

## 1 目的

2 端子対回路の入出力特性が F 行列により表現できることを理解する.

## 2 理論

図 1 に示す 2 つの端子対からなる回路を考える. 入力端子対 1, 1' の電圧, 電流  $V_1, I_1$  は, 出力端子対 2, 2' の電圧, 電流  $V_2, I_2$  により

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

と表される. この式中の 2 行 2 列の行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

を F 行列とよび, この行列の各要素  $A, B, C, D$  を 4 端子定数とよぶ. 4 端子定数  $A$  は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電圧  $V_1$  と出力電圧  $V_2$  の比

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

と定義される. また,  $B$  は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電圧  $V_1$  と出力電流  $I_2$  の比

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

であり,  $C$  は出力端子対 2, 2' を開放した時の入力電流  $I_1$  と出力電圧  $V_2$  の比

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

であり,  $D$  は出力端子対 2, 2' を短絡した時の入力電流  $I_1$  と出力電流  $I_2$  の比

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

である.

図 2 のように 2 端子対回路を縦続接続すると, 全体の回路の F 行列は各々の回路の F 行列の積で表される. すなわち

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

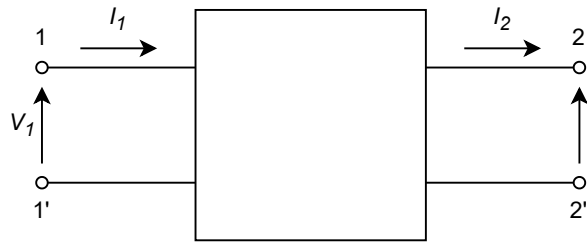


図1 2端子対回路

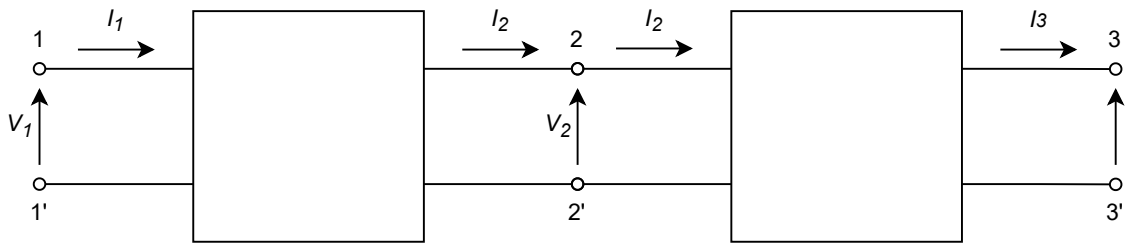


図2 2端子対回路の縦続接続

より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

と表される．

$R, L, C, M$  以外の素子を含まない回路では，F 行列の行列式  $AD - BC$  の値は 1 となる．また，入力端子と出力端子を入れ替えた回路の F 行列は，A と D を入れ替えたものとなる．

### 3 実験

#### 3.1 F 行列の測定方法

##### 3.1.1 4 端子定数 $A, C$ の測定

図 3 のように回路の接続を行い,  $V_1$  の絶対値  $|V_1|$ ,  $V_2$  の絶対値  $|V_2|$ ,  $V_{10}$  の絶対値  $|V_{10}|$ ,  $V_1$  と  $V_2$  の位相差  $\theta_A$ ,  $V_{10}$  と  $V_2$  の位相差  $\theta_C$  をオシロスコープを用いて測定する.  $R_{10}$  は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい. この実験では  $10\Omega$  程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは,  $R_{10}$  の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{|V_1|}{|V_2|} \\ \arg A &= \theta_A \\ |C| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} \\ \arg C &= \theta_C \pm \pi\end{aligned}$$

が求められる.

