

1 目的

2 端子対回路の入出力特性が F 行列により表現できることを理解する.

2 理論

図 1 に示す 2 つの端子対からなる回路を考える. 入力端子対 1, 1' の電圧, 電流 V_1, I_1 は, 出力端子対 2, 2' の電圧, 電流 V_2, I_2 により

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

と表される. この式中の 2 行 2 列の行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

を F 行列とよび, この行列の各要素 A, B, C, D を 4 端子定数とよぶ. 4 端子定数 A は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電圧 V_1 と出力電圧 V_2 の比

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

と定義される. また, B は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電圧 V_1 と出力電流 I_2 の比

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

であり, C は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電流 I_1 と出力電圧 V_2 の比

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

であり, D は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電流 I_1 と出力電流 I_2 の比

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

である.

図 2 のように 2 端子対回路を縦続接続すると, 全体の回路の F 行列は各々の回路の F 行列の積で表される. すなわち

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

とすると,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

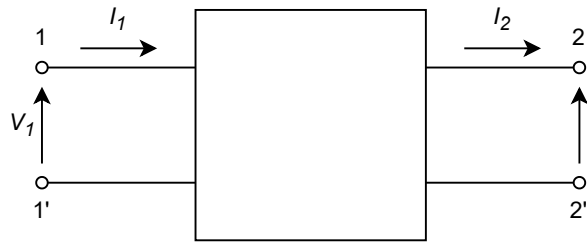


図1 2端子対回路

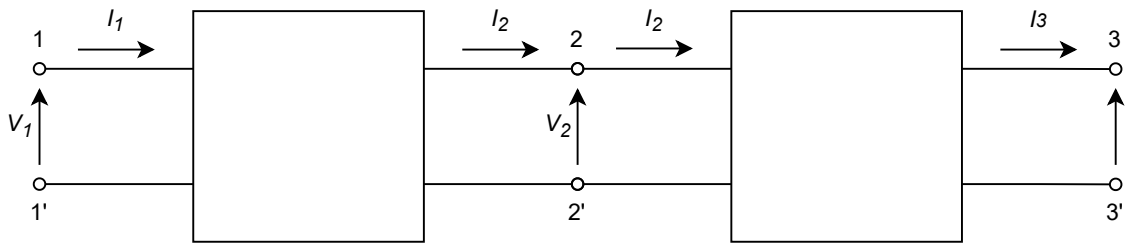


図2 2端子対回路の縦続接続

より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

と表される．

R, L, C, M 以外の素子を含まない回路では，F 行列の行列式 $AD - BC$ の値は 1 となる．また，入力端子と出力端子を入れ替えた回路の F 行列は，A と D を入れ替えたものとなる．

3 実験

3.1 F 行列の測定方法

3.1.1 4 端子定数 A, C の測定

図 3 のように回路の接続を行い, V_1 の絶対値 $|V_1|$, V_2 の絶対値 $|V_2|$, V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$, V_1 と V_2 の位相差 θ_A , V_{10} と V_2 の位相差 θ_C をオシロスコープを用いて測定する. R_{10} は電流を求めるための抵抗であり, 十分小さい値であることが望ましい. この実験では 10Ω 程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは, R_{10} の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{|V_1|}{|V_2|} \\ \arg A &= \theta_A \\ |C| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} \\ \arg C &= \theta_C \pm \pi\end{aligned}$$

が求められる.

