



电力系统自动化

Automation of Electric Power Systems

ISSN 1000-1026, CN 32-1180/TP

## 《电力系统自动化》网络首发论文

题目：基于半正定规划的配电网三相不平衡日前最优换相策略  
作者：李嘉兴，刘梦奇，张耀，董浩淼，张贝西，廖建  
收稿日期：2025-04-22  
网络首发日期：2025-08-05  
引用格式：李嘉兴，刘梦奇，张耀，董浩淼，张贝西，廖建. 基于半正定规划的配电网三相不平衡日前最优换相策略[J/OL]. 电力系统自动化.  
<https://link.cnki.net/urlid/32.1180.TP.20250805.1107.002>



**网络首发：**在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认：**纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 基于半正定规划的配电网三相不平衡日前最优换相策略

李嘉兴, 刘梦奇, 张耀, 董浩淼, 张贝西, 廖建

(西安交通大学电气工程学院, 陕西省西安市 710049)

**摘要:** 随着分布式电源、电动汽车等不平衡设备的广泛普及,配电网运行出现了网络损耗增加、三相不平衡度加大等一系列问题。为了降低含有混合相的配电系统的电压不平衡度,提出了面向三相不平衡治理的配电负荷日前最优换相模型。首先,建立了以电压不平衡度最小为目标,包含系统换相时间、配电网三相潮流和系统安全运行等约束的混合整数半正定优化模型;其次,通过将离散变量转化为等式二次约束形式,得到了三相不平衡配电网日前最优换相模型;然后,通过高斯随机迭代算法恢复秩一约束,求解得到最优负荷换相策略;最后,采用IEEE标准算例,将所提方法与三相潮流线性化进行对比,验证了所提模型与求解方法的正确性和有效性。

**关键词:** 三相不平衡; 最优潮流; 最优换相; 半正定规划; 高斯随机化

## 0 引言

随着新能源的快速发展,分布式电源(distributed generator, DG)和电动汽车充电桩的单相接入使得三相不平衡问题发生的概率大大增加<sup>[1-2]</sup>,可能导致配电网中出现零序电流,增加线路损耗<sup>[3]</sup>,对配电网的安全稳定运行造成影响<sup>[4-5]</sup>。同时,还会引发系统电压越限,导致保护设备误动作,降低变压器等设备的使用寿命<sup>[6]</sup>。因此,对配电网不平衡治理进行研究有着重要意义。

现有方法中,可以通过加入负荷补偿设备来处理不平衡问题<sup>[7]</sup>,但补偿设备的安装成本较高,系统整体经济成本较大;还可以通过配电网重构降低三相不平衡度<sup>[8-9]</sup>,但联络开关的数量和位置限制了该方法的治理效果;或者通过调整负荷在配电网中的接入相<sup>[10]</sup>,使三相负荷平衡。

三相不平衡治理属于非凸问题,无法直接求出最优解。目前,国内外提出了人工智能<sup>[11-13]</sup>以及数学优化算法<sup>[14-15]</sup>等来求解此类问题。文献[16]在配电网重构时考虑了电压偏差等多个目标,构建了一个非凸非线性的多目标优化问题,使用深度强化学习对该配电网重构模型进行求解;文献[17-18]分别通过鸽群算法和向量基因遗传优化算法求解得到三相负荷不平衡治理策略。但上述研究采用的智能算

法可能出现迭代不收敛以及局部最优解等问题。

数学优化类算法主要有近似法和凸松弛法两种。近似法通过对非线性的功率方程进行线性化处理得到线性方程。文献[19]建立了三相潮流的完整模型,通过假设三相电压平衡以及将一部分变量设为常数对功率方程进行了线性化处理,但是这种处理方式会将不平衡系统转化为三相平衡系统。凸松弛法则对一些约束进行松弛,将模型转化为凸优化问题。文献[20]将交流功率方程转化为二阶锥约束,从而将原问题转化为了二阶锥规划(second-order cone programming, SOCP)问题,但该模型忽略了相角循环条件。文献[21-22]建立了基于节点功率方程的最优潮流模型,通过升维映射将其转化为半定规划(semi-definite programming, SDP)问题,进一步对秩一约束进行松弛。但在实际系统中,凸松弛法无法保证松弛之后的最优解和原问题的最优解相同<sup>[23]</sup>。

本文以混合相配电网为研究对象,考虑交流潮流约束和相位一致性约束条件,建立了日前最优换相模型,将二进制变量写成二次方程约束,使得该混合整数非线性规划问题转化为SDP问题。针对凸松弛法忽略秩一约束而导致最终求得的解可能并非秩一解,智能优化算法得到的解可能为局部最优解,以及三相线性化方法中存在近似等问题,本文提出了高斯随机迭代法(Gaussian randomized-iterative method, GRIM)。首先,通过高斯随机化恢复负荷接入相位变量。然后,将秩一约束通过惩罚项加入目标函数中,对非凸约束条件进行转化,通过迭代的

收稿日期: 2025-04-22; 修回日期: 2025-07-13。

国家重点研发计划资助项目(2022YFB2403500); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2025JC-YBMS-441)。

方法生成一组改进解,逐渐收敛到最优秩一解,得到日前最优负荷换相策略。最后,通过算例分析与现有方法对比,证明了本文方法的精确性。

## 1 面向配电网三相不平衡治理的日前最优换相模型

### 1.1 混合相配电网模型

本节所建立的面向三相不平衡治理的最优换相模型为日前多时段优化模型,输入为24 h负荷,用于直接求解24 h的换相策略,进行日前优化。

混合相配电网模型来自于北美典型的配电网结构,包含三相、两相和单相节点。文献[24]使用改进的IEEE 13节点混合相配电网作为算例,考虑了混合相网络结构需满足相位一致性条件,即下游节点所包含的相一定是属于上游节点的。如果上游节点所接线路为abc三相,则与之相连的下游节点所接入的线路可以为任意相;如果上游节点所接线路只有ab两相,则与之相连的下游节点所接线路只能是a相、b相或ab两相,即不能出现c相;如果上游节点所接线路只接入a相,那么与之相连的下游节点所接线路只能是a相。

### 1.2 目标函数

三相节点电压不平衡会导致线路的电能损耗增加、配电变压器出力减少等一系列危害。因此,三相不平衡治理的目标是通过调节网络中发电设备的出力和各个负荷的接入相使得系统的总三相不平衡度最小。目前,针对三相电压不平衡存在多种定义方式,电气电子工程师学会将电压不平衡度定义为三相电压有效值与平均值的最大偏差与平均值的比值<sup>[25]</sup>;国标将电压不平衡度定义为三相零序电压或负序电压与正序电压的比值<sup>[26]</sup>。本文目标函数参照文献[24]中对三相不平衡度的定义,如式(1)所示。

$$C = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in N_3} \sum_{\phi \in \{a, b, c\}} |(V_{i,t}^\phi)^2 - V_{i,t}^{\text{avg}}| \quad (1)$$

$$V_{i,t}^{\text{avg}} = \frac{(V_{i,t}^a)^2 + (V_{i,t}^b)^2 + (V_{i,t}^c)^2}{3} \quad (2)$$

式中: $C$ 为系统三相电压不平衡度; $V_{i,t}^{\text{avg}}$ 为 $t$ 时段节点 $i$ 的三相电压有效值平方的平均值; $N_3$ 为系统三相节点集合; $T$ 为总时段; $V_{i,t}^\phi$ 为 $t$ 时段节点 $i$ 的 $\phi$ 相电压。

### 1.3 约束条件

定义 $t$ 时段节点 $i$ 的电压向量 $V_{i,t}$ 如式(3)所示,对于双相或单相节点的缺失相,其对应的电压为0。

$$V_{i,t} = \begin{bmatrix} V_{i,t}^a \\ V_{i,t}^b \\ V_{i,t}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{i,t}^a + j f_{i,t}^a \\ e_{i,t}^b + j f_{i,t}^b \\ e_{i,t}^c + j f_{i,t}^c \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $e_{i,t}^\phi$ 为 $t$ 时段节点 $i$ 的 $\phi$ 相电压实部; $f_{i,t}^\phi$ 为 $t$ 时段节点 $i$ 的 $\phi$ 相电压虚部。

节点 $i$ 与节点 $j$ 所对应的子导纳 $Y_{ij}^\phi$ 所组成的矩阵 $Y_{ij}$ 如式(4)所示。其中, $\phi \in \{a, b, c\}$ 表示三相。如果有缺失相,则导纳矩阵对应列和对应行全为0。

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{ij}^{aa} & Y_{ij}^{ab} & Y_{ij}^{ac} \\ Y_{ij}^{ba} & Y_{ij}^{bb} & Y_{ij}^{bc} \\ Y_{ij}^{ca} & Y_{ij}^{cb} & Y_{ij}^{cc} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$t$ 时段节点 $i$ 的负荷可能接在任意一相上,相应的三相不平衡度也不同。定义 $t$ 时段节点 $i$ 的 $\phi$ 相负荷接入与否的状态变量为 $s_{i,t}^\phi$ ,其值为1表示接入,值为0表示不接入。相应地,定义 $t$ 时段节点 $i$ 的状态向量为 $s_{i,t}$ ,如式(5)所示。

$$s_{i,t} = [s_{i,t}^a \quad s_{i,t}^b \quad s_{i,t}^c]^T \quad (5)$$

#### 1) 潮流约束

在 $t$ 时段,节点 $i$ 应该满足功率方程约束,如式(6)所示。

$$\begin{cases} P_{i,t}^\phi = P_{\text{DG},i,t}^\phi - P_{\text{L},i,t}^\phi \\ Q_{i,t}^\phi = Q_{\text{DG},i,t}^\phi - Q_{\text{L},i,t}^\phi \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} P_{i,t}^\phi = e_{i,t}^\phi \sum_j \sum_\phi (G_{ij}^{\phi\phi} e_{j,t}^\phi - B_{ij}^{\phi\phi} f_{j,t}^\phi) + \\ f_{i,t}^\phi \sum_j \sum_\phi (G_{ij}^{\phi\phi} f_{j,t}^\phi + B_{ij}^{\phi\phi} e_{j,t}^\phi) \\ Q_{i,t}^\phi = f_{i,t}^\phi \sum_j \sum_\phi (G_{ij}^{\phi\phi} e_{j,t}^\phi - B_{ij}^{\phi\phi} f_{j,t}^\phi) - \\ e_{i,t}^\phi \sum_j \sum_\phi (G_{ij}^{\phi\phi} f_{j,t}^\phi + B_{ij}^{\phi\phi} e_{j,t}^\phi) \end{cases} \quad (7)$$

