第1章　矢量分析与场论

知识点：

哈密顿算子：　$\vec{\nabla}=\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$　P10

梯度：　$\vec{\nabla}u=\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$　P10

散度：　$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$　P14

旋度：　$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$　P18

例题：

一、P33-1.4★　计算下列标量场u的梯度$\vec{\nabla}u$，再计算梯度$\vec{\nabla}u$的散度$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u$和旋度$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u$：

（1）　$u=x^2y^3z^4$

解　$\vec{\nabla}u=\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{e_x}2xy^3z^4+\vec{e_y}3x^2y^2z^4+\vec{e_z}4x^2y^3z^3$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u=\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_x}{\partial x}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_y}{\partial y}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_z}{\partial z}=2y^3z^4+6x^2yz^4+12x^2y^3z^2$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (\vec{\nabla}u)_x & (\vec{\nabla}u)_y & (\vec{\nabla}u)_z\end{vmatrix}$$
$$=\vec{e_x}(12x^2y^2z^3-12x^2y^2z^3)+\vec{e_y}(8xy^3z^3-8xy^3z^3)+\vec{e_z}(6xy^2z^4-6xy^2z^4)$$

（2）　$u=xy+yz+zx$

解　$\vec{\nabla}u=\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{e_x}(y+z)+\vec{e_y}(x+z)+\vec{e_z}(y+x)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u=\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_x}{\partial x}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_y}{\partial y}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_z}{\partial z}=0+0+0=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (\vec{\nabla}u)_x & (\vec{\nabla}u)_y & (\vec{\nabla}u)_z\end{vmatrix}=\vec{e_x}(1-1)+\vec{e_y}(1-1)+\vec{e_z}(1-1)=0$$

（3）　$u=3x^2-2y^2+3z^2$

解　$\vec{\nabla}u=\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{e_x}6x-\vec{e_y}4y+\vec{e_z}6z$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u=\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_x}{\partial x}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_y}{\partial y}+\frac{\partial(\vec{\nabla}u)_z}{\partial z}=6-4+6=8$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (\vec{\nabla}u)_x & (\vec{\nabla}u)_y & (\vec{\nabla}u)_z\end{vmatrix}=0$$

二、P33-1.10　求下列矢量场在给定点的散度值：

（1）　$\vec{A}=xyz(\vec{e_x}x+\vec{e_y}y+\vec{e_z}z)$在$M(1,3,2)$处；

解　$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=2xyz+2xyz+2xyz=6xyz$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}|_M=36$

（2）　$\vec{A}=\vec{e_x}4x+\vec{e_y}2xy+\vec{e_z}z^2$在$M(1,1,3)$处；

解　$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=4+2x+2z$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}|_M=12$

（3）　$\vec{A}=(\vec{e_x}x+\vec{e_y}y+\vec{e_z}z)/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$在$M(1,1,1)$处。

解　$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}+\frac{x^2+y^2+z^2-y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}+\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}|_M=\frac{2}{\sqrt{3}}$

三、P34-1.15　求下列矢量场在给定点的旋度：

（1）　$\vec{A}=\vec{e_x}x^2+\vec{e_y}y^2+\vec{e_z}z^2$在$M(1,0,-1)$处；

解　$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\vec{e_x}(0-0)+\vec{e_y}(0-0)+\vec{e_z}(0-0)=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}|_M=0$

（2）　$\vec{A}=\vec{e_x}yz+\vec{e_y}zx+\vec{e_z}xy$在$M(2,1,3)$处；

解　$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\vec{e_x}(x-x)+\vec{e_y}(y-y)+\vec{e_z}(z-z)=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}|_M=0$

（2）　$\vec{A}=(\vec{e_x}+\vec{e_y}+\vec{e_z})xyz$在$M(1,1,-1)$处；

解　$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\vec{e_x}(xz-xy)+\vec{e_y}(xy-yz)+\vec{e_z}(yz-xz)$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}|_M=-2\vec{e_x}+2\vec{e_y}$

第2章　宏观电磁现象的基本定律

知识点：

若已知某导电媒质中的体电流密度$\vec{J}$:　　　$\vec{J} = \rho\vec{v}\ (A/m^2)$　　　P41

则可以得出穿过该媒质内任一截面S的电流i为:　　$\vec{\imath} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$　　　P42

