Strategic Practice and Homework 1

Wen

January 16, 2021

Strategic Practice

Problem 1

(a) $>$

4 个骰子最多有 24 点，题目中 21 点与 22 点与这个数字比较接近，所以应该是用数数的方法。

对于 21 点，有 6 6 6 3，6 6 5 4，6 5 5 5，将四个骰子进行编号，那么 6 6 6 3 可能情况有 4 种，6 6 5 4 可能情况有 12 种，6 5 5 5 可能情况有 4 种，一共 20 种。

对于 22 点，有 6 6 6 4，6 6 5 5，将四个骰子进行编号，那么 6 6 6 4 可能情况有 4 种，6 6 5 5 可能情况有 6 种，一共 10 种。

(b) $\cancel{<}$ $=$

~~两个回文字母，要求第一个字母与第二个字母相同，则一共有 26 种可能。如果是三个字母是回文，则要求前 2 个字母相同，中间字母任意，则一共有 26 * 26 种可能~~

上面的错解来源于数个数时，但是 2 个事件每个的概率是不一样的，所以不能单独数个数，换一种想法，两个事件都是要求前后两个字母相同，则概率是相同的。也可以用 indicator 来想这个问题

Problem 2

(a) flush 表示 5 长牌颜色相同，花色有四种，但是不含不能是 10 J Q K A

$$\frac{4\left(\binom{13}{5}-1\right)}{\binom{52}{5}}$$

(b) ~~有两对，也就是 13 张牌中选 3 张牌，然后再从中间选出来 2 张牌作为 2 对~~

$$\cancel{\frac{\binom{13}{3}\binom{3}{2}}{\binom{52}{5}}}$$

上面的例子错再没有考虑到每种牌有花色的问题，2 张牌有 6 种颜色，另外 2 张也有 6 种颜色，单独的一张有 4 种颜色，一共 144 种结果，错解乘以 144 就是正确答案

$$\frac{\binom{13}{3}\binom{3}{2}\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Problem 3

(a) 向右走了 111 步，向上走了 110 步，总共 221 步，也就是在 221 步种选 111 步向右

$$\binom{221}{111}$$

(b) 这道题目可以两步走，第一步到达（110，111），第二步到达（210，211）。用乘法规则来处理。

$$\binom{221}{111}\binom{200}{100}$$

Problem 4

假定如果只有一个字母，有 26 种可能，如果有两个字母有 26 * 25 种可能，以此类推，一共有 26 + 26 * 25 + 26 * 25 * 24 + ... + 26!, 每种情况的概率都相同。所以使用所以的 26 个字母的概率就是

$$\frac{26!}{26 \; + \; 26 \; \times 25 \; + \; ... \; + \; 26!} \; = \; \frac{1}{1 \; + \; 1! + \; \frac{1}{2!} \; + \; \frac{1}{3!} \; + \; ... \; + \; \frac{1}{25!}}$$

我们发现分母的结果其实与 e 的泰勒展开接近

Problem 5

- 我们要做的事情是从 n 个物品中随意挑选物品
- 左边代表先规定要取多少个物品，然后再取物品
- 右边代表有 n 个物品，每个物品可以选或者不选。

Problem 6

左边发现是 2n 的全排列，除以 n!，表示有 n 个东西的全排列重复了，再除以 2^n，表示这 n 个东西内部还有排列重复了，总结来看，就是将 2n 个东西，分成配对的 n 组。带结果值尝试一下，当 n=2 时，左边等于 3。这与把 4 个物品，分成配对的 2 组，结果一样。

- 我们要做的事情是将 2n 个东西，分成配对的 n 组。
- 对于左边，每一种配对的情况，对应全排列重复了 $2^n \times n!$ 次
- 右边，这里不会

右边可以想对所以人进行编号，1 号可能和 n-1 个人进行配对。再找 2 号（也可能是 3 号），可能和 n-3 个人进行配对，用树的思想更好理解这个问题

Problem 7

- 我们要做的是，在 n+1 个人中，选择 k 个人
- 对于左边，我们假定对所有人进行编号，最后取出的 k 个人中，分为含有 1 号和不含有 1 号两者情况，当含有 1 号时，有 $\binom{n}{k-1}$ 种可能，当不含有 1 号时，有 $\binom{n}{k}$ 种可能性。
- 右边就是上面所说的

