

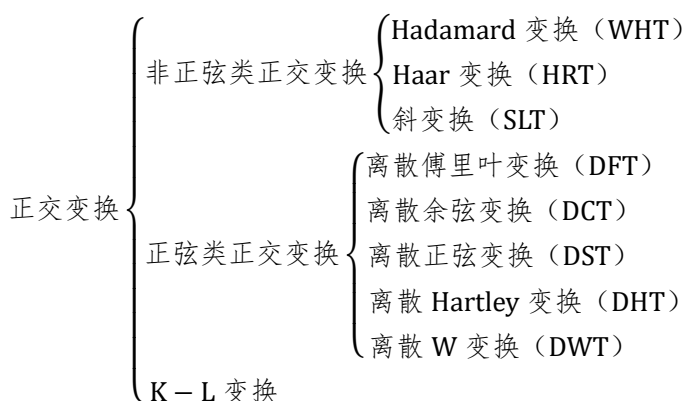
《现代信号处理技术》期末复习

第1章 数字信号处理基础及扩展

1.1. 压缩感知

压缩感知（压缩采样）是对稀疏信号以远小于奈奎斯特采样频率的速率进行全局观测而非局部采样。

1.2. 正交变换



- DFT: DFT 是数字信号频谱的频域采样，可以描述信号的频域（变换域）特性。
- DCT: 具有很强的“能量集中”特性：大多数的自然信号（包括声音和图像）的能量都集中在离散余弦变换后的低频部分，而且当信号具有接近马尔可夫过程（Markov processes）的统计特性时，DCT 的去相关性接近于 K-L 变换的性能。常用于无损数据压缩，是 JPEG 图像压缩标准的基础，对于图像和视频中的冗余信息具有较强的抑制能力（消除冗余信息）。
- DHT: 核函数 $\text{cas } \omega t = \cos \omega t + \sin \omega t$ 是傅里叶变换核函数 $\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$ 的实部与虚部之和。与 DFT 最主要的差异在于 DHT 对于实数的输入，有实数的输出，并不会牵涉到复数的运算。
- DWT: 核函数仍然是 $\text{cas } \omega t = \cos \omega t + \sin \omega t$ ，可用于频谱分析、数据压缩、计算卷积和信息隐藏等。
- K-L 变换: 具有最优的去相关性（去除信号中的相关性最彻底），具有最佳的统计特性，MSE 意义下的最佳变换。

快速算法的基本思路是“不断化小”——不断二分分解，即对时间或频率序列不断奇偶分解或对半分解。

第2章 多速率信号处理与小波变换

2.1. 抽取与插值*

1. 信号的抽取（decimatim）：减少抽样率以去掉过多数据的过程。

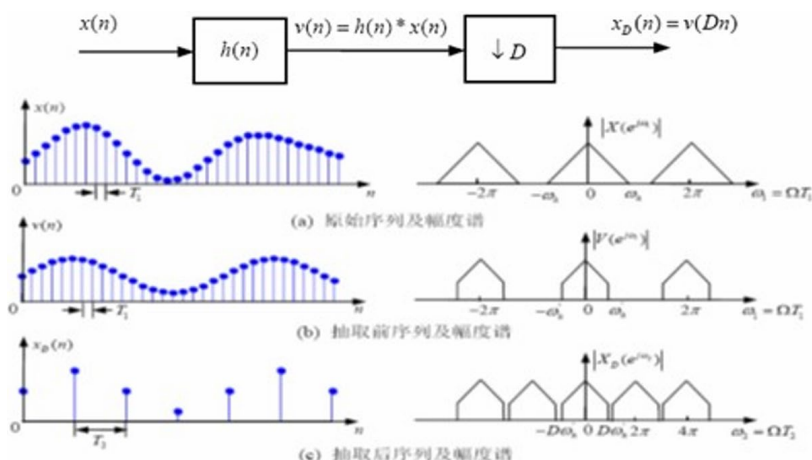
(1) 信号的整数倍抽取概念

抽样率 $F_1 = \frac{1}{T_1}$ 时， $x(n) = x_a(nT_1)$ ，将抽样率降低到原来的 $\frac{1}{D}$ ，

抽样率 $F_2 = \frac{1}{T_2}$ 时, $T_2 = DT_1$, $x_D(n) = x(Dn) = x_a(nT_2) = x_a(nDT_1)$ 。

抽取系统是时变系统, 抽取可以降低时域分辨率。

(2) 抽取过程



(3) 整数倍抽取的频域分析

抽取序列的频谱 $X_D(e^{j\omega})$ 是原序列频谱 D 倍展宽后按 2π 的整数倍位移并叠加而成。

如果要采样不产生混叠, 则 $x(n)$ 的频率限制在 $f_s/2$ 以内, 以因子 D 进行抽取后不产生混叠的频率范围为 $f_s/(2D)$ 。如果 $x(n)$ 中含有大于 $f_s/(2D)$ 的频率分量, 那么必然产生频谱混叠, 导致不能从 $x_D(m)$ 中恢复 $x(n)$ 。

为保证抽取后不丢失信息, 应该保证抽取后信号的频谱不发生混叠, 所以在抽取前对信号的频谱应该加以限制。如果在抽取前先用一数字低通滤波器 (滤波器的带宽为 π/D), 对 $x(n)$ 进行滤波, 使得 $X(e^{j\omega}) = 0, |\omega| > \pi/D$ (序列抽取不发生混叠的 Nyquist 条件), 则按因子 D 抽取后信号频谱不会发生混叠。(数字频率 ω 与模拟频率 f 的关系由采样频率 f_s 决定: $\omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$)

(4) 低通 (抗混叠) 滤波器: $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} D & |\omega| < \pi/D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

作用: 抗混叠, 避免因为抽取而产生的频谱混叠。

2. 信号的插值 (interpolation): 增加抽样率以增加数据的过程。

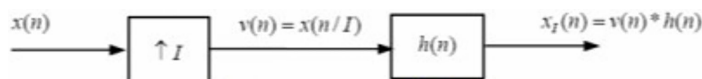
(1) 信号整数倍插值的概念

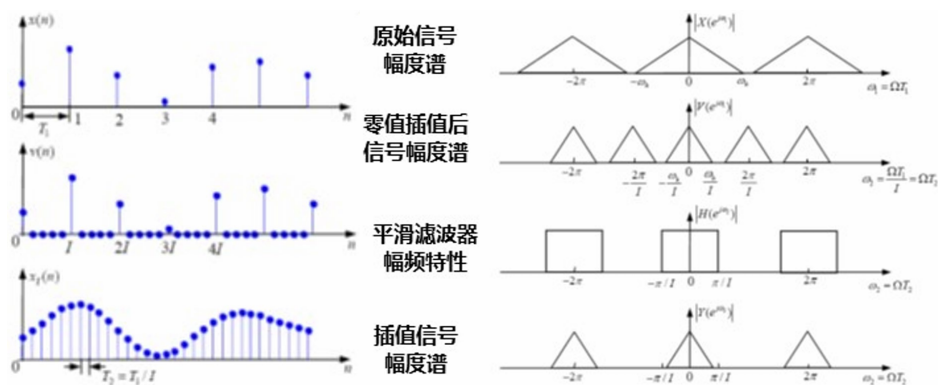
抽样率 $F_1 = \frac{1}{T_1}$ 时, $x(n) = x_a(nT_1)$, 将抽样率提高 I 倍,

抽样率 $F_2 = \frac{1}{T_2}$ 时, $T_1 = IT_2$, $x_I(n) = x(n/I) = x_a(nT_2) = x_a\left(\frac{nT_1}{I}\right)$ 。

插值系统是时变系统, 插值可以提高时域分辨率。

(2) 插值过程





(3) 整数倍插值的频域分析

内插序列的频谱 $X_I(e^{j\omega})$ 是原序列频谱经过 I 倍压缩后, 以 $2\pi/I$ 为周期在频域中重复 I 次形成的镜像频谱。

(4) 低通 (抗镜像/平滑) 滤波器: $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I & |\omega| < \pi/I \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

作用: 抗镜像, 移走由于内插所产生的所有“镜像”频谱。

3. 抽取、插值及二者相结合的使用便可实现信号抽样率的转换。

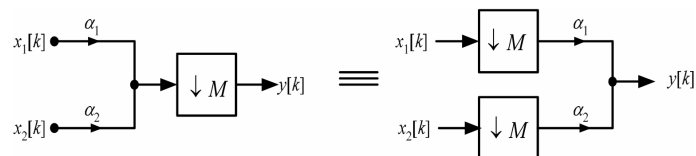
4. 信号的有理数 I/D 抽样率转换

目的: 抽样率变为原来的 I/D 。

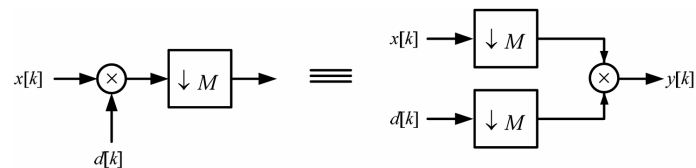
一般来说, 抽取使原始数据点减少, 会产生信息的丢失。因此, 合理的方法是先对信号作插值, 然后再抽取。当 I 和 D 互为素数 时, “先 I 倍插值后 D 倍抽取” 和 “先 D 倍抽取后 I 倍插值” 效果等价。

5. 抽取器与插值器的恒等变换

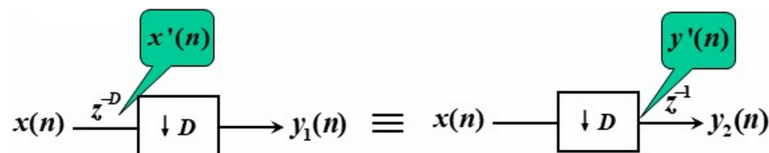
(1) 两个信号分别定标再相加后的抽取/插值等于它们各自抽取/插值后再定标和相加



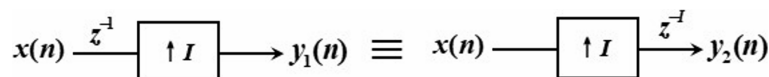
(2) 两个信号相乘以后的抽取等于它们各自抽取后再相乘



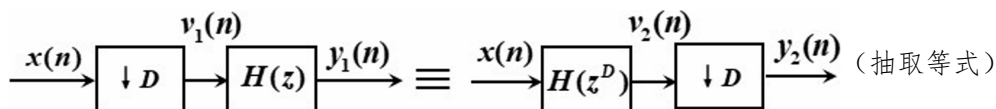
(3) 信号延迟 D 个样本后作 D 倍抽取和先作 D 倍抽取再延迟一个样本是等效的



