The background of the slide features a complex, abstract visualization of light waves. It consists of numerous thin, colored lines (red, orange, yellow, green, blue, purple) that curve and overlap to create a sense of depth and motion. These lines form concentric circles and more organic, flowing patterns, resembling the interference or diffraction of light. The overall effect is dynamic and scientific, fitting the theme of optics.

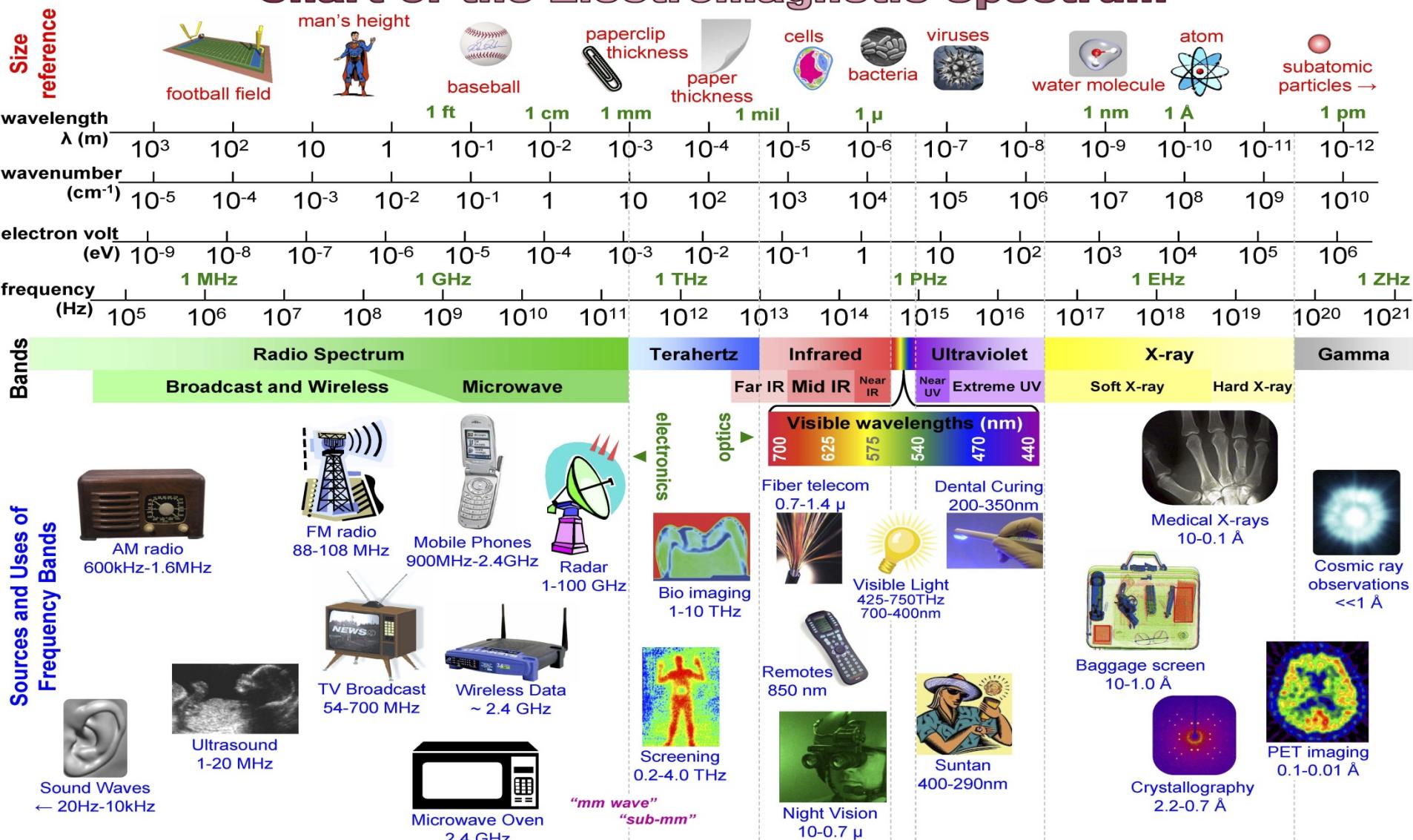
## 第二章

# 波动光学引言

- 1、光是电磁波
- 2、定态光波 复振幅描述
- 3、波前函数
- 4、球面波向平面波的转化
- 5、波前相因子分析法

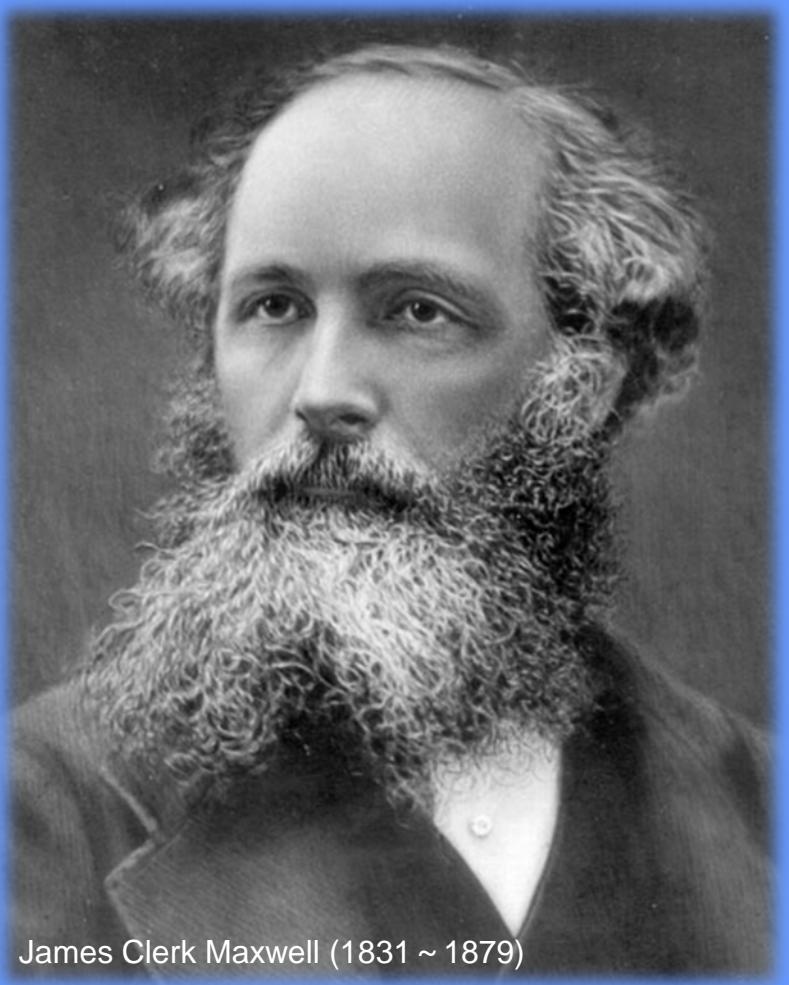
# 1、光是电磁波 (光波是特定波段的电磁波)

## Chart of the Electromagnetic Spectrum



$$\lambda = 3 \times 10^8 / \text{freq} = 1 / (\text{wn} \times 100) = 1.24 \times 10^{-6} / \text{eV}$$

