Solved zero energy model in topological superconductor

Wei Cheng

The model

In the basics $|p_z,\uparrow\rangle, |p_z,\downarrow\rangle, |d_{xz+iyz},\downarrow\rangle, |d_{xz-iyz},\uparrow\rangle$ 其中 TI 的部分为
$H_{TI}(k) = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 + Ak_z\tau_2\sigma_3$, 其中
$M(k) = M_0 + M_1(k_x^2 + k_y^2) + M_2k_z^2$, 其中 τ 表示轨道，σ 表示自旋。

考虑超导，以及 z 方向的 vortex，在基矢 $(c_k, c_{-k}^T(i\sigma_y))$ 下，BdG 哈密顿量可以写为

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} H_k - \mu & H_\Delta \\ H_\Delta^\dagger & \mu - H_k \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中

$$H_\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(r) & & & \\ & \Delta(r) & & \\ & & \Delta(r) & \\ & & & \Delta(r) \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 $\Delta(r) = \frac{\Delta_0}{\xi} r e^{-i\theta}$，其中 ξ 表示超导的相干长度.

因为 vortex 沿着 z 轴方向，因此 z 方向依然具有平移不变性，k_z 依然是一个好量子数，因此 H_{BdG} 可以按 k_z 分块对角，因为 TI 反带的点在 $k_z = 0$或π，考虑 $k_z = 0$。同时我们考虑系统在 $k_x - k_y$ 平面有连续旋转对称性，因此可以定义角动量 $J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}\sigma_3$。现在先来求解 H_k 的本征态

$$H_{TI} = (M_0 + Mk^2)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 \tag{3}$$

可以找到算符 $\tau_3\sigma_3$ 与其对易，按其本征值分块对角可以得到块对角矩阵为

$$\begin{pmatrix} M(k) & -iAk_- & 0 & 0 \\ iAk_+ & -M(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(k) & -iAk_+ \\ 0 & 0 & iAk_- & -M(k) \end{pmatrix} \tag{4}$$

由此可以得到其能量本征值为

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{M(k)^2 + A^2k^2} \tag{5}$$

同时可以解得 H_{TI} 的四个本征态为

$$|\psi_1^+\rangle = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} E+M(k) \\ 0 \\ 0 \\ iAke^{i\theta} \end{pmatrix} |\psi_1^-\rangle = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} -E+M(k) \\ 0 \\ 0 \\ iAke^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$|\psi_2^+\rangle = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 \\ E+M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} |\psi_2^-\rangle = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 0 \\ -E+M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中上标 $\pm$ 表示能量的正负，下标 1,2 表示处于 $\tau_3\sigma_3$ 的不同本征值，a,b 表示归一化系数。由此可以得到对角化 H_{TI} 哈密顿量为矩阵为

$$U = (|\psi_1^+\rangle, |\psi_2^+\rangle, |\psi_1^-\rangle, |\psi_2^-\rangle) \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E+M(k)}{a} & 0 & \frac{-E+M(k)}{b} & 0 \\ 0 & \frac{E+M(k)}{a} & 0 & \frac{-E+M(k)}{b} \\ 0 & \frac{iAke^{-i\theta}}{a} & 0 & \frac{iAke^{-i\theta}}{b} \\ \frac{iAke^{i\theta}}{a} & 0 & \frac{iAke^{i\theta}}{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

将 H_{BdG} 写到动量空间并变换到极坐标系可得

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} H_k - \mu & i\Delta_e(\partial_{k_x} - i\partial_{k_y}) \\ i\Delta(\partial_{k_x} + i\partial_{k_y}) & \mu - H_k \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{pmatrix} H_k - \mu & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - i\frac{\partial_\theta}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + i\frac{\partial_\theta}{k}) & \mu - H_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

