!}A^{5}$$

$$-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1}+\cdots$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\boldsymbol{A}^{2n} + \cdots$$

例：已知

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}A^k$ 之和.

解：A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \rho(A)=2$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{10^{k+1}}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{10}\right)^{k+1}\right]'$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{10}\right)^{k+1}\right]'=\left[\frac{\frac{x}{10}}{1-\frac{x}{10}}\right]'=\left[-1+(1-\frac{x}{10})^{-1}\right]'$$

$$=\frac{1}{10}(1-\frac{x}{10})^{-2}\qquad (|x|<R=10)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}} A^k = \frac{1}{10}\left(I - \frac{A}{10}\right)^{-2}$$

$$= \frac{5}{128}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵指数函数与矩阵三角函数

主要讨论两种特殊矩阵函数的性质，即

$$(1)\quad e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

$$(2)\quad \sin At=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}t^{2k+1}$$

$$(3)\quad \cos At=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}t^{2k}$$

定理: (1) $e^{iA} = \cos A + i\sin A$, $i^2 = -1$

(2) $e^{-iA} = \cos A - i\sin A$.

证: $e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(iA)^k$

$$= I + iA - \frac{1}{2!}A^2 - \frac{1}{3!}iA^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \frac{1}{5!}iA^5 - \cdots$$

$$= \left(I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots \right) + i(A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots)$$

$= \cos A + i\sin A$. 类似可证明（2）

推论：

$$(3)\quad \cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$$

$$(4)\quad \sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$$

$$(5)\quad \sin(-A)=-\sin A$$

$$(6)\quad \cos(-A)=\cos A$$

定理： 设 $A, B \in C^{n\times n}$，那么当 $AB = BA$ 时，有

$$(1)\quad e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}$$

$$(2)\quad \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$(3)\quad \sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$(4)\quad \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$(5)\quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$(6)\quad \sin^2 A + \cos^2 A = I$$

注意：这里矩阵 A 与 B 如果不可交换，则上述结果可能不成立，比如：

例：设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

那么容易计算

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^3=\cdots,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^3=\cdots$$

并且

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^k=2^{k-1}(A+B),\quad k\geq 1$$

$$e^A=I+(e-1)A=\begin{bmatrix}e & 1-e\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$e^B=I+(e-1)B=\begin{bmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

故有

$$e^{A}e^{B}=\begin{bmatrix} e^{2} & (e-1)^{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{B}e^{A}=\begin{bmatrix} e^{2} & -(e-1)^{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B}=I+\frac{1}{2}(e^{2}-1)(A+B)=\begin{bmatrix} e^{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然 $e^{A}e^{B}$， $e^{B}e^{A}$， e^{A+B} 三者互不相等。

由此可以得到一些简单的推论：

(1) $e^{\lambda A}e^{\mu A}=e^{(\lambda+\mu)A}$

(2) $e^{O_{n\times n}}=I_{n\times n}$

(3) $e^{A}e^{-A}=e^{-A}e^{A}=I$

$\to e^{A}$ 可逆，且 $\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}$

另外，关于矩阵的指数函数与三角函数还有下面几个特殊性质。

(1) $\dfrac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

(2) $\left|e^{A}\right| = e^{Tr(A)}$

(3) $\dfrac{d}{dt}(\sin At) = A(\cos At) = (\cos At)A$

(4) $\dfrac{d}{dt}(\cos At) = -A(\sin At) = -(\sin At)A$

$$(2)\quad e^{A}=e^{PJP^{-1}}=Pe^{J}P^{-1}=P\,\mathrm{diag}\left(e^{J_1},e^{J_2}\cdots e^{J_r}\right)P^{-1}$$

$$e^{J_i}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i} & e^{\lambda_i} & \frac{1}{2!}e^{\lambda_i} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}e^{\lambda_i} \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \frac{1}{2!}e^{\lambda_i} \\ & & & & & e^{\lambda_i} \\ & & & & & e^{\lambda_i} \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

$$\left|e^{A}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left|e^{J_i}\right|=\prod_{i=1}^{r}e^{d_i\lambda_i}=e^{Tr(A)}$$

6 -11 设 A 为 n 阶矩阵，证明:

(1) $e^{2\pi iI}=I,\quad e^{2\pi iI+A}=e^{A}$

(2) $\sin 2\pi I=0,\quad \cos 2\pi I=I;$

(3) $\left\|e^{A}\right\|\le e^{\|A\|}.$ （$\|.\|$ 是算子范数）

---

(1) $$e^{2\pi iI}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi iI)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^k}{k!}I=e^{2\pi i}I=I$$

$$(2\pi iI)A=A(2\pi iI)\longrightarrow e^{2\pi iI+A}=e^{2\pi iI}e^{A}=Ie^{A}=e^{A}$$

同理 $e^{-2\pi iI}=e^{-2\pi i}I=I$

$$(2)\quad \sin 2\pi I = \frac{e^{i2\pi I} - e^{-i2\pi I}}{2i} = \frac{1}{2i}(I - I) = 0,$$

$$\cos 2\pi I = \frac{e^{i2\pi I} + e^{-i2\pi I}}{2} = \frac{1}{2}(I + I) = I;$$

$$(3)\quad \left\|e^{A}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\|A^{k}\right\|}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\|A\right\|^{k}}{k!} = e^{\|A\|}.$$

方法二：

$$2\pi iI = \begin{bmatrix} 2\pi i & & \\ & \ddots & \\ & & 2\pi i \end{bmatrix} \rightarrow e^{2\pi iI} = \begin{bmatrix} e^{2\pi i} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i} \end{bmatrix} = I$$

例：设 A 是一个Hermite 矩阵，那么 e^{iA} 是一个酉矩阵。

证明：由矩阵指数函数公式

$$e^{iA}=\cos A+i\sin A$$

可得

$$e^{iA}(e^{iA})^H=(\cos A+i\sin A)$$

$$[(\cos A)^H-i(\sin A)^H]$$

$$=(\cos A+i\sin A)(\cos A-i\sin A)$$

$$=I$$

这表明 A 为一个酉矩阵。