

# Solved zero energy model in topological superconductor

Wei Cheng

## The model

In the basics  $|p_z, \uparrow\rangle, |p_z, \downarrow\rangle, |d_{xz+iyz}, \downarrow\rangle, |d_{xz-iyz}, \uparrow\rangle$  其中 TI 的部分为

$H_{TI}(k) = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 + Ak_z\tau_2\sigma_3$ , 其中

$M(k) = M_0 + M_1(k_x^2 + k_y^2) + M_2k_z^2$ , 其中  $\tau$  表示轨道,  $\sigma$  表示自旋。

考虑超导, 以及  $z$  方向的 vortex, 在基矢  $(c_k, c_{-k}^T(i\sigma_y))$  下, BdG 哈密顿量可以写为

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} H_k - \mu & H_\Delta \\ H_\Delta^\dagger & \mu - H_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中

$$H_\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(r) & & & \\ & \Delta(r) & & \\ & & \Delta(r) & \\ & & & \Delta(r) \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中  $\Delta(r) = \frac{\Delta_0}{\xi} r e^{-i\theta}$ , 其中  $\xi$  表示超导的相干长度。

因为 vortex 沿着  $z$  轴方向, 因此  $z$  方向依然具有平移不变性,  $k_z$  依然是一个好量子数, 因此  $H_{BdG}$  可以按  $k_z$  分块对角, 因为 TI 反带的点在  $k_z = 0$  或  $\pi$ , 考虑  $k_z = 0$ 。同时我们考虑系统在  $k_x - k_y$  平面有连续旋转对称性, 因此可以定义角动量  $J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}\sigma_3$ 。现在先来求解  $H_k$  的本征态

$$H_{TI} = (M_0 + Mk^2)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 \quad (3)$$

可以找到算符  $\tau_3\sigma_3$  与其对易, 按其本征值分块对角可以得到块对角矩阵为

$$\begin{pmatrix} M(k) & -iAk_- & 0 & 0 \\ iAk_+ & -M(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(k) & -iAk_+ \\ 0 & 0 & iAk_- & -M(k) \end{pmatrix} \quad (4)$$

由此可以得到其能量本征值为

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{M(k)^2 + A^2 k^2} \quad (5)$$

同时可以解得  $H_{TI}$  的四个本征态为

$$|\psi_1^+\rangle = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} E + M(k) \\ 0 \\ 0 \\ iAke^{i\theta} \end{pmatrix} \quad |\psi_1^-\rangle = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -E + M(k) \\ 0 \\ 0 \\ iAke^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$|\psi_2^+\rangle = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ E + M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\psi_2^-\rangle = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 0 \\ -E + M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中上标  $\pm$  表示能量的正负，下标 1,2 表示处于  $\tau_3\sigma_3$  的不同本征值，a,b 表示归一化系数。由此可以得到对角化  $H_{TI}$  哈密顿量为矩阵为

$$U = (|\psi_1^+\rangle, |\psi_2^+\rangle, |\psi_1^-\rangle, |\psi_2^-\rangle) \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E+M(k)}{a} & 0 & \frac{-E+M(k)}{b} & 0 \\ 0 & \frac{E+M(k)}{a} & 0 & \frac{-E+M(k)}{b} \\ 0 & \frac{iAke^{-i\theta}}{a} & 0 & \frac{iAke^{-i\theta}}{b} \\ \frac{iAke^{i\theta}}{a} & 0 & \frac{iAke^{i\theta}}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

将  $H_{BdG}$  写到动量空间并变换到极坐标系可得

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} H_k - \mu & i\Delta_e(\partial_{k_x} - i\partial_{k_y}) \\ i\Delta_e(\partial_{k_x} + i\partial_{k_y}) & \mu - H_k \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{pmatrix} H_k - \mu & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - i\frac{\partial_\theta}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta}(\partial_k + i\frac{\partial_\theta}{k}) & \mu - H_k \end{pmatrix} \quad (11)$$