构造变换矩阵

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \tag{12}$$

可以得到

$$S^\dagger H_{BdG} S = \begin{pmatrix} U^\dagger & \\ & U^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k - \mu & H_\Delta \\ H_\Delta^\dagger & \mu - H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \\ & U \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} E(k) - \mu & U^\dagger H_\Delta U \\ U^\dagger H_\Delta^\dagger U & \mu - E(k) \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中

$$U^\dagger H_\Delta U = \begin{pmatrix} \langle\psi_1^+| \\ \langle\psi_2^+| \\ \langle\psi_1^-| \\ \langle\psi_2| \end{pmatrix} [i\Delta_e(\partial_k - i\frac{\partial_\theta}{k})] \begin{pmatrix} |\psi_1^+\rangle & |\psi_2^+\rangle & |\psi_1^-\rangle & |\psi_2^-\rangle \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{1+} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{2+} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{1-} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1-}}{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - i \end{pmatrix} \tag{16}$$

其中

$$A_k^{ij} = \langle\psi_i^j|\,\partial_k\,|\psi_i^j\rangle \qquad A_\theta^{ij} = \langle\psi_i^j|\,\partial_\theta\,|\psi_i^j\rangle \tag{17}$$

四个本征态均已求出，因此可以求出这些 Berry connection 的大小，可以注意到这些 Berry connection 都是关于 k 的函数，而与 θ 无关，这与我们考虑的系统具有连续旋转对称性有关。我们可以进一步考虑在费米面处的 Berry phase

$$\phi_{FS} = \oint_{FS} \vec{A}\cdot d\vec{k} = \iint \nabla \times \vec{A} dS \tag{18}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F} [\partial_k(\frac{1}{k}A_\theta) - \frac{1}{k}\partial_\theta A_k] k dk \tag{19}$$

$$= 2\pi \int_0^{k_F} \partial_k(\frac{1}{k}A_\theta) k dk \tag{20}$$

由此可以知道 Berry phase 的大小与 A_k 没有关系，由此可以做一个规范变换 $e^{i\int_0^k A_{k'}dk'}$ 可以使得 A_k 变为 0, 而 A_θ 不发生改变，具体到我们所考虑的系统，容易知道 $A_k^{1+} = A_k^{2+}$,$A_k^{1-} = A_k^{2-}$, 我们选择规范变换 $e^{i\int_0^k A_{k'}^{1+}dk'}$ 使得 A_k^{1+} 和 A_k^{2+} 变为 0，现在来计算 A_θ 的大小

$$A_\theta^{1+} = i\,\langle\psi_1^+|\,\partial_\theta\,|\psi_1^+\rangle \tag{21}$$

$$= -\frac{A^2k^2}{a^2} \tag{22}$$

$$A_\theta^{2+} = i \langle\psi_2^+| \partial_\theta |\psi_2^+\rangle \tag{23}$$
$$= \frac{A^2k^2}{a^2} \tag{24}$$

$$A_\theta^{1-} = -\frac{A^2k^2}{b^2} \tag{25}$$
$$\tag{26}$$

$$A_\theta^{2-} = \frac{A^2k^2}{b^2} \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

由此即可以得到 H_{BdG} 变换到 H_k 本征表象之后的具体形式。然后我们关心费米面附近的物理，因此再将这个哈密顿量投影到费米面附近两条能带的本征子空间中，即投影到 $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_2^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h, |\psi_1^+\rangle_h\}$ 可以得到

$$H_{BdG}^{proj} = \begin{pmatrix} E(k)-\mu & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & 0 \\ 0 & E(k)-\mu & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & 0 & \mu - E(k) & 0 \\ 0 & i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) & 0 & \mu - E(k) \end{pmatrix} \tag{29}$$
$$= (E(k)-\mu)s_3\tau_0 + i\Delta_e(\partial_k - \frac{i\partial_\theta}{k})cos\theta s_1\tau_0 + i\Delta_e(\partial_k - \frac{i\partial_\theta}{k})sin\theta s_2\tau_0 - i\frac{\Delta_e}{k}cos\theta A_\theta^{1+}s_1\tau_3 - i\frac{\Delta_e}{k}sin\theta A_\theta^{1+}s_2\tau_3 \tag{30}$$