3.1.2 4 端子定数 B, D の測定

図 4 のように回路の接続を行い, V_1 の絶対値 $|V_1|$, V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$, V_{20} の絶対値 $|V_{20}|$, V_1 と V_{20} の位相差 θ_B , V_{10} と V_{20} の位相差 θ_D をオシロスコープを用いて測定する. R_{10} , R_{20} は電流を求めるための抵抗であり, 十分小さい値であることが望ましい. この実験では 10Ω 程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは, R_{10} , R_{20} の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|B| &= \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} \\ \arg B &= \theta_B \\ |D| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} \\ \arg D &= \theta_D \pm \pi\end{aligned}$$

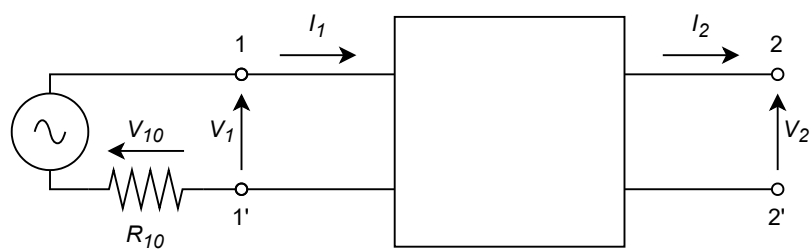


図3 4端子定数 A, C の測定

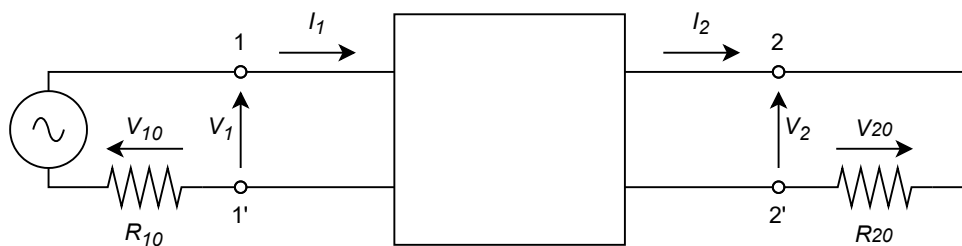


図4 4端子定数 B, D の測定

3.2 被測定回路と測定手順

被測定回路を図5, 6, 7に示す．抵抗，コンデンサの値は $R = 1.0\text{ k}\Omega$ ， $C = 1.0\text{ }\mu\text{F}$ とし，周波数 f は $f = 1\text{ kHz}$ とする．被測定回路2は被測定回路1の入力端子と出力端子を入れ換えたものである．また，被測定回路3は被測定回路1と被測定回路2を縦続接続したものである．以下の順に測定を行う．

1. 図5の被測定回路1について，4端子定数 (A_1, B_1, C_1, D_1) を測定より求める．
2. 図6の被測定回路2について，4端子定数 (A_2, B_2, C_2, D_2) を測定より求める．
3. 図7の被測定回路3について，4端子定数 (A_3, B_3, C_3, D_3) を測定より求める．

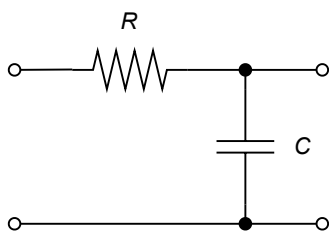


図5 被測定回路1

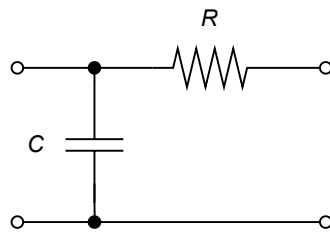


図 6 被測定回路 2

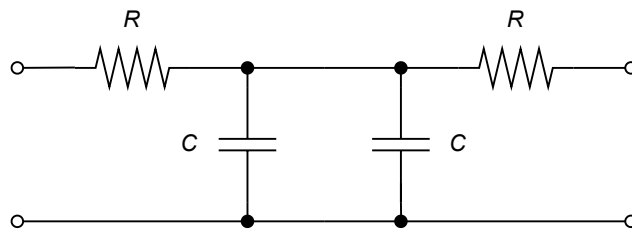


図 7 被測定回路 3

3.3 使用機器

1. RC 発信機 (ケンウッド AG-203A)
2. DSO (Tektronix TBS1022)
3. ブレッドボード

4 結果

測定値

被測定回路 1

4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 8.10 \text{ V}$$

$$|V_2| = 1.15 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 85.50^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 7.04$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.96 \times 10^{-3}$$

