QR-Zerlegung mit Householder

$$\underbrace{A}_{\text{Ausgangsmatrix}} = \underbrace{Q}_{\text{orthogonale Matrix}} \cdot \overbrace{R}^{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$v_1 = (-2; -2; 1)$$

$$\sigma \|v_1\| = -\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = -\sqrt{9} = -3$$

Schritt 2: 1. Householder-Vektor berechnen

$$w_1^t = \frac{v_1 + \sigma\|v_1\| \cdot e_1}{\|v_1 + \sigma\|v_1\| \cdot e_1\|} = \frac{(-2;-2;1) - 3\cdot(1;0;0)}{\underbrace{\|(-2;-2;1) - 3\cdot(1;0;0)\|}_{(-5;-2;1) \Rightarrow \sqrt{(-5)^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{30}}} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5;-2;1)$$

w_1: orthogonaler Vektor zur Spiegelachse

Schritt 3: Multiplikation des Householders-Vektors

$$2 \cdot w_1 w^H = 2 \cdot w_1 \cdot w^t = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} (-5; -2, 1)$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 25 & 10 & -5 \\ 10 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Berechnung 1. Householder-Matrix

$$H^{(1)} = I - 2w_1w^t = I_3 - \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25 & 10 & -5 \\ 10 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25 & 10 & -5 \\ 10 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\left[\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 10 & -5 \\ 10 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Schritt 5: Berechnen Matrix $A^{(1)}$

$$A^{(1)} = H^{(1)} \cdot A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & -12 & -26 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/3 \\ 0 & 3/5 & 7/15 \\ 0 & -4/5 & -26/15 \end{pmatrix}$$

Schritt 6:

$v_2 = (0; 3/5; -4/5)$ → Platzhalter für 1. Zeile

$\sigma = \|v_2\| = \sqrt{(3/5)^2 + (-4/5)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/3 \\ 0 & 3/5 & 7/15 \\ 0 & -4/5 & -26/15 \end{pmatrix}\right.$$

⇒ Betrachtung der zweiten Spalte $\left.\right]$

Schritt 7: 2. Householder-Vektor berechnen

$$w_2^t = \frac{(0; 3/5; -4/5) + 1 \cdot e_2}{\|\underbrace{(0; 3/5; -4/5) + 1 \cdot e_2}_{\frac{1}{5}(0;8;-4) \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{25}(0^2+8^2+4^2)} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{\sqrt{80}}{5}}\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{80}}{5}} \frac{1}{5}(0; 8; -4) = \frac{1}{\sqrt{80}}(0; 8; -4) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(0; 2; -1)$$

Schritt 8: Multiplikation des Householders-Vektor

$$2 \cdot w_2 \cdot w_2^H = 2 \cdot w_2 \cdot w_2^t = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(0; 2; -1) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 9: Berechnung der 2. Householder-Matrix

$$H^{(2)} = I - 2 \cdot w_2 w_2^H = I_3 - 2 \cdot w_2 w_3^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 10: 2. A-Matrix berechnen

$$A^{(2)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & -12 & -26 \end{pmatrix} = \frac{1}{75} \cdot \begin{pmatrix} 225 & 150 & 125 \\ 0 & -75 & -125 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/3 \\ 0 & -1 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = R$$

Schritt 11:

$$Q = H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot \ldots \cdot H^{(n)}$$

$$Q = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{pmatrix} -50 & 50 & -25 \\ -50 & -25 & 50 \\ 25 & 50 & 50 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Q$$

$$\left[\Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/3 \\ 0 & -1 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \right]$$