例题：

一、PPT-P5-2.2　一个体密度为$\rho = 2.32\times10^{-7}C/m^3$的质子束，通过$1000V$的电压加速后形成等速的质子束，质子束内的电荷均匀分布，束直径为 $2mm$，束外没有电荷分布，试求电荷密度和电流。

解　质子的质量$m = 1.7\times10^{-27}C/m^3$、电量$q = 1.6\times10^{-19}C$。

根据$\frac{1}{2}mv^2 = qU$，得　$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2\times1.6\times10^{-19}\times1000}{1.7\times10^{-27}}} = 4.34\times10^5\ m/s$

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = 2.32\times10^{-7}\times4.34\times10^5 = 0.10\ A/m^2$$

$$\vec{I} = \vec{J}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0.10\times\pi\times\left(\frac{2\times10^{-3}}{2}\right)^2 = 3.14\times10^{-7}\ A$$

二、PPT-P6-2.3　一个半径为a的球体内均匀分布总电荷量为Q的电荷，球体以匀角速度ω绕一个直径旋转，求球内的电流密度。

解　以球心为坐标原点，转轴（一直径）为z轴。设球内任一点P的位置矢量为$\vec{r}$，且$\vec{r}$与z轴的夹角为θ，则P点的线速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \overrightarrow{e_\phi}\omega a\sin\theta$$

球内的电荷体密度为　$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$

故　$\vec{J} = \rho\vec{v} = \overrightarrow{e_\phi}\frac{Q}{4\pi a^3/3}\omega a\sin\theta = \overrightarrow{e_\phi}\frac{3Q\omega}{4\pi a^2}\sin\theta$

三、PPT-P9-2.4&P69-2.3　一个半径为a的导体球带总电荷量为Q，同样以匀角速度ω绕一个直径旋转，求球表面的面电流密度。

解　以球心为坐标原点，转轴（一直径）为z轴。设球面上任一点P的位置矢量为$\vec{r}$，且$\vec{r}$与z轴的夹角为θ，则P点的线速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \overrightarrow{e_\phi}\omega a\sin\theta$$

球面的上电荷面密度为　$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$

故　$\overrightarrow{J_S} = \sigma\vec{v} = \overrightarrow{e_\phi}\frac{Q}{4\pi a^2}\omega a\sin\theta = \overrightarrow{e_\phi}\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta$

知识点：

库仑定律可以用数学公式表达为:　$\vec{F}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^2}\overrightarrow{e_R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R^3}\vec{R}$　　P46

式中，$\vec{F}_{1\to2}$表示点电荷q_1作用在点电荷q_2上的力；$\vec{R}$表示由源点$\overrightarrow{r_1}$出发引向场点$\overrightarrow{r_2}$的距离矢

量；R表示该矢量的模；$\overrightarrow{e_R}$表示该矢量方向的单位矢量。

例题：

四、P69-2.6　两个带电量分别为q_0和$2q_0$的点电荷相距为d，另有一带电量为q_0的点电荷位于其间。为使中间的点电荷处于平衡状态，试求其位置。当中间的点电荷的带电量为$-q_0$时，结果又如何？

解　设实验电荷q_0离$2q_0$为x，那么离q_0为$d-x$。

由库仑定律，实验电荷受$2q_0$的排斥力为

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2q_0}{x^2}$$

实验电荷受q_0的排斥力为　$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_0}{(d-x)^2}$

要使实验电荷保持平衡，即$F_1=F_2$，那么由$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2q_0}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_0}{(d-x)^2}$，可以解得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d=0.585d$$

如果实验电荷为$-q_0$，那么平衡位置仍然为$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d=0.585d$。

只是这时实验电荷与q_0和$2q_0$不是排斥力，而是吸引力。

知识点：

电位移$\vec{D}$:　　$\vec{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{E}}\,(C/m^2)$　　P40

式中，ε称为电介质的（绝对）介电常数，它为$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$\varepsilon_r$为相对介电常数。

体电流密度$\vec{J}$:　　$\vec{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{\sigma}\vec{\boldsymbol{E}}\,(A/m^2)$（欧姆定律的微分形式）　　P42

式中，σ称为该导电媒质的电导率，单位是西门子每米(S/m)；

电导率的倒数成为电阻率，记为ρ，即$\rho=1/\sigma$，单位是欧姆米$(\Omega\cdot m)$。

磁感应强度$\vec{B}$:　　$\vec{B}=\frac{F_{max}}{qv}\,(T)$　　P43

磁场强度$\vec{H}$:　　$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-P_m\,(A/m)$　　P45