式中: $P_{i,t}^\phi$ 和 $Q_{i,t}^\phi$ 分别为 $t$ 时段节点 $i$ 注入的 $\phi$ 相有功和无功功率; $P_{\text{DG},i,t}^\phi$ 和 $Q_{\text{DG},i,t}^\phi$ 分别为时段 $t$ 节点 $i$ 发电设备的 $\phi$ 相有功和无功功率; $P_{\text{L},i,t}^\phi$ 和 $Q_{\text{L},i,t}^\phi$ 分别为 $t$ 时段节点 $i$ 负荷的 $\phi$ 相有功和无功功率; $n$ 为节点总数; $G_{ij}^{\phi\phi}$ 和 $B_{ij}^{\phi\phi}$ 分别为线路 $ij$ 的 $\phi$ 相和 $\phi$ 相间电导和电纳。

#### 2) 发电设备功率约束

发电设备的出力都有最大和最小值约束,具体如式(8)所示。

$$\begin{cases} P_{\text{DG},i}^{\min} \leq P_{\text{DG},i,t}^\phi \leq P_{\text{DG},i}^{\max} \\ Q_{\text{DG},i}^{\min} \leq Q_{\text{DG},i,t}^\phi \leq Q_{\text{DG},i}^{\max} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $P_{\text{DG},i}^{\min}$ 和 $P_{\text{DG},i}^{\max}$ 分别为节点 $i$ 处发电设备的有功功率最小和最大出力; $Q_{\text{DG},i}^{\min}$ 和 $Q_{\text{DG},i}^{\max}$ 分别为节点 $i$ 处发电设备无功功率的最小和最大出力。

#### 3) 负荷约束

对于节点 $i$ 处的负荷,其在 $t$ 时段只能接入某一相,并且必须接入电网以获得电能,故节点 $i$ 处状态变量 $s_{i,t}^\phi$ 应满足式(9)。

$$s_{i,t}^a + s_{i,t}^b + s_{i,t}^c = 1 \quad s_{i,t}^a, s_{i,t}^b, s_{i,t}^c \in \{0, 1\} \quad (9)$$

#### 4) 三相节点不平衡度约束

目标函数中定义的不平衡度只考虑了节点电压的幅值,而实际系统中仍然需要考虑零序分量,以保证三相节点的零序电压在一定范围内。可以通过对零序电压的大小进行限制以满足不平衡度约束,如式(10)所示。

$$\frac{1}{3}|V_{i,t}^a + V_{i,t}^b + V_{i,t}^c| \leq \delta \quad i \in N_3 \quad (10)$$

式中: $\delta$ 为给定的不平衡度允许范围,可根据实际情况给出经验值。

#### 5) 根节点电压约束

电力系统配电网一般都是辐射网,根节点应该满足abc三相均接入系统,以使得下游节点接入时不会出现强制的缺失相。本文假设根节点电压保持不变,幅值均为1,同时三相对称,则根节点电压 $V_{0,t}$ 满足式(11)。

$$V_{0,t} = [1 \quad 1\angle -120^\circ \quad 1\angle 120^\circ]^T \quad (11)$$

#### 6) 电压约束

为了保证系统的电压稳定性和供电质量,需要对节点电压幅值进行约束,如式(12)所示。

$$V_i^{\min} \leq |V_{i,t}| \leq V_i^{\max} \quad (12)$$

式中: $V_i^{\min}$ 为节点 $i$ 允许的电压最小幅值组成的向量; $V_i^{\max}$ 为节点 $i$ 允许的电压最大幅值组成的向量。

#### 7) 换相时间约束

为了使系统的三相不平衡度尽可能小,各个时段负荷所接入的相需要改变,但由于开关等硬件设备以及成本的限制,负荷所接入的相并不能频繁改变。定义换相的最小时间间隔为 $T_{on}$ ,则节点 $i$ 处状态变量 $s_{i,t}^\phi$ 应满足式(13)。

$$\begin{cases} \tau = s_{i,t-1}^\phi - s_{i,t-2}^\phi \\ \tau \leq s_{i,\mu}^\phi \quad \mu \in \{t, t+1, \dots, t+T_{on}\} \\ s_{i,\mu}^\phi \leq \tau + 1 \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\tau$ 为中间变量,表示负荷是否接入 $\phi$ 相。如果从时段 $t-2$ 到时段 $t-1$ 负荷接入 $\phi$ 相,则 $\tau=1$ ;如果从 $\phi$ 相退出,则 $\tau=-1$ ;如果无操作,则为 $\tau=0$ 。式(13)表示如果上一时段负荷从其他相接入 $\phi$ 相,或者从 $\phi$ 相退出,则在 $T_{on}$ 的时间范围内,接入状态不可以再发生改变。

## 2 基于半正定规划的日前最优换相模型

由于第1章中建立的面向配电网三相不平衡治

理的最优换相模型存在离散0-1变量和交流潮流约束等非凸约束,故该模型是一个混合整数非线性非凸优化问题。为了得到全局最优解,本章通过将其转化为基于半正定规划的日前最优换相模型来求解此非凸优化模型。

### 2.1 向量定义

定义 $e_{i,t} = [e_{i,t}^a, e_{i,t}^b, e_{i,t}^c]$ 和 $f_{i,t} = [f_{i,t}^a, f_{i,t}^b, f_{i,t}^c]$ 分别为时段 $t$ 节点 $i$ 三相电压的实部与虚部组成的子向量。按照先实部后虚部的顺序将各个节点的子向量进行拼接,得到向量 $x_t$ ,如式(14)所示。

$$x_t = [e_{1,t}, e_{2,t}, \dots, e_{N,t}, f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_{N,t}]^T \quad (14)$$

式中: $N$ 为系统的节点个数。

进而得到有关电压的矩阵变量 $X_t$ ,如式(15)所示。

$$X_t = x_t x_t^T \quad (15)$$

定义 $t$ 时段节点 $i$ 的每一相负荷接入与否的状态变量组成的向量为 $s_i$ ,如式(16)所示,按式(17)相乘得到有关负荷接入状态的矩阵变量 $S_t$ 。

$$s_i = [s_{1,t}^a, s_{1,t}^b, s_{1,t}^c, s_{2,t}^a, s_{2,t}^b, s_{2,t}^c, \dots, s_{N,t}^a, s_{N,t}^b, s_{N,t}^c, v]^T \quad (16)$$

$$S_t = s_t s_t^T \quad (17)$$

式中: $v$ 为辅助变量,应恒为1。

### 2.2 模型转换

#### 2.2.1 模型转换的目标函数

将式(2)代入目标函数式(1),可得:

$$C = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^T \sum_i |2(V_{i,t}^a)^2 - (V_{i,t}^b)^2 - (V_{i,t}^c)^2| + |2(V_{i,t}^b)^2 - (V_{i,t}^a)^2 - (V_{i,t}^c)^2| + |2(V_{i,t}^c)^2 - (V_{i,t}^a)^2 - (V_{i,t}^b)^2| \quad (18)$$

再结合以上变量定义,可以将目标函数式(18)转化为由矩阵变量 $X_t$ 以及辅助矩阵 $A_i^\phi$ 表示的目标函数式(19)。

$$C = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^T \sum_i (\text{Tr}(A_i^a X_t) + \text{Tr}(A_i^b X_t) + \text{Tr}(A_i^c X_t)) \quad (19)$$

其中,辅助矩阵 $A_i^a$ 的表达式如式(20)所示。

$$A_i^a = \begin{bmatrix} K_1^a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2^a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{2N}^a \end{bmatrix} \quad (20)$$

当 $i \in N_3$ 时, $K_i^a$ 和 $K_{i+N}^a$ 如式(21)所示,其余则为 $3 \times 3$ 的全0矩阵。 $A_i^b$ 与 $A_i^c$ 的定义与 $A_i^a$ 类似。当 $\phi$ 分别为a、b、c三相时, $K_i^\phi$ 所对应的对角线上第1、2、3个元素为2,其余对角线元素为-1,分别是式(19)中对应相前的系数,通过该辅助矩阵可以将对



角线元素取出进行运算。

$$K_i^a = K_{i+N}^a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 2.2.2 约束条件

#### 1) 潮流约束

结合式(6)与式(7),可以得到功率方程约束如下:

$$\begin{cases} P_{DG,i,t}^{\phi} = P_{D,i,t}^{\phi} + \text{Tr}\{Y_i X_i\} & i \in N \\ Q_{DG,i,t}^{\phi} = Q_{D,i,t}^{\phi} + \text{Tr}\{\bar{Y}_i X_i\} & i \in N \end{cases} \quad (22)$$

式中:辅助矩阵  $Y_i$  与  $\bar{Y}_i$  来源于文献[27],本文进行了三相扩展,具体表达式及证明过程见附录A。

#### 2) 发电设备功率约束

发电设备出力的最大和最小约束仍然如式(8)所示。

#### 3) 负荷约束

由于混合整数半正定规划问题无法直接求解,故将0-1变量  $s_{i,t}^{\phi}$  进行如式(23)所示的转化。此时,离散变量可以转化为连续变量加二次方程的形式进行求解。

$$(s_{i,t}^{\phi})^2 - s_{i,t}^{\phi} = 0 \quad (23)$$

在求解SDP问题时,由于矩阵变量  $S_i$  中并未直接出现  $v$ ,而是以  $v^2$  形式出现,故加入约束条件式(24)。

$$v^2 = 1 \quad (24)$$

由矩阵变量  $S_i$  的形式可知,参与运算的  $s_{i,t}^{\phi}$  均以  $vs_{i,t}^{\phi}$  的形式出现,故将式(23)转化为式(25)。

$$(s_{i,t}^{\phi})^2 - vs_{i,t}^{\phi} = 0 \quad (25)$$

当  $v=1$  时,约束条件为式(23);而当  $v=-1$  时,约束条件变为  $(s_{i,t}^{\phi})^2 + s_{i,t}^{\phi} = 0$ ,此时  $s_{i,t}^{\phi}$  的取值为0或-1,无法满足  $s_{i,t}^a + s_{i,t}^b + s_{i,t}^c = 1$  的约束条件。因此, $v$ 只能取1,即引入  $v$  之后,式(23)与式(25)仍然是等价的。