可见光波长约为380--760nm，光频为 $8 \times 10^{14}$ -- $4 \times 10^{14}$ Hz



James Clerk Maxwell (1831 ~ 1879)

英国物理学家，经典电动力学的创始人，统计物理学的奠基人之一。1871年任剑桥大学教授，创建并领导了英国第一个专门的物理实验室——卡文迪许实验室。麦克斯韦的主要贡献是创立了经典电动力学。

## 麦克斯韦重要贡献

1855年12月和1856年2月，先后分两部分完成论文“论法拉第的力线”。

1861年发表了第二篇论文“论物理中的力线”，文中引入了位移电流概念。

1864年他给英国皇家学会的论文“电磁场的动力学理论”，首次确立了他的电磁理论。在此基础上，他提出了联系着电荷、电流和电场、磁场的基本微分方程，经后人整理和改写即成为著名的麦克斯韦方程组。

1873年出版的《电学和磁学论》一书是集电磁学大成的划时代著作，全面地总结了19世纪中叶以前对电磁现象的研究成果，建立了完整的电磁理论体系。这是一部可以同牛顿的《自然哲学的数学原理》、达尔文的《物种起源》和赖尔的《地质学原理》相媲美的里程碑式的著作。

麦克斯韦的主要科学贡献在电磁学方面，同时在天体物理学、气体分子运动论、热力学、统计物理学等方面，都作出了卓越的成绩。



# (1) 电磁波的传播

电磁扰动随时空变化的规律，遵从麦克斯韦电磁场方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$$

高斯定理

电场环路定理

磁场的高斯定理

安培环路定理

麦克斯韦贡献何在？

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \end{array} \right.$$

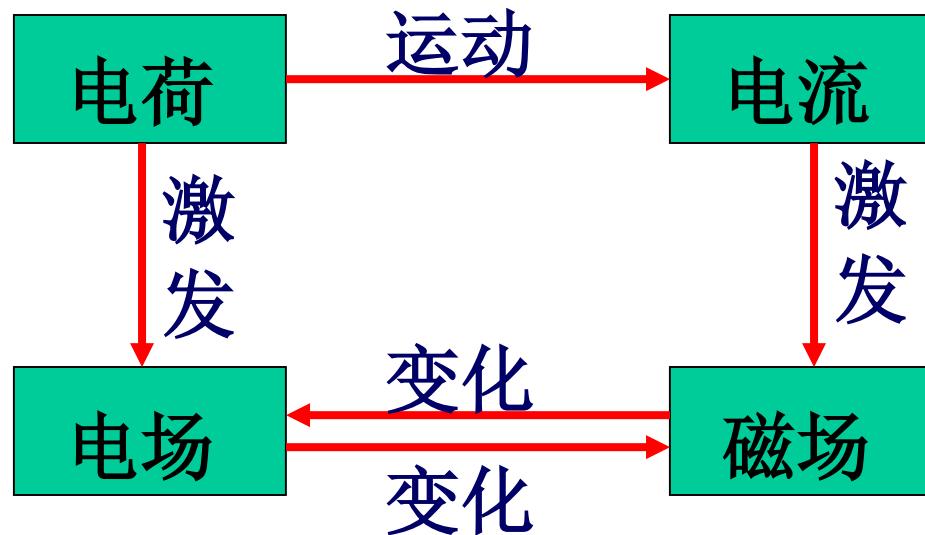
麦克斯韦方程组在电磁学中的地位，如同牛顿运动定律在力学中的地位一样！

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \bullet \{A_x, A_y, A_z\} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) j + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k$$

# 电场和磁场的本质及内在联系



## (2) 光波是电磁波

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \\ \hline \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \end{array} \right.$$

麦克斯韦方程组


$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \text{拉普拉斯算符}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

**标准的波动方程**，表明了自由空间交变的电场和磁场的运动和变化具有波动形式，形成电磁波，其传播速度为：

$$\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 = \frac{1}{v^2} \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$$

真空中电磁波的速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N / A^2$ , 得到真空电磁波速度为:  
 $c \approx 3 \times 10^8 m/s$ . **与光速相同，证明光波就是电磁波。**

## 真空介电常数和真空磁导率的获得

真空介电常数 (Vacuum permittivity) 又称绝对介电常数，是一个物理常数，符号为  $\epsilon_0$ 。它将时间、长度、质量等力学量与电学量联系起来（如库伦定律），等于  $8.854187817\dots \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

真空磁导率  $\mu_0$ ，又称磁场常数，或称磁常数，是指真空中的磁导率。实验测得这个数值是一个普适的常数，联系着力学和电磁学的测量，等于  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m (N}\cdot\text{A}^{-2}\text{)}$ ，是一个定义量。

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$

# 从麦克斯韦方程看光的传播

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

自然界中物质的  $\mu$  和  $\epsilon$  一般都与电磁波频率有关，并且在大多数情况下都为正数，此时方程有波动解，电磁波能在其中传播。

当  $\mu$  和  $\epsilon$  有一个小于零时，方程无波动解，表示电磁场在介质中的分布逐渐减弱，对应于光场的衰减。

当  $\mu$  和  $\epsilon$  都小于零时，方程恢复波动解，表示电磁场在介质中可以传播，但此时光波的传播满足左手定则。

根据折射率的定义（相对介电常数与磁导率）：

$$\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 = \frac{1}{v^2} \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{n} \quad \longrightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}$$

**问题：**  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}$  一定大于0？？

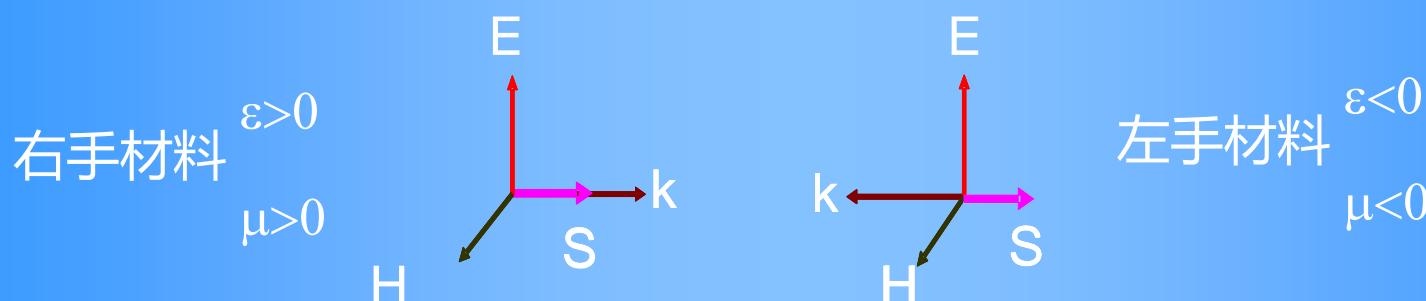
有没有  $n = \frac{c}{v} = -\sqrt{\epsilon\mu}$  的情况？？