式中，μ_0为真空磁导率，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,(H/m)$。

对于线性和各向同性的磁介质：$\vec{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\mu}\vec{\boldsymbol{H}}\,(T)$　　P45

式中，μ称为磁介质的（绝对）磁导率，它为$\mu=\mu_r\mu_0$，μ_r为相对磁导率。

电介质中高斯定律的数学表达式：　$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q$　　P50

它表明，在静电场中穿过任一高斯面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷。

电场中某一点的电位移矢量随时间的变化率为该点位移电流密度，记为$\vec{J}_d$，

即　　$\vec{J}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$　　P59

麦克斯韦方程组的积分形式：　　P61

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\, dV$$

麦克斯韦方程组的微分形式：　　P62

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

例题：

五、★　默写麦克斯韦方程组的积分形式和微分形式。

解　见上

六、P73-2.27　已知空气中的电场强度$\vec{E}=\vec{e_x}E_0\cos(\omega t-\beta z)$，其中$E_0$、$\beta$和$\omega$为常数。试求磁场强度$\vec{H}$和位移电流密度$\vec{J_d}$。

解　$$\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\vec{e_y}\frac{\partial E_0\cos(\omega t-\beta z)}{\partial z}-\vec{e_z}\frac{\partial E_0\cos(\omega t-\beta z)}{\partial y}=\vec{e_y}\beta E_0\sin(\omega t-\beta z)$$

根据$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$，得

$$\vec{H}=-\frac{1}{\mu_0}\int_0^t\nabla\times\vec{E}\,dt=-\frac{1}{\mu_0}\int_0^t\vec{e_y}\beta E_0\sin(\omega t-\beta z)\,dt=\vec{e_y}\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)$$

根据$\vec{J_d}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$和$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，得

$$\vec{J_d}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\vec{e_x}\omega\varepsilon_0E_0\sin(\omega t-\beta z)$$

七、PPT-42-2.32　已知介电常数为ε，磁导率为μ的空间内$\vec{E}=\vec{e_y}E_0\cos(\omega t-k_xx-k_zz)$，试求：电荷密度$\rho$。

解　根据$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$和$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，得

$$\rho=\nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon\,\nabla\cdot\vec{E}=\varepsilon\frac{\partial E_0\cos(\omega t-k_xx-k_zz)}{\partial y}=0$$

八、PPT-26-3.4　半径为a的球中充满密度$\rho(r)$的体电荷，已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 \ \ (r \le a) \\ \dfrac{a^5 + Aa^4}{r^2} \ \ (r \ge a) \end{cases}$$

其中A为常数，试求电荷密度$\rho(r)$。

解　根据$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$，得　　$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r)$

在$r \le a$区域中：　　$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(r^3 + Ar^2)] = 5r^2 + 4Ar$

在$r \ge a$区域中：　　$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{a^5+Aa^4}{r^2}\right)\right] = 0$

九、PPT-P30-3.6★　两个无限长的同轴圆柱半径分别为$r = a$和$r = b\ (b > a)$，圆柱表面分别带有密度为σ_1和σ_2的面电荷。

（1）计算各处的电位移$\vec{D}_0$；

（2）欲使$r > b$区域内$\vec{D}_0 = 0$，则σ_1和σ_2应具有什么关系？

解（1）　根据$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$，

当$r < a$时，有$\vec{D}_{01} = 0$

当$a < r < b$时，有$2\pi r\vec{D}_{02} = 2\pi a\sigma_1$，则$\vec{D}_{02} = \vec{e_r}\frac{a\sigma_1}{r}$

当$b < r < \infty$时，有$2\pi r\vec{D}_{03} = 2\pi a\sigma_1 + 2\pi a\sigma_2$，则$\vec{D}_{03} = \vec{e_r}\frac{a\sigma_1 + a\sigma_2}{r}$

（2）　令$\vec{D}_{03} = \vec{e_r}\frac{a\sigma_1 + a\sigma_2}{r} = 0$，得$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{b}{a}$

第3章　静电场及其边值问题的解法

知识点：

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$ P80

表明：电场强度矢量与电位梯度矢量大小相等，方向相反。

电位的泊松方程：　$\vec{\nabla}^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ P82

在不存在电荷的无源区域内，$\rho = 0$，上式成为

点位的拉普拉斯方程：　$\vec{\nabla}^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = 0$ P82