与负荷接入与否有关的约束式(24)和式(25)可以转化为:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(B_i S_i) = 0 \quad (26) \\ B_i = & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ \vdots & & 1 & \vdots & -1/2 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ & & -1/2 & & 0 \end{bmatrix}_{(3N+1) \times (3N+1)} \end{aligned} \quad (27)$$

式中: $B_i$ 为辅助矩阵。

矩阵  $B_i$  对角线的第  $i$  个元素1,为  $(s_{i,t}^{\phi})^2$  的系数;

最后一行和最后一列的第  $i$  个元素为  $-1/2$ ,为  $vs_{i,t}^{\phi}$  前的系数的一半;其余元素均为0。 $B_i S_i$  对角线的第  $i$  个元素为  $(s_{i,t}^{\phi})^2 - \frac{1}{2} vs_{i,t}^{\phi}$ ,最后一个元素为  $-\frac{1}{2} vs_{i,t}^{\phi}$ ,对角线其余元素为0,故式(26)对  $B_i S_i$  取迹之后即为式(25)。

#### 4) 三相节点不平衡度约束

三相不平衡度约束可以转换为:

$$\text{Tr}(D_i X_i) \leq \delta \quad (28)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{2N} \end{bmatrix} \quad (29)$$

当  $i \in \mathcal{N}_3$  时,  $C_i, C_{i+N}$  为  $3 \times 3$  的全1矩阵,其余则为  $3 \times 3$  的全0矩阵。

#### 5) 根节点电压约束

根节点电压约束可以转换为由矩阵变量  $X_i$  以及辅助矩阵  $H_i$  表示如下:

$$\text{Tr}(H_i X_i) = J_i \quad (30)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{6N} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$J = [1, 1/4, 1/4, \cdots, 0, 0, 3/4, 3/4, \cdots, 0] \quad (32)$$

式中: $H_i$ 为辅助矩阵; $J_i$ 为  $J$  中第  $i$  个元素。在  $H_i$  中,当  $i \in \{1, 2, 3, 3N+1, 3N+2, 3N+3\}$  时,  $h_i$  等于1,其余元素全为0。在  $J$  中,前三个元素分别为1、1/4和1/4,第  $3i+2$  和第  $3i+3$  个元素分别为3/4和3/4,其余元素均为0。

通过  $H_i$  可以将  $X_i$  对角线中对应的第  $i$  个元素取出,当  $i=1$  时,  $\text{Tr}(H_1 X_1)$  将根节点的A相电压实部的平方  $(e_{1,t}^a)^2$  取出,而  $(e_{1,t}^a)^2 = 1$ ,故  $J_1 = 1$ ,当  $i$  取其它值时同理。

#### 6) 电压约束

电压约束可转换为由矩阵变量  $X_i$  以及辅助矩阵  $M_i$  表示如下:

$$(V_i^{\phi, \min})^2 \leq \text{Tr}\{M_i X_i\} \leq (V_i^{\phi, \max})^2 \quad i \in N \quad (33)$$

式中:辅助矩阵  $M_i$  源于文献[27],本文对其进行了三相扩展,具体表达式见附录A。

#### 7) 换相时间约束

换相时间约束可以转换为由  $w_i$  表示如下:

$$\begin{cases} \tau = w_{t-1,i} - w_{t-2,i} \\ \tau \leq w_{\mu,i} \quad i \in N, \mu \in \{t, t+1, \cdots, t+T_{\text{on}}\} \\ w_{\mu,i} \leq \tau + 1 \end{cases} \quad (34)$$

式中:  $w_i$  为  $S_i$  的最后一列,  $w_{i,i}$  为  $w_i$  的第  $i$  个元素。

引入  $w_i$  后可以将式(9)转换为式(36)。

$$w_{i,3i-2} + w_{i,3i-1} + w_{i,3i} = 1 \quad (35)$$

8) 半定约束和秩一约束

定义SDP变量后,当且仅当SDP矩阵变量为秩一的半正定矩阵时,转化后的优化问题才与原问题等价,此时需要加入秩一约束与半定矩阵约束,如式(36)所示。

$$\begin{cases} X_i \succ 0 & \text{rank}(X_i) = 1 \\ S_i \succ 0 & \text{rank}(S_i) = 1 \end{cases} \quad (36)$$

通过以上变换,将含有混合整数变量的混合相优化问题转化为SDP问题,其目标函数以及约束条件如下所示。

$$\min \left\{ \text{式(18)} \mid \text{式(8)、式(22)(26)(28)、式(30)、式(33)} \sim \text{式(36)} \right\} \quad (37)$$

然而,由于秩一约束仍然是非凸的,因此仍然无法直接获得全局最优解。很多学者采取将秩一约束松弛掉的方法来求解SDP问题,但是只有当求解出的解直接满足秩为一时,松弛后的问题才与原问题等价,这对于大多数情况是无法满足的。因此本文后续采用高斯随机化与迭代法共同恢复秩一约束,该算法命名为高斯随机迭代法(GRIM)。

### 3 日前最优换相模型的求解算法

对于秩一约束,除了可以直接松弛外,还可以使用EVD分解法等方法<sup>[28]</sup>,但这些方法往往都会存在精度不高的问题,因此本文提出高斯随机化与迭代法共同处理秩一约束问题,通过高斯随机化可以获得离散变量的取值,进而通过迭代法得到满足秩一约束的连续变量矩阵。

#### 3.1 高斯随机化

通过忽略秩一约束所得到的SDP问题,是一个标准的凸优化问题,其可以得到一组松弛解,记为  $X_i^*$  和  $S_i^*$ 。

得到松弛解后,对  $S_i^*$  生成  $L$  组满足正态分布的随机向量,  $\xi_l$  为第  $l$  组随机向量,其应满足式(38)。文献[29]中指出在高维问题中,适当增加  $L$  可获得更好性能,但超过一定阈值后收益变得有限,故本文将取  $L = 10n$ 。

$$\xi_l \sim N(0, S_i^*) \quad (38)$$

式(38)可由以下步骤获得:

Step1: 首先得到服从正态分布  $N(0, I)$  的随机向量  $\gamma$ , 其维度与  $S_i^*$  一致。进而对  $S_i^*$  进行Cholesky分解,得到  $L_i$ , 满足式(39)。

$$S_i^* = L_i L_i^H \quad (39)$$

Step2: 对于每一组  $\xi_l$ , 其可由式(40)得到。

$$\xi_l = L_i \gamma \quad (40)$$

Step3: 此时  $\xi_l$  并不一定满足二进制变量约束,需对其进行进一步修正,将  $\xi_l$  修正为距其最近的整数解。

Step4: 最后可以通过式(41)可以得到  $L$  组随机化后的  $S_i^*$ , 记为  $S_{i,l}^{**}$ 。

$$S_{i,l}^{**} = \xi_l \xi_l^H \quad (41)$$

经过以上随机化,离散矩阵  $S_{i,l}^{**}$  便满足了秩一约束,但对于连续矩阵变量  $X_i$ , 其仍然不满足秩一约束。此时,将常数矩阵  $S_{i,l}^{**}$  带入原问题,并采用迭代法可以求解出满足秩一约束的原问题的解  $X_i$ 。

#### 3.2 迭代法

当  $X_i$  的秩为一时,  $X_i$  的迹与它的最大特征值相等,即非凸的秩一约束可以转化为式(42)。

$$\text{Tr}(X_i) - \lambda_{\max} \quad (42)$$

式中:  $\lambda_{\max}$  是矩阵  $X_i$  的最大特征值。

但是  $\lambda_{\max}$  仍然是一个非凸的函数,可以通过瑞利商定理确定其下界。

$$\lambda_{\max} = \omega_{\max}^H X_i \omega_{\max} \quad (43)$$

式中:  $\omega_{\max}$  是  $X_i$  的最大特征值对应的单位特征向量,  $\omega$  为任意的单位向量。

将  $\omega$  取为  $X_i^*$  的最大特征值对应的单位特征向量并记为  $\omega_{\max}^{(0)}$ , 作为迭代法的初值,式(43)可以转化为式(44)。

$$\text{Tr}(X_i) \geq (\omega_{\max}^{(0)})^H X_i \omega_{\max}^{(0)} \quad (44)$$

此时,式(42)转化为一个凸的不等式约束条件,将  $\text{Tr}(X_i)$  与  $(\omega_{\max}^{(0)})^H X_i \omega_{\max}^{(0)}$  的差值作为惩罚项加入到目标函数之中,通过迭代来减小二者差值。将原目标函数中的三相不平衡度记为  $F(X_i)$ , 由此可以得到新的目标函数  $F_\mu$ 。

$$\min F_\mu = \sum_{i=1}^T F(X_i) + \mu_i (\text{Tr}(X_i) - (\omega_{\max}^{(0)})^H X_i \omega_{\max}^{(0)}) \quad (45)$$

式中:  $\mu_i$  是惩罚因子,是一个数值较大的正数。本文通过式(46)来选择每一时段的惩罚因子<sup>[30]</sup>。

$$\mu_i = \frac{F(X_i^*)}{\text{Tr}(X_i^*) - \lambda_{i,\max}^*} \quad (46)$$

以式(45)作为新目标函数,在约束条件不变的情况下,可以求出新的最优解  $X_i^*$ , 至此迭代法的第一次迭代结束。

将第  $\kappa$  次迭代得到的  $X_i^*$  的最大特征值对应的单位特征向量记为  $\omega_{\max}^{(\kappa)}$ , 通过求解目标函数(47)得到第  $\kappa + 1$  次迭代的最优解  $X_i^*$ 。

$$\min F_\mu = \sum_{i=1}^T F(X_i) + \mu_i (\text{Tr}(X_i) - (\omega_{\max}^{(\kappa)})^H X_i \omega_{\max}^{(\kappa)}) \quad (47)$$

