制御工学　レポート課題

21121001　浅井雅史

① つぎの伝達関数をもつシステムのインディシャル応答 (ステップ入力に対する応答) を計算せよ.

$$a)\ \frac{s^2-5s-12}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad b)\ \frac{2s^2+10s-10}{(s+1)\left(s^2+2s+10\right)}$$

$$\begin{aligned} a)\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2-5s-12}{s(s+1)(s+2)(s+3)}] &= \frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s+3}-\frac{2}{s} \\ &= 3e^{-t}+e^{-2t}-2e^{-3t}-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2+10s-10}{s(s+1)(s^2+2s+10)}] &= \frac{2-s}{s^2+2s+10}-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1} \\ &= -\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{3}{(s+1)^2+3^2}-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1} \\ &= -e^{-t}\cos 3t+3e^{-t}\sin 3t-1+2e^{-t} \end{aligned}$$

② 伝達関数の分母多項式がつぎのように与えられるとき，システムが安定か否か判別せよ.

$$a)\ s^3+5s^2+9s+5 \quad b)\ 2s^3+5s^2+6s+2$$

表 1，表 2 より，どちらも安定である.

s^3	1	9	0
s^2	5	5	0
s^1	$8=-\frac{1\times5-5\times9}{5}$	0	
s^0	$5=-\frac{5\times0-8\times5}{8}$	0	

表 1　a) のラウス表

s^3	2	6	0
s^2	5	2	0
s^1	$\frac{26}{5}=-\frac{2\times2-5\times6}{5}$	0	0
s^0	$5=-\frac{5\times0-\frac{26}{5}\times2}{\frac{26}{5}}$	0	0

表 2　b) のラウス表

③ 制御器の伝達関数 $K(s)$ と制御対象の伝達関数 $P(s)$ がつぎのように与えられるとき，

$$K(s) = K, K > 0, \quad P(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15}$$

このフィードバック制御系が安定となる K の範囲を求めよ．

伝達関数を求めると，

$$\frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{K}{s^3+4s^2+11s+15}}{1 + \frac{K}{s^3+5s^2+11s+15}} = \frac{K}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15 + K}$$

であるので，表 3 より，$K + 15 > 0$ かつ $-K + 40 > 0$ であるので，$K > 0$ に注意して，$0 < K < 40$ である．

s^3	1	11	0
s^2	5	$15 + K$	0
s^1	$\frac{-K+40}{5}$	0	0
s^0	$K + 15$	0	0

表 3　ラウス表

④ つぎの伝達関数のゲイン線図（ボード線図のゲインの図）を，折れ線近似を用いて描け．ただし，折れ点の周波数とそのときのゲインのデシベル値がわかるように描くこと．

$$\frac{10(s+10)}{s(s+1)(s+100)}$$

$$\frac{10(s+10)}{s(s+1)(s+100)} = \frac{10\cdot 10(0.1s+1)}{100s(s+1)(0.01s+1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{0.01s+1}\cdot(0.1s+1)$$