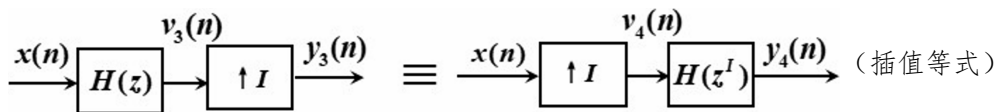
(4) 信号经过单位延迟后作 I 倍插值和先作 I 倍插值再延迟 I 个样本是等效的



(5) 将信号按 D 因子抽取后再经过滤波器 $H(z)$, 等价于将信号先经过滤波器 $H(z^D)$ 再按 D 因子抽取



(6) 将信号先经过滤波器 $H(z)$ 后再按 I 因子内插，等价于将信号按 I 因子内插后再经过滤波器 $H(z^I)$



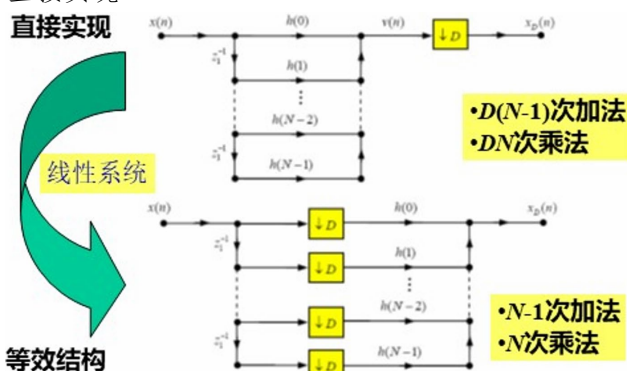
6. 多抽样率 FIR 系统的网络结构

目的：总是设法把乘法运算安排在低抽样率一侧，以使运算中乘法次数最少。

原则：由于是线性系统，抽取器和乘法器级联时可以交换作用顺序；

由于是移变系统，抽取器和延时器级联时不能交换作用顺序。

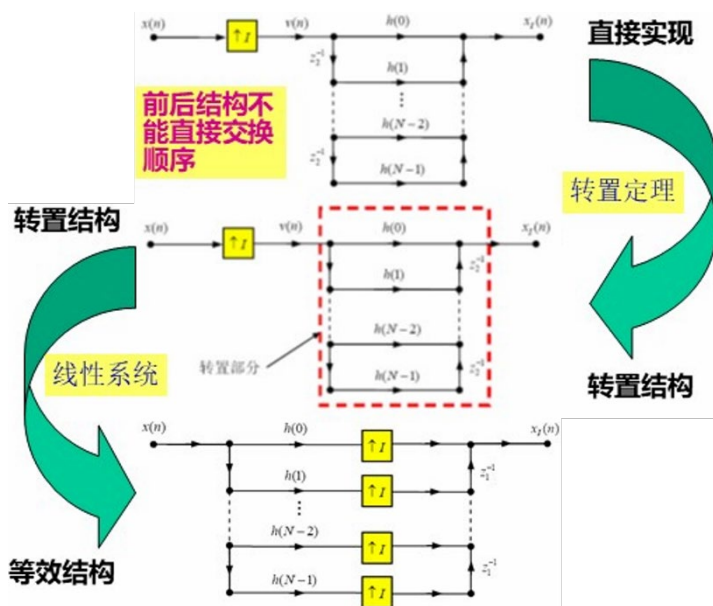
(1) 整数倍抽取系统的 FIR 直接实现



图中的结构虽然先抽取再进行滤波器系数的乘运算，但这不是把抗混叠滤波器放到抽取之后，而是与原来的滤波作用等效。

可以通过滤波器的延时单元与抽取器的先后顺序来判断滤波器和抽取作用的先后顺序，与乘法运算的顺序无关。如果滤波器的延时单元在抽取器之前，说明先滤波再抽取；反之，则是先抽取再滤波，此时失去了抗混叠滤波器的作用，系统没有起到等效的作用，因此是绝对不允许的。（不可以把抽取器进一步提取到延时器之前）

(2) 整数倍插值系统的 FIR 直接实现



【例题】

1. 证明抽取等式



$$Y_1(z) = X(z)|_{\downarrow M} H(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l\right) H(z)$$

$$Y_2(z) = [X(z)H(z^M)]|_{\downarrow M} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l\right) H\left(\left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l\right)^M\right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l\right) H(z)$$

故 $Y_1(z) = Y_2(z)$ ，抽取等式证毕。

2. 证明插值等式



$$Y_3(z) = X(z)|_{\uparrow L} H(z^L) = X(z^L)H(z^L)$$

$$Y_4(z) = [X(z)H(z)]|_{\uparrow L} = X(z^L)H(z^L)$$

故 $Y_3(z) = Y_4(z)$ ，插值等式证毕。

3. 抽取系统的时变性证明

原输入 $x(n)$ 的输出为：

$$y(n) = x(Mn)$$

时移输入 $x(n-k)$ 的输出为：

$$y'(n) = x(Mn - k)$$

原输出的时移 $y(n-k)$ 为：

$$y(n-k) = x(M(n-k)) = x(Mn - Mk)$$

对比 $y'(n)$ 和 $y(n-k)$ ，可知抽取系统是时变的。

4. 插值系统的时变性证明

原输入 $x(n)$ 的输出为：

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right), & \text{当 } n \text{ 是 } L \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

时移输入 $x(n-k)$ 的输出为：

$$y'(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L} - k\right), & \text{当 } n \text{ 是 } L \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

原输出的时移 $y(n-k)$ 为：

$$y(n-k) = \begin{cases} x\left(\frac{n-k}{L}\right), & \text{当 } n \text{ 是 } L \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对比 $y'(n)$ 和 $y(n-k)$ ，可知插值系统是时变的。

2.2. 多相分解*

1. 多相分解：将数字滤波器的转移函数 $H(z)$ 分解成若干个不同相位的组。一个序列的多相分解表示为 M 个子序列的叠加，每个子序列由该序列每隔 M 个样点取一个样值组成。

I 型多相分解： $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} H_i(z^M)$

II 型多相分解： $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-(M-1-i)} G_i(z^M)$

其中， $G_i(z) = H_{M-1-i}(z), i = 0, 1, \dots, M-1$

$H(z)$ 称为原型滤波器， $H_i(z^M)$ 或 $G_i(z^M)$ 称为多相分支网络（简称多相网络）或子滤波器。

2. FIR 滤波器的多相分解

当 $H(z)$ 为 FIR 滤波器时，有 $H_i(z) = h(i) + h(i+M)z^{-1} + h(i+2M)z^{-2} + \dots$

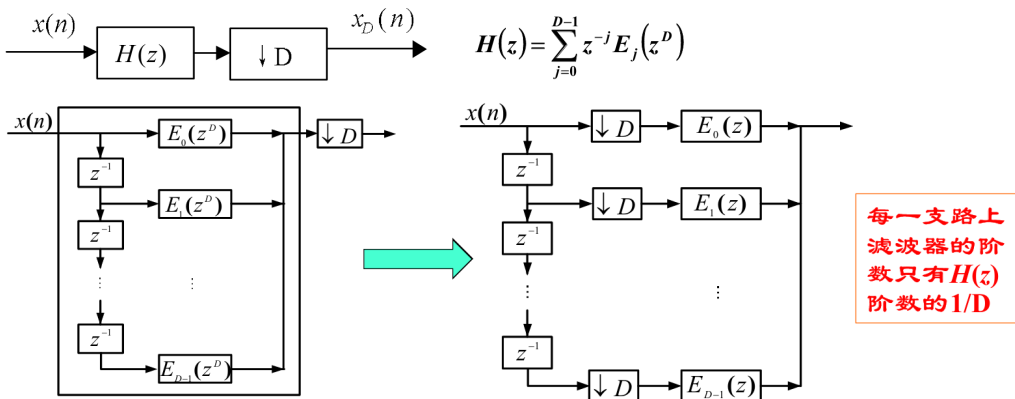
即第 i 个多相子滤波器的单位脉冲响应为 $h_i(n) = h(i + nM), i = 0, 1, \dots, M-1$

(1) 抽取的多相 FIR 滤波器结构

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl)z^{-Dl} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl+1)z^{-(Dl+1)} + \dots + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl+D-1)z^{-(Dl+D-1)} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl)z^{-Dl} + z^{-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl+1)z^{-Dl} + \dots + z^{-(D-1)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl+D-1)z^{-Dl} \end{aligned}$$

令 $E_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Dl+j)z^{-l}, j = 0, 1, \dots, D-1$ ，则

$$H(z) = \sum_{j=0}^{D-1} z^{-j} E_j(z^D) \quad (\text{I 型多相分解})$$



- 降低了对处理速度的要求，提高了实时处理能力
- 减小运算误差的积累，提高运算精度，降低对字长的要求

(2) 插值的多相 FIR 滤波器结构

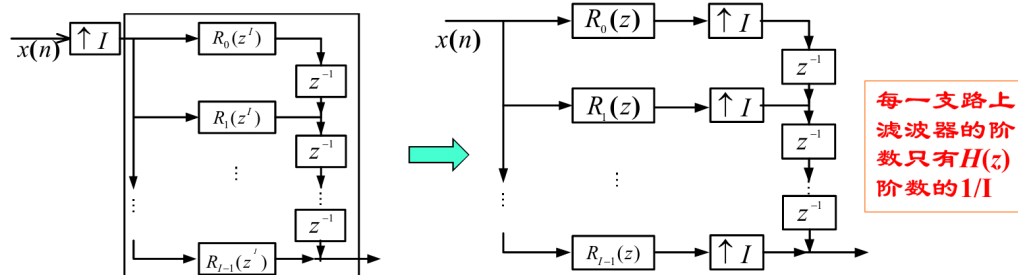
$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il)z^{-Il} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il+1)z^{-(Il+1)} + \dots + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il+I-1)z^{-(Il+I-1)} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il)z^{-Il} + z^{-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il+1)z^{-Il} + \dots + z^{-(I-1)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il+I-1)z^{-Il} \end{aligned}$$

令 $E_j(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(Il+j)z^{-l}, j = 0, 1, \dots, I-1$ ，则

$$H(z) = \sum_{j=0}^{I-1} z^{-j} E_j(z^I) \quad (\text{I 型多相分解}) = \sum_{j=0}^{I-1} z^{-(I-1-j)} R_j(z^I) \quad (\text{II 型多相分解})$$

