



Institut  
Mines-Telecom

# Débruitage à l'aide d'ondelettes

Marco Cagnazzo,  
[cagnazzo@telecom-paristech.fr](mailto:cagnazzo@telecom-paristech.fr)

SD205



# Plan

## Introduction

- Transformée en ondelettes
- Principes de débruitage

## Débruitage

- Oracles
- Minimax et Seuil universel
- SURE
- Bayes



# Plan

## Introduction

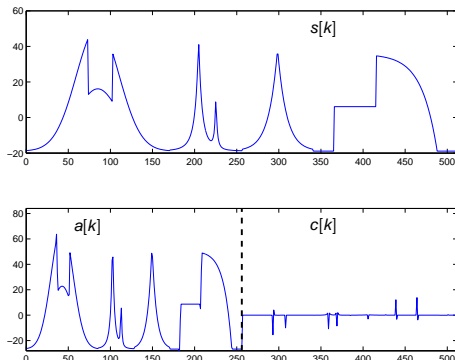
Transformée en ondelettes  
Principes de débruitage

## Débruitage

## Bancs de filtres 1D

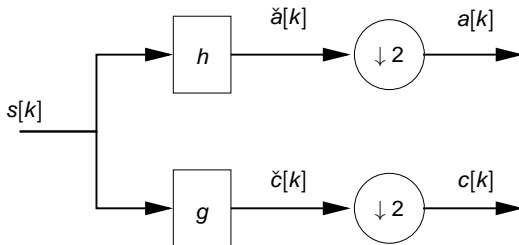
Caractéristiques de la transformée en ondelettes

- ▶ Concentration de l'énergie
- ▶ Représentation des contours
- ▶ Analyse à résolutions multiples
  - ▶ Version à basse résolution
  - ▶ "Détails"



## Bancs de filtres 1D

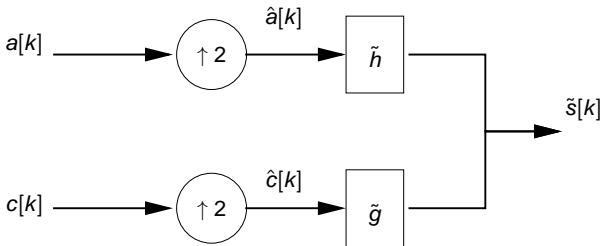
### Décomposition



Banc de filtres d'analyse

$\downarrow 2$  : opérateur de décimation :  $a[k] = \check{a}[2k]$

# Reconstruction



Banc de filtres de synthèse

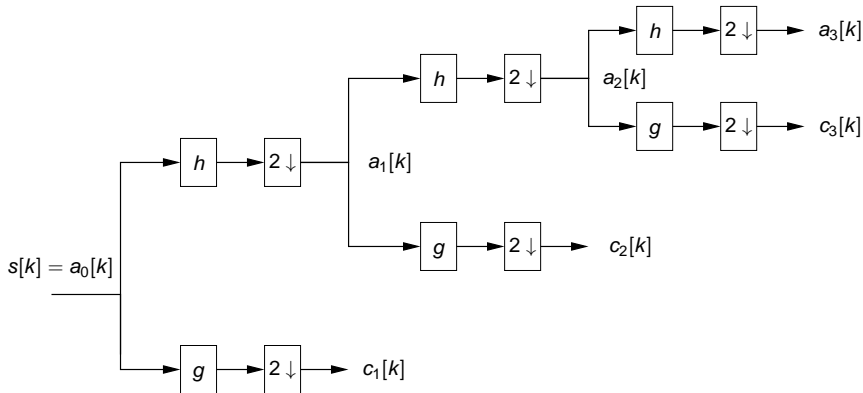
$\uparrow 2$  : opérateur d'interpolation, multiplie le nombre d'échantillons par 2

$$\hat{a}[k] = \begin{cases} a[k/2] & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

## Propriétés des filtres

- ▶ Reconstruction parfaite
  - ▶ Possibilité de reconstruire le signal à partir des coefficients
- ▶ Réponse Impulsionnelle Finie
  - ▶ Implémentation par un banc de filtres dont la longueur est finie
- ▶ Orthogonalité
  - ▶ L'énergie des coefficients est égale à l'énergie du signal
- ▶ Moments nuls
  - ▶ Capacité de reproduire des signaux polynomiaux avec détails nuls
- ▶ Symétrie
  - ▶ Implémentation par symétrisation et périodisation