对于无损耗、各向同性、空间均匀的介质，由Maxwell方程组能推出

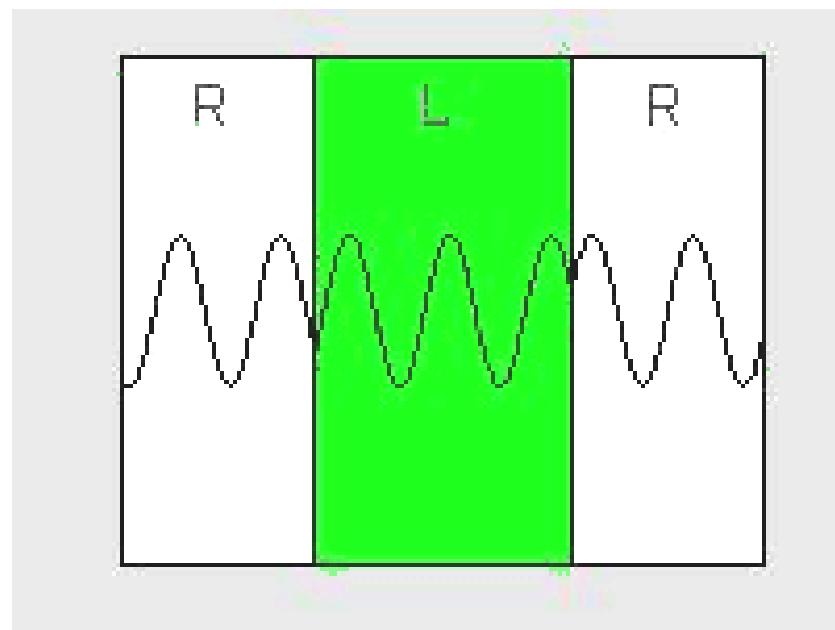
$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H} \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \mu \vec{E} \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{k}$  之间满足右手螺旋关系。通常的介质就被称为“右手材料” (Right-Handed Materials)

如果介质的 $\mu$ 和 $\epsilon$ 都小于零，方程有波动解，电磁波能在其中传播。但是 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{k}$  之间不再满足右手螺旋关系而是满足左手螺旋关系。这种介质就被称为“左手材料” (Left-Handed Metamaterials)



由于电磁波能流的方向取决于玻印廷矢量  $\mathbf{S}$  的方向，而  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}$ ，即  $\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{S}}$  始终构成右手螺旋关系。因此在左手材料中， $\bar{k}$ （它的方向代表电磁波相速的方向）和  $\bar{\mathbf{S}}$  的方向相反。 $k = -\omega\sqrt{\mu\epsilon}$  为负数，介质的折射率  $n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}$  也为负数，所以这种介质也被称为“负折射率物质”（Negative Index of Refraction Material）



1968年Veselago对电磁波在介电常数 $\epsilon$ 和磁导率 $\mu$ 同时为负数的介质中的传播特点作过纯理论的研究。

但自然界中没有发现 $\epsilon$ 和 $\mu$ 同时为负数的介质存在，所以他的研究结果在20世纪一直没有得到实验验证，人们对左手材料的兴趣也基本消失了。

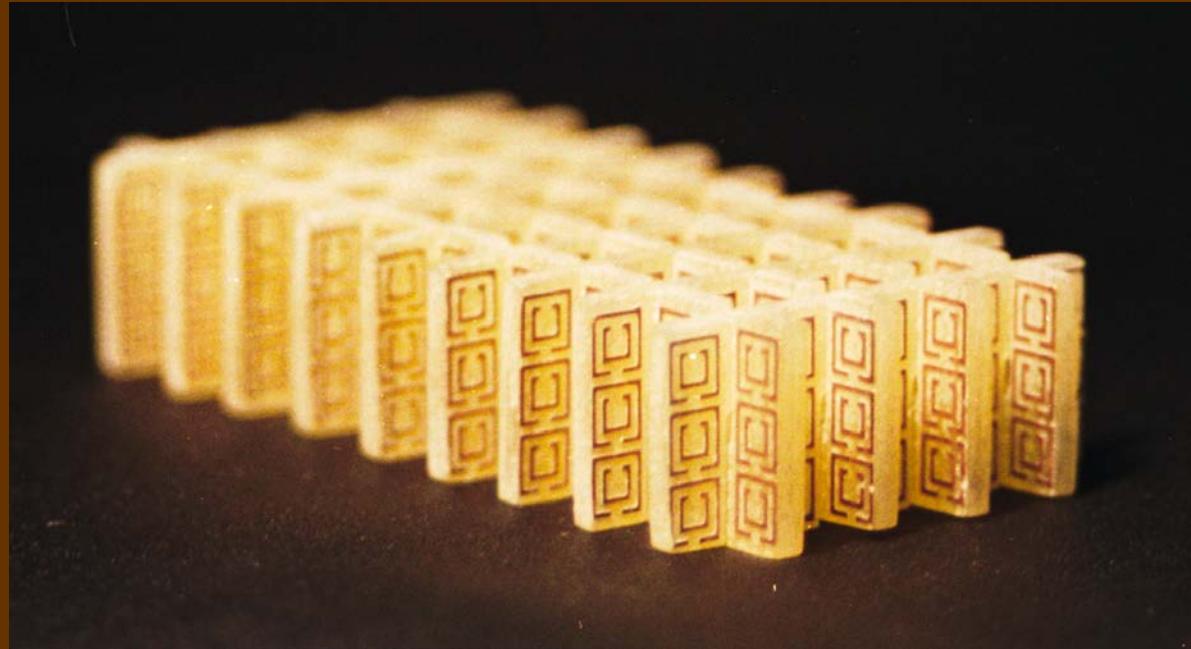
1996–1999年，Pendry等人相继提出了用周期性排列的金属条和开口金属谐振环(Split-Ring Resonator)可以在微波波段产生负等效介电常数和负等效磁导率。

Veselago V.G. , Sov. Phys. Usp. ,1968,10,509

Pendry J.B. ,et al. , Phys. Rev. Lett. ,1996,76,4773

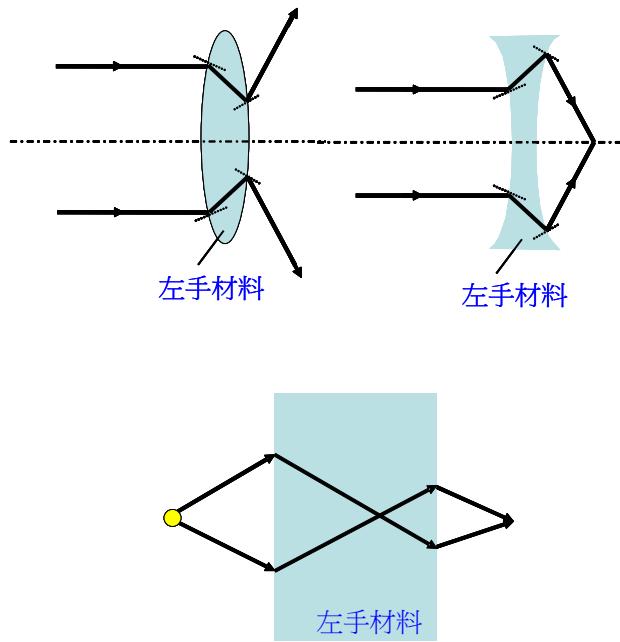
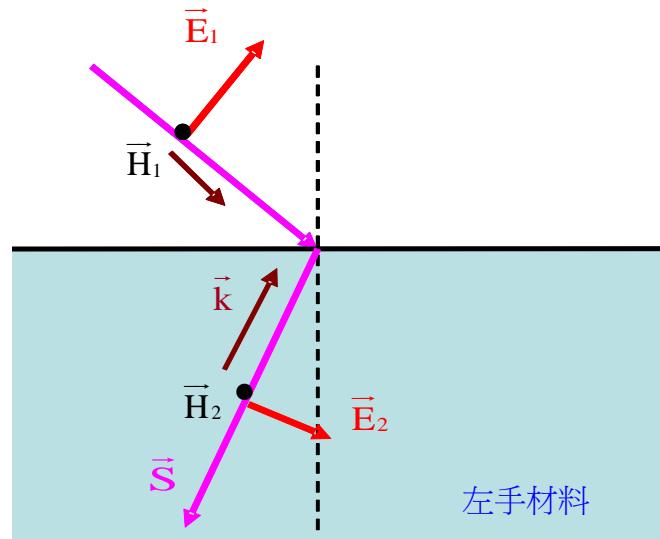
Pendry J.B. ,et al. , IEEE Trans. Microwave Theo. and Tech. ,1999,47,2075