其中, $R_j(z) = E_{I-1-j}(z)$

$$x(n) \rightarrow \uparrow I \rightarrow H(z) \rightarrow y(n) \quad H(z) = \sum_{j=0}^{I-1} z^{-(I-1-j)} R_j(z^I)$$



- 降低了对处理速度的要求, 提高了实时处理能力
- 减小运算误差的积累, 提高运算精度, 降低对字长的要求

3. IIR 滤波器的多相分解

当 $H(z)$ 为 IIR 滤波器时, 设 $H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^K (z - z_k)}{\prod_{k=1}^K (z - p_k)}$

则利用恒等式 $\frac{1}{z - p_k} = \frac{z^{M-1} + p_k z^{M-2} + \dots + p_k^{M-1}}{z^M - p_k^M}$

则有 $H_i(z^M) = \frac{\sum_{k=0}^{K \text{ 或 } K-1} a_{kM+i} (z^{-M})^k}{1 + \sum_{k=1}^K b_k (z^{-M})^k}, i = 0, 1, \dots, M$

【例题】

1. 给定一个长度为 20 的序列 $h(n)$, $M = 4$, 请对其进行多相分解形成 M 个子序列的叠加。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{19} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + h(3) z^{-3} + \dots \\ &= h(0) z^0 + h(4) z^{-4} + h(8) z^{-8} + h(12) z^{-12} + h(16) z^{-16} \\ &\quad + h(1) z^{-1} + h(5) z^{-5} + h(9) z^{-9} + h(13) z^{-13} + h(17) z^{-17} \\ &\quad + h(2) z^{-2} + h(6) z^{-6} + h(10) z^{-10} + h(14) z^{-14} + h(18) z^{-18} \\ &\quad + h(3) z^{-3} + h(7) z^{-7} + h(11) z^{-11} + h(15) z^{-15} + h(19) z^{-19} \\ &= z^0 [h(0) + h(4) z^{-4} + h(8) z^{-8} + h(12) z^{-12} + h(16) z^{-16}] \\ &\quad + z^{-1} [h(1) + h(5) z^{-4} + h(9) z^{-8} + h(13) z^{-12} + h(17) z^{-16}] \\ &\quad + z^{-2} [h(2) + h(6) z^{-4} + h(10) z^{-8} + h(14) z^{-12} + h(18) z^{-16}] \\ &\quad + z^{-3} [h(3) + h(7) z^{-4} + h(11) z^{-8} + h(15) z^{-12} + h(19) z^{-16}] \\ &= \sum_{i=0}^3 z^{-i} \sum_{n=0}^4 h(4n+i) z^{-4n} = \sum_{i=0}^3 z^{-i} H_i(z^4) \end{aligned}$$

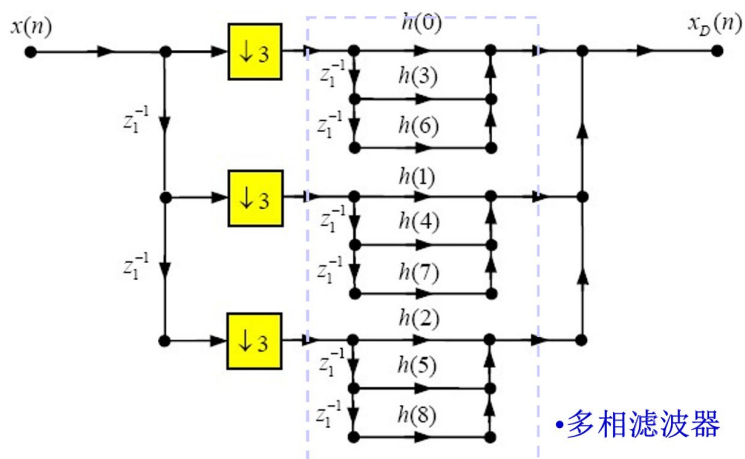
2. 一个 FIR 滤波器的 $h(n)$ 长度为 9, 现将其用作 3 倍抽取系统中的抗混叠预滤波器。请用多相结构实现这个抽取系统, 并画出所对应的系统结构图。

$$H(z) = \sum_{n=0}^8 h(n) z^{-n} = \sum_{l=0}^2 h(3l) z^{-3l} + \sum_{l=0}^2 h(3l+1) z^{-(3l+1)} + \sum_{l=0}^2 h(3l+2) z^{-(3l+2)}$$

$$= \sum_{l=0}^2 h(3l)z^{-3l} + z^{-1} \sum_{l=0}^2 h(3l+1)z^{-3l} + z^{-2} \sum_{l=0}^2 h(3l+2)z^{-3l}$$

令 $E_j(z) = \sum_{l=0}^2 h(3l+j)z^{-l}$, $j = 0, 1, 2$, 则

$$H(z) = \sum_{j=0}^2 z^{-j} E_j(z^3)$$



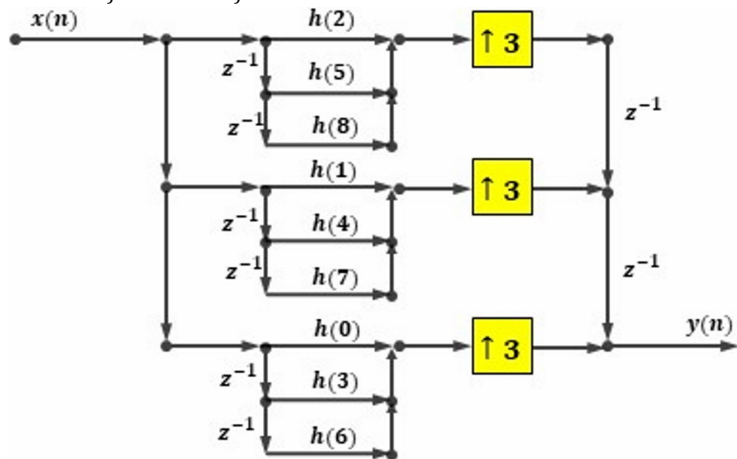
3. 一个 FIR 滤波器的 $h(n)$ 长度为 9, 现将其用作 3 倍插值系统中的抗混叠预滤波器。请用多相结构实现这个抽取系统, 并画出所对应的系统结构图。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^8 h(n)z^{-n} = \sum_{l=0}^2 h(3l)z^{-3l} + \sum_{l=0}^2 h(3l+1)z^{-(3l+1)} + \sum_{l=0}^2 h(3l+2)z^{-(3l+2)} \\ &= \sum_{l=0}^2 h(3l)z^{-3l} + z^{-1} \sum_{l=0}^2 h(3l+1)z^{-3l} + z^{-2} \sum_{l=0}^2 h(3l+2)z^{-3l} \end{aligned}$$

令 $E_j(z) = \sum_{l=0}^2 h(3l+j)z^{-l}$, $j = 0, 1, 2$, 则

$$H(z) = \sum_{j=0}^2 z^{-j} E_j(z^3) = \sum_{j=0}^2 z^{-(2-j)} R_j(z^3)$$

其中, $R_j(z) = E_{2-j}(z)$



4. 已知一 IIR 系统的 $H(z) = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$, 试求 $M=2$ 时的多项分量。

$$\text{由于 } H(z) = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{(1+z^{-1})(1+\alpha z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1+\alpha z^{-1})} = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1+\alpha z^{-2}+z^{-1}(1+\alpha)}{1-\alpha^2 z^{-2}}$$

$$\text{故 } H_0(z) = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1+\alpha z^{-1}}{1-\alpha^2 z^{-1}}, \quad H_1(z) = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha^2 z^{-1}}$$

于是 $H(z) = \sum_{i=0}^1 z^{-i} H_i(z^2) = H_0(z^2) + z^{-1} H_1(z^2)$ (I 型多相分解: $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} H_i(z^M)$)

2.3. 濾波器組

1. 实现子带分解的基本工具是滤波器组

用一组滤波器实现对信号频率分量的分解，然后根据需要对其各个“子带”信号进行多种多样的处理（如编码）或传输，在另一端再用一组滤波器将处理后的“子带”信号相综合。

“子带处理”一般包括:

- 分析滤波器组 (analysis bank): 把信号分解成频率信道/子带
作用: ①分析滤波器: 将原信号分成 M 个子带信号;

作用：①分析滤波器：将原信号分成 M 个子带信号；

②抽取滤波器：作为抽取前的抗混叠滤波器。

理想（但不现实）频率响应=理想带通滤波器

- 信道/子带处理 (channel/subbandprocessing)
- 综合滤波器组 (synthesis bank): 进行信号重建 (Reconstruction)

作用：①综合滤波器：信号重建；

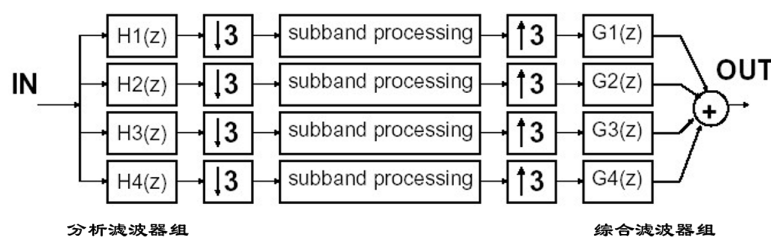
②内插滤波器：作为插值后的抗镜像滤波器。

频率响应：匹配分析滤波器的频率响应，以便理想重建原信号。

- 多速率结构 (Multiratestructure): 下抽样器/上抽样器 (down-sampling/up-sampling)

下抽样器/抽取器 (downsamplers): 子带抽取速率下降 N 倍

上抽样器/扩展器 (upsamplers): 通过取样率上升 N 倍恢复原来的全带取样率



2. 多相分解应用 1: 高效实现带通滤波器组

可由多相网络与 DFT 处理器的级联来实现带通滤波器组。

3. 多相分解应用 2: 高效实现取样速率变换

2.4. 小波变换

1. 非确定性信号及其分类

- 平稳信号 (stationary signal): 分布参数或者分布律随时间不发生变化的信号, 即信号的统计特性 (期望与方差) 不随时间变化的信号。
- 非平稳信号 (non-stationary signal): 信号的统计特性随着时间变化的信号。