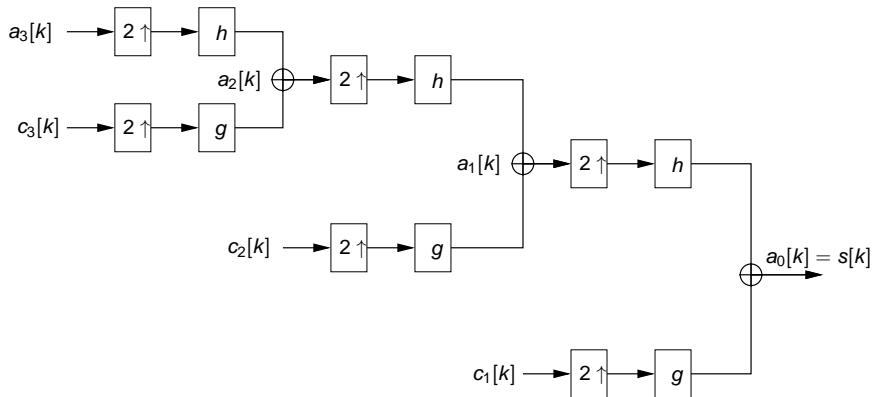
# Analyse multirésolution 1D



Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution



# Synthèse multirésolution 1D

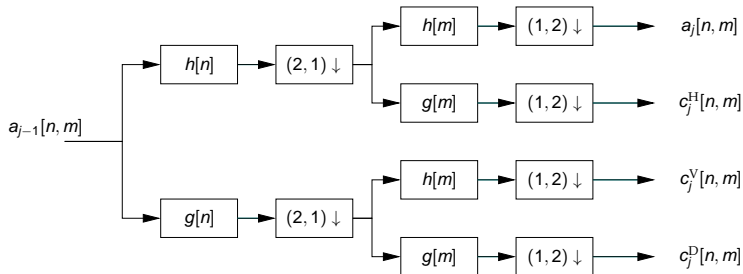


Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

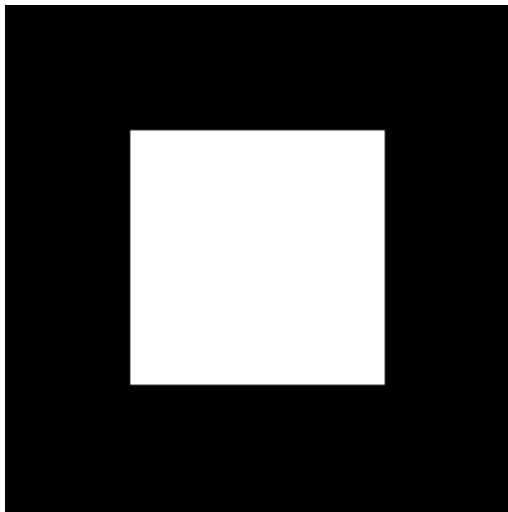
# AMR 2D

Bancs de filtres 2D séparables

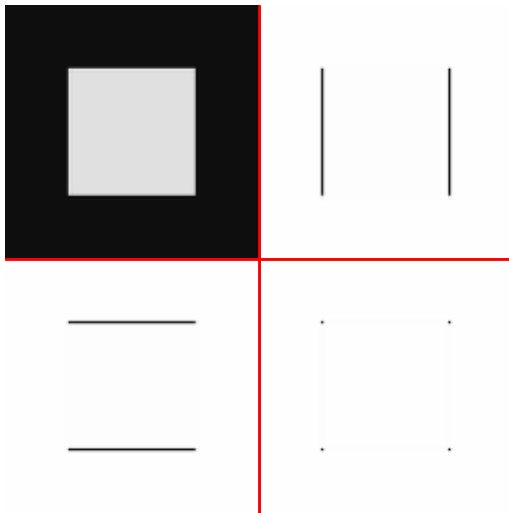
Pour 1 niveau de décomposition



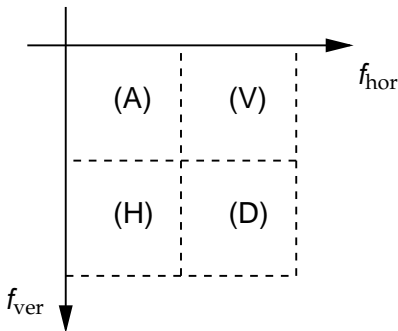
## Exemple



## Exemple

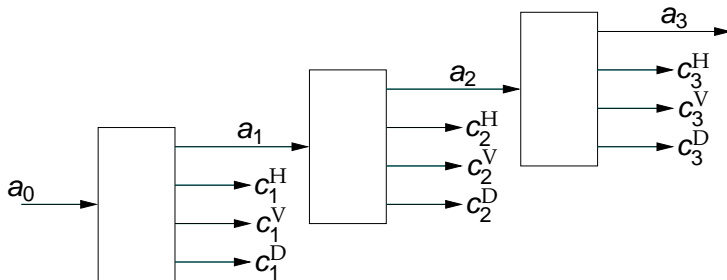


## Interprétation fréquentielle



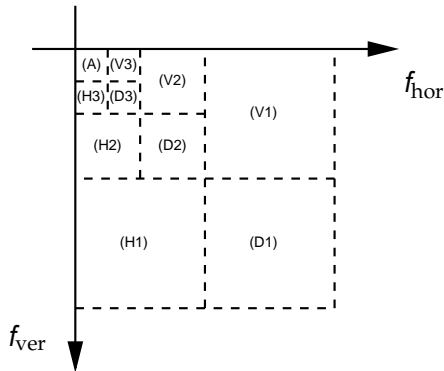
Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent effectivement aux coefficients d'approximation, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

## AMR 2D

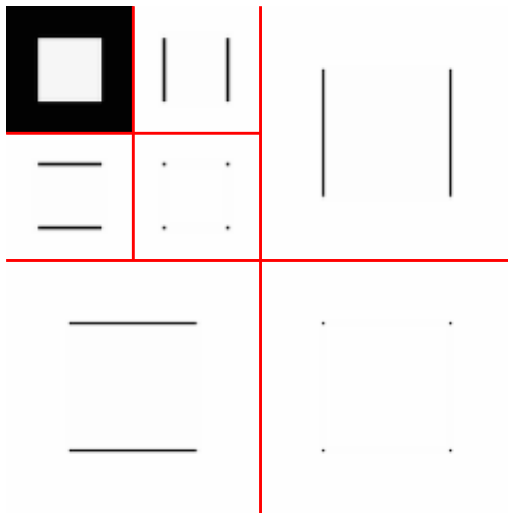


Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution.

