

SYSTEMS

→ 方程组. 只有一个自变量
但多个因变量

$$x' = f(x, y, t)$$

$$y' = g(x, y, t)$$

$x, y \rightarrow$ dependent var.
($t \rightarrow$ independent var.), first order

"Linear system"

常数

方程组.

→

$$x' = ax + by + r_1(t)$$

$$y' = cx + dy + r_2(t)$$

g

其中 a, b, c, d 为常数. (不过 a, b, c, d 也可以为关于 t 的方程)

① "Linear homogeneous" 齐次线性

$$r_1 = 0, r_2 = 0$$

$$\text{即 } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

② \rightarrow "init condis."

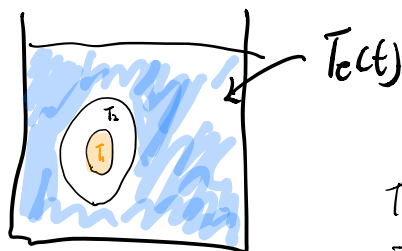
\rightarrow 所需条件个数与方程组总阶数一致

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

③ 建立 system,

"热传导"

"湿水鸡蛋"



问题?

$$\frac{dT_1}{dt} = ?$$

$$\frac{dT_2}{dt} = ?$$

$$T_1(0) = 40$$

$$T_2(0) = 45$$

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = a(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} = a(T_1 - T_2) + b(T_e - T_2) \end{cases}$$

写初始值时，按从左到右的顺序与轴从上到下的顺序一致。

$$\begin{cases} T_1' = -aT_1 + aT_2 \\ T_2' = aT_1 - (a+b)T_2 + bT_e(t) \end{cases}$$

adding $\boxed{} T_e \approx \ln e^{-kt}$

ice $\rightarrow \boxed{20^\circ\text{C}} T_e = 0.$

$a=2, b=3.$

$$\begin{cases} T_1' = -2T_1 + 2T_2 \\ T_2' = 2T_1 - 5T_2 + 3 \cdot \ln e^{-kt} \end{cases}$$

解：

eliminate : 消元法.

$$T_2 = \frac{T_1' + 2T_1}{2}, \text{ 代入 } T_2' \text{ 得 } \left(\frac{T_1' + 2T_1}{2}\right)' = 2T_1 - 5\left(\frac{T_1' + 2T_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T_1'' + 2T_1' = 4T_1 - 5T_1' - 10T_1 = -5T_1' - 6T_1.$$

Tips: 两个一阶线性方程组



一个只有一个因变量的二阶方程

$$T_1'' + 7T_1' + 6T_1 = 0$$

\Rightarrow 系数必须为正，保证了 system 的稳定，不然出现“振荡”解，就 \rightarrow As.

$$r^2 + 7r + 6 = 0$$

$$(r+1)(r+6) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -6$$

$$\text{解 } T_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-6t}$$

②. Next \rightarrow "必须用已知的 T_1 去找 T_2 "

step

因为考虑上述方法, 将得到更多的 任意常数, 且不相干

$$\downarrow T_2 = \frac{T_1' + 2T_1}{2} = \frac{1}{2} C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-6t}$$

即:

$$\begin{cases} T_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-6t} \\ T_2 = \frac{1}{2} C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-6t} \end{cases} \quad \begin{matrix} T_1 = 40 \\ \text{代入 } T_2 = 45 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 50 \\ C_2 = -10 \end{cases} \quad k'$$

??? 上述 system 有什么意义



几何意义

自治
Autonomous system
(t 是自变量, 但不出现在 RHS)

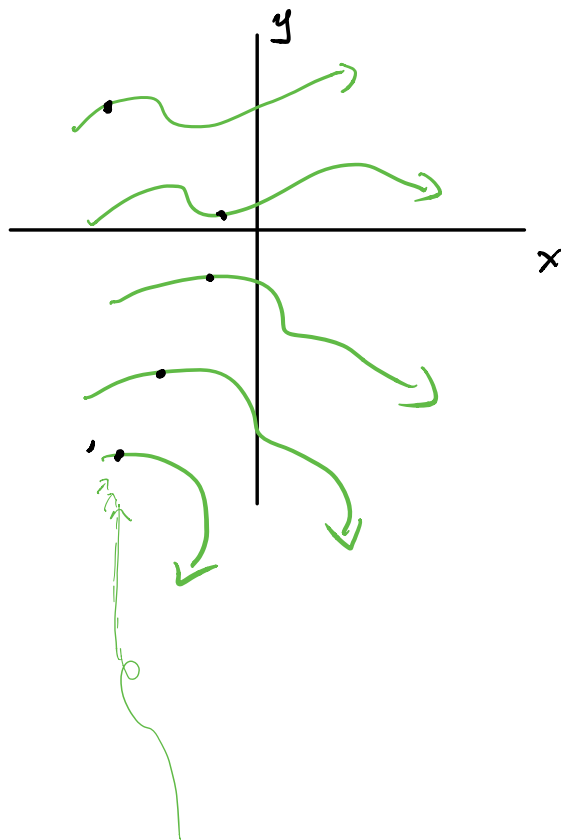
$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Soln.

参数方程组

参数化曲线
parameterized curve!

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow$$



给定任意一个 初始条件

存在一个通过它的 解

过程.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y) \\ y'(t) = g(x, y) \end{cases}$$

mean!

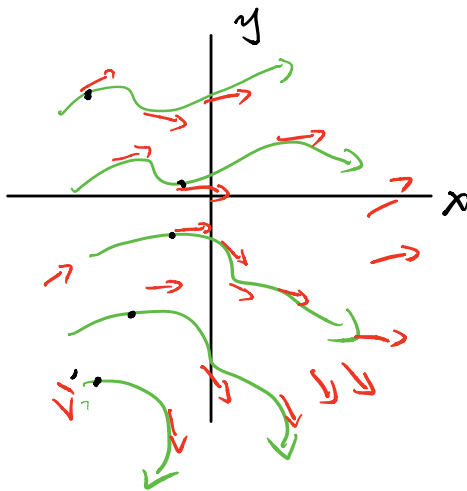
上面初始化的.

方程给出了 这点的 速度向量

↓ “速度场”

(自治)

两个一阶方程 就 等同于
一个速度的场,



system
of 1st-order
ODEs
(Autonomous)
= Vector
field

soln.
"parameterized
curve

???

速度场 vs 方向场