

1 目的

2 端子対回路の入出力特性が F 行列により表現できることを理解する.

2 理論

図 1 に示す 2 つの端子対からなる回路を考える. 入力端子対 1, 1' の電圧, 電流 V_1, I_1 は, 出力端子対 2, 2' の電圧, 電流 V_2, I_2 により

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

と表される. この式中の 2 行 2 列の行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

を F 行列とよび, この行列の各要素 A, B, C, D を 4 端子定数とよぶ. 4 端子定数 A は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電圧 V_1 と出力電圧 V_2 の比

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

と定義される. また, B は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電圧 V_1 と出力電流 I_2 の比

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

であり, C は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電流 I_1 と出力電圧 V_2 の比

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

であり, D は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電流 I_1 と出力電流 I_2 の比

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

である.

図 2 のように 2 端子対回路を縦続接続すると, 全体の回路の F 行列は各々の回路の F 行列の積で表される. すなわち

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

とすると,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

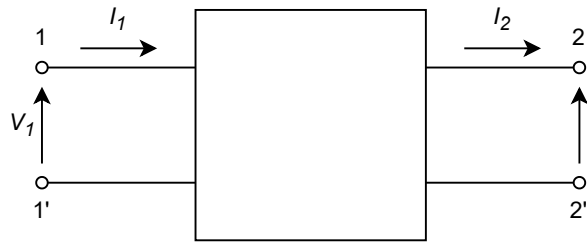


図1 2端子対回路

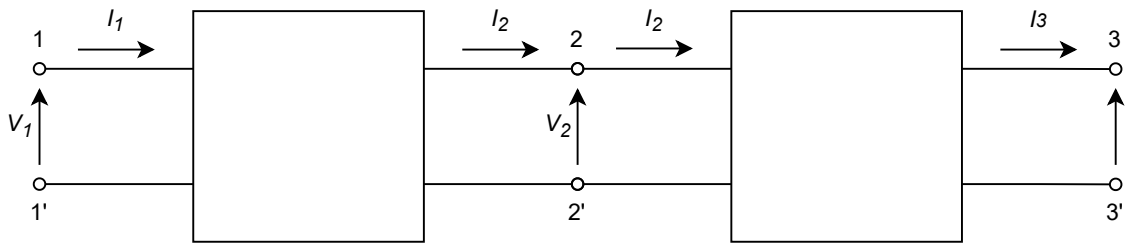


図2 2端子対回路の縦続接続

より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

と表される.

R, L, C, M 以外の素子を含まない回路では, F 行列の行列式 $AD - BC$ の値は 1 となる. また, 入力端子と出力端子を入れ替えた回路の F 行列は, A と D を入れ替えたものとなる.

3 実験

3.1 F 行列の測定方法

3.1.1 4 端子定数 A, C の測定

図 3 のように回路の接続を行い, V_1 の絶対値 $|V_1|$, V_2 の絶対値 $|V_2|$, V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$, V_1 と V_2 の位相差 θ_A , V_{10} と V_2 の位相差 θ_C をオシロスコープを用いて測定する. R_{10} は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい. この実験では 10Ω 程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは, R_{10} の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{|V_1|}{|V_2|} \\ \arg A &= \theta_A \\ |C| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} \\ \arg C &= \theta_C \pm \pi\end{aligned}$$

が求められる.

3.1.2 4 端子定数 B, D の測定

図 4 のように回路の接続を行い, V_1 の絶対値 $|V_1|$, V_{10} の絶対値 $|V_{10}|$, V_{20} の絶対値 $|V_{20}|$, V_1 と V_{20} の位相差 θ_B , V_{10} と V_{20} の位相差 θ_D をオシロスコープを用いて測定する. R_{10} , R_{20} は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい. この実験では 10Ω 程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは, R_{10} , R_{20} の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|B| &= \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} \\ \arg B &= \theta_B \\ |D| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} \\ \arg D &= \theta_D \pm \pi\end{aligned}$$