## AMR 2D - interprétation fréquentielle



## Exemple

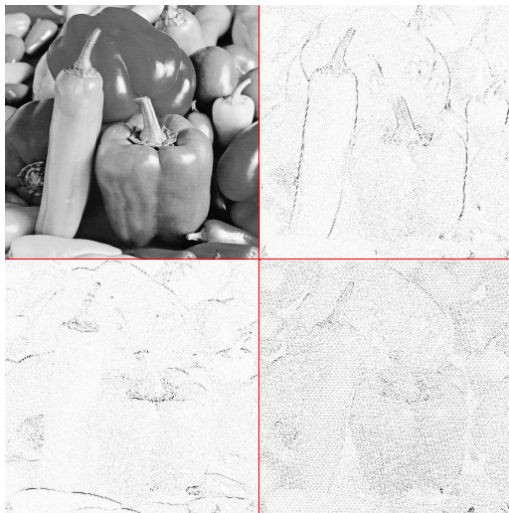




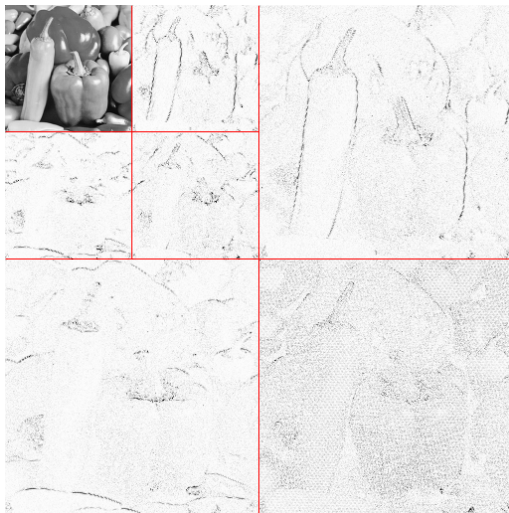
## Exemple



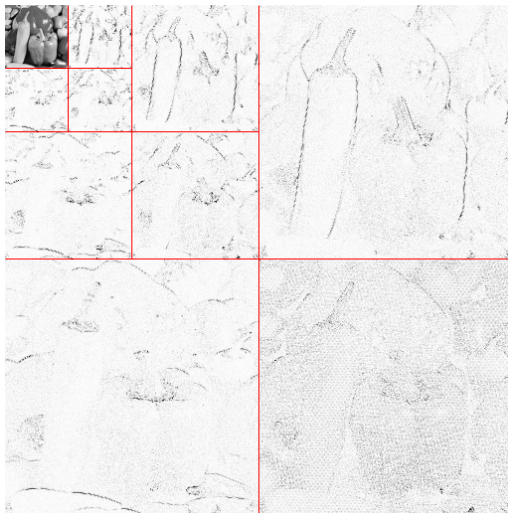
## Exemple



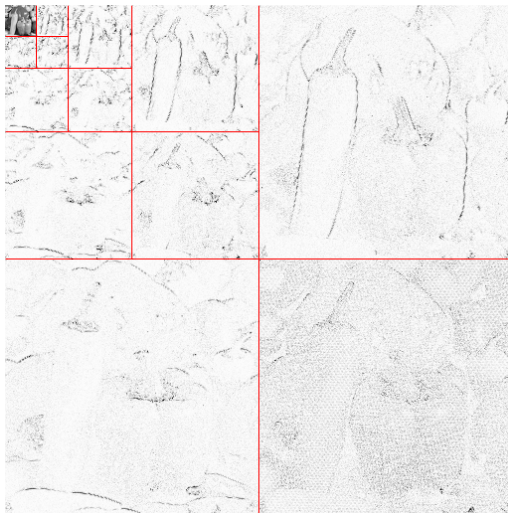
## Exemple



## Exemple



## Exemple



# Débruitage

## Principes

**Modèle** : Observation :  $r(t)$  ; somme d'un signal utile inconnu  $s(t)$  et d'un bruit aléatoire  $b(t)$ .

Après décomposition sur une base d'ondelettes :

$$c_j^r[k] = c_j^s[k] + c_j^b[k]$$

## Hypothèses :

- ▶ Base orthonormale, décomposition périodique
- ▶ Signal original (résolution  $j = 0$ ) de taille multiple de  $2^{j_{\max}}$
- ▶ RSB élevé en bande d'approximation :  $a_{j_{\max}}^s \approx a_{j_{\max}}^r$

**Estimateur** :  $\hat{s}$

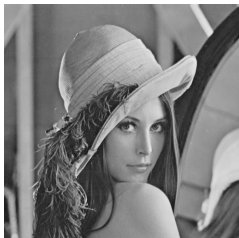
**Critère** : minimisation de l'EQM :  $\mathcal{E}^2(s) = E\{\|s - \hat{s}\|^2\}$

# Débruitage

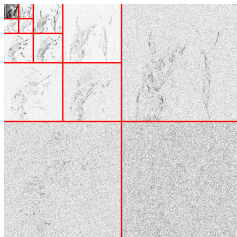
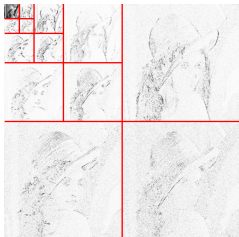
## Principes

- ▶ Signal utile régulier
  - ▶ Énergie concentré dans les basses fréquences
  - ▶ Signal creux dans les hautes fréquences
  - ▶ Beaucoup de coefficients très petits
  - ▶ Quelques coefficients de grande amplitude (information !)
- ▶ Le bruit est souvent blanc et stationnaire
  - ▶ Modèle : blanc, stationnaire, centré et de puissance  $\sigma^2$
  - ▶ Puissance équi-repartie entre les sous-bandes
- ▶ Qu'est-ce qu'on retrouve dans les différentes sous-bandes ?