构造变换矩阵

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad (12)$$

可以得到

$$S^\dagger H_{BdG} S = \begin{pmatrix} U^\dagger & \\ & U^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k - \mu & H_\Delta \\ H_\Delta^\dagger & \mu - H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & \\ & U \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} E(k) - \mu & U^\dagger H_\Delta U \\ U^\dagger H_\Delta^\dagger U & \mu - E(k) \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中

$$U^\dagger H_\Delta U = \begin{pmatrix} \langle \psi_1^+ | \\ \langle \psi_2^+ | \\ \langle \psi_1^- | \\ \langle \psi_2^- | \end{pmatrix} [i\Delta_e(\partial_k - i\frac{\partial_\theta}{k})] \begin{pmatrix} |\psi_1^+\rangle & |\psi_2^+\rangle & |\psi_1^-\rangle & |\psi_2^-\rangle \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$= \begin{pmatrix} i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{1+} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1+}}{k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{2+} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2+}}{k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{1-} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{1-}}{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta}(\partial_k - iA_k^{2-} - \frac{i\partial_\theta + A_\theta^{2-}}{k}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中

$$A_k^{ij} = \langle \psi_i^j | \partial_k | \psi_i^j \rangle \quad A_\theta^{ij} = \langle \psi_i^j | \partial_\theta | \psi_i^j \rangle \quad (17)$$

四个本征态均已求出，因此可以求出这些 Berry connection 的大小，可以注意到这些 Berry connection 都是关于  $k$  的函数，而与  $\theta$  无关，这与我们考虑的系统具有连续旋转对称性有关。我们可以进一步考虑在费米面处的 Berry phase

$$\phi_{FS} = \oint_{FS} \vec{A} \cdot d\vec{k} = \iint \nabla \times \vec{A} dS \quad (18)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F} [\partial_k(\frac{1}{k}A_\theta) - \frac{1}{k}\partial_\theta A_k] k dk \quad (19)$$

$$= 2\pi \int_0^{k_F} \partial_k(\frac{1}{k}A_\theta) k dk \quad (20)$$

由此可以知道 Berry phase 的大小与  $A_k$  没有关系，由此可以做一个规范变换  $e^{i \int_0^k A_{k'} dk'}$  可以使得  $A_k$  变为 0, 而  $A_\theta$  不发生改变，具体到我们考虑的系统，容易知道  $A_k^{1+} = A_k^{2+}, A_k^{1-} = A_k^{2-}$ , 我们选择规范变换  $e^{i \int_0^k A_{k'}^{1+} dk'}$  使得  $A_k^{1+}$  和  $A_k^{2+}$  变为 0, 现在来计算  $A_\theta$  的大小

$$A_\theta^{1+} = i \langle \psi_1^+ | \partial_\theta | \psi_1^+ \rangle \quad (21)$$

$$= -\frac{A^2 k^2}{a^2} \quad (22)$$

$$A_{\theta}^{2+} = i \langle \psi_2^+ | \partial_{\theta} | \psi_2^+ \rangle \quad (23)$$

$$= \frac{A^2 k^2}{a^2} \quad (24)$$

$$A_{\theta}^{1-} = -\frac{A^2 k^2}{b^2} \quad (25)$$

$$(26)$$

$$A_{\theta}^{2-} = \frac{A^2 k^2}{b^2} \quad (27)$$

$$(28)$$

由此即可以得到  $H_{BdG}$  变换到  $H_k$  本征表象之后的具体形式。然后我们关心费米面附近的物理，因此再将这个哈密顿量投影到费米面附近两条能带的本征子空间中，即投影到  $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_2^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h, |\psi_1^+\rangle_h\}$  可以得到

$$H_{BdG}^{proj} = \begin{pmatrix} E(k) - \mu & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta} (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) & 0 \\ 0 & E(k) - \mu & 0 & i\Delta_e e^{-i\theta} (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{2+}}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta} (\partial_k + \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) & 0 & \mu - E(k) & 0 \\ 0 & i\Delta_e e^{i\theta} (\partial_k + \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{2+}}{k}) & 0 & \mu - E(k) \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$= (E(k) - \mu)s_3\tau_0 + i\Delta_e (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta}}{k}) \cos\theta s_1\tau_0 + i\Delta_e (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta}}{k}) \sin\theta s_2\tau_0 - i\frac{\Delta_e}{k} \cos\theta A_{\theta}^{1+} s_1\tau_3 - i\frac{\Delta_e}{k} \sin\theta A_{\theta}^{1+} s_2\tau_3 \quad (30)$$