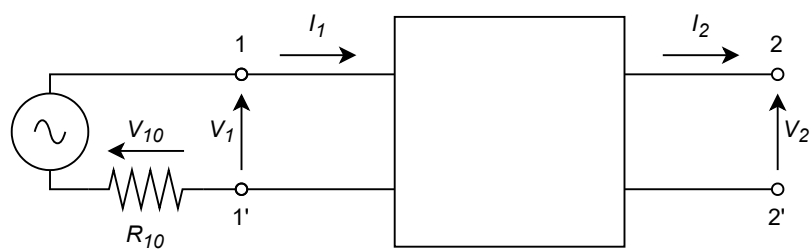


図3 4端子定数 A, C の測定

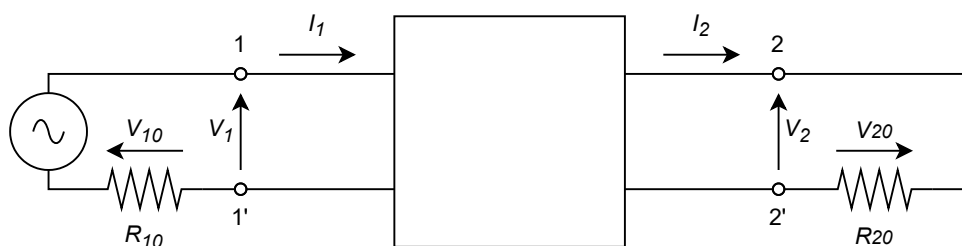


図4 4端子定数 B, D の測定

3.2 被測定回路と測定手順

被測定回路を図5,6,7に示す。抵抗，コンデンサの値は $R = 1.0\text{k}\Omega$ ， $C = 1.0\mu\text{F}$ とし、周波数 f は $f = 1\text{kHz}$ とする。被測定回路2は被測定回路1の入力端子と出力端子を入れ換えたものである。また，被測定回路3は被測定回路1と被測定回路2を縦続接続したものである。以下の順に測定を行う。

1. 図5の被測定回路1について，4端子定数 (A_1, B_1, C_1, D_1) を測定より求める。
2. 図6の被測定回路2について，4端子定数 (A_2, B_2, C_2, D_2) を測定より求める。
3. 図7の被測定回路3について，4端子定数 (A_3, B_3, C_3, D_3) を測定より求める。

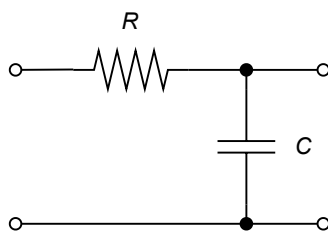


図5 被測定回路1

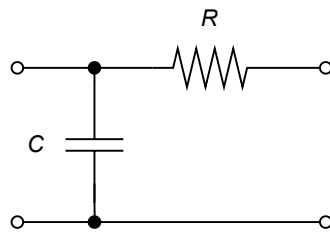


図 6 被測定回路 2

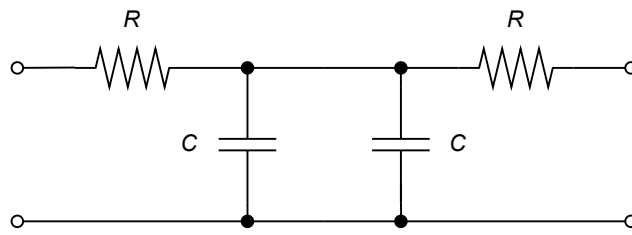


図 7 被測定回路 3

3.3 使用機器

1. RC 発信機 (ケンウッド AG-203A)
2. DSO (Tektronix TBS1022)
3. ブレッドボード

4 考察

4.1 理論値との比較

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 (A, B, C, D) の測定値を理論値と比較して議論する．このためには，各測定回路での F 行列の理論式を求め，その値を計算する必要がある．

4.1.1 理論値

1. 被測定回路 1

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_1} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j\omega RC = 1 + j6.28 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

$$B_1 = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{V_1}{Z_1}} = Z_1 = R = 1.00 \times 10^3 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{Z_2 I_1} = \frac{1}{Z_2} = j\omega C = j6.28 \times 10^{-3} = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_1 = \frac{I_1}{I_2} = 1 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

2. 被測定回路 2

被測定回路 1 の入出力を入れ替えたものであるので

$$A_2 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

$$B_2 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_2 = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_2 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

3. 被測定回路 3

被測定回路 1 と被測定回路 2 の縦続接続であるので

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12.60 \angle 85.45^\circ & 12.72 \times 10^3 \angle 80.95^\circ \\ 12.56 \times 10^{-3} \angle 90^\circ & 12.60 \angle 85.45^\circ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.1.2 測定値

1. 被測定回路 1

- 4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 8.20V$$

$$|V_2| = 1.15V$$

$$|V_{10}| = 80.00mV$$

$$\theta_A = 85.50^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 7.13$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.96 \times 10^{-3}$$