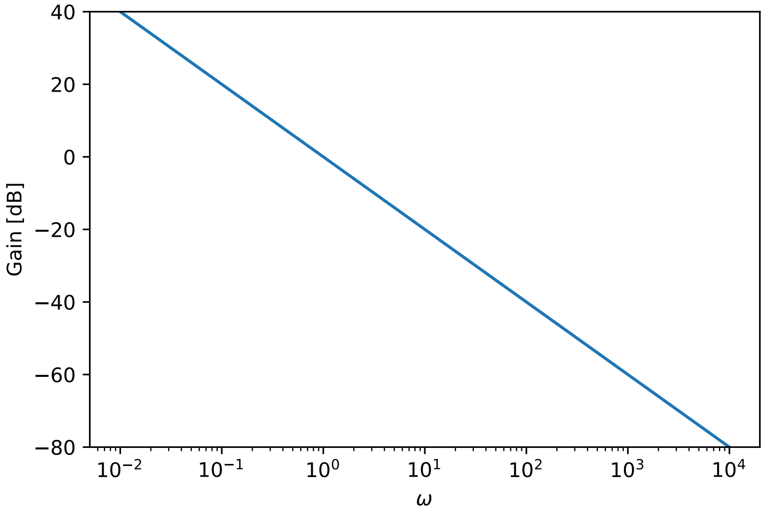


図 1　$\frac{1}{s}$ のゲイン曲線

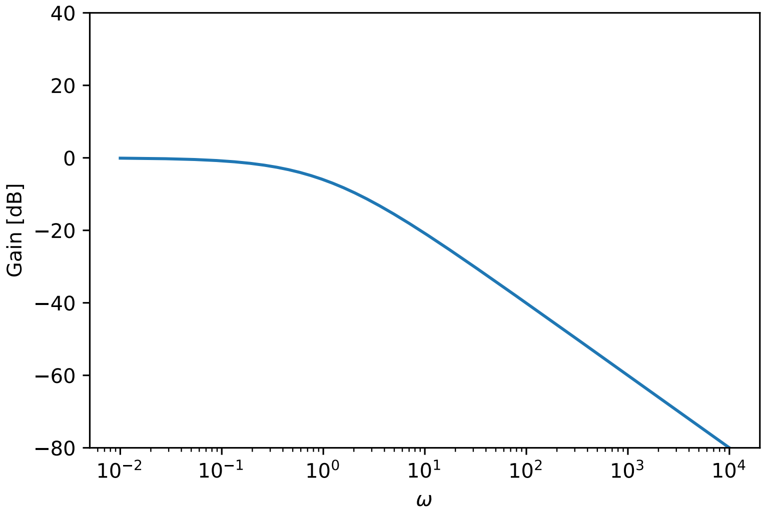


図 2　$\frac{1}{s+1}$ のゲイン曲線

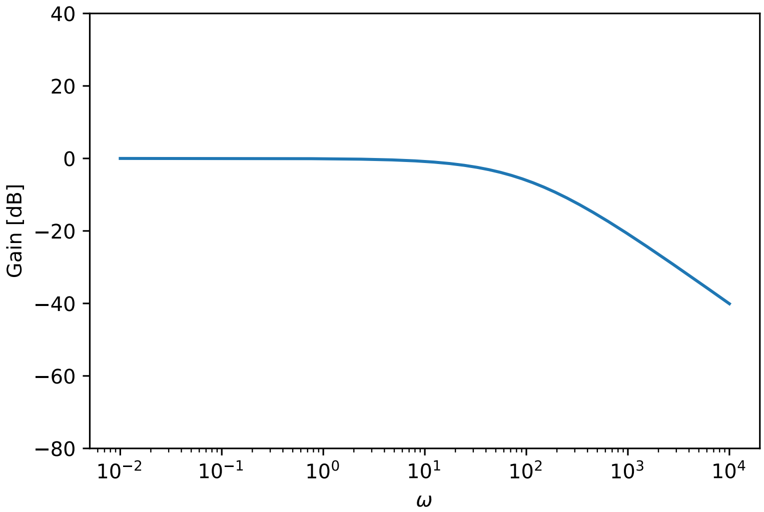


図 3　$\frac{1}{0.01s+1}$ のゲイン曲線

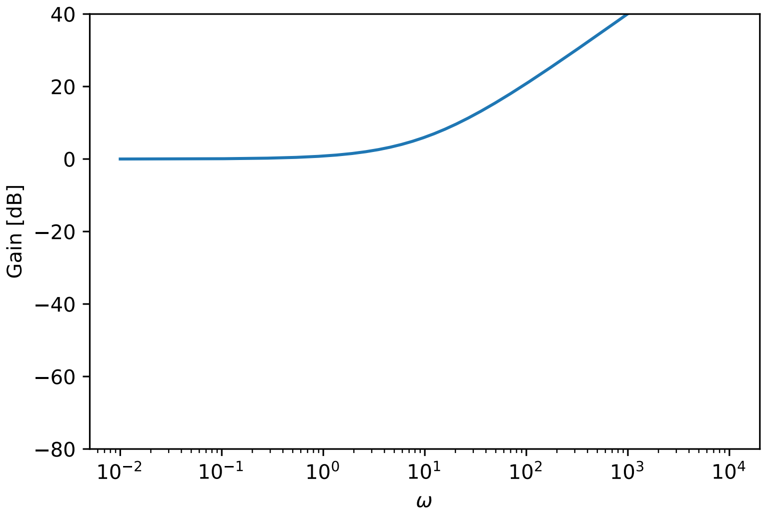


図 4　$0.1s + 1$ のゲイン曲線

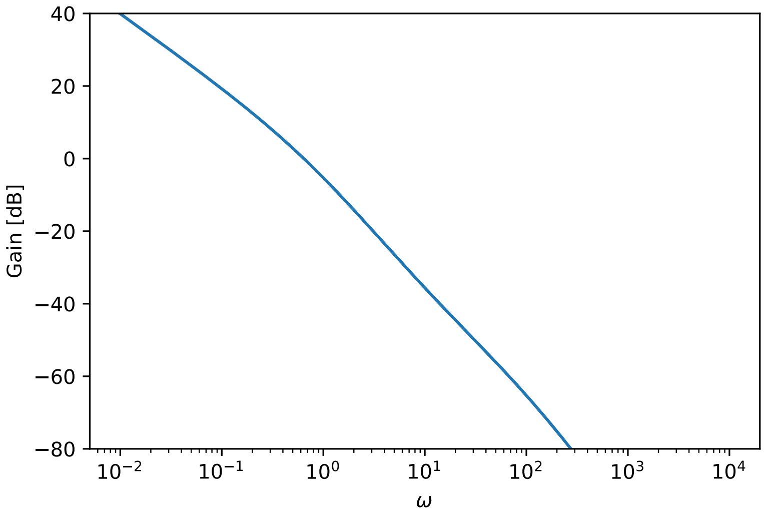


図 5　与えられた伝達関数のゲイン曲線

⑤つぎのシステムについて，問いに答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t),\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) 逆ラプラス変換を利用して e^{At} を求めよ．

b) $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, u(t)\equiv 1$ としたときのシステムの解軌道 $x(t)$ を求めよ．

$$a)\,\mathrm{e}^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+3}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} \\ -\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+3} & -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$b)\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\tau-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3(\tau-t)} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\tau-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3(\tau-t)} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\tau-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3(\tau-t)} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\tau-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3(\tau-t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\tau}-\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{3\tau} \\ -2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\tau}+3\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{3\tau} \end{bmatrix}d\tau=\left[\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\tau}-\mathrm{e}^{-3t}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\tau} \\ -2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\tau}+\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{3\tau} \end{bmatrix}\right]_0^t$$