## Exemples



SNR: 22.4 dB;

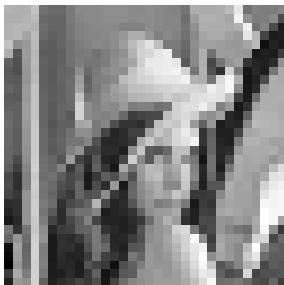


$$\sigma = 10$$



## Exemples

Sousbande d'approximation



SNR: 46.4 dB

## Exemples

Sousbande de détail



SNR: 15.2 dB

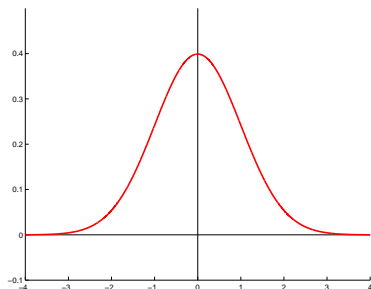
## Estimation de la variance du bruit

Hypothèses:

- Dans la sousbande de résolution la plus fine, le coefficients observés sont dus uniquement au bruit :

$$\{c_1^s[k]\}_{0 \leq k < K/2} \approx 0$$

- Bruit gaussien centré i.i.d.



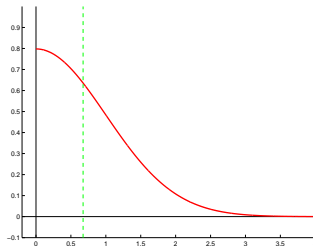
## Estimation de la variance du bruit

On considère la distribution de  $|Z|$ , lorsque  $Z$  est normale.

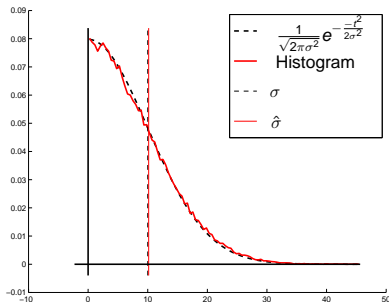
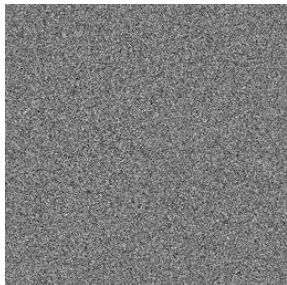
On sait que la valeur médiane de  $|Z|$  est égale à  $0.6745 \sigma$ .

Alors on choisit :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0.6745} \text{Med}|c_1^r|$$



# Estimation de la variance du bruit



# Plan

Introduction

**Débruitage**

Oracles

Minimax et Seuil universel

SURE

Bayes

## Estimateur par atténuation

Il est défini par :

$$c_j^{\hat{s}}[k] = \theta_j[k] c_j^r[k]$$

EQM:

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \mathbb{E}[(c_j^s[k] - \theta_j[k] c_j^r[k])^2]$$

$$(c^s - \theta c^r)^2 = (c^s(1 - \theta) - \theta c^b)^2$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} (c^s)^2(1 - \theta)^2 + \sigma^2\theta^2$$

## Estimateur par atténuation

Le terme de la somme précédente est :

$$J = (c^s)^2(1 - 2\theta + \theta^2) + \sigma^2\theta^2$$

En minimisant par rapport à  $\theta$  :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2(c^s)^2 + 2\theta((c^s)^2 + \sigma^2)$$

Donc :

$$\theta^* = \frac{(c^s)^2}{(c^s)^2 + \sigma^2}$$



## Estimateur par atténuation

Oracle

$$\theta^* = \frac{(c^s)^2}{(c^s)^2 + \sigma^2}$$

**Oracle:** l'estimateur dépend du signal. C'est utile pour évaluer les bornes théoriques.

$$J = (c^s)^2(1 - \theta)^2 + \sigma^2\theta^2 = \frac{\sigma^2(c^s)^2}{\sigma^2 + (c^s)^2}$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \frac{\sigma^2(c_j^s[k])^2}{\sigma^2 + (c_j^s[k])^2}$$

## Estimateur par atténuation

### Oracle binaire

- ▶ **Si** on contraint  $\theta$  à être binaire :  $\theta_j[k] \in \{0, 1\}$ , **alors**
  - ▶  $J = (c^s)^2$  si  $\theta = 0$ ; sinon  $J = \sigma^2$
  - ▶ donc on choisi  $\theta = 0$  si  $(c^s)^2 < \sigma^2$
- ▶ Dans ce cas l'EQM est :

$$\mathcal{E}_o^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \min \left[ \sigma^2, (c_j^s[k])^2 \right]$$

# Estimateur par atténuation

Oracle binaire

$$\mathcal{E}_o^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \min \left[ \sigma^2, (c_j^s[k])^2 \right]$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} \frac{\sigma^2 (c_j^s[k])^2}{\sigma^2 + (c_j^s[k])^2}$$

$$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{xy}{x+y} \geq \frac{xy}{2y} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \min(x, y)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{E}_o^2(s) \leq \mathcal{E}_a^2(s)$$

$$\mathcal{E}_a^2(s) \leq \mathcal{E}_o^2(s) \leq 2\mathcal{E}_a^2(s)$$

## Estimateur par atténuation

### Oracle binaire

- ▶ L'EQM de l'oracle binaire est (au plus) le double de l'oracle par atténuation
- ▶ En conclusion : il faut retenir les coefficients d'ondelettes ou le signal est censé avoir une valeur élevée, et mettre à zéro les autres.
- ▶ Modèle simplifié : il y a  $Q$  coefficients  $c^s$  non zéro et supérieurs à  $\sigma$  ; les autres sont zéros
- ▶ L'oracle binaire a dans ce cas une erreur  $Q\sigma^2$
- ▶ Sans débruitage l'EQM est  $K_m\sigma^2$ , ou  $K_m = K(1 - 2^{-j_{\max}})$  est le nombre de coefficients d'ondelettes disponibles