2003年美国《科学》十大科学进展之一：多个研究小组证实，特定介质能使光和其他电磁波以负折射率偏转。这种所谓“左手”性物质有可能可以用于制造性能更好的透镜。



美国UCSD的NIM研究小组已经设计制成了具有负折射率的材料。这种材料是由铜质方形裂环振荡器和一条细铜线嵌在玻璃纤维的底板上形成的。铜质方形裂环振荡器 (split ring resonator) 和铜线分别嵌在底板的两面。（如图所示）。将用这样的材料制成的棱镜与用聚四氟乙烯 (Teflon) 制成的棱镜对比后发现，经两者折射的波偏离主轴的方向相反。由此证明了这种材料具有负折射率的性质。

# ✓负折射材料界面反射和折射



### (3) 平面电磁波是自由空间电磁波的一基元成分。(\*)

平面电磁波函数：

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E)$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_H)$$

满足波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (k/\omega)^2$$

$k$ 称为波矢，其方向与等相面的正交，即为波面的法线方向，其大小为：

$$k^2 = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2 \Rightarrow k = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \cdot \omega$$

$$k = \frac{n\omega}{c} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

#### (4) 光波是横波。 (\*)

将平面电磁波函数代入  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  和  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，得到  $\vec{E} \perp \vec{k}$  和  $\vec{H} \perp \vec{k}$ ，即电磁场振荡方向与波矢方向正交，在与波矢正交的横平面中振荡，即自由空间中光波为横波。

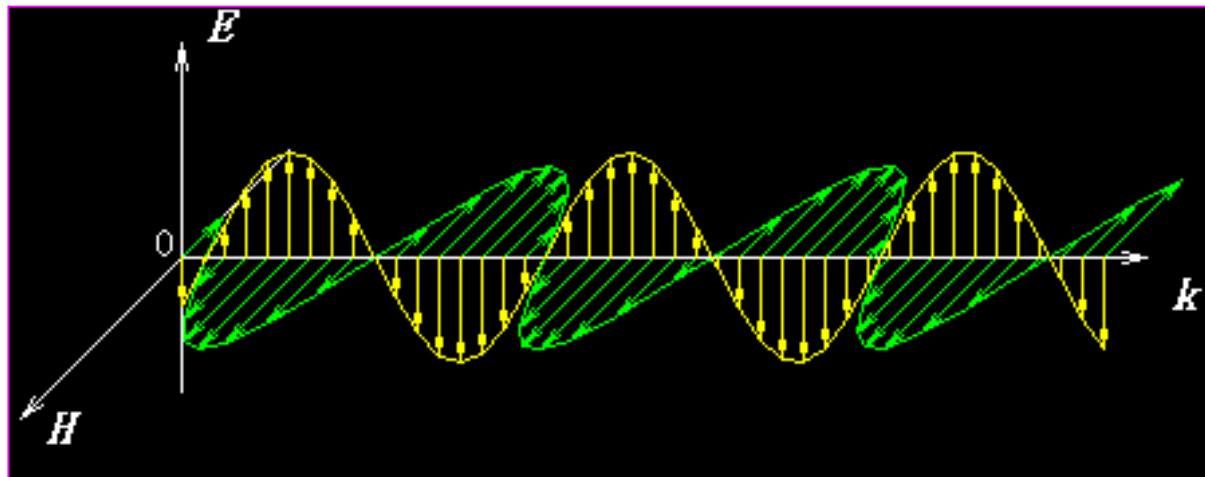
#### (5) 电场和磁场之间正交和同步。 (\*)

将平面波函数代入： $\nabla \times \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  （电场环路定理）

得：

$$\mu\mu_0 \vec{H} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

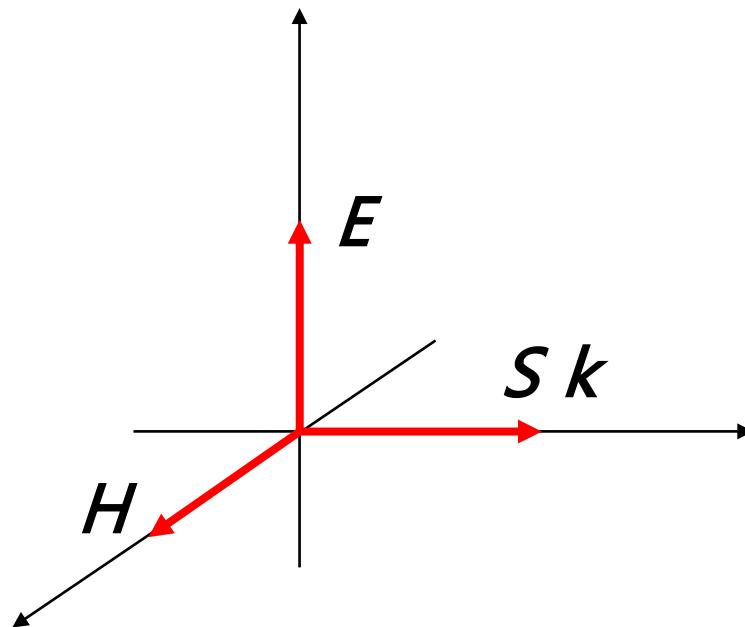
可知： $\vec{H} \perp \vec{E}$ ,  $\varphi_H = \varphi_E$ ,  $\sqrt{\mu\mu_0} H_0 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_0$



## (6) 电磁波能流密度—坡印亭矢量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

其单位为  $W/m^2$ ,  $\vec{S} \parallel \vec{k}$



“右手”

## 光强: 平均电磁能流密度

$$\begin{aligned} I = \bar{S} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E}| |\vec{H}| dt \\ &= \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2 \end{aligned}$$