其中 s 表示 particle-hole，τ 表示轨道。易知其和 $s_0\tau_3$ 算符对易，因此将其分块对角变为

$$H_{BdG}^{proj} = \begin{pmatrix} E(k)-\mu & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & 0 & 0 \\ i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & \mu - E(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(k)-\mu & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) \\ 0 & 0 & i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \tag{31}$$

由此可以得到

$$H_{BdG}^{re} \begin{pmatrix} E(k)-\mu & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \tag{32}$$

我们再来考虑角动量的投影，我们首先将角动量变换到 H_k 的本征空间

$$S^\dagger J_z S = S^\dagger(-i\partial_\theta + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}\sigma_3)S \tag{33}$$

$$S^\dagger(-i\partial_\theta)S = -i\partial_\theta - s_0 \begin{pmatrix} A_\theta^{1+} & & A_\theta^{1+1-} & \\ & A_\theta^{2+} & & A_\theta^{2+2-} \\ A_\theta^{1-1+} & & A_\theta^{1-} & \\ & A_\theta^{2-2+} & & A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$S^\dagger \frac{1}{2} s_3 S = \frac{1}{2} s_3 \tag{35}$$

$$\begin{aligned} & S^\dagger \frac{1}{2}\sigma_3 S \\ &= \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} \frac{(E+M(k))^2-A^2k^2}{a^2} & 0 & \frac{-2A^2k^2}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{-(E+M(k))^2+A^2k^2}{a^2} & 0 & \frac{2A^2k^2}{ab} \\ \frac{-2A^2k^2}{ab} & 0 & \frac{(-E+M(k))^2-A^2k^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{2A^2k^2}{ab} & 0 & \frac{-(-E+M(k))^2+A^2k^2}{b^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} 1+2A_\theta^{1+} & 0 & 2A_\theta^{1+1-} & 0 \\ 0 & -1+2A_\theta^{2+} & 0 & 2A_\theta^{2+2-} \\ 2A_\theta^{1-1+} & 0 & 1+2A_\theta^{1-} & 0 \\ 0 & 2A_\theta^{2-2+} & 0 & -1+2A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

由此可以得到在 H_k 的本征函数空间，角动量为

$$J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} s_3 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

然后投影到费米面附近的两条能带上面可以得到

$$J_z^{proj} = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

此时基矢为 $\{|\psi_1^+\rangle_e, \{|\psi_2^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h\, |\psi_2^+\rangle_h\}$, 将其投影到 $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h\}$ 可得

$$J_z^{re} = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} s_3 + \frac{1}{2} \tag{39}$$

此即 H_{BdG}^{re} 所对应的角动量，容易验证 $[J_z^{re}, H_{BdG}^{re}] = 0$, 现在来求他们的共同本征态，易知 J_z 本征值为 j 的本征态为

$$\begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} f_1(k) \\ e^{ij\theta} f_2(k) \end{pmatrix} \tag{40}$$

因为是在极坐标系，因此我们设本征态为

$$\psi(k,\theta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} f_1(k) \\ -ie^{ij\theta} f_2(k) \end{pmatrix} \tag{41}$$

由此可以得到 $\begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix}$ 的等效哈密顿量为

$$H_j = \sqrt{k}\begin{pmatrix} e^{-i(j-1)\theta} & \\ & e^{-ij\theta} \end{pmatrix} H_{BdG}^{re}\frac{1}{\sqrt{k}}\begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} & \\ & e^{ij\theta} \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$= \begin{pmatrix} E(k)-\mu & \Delta_e(\partial_k + \frac{j-\frac{1}{2}-A_\theta^{1+}}{k}) \\ \Delta_e(\frac{j-\frac{1}{2}-A_\theta^{1+}}{k} - \partial_k) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$= (E(k)-\mu)\sigma_z + i\Delta_e\partial_k\sigma_y + \frac{\Delta_e}{k}(j-\frac{1}{2}-A_\theta^{1+})\sigma_x \tag{44}$$

其等效为 Jackiw-Rebbi model，可以得到

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F}(j-\frac{1}{2}-A_\theta^{1+}(k_F)) \tag{45}$$