设置  $\epsilon$  为认为误差所允许的容忍因子, 当  $\text{Tr}(X_t^*) - \lambda_{t, \max}^*$  时, 可以认为  $X_t^*$  被恢复为秩一矩阵, 此时迭代停止。

注意到, 迭代法将目标函数中的  $\lambda t_{\max}$  改为了  $\lambda t_{\max}^{(\kappa)}$ 。文献[30]证明了通过迭代, 最终  $X_t^{(\kappa)}$  可以收敛到目标函数(48)的最优解, 并且整个迭代过程是单调递减的, 不会出现震荡。将最终获得的满足秩一约束的解记为  $X_{t, \epsilon}^{**}$ 。

$$\min F_{\mu} = \sum_{t=1}^T F(X_t) + \mu_t (\text{Tr}(X_t) - \lambda t_{\max}) \quad (48)$$

通过以上高斯随机迭代法可以获得  $L$  组  $X_{t, \epsilon}^{**}$  和  $S_{t, \epsilon}^{**}$ 。最后, 将  $L$  组可行解进行对比, 可以获得使目标函数取最小值的最优解。GRIM 流程的伪代码如附录 B 中图 1 所示。

## 4 算例分析

为了验证本文所提算法的正确性, 本节通过一系列 IEEE 基本算例与线性化、遗传算法、SOCP 等方法进行对比, 测试算例包括 IEEE 15、33、69、74 节点系统。

本文使用的平台为 MATLAB2022b, 使用了 YALMIP 以及 MATPOWER 进行建模。使用 Gurobi 作为求解器对线性化和 SOCP 模型进行了求解, 使用 MOSEK 求解本文提出的 SDP 问题, 电脑配置为 Intel (R) Core (TM) i7-8700 CPU @ 3.20GHz。

### 4.1 IEEE 15 节点系统

IEEE 15 节点系统结构如图 1 所示, 节点颜色的编码如下所示, 红、绿、蓝分别代表节点接入 A、B、C 相; 黄色、紫色、青色分别代表节点接入 AB、AC、BC 双相; 橙色代表节点接入 ABC 三相。图 1 中分布式光伏接入的位置即为真实系统中光伏的接入位置, 分布式光伏的颜色代表其接入的相, 编码规则同上。

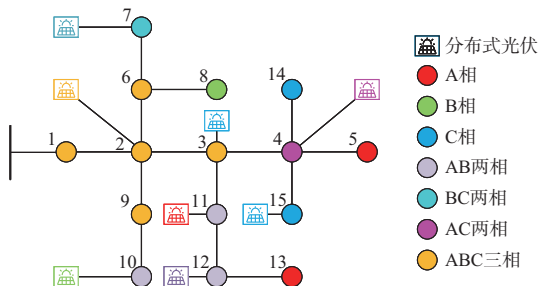


图 1 IEEE 15 节点系统拓扑结构  
Fig. 1 IEEE 15 node topological structure diagram

每台 DG 输出有功功率的范围为  $[0, 3]$  kW, 无功功率的范围为  $[0, 3]$  kVar, 系统节点电压范围为  $[0.9, 1.1]$ , 不平衡度允许范围  $\delta$  取 0.01。

为了更加真实的反映出电力系统中负荷的动态特性, 每小时负荷水平如附录 B 表 1 所示, 在 IEEE 算例中给出的基础负荷上乘以波动系数得到每个小时的实际负荷。典型日负荷在一天之中存在双峰双谷的典型特征, 在早晚高峰期用电量较高, 在夜间用电量较低。

#### 4.1.1 负荷换相策略对比

为了验证本文提出算法的正确性, 与三相潮流线性化、遗传算法、SOCP 等方法进行对比, 三相潮流线性化通常假设线路损耗少, 对于每一条线路可以忽略线路损耗, 节点电压近似平衡, 对地电压幅值趋于 1, ABC 三相相角互相差 120 度。遗传算法通过随机选择、交叉和变异等操作不断迭代优化种群, 逐步收敛到问题的最优解。SOCP 通过将非凸条件松弛为二阶锥约束, 进而将一个非凸优化问题转化为凸优化问题。

三相潮流线性化首先得到负荷换相方案以及节点电压幅值, 之后将求得的节点电压幅值作为初始值计算得到满足交流潮流的节点电压, 而其它三种方法均可直接得到节点电压。本节分别对四种方法求出的负荷接入相位、三相不平衡度和网损率进行对比, 通过系统的三相不平衡度和网损率来比较不同换相方案的优劣。

##### 1) 负荷接入相位

对于最小换相时间, 如果换相时间过短, 频繁换相会增加机械开关的磨损, 增加换相成本; 而如果换相时间过长, 可能无法及时响应负荷的波动, 降低三相不平衡度优化效果, 因此在本算例中, 根据日负荷曲线用电高峰时长, 设定三相负荷最小换相时间为 4 小时。四种优化方法得到的负荷最优换相方案如图 2 所示。对于三相节点, 选取其中一个负荷来进行展示其换相结果。可以看到四种方案的换相时间均大于最小换相时间, 满足约束条件。

为了验证四种换相方案的优劣, 需要带入求解之后的负荷接入相位, 进一步计算系统的网损率以及系统的电压三相不平衡度。

##### 2) 三相不平衡度

四种方法的目标函数与式(1)相同, 根据国标中的定义<sup>[26]</sup>, 系统三相电压零序分量与正序分量的方均根的百分比需要在一定范围之内。三相不平衡度可以由附录 A 公式计算得到。

计算每个小时的不平衡度, 结果如图 3 所示, 三相节点每个小时的不平衡度的统计分布如图 4 的箱型图所示。根据国家标准, 在中低压配电网中电压零序分量与正序分量模值的比值  $\beta_{t, i}^1$  应该小于 2%。



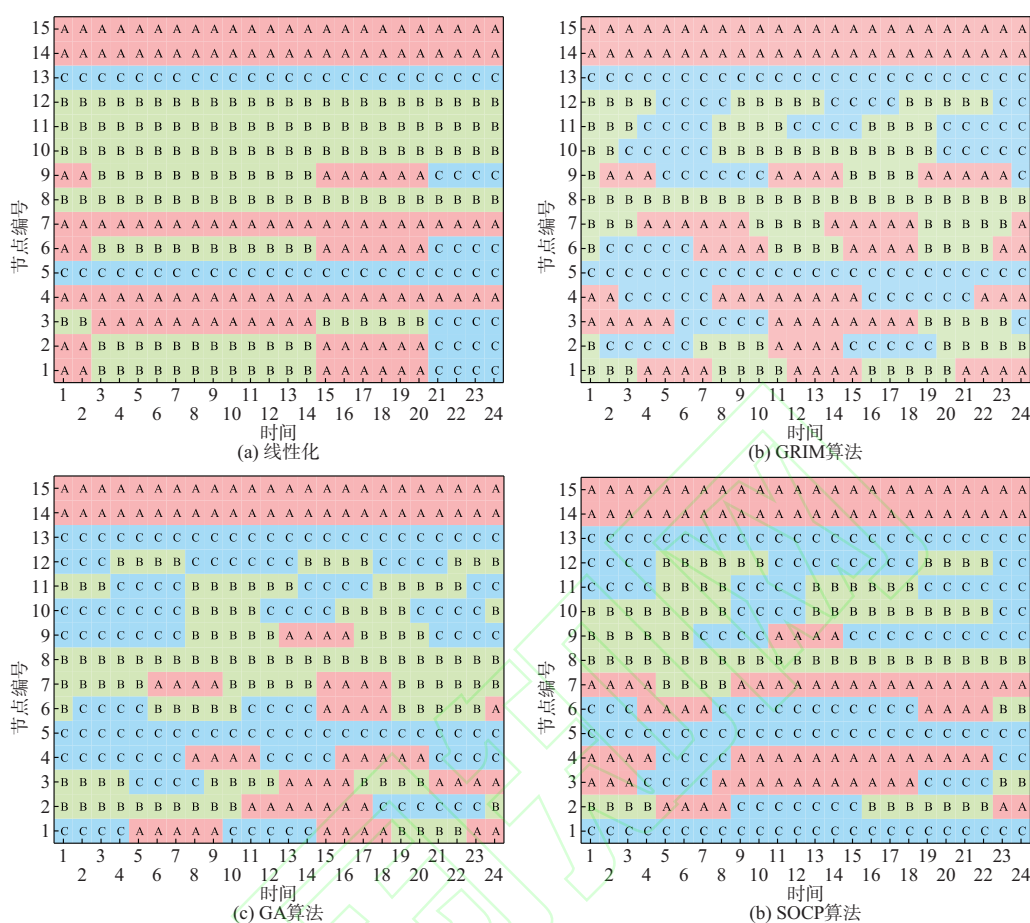


图2 四种方法的24小时负荷换相方案  
Fig. 2 24-hour load commutation scheme of four methods

由图4可以看出,线性化和高斯随机迭代法得出的零序电压不平衡度分布更为集中,遗传算法和SOCP得到的零序电压不平衡度更为分散,但电压不平衡度都小于2%。

### 3) 网损率

不同换相方案所得到的系统网损率的结果如表1所示。线性化方法中,由于忽略了线路损耗且将功率平衡方程进行了线性化,求解得到的电压只有幅值且并不能满足交流电压潮流约束。因此将线性化得到的电压幅值作为初始值,通过牛拉法计算得到准确的交流潮流的电压结果。系统的网损可以通过附录A公式计算。

由表1可以看出高斯随机迭代法得到的不平衡度和网损率都小于其它三种方法,即高斯随机迭代法得到的负荷换相方案更优。

### 4.1.2 灵敏度分析

将负荷不平衡度分别设为10%、20%和30%,负荷不平衡度逐渐加大之后,线性化方法优化得到的换相策略只有部分节点的换相方法发生了变化,而高斯随机迭代法、遗传算法以及SOCP方法得到

的换相策略中所有节点都发生了变化,具体换相方案如附录C所示。因此高斯随机迭代法、遗传算法和SOCP方法对于负荷不平衡度的变化有着更强的响应能力,得到的优化策略能够根据不平衡度进行系统性的调整,使系统能够更灵活、更精细地响应三相不平衡问题。

