第五章 傅里叶变换光学简介

第五章 傅里叶变换光学简介

1、余弦光栅的衍射场

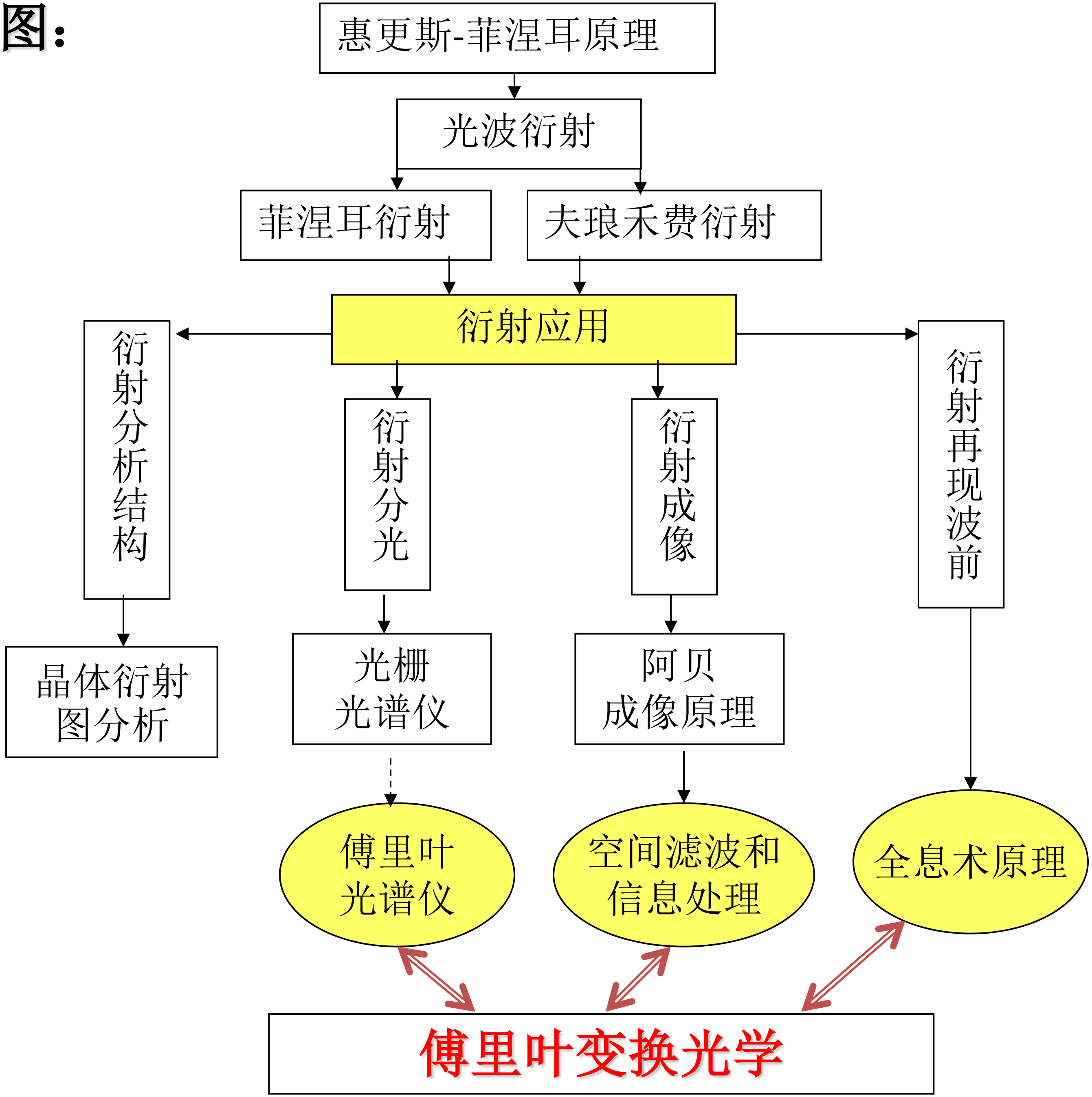
2、傅里叶变换光学大意

3、阿贝成像原理与空间滤波

4、泽尼克的相衬法

5、全息术原理

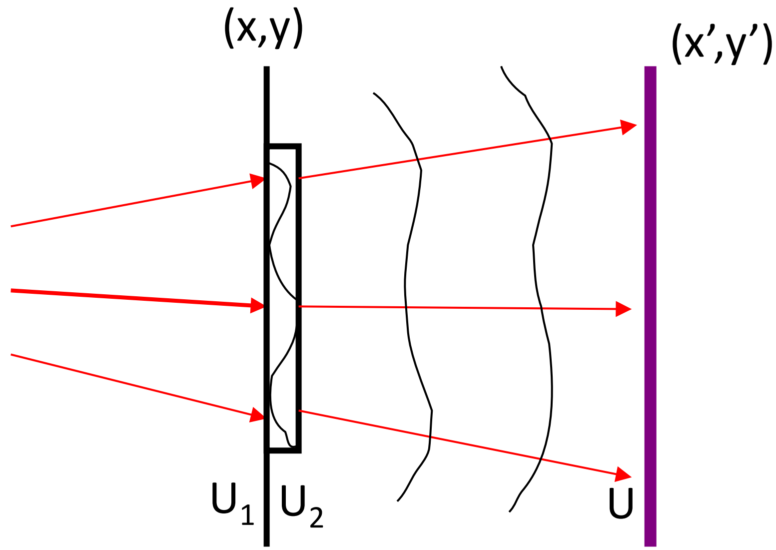
本章的概貌图：



惠更斯-菲涅耳原理
光波衍射
菲涅耳衍射
夫琅禾费衍射
衍射应用
衍射分析结构
衍射分光
衍射成像
衍射再现波前
晶体衍射图分析
光栅光谱仪
阿贝成像原理
傅里叶光谱仪
空间滤波和信息处理
全息术原理
傅里叶变换光学

第一节　余弦光栅的衍射场(*)

一、波前变换和相因子分析



入射场$\tilde{U}_1(x,y)$ $\xrightarrow{\text{衍射屏的作用}}$ 出射场$\tilde{U}_2(x,y)$ $\xrightarrow{\text{波的传播行为}}$ 衍射场$\tilde{U}(x',y')$

$$\tilde{U}(x',y')=\frac{-i}{\lambda}\iint_{(\Sigma_0)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_2(x,y)\frac{e^{ikr}}{r}dxdy$$

衍射屏函数的定义：$\tilde{t}(x,y)=\dfrac{\tilde{U}_2(x,y)}{\tilde{U}_1(x,y)}$

衍射屏函数的三种类型

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{U}_2(x,y)}{\tilde{U}_1(x,y)}=\underline{\underline{t(x,y)}}e^{\underline{\underline{i\varphi(x,y)}}}$$

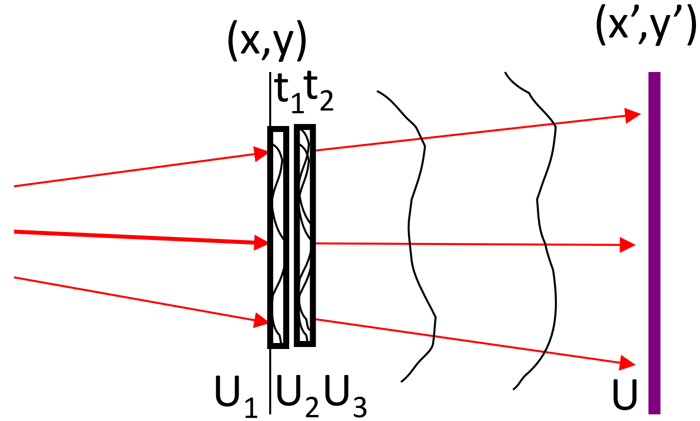
振幅模函数　　　　　　　　辐角函数

（1）若$\varphi(x,y)\approx$常数，只有函数$t(x,y)$，则该衍射屏称为振幅型。

（2）若$t(x,y)\approx$常数，只有函数$\varphi(x,y)$，则该衍射屏称为相位型。

（3）若有两个函数$\varphi(x,y)$和$t(x,y)$，则该衍射屏称为相幅型。

两个衍射屏相叠



$$\tilde{U}_2 = \tilde{t}_1 \cdot \tilde{U}_1, \quad \tilde{U}'_2 = \tilde{U}_2, \quad \tilde{U}_3 = \tilde{t}_2 \cdot \tilde{U}'_2$$

$\tilde{t}_1$和$\tilde{t}_2$的总体作用：

$$\tilde{t}(x,y) = \frac{\tilde{U}_3}{\tilde{U}_1} = \frac{\tilde{U}_3}{\tilde{U}'_2} \cdot \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} = \tilde{t}_1 \cdot \tilde{t}_2$$

衍射的再说明：

$$\tilde{U}(x',y') = \frac{-i}{\lambda}\iint_{(\Sigma_0)} \tilde{t}(x,y)\cdot\tilde{U}_1(x,y)\frac{e^{ikr}}{r}dxdy$$

有衍射屏存在时
自由传播的光场

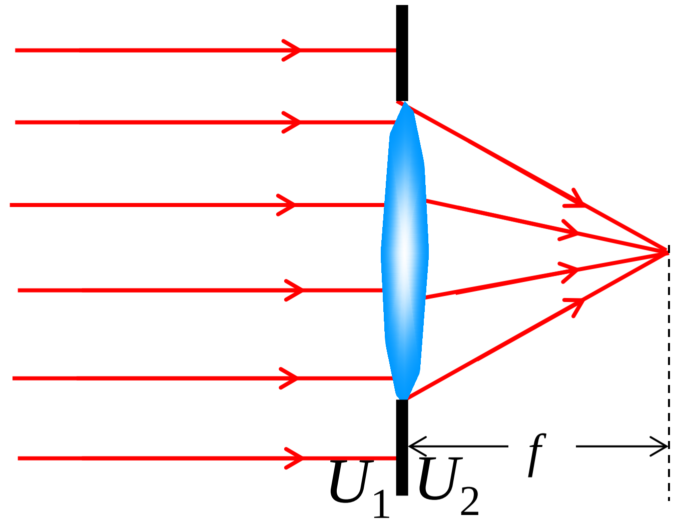
$$\neq \frac{-i}{\lambda}\iint_{(\Sigma_0)} \tilde{U}_1(x,y)\frac{e^{ikr}}{r}dxdy$$

无衍射屏存在时
自由传播的光场

由于衍射屏函数的作用，改变了波前，
从而改变了后场的分布，于是发生了衍射。

几种光学元件的衍射屏函数

（1）透镜的相位变换函数（在傍轴条件下）



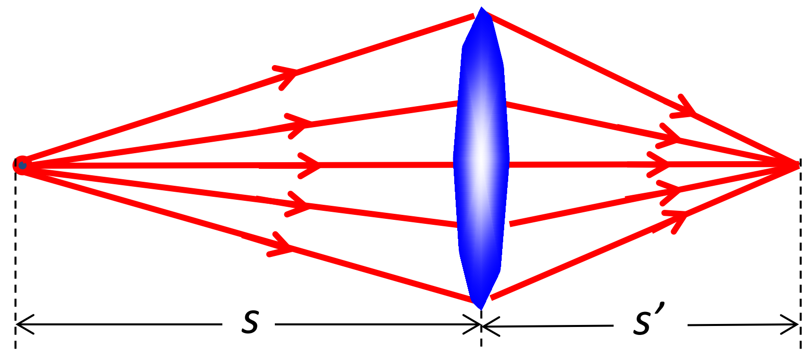
把平行光变成了汇聚球面光

$$\tilde{U}_1 = A_1 \xrightarrow{\text{透镜作用}} \tilde{U}_2 = A_2 e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}},$$

忽略透镜吸收，$A_1 \approx A_2$，$\Rightarrow \tilde{t}_L(x,y) = \dfrac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} = e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$ 相位型

凹透镜和凸透镜的情况相同，
只是焦距一个为负，一个为正。

例题：求薄透镜傍轴成像公式：



在傍轴条件下：$\tilde{U}_1(x,y) = A_1 e^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}}$

透镜函数：$\tilde{t}_L(x,y) = e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$

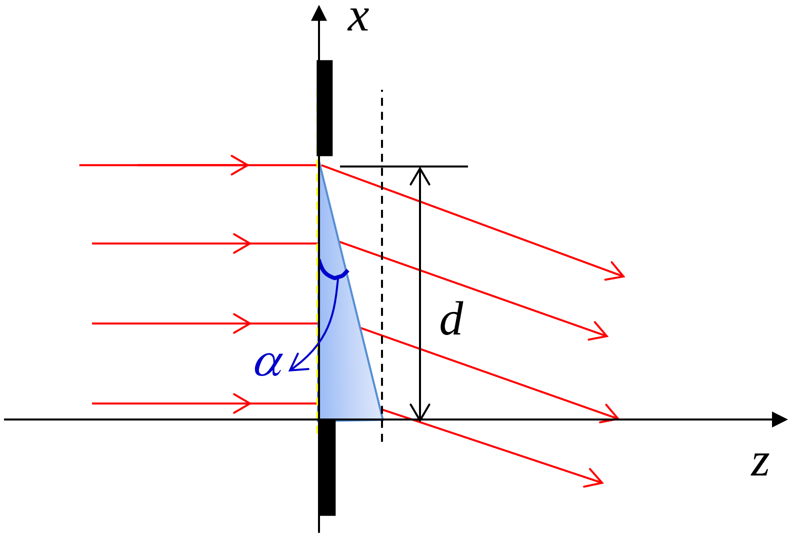
$$\Rightarrow \tilde{U}_2(x,y) = \tilde{t}_L(x,y)\tilde{U}_1(x,y) = e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}} \cdot A_1 e^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}} = A_1 e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2\left(\frac{fs}{f-s}\right)}}$$

$\Rightarrow$ 汇聚球面波，汇聚点为: $s' = \dfrac{fs}{f-s}$　　光源的像点

$\Rightarrow$ 成像公式：$s' = \dfrac{fs}{f-s} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f}$

（2）棱镜的相位变换函数

忽略棱镜对光的吸收，把棱镜近似看成相位型衍射屏。



光经过棱镜比光在真空中自由传播时的光程差：

$$\delta L \approx n(d-x)\alpha-(d-x)\alpha=(n-1)(d-x)\alpha$$

附加的相位差：

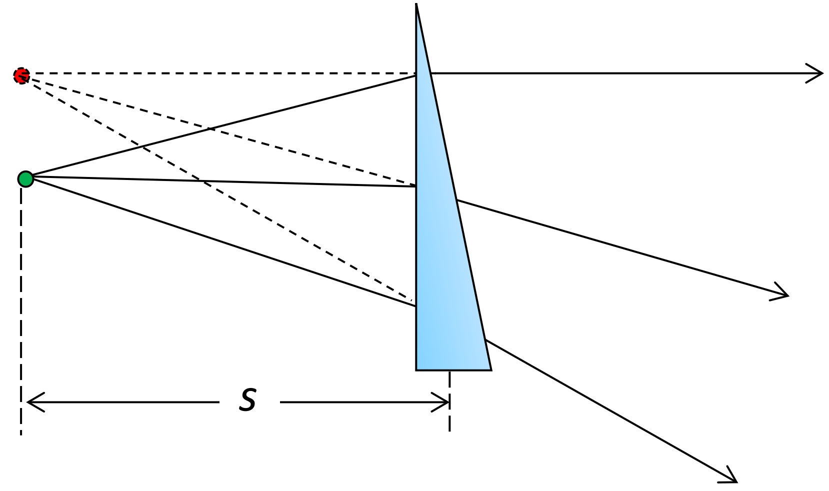
$$\delta\varphi=k(n-1)(d-x)\alpha=k(n-1)d\alpha-k(n-1)x\alpha$$

相位变换函数：$\tilde{t}_P(x)=e^{i\delta\varphi}=e^{i[k(n-1)d\alpha-k(n-1)x\alpha]}=e^{ik(n-1)d\alpha}e^{-ik(n-1)x\alpha}$

或 $\tilde{t}_P(x)=e^{-ik(n-1)\alpha x}$

二维 $\tilde{t}_P(x,y)=e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}$.