例题：

一、P130-3.1★　对于下列各种电位分布，分别求其对应的电场强度和体电荷密度。

（1）　$\Phi(x,y,z) = Ax^2 + Bx + C$

解　$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\vec{e_x}(2Ax + B)$

根据$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$，得$\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\Phi = -2A\varepsilon_0$

（2）　$\Phi(x,y,z) = Axyz$

解　$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -A\left(\vec{e_x}yz + \vec{e_y}xz + \vec{e_z}xy\right)$

根据$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$，得$\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\Phi = 0$

第4章　恒定电场与恒定磁场

知识点：

定义　　$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$　　P145

则称矢量$\vec{A}$为恒定磁场的矢量磁位，单位是韦伯/米(Wb/m)。

矢量磁位的泊松方程:　　$\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$　　P147

在不存在电流的无源区，$\vec{J}=0$，上述泊松方程变成为

矢量磁位的拉普拉斯方程:　　$\vec{\nabla}^2\vec{A}=0$　　P148

例题：

一、P158-4.14★　已知某一电流分布的矢量磁位为

$$\vec{A}=\vec{e_x}x^2y+\vec{e_y}y^2x+\vec{e_z}4xyz$$

求该电流分布及其对应的$\vec{B}$。

解　利用矢量磁位$\vec{A}$满足的泊松方程来求出电流分布为

$$\vec{J}=-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\vec{e_x}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}-\vec{e_y}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2A_y}{\partial y^2}-\vec{e_z}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}=-\vec{e_x}\frac{2y}{\mu_0}-\vec{e_y}\frac{2x}{\mu_0}$$

由$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$可以求出磁感应强度为

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\vec{e_x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e_y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e_z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=-\vec{e_x}4xz-\vec{e_y}4yz+\vec{e_z}(y^2-x^2)$$

第5章　电磁波的辐射

知识点：

电场和磁场表示式瞬时形式与复数形式相互转换的方法。　P161

例题：

一、P201-5.1★　改写下列电场和磁场的表示式。

（1）　将瞬时形式写成复数形式：

① $\vec{E} = \vec{e_x} E_m \cos(2x)\sin(\omega t)$

$$= \vec{e_x} E_m \cos(2x)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= Re\left\{\vec{e_x} E_m \cos(2x)\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= Re\left[\vec{e_x} E_m \cos(2x)\, e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= Re\left[\vec{e_x} E_m \cos(2x)\, e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= Re\left[-j\vec{e_x} E_m \cos(2x)\, e^{j\omega t}\right]$$

$$\dot{\vec{E}} = -j\vec{e_x} E_m \cos(2x)$$

② $\vec{H} = \vec{e_y} H_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$

$$= Re\{\vec{e_y} H_m e^{-\alpha z}[\cos(\omega t - \beta z) + j\sin(\omega t - \beta z)]\}$$

$$= Re\left[\vec{e_y} H_m e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right]$$

$$= Re\left[\vec{e_y} H_m e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega t}\right]$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{e_y} H_m e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

③ $\vec{E} = \vec{e_x} E_m \sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - \beta z) + \vec{e_y} E_m \cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t - \beta z)$

$$= \vec{e_x} E_m \sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - \beta z) + \vec{e_y} E_m \cos\frac{\pi x}{a}\cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= Re\left\{\vec{e_x} E_m \sin\frac{\pi x}{a}[\cos(\omega t - \beta z) + j\sin(\omega t - \beta z)]\right.$$

$$\left. + \vec{e_y} E_m \cos\frac{\pi x}{a}\left[\cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= Re\left[\vec{e_x} E_m \sin\frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \beta z)} + \vec{e_y} E_m \cos\frac{\pi x}{a} e^{j\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= Re\left[\left(\vec{e_x}\sin\frac{\pi x}{a} + \vec{e_y}\cos\frac{\pi x}{a} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) E_m e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right]$$

$$= Re\left[\left(\vec{e_x}\sin\frac{\pi x}{a} - j\vec{e_y}\cos\frac{\pi x}{a}\right) E_m e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right]$$

$$\dot{\vec{E}} = \left(\vec{e_x}\sin\frac{\pi x}{a} - j\vec{e_y}\cos\frac{\pi x}{a}\right) E_m e^{-j\beta z}$$