进一步比较四种方法得到的24小时系统网损率,结果如图5所示。可以看到无论如何调整系统负荷的不平衡度,高斯随机迭代法得到的网损率都明显低于其他四种方法的网损率。

对于系统电压不平衡度,有着与网损率同样的结果。当负荷不平衡度分别为10%、20%和30%时,线性化得到的换相方案电压不平衡度为0.207%、0.209%和0.210%,遗传算法得到的换相方案电压不平衡度为0.589%、0.594%和0.597%,SOCP得到的换相方案电压不平衡度为0.126%、0.129%和0.134%,高斯随机迭代法得到的换相方案电压不平衡度为0.0210%、0.0294%和0.0235%,远低于其它三种方法。综合系统电压不平衡度和网损率,可得高斯随机迭代法得到的换相方案相较于



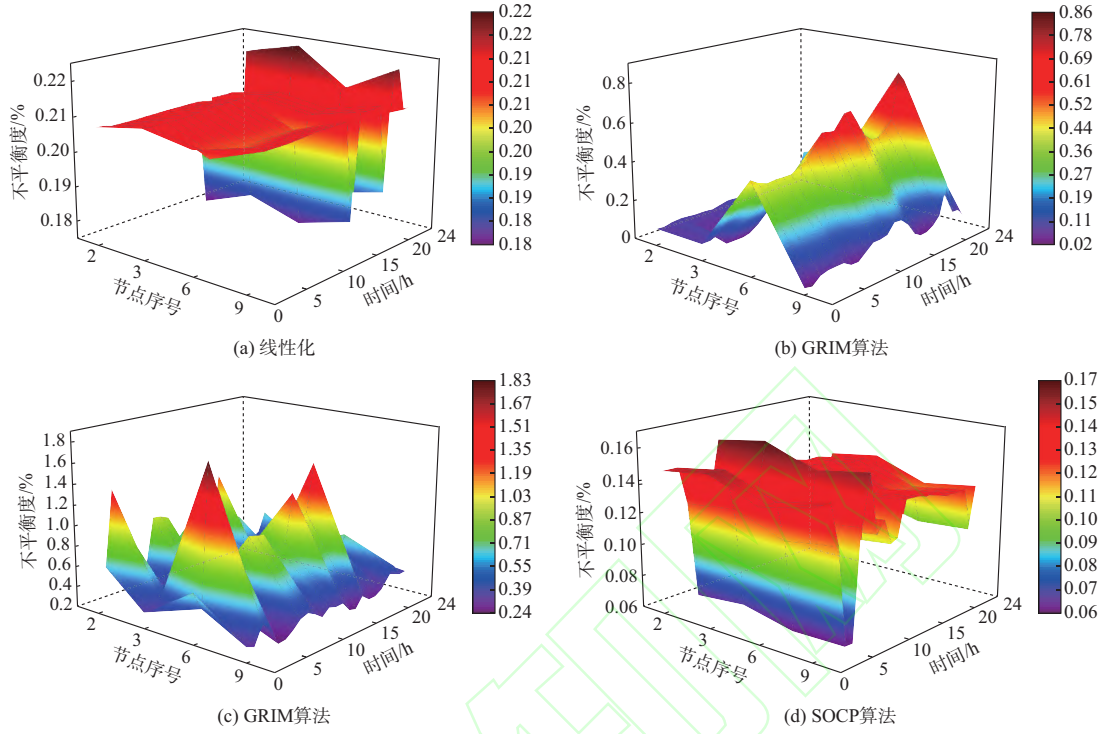
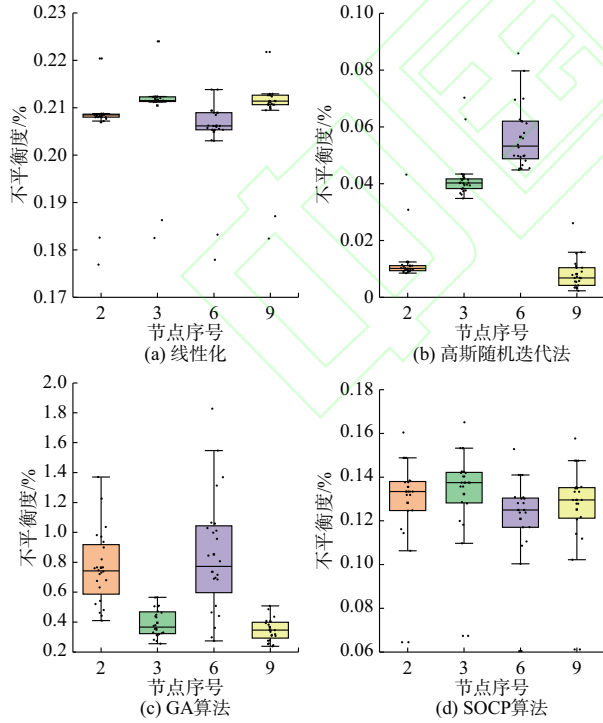


图3 24小时零序电压与正序分量模值比值

Fig. 3 The ratio of 24-hour zero-sequence voltage to positive-sequence component modulus

图4 24小时零序电压与正序分量模值比值箱型图  
Fig. 4 24-hour zero-sequence voltage and positive sequence component modulus ratio box plot

其他四种方法得到的换相方案是更优的。

#### 4.1.3 松弛精确性

为了验证本文所使用的迭代法的收敛性,定义

表1 四种换相方案的系统网损率和三相不平衡度对比  
Table1 Comparison of system network loss ratio and three-phase unbalance degree calculated by four methods

方案	三相不平衡度/%	网损率/%
线性化	0.207 0	0.070 2
GRIM	0.021 0	0.045 9
GA	0.058 9	0.092 7
SOCP	0.126 0	0.091 4

每次迭代矩阵的迹与最大特征值之间的差为  $d$ , 具体如式(50)所示。

$$d = \max_t \{ \text{Tr}(X_t^{(\kappa)}) - \lambda_{\max}(X_t^{(\kappa)}) \} \quad (49)$$

迭代结果如附录B中图2所示, 可以看到迭代过程单调递减, 并且逐渐收敛。

由于求解器的精度有限, 因此本文利用特征根来检验高斯迭代法得到的解  $X_t$  是否满足秩一约束。定义  $X_t$  的两个最大特征根分别为  $\lambda_{1,t}$  和  $\lambda_{2,t}$ , 两个特征根比值的绝对值越小, 表明两个特征根相差的倍数越大, 即  $X_t$  的秩更接近一。定义最大松弛偏差如式(51)所示。

$$D_{\text{gap}} = \max_t \{ \lg |\lambda_{2,t} / \lambda_{1,t}| \} \quad (50)$$

通过  $D_{\text{gap}}$  的值, 即可衡量SDP松弛精确性,  $D_{\text{gap}}$  的值越小, 表明SDP所得结果精确性越高。

各个时段的松弛偏差值如附录B中图3所示,

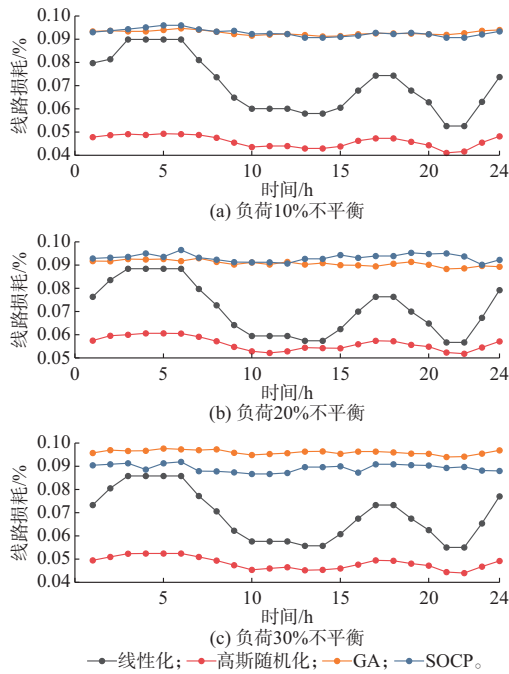


图5 四种方法的网损率对比结果

Fig. 5 Comparisons of network loss ratio of four methods

高斯随机迭代法得到的最大松弛偏差为 $-10.61$ ,这表明各个时段下高斯迭代法所得解的两个最大特征根的比值不超过 $10^{-10}$ ,可以表明松弛解是满足秩一约束的;而SOCP得到的最大松弛偏差为 $-0.065$ ,这表明各个时段SOCP所得解的两个最大特征根的比值接近1。即SOCP得出的松弛解并不满足秩一约束,不是原问题的可行解,而本文所提高斯随机迭代法得到的结果在误差允许的范围内是精确的。

#### 4.2 IEEE其他节点系统

除IEEE 15节点系统之外,本文还测试了IEEE其他节点系统,如IEEE 33、69、74节点系统。负荷的动态特性仍然采用附录B中表1的日负荷曲线。每个算例选择1个节点,负荷每小时所在相的变化如附录D所示。由4.1节可以看出SOCP得到的解非原问题的可行解,而遗传算法计算速度慢,无法处理IEEE 33、69、74节点系统,因此本节仅与线性化方法进行比较。

计算了不同算例两种方案的24小时平均三相不平衡度和系统网损率,由表2可以看出,对于其他节点系统,高斯随机迭代法得到的系统三相不平衡度和系统网损率低于线性化法,说明本文所提高斯随机迭代法得到的换相策略对其他节点系统也是更优的。

通过比较负荷不平衡度为10%、20%和30%时,两种方法得到的24小时系统网损率,来比较线性化方法和高斯随机迭代法得到的最优负荷换相策

表2 不同算例类型下两种负荷换相方案对比  
Table2 Comparison of two load commutation schemes under different cases

算例类型	零序不平衡/%		系统网损率/%	
	线性化	GRIM	线性化	GRIM
33节点	0.627	0.141	0.669	0.248
69节点	0.463	0.182	0.854	0.292
74节点	0.995	0.440	1.21	0.755

略的优劣。由表3可以看到,对于IEEE其他节点系统,同样随着负荷不平衡度的增大,网损率没有明显的变化,而GRIM得到的换相方案网损率更低。

表3 不同算例类型下两种负荷换相方案网损率对比  
Table3 Comparison of system loss rate of two load commutation schemes under different cases

