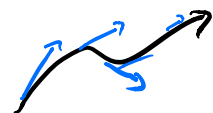


Review facts:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{non-linear.} \\ \text{autonomous.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = f\hat{i} + g\hat{j} \rightarrow \overset{\text{速度场}}{\text{velocity field}}$$

$$\text{soln: } \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \rightarrow \text{trajectories of field } F$$

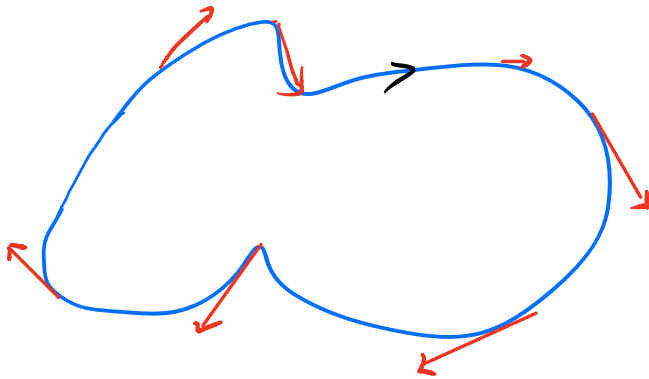


$\Rightarrow$  临界点.

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{const solns} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

●  $\rightarrow$  本讲主题.

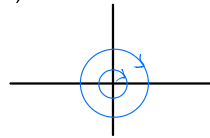
"closed trajectories"



闭合轨迹.

① → System 是 周期性  
periodic

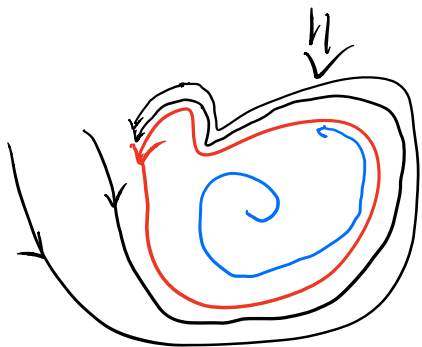
Ex  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm i \Rightarrow \vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$



② → 极限环  
"limit cycles"

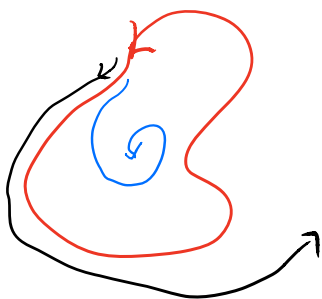
stable + closed traj. + isolated

旁边没有其它的 thing



→ 内圈与外圈的 traj 都在  
逐渐接近 极限环.

↓  
stable



逐渐远离,

↓  
unstable

closed traj.

① 极限环都是简单曲线, 不能与自己相交.

↓  
意义: 一种周期性运动, 在干扰它之后, 它会逐渐地回到原先的周期状态.

如: 呼吸, 心率.

例:

① 存在性问题.

由物理问题引导, 由机并机寻找.

不存在性问题.

两个定理:

# ① Bendixson's criterion. 本迪克松准则

→ 假定  $D$  是平面的一个区域, 计算向量场的散度? divergence

1. → 计算 divergence of 2-dims.

$$\operatorname{div} \vec{F} = f_x + g_y$$

假设  $\operatorname{div} \vec{F}$  在  $D$  内不为零. ( $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$  in  $D$ )

⇒  $D$  内没有 closed trajectory.

②. 
$$\begin{cases} x' = x^3 + y^3 \\ y' = 3x + y^3 + 2y \end{cases}$$

$\operatorname{div} F = 3x^2 + 3y^2 + 2 \neq 0$ . 恒大于 0. 在  $xy$  平面. plane

⇒ 没有 closed trajectory.

间接证明:

反证法: 没有一个 closed traj. 存在 in  $D$ .



计算通量的积分:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0.$$

$\vec{F}$  across  $C$ .

格林公式

$$= \iint_R \operatorname{div} \vec{F} \, dA$$

$\therefore \operatorname{div} \vec{F} > 0$  or  $\operatorname{div} \vec{F} < 0$

→ 18.02

即  $\text{div} \vec{F} \neq 0$  in  $R$ ,  
 则  $\iint \text{div} \vec{F} dA \neq 0$   
 $\rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0$   
 矛盾.

## ② 临界点理论

$\Rightarrow$  条件  $D$ . region, —  $xy$ -plane

$C \rightarrow D$  内的一条 closed trajectory, of system.

结论  $\Rightarrow C$  的内部有 临界点 — "critical point"



$\Downarrow$  逆否命题  $A \Rightarrow B$   
 $\text{not } B \Rightarrow \text{not } A$

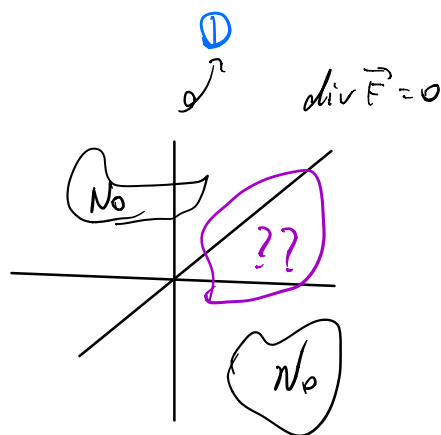
条件  $\Rightarrow$  如果  $D$  没有 临界点.

结论  $\Rightarrow$  它就没有 闭轨线.

例

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 + 1 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2x - 2y \rightarrow$$



② 临界点.

$x' \neq 0$ ,  $\Rightarrow$  没有 critical points.

$\Rightarrow$  No limit cycles.

Story: 二次 system.

$$\begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 + \boxed{dx + ey + f} \\ y' = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + \boxed{d'x + e'y + f'} \end{cases}$$

Plan: 一个二次 system 有 多次 极限环  $\rightarrow$  limit cycles. ??

1950s. 父子, Petrovski

~~~~~ ↓

max # 3

子 ↓

↓

Arnold → criticized it