2. 傅里叶分析的局限性

傅里叶分析是全局变换，只能获得信号的整体频谱特性、不能获得信号的局部频谱特性，缺乏时间和频率的定位功能。

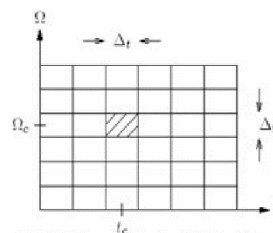
除确定性信号之外，傅里叶变换只适用于统计量不随时间变化的平稳信号，对于非平稳随机信号（时变信号）有局限性。（傅里叶变换适用于直接分析确定信号或间接分析平稳随机信号）

信号的局部性能需要使用时域和频域二维联合表示，才能得到精确的描述。

3. 非平稳随机信号采用时频分析方法，如 Gabor 变换、小波变换。

4. Gabor 变换（窗函数为高斯函数的短时傅里叶变换（STFT））

- 基本思想：用一个具有适当宽度的窗函数从信号中取出一段来，将时间局域化，对窗函数截取的短时信号做傅里叶分析，得到信号在这段时间内局部的频谱。如果再让窗函数沿时间轴移动，便能够对信号逐段进行频谱分析，获得一定的时间分辨率。



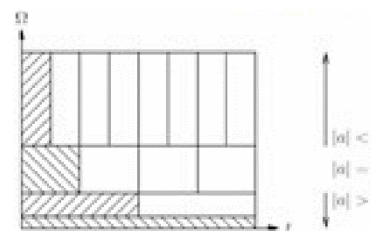
- 优点：研究信号的局部特性
- 缺点：局部分辨率都一样
- 原因：使用单一的窗口（基函数），即基函数不变。Gabor 变换相当于带宽恒定的滤波器组。
- 局限：对不同的频率使用相同宽度的窗，不能按照不同的频率调整窗口的宽度。

5. 小波变换（wavelet transform, WT）

为克服 Gabor 变换的缺点，我们希望构造“可变”的基函数，即

- 构造：持续时间很短的高频基函数（右图靠上）；
持续时间很长的低频基函数（右图靠下）。
- 做到：在高频区，频率窗口很宽，而时间窗口很窄；
在低频区，频率窗口很窄，而时间窗口很宽。

小波变换相当于一个带宽变换但相对带宽恒定的滤波器组。



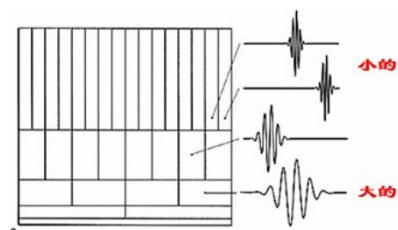
6. 小波基函数

在小波变换中，小波基函数由母函数伸缩平移得到：

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

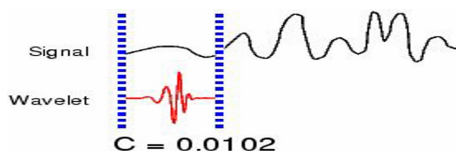
其中， $h(t)$ 为小波母函数，简称母函数； $h_{a,b}(t)$ 为小波基函数，简称基函数； a 为标度因子（scaling factor），起着类似于频率的作用。易见，小波基函数与标度因子 a 有着密切关系：

- 对于小的 a ，基函数是母函数的缩小型，对应一高频函数，用于观察信号较小的细节；
- 对于大的 a ，基函数是母函数的展宽型，对应一低频函数，用于观察信号较粗的内容。

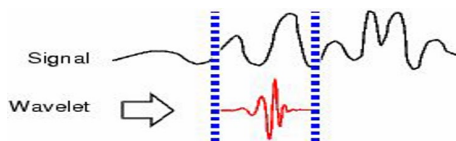


7. 小波运算的基本步骤

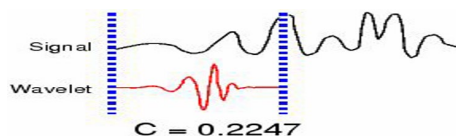
- 选择一个 小波函数，并将这个小波与要分析的信号起始点对齐。
- 计算在这一时刻要分析的信号与小波函数的逼近程度，即计算小波变换系数 C （信号与小波函数的内积）， C 越大，就意味着此刻信号与所选择的小波函数波形越相近，如图所示。



- (3) 将小波函数沿时间轴向右移动一个单位时间，然后重复步骤(1)、(2)求出此时的小波变换系数 C ，直到覆盖完整信号长度，如图所示。



- (4) 将所选择的小波函数尺度伸缩一个单位，然后重复步骤(1)、(2)、(3)，如图所示。



- (5) 对所有的尺度伸缩重复步骤(1)、(2)、(3)、(4)。

8. 多分辨率分析——信号的近似分解

在多分辨率分析中，Mallat 算法引入

- 尺度函数（小波“父”函数）：

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\varphi(2t-n)$$

- 小波函数（小波“母”函数）：

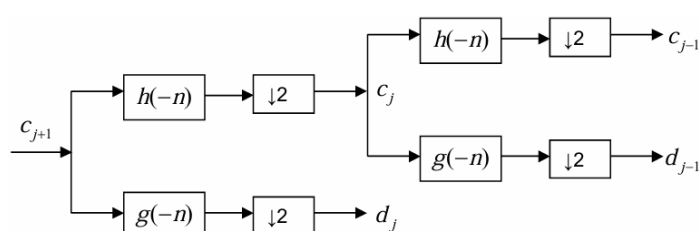
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\varphi(2t-n)$$

其中， $g(n) = (-1)^n h(1-n)$ 或 $g(n) = (-1)^n h(N-1-n)$

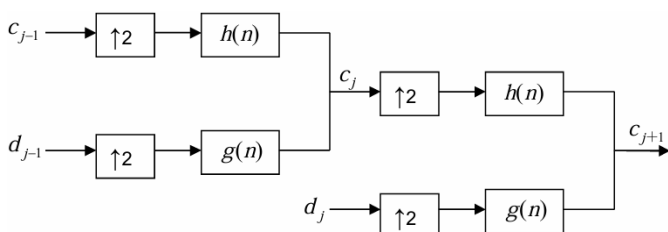
尺度函数的频谱完全由低通滤波器 $h(n)$ 决定，小波函数的频谱完全由高通滤波器 $g(n)$ 决定。

9. 多分辨率分析——Mallat 算法的两级分解/合成

分析/分解（分析滤波器组）：

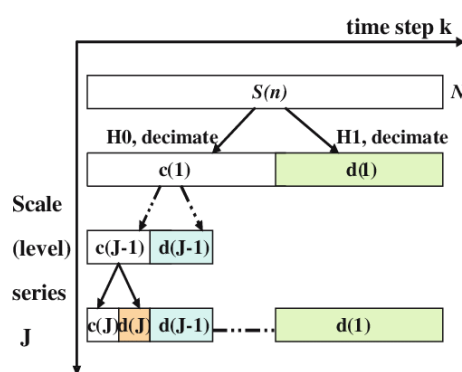


综合/合成（综合滤波器组）：



其中， c_j 为尺度系数（粗糙像）， d_j 为小波系数（细节）

助记： $j-1$ 级的粗糙像+ $j-1$ 级的细节= j 级的粗糙像



第3章 随机信号的功率谱估计

3.1. 功率谱估计

1. 为什么需要功率谱估计

平稳随机序列是非周期的且能量无限，无法直接用傅里叶变换进行分析。而平稳随机序列的自相关函数是一个确定的序列，且随时间差 m 的增大趋于均值，如果该随机过程的均值为零，则自相关函数是收敛的，可用傅里叶变换求其功率谱。

2. 功率谱估计

- 概念：利用给定的一组样本数据估计一个平稳随机信号的功率谱密度称为功率谱估计。（功率谱估计的对象：平稳随机信号的一组观测数据）
- 作用：功率谱密度函数描述随机过程的功率随频率的分布，起着类似于频谱的作用。
- 应用：遍及通信、噪声监测、信号检测与估计、模式识别、振动分析等领域。
- 出发点：观测数据
- 理论基础：（维纳—辛钦定理）广义平稳随机过程的功率谱是自相关函数的傅里叶变换，它取决于无限多个自相关函数值。（平稳随机信号的傅里叶变换不存在）

3. 功率谱估计质量的评价

- 客观度量：
谱分辨率：估计谱对真实谱中两个靠的很近的谱峰的分辨能力。
- 统计度量：
偏差 (bias): $b[\hat{a}] = E\{a - \hat{a}\} = a - E\{\hat{a}\}$ ，表示估计值与实际值的接近程度。
方差 (variance): $var[\hat{a}] = E\{[a - E\{\hat{a}\}]^2\}$ ，表示估计值相对估计均值的分散程度。
均方误差: $D[\hat{a}] = E\{(a - \hat{a})^2\} = var[\hat{a}] + (E\{\hat{a}\})^2$ ，表示估计值与实际值之间的平均平方差异。如果随观测次数的增大，均方误差趋近于零，称该估计为一致估计。（均方误差=偏差²+方差+噪声方差）
对统计特性的分析只适用于长数据记录，所以利用统计度量对不同的谱估计方法进行比较是不妥当的，只能用来对某种谱估计方法进行描述，并且一般只用来描述经典谱估计方法，因为现代谱估计方法往往用于短数据记录的情况。

3.2. 经典谱估计

1. 经典谱估计

- 基本思想：以傅里叶变换为基础，辅以加窗、平均、平滑等预处理或后处理。
- 优点：简单易行、计算效率高。
- 缺点：分辨率低、有旁瓣效应，数据短时缺点更突出。（仅利用了 N 个有限的观测数据作自相关估计，隐含了在已知数据之外，自相关函数为0的假设）
- 适用范围：长数据
- 方法分类：周期图法、自相关法（B-T法）、改进方法（加窗平滑方法、Welch平均方法等）

2. 周期图法和自相关法（B-T法）

- 周期图法：先计算 N 个数据的 Fourier 变换（即频谱），然后取频谱和其共轭的乘积，得功率谱。
- 自相关法（B-T法）：先根据 N 个样本数据估计样本自相关函数，然后计算样本自相关函数的 Fourier 变