其中  $s$  表示 particle-hole,  $\tau$  表示轨道。易知其和  $s_0\tau_3$  算符对易，因此将其分块对角变为

$$H_{BdG}^{proj} = \begin{pmatrix} E(k) - \mu & i\Delta_e e^{-i\theta} (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) & 0 & 0 \\ i\Delta_e e^{i\theta} (\partial_k + \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) & \mu - E(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(k) - \mu & i\Delta_e e^{-i\theta} (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{2+}}{k}) \\ 0 & 0 & i\Delta_e e^{i\theta} (\partial_k + \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{2+}}{k}) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \quad (31)$$

由此可以得到

$$H_{BdG}^{re} \begin{pmatrix} E(k) - \mu & i\Delta_e e^{-i\theta} (\partial_k - \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) \\ i\Delta_e e^{i\theta} (\partial_k + \frac{i\partial_{\theta} + A_{\theta}^{1+}}{k}) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \quad (32)$$

我们再来考虑角动量的投影，我们首先将角动量变换到  $H_k$  的本征空间

$$S^{\dagger} J_z S = S^{\dagger} (-i\partial_{\theta} + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}\sigma_3) S \quad (33)$$

$$S^{\dagger} (-i\partial_{\theta}) S = -i\partial_{\theta} - s_0 \begin{pmatrix} A_{\theta}^{1+} & A_{\theta}^{1+1-} & & \\ & A_{\theta}^{2+} & A_{\theta}^{2+2-} & \\ A_{\theta}^{1-1+} & & A_{\theta}^{1-} & \\ & A_{\theta}^{2-2+} & & A_{\theta}^{2-} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$S^\dagger \frac{1}{2} s_3 S = \frac{1}{2} s_3 \quad (35)$$

$$S^\dagger \frac{1}{2} \sigma_3 S \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} \frac{(E+M(k))^2 - A^2 k^2}{a^2} & 0 & \frac{-2A^2 k^2}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{-(E+M(k))^2 + A^2 k^2}{a^2} & 0 & \frac{2A^2 k^2}{ab} \\ \frac{-2A^2 k^2}{ab} & 0 & \frac{(-E+M(k))^2 - A^2 k^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{2A^2 k^2}{ab} & 0 & \frac{-(-E+M(k))^2 + A^2 k^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} 1 + 2A_\theta^{1+} & 0 & 2A_\theta^{1+1-} & 0 \\ 0 & -1 + 2A_\theta^{2+} & 0 & 2A_\theta^{2+2-} \\ 2A_\theta^{1-1+} & 0 & 1 + 2A_\theta^{1-} & 0 \\ 0 & 2A_\theta^{2-2+} & 0 & -1 + 2A_\theta^{2-} \end{pmatrix}$$

由此可以得到在  $H_k$  的本征函数空间，角动量为

$$J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} s_3 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

然后投影到费米面附近的两条能带上面可以得到

$$J_z^{proj} = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

此时基矢为  $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_2^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h, |\psi_2^+\rangle_h\}$ , 将其投影到  $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h\}$  可得

$$J_z^{re} = -i\partial_\theta + \frac{1}{2} s_3 + \frac{1}{2} \quad (39)$$

此即  $H_{BdG}^{re}$  所对应的角动量，容易验证  $[J_z^{re}, H_{BdG}^{re}] = 0$ , 现在来求他们的共同本征态，易知  $J_z$  本征值为  $j$  的本征态为

$$\begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} f_1(k) \\ e^{ij\theta} f_2(k) \end{pmatrix} \quad (40)$$

因为是在极坐标系，因此我们设本征态为

$$\psi(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} f_1(k) \\ -ie^{ij\theta} f_2(k) \end{pmatrix} \quad (41)$$

由此可以得到  $\begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix}$  的等效哈密顿量为

$$H_j = \sqrt{k} \begin{pmatrix} e^{-i(j-1)\theta} & \\ & e^{-ij\theta} \end{pmatrix} H_{BdG}^{re} \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{pmatrix} e^{i(j-1)\theta} & \\ & e^{ij\theta} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$= \begin{pmatrix} E(k) - \mu & \Delta_e(\partial_k + \frac{j - \frac{1}{2} - A_\theta^{1+}}{k}) \\ \Delta_e(\frac{j - \frac{1}{2} - A_\theta^{1+}}{k} - \partial_k) & \mu - E(k) \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$= (E(k) - \mu)\sigma_z + i\Delta_e\partial_k\sigma_y + \frac{\Delta_e}{k}(j - \frac{1}{2} - A_\theta^{1+})\sigma_x \quad (44)$$