例题： 推导棱镜傍轴成像公式：



傍轴条件：

$$\tilde{U}_1(x,y) \approx A_1 e^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}}$$

$$\tilde{U}_2(x,y) = \tilde{t}_P(x,y)\cdot\tilde{U}_1(x,y) = A_1 e^{ik\frac{x^2+y^2}{2s} - ik(n-1)x\alpha}$$

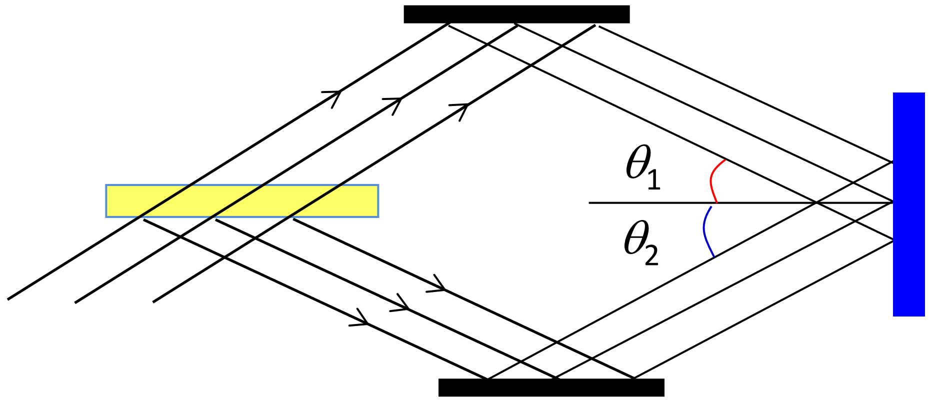
$$= A_1 e^{-ik\frac{[(n-1)s\alpha]^2}{2s}} e^{ik\frac{[x-(n-1)s\alpha]^2+y^2}{2s}}$$

发散球面波

发散中心，即像点的位置为：$((n\text{-}1)s\alpha,\ 0,\ \text{-}s)$

2、余弦光栅的衍射场

余弦光栅的制备：



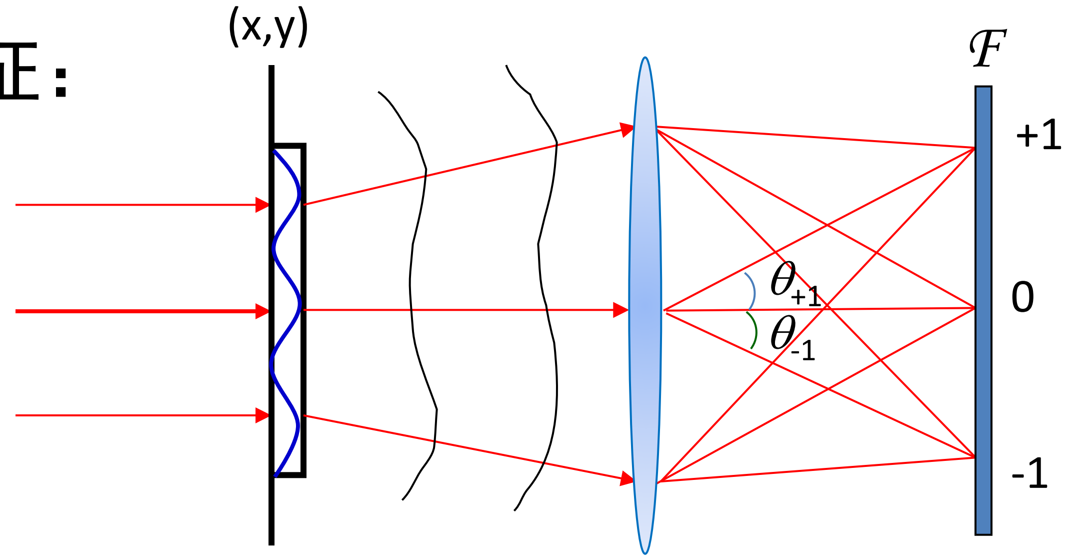
$$I(x,y)=I_0\left(1+\gamma\cos(2\pi fx+\phi_0)\right);\quad f=\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\lambda}$$

用干板记录，通过显影和定影，形成余弦光栅。

透过率函数为：$t(x,y)\propto I(x,y)$

$$\Rightarrow t(x,y)=\alpha+\beta I(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\phi_0)$$

余弦光栅的衍射特征：



平面波正入射，
其入射波前为：

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1$$

经过余弦光栅后的透射波前为：

$$\tilde{U}_2(x,y) = \tilde{t}(x,y)\tilde{U}_1(x,y) = A_1\left[t_0 + t_1\cos(2\pi fx + \phi_0)\right]$$

$$= A_1\left[t_0 + t_1\left(\frac{e^{i(2\pi fx+\phi_0)} + e^{-i(2\pi fx+\phi_0)}}{2}\right)\right]$$

$$= A_1t_0 + \frac{1}{2}A_1t_1e^{i(2\pi fx+\phi_0)} + \frac{1}{2}A_1t_1e^{-i(2\pi fx+\phi_0)}$$

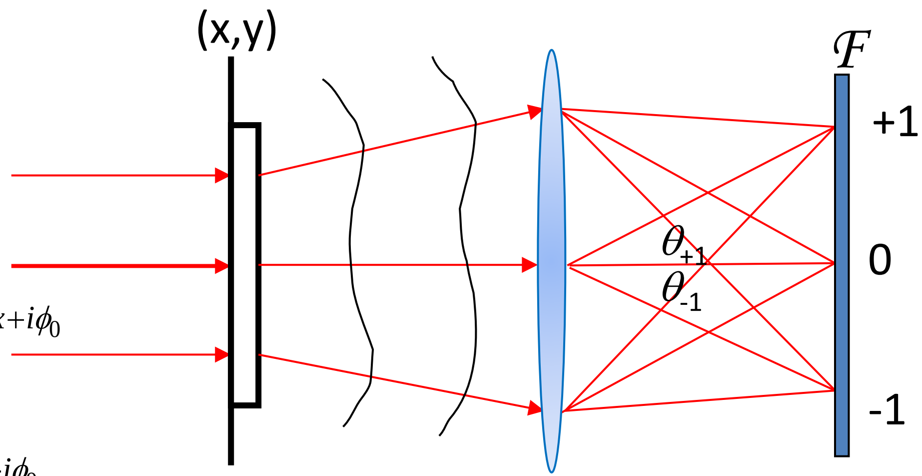
$$= \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}$$

$$\tilde{U}_0 = A_1 t_0$$

$$\tilde{U}_{+1} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{i(2\pi fx + \phi_0)}$$

$$= \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(f\lambda)x + i\phi_0} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{ik\sin\theta_{+1}\cdot x + i\phi_0}$$

$$\tilde{U}_{-1} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{-i(2\pi fx + \phi_0)} = \frac{1}{2} A_1 t_1 e^{ik\sin\theta_{-1}\cdot x - i\phi_0}$$



衍射方向：

0级为正出射的平面波，衍射角为0;

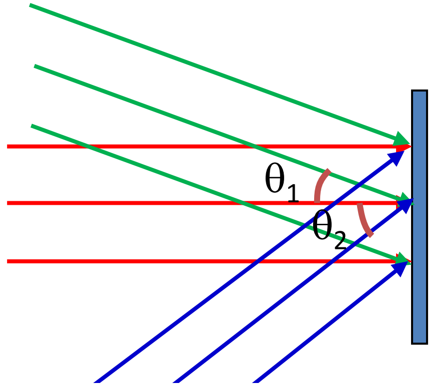
+1级$\tilde{U}_{+1}$代表向上斜出射的平面光，衍射角θ_{+1}满足:$\sin\theta_{+1} = f\lambda$

-1级$\tilde{U}_{-1}$代表向下斜出射的平面光，衍射角θ_{-1}满足:$\sin\theta_{-1} = -f\lambda$

最重要的特点：

±1级衍射斑的方位角与余弦光栅的空间频率一一对应。

例题：



$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1,$$
$$\tilde{U}_2(x,y) = A_2 e^{ik\sin\theta_2 x},$$
$$\tilde{U}_3(x,y) = A_3 e^{-ik\sin\theta_1 x}$$

$$I(x,y) = \left(\tilde{U}_1(x,y)+\tilde{U}_2(x,y)+\tilde{U}_3(x,y)\right)\cdot\left(\tilde{U}_1(x,y)+\tilde{U}_2(x,y)+\tilde{U}_3(x,y)\right)^*$$
$$= \left(A_1 + A_2 e^{ik\sin\theta_2 x} + A_3 e^{-ik\sin\theta_1 x}\right)\cdot\left(A_1 + A_2 e^{-ik\sin\theta_2 x} + A_3 e^{ik\sin\theta_1 x}\right)$$
$$= A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\sin\theta_2 x\right) + 2A_1A_3\cos\left(k\sin\theta_1 x\right)$$
$$+2A_2A_3\cos\left(k(\sin\theta_2+\sin\theta_1)x\right)$$

空间周期：

$$\Delta x_{12} = \frac{2\pi}{k\sin\theta_2} = \frac{\lambda}{\sin\theta_2},$$
$$\Delta x_{13} = \frac{2\pi}{k\sin\theta_1} = \frac{\lambda}{\sin\theta_1},$$
$$\Delta x_{23} = \frac{2\pi}{k(\sin\theta_2+\sin\theta_1)} = \frac{\lambda}{\sin\theta_2+\sin\theta_1}$$

空间频率：

$$f_{12} = \frac{1}{\Delta x_{13}} = \frac{\sin\theta_2}{\lambda},$$
$$f_{13} = \frac{1}{\Delta x_{13}} = \frac{\sin\theta_1}{\lambda},$$
$$f_{23} = \frac{1}{\Delta x_{23}} = \frac{\sin\theta_2+\sin\theta_1}{\lambda}$$

$$I(x,y)=A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos\left(2\pi f_{12}x\right)+2A_1A_3\cos\left(2\pi f_{13}x\right)+2A_2A_3\cos\left(2\pi f_{23}x\right)$$

用干板记录，通过显影和定影，干板透过率函数 $t(x,y)\propto I(x,y)$

$$\begin{aligned} t(x,y)&=\alpha+\beta I(x,y)\\ &=t_0+t_{12}\cos\left(2\pi f_{12}x\right)+t_{13}\cos\left(2\pi f_{13}x\right)+t_{23}\cos\left(2\pi f_{23}x\right)\end{aligned}$$

平面波$\tilde{U}=A_1$经过光栅后的透射波前为：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x,y)&=\tilde{t}(x,y)\tilde{U}_1(x,y)=A_1\left[t_0+t_{12}\cos\left(2\pi f_{12}x\right)+t_{13}\cos\left(2\pi f_{13}x\right)+t_{23}\cos\left(2\pi f_{23}x\right)\right]\\ &=A_1\left[t_0+t_{12}\left(\frac{e^{i(2\pi f_{12}x)}+e^{-i(2\pi f_{12}x)}}{2}\right)+t_{13}\left(\frac{e^{i(2\pi f_{13}x)}+e^{-i(2\pi f_{13}x)}}{2}\right)+t_{23}\left(\frac{e^{i(2\pi f_{23}x)}+e^{-i(2\pi f_{23}x)}}{2}\right)\right]\\ &=A_1t_0+\frac{1}{2}A_1t_{12}e^{i(2\pi f_{12}x)}+\frac{1}{2}A_1t_{12}e^{-i(2\pi f_{12}x)}+\frac{1}{2}A_1t_{13}e^{i(2\pi f_{13}x)}+\frac{1}{2}A_1t_{13}e^{-i(2\pi f_{13}x)}\\ &\quad+\frac{1}{2}A_1t_{23}e^{i(2\pi f_{23}x)}+\frac{1}{2}A_1t_{23}e^{-i(2\pi f_{23}x)}\\ &=\tilde{U}_0+\tilde{U}_{+12}+\tilde{U}_{-12}+\tilde{U}_{+13}+\tilde{U}_{-13}+\tilde{U}_{+23}+\tilde{U}_{-23}\end{aligned}$$

$$\tilde{U}_0 = A_1 t_0$$

$$\tilde{U}_{+12} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{i(2\pi f_{12} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{+12}\cdot x} \quad \tilde{U}_{-12} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{-i(2\pi f_{12} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-12}\cdot x}$$

$$\tilde{U}_{+13} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{i(2\pi f_{13} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{+13}\cdot x} \quad \tilde{U}_{-12} = \frac{1}{2} A_1 t_{13} e^{-i(2\pi f_{13} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-13}\cdot x}$$

$$\tilde{U}_{+23} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{i(2\pi f_{23} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{ik\sin\theta_{23}\cdot x} \quad \tilde{U}_{-23} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{-i(2\pi f_{23} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-23}\cdot x}$$

$\Rightarrow$ 衍射方向：

0级为正出射的平面波，衍射角为0;

$\tilde{U}_{+12}$代表向上斜出射的平面光，衍射角θ_{+12}满足:$\sin\theta_{+12} = f_{12}\lambda$

$\tilde{U}_{-12}$代表向下斜出射的平面光，衍射角θ_{-12}满足:$\sin\theta_{-12} = -f_{12}\lambda$

$\tilde{U}_{+13}$代表向上斜出射的平面光，衍射角θ_{+13}满足:$\sin\theta_{+13} = f_{13}\lambda$

$\tilde{U}_{-13}$代表向下斜出射的平面光，衍射角θ_{-13}满足:$\sin\theta_{-13} = -f_{13}\lambda$

$\tilde{U}_{+23}$代表向上斜出射的平面光，衍射角θ_{+23}满足:$\sin\theta_{+23} = f_{23}\lambda$

$\tilde{U}_{-23}$代表向下斜出射的平面光，衍射角θ_{-23}满足:$\sin\theta_{-23} = -f_{23}\lambda$

$$\tilde{U}_0 = A_1 t_0$$

$$\tilde{U}_{+12} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{i(2\pi f_{12} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{+12}\cdot x} \qquad \tilde{U}_{-12} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{-i(2\pi f_{12} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-12}\cdot x}$$

$$\tilde{U}_{+13} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{i(2\pi f_{13} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{+13}\cdot x} \qquad \tilde{U}_{-12} = \frac{1}{2} A_1 t_{13} e^{-i(2\pi f_{13} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-13}\cdot x}$$

$$\tilde{U}_{+23} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{i(2\pi f_{23} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{ik\sin\theta_{23}\cdot x} \qquad \tilde{U}_{-23} = \frac{1}{2} A_1 t_{23} e^{-i(2\pi f_{23} x)} = \frac{1}{2} A_1 t_{12} e^{ik\sin\theta_{-23}\cdot x}$$

$\Rightarrow$ 衍射方向：

0级为正出射的平面波，衍射角为0;

最重要的特点：

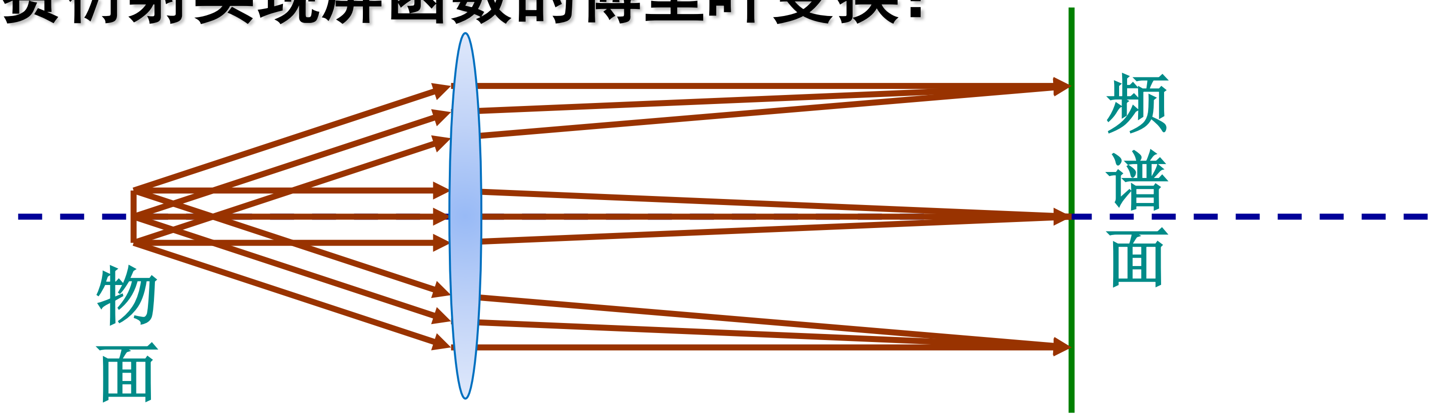
±衍射斑的方位角与光栅的空间频率一一对应。

$\tilde{U}_{+23}$代表向上斜出射的平面光，衍射角θ_{+23}满足:$\sin\theta_{+23} = f_{23}\lambda$

$\tilde{U}_{-23}$代表向下斜出射的平面光，衍射角θ_{-23}满足:$\sin\theta_{-23} = -f_{23}\lambda$

第二节　傅里叶变换光学大意(*)