现在来分析费米面出的 Berry phase

$$\phi_{FS} = \oint_{FS}\vec{A}\cdot d\vec{k} \tag{46}$$

$$= \int_0^{2\pi}\langle\psi_1^+|\frac{\partial_\theta}{k}|\psi_1^+\rangle kd\theta \tag{47}$$

$$= 2\pi A_\theta^{1+} \tag{48}$$

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F}(j-\frac{1}{2}-\frac{\phi_{FS}}{2\pi}) \tag{49}$$

可以知道如果要有零能解,ϕ_{FS} 必须为 π 的奇数倍

$$\phi_{FS} = 2\pi A_\theta^{1+} \tag{50}$$

$$= -2\pi\frac{A^2k^2}{a^2} \tag{51}$$

$$= -2\pi(\frac{1}{2}-\frac{M(k)}{2E}) \tag{52}$$

$$= -\pi + \pi\frac{M(k)}{2E} \tag{53}$$

由此可知当且仅当 $M(k)=0$ 时，ϕ_{FS} 为 π 的奇数倍，为 $-\pi$, 而存在这个解的条件就是 $M_0 + M_1k^2 = 0$ 有解，即 M_0 和 M_1 要反号，可知此时对应的 $k_F = \sqrt{-\frac{M_0}{M_1}}$, 此时对应的能量为

$$E(k_F) = \sqrt{M(k_F)^2 + A^2k_F^2} \tag{54}$$

$$= Ak_F = A\sqrt{-\frac{M_0}{M_1}} \tag{55}$$

由此可以得到其发生拓扑相变的点为 $\mu = A\sqrt{-\frac{M_0}{M_1}}$, 同时可以看到当 $\phi_{FS} = -\pi$ 时，零能解所对应的角动量为 $j = 0$

现在来考虑

$$H'_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 - Ak_y\tau_2\sigma_2 + Ak_z\tau_2\sigma_3 \tag{56}$$

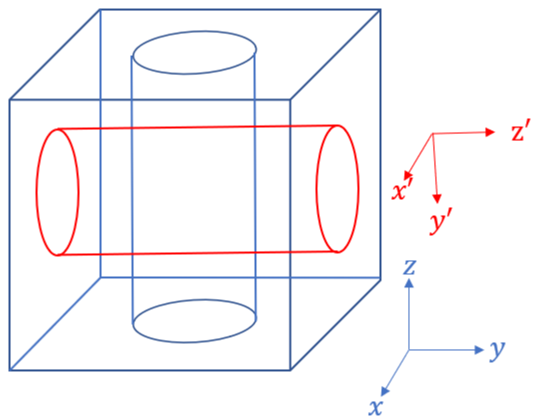
在 $k_z = 0$ 处其相当于在 $H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 - Ak_y\tau_2\sigma_2$ 上做一个 unitary 的变换 $C = \tau_0\sigma_1$，其角动量 $J'_z = -i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_3$ 变换之后可得 $J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2}\sigma_3$, 其形式与之前的一样，可知其相变所对应的角动量为 0。

是否可能与所加 vortex 的方向有关？虽然感觉坐标变换，应该不会改变，但是还是取成与数值计算的条件一样算一把，故考虑

$$H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 - Ak_z\tau_2\sigma_3 \tag{57}$$

考虑超导，以及在 y 方向上加 vortex，可以写出 BdG 哈密顿量为

$$\begin{pmatrix} H_{TI}(k) - \mu & \Delta_e(x - iz) \\ \Delta_e(x + iz) & \mu - H_{TI}(k) \end{pmatrix} \tag{58}$$



为了方便计算，将坐标轴绕 x 轴旋转 90 度，可知坐标的变换关系为

$$x \to x' \qquad y \to z' \qquad z \to -y' \qquad k_x \to k'_x \qquad k_y \to k'_z \qquad k_z \to -k'_y \tag{59}$$

由此可知在新坐标系下

$$H'_{TI}(k') = M(k')\tau_3\sigma_0 + Ak'_x\tau_2\sigma_1 + Ak'_z\tau_2\sigma_2 + Ak'_y\tau_2\sigma_3 \tag{60}$$