在可见光波段，介质分子的磁化机制几乎冻结，

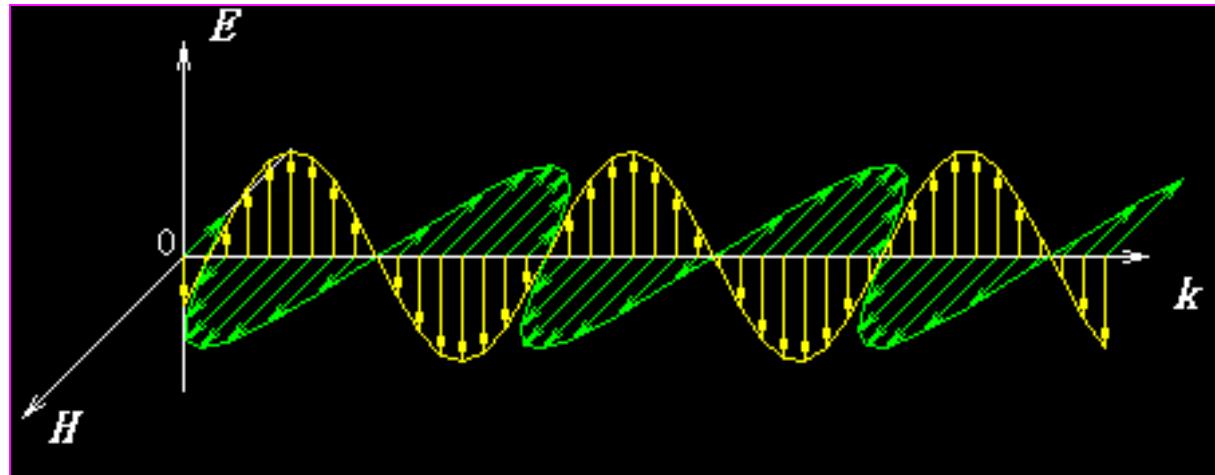
所以： $\mu \approx 1$ ,  $n \approx \sqrt{\epsilon}$

于是光强表示为：  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_0^2 \propto n E_0^2$

或写成： $I = n E_0^2$

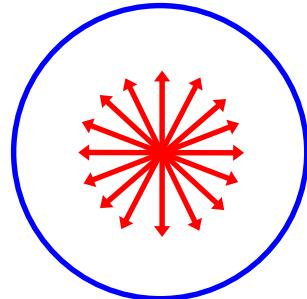
## (7) 光的偏振

### 线偏振光

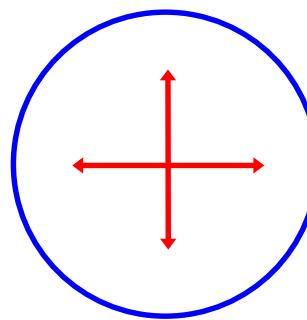


$E$ 和 $k$ 组成的平面成为偏振面。

自然光：



没有优势方向



自然光的分解

一束自然光可分解为两束振动方向相互垂直的、等幅的、不相干的线偏振光。

$$\bar{E}_x = \bar{E}_y \quad I = I_x + I_y, \quad I_x = I_y = \frac{1}{2}I$$





## 2、定态光波 复振幅描述

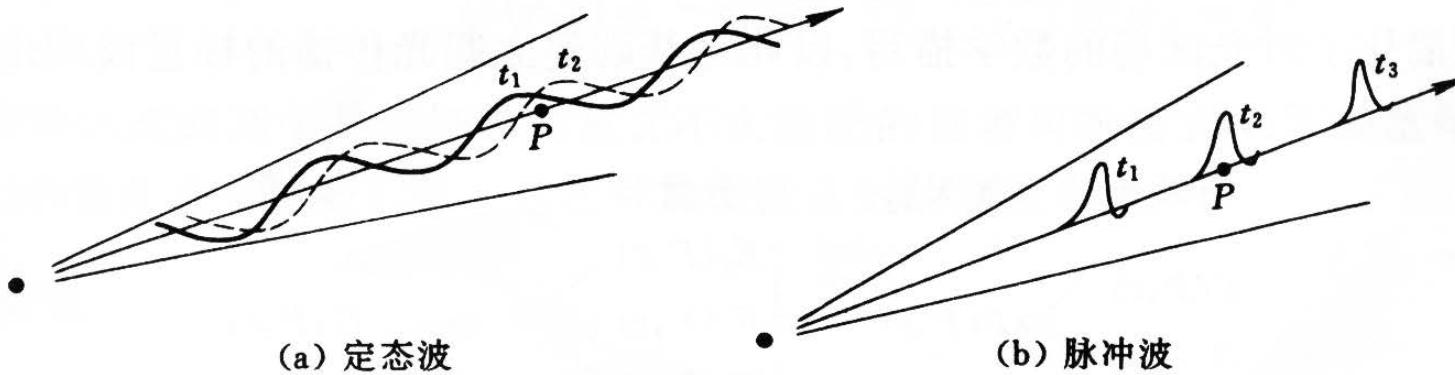


图 2.5 波动图像 时间尺度

### 定态波

- ① 空间各点的扰动是同频率的简谐振荡（频率与振源相同）；
- ② 波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间形成一个稳定的振幅分布 严格的定态光波要求波列无限长。



延伸讨论：自发辐射

一次发光时间量级  $\tau \approx 10^{-8} s$ ，而可见光的周期  $T \sim 10^{-14} s = 10 fs$ ，一个波列包含  $\frac{T}{\tau} \sim 10^6$  个周期，可看成定态波。

## (1) 定态光波的标量表示(\*)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(P, t) \\ \vec{H}(P, t) \end{array} \right\}$$

$$\vec{H} \perp \vec{E}, \quad \varphi_H = \varphi_E,$$
$$\sqrt{\mu\mu_0} H_0 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_0$$

$$\xrightarrow{\text{自由空间}} \vec{E}(P, t)$$

- $E$ 和 $H$ 之间在相位、振幅和偏振方向上有确定的关系；
- 光与物质相互作用过程中扮演主角的是电场，比如光合作用、视觉效应、光电效应和光热效应等

分量

标量

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(P,t) \\ E_y(P,t) \\ E_z(P,t) \end{array} \right\} \Rightarrow U(P,t)$$

**波动方程**  $\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$\vec{E}(P,t) = \{E_x, E_y, E_z\}$  各个分量都遵从相同的波动函数。

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_i - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