夫琅禾费衍射实现屏函数的傅里叶变换：



周期屏函数可以用傅里叶展开：

$$t(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(2\pi kf_0x)+b_k\sin(2\pi kf_0x))$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\frac{e^{i2\pi f_kx}+e^{-i2\pi f_kx}}{2}+b_k\frac{e^{i2\pi f_kx}-e^{-i2\pi f_kx}}{2i})$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_k-ib_k)e^{i2\pi f_kx}+\frac{1}{2}(a_k+ib_k)e^{-i2\pi f_kx}\right]=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{i2\pi f_kx}$$

此时频谱面上是分离的频谱点。

以简单的平面波入射，透射波为

$$\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 t = A_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \, \mathrm{e}^{i2\pi f_k x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_1 c_k \, \mathrm{e}^{i2\pi f_k x}$$

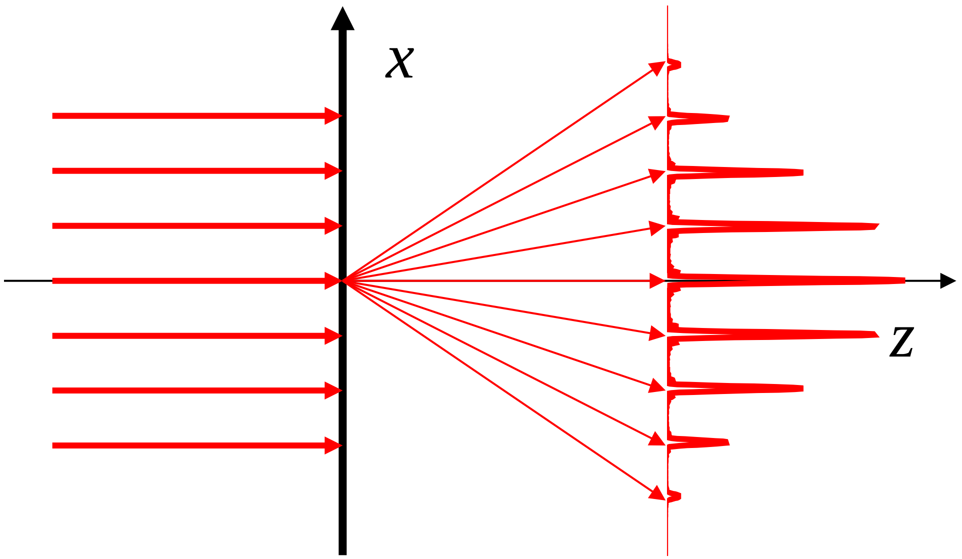
***Fourier* 频谱：** $\{ f_k \}$

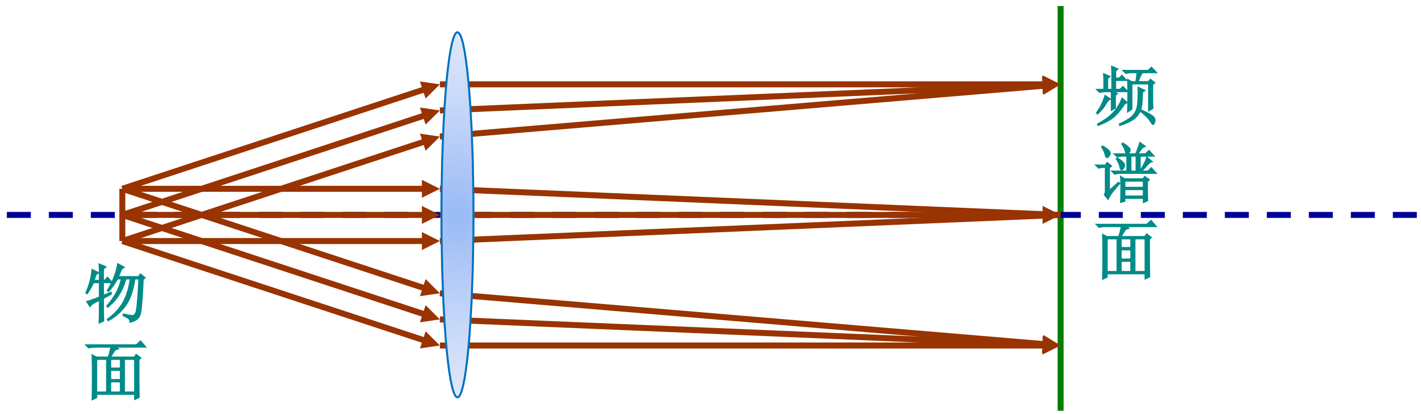
$$A_1 c_k \, \mathrm{e}^{i2\pi f_k x}$$

k级平面波

方向θ_k

$$\sin\theta_k = f_k \lambda$$

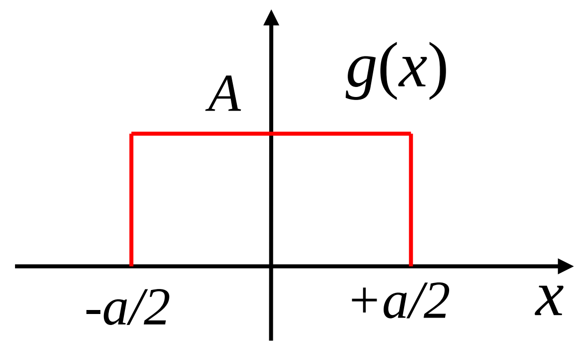




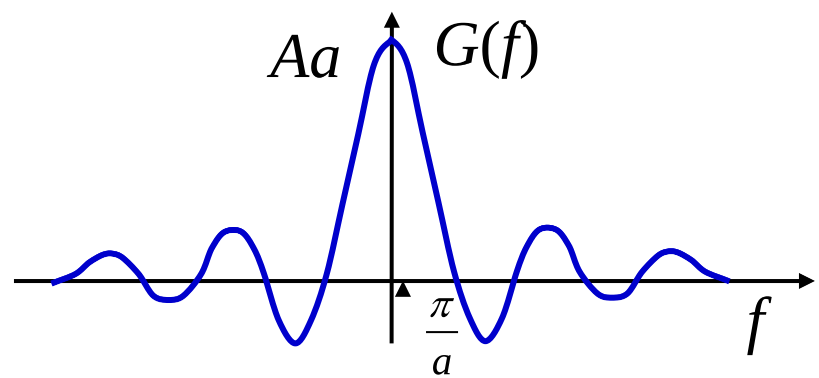
非周期屏函数可以用傅里叶积分表示：

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi fx}df$$

$$G(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)e^{-i2\pi fx}dx$$



此时频谱面上是连续的频谱图。



$$G(f)=Aa\,\mathrm{sinc}(\pi fa)$$

傅里叶光学的基本思想：

理想夫琅禾费衍射系统起到空间频率分析器的作用。

当单色光波入射到待分析的图象上时，通过夫琅禾费衍射，一定空间频率的信息就被一定特定方向的平面衍射波输送出来。

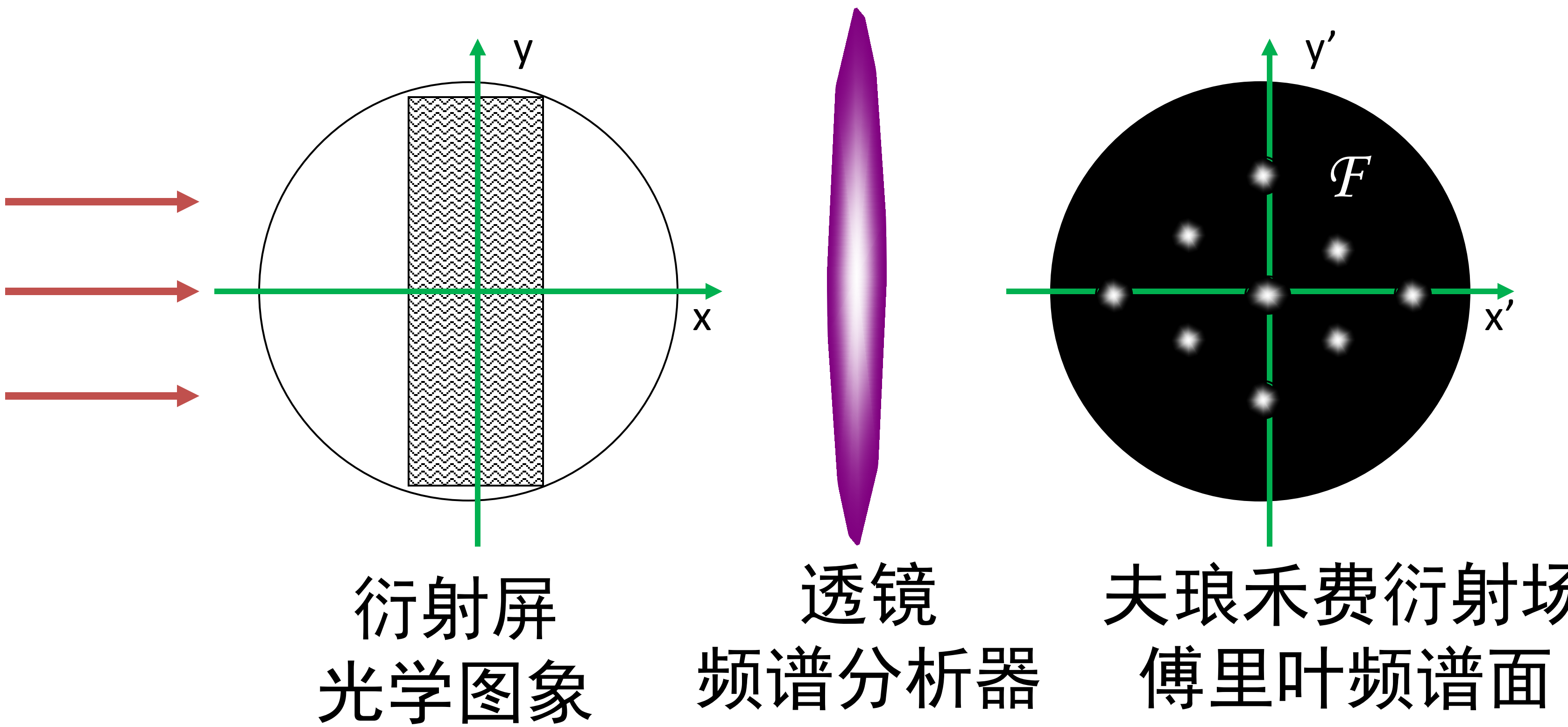
这些衍射波在近场彼此交织在一起，到了远场它们彼此分开，从而达到分频的目的。

常用远场分频装置是透镜：将不同方向的平面波汇聚到后焦面上不同的点上，形成一个个衍射斑。

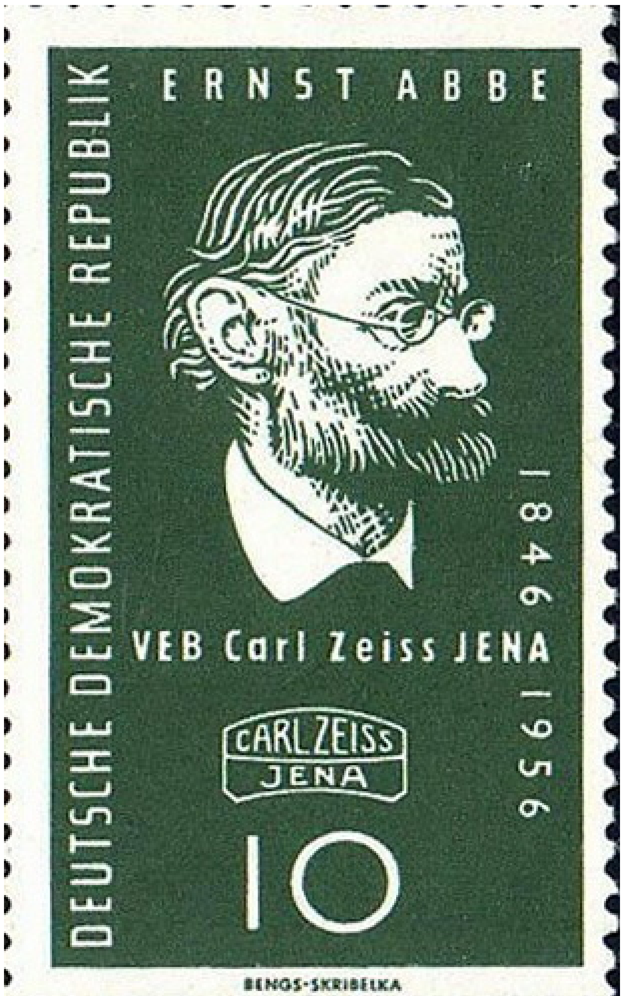
这些衍射斑和图象的空间频率一一对应，后焦面就是图象的频谱面，称为傅里叶(频谱)面。