## Estimateur par atténuation

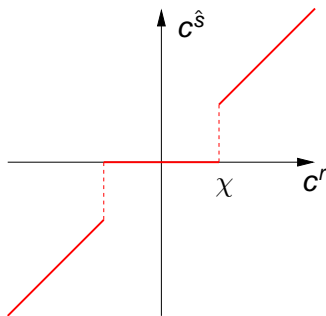
### Oracle binaire

- ▶ En conclusion, l'oracle binaire permet de réduire l'erreur d'un facteur :

$$\frac{K_m}{Q}$$

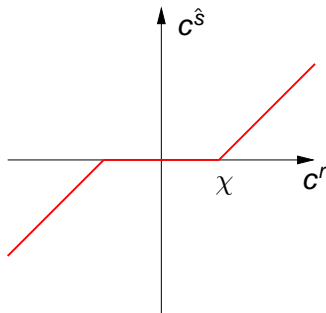
- ▶ Donc une *bonne* base d'ondelettes est une base qui rend  $Q$  petit
- ▶ La base d'ondelettes doit générer peu de grands coefficients et beaucoup de petits
- ▶ En autres mots, la base doit concentrer l'énergie en peu de coefficients

## Notion de seuillage



Hard Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r & \text{si } |c^r| > \chi \\ 0 & \text{si } |c^r| \leq \chi \end{cases}$$



Soft Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r - \chi & \text{si } c^r > \chi \\ 0 & \text{si } |c^r| \leq \chi \\ c^r + \chi & \text{si } c^r < -\chi \end{cases}$$

## Notion de seuillage

- ▶ Le seuillage dur a un comportement discontinu au voisinage du seuil  $\pm\chi$
- ▶ Le seuillage doux introduit un biais  $\mp\chi$  sur l'estimation des coefficients de grande amplitude
- ▶ Problème principale : **choix du seuil**  $\chi$ 
  - ▶ Approche *minimax*
  - ▶ Approche *visushrink* (seuil universel)
  - ▶ Approche *SURE*
  - ▶ Approche *hybride*

## Approche minimax

Définitions :

- ▶  $K_m = K(1 - 2^{-j_{\max}})$  est le nombre de coefficients d'ondelettes disponibles
- ▶  $\mathcal{E}_\chi$  est l'EQM associé au seuillage doux avec seuil égal à  $\chi$
- ▶  $\tilde{\mu}$  est une densité de probabilité symétrique et  $\bar{\mu}$  sa version normalisé (variance ramenée à 1)

**Hypothèse** : Les coefficients d'ondelettes du bruit  $c_j^b[k]$  sont de même loi marginale  $\tilde{\mu}$  symétrique (de variance  $\sigma^2$ )

**Alors**

- ▶ On a un'équation donnant  $\chi_m$ , le seuil qui minimise le maximum de l'EQM sur l'ensemble des signaux  $s$  pour le seuillage doux.
- ▶ On peut relier cette EQM au cas idéal d'oracle binaire



## Approche minimax

En formules :

$$\begin{aligned}\inf_{\chi \geq 0} \sup_s \frac{\mathcal{E}_\chi^2(s)}{\sigma^2 + \mathcal{E}_0^2(s)} &= \sup_s \frac{\mathcal{E}_{\chi_m}^2(s)}{\sigma^2 + \mathcal{E}_0^2(s)} \\ &= \Lambda_{\chi_m} = \frac{K_m(\chi_m^2 + \sigma^2)}{(K_m + 1)\sigma^2},\end{aligned}$$

où  $\chi_m$  est l'unique solution dans  $\mathbb{R}_+$  de l'équation

$$2(K_m + 1) \int_{\chi}^{\infty} (z - \chi)^2 \tilde{\mu}(z) dz = \chi^2 + \sigma^2. \quad (1)$$

## Approche minimax

Solution de l'équation (1) :

1. On normalise la densité de probabilité du bruit :

$$\bar{\mu}(z) = \sigma \tilde{\mu}(\sigma z)$$

2. On résout l'équation pour le seuil normalisé  $\bar{\chi}_m$

$$2(K_m + 1) \int_{\bar{\chi}_m}^{\infty} (z - \bar{\chi}_m)^2 \bar{\mu}(z) dz = \bar{\chi}_m^2 + 1 \quad (2)$$

3. On trouve le seuil comme :  $\chi_m = \sigma \bar{\chi}_m$

## Approche minimax

Dans le cas gaussien, l'équation (2) se réduit à :

$$\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\bar{\chi}_m}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\bar{\chi}_m}{\bar{\chi}_m + 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{\chi}_m^2}{2}} = \frac{K_m}{2(1 + K_m)}.$$

Tableaux de solutions numériques

Est-il raisonnable de supposer les coefficients de bruit gaussiens ?