换，得功率谱。

- 周期图法中，有 1 次截断过程；自相关法中，有 2 次截断过程。

3. 经典谱估计方法的估计质量：

为获取有限长数据，两种方法中都在无限长数据上加了矩形窗截断。对应频域，真实谱与矩形窗谱进行卷积。为使估计谱逼近真实，窗谱幅度函数应逼近 δ 函数，然而矩形窗谱：

- 主瓣不是无限窄，降低了谱分辨率，主瓣越宽，谱分辨率越低。
- 存在旁瓣，导致主瓣能量泄露到旁瓣使得谱估计方差增大，与旁瓣卷积后的功率谱完全属于干扰。

周期图法与自相关法是功率谱的有偏估计；随着 N 的增大，两种方法估计的方差趋向于一个非零常数，故周期图法与自相关法估计不是功率谱的一致估计，主要问题是方差大。（存在旁瓣 \Rightarrow 方差不为零 \Rightarrow 均方误差不为零 \Rightarrow 不是一致估计）

（非参数化的谱估计）都存在致命缺点：分辨率（区分 2 个邻近谱峰的能力）低，不能适应高分辨率谱估计的需要。为了克服上述缺点，人们提出了平均、加窗平滑等方法，在一定程度上改善了经典谱估计的性能，但始终不能解决频谱分辨率和谱估计稳定性之间的矛盾。

3.3. 现代谱估计——参数模型法*

1. 现代谱估计

参数化谱估计使用参数化的模型，可以提供比周期图高得多的频率分辨率，故常称参数化谱估计为高分辨率估计或现代谱估计方法。

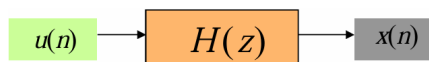
由于以随机过程或随机信号参数模型为基础，故称为参数模型法或参数法。

参数模型法谱估计：将要分析的随机信号模型化为某系统在白噪声激励下的输出，通过构造合适的系统模型，将要分析的随机信号用模型的参数来表示。

2. 参数模型法的基本步骤

- (1) 选择一个合适的模型；
- (2) 用已观测到的数据估计模型参数；
- (3) 将模型参数代入功率谱估计的计算公式得到功率谱估计值。

3. 信号模型的基本考虑



- 思路：
假设所研究的过程 $x(n)$ 是由 $u(n)$ 激励一个线性系统 $H(z)$ 所产生的输出。
①由已知的 $x(n)$ 或其自相关函数 $R_x(n)$ 来估计 $H(z)$ 的参数；②由 $H(z)$ 的参数来估计 $x(n)$ 的功率谱。
- 优点：
对一个研究对象建模（是现代工程常用的方法），使所研究的对象有一个简洁的数学表达式；
通过对模型的研究，使我们对研究对象有更深入的了解。
- 约束：
 $H(z)$ 是因果稳定时不变系统，单位脉冲响应是确定性的；
 $x(n)$ 可为平稳随机序列，亦可为确定性时间序列，取决于 $u(n)$ 。

4. 白噪声激励线性模型

输入输出互相关定理：输出自功率谱等于输入自功率谱与系统能量谱的乘积。

$$S_x(e^{j\omega}) = S_u(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2$$

若 $u(n)$ 是一个方差为 σ^2 的白噪声，则 $x(n)$ 的功率谱为

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

只要能建立合适的信号模型，并且估计出模型的参数，就可以分析随机信号的功率谱。

5. 三种基本的信号模型

- AR 模型（自回归模型，全极点模型，功率谱具有尖锐的峰而无深谷）

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}$$

- MA 模型（滑动平均模型，全零点模型，功率谱具有深谷而无尖锐的峰）

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^{-k}$$

- ARMA 模型（自回归滑动平均模型，零极点模型，功率谱既有峰点又有谷点）

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}$$

- 关系：

- (1) 如果功率谱是纯连续的，任何 ARMA 过程或 AR 过程都可以用无限阶的唯一的 MA 模型表示。
- (2) 任何 ARMA 过程或 MA 过程都可以用无限阶的 AR 过程表示。
- (3) 即使在建模时选择了不正确的模型，但只要模型阶次足够高，仍可得一个合理的近似表示。

- 补充：

参数模型法谱估计的信号模型不同于一般 FIR 系统和 IIR 系统，主要区别在于：信号模型激励源为（白）噪声，其输出为（平稳）随机序列。信号模型要具有因果稳定性、线性时不变性、可逆性等性质。

在三种模型中，AR 模型是实际中应用最广泛的一种模型，因为①AR 模型的参数可借助解线性方程获得，而其他两种的参数涉及到解非线性方程；②三种模型在一定条件下可以相互转换（MA 模型和 ARMA 模型都可以用高阶的 AR 模型近似）；③实际中很多物理模型可以直接或经变换后采用该模型。

6. AR 模型法

- 基本公式：

基于 AR 模型的谱估计由下式计算：

$$S_{xx}(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A(z^{-1})} \quad S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma^2}{|A(e^{j\omega})|^2} = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}|^2}$$

故要求知道：模型的阶数 p 和 p 个参数 a_k 以及激励源方差 σ^2 。

- 基本思路：

把这些参数与已知或估计的自相关函数联系起来，构成著名的 Yule-Walker 方程，迭代求解该方程得到新的参数。

- 阶的确定：

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}}$$

如果阶选得太低：AR 模型的极点少，AR 谱的谱峰就少，导致平滑的谱估计值，使真实谱中的谱峰难以分辨，谱分辨率下降。

如果阶选得太高：虽然可以提高谱估计的分辨率，但同时会产生虚假的谱峰（伪峰）或谱的细节。

7. Yule-Walker（尤勒—沃克）方程求解 AR 模型参数

通过对 $S_{xx}(z)$ 求 z 反变换来获得 Yule-Walker 方程：

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) + \sigma^2, & m = 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k), & m > 0 \end{cases}$$

为求 AR 模型参数，应先由第二式选择 $m > 0$ 的 p 个方程求出 p 个模型参数，然后代入第一个方程求出 σ^2 。设已知自相关函数的 $p+1$ 个值为 $\{r(0), r(1), \dots, r(p)\}$ ，则方程可表示为

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵不但是对称的，而且沿着和主对角线平行的任一条对角线上的元素都相等，这样的矩阵称为 Toeplitz 矩阵。

Yule-Walker 方程的快速解法是利用了实数据的自相关矩阵的以下性质：对称阵、托布列兹阵、非负定阵。

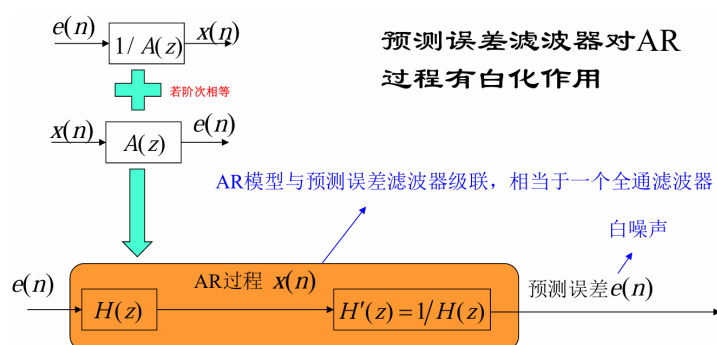
8. AR 模型法与预测滤波法

AR 模型法与线性预测滤波法等价。

AR 模型和预测误差滤波器互为逆滤波器。（AR 模型的逆滤波器是预测误差滤波器）

预测误差滤波器（白化滤波器）对 AR 过程有白化（去相关）作用。

AR 模型与预测误差滤波器级联，相当于一个全通滤波器。



9. 最大熵谱估计（MESE）法与 AR 模型法

经典谱估计中隐含的不合理假设：数据窗以外的序列值为 0。

Burg 提出：外推给定的有限长自相关序列，使之变成无限长序列，由维纳—辛钦定理计算功率谱

$$\{R_x(0), R_x(1), \dots, R_x(p)\} \Rightarrow \{R_x(0), R_x(1), \dots, R_x(p), R_x(p+1), R_x(p+2), \dots\}$$

要确保外推后的自相关矩阵是非负定的。一般具有无限多种可能的外推方法。

最大熵谱估计法与 AR 模型法或预测滤波法等价。

AR 谱估计隐含着自相关函数的外推，故分辨率高。

Burg 证明：如果外推后的自相关序列所对应的时间序列具有最大熵，那么这种外推方法才是最合理的。

这意味着：该时间序列将是最随机或最不可预测的；该时间序列对应的谱是最平坦的或最白的。

经这样外推获得的自相关序列求出的谱为最大熵谱。

AR 模型法能够做到满足这个要求，故为最大熵谱估计法。

MESE 的核心是求解如下方程：

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

该方程是联合 AR 模型法和预测滤波法得出的。系数矩阵是一个 Toeplitz 矩阵，利用 Toeplitz 矩阵的性质可简化方程求解。两种算法：Levinson 算法、Burg 算法。

10. Levinson 算法

Levinson-Durbin 快速递推法是解尤勒-沃克方程的快速有效的算法，这种算法利用方程组系数矩阵（自相关矩阵）所具有的一系列好的性质，使运算量大大减少。（运算量是阶数 p 的二次方数量级）

Levinson 关系式： $a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} + a_i^{(i)} a_{i-j}^{(i-1)} \quad (j = 1, \dots, i-1)$

- 优点：计算简单
- 缺点：需根据有限观测数据估计自相关序列 $r(n)$

短数据序列时，自相关估计值误差很大，引起预测滤波参数误差，导致“谱峰飘移”和“谱线分裂”（即出现虚假谱线）。

长数据序列时，自相关估计值虽精确，但计算量大。

11. 基于矩阵特征分解的谱估计

- 自相关矩阵的特征分解：
利用相关矩阵的特征值，可将信息空间分成两个子空间：信号子空间和噪声子空间。
结论：可在信号子空间或噪声子空间进行谱估计和频率估计。
应用：借助噪声子空间噪声特性，从信号子空间估计有用信号。
- 基于子空间的频率估计与信号估计：

子空间 $\begin{cases} \text{噪声子空间} \begin{cases} \text{PHD 方法 (Pisarenko Harmonic Decomposition, Pisarenko 谐波分解)} \\ \text{MUSIC 方法 (Multiple Signal Classification, 多信号分类)} \end{cases} \\ \text{信号子空间: ESPRIT 方法 (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques)} \end{cases}$

【例题】

1. 已知某序列满足 AR(1) 模型 $H(z) = \frac{1}{1-0.2z^{-1}}$ ，白噪声过程的均值为 0，方差 $\sigma_w^2 = 1$ ，求 $x(n)$ 的自相关序列 $R_x(m)$ 的表达式和功率谱密度 $S_x(e^{j\omega})$ 。