夫琅禾费衍射斑称为谱斑。

这就是现代光学对夫琅禾费衍射的新认识。


y
x
y’
x’
$\mathcal{F}$
衍射屏
光学图象
透镜
频谱分析器
夫琅禾费衍射场
傅里叶频谱面

第三节 阿贝成像原理与空间滤波



恩斯特·阿贝，德国物理学家。1840年1月23日出生于埃森纳赫，1905年1月14日卒于耶拿。

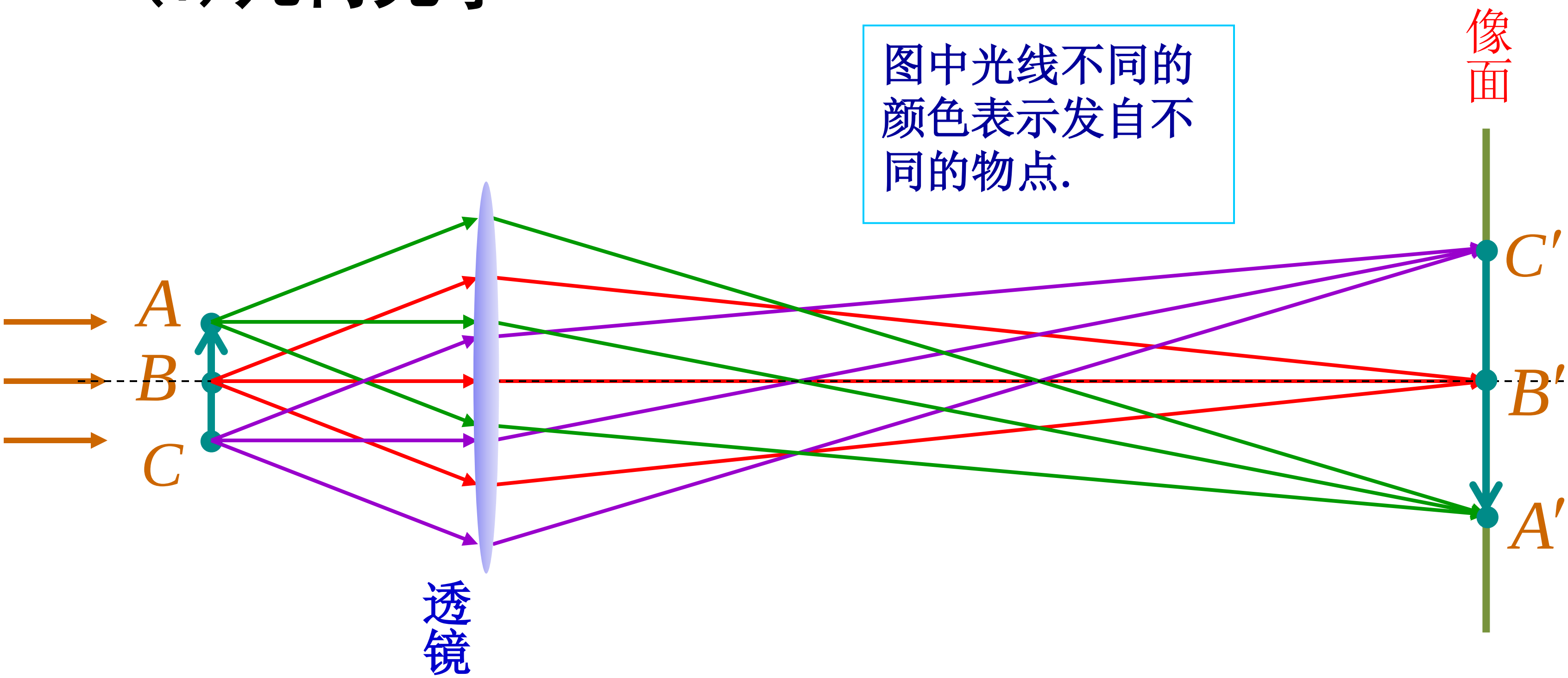
主要贡献：

一是几何光学的“正弦条件”，确定了可见光波段上显微镜分辨本领的极限，为迄今光学设计的基本依据之一；

二是波动光学阿贝成像原理。

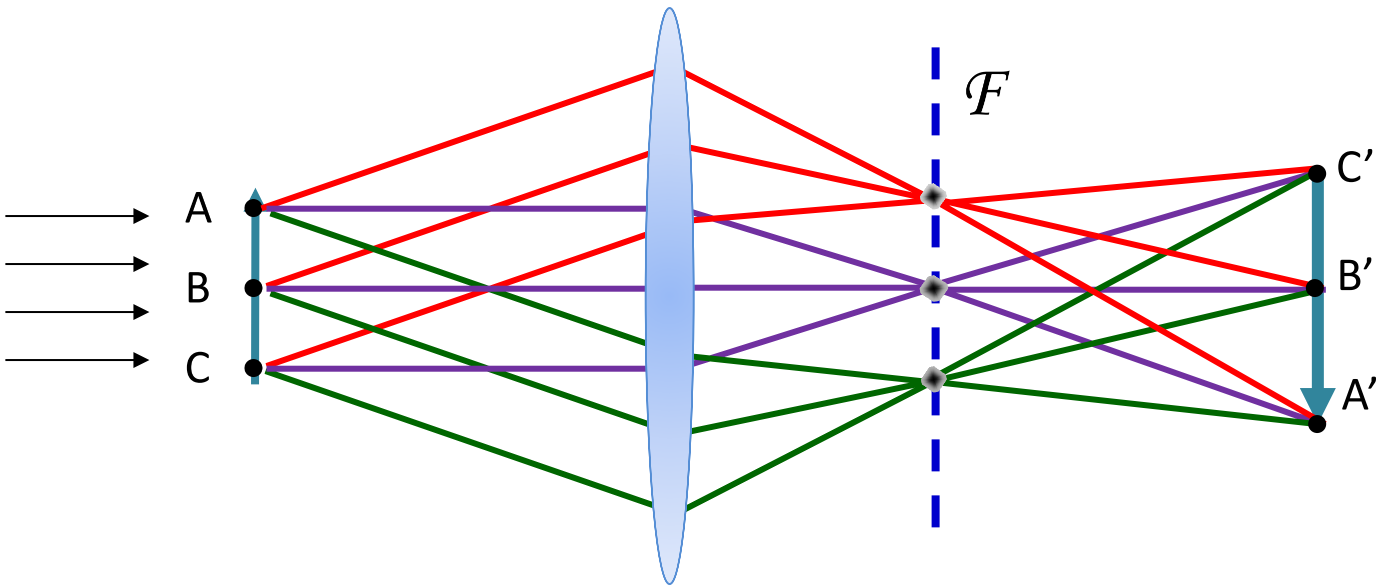
透镜成像有两个观点(*)：

(1) 几何光学



自物点A，B，C发出的球面波，
经透镜折射后，
各自会聚到它们的像点A′, B′, C′.

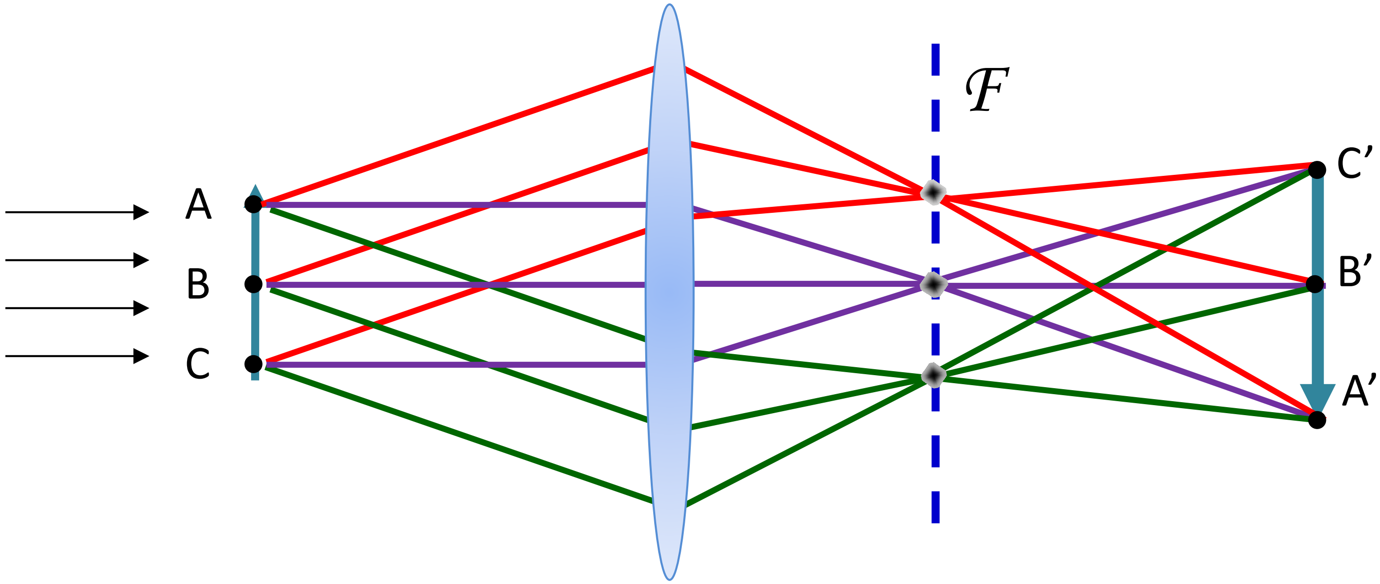
(2) 阿贝成像原理



物是一系列不同空间频率的集合。

入射光经物平面发生夫琅禾费衍射，在透镜焦面（频谱面）上形成一系列衍射光斑；

各衍射光斑发出的球面次波在相面上相干叠加，形成像.



阿贝成像原理将成像过程分为两步:

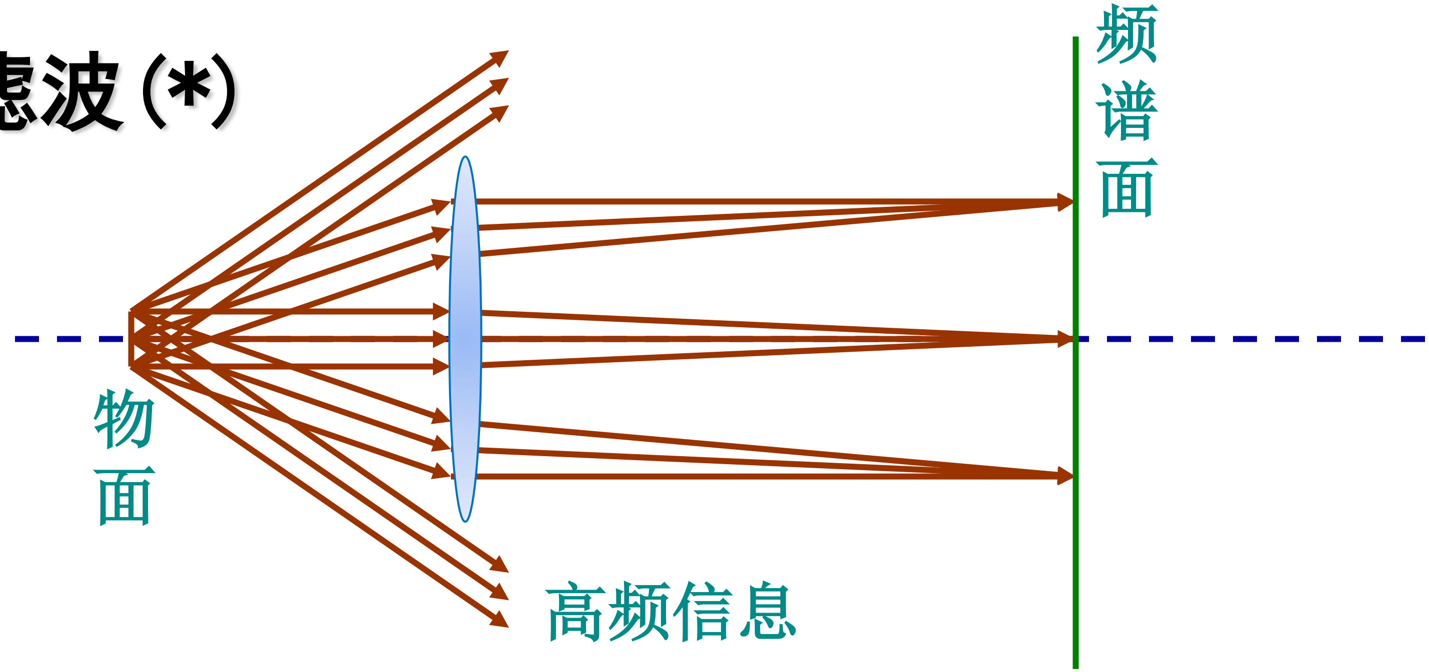
第一步“分频”；

第二步“合成”.

阿贝成像的真正意义:

提供了一种新的频谱语言描述信息，启发人们用改变频谱的手段来改造信息，此即信息光学处理的基础.

空间滤波(*)



从阿贝成像的观点来看，许多成像光学仪器就是一个低通滤波器。

物平面包含从低频到高频的信息，透镜口径限制了高频信息通过，只许一定的低频通过。因此，丢失了高频信息的光束再合成，图象的细节变模糊。

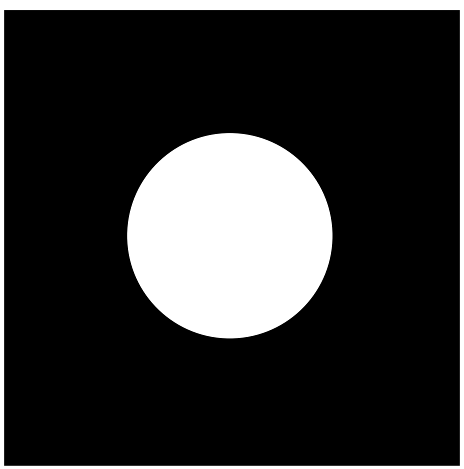
孔径越大，丢失的信息越少，图象越清晰。

空间滤波

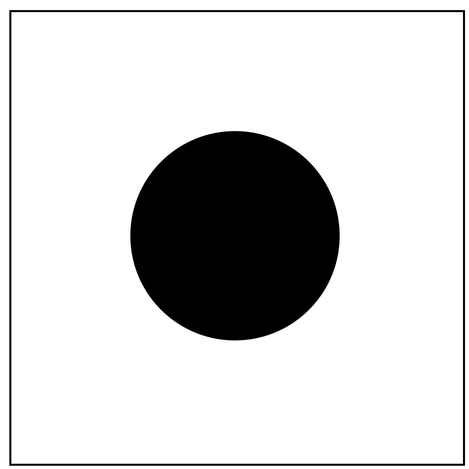
$$\sin\theta_k = f_k\lambda = \frac{\lambda}{d_k}$$