4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 7.50 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 78.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 0.00^\circ$$

$$|B| = \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 961.54$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 1.03$$

被測定回路 2

4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 3.00 \text{ V}$$

$$|V_2| = 3.00 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 190.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 0.00^\circ$$

$$\theta_C = 90.00^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 1.00$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.33 \times 10^{-3}$$

4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 2.70 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 185.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 34.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 86.40^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 794.12$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.44$$

被測定回路 3

4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 7.20 \text{ V}$$

$$|V_2| = 620.00 \text{ mV}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 86.40^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 11.61$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 12.90 \times 10^{-3}$$

4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 7.40 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 14.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 90.00^\circ$$

$$\theta_D = 90.00^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 5.29 \times 10^3$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.71$$

5 考察

5.1 理論値との比較

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 (A, B, C, D) の測定値を理論値と比較して議論する．このためには，各測定回路での F 行列の理論式を求め，その値を計算する必要がある．

理論値

被測定回路 1

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_1} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j\omega RC = 1 + j6.28 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

$$B_1 = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{V_1}{Z_1}} = Z_1 = R = 1.00 \times 10^3 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{Z_2 I_1} = \frac{1}{Z_2} = j\omega C = j6.28 \times 10^{-3} = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_1 = \frac{I_1}{I_2} = 1 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

被測定回路 2

被測定回路 1 の入出力を入れ替えたものであるので

$$A_2 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

$$B_2 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_2 = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_2 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

被測定回路 3

被測定回路 1 と被測定回路 2 の縦続接続であるので

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12.60 \angle 85.45^\circ & 12.72 \times 10^3 \angle 80.95^\circ \\ 12.56 \times 10^{-3} \angle 90^\circ & 12.60 \angle 85.45^\circ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

実験によって算出した値と、理論値の比較を行ったものを次の表 1, 表 2, 表 3, 表 4, 表 5, 表 6 に示す.

表 1 被測定回路 1 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	6.36	7.04	10.69
$ B $	1000.00	961.54	-3.85
$ C $	0.01	0.01	10.83
$ D $	1.00	1.03	3.00

表 2 被測定回路 1 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
θ_A	80.95	85.50	5.62
θ_B	0.00	0.00	0.00
θ_C	90.00	82.80	-8.00
θ_D	0.00	0.00	0.00

表 3 被測定回路 2 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	1.00	1.00	0.00
$ B $	1000.00	794.12	-20.59
$ C $	0.01	0.01	0.80
$ D $	6.36	5.44	-14.47

表 4 被測定回路 2 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
θ_A	0.00	0.00	0.00
θ_B	0.00	0.00	0.00
θ_C	90.00	90.00	0.00
θ_D	80.95	86.40	6.73

表 5 被測定回路 3 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	12.60	11.61	-7.86
$ B $	12720.00	5290.00	-58.41
$ C $	0.01	0.01	2.71
$ D $	12.60	5.71	-54.68

表 6 被測定回路 3 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
θ_A	85.45	86.40	1.11
θ_B	80.95	90.00	11.18
θ_C	90.00	82.80	-8.00
θ_D	85.45	90.00	5.32

被測定回路 1 における F 行列の大きさと偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が $-8.00\% \sim 10.69\%$ に収まる結果となった．本実験で使用しているコンデンサは誤差が $\pm 10\%$ 含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

被測定回路 2 における F 行列の大きさは，理論値と測定値の相対誤差率が $-20.59\% \sim 0.80\%$ に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差を踏まえたとしても，相対誤差率が高い結果となった．F 行列の大きさ $|B||D|$ を調べる際に， V_1, V_{10}, V_{20} を計測するが，その際にオシロスコープの画面を直接読み取ったため誤差が発生したと考えられる．また，F 行列の偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が $0.00\% \sim 6.73\%$ に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差が $\pm 10\%$ 含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