由信号模型的传递函数 $H(z) = \frac{1}{1-0.2z^{-1}}$ 得时域方程 $x(n) = 0.2x(n-1) + w(n)$

根据自相关函数的定义有

$$\begin{aligned} R_x(m) &= E[x(n)x(n+m)] = E\{x(n)[0.2x(n+m-1) + w(n+m)]\} \\ &= E[0.2x(n)x(n+m-1)] + E[x(n)w(n+m)] = 0.2R_x(m-1) + E[x(n)w(n+m)] \end{aligned}$$

当 $m > 0$ 时， $w(n+m)$ 表示 n 时刻之后的输入。对因果系统 $H(z)$ ， n 时刻的输出 $x(n)$ 与 n 时刻之后的输入 $w(n+m)$ 无关，所以有 $E[x(n)w(n+m)] = 0$ 。此时， $R_x(m) = 0.2R_x(m-1), m > 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{当 } m = 0 \text{ 时, } R_x(0) &= E[x(n)x(n)] = E[x^2(n)] = E\{[0.2x(n-1) + w(n)]^2\} \\ &= E[0.2^2 x^2(n-1) + w^2(n) + 0.4x(n-1)w(n)] \\ &= 0.2^2 E[x^2(n-1)] + E[w^2(n)] + 0.4E[x(n-1)w(n)] = 0.2^2 R_x(0) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_x(0) = 0.2^2 R_x(0) + 1 \Rightarrow R_x(0) = \frac{25}{24}$$

$$\text{由于 } R_x(0) = \frac{25}{24}, R_x(1) = 0.2R_x(0) = 0.2 \times \frac{25}{24}, R_x(2) = 0.2R_x(1) = 0.2^2 \times \frac{25}{24}, \dots$$

$$\text{故有 } R_x(m) = 0.2^m \times \frac{25}{24}, m \geq 0$$

$$\text{将 } z = e^{j\omega} \text{ 代入 } H(z), \text{ 得 } H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}}$$

$$\text{故 } S_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \left| \frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}} \right|^2 = \frac{1}{(1-0.2e^{-j\omega})(1-0.2e^{j\omega})} = \frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}-0.2e^{j\omega}+0.04} = \frac{1}{1.04-0.4\cos\omega}$$

2. 已知 $x(n)$ 满足 AR(2) 模型 $H(z) = \frac{1}{1+0.3z^{-1}-0.4z^{-2}}$ 白噪声过程的均值为 0, 方差 $\sigma_w^2 = 1$, 求 $x(n)$ 的自相关序列 $R_x(0), R_x(1), R_x(2)$ 。

$$\text{当 } p = 2 \text{ 时, Yule-Walker 方程为 } \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{由信号模型的传递函数 } H(z) = \frac{1}{1+0.3z^{-1}-0.4z^{-2}} \text{ 得 } a_1 = 0.3, a_2 = -0.4$$

$$\text{故转化为求解方程组 } \begin{cases} R_x(0) + 0.3R_x(1) - 0.4R_x(2) = 1 \\ R_x(1) + 0.3R_x(0) - 0.4R_x(1) = 0 \\ R_x(2) + 0.3R_x(1) - 0.4R_x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x(0) + 0.3R_x(1) - 0.4R_x(2) = 1 \\ 0.3R_x(0) + 0.6R_x(1) = 0 \\ -0.4R_x(0) + 0.3R_x(1) + R_x(2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } R_x(0) = \frac{100}{63}, R_x(1) = -\frac{50}{63}, R_x(2) = \frac{55}{63}$$

3. 已知序列 $x(n)$ 满足 AR(2) 模型 $H(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$, 白噪声过程的均值为 0, 方差为 σ_w^2 , $x(n)$ 的自相关

$$\text{序列 } R_x(m) \text{ 的值为 } R_x(0) = \frac{100}{63}, R_x(1) = -\frac{50}{63}, R_x(2) = \frac{55}{63}, \text{ 求 } H(z) \text{ 的表达式和白噪声的方差。}$$

$$\text{当 } p = 2 \text{ 时, Yule-Walker 方程为 } \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{将 } R_x(0) = \frac{100}{63}, R_x(1) = -\frac{50}{63}, R_x(2) = \frac{55}{63} \text{ 代入, 得 } \begin{bmatrix} \frac{100}{63} & -\frac{50}{63} & \frac{55}{63} \\ -\frac{50}{63} & \frac{100}{63} & -\frac{50}{63} \\ \frac{55}{63} & -\frac{50}{63} & \frac{100}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{解得 } a_1 = 0.3, a_2 = -0.4, \sigma_w^2 = 1$$

4. 设白噪声信号 $w(n)$ 的方差为 1, 均值为 0, 让 $w(n)$ 激励一个 AR(2) 系统, 该系统的各阶反射系数 $a_1^{(1)} = 0.5, a_2^{(2)} = -0.4$, 求系统输出信号 $x(n)$ 的自相关序列 $R_x(0), R_x(1), R_x(2)$ 。

根据 Levinson 关系式 $a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} + a_i^{(i)} a_{i-j}^{(i-1)} (j = 1, \dots, i-1)$, 得:

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + a_2^{(2)} a_1^{(1)} = 0.5 + (-0.4) \times 0.5 = 0.3$$

再根据 $p = 2$ 时的 Yule-Walker 方程 $\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 得:

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \\ -0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $R_x(0) = \frac{100}{63}$, $R_x(1) = -\frac{50}{63}$, $R_x(2) = \frac{55}{63}$

3.4. 高阶谱估计*

1. 研究高阶谱的必要性

- 基于二阶统计量的模型参数估计方法的缺陷

二阶统计量：时域为相关函数，频域为功率谱。

前述模型参数估计方法中，估计得到的模型参数仅与信号的自相关函数或功率谱包络相匹配；其功率谱不含信号的相位特性，亦称盲相。这种模型只适合于高斯随机信号，因为高斯信号仅用二阶统计量（均值和方差）就能加以描述。严格来说，自相关函数和功率谱只能描述一个广义的平稳高斯过程。

对于非高斯信号的模型参数，如仅仅考虑与自相关函数匹配，就不可能充分获取含在数据中的信息。若信号不仅是非高斯的，而且是非最小相位的，采用基于自相关函数的估计方法所得到的模型参数，就不能反映原信号的非最小相位特点。当测量噪声较大，尤其当测量噪声有色时，基于自相关函数的估计方法所得到的模型参数有较大的估计误差。

- 解决方法：

从观测数据中提取相位信息，信号分析必须具有抗有色噪声干扰的能力。因此，必须用高阶谱（高阶统计量）来分析信号。（相关函数（二阶）刻画信号的粗糙像，高阶统计量刻画信号的细节。）

2. 高阶统计量

- 特征函数

随机变量 x 的特征函数定义为

$$\varphi(v) = E\{e^{jvx}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jvx} dx \text{ 或 } \varphi(s) = E\{e^{sx}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{sx} dx$$

其中 $f(x)$ 是随机变量 x 的概率密度函数。

- 高阶矩

对 $\varphi(s)$ 求 k 阶导数，得 $\varphi^k(s) = E\{x^k e^{sx}\} = \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k}$

则随机变量 x 的 k 阶矩（即 k 阶原点矩）定义为

$$m_k = E\{x^k\} = \varphi^k(0) = \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \Big|_{s=0}$$

即特征函数的 k 阶导数在原点的值。

由于 k 阶矩由 $\varphi(s)$ 生成，故特征函数 $\varphi(s)$ 为随机变量 x 的矩生成函数（矩母函数），又称为第一特征函数。

- 累积量生成函数

$\psi(v) = \ln \varphi(v)$ 或 $\psi(s) = \ln \varphi(s)$ 称为累积量生成函数（第二特征函数或累积量母函数）。

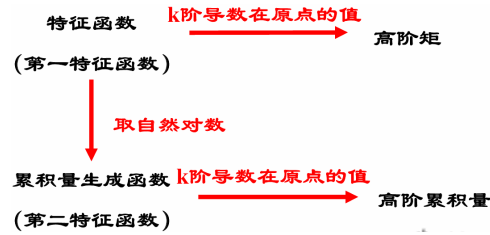
- 高阶累积量

随机变量 x 的 k 阶累积量定义为

$$c_k = \frac{d^k \psi(s)}{ds^k} \Big|_{s=0}$$

即累积量生成函数的 k 阶导数在原点的值。

- 关系



3. 高斯随机变量的高阶矩与累积量

高斯随机变量可用二阶矩完全描述。

实际上，零均值高斯随机变量的 k 阶矩（或零均值的 k 阶中心矩）为

$$m_k = E\{x^k\} = \begin{cases} [1, 3, 5, \dots, (k-1)]\sigma^k, & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

可见，奇数阶矩恒为 0，偶数阶矩可以用二阶矩 σ^2 表示，故其高阶矩仍然取决于二阶矩 σ^2 。

$$\text{高斯随机变量的各阶累积量为 } c_k = \begin{cases} m_1, & k = 1 \\ \sigma^2, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$$

可见，高斯随机变量只有一阶和二阶累积量；其二阶以上的累积量为零，它不提供新的信息。

4. 累积量的物理意义

可衡量任意随机变量偏离正态（高斯）分布的程度

- 一阶累积量——数学期望：描述了概率分布的中心
- 二阶累积量——方差：描述了概率分布的离散程度
- 三阶累积量——三阶矩：描述了概率分布的不对称程度

5. 高阶谱

- 含义：高阶谱（Higher-order spectrum），又称多谱（polyspectrum），是信号多个频率的能量谱。
- 定义：高阶谱定义为 k 阶累积量的 $k-1$ 维 DFT（高阶谱是高阶累积量函数的多维傅里叶变换）。通常将 $k \geq 3$ 的累积量谱称为高阶谱或多谱。

6. 常用的高阶谱

- 二阶谱即为功率谱（单谱），它是单个频率的谱。

$$p_x(\omega) = |X(\omega)|^2$$

- 三阶谱为双谱（bispectrum），即两个频率的谱。

$$\text{直接方法: } B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)}$$

$$\text{间接方法: } B_x(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(-\omega_1 - \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2)$$

- 四阶谱为三谱（trispectrum），即三个频率的谱。

$$\text{直接方法: } T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)}$$

$$\text{间接方法: } T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)H(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)H^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

7. 确定性序列的多谱

确定性序列 $\{h(1), \dots, h(k)\}$ 的 k 阶累积量

$$C_{k,h}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \sum_n h(n)h(n+\tau_1) \dots h(n+\tau_{k-1})$$