- ▶ Oui si le bruit d'origine est gaussien
- ▶ Sinon on peut utiliser des lois différentes pour chaque niveau

## Valeur asymptotique du seuil optimal

Supposons que les coefficients d'ondelettes du bruit soient de densité marginale :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu(z) = Ce^{-h(z)}$$

où  $C \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h$  est une fonction paire, continue, strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\beta} h(z) = \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \quad \beta \geq 1$$

et

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad h(z_1 + z_2) \geq h(z_1) + h(z_2).$$

Quand  $K_m \rightarrow \infty$ , on a

$$\chi_m \sim \chi_U = h^{-1}(\ln K_m)$$

$$\Lambda_{\chi_m} \sim \frac{\chi_U^2}{\sigma^2} + 1.$$

## Seuil universel

- ▶ Les hypothèses précédentes sont vérifiées pour les lois gaussiennes et gaussiennes généralisées
- ▶ Dans le deux cas on a  $\mu(z) = Ce^{-h(z)}$
- ▶ Loi gaussienne :

$$\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{2\sigma^2 t}$$

$$h(z) = \frac{z^2}{2\sigma^2}$$

$$\chi_U = \sigma \sqrt{2 \ln K_m}$$

- ▶ Loi gaussienne généralisée :

$$\mu(z) = Ce^{-\gamma|z|^\beta}$$

$$\chi_U = \left( \frac{\ln K_m}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$h(z) = \gamma|z|^\beta$$

## Seuil universel

- ▶ Facilité du calcul du seuil universel dans le cas gaussien
  - ▶ Plus facile d'utiliser  $\chi_U$  plutôt que  $\chi_m$
- ▶ La différence entre  $\chi_U$  et  $\chi_m$  peut être important si  $K_m$  n'est pas grand
- ▶ Néanmoins,  $\chi_U$  est appelé *seuil universel*
- ▶ Le seuillage avec le seuil universel est appelé *visushrink*

# Seuil universel

Minimax vs. seuil universel (cas gaussien)

$K_m$	$\chi_m$	$\Lambda_{\chi_m}$	$\chi_U$	$\Lambda_U$
8	0.877372	1.573139	2.039334	5.158883
16	1.076456	2.031772	2.354820	6.545177
32	1.276276	2.549217	2.632769	7.931472
64	1.474135	3.124256	2.884054	9.317766
128	1.668605	3.754906	3.115134	10.704061
256	1.859020	4.438616	3.330218	12.090355
512	2.044916	5.171582	3.532230	13.476649
1024	2.226161	5.949982	3.723297	14.862944
2048	2.402888	6.770567	3.905027	16.249238
4096	2.575057	7.629058	4.078668	17.635532
8192	2.742753	8.521655	4.245212	19.021827
16384	2.906252	9.445722	4.405465	20.408121
32768	3.065703	10.398216	4.560089	21.794415
65536	3.221205	11.375990	4.709640	23.180710
131072	3.373025	12.377200	4.854586	24.567004
262144	3.521304	13.399528	4.995328	25.953299

## Optimalité du seuillage

Dans le cas gaussien, les estimateur par seuillage sont asymptotiquement *minimax* :

Si les coefficients du bruit sont i.i.d.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  alors

$$\lim_{K_m \rightarrow \infty} \inf_{\hat{s}} \sup_s \left( \frac{\mathcal{E}^2(s)}{(\sigma^2 + \mathcal{E}_0^2(s)) \Lambda_{\chi_m}} \right) = 1 .$$

où  $\inf_{\hat{s}}$  désigne l'inf. sur l'ensemble de tous les estimateurs possibles du signal  $s(t)$ .

**Asymptotiquement, on ne peut pas faire mieux qu'un estimateur par seuillage**



# La méthode SURE

## Principes

- ▶ Approche minimax trop pessimiste
- ▶ Idée : essayer d'estimer l'EQM dans un cas moyen, et le minimiser
- ▶ Problème : estimation de l'EQM dépendante du signal
- ▶ Lemme de Stein : permet d'estimer l'EQM *sans biais*

# La méthode SURE

## Principes

- ▶ On observe la v.a.  $Y = x + Z$
- ▶  $x$ , déterministe, est la grandeur à mesurer
- ▶  $Z$ , dont l'écart type est  $\sigma$ , est le bruit
- ▶ On considère un estimateur  $T(Y) = Y + \gamma(Y)$
- ▶ Le risque (l'EQM) est:

$$\begin{aligned}\epsilon^2(x) &= E\{(x - T(Y))^2\} \\ &= E\{(x - Y - \gamma(Y))^2\} \\ &= \sigma^2 - 2xE[\gamma(Y)] + 2E[Y\gamma(Y)] + E[\gamma(Y)^2]\end{aligned}$$

Problème : le risque dépende de  $x$  !

## La méthode SURE

### Lemme de Stein

On observe la v.a.  $Y = x + Z$  avec  $x$  déterministe et  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ;

si  $\gamma$  est une fonction continue, dérivable par morceaux et telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \gamma(z) \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}\right) = 0$$
$$\mathbb{E}\{\gamma(x+Z)^2\} < \infty, \quad \mathbb{E}\{|\gamma'(x+Z)|\} < \infty$$

alors

$$xE\{\gamma(Y)\} = E\{Y\gamma(Y)\} - \sigma^2 E\{\gamma'(Y)\} \quad (3)$$

## La méthode SURE

### Lemme de Stein

- ▶ Les conditions imposées à la fonction  $\gamma(\cdot)$  sont assez peu restrictives
- ▶ Elles sont vérifiées pour des fonctions non linéaires continues et dérivables par morceaux, à croissance au plus polynomiale
- ▶ Ceci signifie qu'ils existent  $m \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{R}, |\gamma(z)| \leq A|t|^m.$$