Homework 1

Problem 1

这个事件等价于 6 个人中选 3 个人，3 个人选到的都是女生。

$$\frac{1}{\binom{6}{3}}$$

Problem 2

(a) 这是一个典型的分堆问题，在国防科技大学概率论课堂有详细的说明，是用递推的思维来想的，先分一堆，再分一堆，但也要注意重复数的问题，例如分成相同的两堆，最后是要除以 2 的。

哈佛大学给出的答案，就是把全排列去除以重复的次数。

还有一种错误的想法，反过来想，就是一次分堆，对应多少全排列，全排列除以这个数字，就对应有多少数量的分堆。这是错误的，因为一个全排列，可能对应多个分堆，例如 12345 这个全排列，可能对应 12 34 5 或者 1 23 45（假定 5 个球，分为 1 2 2 三堆）

$$\left(\frac{12!}{2!5!5!\cdot 2}\right)$$

(b) 与上题类似

$$\left(\frac{12!}{4!4!4!3!}\right)$$

Problem 3

这个问题相当于有 10 个框子，有 3 个球，向框子里面仍球。给框子编号，给球编号。一共可能有 10^3 种可能。若要球不进入同一个框子，有 10*9*8 种可能。所以有重叠的概率是

$$1 - \frac{10 \times 9 \times 8}{10^3}$$

Problem 4

这个问题相当于有 6 个框子，有 6 个球，向框子里面仍球。当每个框子都是 1 个球的时候，才能保证每个框子中的球小于 2

$$1-\frac{6!}{6^6}$$

Problem 5

第一次捕获后，麋鹿被分为了被标记和没有被标记。相当于从 n 里选出 k 个，从 N-n 里面选出 m-k 个。但也要考虑范围。

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{n}}$$

这个就是超几何分布

Problem 6

(a) 由于第一个人拿出球后没有看，先后拿与拿出来 2 个球，分给两个人的概率是相同的，所以两个人的概率是相同的

(b) 对所以的球进行编号，第一次拿出来是绿球的概率，很简单，是

$$\frac{g}{r+g}$$

第二次取球，可以用树来做，一共有 $(r+g)(r+g-1)$ 种情况。第一次取到红球，第二次取绿球，一共 $r \cdot g$ 种情况。第一次取到绿球，第二次取到绿球，一共 $g(r+g)$ 种情况。最后结果为

$$\frac{r \cdot g + g(g-1)}{(r+g)(r+g-1)} = \frac{g}{r+g}$$

可以看出，两个结果是相同的

(c) 这里可以用条件概率，设事件 A 为第一次红色，B 为第二次红色。

$$P(AB) + P(A^C B^C) = P(A) P(B|A) + P\left(A^C\right) P(B^C|A^C) = \frac{r}{16} \cdot \frac{r-1}{15} + \frac{16-r}{16} \cdot \frac{15-r}{15}$$

$$P(AB^C) + P(A^C)P(B) = 2 \cdot \frac{r}{16} \cdot \frac{16-r}{15}$$

令上面上个式子相等，解出 $r = 6$ 或 $r = 10$

还有更快的方法：由于所求两个事件互为对立事件，并且概率相等，所以上面的式子值为 $\frac{1}{2}$

Problem 7

(a) 这道题其实用递归的思想可以解，类似于前面的 story proofs 第 7 题

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = ... = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + ... + \binom{k}{k}$$

我们的故事就可以这样编，选出一个最年长的人，将所有含有他的结果先计算出来，为 $\binom{n}{k}$，在剩下的 n 个人中，在选一个最年长的，将含有他的结果都计算出来，为 $\binom{n-1}{k}$，以此类推，最后剩下的 k+2 个人的时候，选一个最年长的，将含有他的结果都计算出来，为 $\binom{k+1}{k}$，然后最后只剩下 k+1 个人，就是最后一种情况。

(b) 一共假设有 N gummi bears，中间加 4 个隔板就可以将 5 种口味隔开，那么总共有 N+4 个点，在其中选择 4 个点作为隔板，就能得出有多少种口味的组合。

$$\binom{N+4}{4}$$

题目说的是 N 从 30 到 50 的一个求和，总共多少

$$\sum_{i=30}^{50} \binom{i+4}{4} = \sum_{j=34}^{54} \binom{j}{4} = \sum_{4}^{54} \binom{j}{4} - \sum_{4}^{33} \binom{j}{4} = \binom{55}{5} - \binom{34}{5}$$