算例类型	负荷10%不平衡度/%		负荷20%不平衡度/%		负荷30%不平衡度/%	
	线性化	GRIM	线性化	GRIM	线性化	GRIM
33节点	0.669	0.248	0.610	0.253	0.725	0.266 7
69节点	0.854	0.292	0.868	0.311	0.870	0.348 0
74节点	1.210	0.755	1.270	0.767	1.350	0.773 0

计算了不同算例高斯随机迭代法的最大松弛偏差,对于其他33、69、74节点系统,高斯随机迭代法得到的最大松弛偏差分别为 $-6.04$ 、 $-5.30$ 和 $-5.47$ ,均小于 $-5$ ,这表明各个时段下高斯迭代法所得解的两个最大特征根相差较大,可以认为满足秩一约束。

#### 5 结语

本文提出了面向三相不平衡治理的日前最优换相模型,所提模型综合考虑了相间耦合约束、不平衡度约束、潮流约束、换相时间约束和安全约束等一系列运行约束。由于模型中存在负荷接入相离散变量,目前没有成熟的求解器可以对混合整数半定规划问题进行求解。因此本文使用二次等式约束转换了离散变量,将模型转化为半定规划问题,进而通过高斯随机化和迭代法进行了无间隙优化求解。通过算例分析可知,本文所提方法收敛性好,与传统线性化方法相比较,显著降低了系统不平衡度和网络损耗,在计算精度方面表现优越。但是对于大规模系统,本文所提方法所用时间较高,未来可以考虑通过并行算法或者通过图论知识对大规模配电网进行拆分来提高计算效率。

附录见本刊网络版,点击<http://www.aeps-info.com/aeps/article/abstract/20250422009>,或扫描英文摘要后二维码,可阅读全文。

## 参考文献

- [1] 李英量,白博旭,朱琦,等.基于电动汽车充电站的不平衡配电网自愈及优化运行[J].电力建设,2024,45(6):37-46.  
LI Yingliang, BAI Boxu, ZHU Qi, et al. Self-healing and optimal operation of unbalanced distribution network based on electric vehicle charging station[J]. Electric Power Construction, 2024, 45(6): 37-46.
- [2] 唐巍,李天锐,张璐,等.基于三相四线制最优潮流的低压配电网光伏-储能协同控制[J].电力系统自动化,2020,44(12):31-40.  
TANG Wei, LI Tianrui, ZHANG Lu, et al. Coordinated control of photovoltaic and energy storage system in low-voltage distribution networks based on three-phase four-wire optimal power flow[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(12): 31-40.
- [3] LI H, LV C, ZHANG Y F. Research on new characteristics of power quality in distribution network [C]// 2019 IEEE International Conference on Power, Intelligent Computing and Systems (ICPICS), July 12-14, 2019. Shenyang. 6-10.
- [4] 石帮松,张靖,何宇,等.基于动态博弈的配电网单相电力用户用电行为分析[J].电力系统自动化,2017,41(14):87-91.  
SHI Bangsong, ZHANG Jing, HE Yu, et al. Electricity consumption behavior analysis of single-phase power consumers in distribution network based on dynamic game theory [J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(14): 87-91.
- [5] 陈洁.考虑三相不平衡潮流的微网分相优化调度[J].电力自动化设备,2018,38(3):184-193.  
CHEN Jie. Optimal single-phase scheduling for microgrid considering unbalanced three-phase power flow [J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(3): 184-193.
- [6] 李浩,解超,周伟绩,等.采用分相重合方式的风电送出线路自适应重合策略[J].电力建设,2023,44(5):94-107.  
LI Hao, XIE Chao, ZHOU Weiji, et al. Adaptive reclosing scheme for wind power outgoing line using partial-phase reclosing [J]. Electric Power Construction, 2023, 44(5): 94-107.
- [7] WANG L, LAM C S, WONG M C. Multifunctional hybrid structure of SVC and capacitive grid-connected inverter (SVC//CGCI) for active power injection and nonactive power compensation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(3): 1660-1670.
- [8] 李传健,刘前进.考虑风力发电随机性的配电网重构[J].电力系统自动化,2010,34(20):34-39.  
LI Chuanjian, LIU Qianjin. Distribution network reconfiguration considering randomness of wind power generation [J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(20): 34-39.
- [9] 闵亮,姜铨伟,杨进,等.考虑换相软开关三相不平衡调节的主动配电网多目标运行优化[J].电力系统自动化,2023,47(12):56-65.  
MIN Liang, LOU Chengwei, YANG Jin, et al. Multi-objective operation optimization of active distribution network considering three-phase unbalance regulation of phase-switching soft open points [J]. Automation of Electric Power Systems, 2023, 47(12): 56-65.
- [10] 李家桥,王国帮,张明乐,等.面向台区三相不平衡治理的自动换相装置选址定容规划[J].电力系统自动化,2022,46(19):62-69.  
LI Jiaqiao, WANG Guobang, ZHANG Mingle, et al. Siting and sizing planning of automatic commutation device for three-phase unbalance mitigation in distribution station area [J]. Automation of Electric Power Systems, 2022, 46(19): 62-69.
- [11] 吴文传,张伯明.拟全局最优的配电网实时网络重构法[J].中国电机工程学报,2003,23(11):69-73.  
WU Wenchuan, ZHANG Boming. A quasi-global optimal method for real-time network reconfiguration of distribution system[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(11): 69-73.
- [12] 董雷,吴怡,张涛,等.基于强化学习的含智能软开关主动配电网双层优化方法[J].电力系统自动化,2023,47(6):59-68.  
DONG Lei, WU Yi, ZHANG Tao, et al. Reinforcement learning based double-layer optimization method for active distribution network with soft open point [J]. Automation of Electric Power Systems, 2023, 47(6): 59-68.
- [13] 李振坤,陈星莺,余昆,等.配电网重构的混合粒子群算法[J].中国电机工程学报,2008,28(31):35-41.  
LI Zhenkun, CHEN Xingying, YU Kun, et al. Hybrid particle swarm optimization for distribution network reconfiguration [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(31): 35-41.
- [14] JABR R A, SINGH R, PAL B C. Minimum loss network reconfiguration using mixed-integer convex programming [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(2): 1106-1115.
- [15] TAYLOR J A, HOVER F S. Convex models of distribution system reconfiguration [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(3): 1407-1413.
- [16] LI Y Z, HAO G K, LIU Y, et al. Many-objective distribution network reconfiguration via deep reinforcement learning assisted optimization algorithm [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2022, 37(3): 2230-2244.
- [17] 胡明月,张慧芬,苗淑平,等.基于改进鸽群算法的台区三相负荷不平衡相序调整方法[J].中国电力,2022,55(9):121-128.  
HU Mingyue, ZHANG Huifen, MIAO Shuping, et al. Phase sequence adjustment method for three-phase load imbalance in station area based on improved pigeon-inspired optimization [J]. Electric Power, 2022, 55(9): 121-128.
- [18] 方恒福,盛万兴,王金丽,等.配电台区三相负荷不平衡实时在线治理方法研究[J].中国电机工程学报,2015,35(9):2185-2193.  
FANG Hengfu, SHENG Wanxing, WANG Jinli, et al. Research on the method for real-time online control of three-phase unbalanced load in distribution area [J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(9): 2185-2193.
- [19] ROBBINS B A, DOMINGUEZ-GARCIA A D. Optimal reactive power dispatch for voltage regulation in unbalanced distribution systems [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(4): 2903-2913.
- [20] 徐添锐,丁涛,李立,等.适应三相不平衡主动配电网无功优化的二阶锥松弛模型[J].电力系统自动化,2021,45(24):81-88.  
XU Tianrui, DING Tao, LI Li, et al. Second-order cone relaxation model adapting to reactive power optimization for three-phase unbalanced active distribution network [J].

- Automation of Electric Power Systems, 2021, 45(24): 81-88.
- [21] DALL' ANESE E, ZHU H, GIANNAKIS G B. Distributed optimal power flow for smart microgrids [J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2013, 4(3): 1464-1475.
- [22] GAN L W, LOW S H. Convex relaxations and linear approximation for optimal power flow in multiphase radial networks [C]// 2014 Power Systems Computation Conference, August 18-22, 2014. Wrocław. 1-9.
- [23] 林哲,胡泽春,宋永华.最优潮流问题的凸松弛技术综述[J].中国电机工程学报,2019,39(13):3717-3728.  
LIN Zhe, HU Zechun, SONG Yonghua. Convex relaxation for optimal power flow problem: a recent review[J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(13): 3717-3728.
- [24] Gupta R K, Molzahn D K. Optimizing Phase Allocation in Unbalanced Power Distribution Networks using a Linearized DistFlow Formulation [J]. arXiv preprint arXiv: 2501.06917, 2025.
- [25] GIRIGOUDAR K, ROALD L A. On the impact of different voltage unbalance metrics in distribution system optimization [J]. Electric Power Systems Research, 2020, 189: 106656.
- [26] 电能质量—三相电压不平衡:GB-T 15543—2008[S]. 2009.  
Power quality-three-phase voltage imbalance: GB-T 15543-2008 [S]. 2009.
- [27] LAVAEI J, LOW S H. Zero duality gap in optimal power flow problem [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 92-107.
- [28] YU X H, SHEN J C, ZHANG J, et al. Alternating minimization algorithms for hybrid precoding in millimeter wave MIMO systems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2016, 10(3): 485-500.
- [29] LUO Z-Q, MA W K, SO A, et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3): 20-34.
- [30] SHI Y, TUAN H D, TUY H, et al. Global optimization for optimal power flow over transmission networks [J]. Journal of Global Optimization, 2017, 69(3): 745-760.