## La méthode SURE

### Lemme de Stein

En appliquant le lemme de Stein, on peut écrire l'équation (3) :

$$\begin{aligned}\epsilon^2(\mathbf{x}) &= \sigma^2 + \mathbb{E}[\gamma(Y)^2] + 2\sigma^2\mathbb{E}[\gamma'(Y)] \\ &= \mathbb{E}[J(Y)]\end{aligned}$$

ou

$$J(Y) = \sigma^2 + 2\sigma^2\gamma'(Y) + \gamma^2(Y)$$

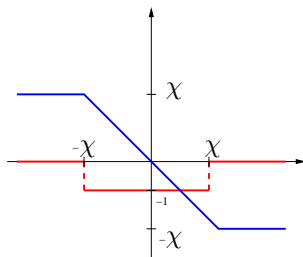
Ce résultat est valable même si  $Y = X + Z$  avec  $X$  v.a. indépendante de  $Z$

# La méthode SURE

## Application aux coefficients d'ondelettes

- ▶ Les coefficients d'ondelettes du signal sont des v.a. de variance finie, et pour un certain niveau  $j$ , i.i.d.
- ▶ Les coefficients du bruit,  $c_j^b[k]$ , sont i.i.d.,  $\mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$  indépendants du signal
- ▶ On utilise le seuillage doux, qui vérifie les hypothèses du lemme de Stein, avec

$$\gamma(z) = \begin{cases} \chi & \text{si } z \leq -\chi, \\ -z & \text{si } |z| \leq \chi, \\ -\chi & \text{si } z \geq \chi \end{cases}$$



## La méthode SURE

Application aux ondelettes

Estimation de l'EQM :  $\epsilon_j^2(x) = E[J(c_j^r[k])]$  avec :

$$\begin{aligned} J(z) &= \sigma_j^2 + 2\sigma_j^2 \gamma'(z) + \gamma^2(z) \\ &= \begin{cases} z^2 - \sigma_j^2 & \text{si } |z| \leq \chi \\ \chi^2 + \sigma_j^2 & \text{si } |z| > \chi \end{cases} \end{aligned}$$

et enfin :

$$\hat{\epsilon}_j^2(x) = \frac{1}{2^{-j}K} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} J(c_j^r[k])$$

Il nous reste à trouver le seuil  $\chi$  qui minimise  $\hat{\epsilon}_j^2$

## La méthode SURE

### Algorithme

On ordonne les coefficients d'ondelette :

$$A = |c_j^r[0]| \geq |c_j^r[1]| \geq \dots \geq |c_j^r[K2^{-j} - 1]| = B$$

et on considère le trois cas :  $\chi > A$ ,  $A \geq \chi \geq B$ , et  $\chi < B$ .

- ▶ Dans le premier, l'EQM ne dépende pas de  $\chi$
- ▶ Dans le deuxième,  $\exists k_0$  tel que  $|c_j^r[k_0]| \leq \chi < |c_j^r[k_0 - 1]|$ , alors :

$$2^{-j} K \hat{\epsilon}_j^2 = k_0 \chi^2 + (2k_0 - K2^{-j}) \sigma_j^2 + \sum_{k=k_0}^{K2^{-j}-1} (c_j^r[k])^2$$

et le minimum est atteint pour  $\chi = |c_j^r[k_0]|$

- ▶ Dans le troisième,  $\hat{\epsilon}_j^2 = \chi^2 + \sigma^2$  et le minimum est pour  $\chi = 0$



## La méthode SURE

### Algorithme

- ▶ En conclusion la valeur optimum de  $\chi$  doit être cherchée dans :

$$\{|c_j^r[0]|, |c_j^r[1]|, \dots, |c_j^r[K2^{-j} - 1]|, 0\}$$

- ▶ On peut faire une recherche exhaustive.
- ▶ Calcul du risque par une equation récursive
- ▶ Complexité total :  $O(2^{-j}K)$  pour la recherche et  $O(2^{-j}K \log(2^{-j}K))$  pour l'ordonnancement
- ▶ Avantage : seuil adapté automatiquement aux données

# La méthode SURE

## Seuil Hybride

- ▶ Si la puissance du signal, à un niveau de résolution donnée est trop faible par rapport au bruit, l'estimateur SURE n'est pas fiable.
- ▶ Alors on utilise pour ce niveau le seuillage universel
- ▶ Estimateur de la puissance du signal :

$$\overline{(c_j^s)^2} = \frac{1}{K2^{-j}} \sum_{k=0}^{K2^{-j}-1} (c_j^r[k])^2 - \sigma_j^2$$

- ▶ Niveau critique de puissance :

$$\lambda_{j,K} = \frac{\sigma_j^2}{\sqrt{(K2^{-j})}} \left[ \ln(K2^{-j}) \right]^{3/2}$$

## La méthode SURE

### Seuil Hybride

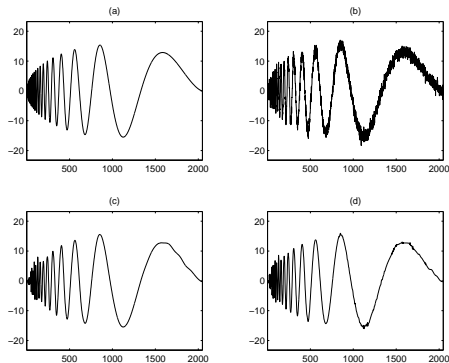
En conclusion on utilise le seuil “hybride”:

$$\chi_{j,H} = \begin{cases} \chi_{j,SURE} & \text{si } \overline{(c_j^s)^2} > \lambda_{j,K} \\ \chi_{j,U} & \text{sinon} \end{cases}$$

où on rappelle que le seuil universel vaut :

$$\chi_{j,U} = \sigma_j \sqrt{2 \ln K 2^{-j}}$$

## Exemple de débruitage



Signal original (a), bruité, RSB = 18.86 dB (b), après seuillage universel, RSB = 23.80 dB (c), débruité à l'aide de *sureshrink*, RSB = 27.45 dB (d).

