

# Dokumentacja Projektowa

## Problem FPUT (Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou)

---

Łukasz Szydlik 331446  
Dominik Śledziewski 331447

12 grudnia 2025

### Spis treści

<b>1. Opis projektu</b>	2
<b>2. Model fizyczny i matematyczny</b>	2
2.1. Równania ruchu	2
2.2. Całkowanie numeryczne	2
2.3. Analiza modów normalnych	3
<b>3. Wyniki symulacji</b>	3
3.1. Wizualizacja przemieszczeń i energii	3
3.2. Interpretacja zjawiska nawrotów	4
<b>4. Wnioski</b>	4
<b>Literatura</b>	4

## 1. Opis projektu

Celem projektu jest numeryczna symulacja dynamiki jednowymiarowego łańcucha sprężonych oscylatorów z nieliniowym oddziaływaniem, znana w literaturze jako problem FPUT (Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou). Eksperyment ten, pierwotnie przeprowadzony w 1955 roku, miał na celu zbadanie, jak szybko energia w układzie nieliniowym ulega ekwipartycji (równomiernemu rozkładowi na wszystkie stopnie swobody).

Symulacja modeluje układ cząstek połączonych nieliniowymi sprężynami. Kluczowym elementem analizy jest obserwacja przepływu energii między modami normalnymi układu. W przeciwieństwie do oczekiwanych termodynamicznych, układ ten wykazuje zjawisko nawrotów (ang. *FPUT recurrence*), gdzie energia zamiast rozproszyć się termicznie, cyklicznie powraca do modów o niskich częstościach.

Projekt obejmuje implementację numerycznego rozwiązania równań ruchu metodą Velocity Verlet oraz analizę spektralną energii w czasie.

## 2. Model fizyczny i matematyczny

Rozważamy łańcuch składający się łącznie z **33 cząstek** (wezłów) o jednakowych masach. W układzie tym **31 cząstek jest ruchomych** ( $u_1, \dots, u_{31}$ ), natomiast dwie skrajne są unieruchomione ( $u_0, u_{32}$ ), co odpowiada sztywnym warunkom brzegowym.

Liczba oddziaływań (sprężyn) między węzłami wynosi  $N = 32$ . Wychylenie  $i$ -tej cząstki z położenia równowagi oznaczamy jako  $u_i$ .

### 2.1. Równania ruchu

Siła działająca na cząstki zawiera składową liniową (prawo Hooke'a) oraz nieliniową (człon kwadratowy w sile, odpowiadający modelowi  $\alpha$ -FPUT). Równanie przyspieszenia dla  $i$ -tej cząstki ( $i = 1, \dots, 31$ ) przyjmuje postać:

$$\ddot{u}_i = (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + \alpha [(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2] \quad (1)$$

gdzie  $\alpha$  jest parametrem nieliniowości (w symulacji przyjęto  $\alpha = 0.25$ ). Warunki brzegowe są sztywne, tzn.  $u_0 = 0$  oraz  $u_{32} = 0$ .

### 2.2. Całkowanie numeryczne

Do rozwiązania układu równań różniczkowych wykorzystano algorytm **Velocity Verlet**, który jest metodą symplektyczną, co zapewnia dobrą stabilność energetyczną przy długich czasach symulacji. Schemat kroku czasowego  $\Delta t$ :

$$v(t + \frac{\Delta t}{2}) = v(t) + \frac{1}{2}a(t)\Delta t \quad (2)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + v(t + \frac{\Delta t}{2})\Delta t \quad (3)$$

$$a(t + \Delta t) = F(u(t + \Delta t)) \quad (4)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{1}{2}a(t + \Delta t)\Delta t \quad (5)$$

Implementacja algorytmu w języku Python została zwięzlowana przy użyciu biblioteki `numpy`, co znacząco przyspiesza obliczenia dla wszystkich cząstek jednocześnie.

```
1 def step_verlet(u, v, a, alpha, dt):
2     v_half = v + 0.5 * a * dt
3     u_new = u + v_half * dt
4     a_new = get_acceleration(u_new, alpha)
5     v_new = v_half + 0.5 * a_new * dt
6     return u_new, v_new, a_new
```

Kod 1. Implementacja metody Velocity Verlet

### 2.3. Analiza modów normalnych

Aby zbadać przepływ energii, układ fizyczny jest rzutowany na przestrzeń modów normalnych. Mody te są wektorami własnymi macierzy oddziaływań liniowych  $A$ :

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{dla } i = j \\ -1 & \text{dla } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (6)$$

Energia  $k$ -tego modu ( $E_k$ ) w danej chwili czasu obliczana jest jako suma energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora harmonicznego o częstotliwości  $\omega_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2}(\dot{Q}_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) \quad (7)$$

gdzie  $Q_k$  i  $\dot{Q}_k$  to odpowiednio amplituda i prędkość w przestrzeni modów (iloczyn skalarny stanu układu i  $k$ -tego wektora własnego).