其等效为 Jackiw-Rebbi model, 可以得到

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F}(j - \frac{1}{2} - A_\theta^{1+}(k_F)) \quad (45)$$

现在来分析费米面出的 Berry phase

$$\phi_{FS} = \oint_{FS} \vec{A} \cdot d\vec{k} \quad (46)$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle \psi_1^+ | \frac{\partial_\theta}{k} | \psi_1^+ \rangle k d\theta \quad (47)$$

$$= 2\pi A_\theta^{1+} \quad (48)$$

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F}(j - \frac{1}{2} - \frac{\phi_{FS}}{2\pi}) \quad (49)$$

可以知道如果有零能解,  $\phi_{FS}$  必须为  $\pi$  的奇数倍

$$\phi_{FS} = 2\pi A_\theta^{1+} \quad (50)$$

$$= -2\pi \frac{A^2 k^2}{a^2} \quad (51)$$

$$= -2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{M(k)}{2E} \right) \quad (52)$$

$$= -\pi + \pi \frac{M(k)}{2E} \quad (53)$$

由此可知当且仅当  $M(k) = 0$  时,  $\phi_{FS}$  为  $\pi$  的奇数倍, 为  $-\pi$ , 而存在这个解的条件就是  $M_0 + M_1 k^2 = 0$  有解, 即  $M_0$  和  $M_1$  要反号, 可知此时对应的  $k_F = \sqrt{-\frac{M_0}{M_1}}$ , 此时对应的能量为

$$E(k_F) = \sqrt{M(k_F)^2 + A^2 k_F^2} \quad (54)$$

$$= Ak_F = A \sqrt{-\frac{M_0}{M_1}} \quad (55)$$

由此可以得到其发生拓扑相变的点为  $\mu = A\sqrt{-\frac{M_0}{M_1}}$ , 同时可以看到当  $\phi_{FS} = -\pi$  时, 零能解所对应的角动量为  $j = 0$

现在来考虑

$$H'_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 - Ak_y\tau_2\sigma_2 + Ak_z\tau_2\sigma_3 \quad (56)$$

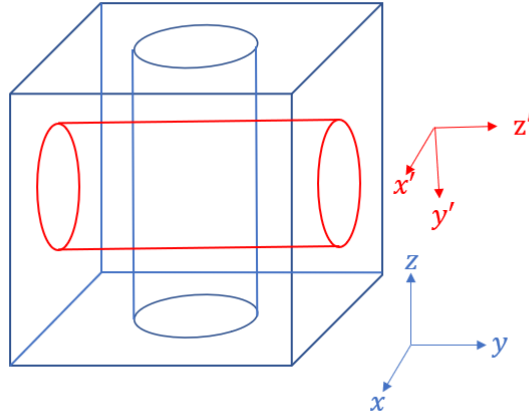
在  $k_z = 0$  处其相当于在  $H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 - Ak_y\tau_2\sigma_2$  上做一个 unitary 的变换  $C = \tau_0\sigma_1$ , 其角动量  $J'_z = -i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_3$  变换之后可得  $J_z = -i\partial_\theta + \frac{1}{2}\sigma_3$ , 其形式与之前的一样, 可知其相变所对应的角动量为 0。

是否可能与所加 vortex 的方向有关? 虽然感觉坐标变换, 应该不会改变, 但是还是取成与数值计算的条件一样算一把, 故考虑

$$H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_2 - Ak_z\tau_2\sigma_3 \quad (57)$$

考虑超导, 以及在 y 方向上加 vortex, 可以写出 BdG 哈密顿量为

$$\begin{pmatrix} H_{TI}(k) - \mu & \Delta_e(x - iz) \\ \Delta_e(x + iz) & \mu - H_{TI}(k) \end{pmatrix} \quad (58)$$



为了方便计算, 将坐标轴绕 x 轴旋转 90 度, 可知坐标的变换关系为

$$x \rightarrow x' \quad y \rightarrow z' \quad z \rightarrow -y' \quad k_x \rightarrow k'_x \quad k_y \rightarrow k'_z \quad k_z \rightarrow -k'_y \quad (59)$$