被測定回路 3 における F 行列の大きさは，理論値と測定値の相対誤差率が $-58.68\% \sim 2.71\%$ に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差を踏まえたとしても，相対誤差率が高い結果となった．F 行列の大きさ $|B||D|$ を調べる際に， V_1, V_{10}, V_{20} を計測するが，その際にオシロスコープの画面を直接読み取ったため誤差が発生したと考えられる．また，F 行列の偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が $-8.00\% \sim 11.18\%$ に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差が $\pm 10\%$ 含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

5.2 入出力端子を入れ替えた場合の関係

被測定回路 1, 2 の 4 端子定数の測定値より, 入力端子と出力端子を入れ換えた場合の関係式

$$A_2 = D_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, D_2 = A_1$$

が成り立っているかどうかを検討する.

実験によって算出した値の比較を行ったものを次の表 7, 表 8, 表 9, 表 10 に示す.

表 7 $A_2 = D_1$ の比較

A_2	D_1	相対誤差率 [%]
1.00	1.03	3.00

表 8 $B_2 = B_1$ の比較

B_2	B_1	相対誤差率 [%]
794.12	961.54	21.08

表 9 $C_2 = C_1$ の比較

C_2	C_1	相対誤差率 [%]
0.01	0.01	9.95

表 10 $D_2 = A_1$ の比較

D_2	A_1	相対誤差率 [%]
5.44	7.04	29.41

$A_2 = D_1$ 及び $C_2 = C_1$ の関係式は, 相対誤差率が 3.00%, 9.95% となった. これは, コンデンサの誤差が $\pm 10\%$ 含んでいることを考慮すると関係式は成り立っていると判断できる.

$B_2 = B_1$ 及び $D_2 = A_1$ の関係式は, 相対誤差率が 21.08%, 29.41% となった. これは, コンデンサの誤差を踏まえたとしても, 相対誤差率が高い結果となった. 関係式は成り立っていないと判断できる.

5.3 自然回路としての関係式

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 (A, B, C, D) の測定値より

$$AD - BC = 1$$

が成り立っているかどうか検討する.

それぞれの被測定回路における自然回路としての関係を次の表 11, 表 12, 表 13 に示す.

表 11 被測定回路 1 における自然回路としての関係

理論値	測定値	相対誤差率 [%]
1.00	0.65	-35.00

表 12 被測定回路 2 における自然回路としての関係

理論値	測定値	相対誤差率 [%]
1.00	0.41	-59.00

表 13 被測定回路 3 における自然回路としての関係

理論値	測定値	相対誤差率 [%]
1.00	-1.95	-295.00

被測定回路 1, 2, 3 で $AD - BC = 1$ の関係は, 相対誤差率が 35.00 %, 59.00 %, -295.00 % となった. これは, コンデンサの誤差を踏まえたとしても, 相対誤差率が大きい結果となった. 自然回路としての関係式は成り立っていないと判断できる.

5.4 縦続接続

被測定回路 3 は被測定回路 1, 2 を縦続接続したものである．縦続接続の場合の関係式

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

が成り立っているかどうか検討する．

表 14 縦続接続の関係

	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
A_3	12.60	13.22	4.92
B_3	12720.00	10890.00	-14.39
C_3	0.01	0.01	7.32
D_3	12.60	11.13	-11.67

A_3 及び C_3 の縦続接続の関係式は，相対誤差率が 4.92 %，7.32 % となった．これは，コンデンサの誤差が ± 10 % 含んでいることを考慮すると関係式は成り立っていると判断できる．

B_3 及び D_3 の関係式は，相対誤差率が -14.39 %，-11.67 % となった．これは，コンデンサの誤差を踏まえたとしても，相対誤差率が大きい結果となった．関係式は成り立っていないと判断できる．

参考文献

- [1] 電子システム工学基礎実験テキスト