其 BdG 哈密顿量变为

$$\begin{pmatrix} H'_{TI}(k') - \mu & \Delta_e(x' + iy') \\ \Delta_e(x' - iy') & \mu - H'_{TI}(k') \end{pmatrix} \tag{61}$$

由对易关系可知其角动量 $J_{z'} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}s_3$ 接下来求解 $H'_{TI}(k')$ 的本征态，为了书写方便，后面统一去掉 $'$

$$H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_3 \tag{62}$$

$$= \begin{pmatrix} M(k) & 0 & -iAk_y & -iAk_x \\ 0 & M(k) & -iAk_x & iAk_y \\ iAk_y & iAk_x & -M(k) & 0 \\ iAk_x & -iAk_y & 0 & -M(k) \end{pmatrix} \tag{63}$$

可以找到其与算符 $\tau_3\sigma_2$ 对易，因此可以在其本征态下块对角，可以得到

$$\begin{pmatrix} -M(k) & Ak_- & 0 & 0 \\ Ak_+ & M(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M(k) & -Ak_+ \\ 0 & 0 & -Ak_- & M(k) \end{pmatrix} \tag{64}$$

由此可以得到其四个本征态为

$$\psi_1^+ = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -i(E+M(k)) \\ E+M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ Ake^{-i\theta} \end{pmatrix} \qquad \psi_1^- = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} -i(-E+M(k)) \\ -E+M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ Ake^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$\psi_2^+ = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} i(E+M(k)) \\ E+M(k) \\ iAke^{i\theta} \\ -Ake^{i\theta} \end{pmatrix} \qquad \psi_2^- = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} i(-E+M(k)) \\ -E+M(k) \\ iAke^{i\theta} \\ -Ake^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{66}$$

然后计算 Berry connection

$$A_\theta^{1+} = \frac{2A^2k^2}{c^2} \qquad A_\theta^{2+} = -\frac{2A^2k^2}{c^2} \tag{67}$$

$$A_\theta^{1-} = \frac{2A^2k^2}{d^2} \qquad A_\theta^{2-} = -\frac{2A^2k^2}{d^2} \tag{68}$$

$$A_\theta^{1+1-} = \frac{2A^2k^2}{cd} \qquad A_\theta^{2+2-} = -\frac{2A^2k^2}{cd} \tag{69}$$

然后计算角动量的投影, 即

$$S^\dagger J_z S = S^\dagger[-i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}s_3]S \tag{70}$$

$$S^\dagger[-i\partial_\theta]S = -i\partial_\theta - s_0 \begin{pmatrix} A_\theta^{1+} & & A_\theta^{1+1-} & \\ & A_\theta^{2+} & & A_\theta^{2+2-} \\ A_\theta^{1-1+} & & A_\theta^{1-} & \\ & A_\theta^{2-2+} & & A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$S^\dagger \frac{1}{2}\sigma_2 S = \frac{1}{2}s_0 \begin{pmatrix} \langle\psi_1^+| \\ \langle\psi_2^+| \\ \langle\psi_1^-| \\ \langle\psi_2^-| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & -i \\ & & i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1^+\rangle & |\psi_2^+\rangle & |\psi_1^-\rangle & |\psi_2^-\rangle \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}s_0 \begin{pmatrix} \frac{2(E+M(k))^2-2A^2k^2}{c^2} & 0 & \frac{-4A^2k^2}{cd} & 0 \\ 0 & \frac{-2(E+M(k))^2+2A^2k^2}{c^2} & 0 & \frac{4A^2k^2}{cd} \\ \frac{-4A^2k^2}{cd} & 0 & \frac{2(-E+M(k))^2-2A^2k^2}{d^2} & 0 \\ 0 & \frac{4A^2k^2}{cd} & 0 & \frac{-2(-E+M(k))^2+2A^2k^2}{d^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}s_0 \begin{pmatrix} 1-2A_\theta^{1+} & 0 & -2A_\theta^{1+1-} & 0 \\ 0 & -1-2A_\theta^{2+} & 0 & -2A_\theta^{2+2-} \\ -2A_\theta^{1-1+} & 0 & 1-2A_\theta^{1-} & 0 \\ 0 & -2A_\theta^{2-2+} & 0 & -1-2A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{73}$$