##### 3.1.2 4 端子定数 $B, D$ の測定

図 4 のように回路の接続を行い,  $V_1$  の絶対値  $|V_1|$ ,  $V_{10}$  の絶対値  $|V_{10}|$ ,  $V_{20}$  の絶対値  $|V_{20}|$ ,  $V_1$  と  $V_{20}$  の位相差  $\theta_B$ ,  $V_{10}$  と  $V_{20}$  の位相差  $\theta_D$  をオシロスコープを用いて測定する.  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  は電流を求めるための抵抗であり、十分小さい値であることが望ましい. この実験では  $10\Omega$  程度に設定する. 波形が読み取りにくいときは,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  の値を適宜, 大きくする. 測定結果より

$$\begin{aligned}|B| &= \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} \\ \arg B &= \theta_B \\ |D| &= \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} \\ \arg D &= \theta_D \pm \pi\end{aligned}$$

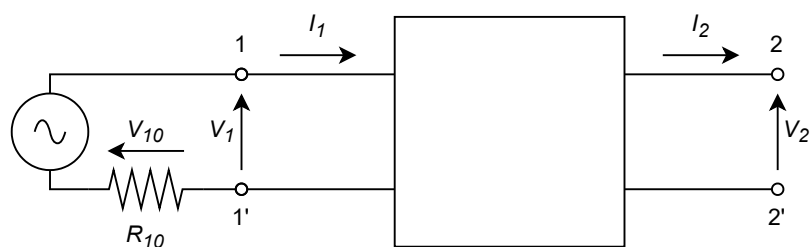


図3 4端子定数  $A, C$  の測定

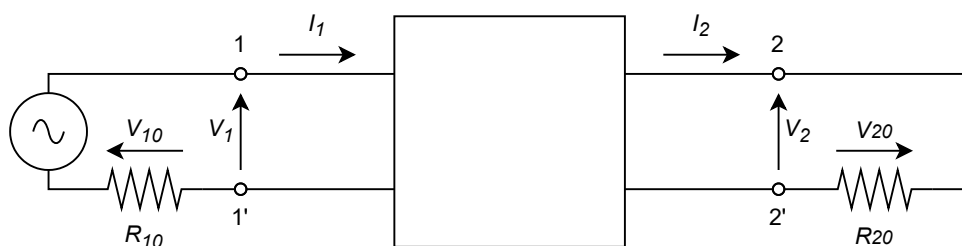


図4 4端子定数  $B, D$  の測定

### 3.2 被測定回路と測定手順

被測定回路を図5, 6, 7に示す．抵抗，コンデンサの値は  $R = 1.0\text{ k}\Omega$ ， $C = 1.0\text{ }\mu\text{F}$  とし、周波数  $f$  は  $f = 1\text{ kHz}$  とする．被測定回路2は被測定回路1の入力端子と出力端子を入れ換えたものである．また，被測定回路3は被測定回路1と被測定回路2を縦続接続したものである．以下の順に測定を行う．

1. 図5の被測定回路1について，4端子定数 ( $A_1, B_1, C_1, D_1$ ) を測定より求める．
2. 図6の被測定回路2について，4端子定数 ( $A_2, B_2, C_2, D_2$ ) を測定より求める．
3. 図7の被測定回路3について，4端子定数 ( $A_3, B_3, C_3, D_3$ ) を測定より求める．

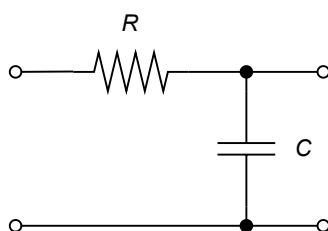


図5 被測定回路1

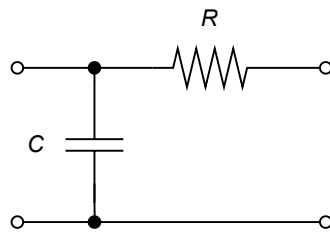


図 6 被測定回路 2

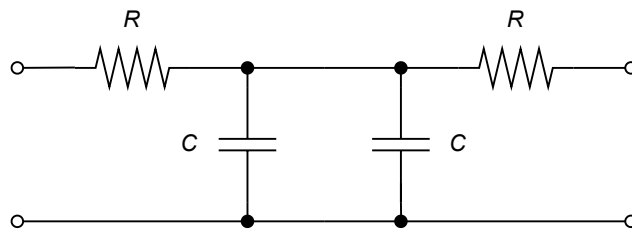


図 7 被測定回路 3

### 3.3 使用機器

1. RC 発信機 (ケンウッド AG-203A)
2. DSO (Tektronix TBS1022)
3. ブレッドボード

## 4 結果

### 測定値

被測定回路 1

4 端子定数  $A, C$  の測定

$$|V_1| = 8.10 \text{ V}$$

$$|V_2| = 1.15 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 85.50^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 7.04$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.96 \times 10^{-3}$$