$$i = x, y, z$$

矢量方程  $\longrightarrow$  标量方程

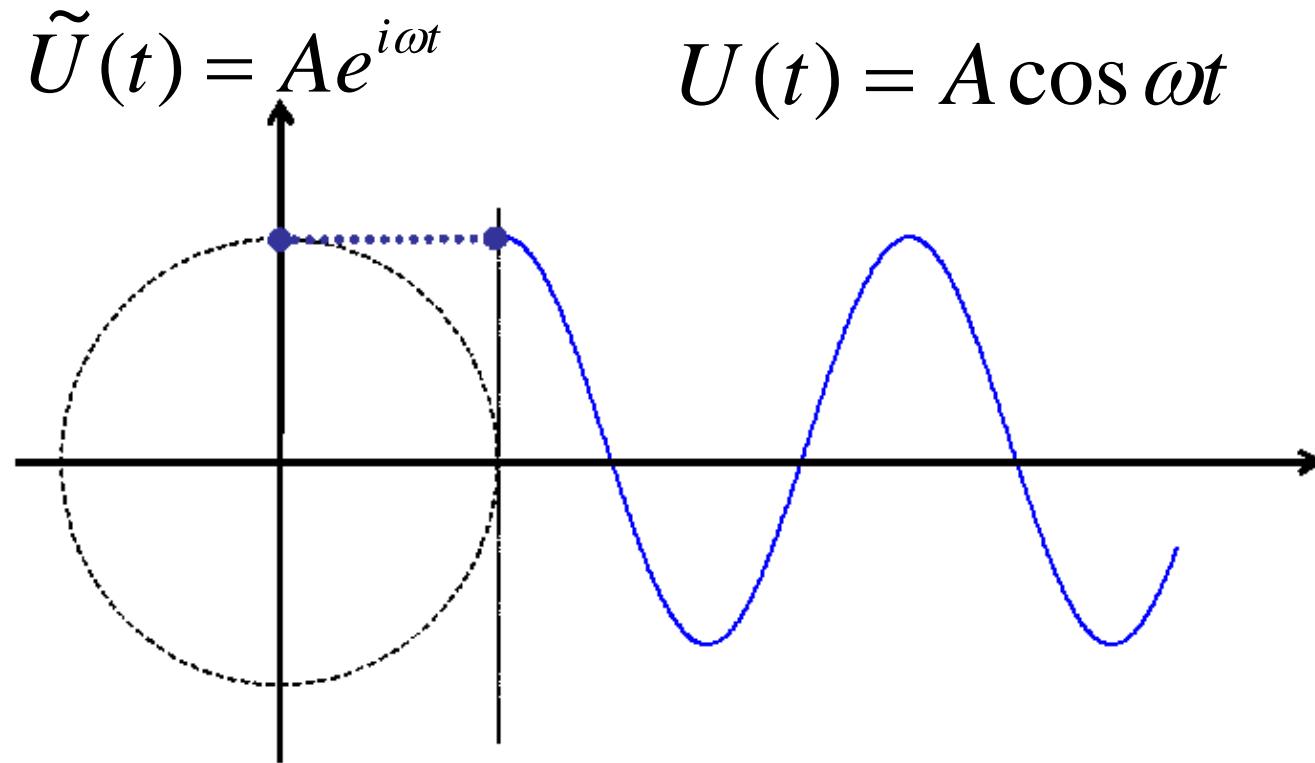
$$\nabla^2 U - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

简谐波为定态波的基元成分 ( 标量形式 )

$$U(P, t) = A(P) \cos(\omega t - \varphi(P))$$

振幅稳定，频率单一

## (2) 波函数的复数表示 (\*)



数学上复数的实部和虚部分别对应cos函数和sin函数：

$$\tilde{U} = Ae^{i\alpha} = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

简谐波函数和复数  
——对应

$$U(P, t) = A(P) \cos(\omega t - \varphi(P))$$



$$\tilde{U}(P, t) = A(P) e^{\pm i(\omega t - \varphi(P))} \Rightarrow \tilde{U}(P, t) = A(P) e^{-i(\omega t - \varphi(P))}$$

复数的模对应振幅，复数的复角对应相位，我们取 $-$ 号， $\varphi(P)$  正号表示相位落后。

平面简谐波

$$U(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$
$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} e^{-i\omega t}; \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0)$$

球面简谐波

$$U(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$
$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-i\omega t}; \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0)$$

柱面简谐波

$$U(\vec{r}, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$
$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} = \frac{A}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-i\omega t}; \quad (\text{设 } \varphi_0 = 0)$$

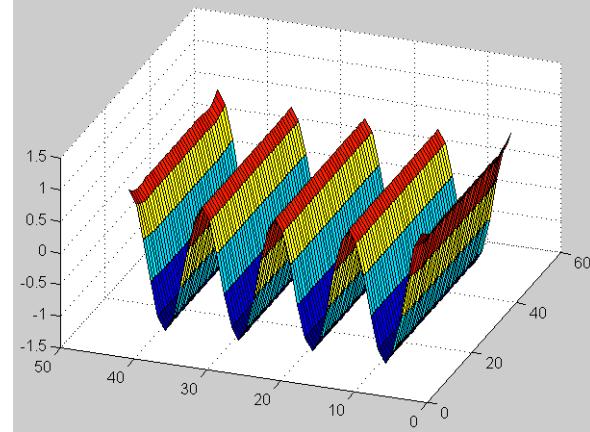
**复振幅概念：**定态波，时间频率单一，我们关心振幅的空间分布  $A(P)$  和相位空间分布  $\varphi(P)$ ，引进复振幅概念

$$\tilde{U}(P) = A(P) e^{i\varphi(P)}$$

### (3) 三种典型光波的复振幅 (\*)

平面简谐波

$$\tilde{U}(P) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

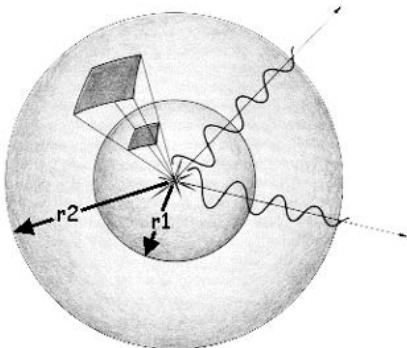


球面简谐波

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

柱面简谐波

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{A}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2}}$$



## ♣平面波复振幅及其特点

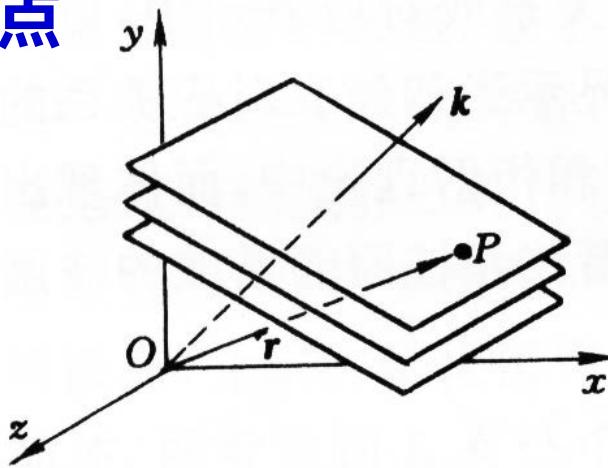


图 2.6 平面波特征矢量——波矢  $k$

$$\tilde{U}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = Ae^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} = Ae^{ik(\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z)}$$

平面波复振幅的特点：1、振幅为常数  
2、线性相因子

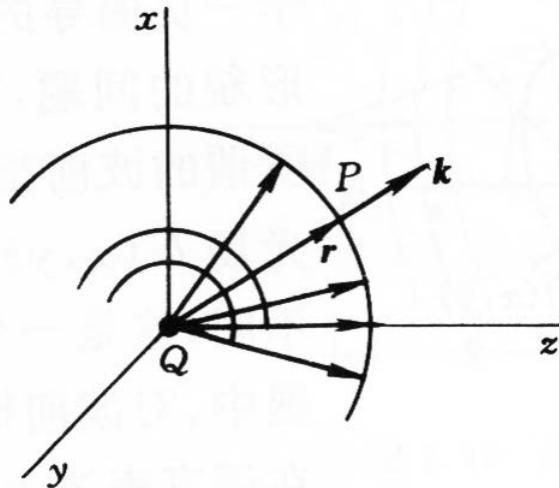
线性相因子系数  
 $(k_x, k_y, k_z)$  或  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\Leftrightarrow$  传播方向