由此可知在新坐标系下

$$H'_{TI}(k') = M(k')\tau_3\sigma_0 + Ak'_x\tau_2\sigma_1 + Ak'_z\tau_2\sigma_2 + Ak'_y\tau_2\sigma_3 \quad (60)$$

其 BdG 哈密顿量变为

$$\begin{pmatrix} H'_{TI}(k') - \mu & \Delta_e(x' + iy') \\ \Delta_e(x' - iy') & \mu - H'_{TI}(k') \end{pmatrix} \quad (61)$$

由对易关系可知其角动量  $J_{z'} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}s_3$  接下来求解  $H'_{TI}(k')$  的本征态, 为了书写方便, 后面统一去掉'

$$H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + Ak_x\tau_2\sigma_1 + Ak_y\tau_2\sigma_3 \quad (62)$$

$$= \begin{pmatrix} M(k) & 0 & -iAk_y & -iAk_x \\ 0 & M(k) & -iAk_x & iAk_y \\ iAk_y & iAk_x & -M(k) & 0 \\ iAk_x & -iAk_y & 0 & -M(k) \end{pmatrix} \quad (63)$$

可以找到其与算符  $\tau_3\sigma_2$  对易, 因此可以在其本征态下块对角, 可以得到

$$\begin{pmatrix} -M(k) & Ak_- & 0 & 0 \\ Ak_+ & M(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M(k) & -Ak_+ \\ 0 & 0 & -Ak_- & M(k) \end{pmatrix} \quad (64)$$

由此可以得到其四个本征态为

$$\psi_1^+ = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -i(E + M(k)) \\ E + M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ Ake^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad \psi_1^- = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -i(-E + M(k)) \\ -E + M(k) \\ iAke^{-i\theta} \\ Ake^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\psi_2^+ = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} i(E + M(k)) \\ E + M(k) \\ iAke^{i\theta} \\ -Ake^{i\theta} \end{pmatrix} \quad \psi_2^- = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} i(-E + M(k)) \\ -E + M(k) \\ iAke^{i\theta} \\ -Ake^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (66)$$

然后计算 Berry connection

$$A_\theta^{1+} = \frac{2A^2k^2}{c^2} \quad A_\theta^{2+} = -\frac{2A^2k^2}{c^2} \quad (67)$$

$$A_\theta^{1-} = \frac{2A^2k^2}{d^2} \quad A_\theta^{2-} = -\frac{2A^2k^2}{d^2} \quad (68)$$

$$A_\theta^{1+1-} = \frac{2A^2k^2}{cd} \quad A_\theta^{2+2-} = -\frac{2A^2k^2}{cd} \quad (69)$$

然后计算角动量的投影, 即

$$S^\dagger J_z S = S^\dagger [-i\partial_\theta - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}s_3] S \quad (70)$$



$$S^\dagger[-i\partial_\theta]S = -i\partial_\theta - s_0 \begin{pmatrix} A_\theta^{1+} & & A_\theta^{1+1-} & \\ & A_\theta^{2+} & & A_\theta^{2+2-} \\ A_\theta^{1-1+} & & A_\theta^{1-} & \\ & A_\theta^{2-2+} & & A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$S^\dagger \frac{1}{2} \sigma_2 S = \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} \langle \psi_1^+ | \\ \langle \psi_2^+ | \\ \langle \psi_1^- | \\ \langle \psi_2^- | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1^+\rangle & |\psi_2^+\rangle & |\psi_1^-\rangle & |\psi_2^-\rangle \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$= \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} \frac{2(E+M(k))^2 - 2A^2 k^2}{c^2} & 0 & \frac{-4A^2 k^2}{cd} & 0 \\ 0 & \frac{-2(E+M(k))^2 + 2A^2 k^2}{c^2} & 0 & \frac{4A^2 k^2}{cd} \\ \frac{-4A^2 k^2}{cd} & 0 & \frac{2(-E+M(k))^2 - 2A^2 k^2}{d^2} & 0 \\ 0 & \frac{4A^2 k^2}{cd} & 0 & \frac{-2(-E+M(k))^2 + 2A^2 k^2}{d^2} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} s_0 \begin{pmatrix} 1 - 2A_\theta^{1+} & 0 & -2A_\theta^{1+1-} & 0 \\ 0 & -1 - 2A_\theta^{2+} & 0 & -2A_\theta^{2+2-} \\ -2A_\theta^{1-1+} & 0 & 1 - 2A_\theta^{1-} & 0 \\ 0 & -2A_\theta^{2-2+} & 0 & -1 - 2A_\theta^{2-} \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$S^\dagger \frac{1}{2} s_3 S = \frac{1}{2} s_3 \quad (74)$$