李嘉兴(2000—),男,硕士研究生,主要研究方向:配电网三相不平衡治理。E-mail:ljx9981@stu.xjtu.edu.cn

刘梦奇(2001—),男,硕士研究生,主要研究方向:配电网优化运行。E-mail:2193412932@stu.xjtu.edu.cn

张耀(1988—),男,通信作者,副教授,博士生导师,主要研究方向:可再生能源预测与并网消纳、电力大数据与人工智能等。E-mail:yaozhang\_ee@xjtu.edu.cn

(编辑 王梦岩)

## The Optimal Day-Ahead Commutation Strategy for Three-Phase Unbalanced Distribution Network Based on Semi-Positive Definite Programming

LI Jiaxing, LIU Mengqi, ZHANG Yao, DONG Haomiao, ZHANG Beixi, LIAO Jian

(School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** With the widespread popularization of unbalanced equipment such as distributed generation and electric vehicles, a series of problems such as increased network loss and increased three-phase imbalance have appeared in the operation of distribution network. In order to reduce the voltage unbalance degree of distribution system with mixed phase, a day-ahead optimal commutation model of distribution load for three-phase unbalance control is proposed. Firstly, a mixed integer semi-definite optimization model with minimum voltage imbalance, including system commutation time constraints, distribution network three-phase power flow constraints and system security operation constraints is established. Secondly, by transforming the discrete variables into the form of equality quadratic constraints, the day-ahead optimal commutation model of three-phase unbalanced distribution network is obtained. Thirdly, through the Gaussian random selection algorithm, the rank one constraint is restored, and the optimal load commutation strategy is solved. Finally, the IEEE standard example is used to compare the proposed method with the three-phase power flow linearization, and the correctness and effectiveness of the proposed model and solution method are verified.

This work is supported by National Key R&D Program of China (No. 2022YFB2403500) and Natural Science Basic Research Program of Shaanxi (No. 2025JC-YBMS-441).

**Key words:** three-phase unbalance; optimal power flow; optimal commutation; semi-positive definite programming; Gaussian randomization





## 附录 A

首先定义一组在  $R^{3n}$  空间中的基向量  $e_1^a, e_1^b, e_1^c, \dots, e_n^a, e_n^b, e_n^c$ , 对于给定的电力系统中的每个节点  $i$ , 定义如下的矩阵:

$$Y_i^\phi = e_i^\phi (e_i^\phi)^\top Y \quad (1)$$

$$Y_i^\phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} & \operatorname{Im}\{(Y_i^\phi)^\top - Y_i^\phi\} \\ \operatorname{Im}\{Y_i^\phi - (Y_i^\phi)^\top\} & \operatorname{Re}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{Y}_i^\phi = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{Im}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} & \operatorname{Re}\{Y_i^\phi - (Y_i^\phi)^\top\} \\ \operatorname{Re}\{(Y_i^\phi)^\top - Y_i^\phi\} & \operatorname{Im}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} e_i^\phi (e_i^\phi)^\top & 0 \\ 0 & e_i^\phi (e_i^\phi)^\top \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} (e_i^\phi - e_j^\phi)(e_i^\phi - e_j^\phi)^\top & 0 \\ 0 & (e_i^\phi - e_j^\phi)(e_i^\phi - e_j^\phi)^\top \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中:  $Y$  是三相系统的导纳矩阵, 如果存在缺相的节点, 则将相应的基向量  $e_i^\phi$  置为 0 向量。

公式(22)中省略下标  $t$ ,  $P_{inj,i}^\phi$  证明过程如下,  $Q_{inj,i}^\phi$  证明过程同理:

$$\begin{aligned} P_{inj,i}^\phi &= \operatorname{Re}\{V_i^\phi (I_i^\phi)^*\} = \operatorname{Re}\{(V^\phi)^* e_i^\phi (e_i^\phi)^* I^\phi\} = \operatorname{Re}\{(V^\phi)^* Y_i^\phi V^\phi\} \\ &= \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{Y_i^\phi\} & -\operatorname{Im}\{Y_i^\phi\} \\ \operatorname{Im}\{Y_i^\phi\} & \operatorname{Re}\{Y_i^\phi\} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} & \operatorname{Im}\{(Y_i^\phi)^\top - Y_i^\phi\} \\ \operatorname{Im}\{Y_i^\phi - (Y_i^\phi)^\top\} & \operatorname{Re}\{Y_i^\phi + (Y_i^\phi)^\top\} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top Y_i^\phi \mathbf{x} = \operatorname{Tr}\{Y_i^\phi \mathbf{x} \mathbf{x}^\top\} \end{aligned} \quad (6)$$

系统的网损可以通过式(7)计算得到。

$$L_{\text{loss}} = \sum_{t=1}^T \sum_{i,j \in \mathcal{N}} (I_{ij,t}^\phi)^2 R_{ij}^\phi \quad (7)$$

网损率如式(8)所示,  $P_{\text{loss}}$  为线路的损耗,  $P_{\text{DG}}$  为发电设备的输出功率。

$$\eta = \frac{\sum P_{\text{loss}}}{\sum P_{\text{DG}}} \quad (8)$$

由对称分量法可以计算节点  $i$  的各序分量, 定义变换矩阵  $F$  如式(9)所示。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad a = e^{j2\pi/3} \quad (9)$$

从而可以得到节点的正序、负序和零序电压。

$$\tilde{V}_{i,t} = [\tilde{V}_{i,t}^{(1)} \quad \tilde{V}_{i,t}^{(2)} \quad \tilde{V}_{i,t}^{(0)}]^T \quad (10)$$

$$\tilde{V}_{i,t} = FV_{i,t} \quad (11)$$

$$\beta_{i,t}^{(1)} = \frac{\tilde{V}_{i,t}^{(0)}}{\tilde{V}_{i,t}^{(1)}} \times 100\% \quad (12)$$

式(10)中,  $\tilde{V}_i^{(1)}$ 、 $\tilde{V}_i^{(2)}$  和  $\tilde{V}_i^{(0)}$  分别为节点  $i$  的正序、负序和零序电压分量。

## 附录 B

**算法：** 高斯随机迭代法

**输入：** 混合相系统参数，总优化时段  $T$

**输出：** 满足秩一约束的最优解  $\mathbf{X}_{l,t}^{**}, \mathbf{S}_{l,t}^{**}$

```

1  初始化负荷接入相的状态
1  输入负荷信息
2  for  $t=1$  to  $T$  do
3      定义电压变量  $\mathbf{X}_t$ ，负荷接入相变量  $\mathbf{S}_t$ 
4      24h的潮流约束、电压约束等
5      添加换相时间约束
6      松弛(37)中的秩一约束
7  end
8  求解(38)的最优解  $\mathbf{X}_t^*, \mathbf{S}_t^*$ 
9  if  $\text{rank}(\mathbf{X}_t^*) \neq 1$  and  $\text{rank}(\mathbf{S}_t^*) \neq 1$ 
10     得到 $L$ 组高斯随机化后的  $\mathbf{S}_t^*$ 
11     恢复整数解
12      $\kappa = 0$ 
13     While  $\text{Tr}(\mathbf{X}_t^*) - \lambda_{\max}(\mathbf{X}_t^*) > \varepsilon$ 
14         求解目标函数(48)的最优解
15         计算  $\omega_{\max}^{\kappa}$ 
16          $\kappa = \kappa + 1$ 
17     end
18     计算 $L$ 组目标函数值 $C$ 
19     取目标函数最小的一组解
20     得到最优解  $\mathbf{X}_{l,t}^{**}, \mathbf{S}_{l,t}^{**}$ 
21 end
    
```

图 B1 高斯随机迭代法伪代码

Fig. B1 The pseudocode of Gaussian Randomized-Iterative Method

表 B1 典型日负荷曲线波动系数  
Table B1 Fluctuation coefficient of typical daily load curve

时间	负荷
1~8h	1.1,1,0.9,0.9,0.9,0.9,1,1.1
8~16h	1.25,1.35,1.35,1.35,1.4,1.4,1.35,1.2
16~24h	1.1,1.1,1.2,1.3,1.55,1.55,1.3,1.1

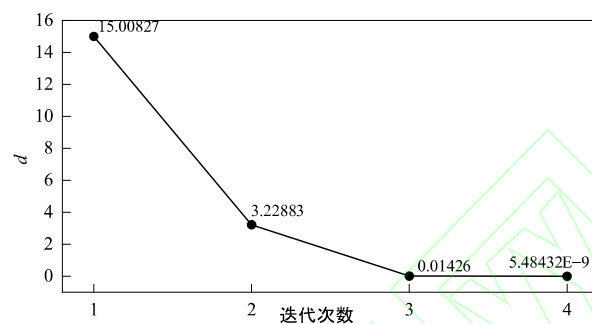
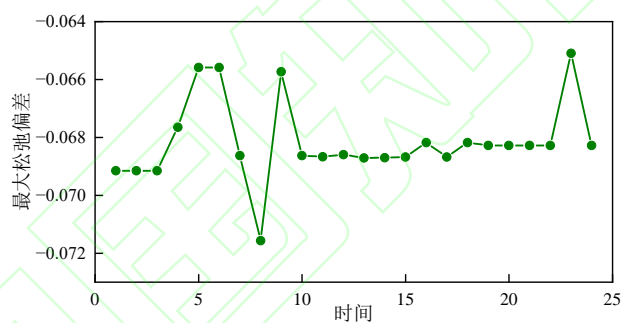
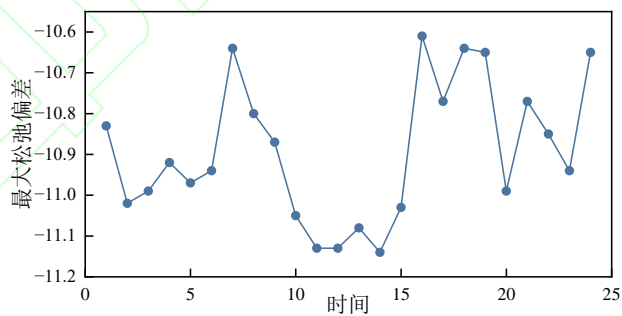