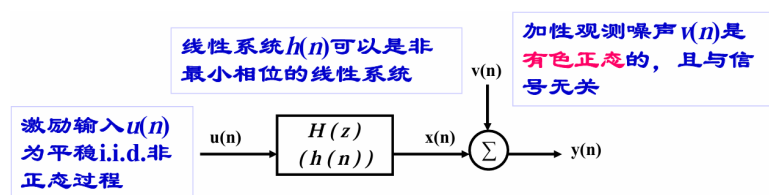
相应的 k 阶谱为

$$S_{k,h}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}) = H(\omega_1)H(\omega_2) \dots H(\omega_{k-1})H\left(-\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i\right) = H(\omega_1)H(\omega_2) \dots H(\omega_{k-1})H^*\left(\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i\right)$$

式中, $H(\omega) = \sum_n h(n)e^{-j\omega n}$

8. 高阶谱的应用——卷积性质

随机信号(如非正态平稳随机过程 $u(n)$)通过线性系统 $h(n)$ 后的累积量等于随机信号 $u(n)$ 的累积量与线性系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的累积量的卷积。



由于正态过程(有色正态噪声)的高阶累积量为零, 故计算高阶谱可以抵抗有色正态噪声的影响。因此, 高阶谱分析具有很好的抗有色正态噪声的能力。

【例题】

1. 设某信号模型的单位脉冲响应 $h(n)$ 是一个能量有限的确定性序列, 其傅里叶变换为

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = |H(\omega)|e^{j\varphi}$$

- (1) 求 $h(n)$ 的三阶累积量

$$C_{3,h}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)h(n+\tau_1)h(n+\tau_2)$$

- (2) 求 $h(n)$ 的双谱

$$S_{3,h}(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(-\omega_1 - \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2)$$

- (3) 求 $h(n)$ 的三谱

$$S_{4,h}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)H(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)H^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

第4章 自适应信号处理

4.1. 正交性原理与维纳滤波器*

1. 最优滤波器

滤波器就是信号抽取器, 从被噪声污染的信号中抽取出原来的信号。

目标: 使滤波器输出有用信号成分尽可能强; 抑制信号带外噪声, 使滤波器输出噪声成分尽可能小, 减小噪声对信号判决的影响。

信号的抽取应该满足某种优化准则。连续时间的滤波器有两种最优设计准则:

- 使滤波器的输出达到最大的信噪比，称为匹配滤波器
- 使输出滤波器的均方估计误差最小，称为 Wiener（维纳）滤波器

2. 正交性原理

正交性原理：使得均方误差代价函数最小时的（即 MMSE 准则下）输出误差与输入向量正交。

正交性原理引理：当滤波器工作在最优条件时，输出误差与输出向量也正交。

正交性原理的几何解释：最优滤波器的输出误差与输入向量正交，由于滤波器的输出由输入子空间张成，则输出误差与输出向量也正交。

3. 维纳滤波

设信号 $x(n)$ 或 $x(n)$ 及观测过程 $y(n)$ 或 $y(n)$ 是广义平稳的，且已知其功率谱或自相关函数，则基于观测过程 $y(n)$ 或 $y(n)$ ，按线性最小均方误差准则，对信号 $x(n)$ 或 $x(n)$ 所作的最优估计称为维纳滤波。

维纳滤波器最优抽头权向量的计算需要已知输入向量的自相关矩阵和输入向量与期望响应的互相关向量。

4. Wiener-Hopf（维纳—霍夫）方程

Wiener-Hopf 方程定义了最优滤波器必须服从的条件。

Wiener-Hopf 方程可以写成更紧凑的矩阵表示形式

$$Rw_{opt} = p$$

其中， R 为输入信号的自相关矩阵， p 为输入与期望响应的互相关向量， w_{opt} 为最优权系数。

若输入信号的自相关矩阵 R 为可逆矩阵，则最优权系数为

$$w_{opt} = R^{-1}p$$

5. 最优滤波器实现存在的问题

- Wiener 滤波器最优权系数可以由计算输入信号的自相关函数和输入信号与期望输出的互相关得到。实际中这两个参数是未知的，需要通过估计得到。而估计需要观测无限长信号。
- 求最优滤波器时需要计算矩阵求逆，其计算复杂度量级是滤波器长度的三次方。

结论：实际实现 Wiener 滤波时，并不是直接计算得到最优 Wiener 滤波器的系数，而是代之以 LMS，RLS 等自适应滤波器。

【例题】

1. 信号 $x(n)$ 的自相关序列为 $R_x(m) = 0.6^{|m|}$ ，有一方差为 0.5 的零均值白噪声 $w(n)$ 与其叠加在一起，已知 $x(n)$ 与 $w(n)$ 统计独立。请设计一长度为 3 的 FIR 滤波器 $\{h(1), h(2), h(3)\}$ 来处理这一混合信号，使其输出 $y(n)$ 满足： $E\{[y(n) - x(n)]^2\}$ 为最小。

由于要使其输出 $y(n)$ 满足： $E\{[y(n) - x(n)]^2\}$ （均方误差）为最小，故设计的 FIR 滤波器应为维纳滤波器，设滤波器输入信号为混合信号 $u(n) = x(n) + w(n)$ ，滤波器期望输出为 $d(n) = x(n)$ ，根据 Wiener-Hopf 方程： $R_{uu}w_{opt} = p_{ud}$ ，可得到滤波器系数 w_{opt} 。

考虑到 $w(n)$ 是方差为 0.5 的零均值白噪声，且 $x(n)$ 与 $w(n)$ 统计独立，则滤波器输入信号的自相关函数为： $R_{uu}(m) = E\{u(n)u(n+m)\} = E\{[x(n) + w(n)][x(n+m) + w(n+m)]\} = R_x(m) + \sigma^2\delta(m) = \begin{cases} R_x(0) + \sigma^2, & m = 0 \\ R_x(m), & m \neq 0 \end{cases}$ ，由 $x(n)$ 的自相关序列为 $R_x(m) = 0.6^{|m|}$ ，经计算可得 3 阶滤波器输入信号的自相

$$\text{关矩阵为 } R_{uu} = \begin{bmatrix} R_x(0) + \sigma^2 & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) + \sigma^2 & R_x(1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) + \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 & 0.36 \\ 0.6 & 1.5 & 0.6 \\ 0.36 & 0.6 & 1.5 \end{bmatrix}$$

由于输入信号与期望响应的互相关函数为： $p_{ud}(m) = E\{u(n)d(n+m)\} = E\{[x(n) + w(n)]x(n+m)\} = R_x(m)$ ，故输入信号与期望响应的互相关向量为： $p_{ud} = \begin{bmatrix} R_x(0) \\ R_x(1) \\ R_x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.36 \end{bmatrix}$

因此，Wiener-Hopf 方程为 $\begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 & 0.36 \\ 0.6 & 1.5 & 0.6 \\ 0.36 & 0.6 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.36 \end{bmatrix}$

因为 R_{uu} 可逆，故 $w_{opt} = R^{-1}p = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 & 0.36 \\ 0.6 & 1.5 & 0.6 \\ 0.36 & 0.6 & 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5995 \\ 0.145 \\ 0.038 \end{bmatrix}$

解得 $w_{opt} = \{h(1), h(2), h(3)\} = \{0.5995, 0.145, 0.038\}$

4.2. 梯度下降算法

1. 自适应滤波基本概念

自适应滤波器包括两个过程：滤波过程和自适应过程。

滤波器设计最常用的准则：

- MMSE（最小均方误差）准则：使滤波器实际输出与期望响应之间的均方误差最小
- LS（最小二乘）准则

最广泛使用的自适应算法是“下降算法”

$$w(n) = w(n-1) + \mu(n)v(n)$$

式中 $w(n)$ 为第 n 步迭代（亦即时刻 n ）的权向量， $\mu(n)$ 为第 n 步迭代的更新步长， $v(n)$ 为第 n 步迭代的更新方向（向量）。

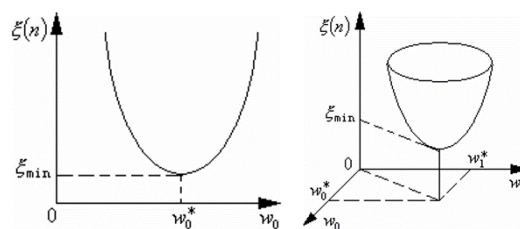
下降算法的两种实现方式：

- 自适应梯度算法：LMS（最小均方）算法及其改进算法
- 自适应高斯—牛顿算法：RLS（递归最小二乘）算法及其改进算法

2. 均方误差性能曲面

- 单权重情况：抛物线
 - 两个权系数：抛物面
 - 权系数数目大于 2 的情况：超抛物面
- $L+1$ 个权系数：一个 $L+2$ 维空间内的超抛物面

“碗底”点对应于均方误差最小点，也就是最优权系数矢量 w^* 所在的点。



3. 梯度下降算法（最陡下降法）

定理：令 $f(x)$ 是实向量 X 的实值函数。将视 X 为独立的变元，实目标函数 $f(x)$ 的曲率方向由梯度向量 $\nabla_x f(x)$ 给出。

梯度的重要性质（梯度下降算法的基础）：

- 梯度：指出了当变元增大时函数的最大增大率
- 负梯度：指出了当变元增大时函数的最大减小率

根据梯度的性质，目标函数极小化就是要取负曲率方向作目标函数的搜索方向，取负梯度方向作目标函数的更新方向。

把最陡下降法应用于维纳滤波时，可以得到一种能跟踪信号统计量随时间变化的算法，而不必在每次统计量变化时都求解维纳—霍夫方程。在适当条件下，最陡下降法的解收敛于维纳解，而不需要求输

入向量相关矩阵的逆矩阵。

4.3. LMS 算法与 RLS 算法

1. LMS（最小均方）自适应滤波器

LMS 改进的本质：使用单次计算误差的平方代替平方误差的期望值。

LMS 使用单次误差平方代替误差平方均值，造成梯度和权矢量成为围绕真值的随机变量，相当于在最佳权矢量上叠加了一个噪声。

结论：瞬时梯度是真实梯度的渐近无偏估计，LMS 自适应滤波器的权向量收敛于维纳最优解。

自适应固定学习速率 $\mu(n) = \text{常数}$ ：

- μ 偏大 \Rightarrow 收敛快 \Rightarrow 跟踪性能差
- μ 偏小 \Rightarrow 收敛慢 \Rightarrow 跟踪性能好