$$S^\dagger \frac{1}{2}s_3 S = \frac{1}{2}s_3 \tag{74}$$

由此可以得到投影之后的角动量为

$$J_z^{proj} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{75}$$

后面求解 H_{BdG}^{proj} 的过程与之前一样，可知在 $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h\}$ 中角动量为

$$J_z^{re} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

最终可以得到

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F}(j + \frac{1}{2} - A_\theta^{1+}) \tag{77}$$

因为 A_θ^{1+} 的值为正，所以可以得到其零能解出现在角动量 j=0 的位置。

Conclusion

通过完整计算 J_z 投影之后的结果，找到了之前角动量不为整数的问题。但是这里的计算似乎表明不管系数是否变号，其角动量的相变点都在 $J_z = 0$ 处。之前

讨论中提到可能与角动量的定义有关，这一点我还没有想明白。

对于各向异性的情况，即考虑 k_x, k_y 前面的系数不相等的时候，其费米面不再是一个圆，而是类似于椭圆。其拓扑相变点同样发生在其 Berry phase 为 π 的地方。对于 $H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + A_1k_x\tau_2\sigma_1 + A_2k_y\tau_2\sigma_2$, 其中一个能量本征态为

$$\psi_1 = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} E+m(k) \\ 0 \\ 0 \\ iA_1k_x - A_2k_y \end{pmatrix} \tag{78}$$

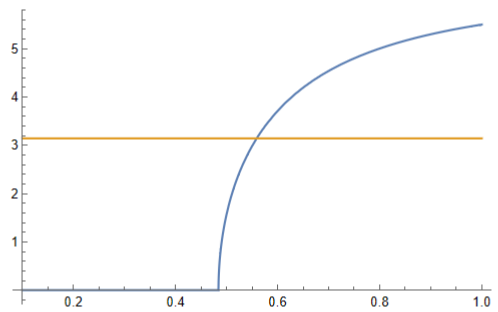
可求得

$$A_{k_x} = \frac{A_1A_2k_y}{a^2} \qquad A_{k_y} = -\frac{A_1A_2k_x}{a^2} \tag{79}$$

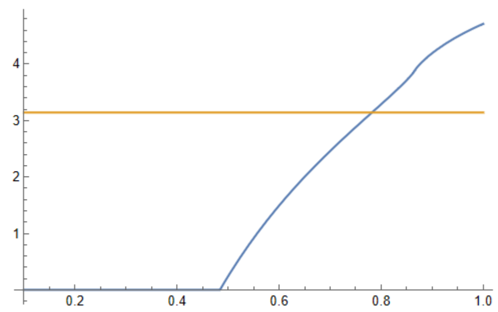
其在费米面处的方程为 $E^2 = M(k)^2 + A_1^2k_x^2 + A_2^2k_y^2$

$$\int_{FS} A_{k_x}dk_x + A_{k_y}dk_y = \iint (\frac{\partial A_{k_y}}{\partial k_x} - \frac{\partial A_{k_x}}{\partial k_y})dk_xdk_y \tag{80}$$

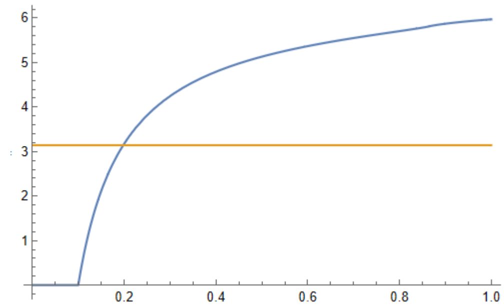
用 Mathematical 计算了一下



A1=A2



A1：A2=2:1



A1：A2=10:1

似乎随着 A1：A2 差别的增大，拓扑相变点的能量先增大又减少。