

行星运动的求解

先证一个引理：

圆锥曲线在顶点处的曲率半径等于该顶点与（最近的）焦点的距离。

证明：

在极坐标系下，设圆锥曲线的方程为 $r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ 。

顶点坐标为 $\left(\frac{r_0}{1 + \varepsilon}, 0\right)$ 。

任意一点曲率

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

$$\text{又 } \frac{dr}{d\theta} = \frac{r_0 \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}.$$

$$\therefore \text{在顶点处 } \kappa = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_0}{1 + \varepsilon}\right)^2 + 0}} = \frac{1 + \varepsilon}{r_0}.$$

$$\therefore \text{曲率半径 } \rho = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}.$$

□

设恒星的质量为 M ，万有引力常数为 G 。

轨道的极坐标方程可表示为 $r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$ ，其中 ε 为轨道离心率。

令 $\cos(\theta - \theta_0) = 1$ 得，近日点与恒星的距离 $r_m = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$ 。

近日点速率 v_m 满足 $\frac{v_m^2}{r_m} = \frac{GM}{r_m^2}$ 。

$$\therefore v_m = \sqrt{\frac{GM}{r_m}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)GM}{r_0}}$$

设 $h = v_m r_m = \sqrt{\frac{GM r_0}{1 + \varepsilon}}$ ，由角动量守恒，行星在轨道上运动时 $h = vr$ 不变。

单位时间行星与恒星连线扫过的面积

$$dS = \frac{1}{2} h dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM r_0}{1 + \varepsilon}} dt = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

若以行星位于近日点时为计时起点，则行星运动到 (r, θ) 处的时间

$$t = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{GM r_0}} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = r_0^2 \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{GM r_0}} \int_0^{\theta - \theta_0} \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}$$

经计算：

$$\int_0^{\theta} \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 - \varepsilon^2)(\varepsilon \cos \theta + 1)} + \frac{2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2}\right)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}, & 0 < \varepsilon < 1 \\ \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2}, & \varepsilon = 1 \\ \frac{\varepsilon \sin \theta}{(\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon \cos \theta + 1)} - \frac{2 \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \tan \frac{\theta}{2}\right)}{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}, & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

这里，我们省略了对可去间断点的函数值的补充定义。

于是已知 θ 、 r 、 t 中的任意一个，可求另外两者。