（2）　将复数形式写成瞬时形式：

① $\dot{\vec{E}} = \overrightarrow{e_x} E_m \sin\frac{\pi y}{a} e^{-(\alpha+j\beta)z}$

$$\vec{E} = Re\left[\overrightarrow{e_x} E_m \sin\frac{\pi y}{a} e^{-(\alpha+j\beta)z} e^{j\omega t}\right]$$

$$= Re\left[\overrightarrow{e_x} E_m \sin\frac{\pi y}{a} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta z)}\right]$$

$$= Re\left\{\overrightarrow{e_x} E_m \sin\frac{\pi y}{a} e^{-\alpha z}[\cos(\omega t-\beta z) + j\sin(\omega t-\beta z)]\right\}$$

$$= \overrightarrow{e_x} E_m \sin\frac{\pi y}{a} e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)$$

② $\dot{\vec{H}} = \overrightarrow{e_y} j H_m \cos(\beta z)$

$$= \overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{H} = Re\left[\overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}\right]$$

$$= Re\left[\overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\, e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= Re\left\{\overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\left[\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= Re\{\overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\,[-\sin(\omega t) + j\cos(\omega t)]\}$$
$$= -\overrightarrow{e_y} H_m \cos(\beta z)\sin(\omega t)$$

③ $\dot{\vec{H}} = (\overrightarrow{e_x} + j\overrightarrow{e_y}) H_m e^{j\beta z}$

$$= \overrightarrow{e_x} H_m e^{j\beta z} + j\overrightarrow{e_y} H_m e^{j\beta z}$$

$$= \overrightarrow{e_x} H_m e^{j\beta z} + \overrightarrow{e_y} H_m e^{j\left(\beta z+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\vec{H} = Re\left\{\left[\overrightarrow{e_x} H_m e^{j\beta z} + \overrightarrow{e_y} H_m e^{j\left(\beta z+\frac{\pi}{2}\right)}\right] e^{j\omega t}\right\}$$

$$= Re\left[\overrightarrow{e_x} H_m e^{j(\omega t+\beta z)} + \overrightarrow{e_y} H_m e^{j\left(\omega t+\beta z+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= Re\left\{\overrightarrow{e_x} H_m[\cos(\omega t+\beta z) + j\sin(\omega t+\beta z)]\right.$$

$$\left. + \overrightarrow{e_y} H_m\left[\cos\left(\omega t+\beta z+\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t+\beta z+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= Re\{\overrightarrow{e_x} H_m[\cos(\omega t+\beta z) + j\sin(\omega t+\beta z)]$$
$$+ \overrightarrow{e_y} H_m[-\sin(\omega t+\beta z) + j\cos(\omega t+\beta z)]\}$$
$$= \overrightarrow{e_x} H_m \cos(\omega t+\beta z) - \overrightarrow{e_y} H_m \sin(\omega t+\beta z)$$

知识点：

积分形式的坡印亭定理：$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)\, dV = \int_V P_c\, dV + \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ P175

式中，w_e为电场能量密度，w_m为磁场能量密度，P_c为功率损耗密度。
上式左端表示体积V内单位时间电磁储存能量的减少量，右端的第一项表示体积V内单位时间电磁能量的热损耗量，右端的第二项表示单位时间穿出闭合曲线S的电磁能量。
物理意义：能量守恒定律

例题：

二、★　默写坡印亭定理的积分形式表达式，并说明其物理意义。

　　解　见上

知识点：

电磁场复矢量$\dot{\vec{H}}$与复数位函数的关系式：$\dot{\vec{H}}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\dot{\vec{A}}$　P173

$\vec{S}$称为坡印亭矢量，定义为　$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$　P175

时谐电磁场一个时间周期内瞬时坡印亭矢量的平均值定义为平均坡印亭矢量，即　P176

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H})\,dt$$

复坡印亭矢量　$\dot{\vec{S}}=\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*$　P176

复坡印亭矢量的实部等于瞬时坡印亭矢量的平均量$\vec{S}_{av}$，即　P176

$$\vec{S}_{av}=Re\left(\dot{\vec{S}}\right)=\frac{1}{2}Re\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)$$

在理想介质中$\dot{\vec{J}}=0$，由麦克斯韦旋度方程的复数形式中$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$　P177

可得　$\dot{\vec{E}}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\dot{\vec{H}}$