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

## ♣球面波复振幅及其特点

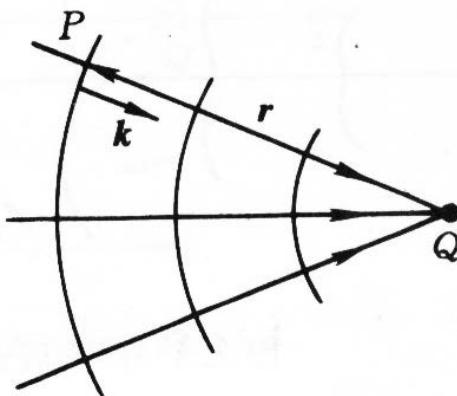
### A、发散球面波



(a) 发散球面波

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r} e^{ikr} = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

### B、会聚球面波



(b) 会聚球面波

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r} e^{-ikr} = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

## C、轴外点源

$Q(x_0, y_0, z_0)$ 为点源，场点 $P(x, y, z)$

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r} e^{\pm ikr}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$+$  →发散， $-$  →会聚，聚散中心 $(x_0, y_0, z_0)$

## •光强和复振幅的关系

光强空间分布： $I(P) = \underline{\tilde{U}(P) \cdot \tilde{U}^*(P)} = A^2(P)$

这里 $\tilde{U}^*(P)$ 是 $\tilde{U}(P)$ 的复共轭

$$\tilde{U}(P) = A(P) e^{i\varphi(P)}$$

$$\tilde{U}^*(P) = A(P) e^{-i\varphi(P)}$$

### 3、波前函数 (\*)

#### ◆ 波前和波前光学概述

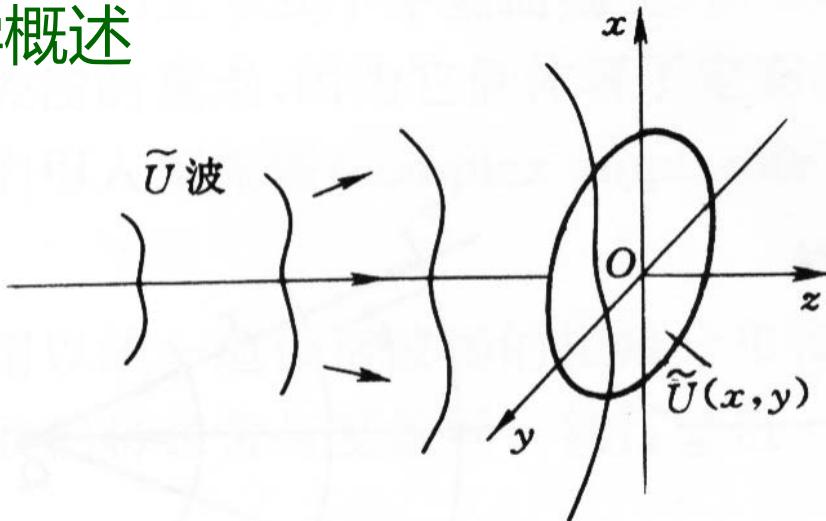
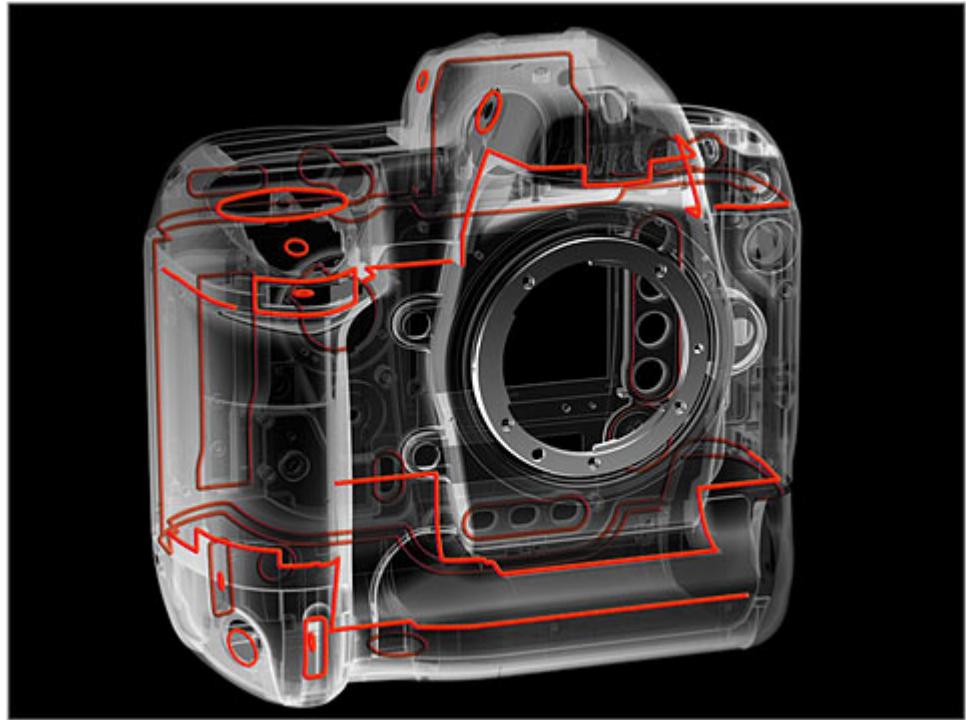
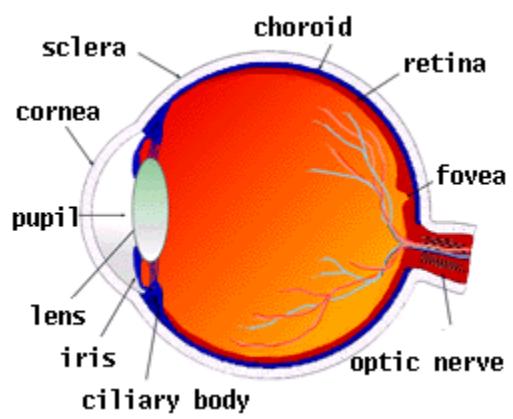


图 2.8 广义波前  $\tilde{U}(x, y)$

**波前**一词指波场中任一曲面，更多地指一个平面，如记录介质、感光底片、接收屏幕等所在的平面的复振幅分布  $U(x, y)$ 。

波前分析是本课的主脉络，包括：

描述和识别 - 叠加和干涉 - 变换和分析 - 记录和再现



# 平面和球面波前函数以及其共轭波前

A、一列平面波 $U_1$ ： $k_{1x} = k \sin \theta$ ,  $k_{1y} = 0$ ,  $k_{1z} = k \cos \theta$

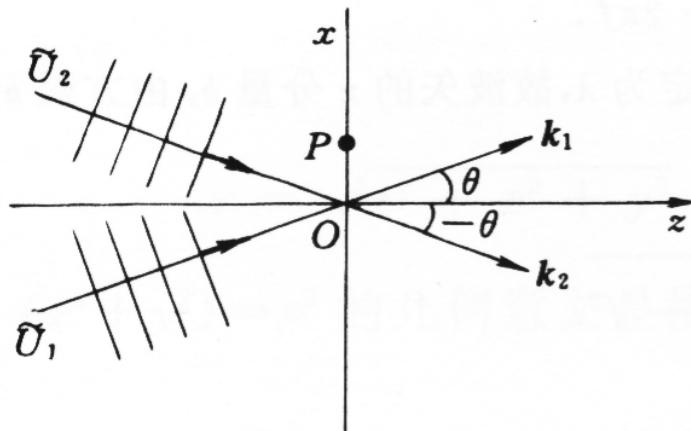


图 2.9 平面波及其共轭波前

$$\tilde{U}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = Ae^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} = Ae^{ik(\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot z)}$$