## Approche Bayésienne

- ▶ On observe  $Y = X + Z$ ,  $X$  v.a. avec densité de probabilité  $p_X$  et  $Z$  v.a. avec densité de probabilité  $\mu$ , indépendante de  $X$
- ▶ Disposant d'une observation  $y$  de la v.a.  $Y$ , on choisit la valeur de  $X$  la plus probable :

$$\hat{x} = \arg \max_x p_X(x|Y = y)$$

C'est l'estimateur **MAP** (Maximum *A Posteriori* probability)

## Approche Bayésienne

- ▶ Estimateur MAP

$$\hat{x} = \arg \max_x p_X(x|Y = y)$$

- ▶ En utilisant la règle de Bayes, on a :

$$p_X(x|Y = y) = \frac{p_Y(y|X = x)p_X(x)}{p_Y(y)} = \frac{\mu(y - x)p_X(x)}{p_Y(y)}$$

- ▶ L'estimateur MAP est alors équivalent à :

$$\hat{x} = \arg \min_x [-\ln(\mu(y - x)) - \ln(p_X(x))]$$

**La plupart des *a priori* raisonnables conduisent à des estimateurs de type seuillage**

# Approche Bayésienne

## Hypothèses

- ▶ Bruit et signal mutuellement indépendants
- ▶ Leurs coefficients d'ondelettes sont des v.a. indépendantes
- ▶ Au niveau de résolution  $j$ , bruit  $\mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$  et les coefficients du signal sont i.i.d. de loi  $p_j$
- ▶ Si la base TO est bien adaptée au signal, on s'attend à avoir  $c_j^s[k]$  nul ou très petit avec forte probabilité, et grand avec faible probabilité

## Approche Bayésienne

### Loi Laplacienne

$$p_j(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\eta_j} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|u|}{\eta_j}\right)$$

On montre que :

L'estimateur MAP correspondant à une distribution *a priori* Laplacienne centrée, d'écart-type  $\eta_j > 0$  et à une loi de bruit  $\mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$  est le seuillage doux de seuil  $\chi_{j,B} = \sqrt{2}\sigma_j^2/\eta_j$ .



## Approche Bayésienne

Loi gaussienne généralisée

$\mathcal{GG}(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $(\alpha_j, \beta_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , définie par :

$$p_j(u) = \frac{\beta_j}{2\alpha_j\Gamma(1/\beta_j)} \exp\left(-\frac{|u|^{\beta_j}}{\alpha_j^{\beta_j}}\right)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma.

Si  $\beta_j \leq 1$ , l'estimateur MAP correspondant à un a priori  $\mathcal{GG}(\alpha_j, \beta_j)$  et à une loi de bruit  $\mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$  est un estimateur de seuillage dans le sens où

$$c_j^{\hat{s}}[k] = 0 \iff |c_j^r[k]| \leq \chi_{j,B}$$

où

$$\chi_{j,B} = \frac{2 - \beta_j}{2(1 - \beta_j)} \left( \frac{2\sigma_j^2(1 - \beta_j)}{\alpha_j^{\beta_j}} \right)^{1/(2-\beta_j)}.$$

## Approche Bayésienne

Loi gaussienne généralisée

Quand

$$|c_j^r[k]| \geq \chi_{j,B} \quad \text{ou} \quad \beta_j > 1$$

la valeur estimée du coefficient de signal est un rétrécissement (*shrinkage*) de la valeur observée, définie par une equation implicite

Pour  $\beta_j < 1$ , l'estimateur obtenu s'apparente plutôt à un seuillage dur, car il présente des discontinuités en proximité du seuil

## Approche Bayésienne

### Loi Bernoulli-gaussienne

$q_j[k]$  : variables aléatoires “cachées” binaires, indépendantes et telles que chaque composante  $c_j^s[k]$  de  $s(t)$  est :

- ▶ porteuse d'information, si  $q_j[k] = 1$  :  $P(q_j[k] = 1) = \epsilon_j$
- ▶ nulle, si  $q_j[k] = 0$

Quand  $q_j[k] = 1$ , on suppose que  $c_j^s[k]$  est gaussien, centré, de variance  $\sigma_j^2$

# Approche Bayésienne

Loi Bernoulli-gaussienne

## Estimation du signal

Estimateur du *Maximum A Posteriori* de  $q_j[k]$  :

$$\hat{q}_j[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } |c_j^r[k]| > \chi_{j,B}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

seuil  $\chi_{j,B} \geq 0$  :

- dépend de  $\sigma^2$ ,  $\sigma_j^2$  et  $\epsilon_j$
- indépendant de la durée du signal

$$c_j^{\hat{s}}[k] = \begin{cases} \frac{\sigma_j^2}{\sigma^2 + \sigma_j^2} c_j^r[k] & \text{si } \hat{q}_j[k] = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Approche Bayésienne

Détermination des paramètres du modèle *a priori*

Le problème principale est de trouver les paramètres ( $\epsilon_j$  et  $\sigma_j^2$ )

- utilisation des méthodes itératives (maximum de vraisemblance généralisé, algorithme EM, méthodes MCMC,...)
- compromis performance/complexité