例题：

三、PPT-P34-5.13★　已知真空中时变场的矢量磁位为

$$\vec{A}=\vec{e_x}A_0\cos(\omega t-kz)$$

　　试求：（1）电场强度的复矢量和磁场强度的复矢量；（2）坡印亭矢量的平均值。

解（1）　矢量磁位的复数形式为$\dot{\vec{A}}(z)=\vec{e_x}A_0e^{-jkz}$

　　磁场强度复振幅

$$\dot{\vec{H}}(z)=\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\dot{\vec{A}}\right)=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\dot{A}_x&\dot{A}_y&\dot{A}_z\end{vmatrix}=\vec{e_y}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\dot{A}_x}{\partial z}$$

$$=\vec{e_y}\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_0e^{-jkz}}{\partial z}=-j\vec{e_y}\frac{kA_0}{\mu_0}e^{-jkz}=\vec{e_y}\frac{kA_0}{\mu_0}e^{-j\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}$$

　　磁场强度的瞬时值为

$$\vec{H}(z,t)=\vec{e_y}\frac{kA_0}{\mu_0}\cos\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{2}\right)=\vec{e_y}\frac{kA_0}{\mu_0}\sin(\omega t-kz)$$

由于在真空中$\dot{\vec{J}}=0$，电场强度复振幅为

$$\dot{\vec{E}}(z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\nabla\times\dot{\vec{H}}(z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z\end{vmatrix}=-\vec{e_x}\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}$$

$$=-\vec{e_x}\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial\frac{kA_0}{\mu_0}e^{-j\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}}{\partial z}=\vec{e_x}\frac{k^2A_0}{\omega\mu_0\varepsilon_0}e^{-j\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)}$$

电场强度的瞬时值为

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e_x}\frac{k^2A_0}{\omega\mu_0\varepsilon_0}\cos\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{2}\right)=\vec{e_x}\frac{k^2A_0}{\omega\mu_0\varepsilon_0}\sin(\omega t-kz)$$

（2） 瞬时坡印亭矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{e_x}\frac{k^2A_0}{\omega\mu_0\varepsilon_0}\sin(\omega t-kz)\times\vec{e_y}\frac{kA_0}{\mu_0}\sin(\omega t-kz)=\vec{e_x}\times\vec{e_y}\frac{k^3{A_0}^2}{\omega{\mu_0}^2\varepsilon_0}\sin^2(\omega t-kz)$$

坡印亭矢量的平均量为$\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}\,dt=Re\left(\dot{\vec{S}}\right)=\frac{1}{2}Re\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=\vec{e_z}\frac{k^3{A_0}^2}{2\omega{\mu_0}^2\varepsilon_0}$

知识点：

根据时谐电磁场麦克斯韦微分方程的复数形式

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\vec{B}}$$ P163

和时谐电磁场的复矢量所满足的结构方程的复数形式

$$\dot{\vec{B}}=\mu\dot{\vec{H}}$$ P163

得 $\dot{\vec{H}}=-\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\dot{\vec{E}}$

波数 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{v}\ (rad/m)$ P173

电磁波传播的相速度 $v_p=\frac{\omega}{k}=v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{C}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ P194

式中，$C=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\times10^8\ m/s$，是真空中的光速，即电磁波在真空中的传播速度。

远区辐射场的波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{v_p}{f}=\frac{v}{f}$ P195

此式与光学中光波长的计算公式一样，从而再一次验证了光是一种电磁波。

例题：

四、PPT-P21★ 已知真空中的均匀平面波电场强度瞬时值为

$$\vec{E}(z,t)=20\sqrt{2}\sin(6\pi\times10^8t-\beta z)\vec{e_x}\ (V/m)$$

求：（1）频率f、波长λ、相速v_p及相位常数β（即波数k）；

（2）电场强度复数表达式，磁场强度复数及瞬时值表达式；

解 题设的均匀平面波是沿正z轴方向传播的，根据已知条件可得：$\omega = 6\pi \times 10^8 rad/s$，有效值$\overrightarrow{E_x} = 20V/m$，因此

（1） 频率$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6\pi\times10^8}{2\pi} = 3 \times 10^8\ (Hz)$

相速$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = C = 3 \times 10^8\ (m/s)$

相位常数$\beta = k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{6\pi\times10^8}{3\times10^8} = 2\pi\ (rad/m)$