## 3. Wyniki symulacji

Symulację przeprowadzono dla następujących parametrów, dobranych tak, aby zaobserwować pełny cykl nawrotu FPUT w reżimie słabo nieliniowym:

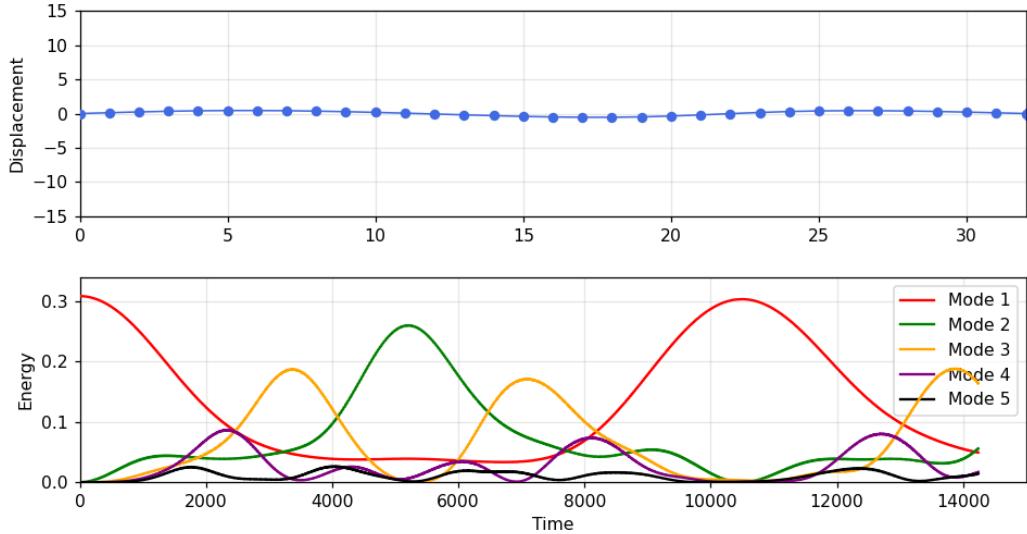
- Całkowita liczba węzłów: 33 (z czego **31 częstek ruchomych**).
- Liczba oddziaływań (sprzęzyn)  $N = 32$ .
- Parametr nieliniowości  $\alpha = 0.25$ .
- Krok czasowy  $dt = 0.1$ .

Całkowita liczba kroków symulacji została zwiększała, aby uchwycić długoczasowe zachowanie układu.

Warunkiem początkowym było wzbudzenie wyłącznie pierwszego modu normalnego (ksztalt połówki sinusoidy) o amplitudzie dobranej tak, aby uniknąć chaotyzacji ruchu.

### 3.1. Wizualizacja przemieszczeń i energii

Poniższy wykres prezentuje ewolucję układu w czasie. Górnny panel przedstawia rzeczywiste położenia częstek w łańcuchu dla wybranej klatki czasowej, natomiast dolny panel ukazuje zmianę energii kinetycznej i potencjalnej dla pięciu pierwszych modów normalnych.



Rysunek 1. Wizualizacja wyników symulacji FPUT. Dolny wykres ukazuje klasyczny paradoks FPUT: Energia początkowo skupiona w Modzie 1 (czerwona linia) przepływa do wyższych modów (zielony, pomarańczowy), by następnie, zamiast ulec termalizacji, powrócić niemal w całości do stanu początkowego (Modu 1) pod koniec cyklu.

### 3.2. Interpretacja zjawiska nawrotów

Na Rysunku 1 wyraźnie obserwujemy zjawisko \*\*FPUT Recurrence\*\*.

1. **Faza początkowa:** Energia skupiona w Modzie 1 (czerwony) spada, zasilając kolejne mody nieparzyste (Mod 3, Mod 5) oraz parzyste, co jest widoczne jako wzrost amplitudy pozostałych linii.
2. **Stan metastabilny:** Przez pewien czas energia jest rozdzielona między kilka modów o niskich częstościach.
3. **Nawrót (Recurrence):** W końcowej fazie symulacji następuje proces odwrotny – energia „wraca” z wyższych modów z powrotem do Modu 1. Wykres czerwonej linii ponownie osiąga maksimum, co dowodzi, że układ zapamiętał swój stan początkowy i nie dąży do równowagi termodynamicznej (ekwipartycji energii) w tej skali czasowej.

Jest to charakterystyczna cecha układów słabo nieliniowych, bliskich całkowalności, stojąca w sprzeczności z prostymi założeniami mechaniki statystycznej o szybkim mieszaniu się faz.

## 4. Wnioski

Zrealizowany projekt potwierdził numerycznie występowanie paradoksu FPUT. Implementacja algorytmu Velocity Verlet okazała się stabilna i pozwoliła na obserwację cyklicznej wymiany energii między modami normalnymi. Nieliniowość w postaci parametru  $\alpha$  jest odpowiedzialna za sprzężenie modów, ale nie prowadzi do natychmiastowej termalizacji układu dla zadanych warunków początkowych.

## Literatura

- [1] Wikipedia contributors. *Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou problem*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi%2880%93Pasta%2880%93Ulam%2880%93Tsingou\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi%2880%93Pasta%2880%93Ulam%2880%93Tsingou_problem)
- [2] Flowtography. *FPUT: A Mystery in Memory*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Cc8B-tvvReo>
- [3] Aaron Santos. *Physics for Play - Episode 025 - Mode Coupling and the FPUT Problem*. YouTube. [https://www.youtube.com/watch?v=o\\_4hppp9dAo](https://www.youtube.com/watch?v=o_4hppp9dAo)