$$=\begin{bmatrix} 2-\frac{1}{3}-\left(2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right) \\ -2+1-\left(-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{3}-2\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \\ -1+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}x(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{5}{3}-2\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \\ -1+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{5}{3}-2\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \\ -1+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t} \\ -1+2\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

⑥ つぎの開ループ伝達関数をもつ制御系のゲイン余裕を 40 dB とする K の値を示せ.

$$G(s) = \frac{K}{(2s+1)(s+1)(s+3)}$$

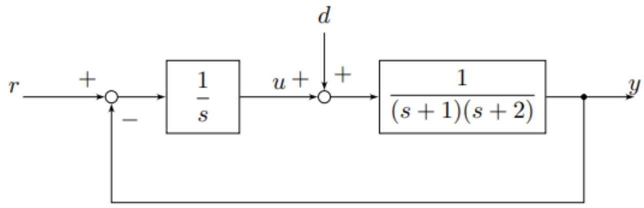
$$G(j\omega) = \frac{K}{(2j\omega+1)(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{K}{(-2\omega^2+3j\omega+1)\,(j\omega+3)} = \frac{K}{3\,(1-3\omega^2)+j\omega\,(10-2\omega^2)}$$

これより，位相交差周波数は $\omega_{pc} = \sqrt{5}$ である．子の周波数の時のゲインの逆数の大きさがゲイン余裕であり，

$$GM = 40\log_{10}\left|\frac{1}{G\,(j\omega_{pc})}\right| = 40\log_{10}\frac{42}{K}\ \mathrm{dB}$$

と求められる．これが 40 dB となる K は，$\frac{42}{K} = 10^1$ より，$K = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$ である.

⑦ 次の図の制御系について以下の問いに答えよ．



a) $d(t) \equiv 0$ としたときの目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差を求めよ．

b) $r(t) \equiv 0$ であるとする．ランプ外乱 $d(t) = t$ を加えた時の $y(t)$ の定常値を求めよ．

a) 定常位置偏差を求めるので，入力はランプ関数 $r(t) = t$ で，この関数のラプラス変換は $R(s) = \frac{1}{s}$ である．

ラプラス変換後の信号間の関係から，次の関係が得られる．

$$E(s) = R(s) - P(s)K(s)E(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}R(s)$$

これより，ラプラス変換の最終値の定理を用いて偏差の定常値を求める．

$$\begin{aligned} E_s = e(\infty) &= \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{1 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}}\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} s\frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} = 0 \end{aligned}$$

b) 入力は恒常的に 0, すなわち $r(t) = 0$ で，外乱としてランプ関数を考える．ランプ関数のラプラス変換は $R(s) = \frac{1}{s^2}$ である．

ラプラス変換後の信号間の関係から，次の関係が得られる．

$$Y(s) = P(s)(D(s) + K(s)(-Y(s))) = P(s)D(s) - P(s)K(s)Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}D(s)$$

これより，ラプラス変換の最終値の定理を用いて出力 $y(t)$ の定常値を求める．

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}}\frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} = 1$$