LMS 算法中，在满足收敛条件情况下，选择步长因子要兼顾收敛速度和失调量。

2. LMS 算法与最陡下降法的比较

最陡下降法	LMS 算法
搜索方向为 <u>梯度负方向</u> ， <u>每一步更新都使目标函数值减小</u> （“最陡下降含义”）。	搜索方向为 <u>瞬时梯度负方向</u> ，不保证每一步更新都使目标函数值减小，但 <u>总趋势</u> 使目标函数值减小。
不同时间的 <u>梯度向量</u> （搜索方向）线性独立。	要求不同时间的 <u>输入信号向量</u> 线性独立。

3. RLS（递归最小二乘）自适应滤波器

• 基本思路

RLS 自适应滤波器把最小二乘法（LS）推广为一种自适应算法，用来设计自适应的横向滤波器。利用 $n-1$ 时刻的滤波器抽头权系数，通过简单的更新，求出 n 时刻的滤波器抽头权系数。这样一种自适应的最小二乘算法称为递归（递推）最小二乘算法，简称 RLS 算法。

• 基本原理

考虑指数加权的最小二乘法，其代价函数为

$$\xi(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |\varepsilon(i)|^2$$

式中 $\lambda \in [0,1]$ ，称为遗忘因子，其作用是对离 n 时刻越近的误差加权越大，而对离 n 时刻越远的误差加权越小，即该参数对各个时刻的误差具有某种遗忘作用；即新数据比旧数据更加重要。

$\lambda = 1$ ：各时刻误差“一视同仁”，无任何遗忘功能，或具有无穷记忆功能。指数加权的最小二乘法退化为一般的最小二乘算法。

$\lambda = 0$ ：只有现时刻的误差起作用，过去时刻的误差完全被遗忘，不起任何作用。

在非平稳环境中，为了跟踪变化的系统，这两个极端的遗忘因子值都是不适合的。

4.4. 卡尔曼滤波器*

1. 基本思想

设已知信号的动态模型测量方程，则基于过程 $x(k)$ 及初始条件，按线性无偏最小方差递推准则，对状态 $s(k)$ 所作的最优估计称为卡尔曼（Kalman）滤波。

2. 三种估计形式

已知 $y(1), \dots, y(n)$, 求 $y(i)$ 的估计值 $\hat{y}(i)$ 。

- $i = n$ (滤波): 对当前目标状态的估计
- $i < n$ (平滑): 对过去状态的估计
- $i > n$ (预测): 对未来状态的估计

3. 状态空间方程

$$\begin{cases} x(n+1) = F(n+1, n)x(n) + v_1(n) & \text{状态(转移)方程} \\ y(n) = C(n)x(n) + v_2(n) & \text{观测方程} \end{cases}$$

$x(n)$: 状态向量 (不可观测的、待求的向量)

$y(n)$: 观测数据向量

$F(n+1, n)$: 状态转移矩阵

$C(n)$: 观测矩阵

$v_1(n)$: 过程噪声向量

$v_2(n)$: 观测噪声向量

4. 卡尔曼滤波器的设计过程

- (1) 构造状态空间方程;
- (2) 设计 $x(n)$ 的更新公式。

5. 新息的概念

新息是一个与之前的观测数据不相关, 并具有白噪声性质的随机过程, 但它却能够提供有关 $y(n+1)$ 的新信息。

6. 维纳滤波与卡尔曼滤波

- 相同之处:
 - (1) 都是解决线性滤波和预测问题的方法;
 - (2) 在平稳条件下两者的稳态结果是一致的。
- 不同之处:
 - (1) 解决问题的方法有很大区别:
 - 维纳滤波是根据全部过去的观测值和当前状态的观测值来估计信号的当前值, 因此它的解形式是系统的传递函数或单位脉冲响应;
 - 卡尔曼滤波是用上一状态的估计值和当前状态的观测值来估计信号的当前值, 因此它的解形式是状态变量值。
 - (2) 维纳滤波只适用于平稳随机过程, 卡尔曼滤波则没有这个限制。
 - (3) 设计维纳滤波器要求已知信号与噪声的相关函数, 设计卡尔曼滤波器要求已知状态方程和观测方程。
 - (4) 补充: 维纳滤波按线性最小均方误差准则, 卡尔曼滤波按线性无偏最小方差递推准则。
 - (5) 补充: 维纳滤波参数固定, 适用于平稳随机情况下的最优滤波且实现简单, 卡尔曼滤波参数时变, 适用于非平稳随机情况下最优滤波且性能优越。
- 局限性:

只有在信号和噪声统计特性先验已知的情况下, 这两种滤波器才能获得最优滤波。

【例题】

1. $x(t)$ 是一个时不变的标量随机变量, $y(t) = x(t) + v(t)$ 为观测数据, 其中 $v(t)$ 为白噪声。若用 Kalman 滤波器自适应估计 $x(t)$, 请构造其状态空间方程。

由于 $x(t)$ 是一个时不变的随机变量, 故 $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0 \Rightarrow x(n+1) - x(n) = 0 \Rightarrow x(n+1) = x(n)$

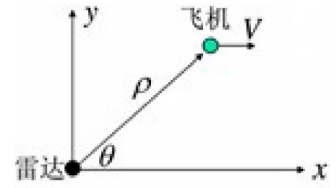
又因为 $y(t) = x(t) + v(t)$, 根据 $\begin{cases} x(n+1) = F(n+1, n)x(n) + v_1(n) & \text{状态(转移)方程} \\ y(n) = C(n)x(n) + v_2(n) & \text{观测方程} \end{cases}$

得 $\begin{cases} x(n+1) = x(n) & \text{状态(转移)方程} \\ y(n) = x(n) + v(n) & \text{观测方程} \end{cases}$, 其中 $F(n+1, n) = 1, v_1(n) = 0, C(n) = 1, v_2(n) = v(n)$ 。

2. 如图为二维雷达跟踪示意图。拟用 Kalman 滤波器对飞机的径向距离 ρ 、飞机在雷达视线上的径向速度 $\dot{\rho}$ 、方位角 θ 和角速度 $\dot{\theta}$ 进行自适应估计, 试构造其离散时间状态空间方程。

设扫描周期为 T , 径向速度 $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$, 角速度 $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$,

径向加速度 $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}$, 方位角加速度 $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$,



雷达跟踪几何示意图

则有状态(转移)方程 $\begin{cases} \rho(n+1) = \rho(n) + T\dot{\rho}(n) \\ \theta(n+1) = \theta(n) + T\dot{\theta}(n) \\ T\ddot{\rho}(n) = \dot{\rho}(n+1) - \dot{\rho}(n) = w_1(n) \\ T\ddot{\theta}(n) = \dot{\theta}(n+1) - \dot{\theta}(n) = w_2(n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(n+1) = \rho(n) + T\dot{\rho}(n) \\ \theta(n+1) = \theta(n) + T\dot{\theta}(n) \\ \dot{\rho}(n+1) = \dot{\rho}(n) + w_1(n) \\ \dot{\theta}(n+1) = \dot{\theta}(n) + w_2(n) \end{cases}$

径向速度或角速度变化通常是由于突然阵风或引擎拉力瞬时不规则变化引起, 故 $w_1(n)$ 、 $w_2(n)$ 设为加性零均值高斯白噪声。

将状态(转移)方程写成矩阵形式 $\begin{bmatrix} \rho(n+1) \\ \dot{\rho}(n+1) \\ \theta(n+1) \\ \dot{\theta}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho(n) \\ \dot{\rho}(n) \\ \theta(n) \\ \dot{\theta}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(n) \\ 0 \\ w_2(n) \end{bmatrix}$

引入状态向量 $x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(n) \\ \dot{\rho}(n) \\ \theta(n) \\ \dot{\theta}(n) \end{bmatrix}$ 、状态转移矩阵 $F(n+1, n) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和过程噪声向量

$w(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_1(n) \\ 0 \\ w_2(n) \end{bmatrix}$, 状态(转移)方程可写为 $x(n+1) = F(n+1, n)x(n) + w(n)$

由于雷达实测参数是距离和方位角, 故观测方程为 $\begin{bmatrix} \rho(n) \\ \theta(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix}$

引入观测数据向量 $y(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix}$ 、观测矩阵 $C(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 和观测噪声向量 $v(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix}$, 观

测方程可写为 $y(n) = C(n)x(n) + v(n)$

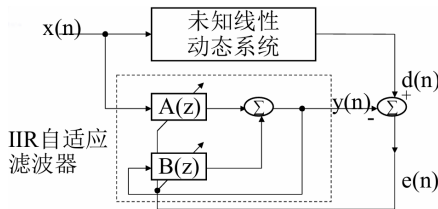
其中, $v_1(n)$ 、 $v_2(n)$ 为距离和方位角观测噪声, $v_1(n)$ 、 $v_2(n)$ 、 $w_1(n)$ 、 $w_2(n)$ 相互独立。

4.5. IIR 自适应滤波器

1. 使用 IIR 滤波器的目的：用较少可调系数实现长脉冲响应。

可用两种方法（输出误差法和方程误差法）设计这类滤波器

2. 输出误差法



输出误差法的局限性：误差由实际滤波器输出来定义。

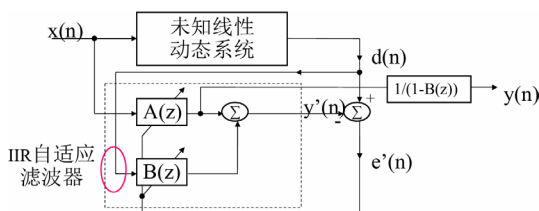
用输出误差法设计 IIR 自适应滤波器受到以下两个限制：

- 误差特性曲面除了一全局极小点外，还有许多局部极小点，这意味着我们无法确定用这种方法设计的 IIR 自适应滤波器是否是全局最优的。
- 不能保证 ARMA 模型的极点始终在 z -平面的单位圆内，这意味着 IIR 自适应滤波器有可能不稳定。

克服办法：

- 在实际使用过程中，可在自适应方程中引入某种简短的稳定性测试来克服不稳定。但这样会放慢自适应的速率。
- 可用方程误差法来克服局部极小问题。

3. 方程误差法



方程误差法的特点：

- 误差信号由一个方程来定义，而不是像输出误差法那样由实际滤波器的输出来定义，故称为方程误差法。
- 代价函数由二次误差特征曲面来表征，故不会像输出误差法那样受到局部极小的限制。

4.6. 自适应滤波器的应用