空间频率与波的衍射角相关，

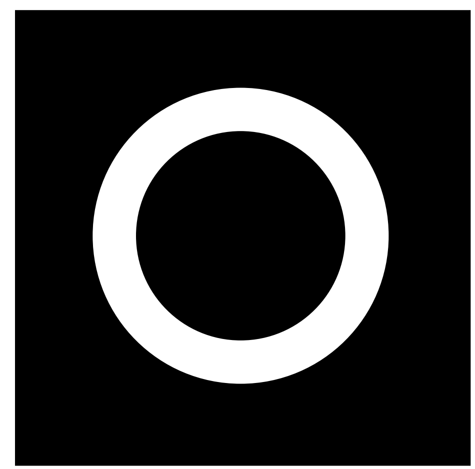
可以据此做成低通、高通或带通的滤波装置



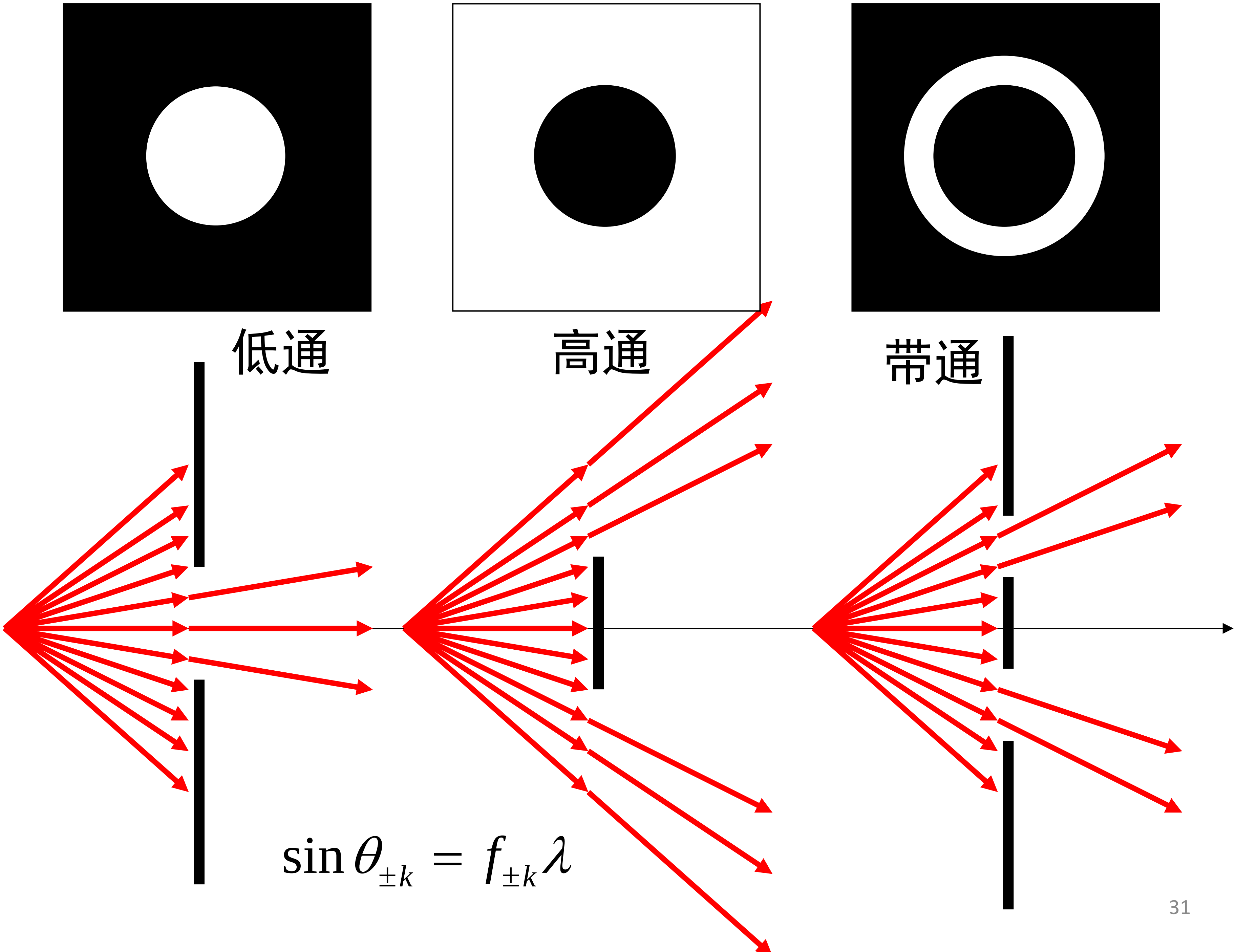
低通



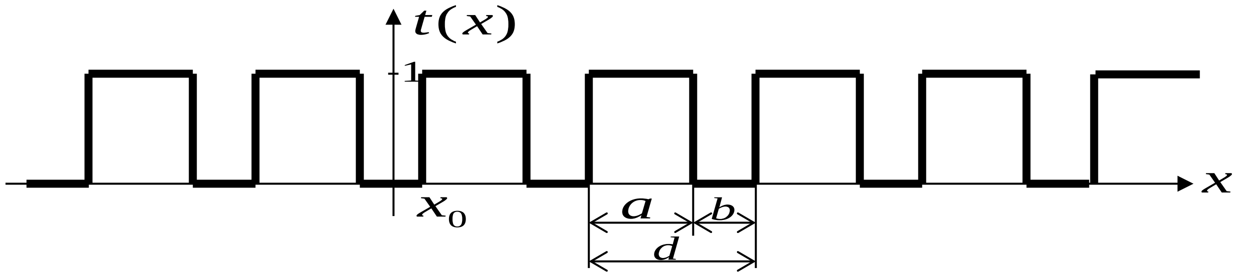
高通



带通



$$\sin\theta_{\pm k} = f_{\pm k}\lambda$$



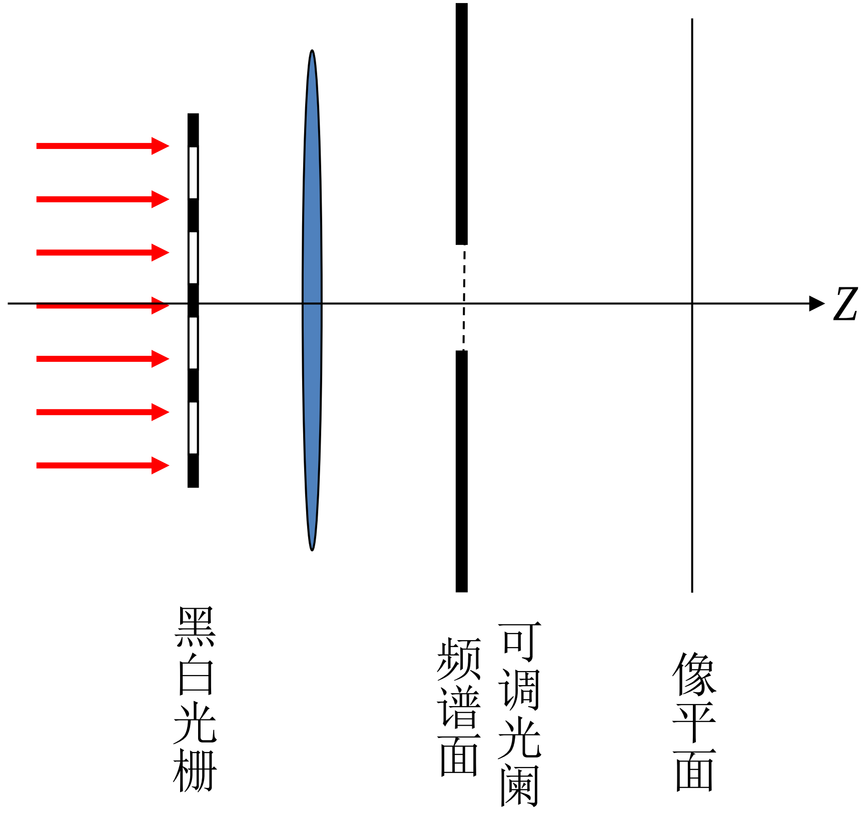
以黑白光栅为物，单色平行光照射

在傅里叶频谱面上加一可调狭缝，观察像的变化

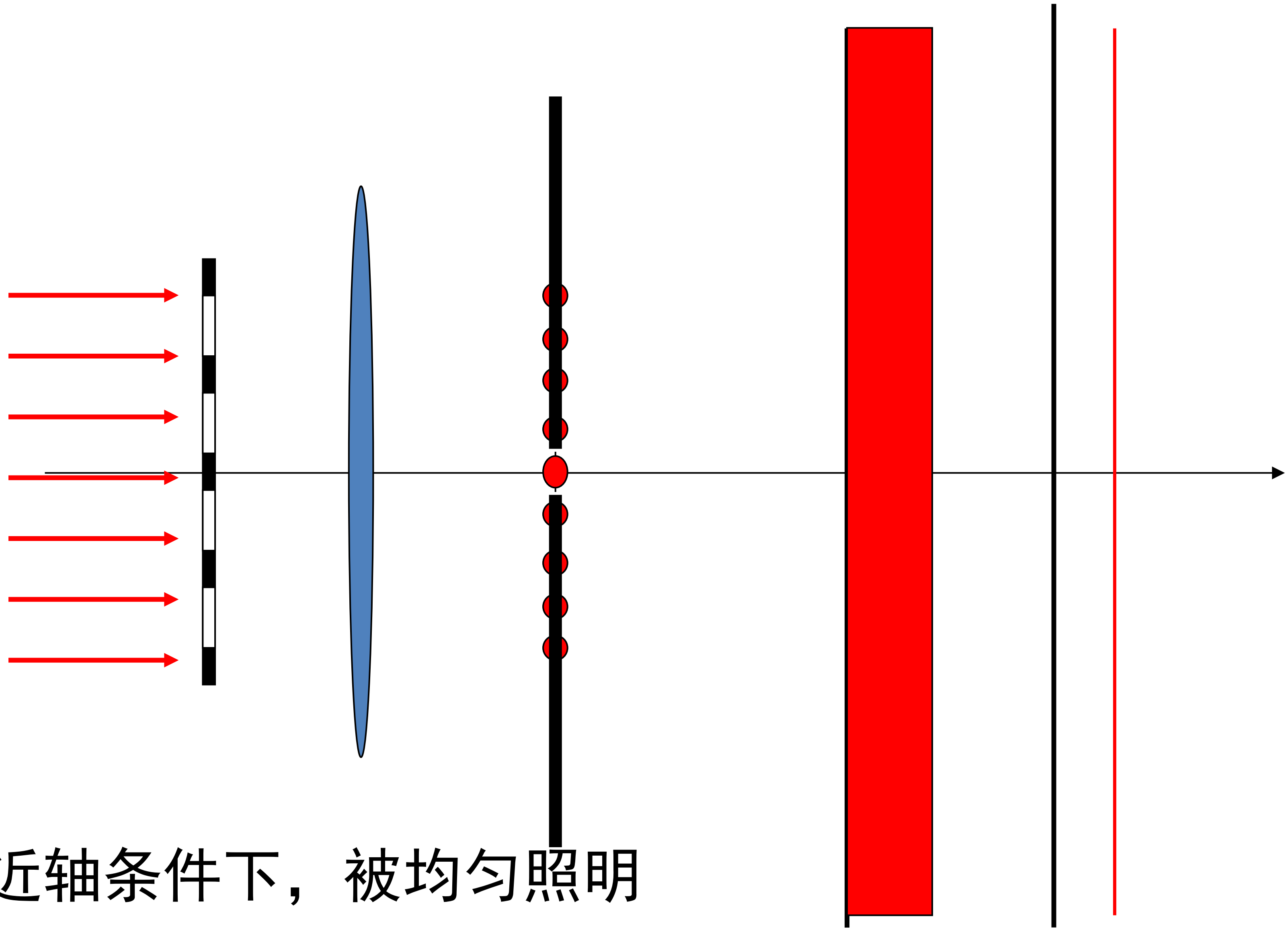
$$\tilde{t}(x)=\tilde{t}(x+kd)$$

$$\tilde{t}(x)=\sum c_k e^{i2\pi kfx}$$

$$c_k=\frac{a}{d}\frac{\sin(\pi ka/d)}{\pi ka/d}$$



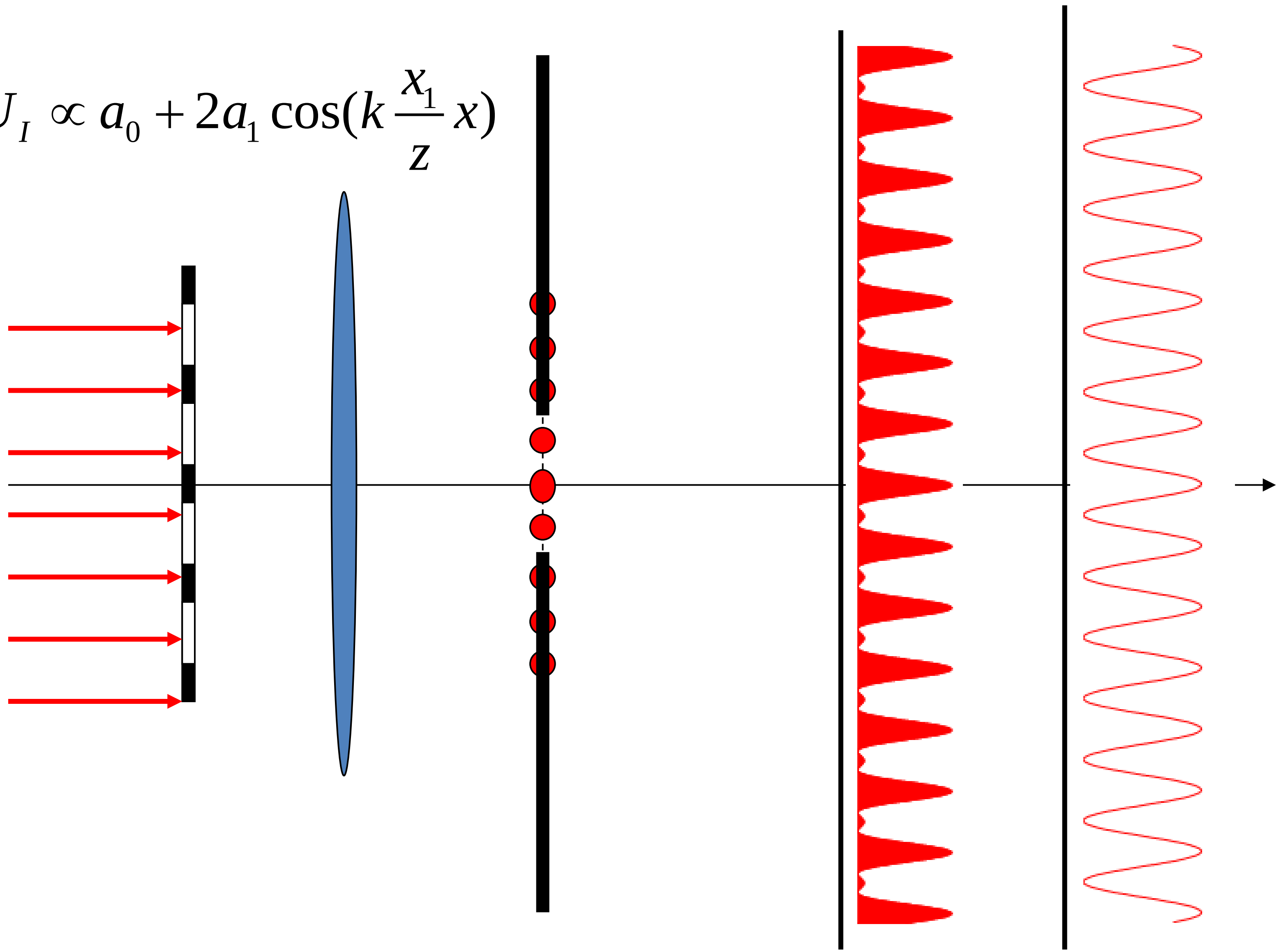
只让0级，即直流成分通过，
则像平面被0级斑发出的球面波照明。



近轴条件下，被均匀照明

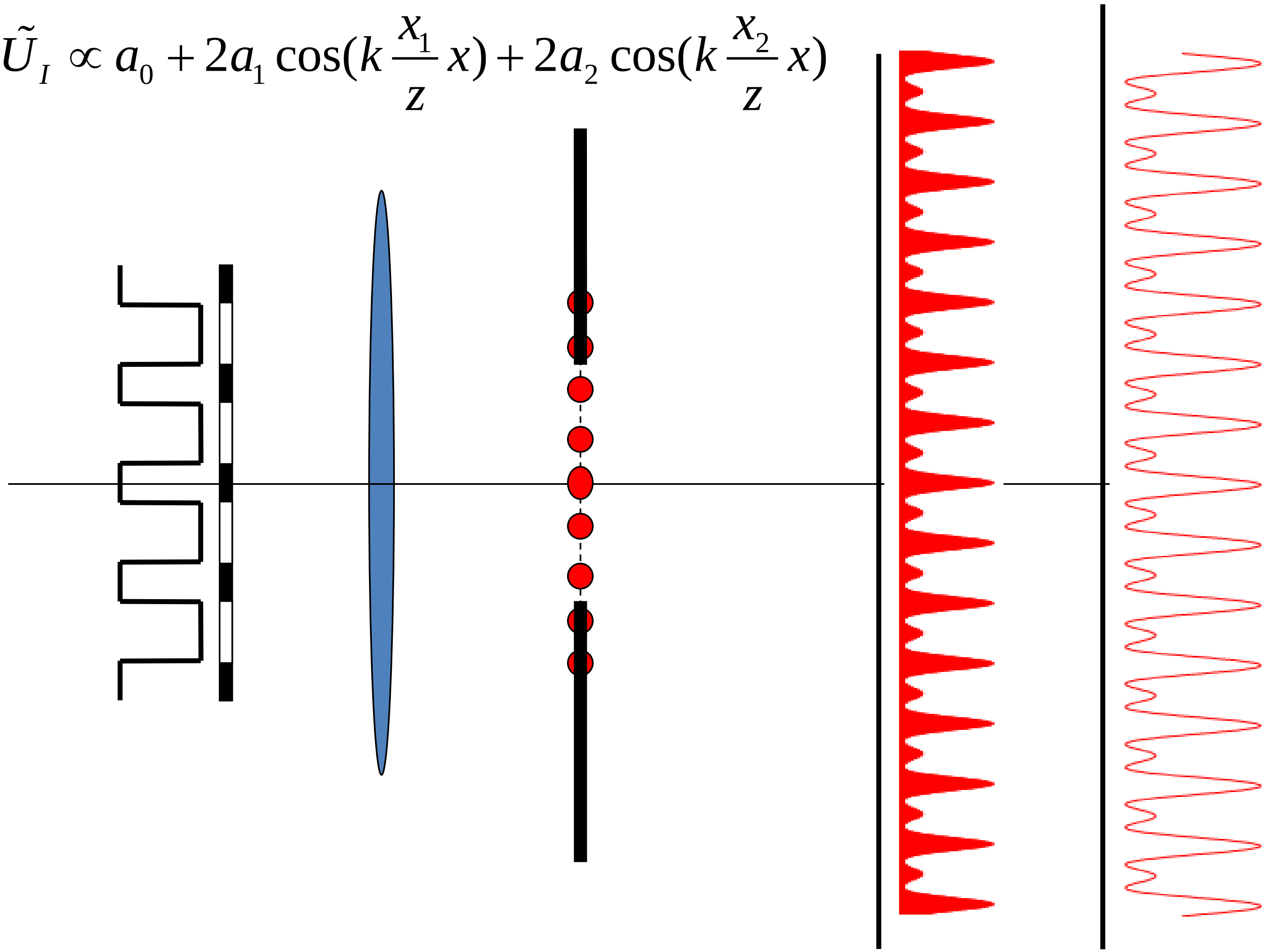
让0级和±1级通过，则像平面上是0和±1三个衍射斑发出的次波的相干叠加

$$U_I \propto a_0 + 2a_1 \cos(k\frac{x_1}{z}x)$$



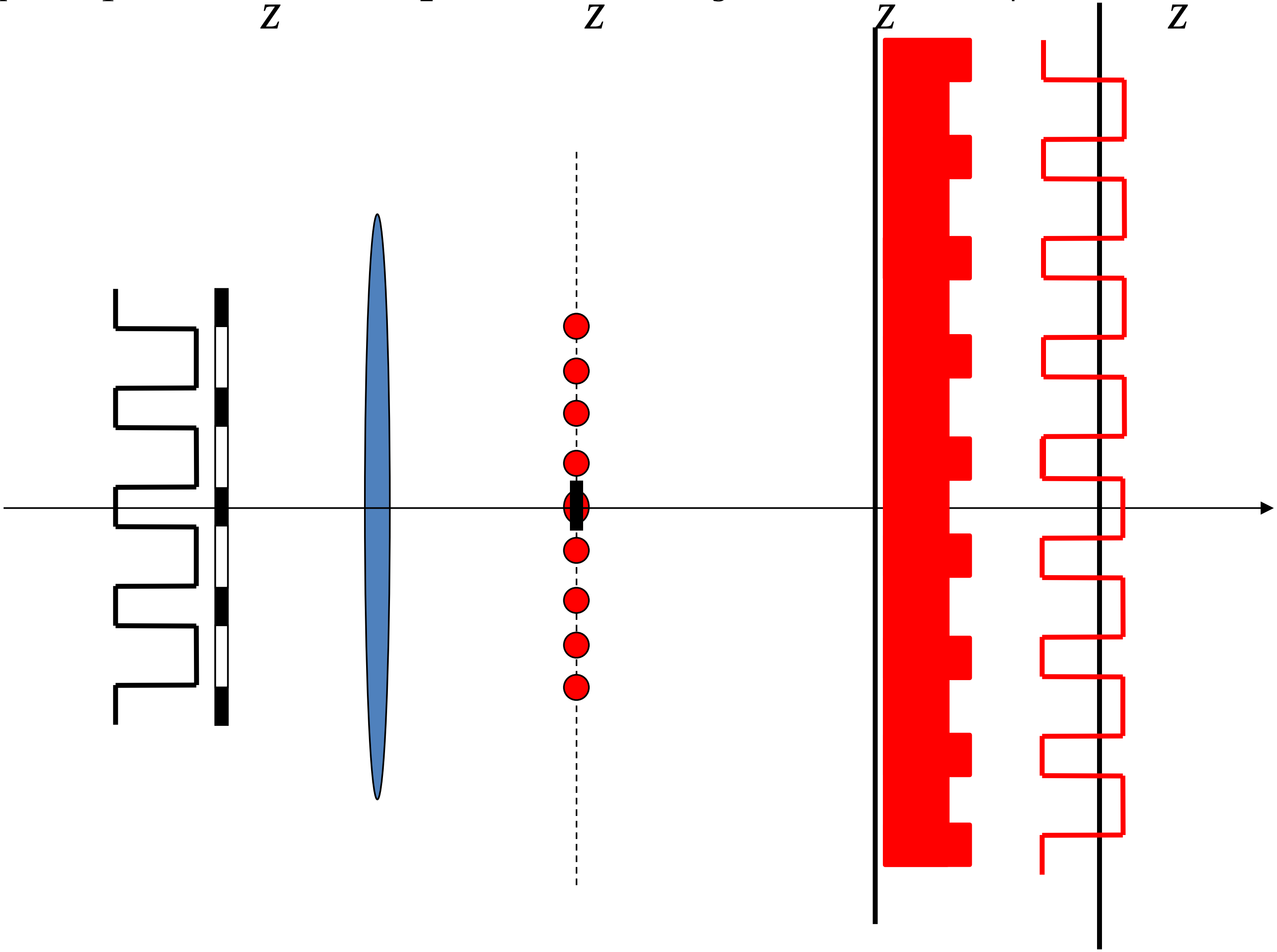
让0级、±1和±2级通过，则像平面上是5个衍射斑发出的次波的相干叠加

$$\tilde{U}_I \propto a_0 + 2a_1 \cos(k\frac{x_1}{z}x) + 2a_2 \cos(k\frac{x_2}{z}x)$$