图 B2 高斯随机迭代法的收敛特性曲线  
Fig. B2 Convergence characteristic curve of GRIM



(a) SOCP



(b) 高斯随机迭代法

图 B3 24小时松弛偏差计算结果  
Fig. B3 Calculated 24-hour relaxation deviation

## 附录 C

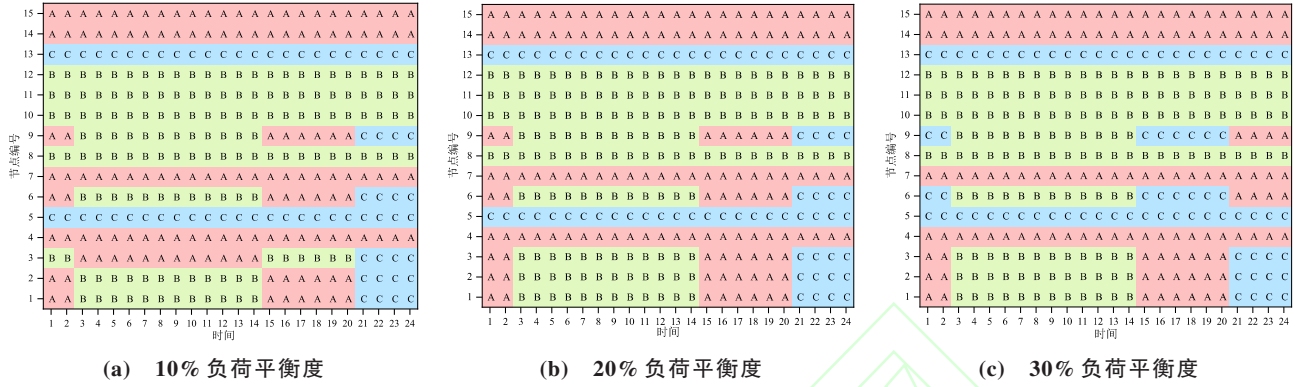


图 C1 不同负荷平衡度时线性化算法得到的负荷最优换相方案  
Fig. C1 The optimal load commutation scheme obtained by linearization at different load balance degrees

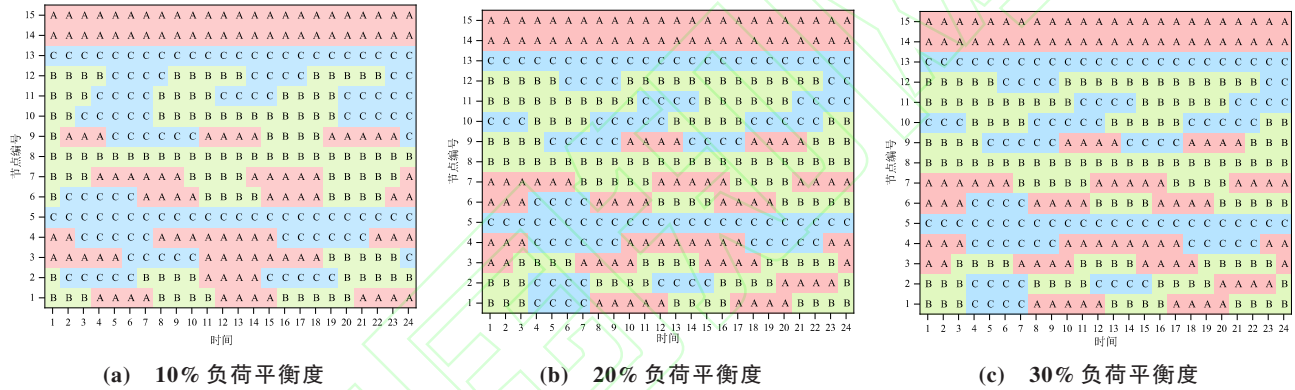


图 C2 不同负荷平衡度时 GRIM 算法得到的负荷最优换相方案  
Fig. C2 The optimal load commutation scheme obtained by GRIM at different load balance degrees

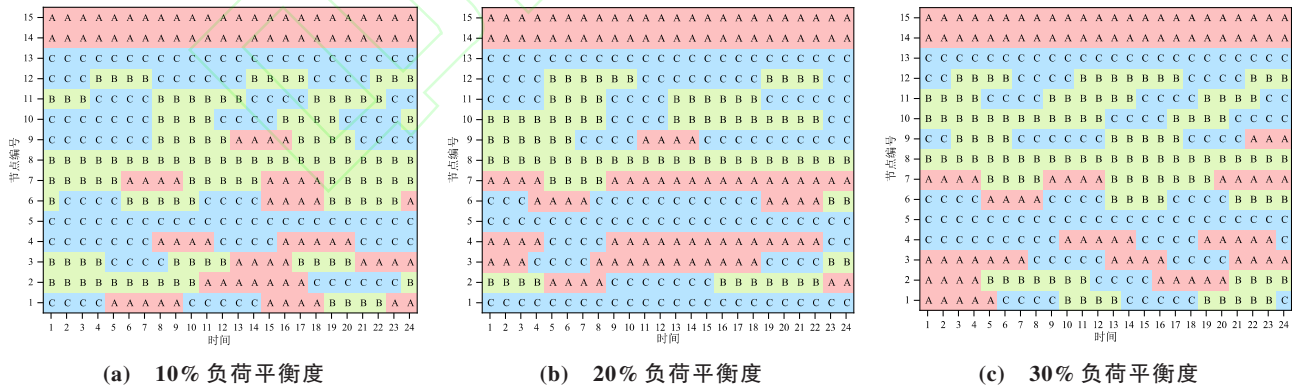


图 C3 不同负荷平衡度时 GA 算法得到的负荷最优换相方案  
Fig. C3 The optimal load commutation scheme obtained by GA at different load balance degrees



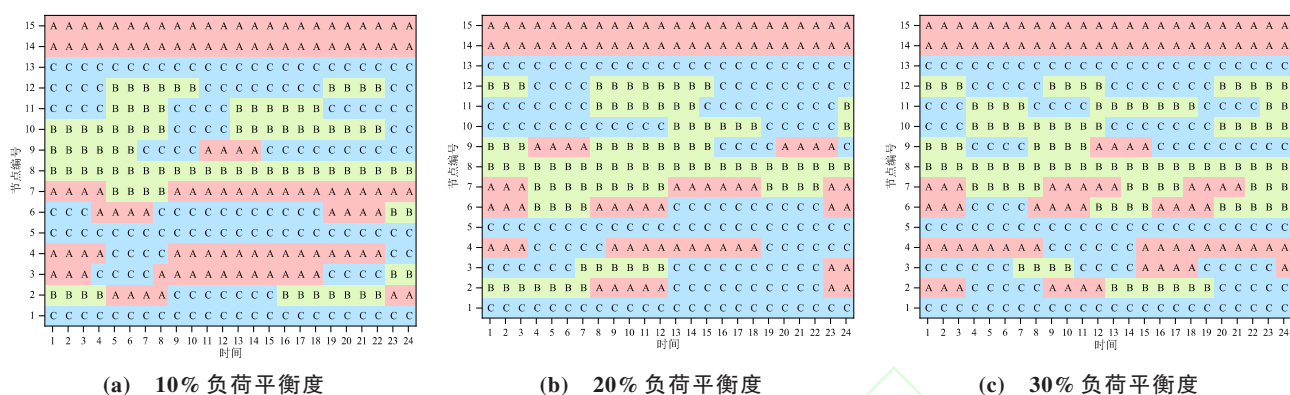


图 C4 不同负荷平衡度时 SOCP 算法得到的负荷最优换相方案  
Fig. C4 The optimal load commutation scheme obtained by SOCP at different load balance degrees

## 附录 D

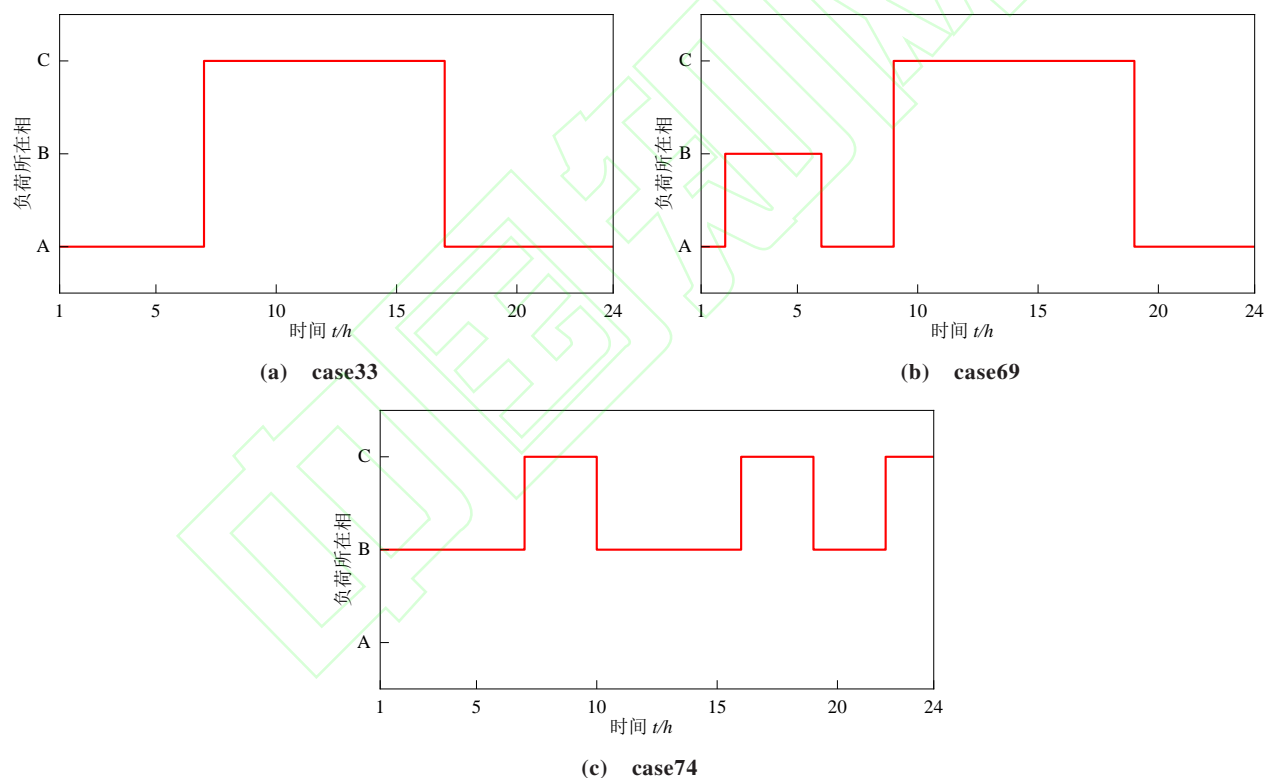


图 D1 节点 2 处负荷接入相位  
Fig. D1 The load access phase of node 2