波长$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ (m)$

（2） $\because$ $\vec{E}(z,t) = 20\sqrt{2}\sin(6\pi \times 10^8 t - \beta z)\,\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}\cos\left(6\pi \times 10^8 t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= Re\left\{\overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}\left[\cos\left(6\pi \times 10^8 t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(6\pi \times 10^8 t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= Re\left[\overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}e^{j\left(6\pi\times10^8 t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= Re\left[\overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}e^{-j\left(\beta z + \frac{\pi}{2}\right)}e^{j6\pi\times10^8 t}\right]$$

$\therefore$ $\dot{\vec{E}} = \overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}e^{-j\left(\beta z + \frac{\pi}{2}\right)} = \overrightarrow{e_x}20\sqrt{2}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}$

$\therefore$ $\dot{E}_x = 20\sqrt{2}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}$，$\dot{E}_y = 0$，$\dot{E}_z = 0$

$\because$ $\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\vec{\nabla}\times\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\overrightarrow{e_y}\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\overrightarrow{e_y}\frac{\partial 20\sqrt{2}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}}{\partial z} = \overrightarrow{e_y}\left(-\frac{1}{j\omega\mu_0}\right)20\sqrt{2}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}(-j2\pi)$$

$$= \overrightarrow{e_y}\left(\frac{40\sqrt{2}\pi}{\omega\mu_0}\right)e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)} = \overrightarrow{e_y}\left(\frac{40\sqrt{2}\pi}{6\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}\right)e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\because$ $\dot{\vec{H}} = Re\left[\overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}e^{-j\left(2\pi z + \frac{\pi}{2}\right)}e^{j6\pi\times10^8 t}\right] = Re\left[\overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}e^{j\left(6\pi\times10^8 t - 2\pi z - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$

$$= Re\left\{\overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}\left[\cos\left(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$\therefore$ $\vec{H} = \overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}\cos\left(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \overrightarrow{e_y}\frac{\sqrt{2}}{6\pi}\sin(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)\ (A/m)$$

第6章　均匀平面波的传播

知识点：

均匀平面波的极化　　P211

例题：

一、P249-6.6★　下列表达式中的均匀平面波各是什么极化波？如果是圆或者椭圆极化波，判断是左旋还是右旋？

（1）　$\vec{E}=\vec{e_x}E_0\sin(\omega t-kz)+\vec{e_y}E_0\cos(\omega t-kz)$；

解　$\because$　$r^2=[E_0\sin(\omega t-kz)]^2+[E_0\cos(\omega t-kz)]^2={E_0}^2$，$E_0$为常数

$\therefore$　此表达式中的均匀平面波是圆极化波

取五个点：

当$\omega t-kz=0$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=E_0$　=>　$A(0,E_0)$

当$\omega t-kz=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　=>　$B(E_0,0)$

当$\omega t-kz=\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=-E_0$　=>　$C(0,-E_0)$

当$\omega t-kz=\frac{3\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=-E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　=>　$D(-E_0,0)$

当$\omega t-kz=2\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=E_0$　=>　$E(0,E_0)$

作图，由图 1 可知，此表达式中的均匀平面波是左旋圆极化波。

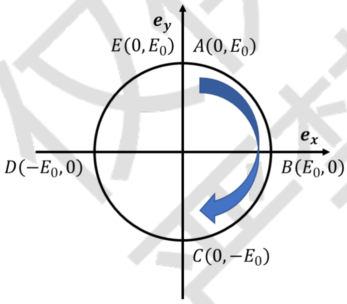

图 1

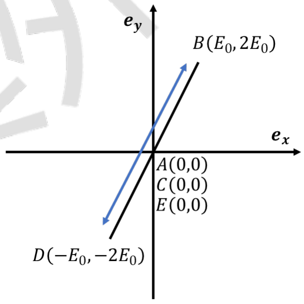

图 2

（2）　$\vec{E}=\vec{e_x}E_0\sin(\omega t-kz)+\vec{e_y}2E_0\sin(\omega t-kz)$；

解　取五个点：

当$\omega t-kz=0$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　=>　$A(0,0)$

当$\omega t-kz=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=2E_0$　=>　$B(E_0,2E_0)$

当$\omega t-kz=\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　=>　$C(0,0)$

当$\omega t-kz=\frac{3\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=-E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=-2E_0$　=>　$D(-E_0,-2E_0)$

当$\omega t-kz=2\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　=>　$E(0,0)$

作图，由图 2 可知，此表达式中的均匀平面波是线极化波。

（3）　$\vec{E}=\vec{e_x}E_0\sin\left(\omega t-kz+\frac{\pi}{4}\right)+\vec{e_y}E_0\cos\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{4}\right)$；

