Gram-Schmidt-Verfahren

$$\boxed{q_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_n^T q_i}{|q_i|^2} \cdot q_i}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$q_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = v_2 - \frac{v_2^T \cdot q_1}{|q_1|^2} \cdot q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 4\ 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{|-1^2 + 2^2 + 2^2|} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{18}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-6}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{10}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus Rechnung alles bekannt für Q und R

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{q_n}{\sqrt{|q_n|^2}} & \cdots \\ \vdots & \\ \frac{q_n}{\sqrt{|q_n|^2}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

↳ $|q_1|^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} = 3 \rightsquigarrow$ 1. Spalte von $Q = \frac{q_1}{3}$

↳ das selbe für andere Spalten!

R soll obere Dreiecksmatrix sein:

$$R = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ 0 & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{16}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

↳ Die Diagonale ist immer die Zahl, mit der man die q_n-Vektoren für Q geteilt hat!

NR: $|q_3| = \frac{1}{3}\sqrt{45} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{5}$