除0级外，其余的全通过

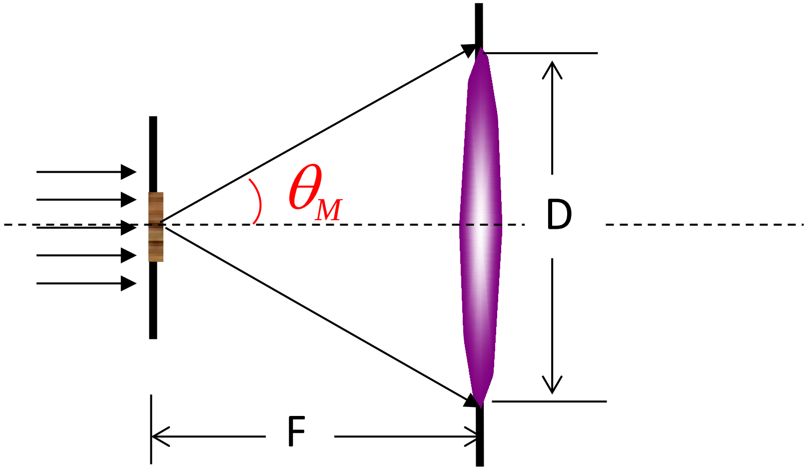
$$\tilde{U}_I \propto a_1 \cos(k\frac{x_1}{z}x) + a_2 \cos(k\frac{x_2}{z}) + a_3 \cos(k\frac{x_3}{z}) + a_4 \cos(k\frac{x_4}{z}) + \cdots$$



例题：估算相干成像系统的截止空间频率f_M?

能够透过透镜的最大衍射角为θ_M：

$$\sin\theta_M \approx \frac{D}{2F}$$



θ_M对应的最大空间频率：

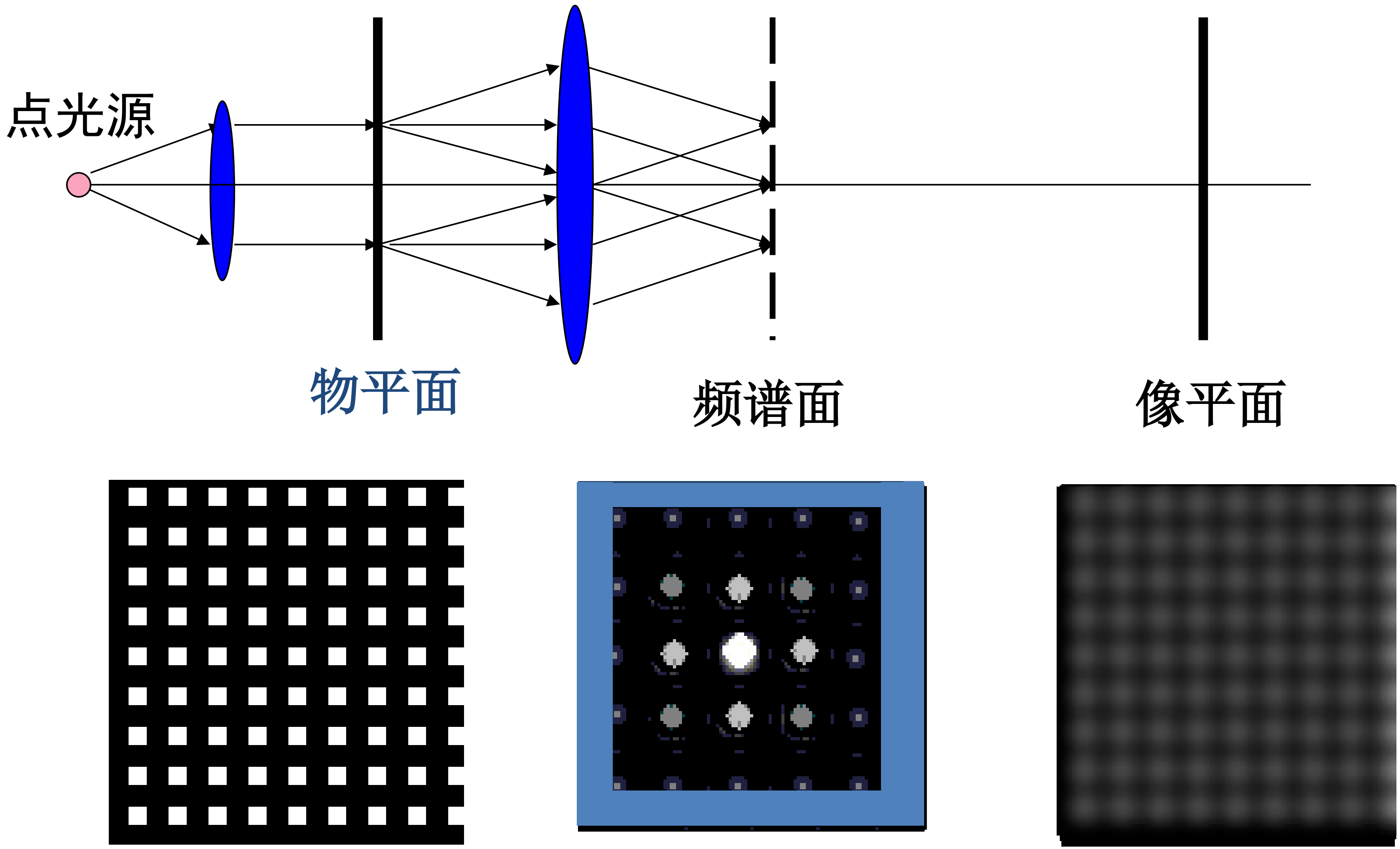
$$\sin\theta_M = f_M\lambda \longrightarrow f_M = \frac{\sin\theta_M}{\lambda} = \frac{D}{2F\lambda}$$

如果波长为600nm，D/F=1/3：

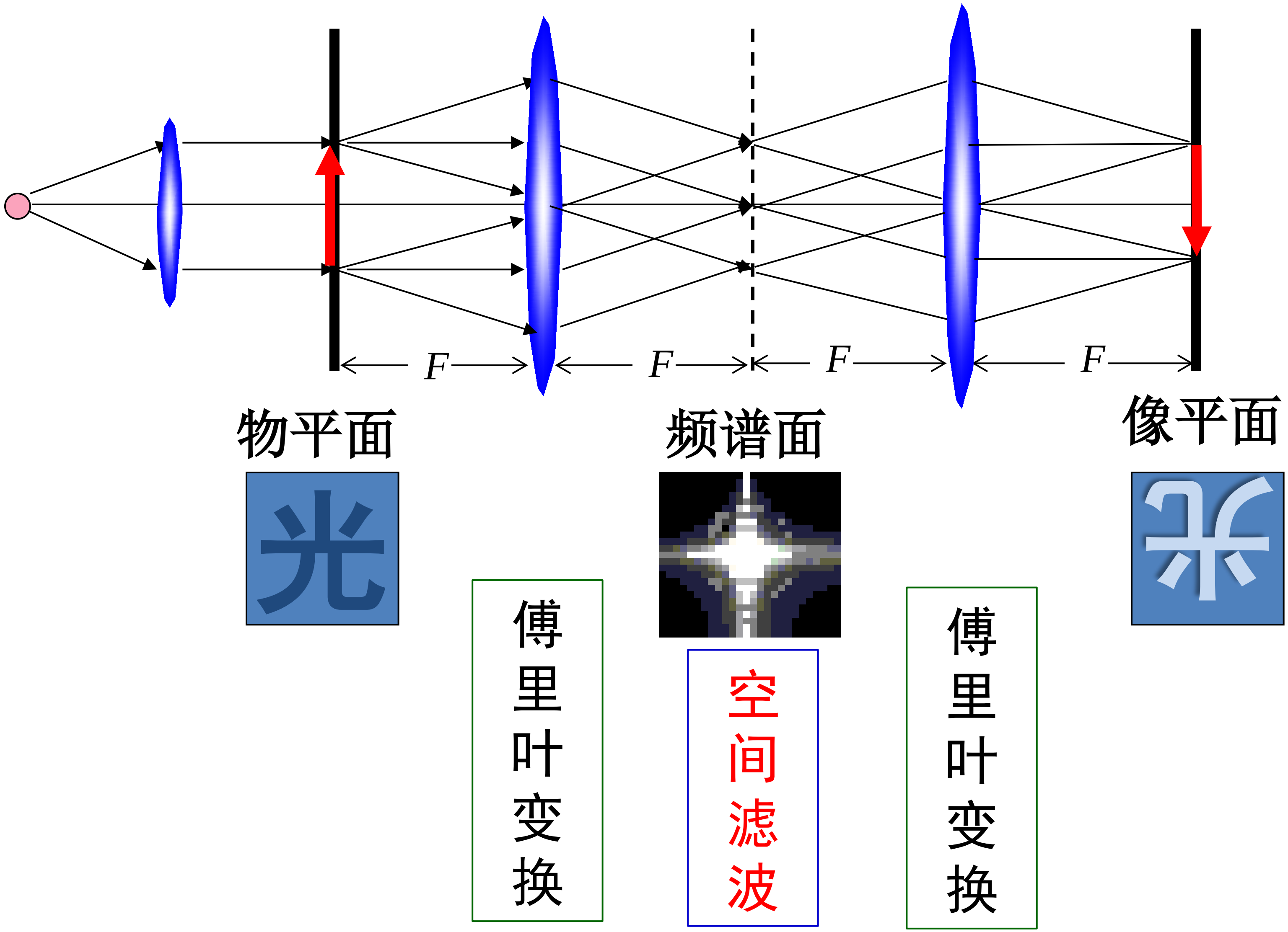
$$f_M = \frac{1}{2\times3\times600nm} = 270mm^{-1}$$

$\Delta x < \Delta x_m = 1/f_M = 2F\lambda/D$的信息被截止，因此不能分辨。

• 阿贝波特实验 — 光信息处理的一个典型实验：



• 近代光信息处理系统常采用4*f* (4*F*) 系统：

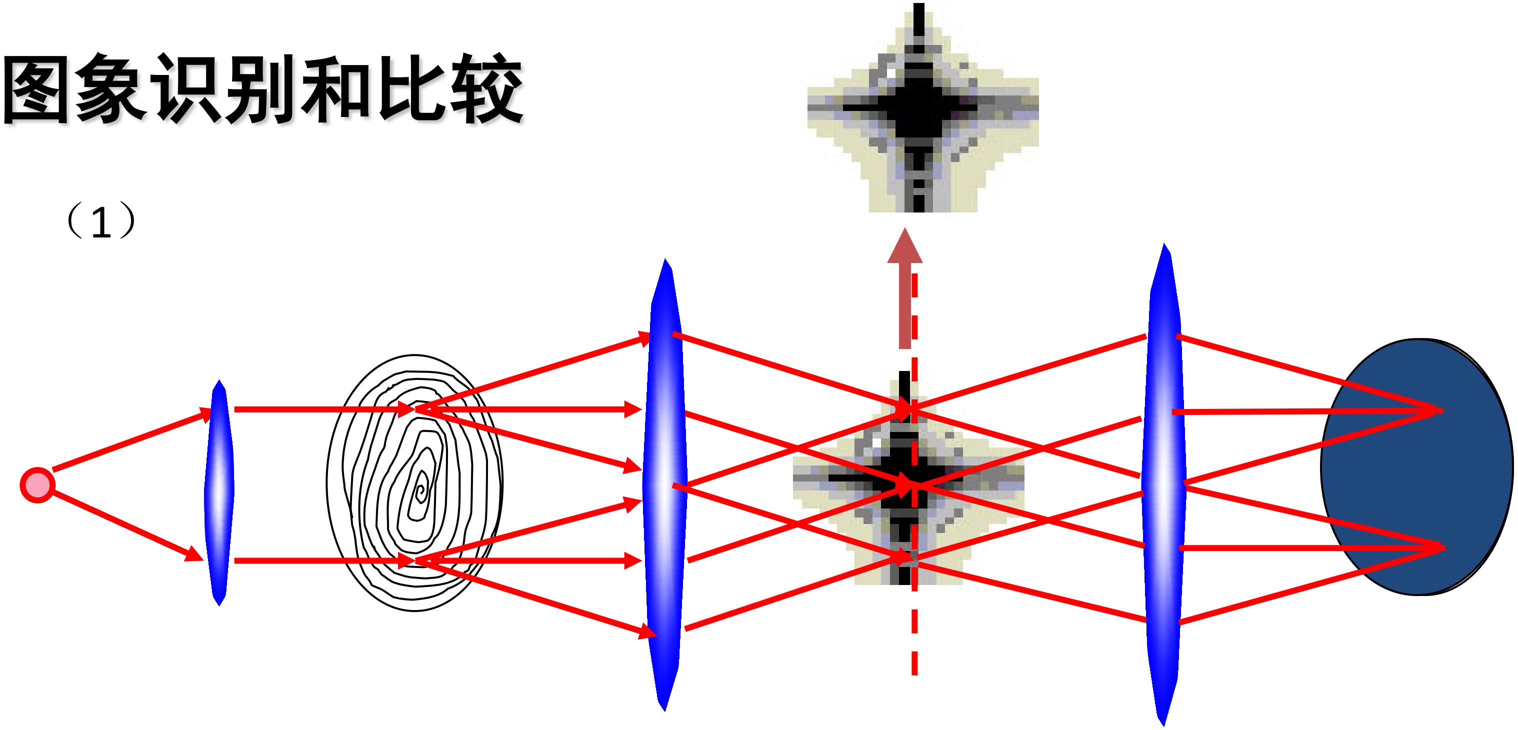


光学信息处理举例

- 图像识别
- 图像加减
- 图像微分
- 显色滤波

♦图象识别和比较

（1）

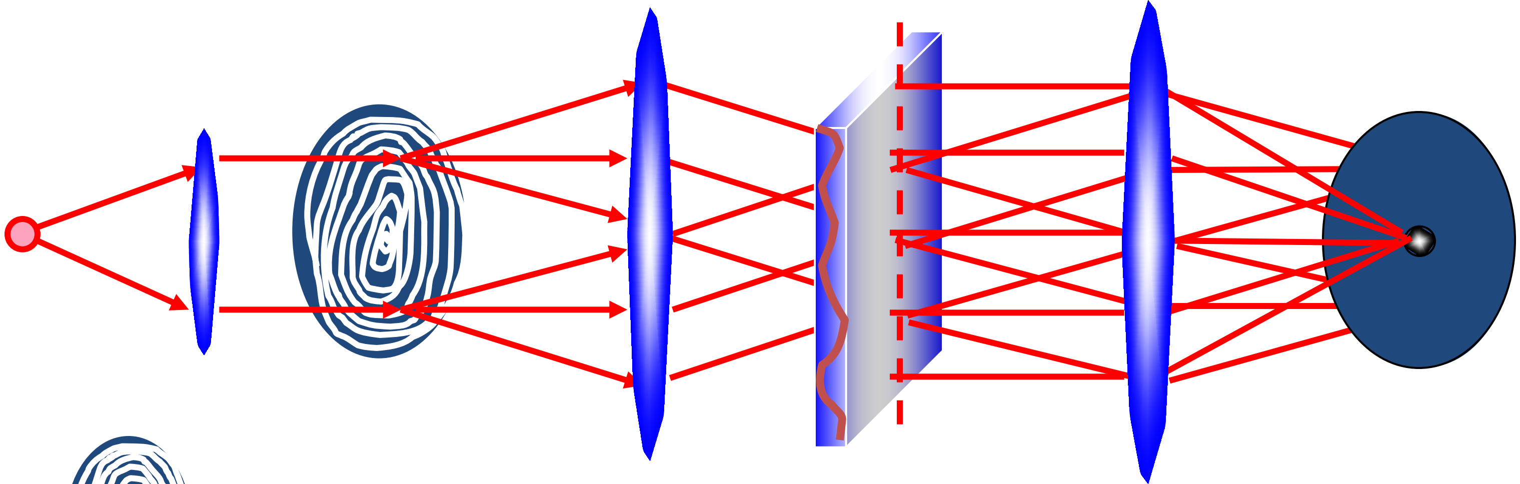


把标准图象放在物平面上，在频谱平面上放一张照相底片，以单色相干光照明而获得频谱图的负片。

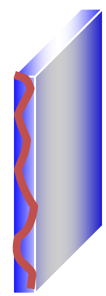
把负片放在原来频谱的位置上，由于原来频谱图的亮斑恰好为负片的暗处，而原来的频谱图的暗处正好为负片的亮斑。