4 端子定数  $B, D$  の測定

$$|V_1| = 7.50 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 78.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 0.00^\circ$$

$$|B| = \frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 961.54$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 1.03$$

被測定回路 2

4 端子定数  $A, C$  の測定

$$|V_1| = 3.00 \text{ V}$$

$$|V_2| = 3.00 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 190.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 0.00^\circ$$

$$\theta_C = 90.00^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 1.00$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 6.33 \times 10^{-3}$$

4 端子定数  $B, D$  の測定

$$|V_1| = 2.70 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 185.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 34.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 0.00^\circ$$

$$\theta_D = 86.40^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 794.12$$

$$|D| = \frac{\frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.44$$

被測定回路 3

4 端子定数  $A, C$  の測定

$$|V_1| = 7.20 \text{ V}$$

$$|V_2| = 620.00 \text{ mV}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$\theta_A = 86.40^\circ$$

$$\theta_C = 82.80^\circ$$

$$|A| = \frac{|V_1|}{|V_2|} = 11.61$$

$$|C| = \frac{\frac{|V_{10}|}{R_{10}}}{|V_2|} = \frac{|V_{10}|}{|V_2| R_{10}} = 12.90 \times 10^{-3}$$

4 端子定数  $B, D$  の測定

$$|V_1| = 7.40 \text{ V}$$

$$|V_{10}| = 80.00 \text{ mV}$$

$$|V_{20}| = 14.00 \text{ mV}$$

$$\theta_B = 90.00^\circ$$

$$\theta_D = 90.00^\circ$$

$$|B| = \frac{\frac{|V_1|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_1| R_{20}}{|V_{20}|} = 5.29 \times 10^3$$

$$|D| = \frac{\frac{|V_{10}|}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}}}{\frac{|V_{20}|}{R_{20}}} = \frac{|V_{10}| R_{20}}{|V_{20}| R_{10}} = 5.71$$



## 5 考察

### 5.1 理論値との比較

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 ( $A, B, C, D$ ) の測定値を理論値と比較して議論する．このためには，各測定回路での F 行列の理論式を求め，その値を計算する必要がある．

#### 理論値

被測定回路 1

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_1} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + j\omega RC = 1 + j6.28 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

$$B_1 = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1}{\frac{V_1}{Z_1}} = Z_1 = R = 1.00 \times 10^3 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{Z_2 I_1} = \frac{1}{Z_2} = j\omega C = j6.28 \times 10^{-3} = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_1 = \frac{I_1}{I_2} = 1 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

被測定回路 2

被測定回路 1 の入出力を入れ替えたものであるので

$$A_2 = 1.00 \angle 0.00^\circ$$

$$B_2 = 1.00 \times 10^3 \angle 0.00^\circ$$

$$C_2 = 6.28 \times 10^{-3} \angle 90.00^\circ$$

$$D_2 = 6.36 \angle 80.95^\circ$$

被測定回路 3

被測定回路 1 と被測定回路 2 の縦続接続であるので

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12.60 \angle 85.45^\circ & 12.72 \times 10^3 \angle 80.95^\circ \\ 12.56 \times 10^{-3} \angle 90^\circ & 12.60 \angle 85.45^\circ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

実験によって算出した値と、理論値の比較を行ったものを次の表 1, 表 2, 表 3, 表 4, 表 5, 表 6 に示す

表 1 被測定回路 1 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

大きさ	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	6.36	7.04	10.69
$ B $	1000.00	961.54	-3.85
$ C $	0.01	0.01	10.83
$ D $	1.00	1.03	3.00

表 2 被測定回路 1 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

偏角	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$\theta_A$	80.95	85.50	5.62
$\theta_B$	0.00	0.00	0.00
$\theta_C$	90.00	82.80	-8.00
$\theta_D$	0.00	0.00	0.00