解　取五个点:

当$\omega t-kz+\frac{\pi}{4}=0$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　　=> $A(0,0)$

当$\omega t-kz+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=E_0$　　=> $B(E_0,E_0)$

当$\omega t-kz+\frac{\pi}{4}=\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　　=> $C(0,0)$

当$\omega t-kz+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=-E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=-E_0$　　=> $D(-E_0,-E_0)$

当$\omega t-kz+\frac{\pi}{4}=2\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　　=> $E(0,0)$

作图，由图 3 可知，此表达式中的均匀平面波是线极化波。

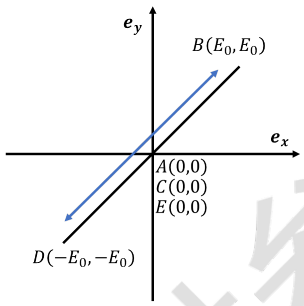

图 3

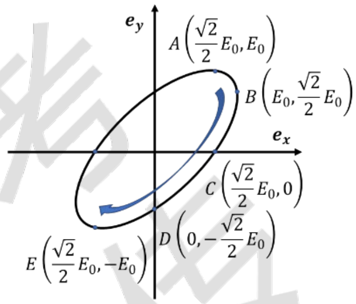

图 4

(4)　$\vec{E}=\vec{e_x}E_0\sin\left(\omega t-kz+\frac{\pi}{4}\right)+\vec{e_y}E_0\cos(\omega t-kz)$。

解　取五个点:

当$\omega t-kz=0$时，$\vec{e_x}$方向投影$=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=E_0$　　=> $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}E_0,E_0\right)$

当$\omega t-kz=\frac{\pi}{4}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$　　=> $B\left(E_0,\frac{\sqrt{2}}{2}E_0\right)$

当$\omega t-kz=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=0$　　=> $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}E_0,0\right)$

当$t-kz=\frac{3\pi}{2}$时，$\vec{e_x}$方向投影$=0$，$\vec{e_y}$方向投影$=-\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$　　=> $D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}E_0\right)$

当$\omega t-kz=\pi$时，$\vec{e_x}$方向投影$=-\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$，$\vec{e_y}$方向投影$=-E_0$ => $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}E_0,-E_0\right)$

∵　$r_A=r_B=\frac{\sqrt{3}}{2}E_0$，$r_C=r_D=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0$，$r_A=r_B\neq r_C=r_D$

∴　此表达式中的均匀平面波是椭圆极化波

作图，由图 4 可知，此表达式中的均匀平面波是左旋椭圆极化波。

知识点：

均匀平面波的横向电场与横向磁场之比称为均匀平面波的波阻抗，用Z_w表示，它为

$$Z_w=\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y}=-\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}$$　　P208

在理想介质中，均匀平面波的波阻抗是一个实常数，即

$$Z_w = \frac{k}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \text{P208}$$

在真空中，波阻抗常用符号η来表示，它为

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377(\Omega) \qquad \text{P208}$$

当媒质的电导率σ很小，以致$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$时，这种媒质就称为弱导电媒质，在这种媒质中

$$\text{衰减常数}\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \text{P222}$$

例题：

二、P223-例 6.2.2★　已知沙土的相对介电常数为$\varepsilon_r = 4$，相对磁导率$\mu_r = 1$，电导率为$\sigma = 10^{-4}S/m$。当工作频率$f = 100MHz$的均匀平面波在该媒质中传播时，试求场强振幅衰减到原来的10^{-3}时电磁波所走过的距离d。

解　因为$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{10^{-4}}{2\pi\times100\times10^6\times4\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}} = 0.0045 \ll 1$

所以衰减常数α按下列公式计算：

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{\sigma\eta}{2\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{10^{-4}\times120\pi}{2\sqrt{4}} = 30\pi\times10^{-4}$$

场强振幅衰减为原来的10^{-3}时的传播距离d应满足$e^{-\alpha d} = 10^{-3}$，从而求得

$$d = \frac{1}{\alpha}\ln 10^3 = \frac{6.91}{30\pi\times10^{-4}} = 733.2(m)$$

知识点：

“趋肤效应”：电磁波自外界进入良导体后，场强以及电流密度随电磁波透入导体深度的增加而迅速衰减，也就是说，场强以及电流密度主要分布在导体表面。

例题：

三、★　请描述“趋肤效应”。

解　见上