把待检测的图样放在物平面上，如果待检测图样和标准图象完全一样，频谱图和负片互补，这样在像平面出现一片黑暗。如果两个图样有一点不同，则在像面上出现亮点。

（2）



$$s(x,y)\xrightarrow{\text{傅里叶变换}}S(f_x,f_y)$$



$$=S^*(f_x,f_y)$$

将这个和标准图象的频谱函数共轭的滤波器放置在频谱面上，那么透过滤波器的光 ~ SS^*为实数，也就是说透过滤波器的光波的相位是一个常数，即是一列平面波，经过透镜在后焦面上出现一个亮点。

如果放在物平面的待测图样和标准图样完全相同，则像面出现一个亮点，如果图样和标准图像不同，则在像面出现花样。

作业：

1、由一凸透镜和一棱镜组成的成像系统，如下图1和2，透镜的焦距为f，棱镜的顶角为α，棱镜材料的折射率为n，求：

（1）如图1，如果透镜和棱镜密接，求像点的位置？

（2）如图2，如果透镜和棱镜相距d，求像点的位置？

(注：点光源对于透镜和棱镜满足傍轴近似）

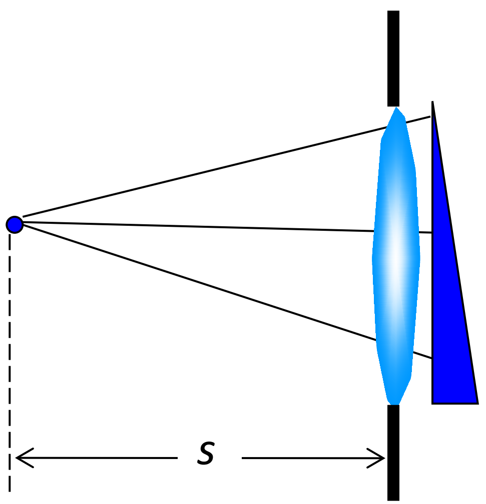


图1

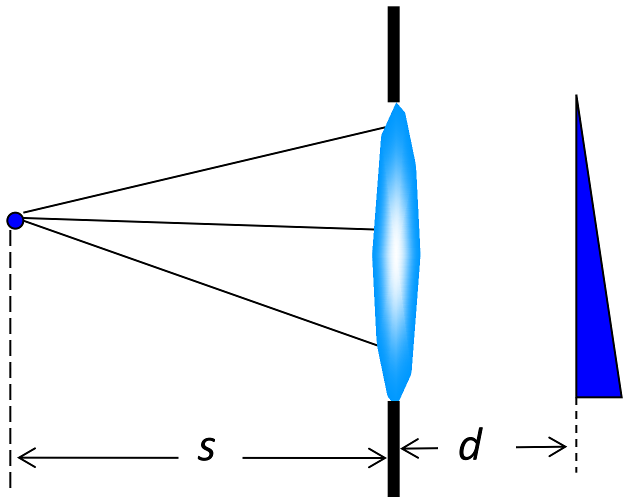
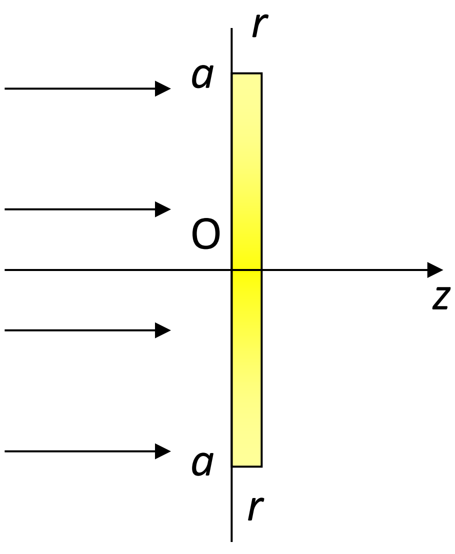


图2

2、用变折射率材料制成一微透镜，如图所示，其折射率变化呈抛物线型：



$$n(r)=n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha r^2\right),\quad r^2=x^2+y^2$$

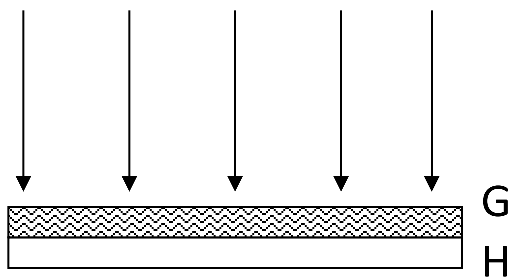
（1）求其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$ 设其厚度为*d*，孔径为*a*，且*a*>>*d*>>λ

（2）试由相因子分析求出此微透镜的焦距？

3、如图所示，一余弦光栅G覆盖在一记录胶片H上，用一束平行光照射，然后对曝光的胶片进行线性洗印，试问如此获得的新光栅H的屏函数包含几个空间频率？其空间频率各位多少？

设G的屏函数为：

$$\tilde{t}_G(x, y) = t_0 + t_1 \cos\left(2\pi f x + \varphi_0\right)$$



4、4F系统是用于相干光学信息处理的一个典型系统。

1.试画出4F系统，并标出物平面、傅氏面和像平面的位置。

2.若在物平面放入两个余弦光栅，两个光栅被叠放在一起，它们的屏函数分别为：

$$t_1(x,y)=t_{10}+t_{11}\cos 2\pi fx \text{和} t_2(x,y)=t_{20}+t_{21}\cos 6\pi fx$$

画出傅氏面的衍射图样，给出相应的说明。

3. 条件同（2），要求在像平面输出的像场函数

$$\tilde{U}_I(x',y')\propto\cos 4\pi fx'$$

问：应设计什么样的空间滤波器，以图示之。

数学补充内容，傅立叶变换

（摘自他人高数讲义，小部分做了修改）

一、三角函数系的正交性 三角级数

1.三角函数系的正交性

三角函数系： $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

三角函数系的正交性：在三角函数系中任何不同的两个函数

的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的*积分为0*。

如： $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ $n = 1, 2, \cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = 0 \leftarrow$ $(k \neq n, k, n = 1, 2, \cdots)$

注：在三角函数系中，两个相同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$

上的积分不等于0。

如：$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1 dx = 2\pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$

2.三角级数：一般项是三角函数的函数项级数

除常数项外，每一项都是正弦函数和余弦

函数的级数

二、周期为2π的周期函数展开成傅立叶级数

设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (*)$$

假设级数(*)可逐项积分。 以下求a_0,a_n,b_n.

1. $$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx]$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (*)$$

2.用 $\cos nx$ 乘以(*)两边

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot \cos kx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot \sin kx dx]$$

$$= a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx \quad = a_n\pi$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx} \qquad n = 1,2,\cdots$$

3.类似地：$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$ $\quad n = 1,2,\cdots$

综合1.2.3.得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad n = 1,2,\cdots$$

傅立叶级数 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

函数 $f(x)$ 的傅立叶系数：a_n, b_n

注意：$f(x)$ 的傅立叶级数完全是形式地作出来的，右边的这个傅立叶级数完全可能是不收敛的。即使收敛也未必收敛于 $f(x)$.

问题：函数 $f(x)$在怎样的条件下，它的傅立叶级数收敛于 $f(x)$?

收敛定理(狄利克雷): 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则$f(x)$的傅立叶级数收敛，并且

1.当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$;

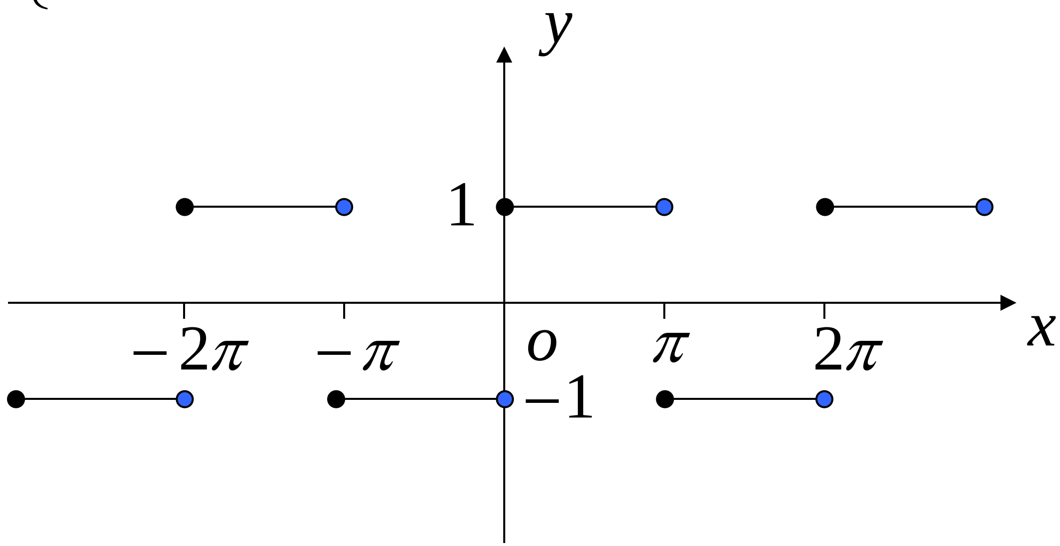
2.当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

例1 设 $f(x)$是周期为2π的周期函数，在$[-\pi,\pi]$上，

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

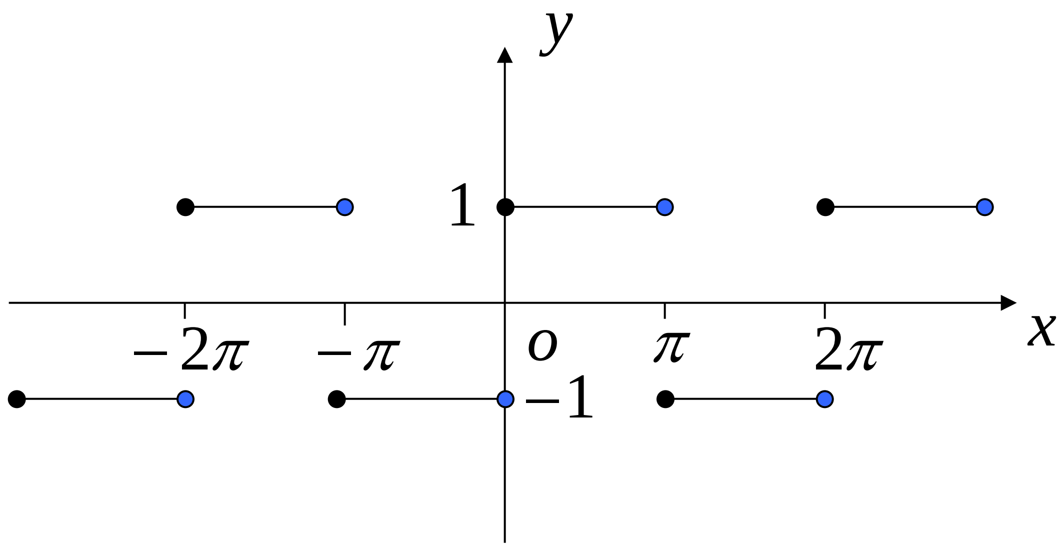
将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。



$f(x)$满足收敛定理条件：$f(x)$ 在点 $x = k\pi(k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$

处间断，在其它处连续，所以$f(x)$ 的傅立叶级数

收敛。



当 $x = k\pi(k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时， 级数收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$

当 $x \neq k\pi(k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi - \cos n\pi + 1)$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi-\cos n\pi+1)=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^{n}]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots \\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{4}{\pi}[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots]$$

$$(-\infty<x<+\infty, x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成。

将周期为2π 的周期函数$f(x)$ 展开成傅立叶级数步骤：

1.判断$f(x)$是否满足收敛定理的条件，并确定 $f(x)$ 的所有间断点， 可作图；

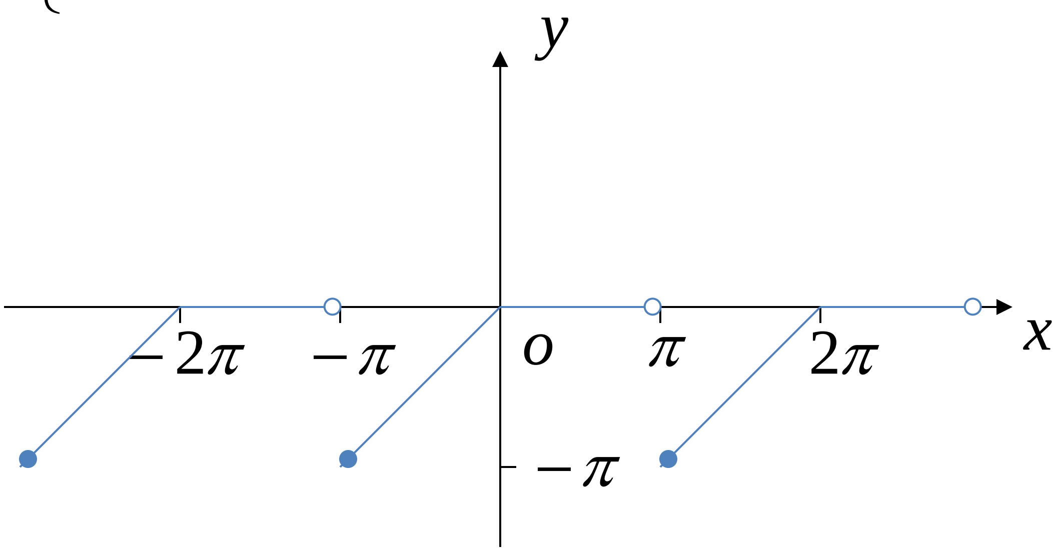
2.计算傅立叶系数：$a_0, a_n, b_n.$

3.写出$f(x)$ 的傅立叶级数展开式，并注明展开式在哪些点处成立。

例2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上，

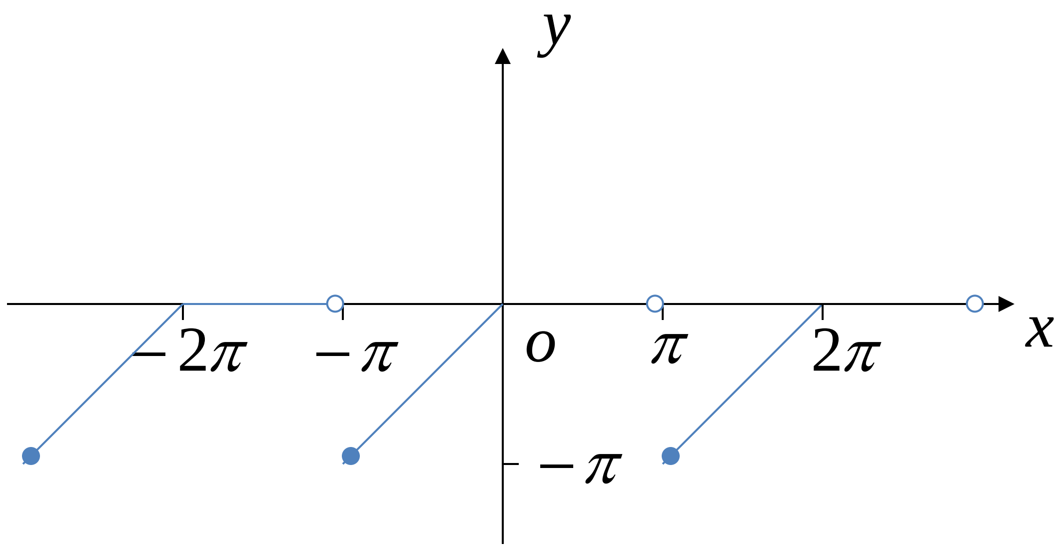
$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。



