Homework2 证明题

姓名：王宝琪 学号：22210980075

证明：

对于对数线性回归模型，我们可以认为因变量的对数服从线性回归模型，即如下式子成立：

$$\ln(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}^T\beta + \varepsilon$$

即：

$$\boldsymbol{y} = exp\{\boldsymbol{X}^T\beta + \varepsilon\}$$

其中向量$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{y}$独立，ε服从均值为 0，方差为σ^2的正态分布，且彼此独立，$\boldsymbol{X}$视为已知。因此$\boldsymbol{X}^T\beta + \varepsilon \sim N(\boldsymbol{X}^T\beta, \sigma^2)$, 不妨设$\boldsymbol{X}^T\beta = m$，所以因变量的期望可以由以下积分求得：

$$E(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{x - \frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\sigma^2+m)]^2 + (\frac{\sigma^2}{2}+m)\}dx$$

令$x-(\sigma^2+m) = t$, 则上式等于：

$$= \exp\{\frac{\sigma^2}{2}+m\}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2\}dt$$

上式右边积分正是正态分布$N(0,\sigma^2)$的密度函数在定义域内的积分，因此为 1。所以上边因变量期望：

$$E(\boldsymbol{y}) = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}+m\right\} = \exp\{\frac{\sigma^2}{2}+\boldsymbol{X}^T\beta\}$$

即证。