- 4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 7.50V$$

$$|V_{10}| = 80.00mV$$

$$|V_{20}| = 78.00mV$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 0.00^\circ$$

$$|B| = \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 961.54$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 1.03$$

2. 被測定回路 2

- 4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 3.00V$$

$$|V_2| = 3.00V$$

$$|V_{10}| = 190.00mV$$

$$\theta_A = 0.00^\circ$$

$$\theta_C = 90.00^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 1.00$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_2|}{R_{10}}} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.33 \times 10^{-3}$$

- 4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 2.70V$$

$$|V_{10}| = 185.00mV$$

$$|V_{20}| = 34.00mV$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 86.40^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{R_{20}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 794.12$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{10}}} = \frac{|V_{10}| R_{10}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.44$$

3. 被測定回路 3

- 4 端子定数 A, C の測定

$$|V_1| = 7.20V$$

$$|V_2| = 620.00mV$$

$$|V_{10}| = 80.00mV$$

$$\theta_A = 86.40^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 11.61$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 12.90 \times 10^{-3}$$

- 4 端子定数 B, D の測定

$$|V_1| = 7.40V$$

$$|V_{10}| = 80.00mV$$

$$|V_{20}| = 14.00mV$$

$$\theta_B = 90.00^\circ$$

$$\theta_D = 90.00^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 5.29 \times 10^3$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.71$$

4.2 入出力端子を入れ替えた場合の関係

被測定回路 1, 2 の 4 端子定数の測定値より, 入力端子と出力端子を入れ換えた場合の関係式

$$A_2 = D_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, D_2 = A_1$$

が成り立っているかどうかを検討する.

$$A_2 = D_1$$

$$1.00 = 1.03$$

$$B_2 = B_1$$

$$794.12 = 961.54$$

$$C_2 = C_1$$

$$6.33 \times 10^{-3} = 6.96 \times 10^{-3}$$

$$D_2 = A_1$$

$$5.44 = 7.13$$

4.3 自然回路としての関係式

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 (A, B, C, D) の測定値より

$$AD - BC = 1$$

が成り立っているかどうか検討する.

1. 被測定回路 1

$$A_1 D_1 - B_1 C_1 = 0.65$$

2. 被測定回路 2

$$A_2 D_2 - B_2 C_2 = 0.41$$

3. 被測定回路 3

$$A_3 D_3 - B_3 C_3 = -1.95$$

4.4 縦続接続

被測定回路 3 は被測定回路 1, 2 を縦続接続したものである．縦続接続の場合の関係式

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

が成り立っているかどうか検討する．

$$A_3 = A_1 A_2 + B_1 C_2 = 13.22$$

$$B_3 = A_1 B_2 + B_1 D_2 = 10.89 \times 10^3$$

$$C_3 = C_1 A_2 + D_1 C_2 = 13.48 \times 10^{-3}$$

$$D_3 = C_1 B_2 + D_1 D_2 = 11.13$$

被測定回路 1, 2 の測定値から，縦続接続の場合の関係式を用いた被測定回路 3 の F 行列は理論とほぼ一致した．このことから被測定回路 1, 2 の測定は自然回路としての関係式で誤差が出たものの，測定方法に問題はなかったといえる．被測定回路 1, 2 において誤差が発生した原因は，目視によるオシロスコープ波形の測定方法に問題があったと考えられる．波形に現れるノイズを小さくすることに意識をとられ，すべての実験において RC 発信機の出力を最大にしていた．オシロスコープに表示された波形は画面いっぱいに表示されたものもあれば，画面よりも大きい波形が表示されたために，VOLTS/DIV の値を大きくする必要があり，波形が画面の半分までしか表示されないことがあった．波形が最も大きな状態で測定することができなかったために，目視による測定で誤差が生じたと考えられる．各々の測定において RC 発信機の出力を最適にすべきであった．

一方被測定回路 3 の 4 端子定数 B, D の測定は他の測定と比較して大きく誤差が出た．測定箇所，または測定回路に問題があったと考えられる．他の測定と比較して使用した素子が多くなっているため，誤った抵抗を回路に組み込んだ可能性がある．測定時には他の回路よりも小さな電圧値が出力され，ノイズが多く乗っていたため，誤差がより大きくなったと考えられる．

参考文献

- [1] 電子システム工学基礎実験テキスト