$f(x)$ 满足收敛定理条件：$f(x)$ 在点 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

处间断，在其它处连续，所以 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛。



当$x=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时， 级数收敛于

$$\frac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

当 $x \neq (2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时， 级数收敛于$f(x)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad\qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}]\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx = -\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin^2 nx}{n^2}]\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{\cos n\pi}{n} = -\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$a_0 = -\frac{\pi}{2} \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases} \qquad b_n = -\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + (\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$+ (\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x) - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq (2k+1)\pi, k = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad n = 1,2,\cdots$$

注1　当 $f(x)$ 为奇函数时，　$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$ *正弦级数*

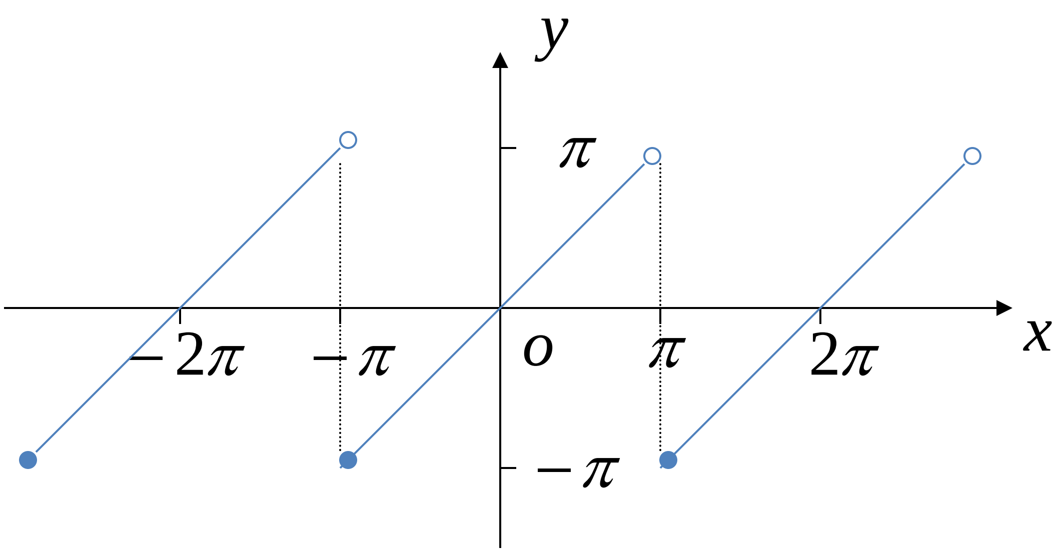
注2　当 $f(x)$ 为偶函数时，　$b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$ *余弦级数*

例4 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上，

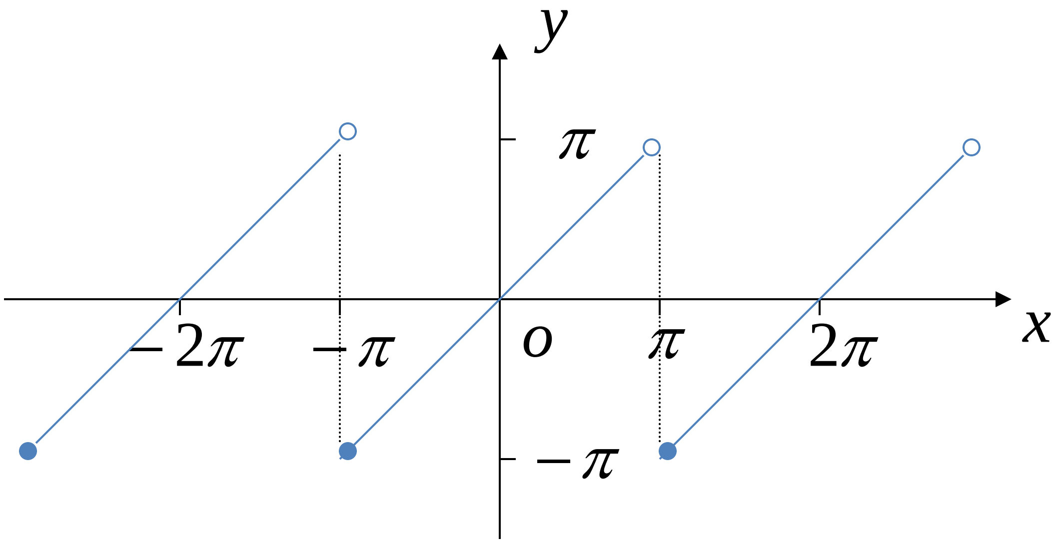
将 $f(x)=x$ 展开成傅立叶级数。



$f(x)$ 满足收敛定理条件：$f(x)$ 在点 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

处间断，在其它处连续，所以 $f(x)$ 的傅立叶级数

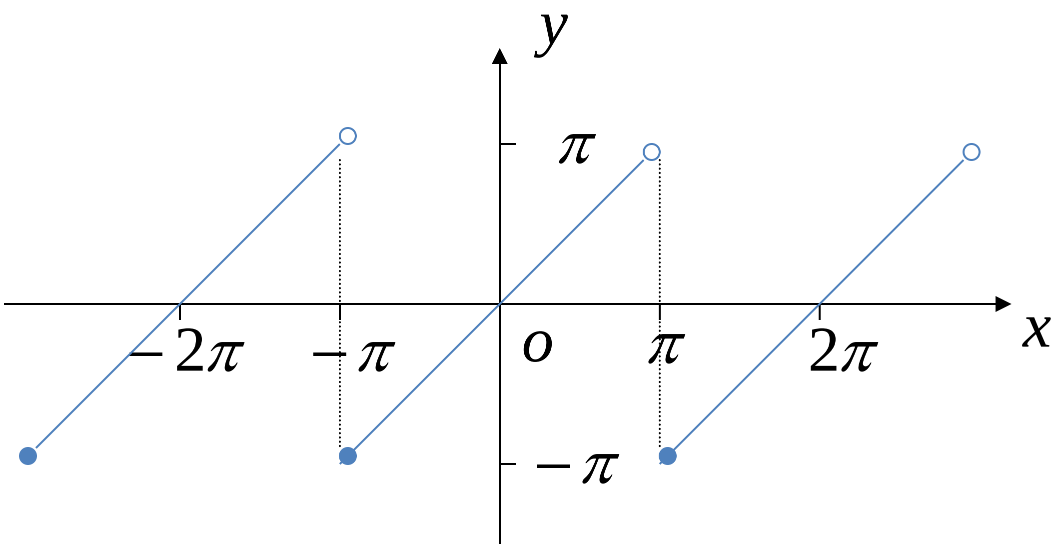
收敛。



当$x=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时， 级数收敛于

$$\frac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2} \qquad =0$$

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$



若不计 $x=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ ，则 $f(x)$ 是2π 为周期的奇函数。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0 \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \qquad n=1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi \ = -\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq k\pi, k = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

练习：设 $f(x)$是周期为2π的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上，

将$f(x)=3x^2$展开成傅立叶级数。

$f(x)$ 在$[-\pi,\pi)$ 上是奇函数　　　$b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3x^2\cos nx dx \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{n}\int_0^{\pi}x^2 d(\sin nx)$$

$$=\frac{6}{n\pi}(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\cdot 2xdx)$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\cos n\pi \quad =\frac{6}{n^2\pi}(-1)^n$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3x^2 dx \quad = 2\pi^2$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx$$

$$-\infty < x < +\infty$$

定义在有限区间上的函数展开成傅立叶级数

一、函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义

方法：周期延拓

将函数拓展为周期为2π 的周期函数 $f(x)$ ，再将$F(x)$

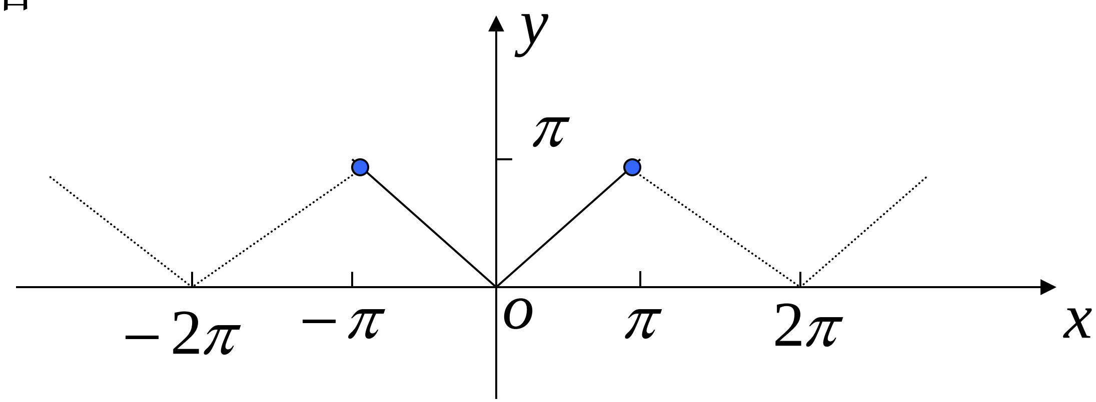
展开成傅立叶级数，最后限制 x 在 $(-\pi,\pi)$ 内，此时，$F(x)\equiv f(x)$

该级数在端点 $x=\pm\pi$ 处，收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$$

例1 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi\end{cases}$ 展开成傅立叶级数。

周期延拓



因为 $f(x)$ 为偶函数， 所以 $b_n = 0$

当 $x \in (-\infty,+\infty)$时，级数收敛于 $f(x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx \quad = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$[-\pi, \pi]$$

二、函数 $f(x)$ 只在区间 $[0,\pi]$ 上有定义

方法：奇延拓（在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义）

$\longrightarrow$ 周期延拓（以 2π 为周期的周期函数）

$\longrightarrow$ 正弦级数

偶延拓（在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义）

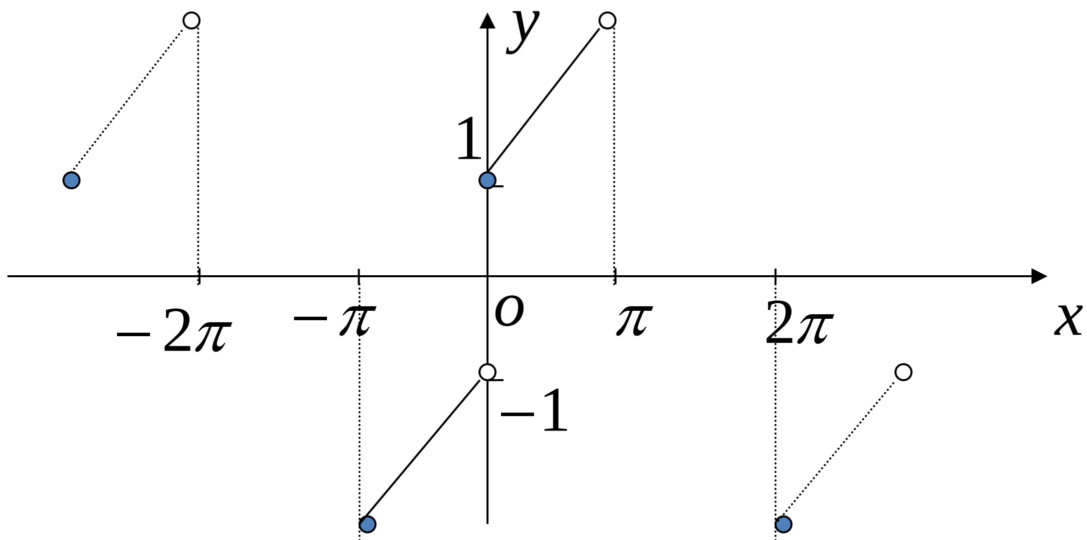
$\longrightarrow$ 周期延拓（以 2π 为周期的周期函数）

$\longrightarrow$ 余弦级数

最后限制 x 在 $[0,\pi]$ 内，此时 ,$F(x)\equiv f(x)$,这样就得到所需的 $f(x)$ 的展开式。

例2 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数

和余弦级数。



1.对函数进行奇延拓 正弦级数

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x+1)\sin nx dx$$

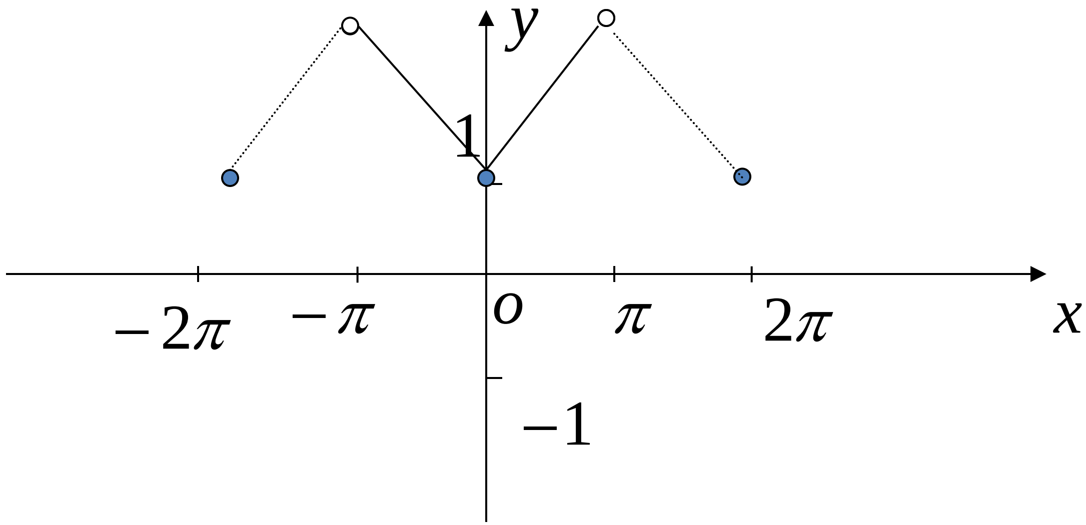
$$= \frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(\pi+2)}{n\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ -\dfrac{2}{n} & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$x+1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (0,\pi)$$

$$= \frac{2}{\pi}[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots)]$$

2.对函数进行偶延拓　　余弦级数



$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^{\pi} = \pi + 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x+1)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$x+1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots)$$

$$[0, \pi]$$

对于周期非2π的函数可以变换成周期为2π的函数处理：

设函数$f(x)$的周期为L，令$t=\frac{2\pi}{L}x=2\pi f_0 x$，

$$f(x)=f(\frac{L}{2\pi}t)\xrightarrow{\text{记作}}g(t)$$

函数$g(t)$的周期就变化为2π。

于是$f(x)=g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kf_0x+b_k\sin 2\pi kf_0x)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)dx$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ktdt=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\cos 2\pi kf_0xdx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ktdt=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\sin 2\pi kf_0xdx$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_0 x + b_k \sin 2\pi k f_0 x)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{e^{i2\pi k f_0 x} + e^{-i2\pi k f_0 x}}{2} + b_k \frac{e^{i2\pi k f_0 x} - e^{-i2\pi k f_0 x}}{2i})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_k - ib_k) e^{i2\pi k f_0 x} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k) e^{-i2\pi k f_0 x} \right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k f_0 x}$$

其中c_k:

$$k=0;\quad c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)dx=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)e^{2\pi\cdot 0\cdot f_0}dx$$

$$k>0;\quad c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{L}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\cos 2\pi kf_0xdx-i\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\sin 2\pi kf_0xdx\right]$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)(\cos 2\pi kf_0x-i\sin 2\pi kf_0x)dx=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)e^{-i2\pi kf_0x}dx$$

$$k<0;\quad c_k=\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}=\frac{1}{L}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\cos 2\pi(-kf)_0xdx+i\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)\sin 2\pi(-kf_0)xdx\right]$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)(\cos 2\pi kf_0x-i\sin 2\pi(kf_0)x)dx=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)e^{-i2\pi kf_0x}dx$$

所以: $c_k=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(x)e^{-i2\pi kf_0x}dx$，令$f_k=kf_0$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{i2\pi f_kx}$$

定义$f(x)$的频谱函数$F(f_k)=Lc_k=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-i2\pi f_k x}dx$，于是：

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi f_k x}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L}F(f_k)e^{i2\pi f_k x}$$

对于非周期函数，即$L\to\infty$：

$$F(f)=\lim_{L\to\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-i2\pi f_k x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi f x}dx$$

$$f(x)=\lim_{L\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L}F(f_k)e^{i2\pi f_k x}\text{，}\quad f_k=kf_0=k\frac{2\pi}{L}\text{；}\quad \Delta f_k=f_k-f_{k-1}=\frac{2\pi}{L}$$

所以$f(x)=\lim_{L\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(f_k)e^{i2\pi f_k x}\Delta f_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{i2\pi f x}df$