由此可以得到投影之后的角动量为

$$J_z^{proj} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (75)$$

后面求解  $H_{BdG}^{proj}$  的过程与之前一样，可知在  $\{|\psi_1^+\rangle_e, |\psi_1^+\rangle_h\}$  中角动量为

$$J_z^{re} = -i\partial_\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

最终可以得到

$$E_j = \frac{\Delta_e}{k_F} (j + \frac{1}{2} - A_\theta^{1+}) \quad (77)$$

因为  $A_\theta^{1+}$  的值为正，所以可以得到其零能解出现在角动量  $j=0$  的位置。

## Conclusion

通过完整计算  $J_z$  投影之后的结果，找到了之前角动量不为整数的问题。但是这里的计算似乎表明不管系数是否变号，其角动量的相变点都在  $J_z = 0$  处。之前

讨论中提到可能与角动量的定义有关，这一点我还没有想明白。

对于各向异性的情况，即考虑  $k_x, k_y$  前面的系数不相等的时候，其费米面不再是一个圆，而是类似于椭圆。其拓扑相变点同样发生在其 Berry phase 为  $\pi$  的地方。对于  $H_{TI} = M(k)\tau_3\sigma_0 + A_1k_x\tau_2\sigma_1 + A_2k_y\tau_2\sigma_2$ , 其中一个能量本征态为

$$\psi_1 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} E + m(k) \\ 0 \\ 0 \\ iA_1k_x - A_2k_y \end{pmatrix} \quad (78)$$

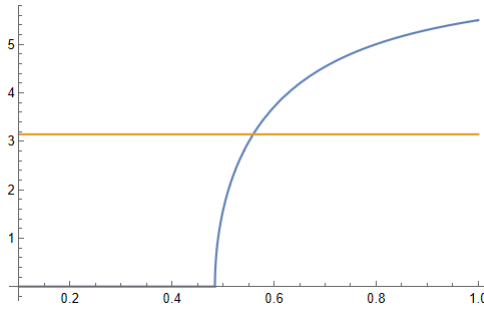
可求得

$$A_{k_x} = \frac{A_1A_2k_y}{a^2} \quad A_{k_y} = -\frac{A_1A_2k_x}{a^2} \quad (79)$$

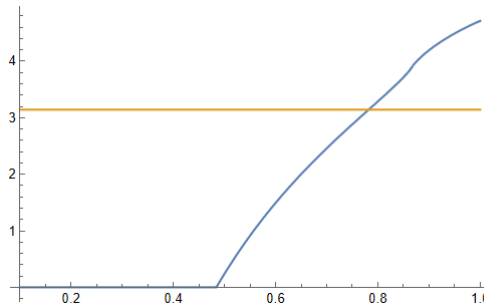
其在费米面处的方程为  $E^2 = M(k)^2 + A_1^2k_x^2 + A_2^2k_y^2$

$$\int_{FS} A_{k_x} dk_x + A_{k_y} dk_y = \iint \left( \frac{\partial A_{k_y}}{\partial k_x} - \frac{\partial A_{k_x}}{\partial k_y} \right) dk_x dk_y \quad (80)$$

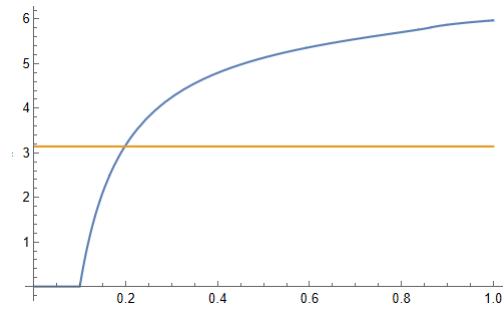
用 Mathematical 计算了一下



$A_1=A_2$



$A_1: A_2=2:1$



A1: A2=10:1

似乎随着 A1: A2 差别的增大, 拓扑相变点的能量先增大又减少。