表 3 被測定回路 2 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

大きさ	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	1.00	1.00	0.00
$ B $	1000.00	794.12	-20.59
$ C $	0.01	0.01	0.80
$ D $	6.36	5.44	-14.47

表 4 被測定回路 2 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

偏角	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$\theta_A$	0.00	0.00	0.00
$\theta_B$	0.00	0.00	0.00
$\theta_C$	90.00	90.00	0.00
$\theta_D$	80.95	86.40	6.73

表 5 被測定回路 3 における F 行列の大きさの理論値と測定値の比較

大きさ	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$ A $	12.60	11.61	-7.86
$ B $	12720.00	5290.00	-58.41
$ C $	0.01	0.01	2.71
$ D $	12.60	5.71	-54.68

表 6 被測定回路 3 における F 行列の偏角の理論値と測定値の比較

偏角	理論値	測定値	相対誤差率 [%]
$\theta_A$	85.45	86.40	1.11
$\theta_B$	80.95	90.00	11.18
$\theta_C$	90.00	82.80	-8.00
$\theta_D$	85.45	90.00	5.32

被測定回路 1 における F 行列の大きさと偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が  $-8.00\% \sim 10.69\%$  に収まる結果となった．本実験で使用しているコンデンサは誤差が  $\pm 10\%$  含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

被測定回路 2 における F 行列の大きさは，理論値と測定値の相対誤差率が  $-20.59\% \sim 0.80\%$  に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差を踏まえたとしても，相対誤差率が高い結果となった．F 行列の大きさ  $|B||D|$  を調べる際に， $V_1, V_{10}, V_{20}$  を計測するが，その際にオシロスコープの画面を直接読み取ったため誤差が発生したと考えられる．また，F 行列の偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が  $0.00\% \sim 6.73\%$  に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差が  $\pm 10\%$  含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

被測定回路 3 における F 行列の大きさは，理論値と測定値の相対誤差率が  $-58.68\% \sim 2.71\%$  に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差を踏まえたとしても，相対誤差率が高い結果となった．F 行列の大きさ  $|B||D|$  を調べる際に， $V_1, V_{10}, V_{20}$  を計測するが，その際にオシロスコープの画面を直接読み取ったため誤差が発生したと考えられる．また，F 行列の偏角は，理論値と測定値の相対誤差率が  $-8.00\% \sim 11.18\%$  に収まる結果となった．これは，コンデンサの誤差が  $\pm 10\%$  含んでいることを考慮するとうまく測定できたと判断できる．

## 5.2 入出力端子を入れ替えた場合の関係

被測定回路 1, 2 の 4 端子定数の測定値より, 入力端子と出力端子を入れ換えた場合の関係式

$$A_2 = D_1, B_2 = B_1, C_2 = C_1, D_2 = A_1$$

が成り立っているかどうかを検討する.

$$A_2 = D_1$$

$$1.00 = 1.03$$

$$B_2 = B_1$$

$$794.12 = 961.54$$

$$C_2 = C_1$$

$$6.33 \times 10^{-3} = 6.96 \times 10^{-3}$$

$$D_2 = A_1$$

$$5.44 = 7.04$$

## 5.3 自然回路としての関係式

被測定回路 1, 2, 3 の 4 端子定数 ( $A, B, C, D$ ) の測定値より

$$AD - BC = 1$$

が成り立っているかどうか検討する.

被測定回路 1

$$A_1 D_1 - B_1 C_1 = 0.65$$

被測定回路 2

$$A_2 D_2 - B_2 C_2 = 0.41$$

被測定回路 3

$$A_3 D_3 - B_3 C_3 = -1.95$$

## 5.4 縦続接続

被測定回路 3 は被測定回路 1, 2 を縦続接続したものである．縦続接続の場合の関係式

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

が成り立っているかどうか検討する．

$$A_3 = A_1 A_2 + B_1 C_2 = 13.22$$

$$B_3 = A_1 B_2 + B_1 D_2 = 10.89 \times 10^3$$

$$C_3 = C_1 A_2 + D_1 C_2 = 13.48 \times 10^{-3}$$

$$D_3 = C_1 B_2 + D_1 D_2 = 11.13$$

## 参考文献

- [1] 電子システム工学基礎実験テキスト