在 $z=0$ 的平面上的波前函数：

$$\tilde{U}_1(x, y) = Ae^{ik \sin \theta \cdot x}$$

其共轭波前：

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1^*(x, y) = Ae^{-ik \sin \theta \cdot x} = Ae^{ik \sin(-\theta) \cdot x}$$

B、一球面波, 点光源  $Q(0,0,-R)$   $x_0 = y_0 = 0, z_0 = -R$

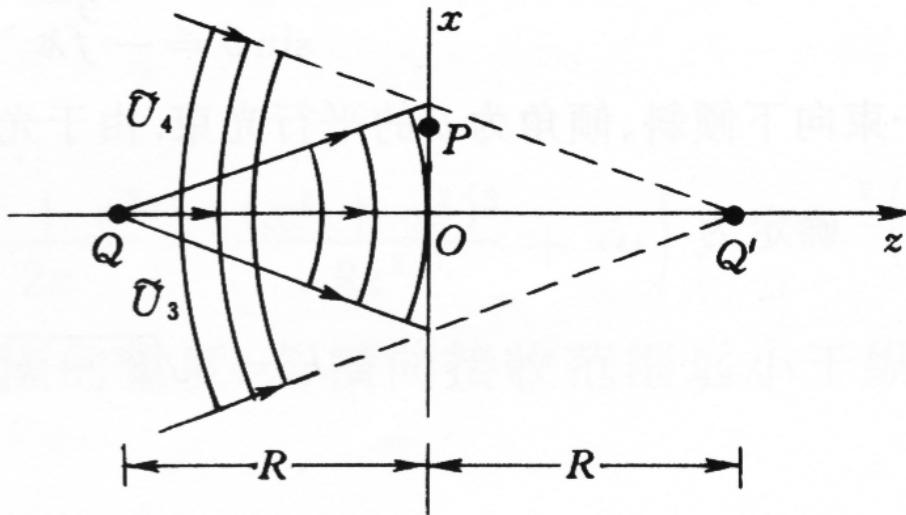


图 2.10 球面波及其共轭波前

$$\tilde{U}(P) = \frac{A}{r} e^{ikr}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$Z=0$ 平面的波前函数：

$$\tilde{U}_3(x, y) = \frac{A}{r} e^{ikr}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + R^2}$$

其共轭波前：

$$\tilde{U}_4(x, y) = \tilde{U}_3^*(x, y) = \frac{A}{r} e^{-ikr}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + R^2}$$

# 波的类型和特性 $\Leftrightarrow$ 波前函数

**例题：**已知一列波长为 $\lambda$ 的波长，在 $(x,y)$ 接收面上的波前函数为：

$$\tilde{U}(x, y) = Ae^{-i2\pi fx}$$

其中常数f的单位为 $\text{mm}^{-1}$ ,试分析与该波前函数联系的波的类型和特性？

线形因子 $\rightarrow$ 平面波

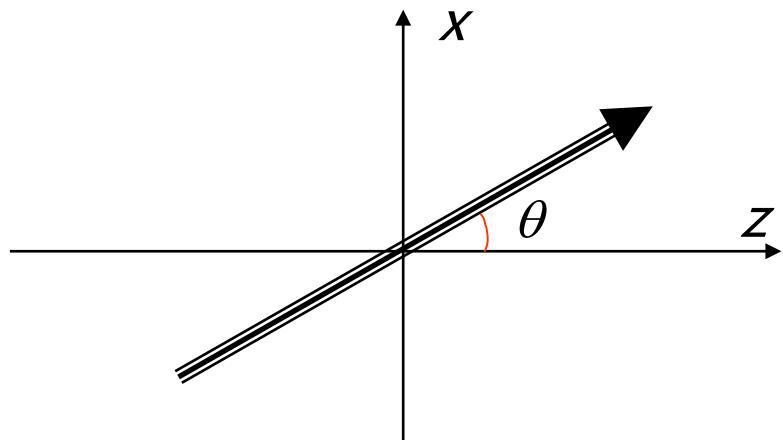
$$\tilde{U}(x, y) = Ae^{-i2\pi fx} = Ae^{-i\frac{2\pi}{\lambda} f\lambda \cdot x} =$$

$$\tilde{U}(x, y) = Ae^{ik \sin \theta \cdot x}$$

所以：

$$\sin \theta = -f\lambda \quad \text{或} \quad k_x = -2\pi$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - f^2}$$



$$\tilde{U}(x, y) = Ae^{ik \sin \theta \cdot x}$$

## 4、球面波向平面波的转化(\*)

### 球面波和平面波—基元

平面简谐波或球面简谐波可以看成为复杂波场的基元成分，所有复杂波场都可以分解成一系列球面波或平面波的叠加。

在一定条件下

球面波 ← ===== → 平面波

- 透镜：相互转化
- 球面波在远距离之外，可具有平面波的部分特点

# A、傍轴条件或振幅条件

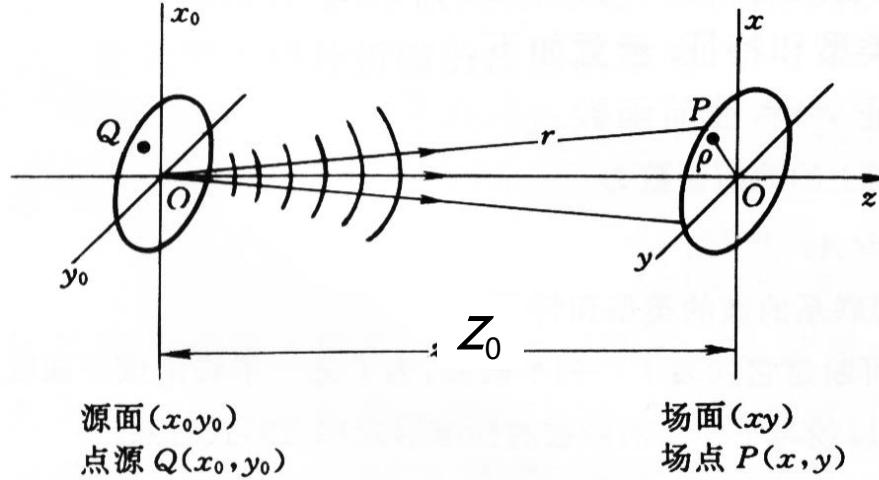


图 2.11 考察球面波向平面波的转化

点源  $O(0,0)$ , 球面波到  $(x, y)$  面的波前函数 :

$$\tilde{U}(x, y) = \frac{A}{r} e^{ikr},$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} = z_0 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z_0^2}} = z \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z_0^4} + \dots \right)$$

$\rho^2 = (x^2 + y^2)$  横向接收范围的尺度。

在  $z_0^2 \gg \rho^2$  下 波前函数中的振幅可以近似为：

$$\frac{A}{r} \approx \frac{A}{z_0}$$

但是相因子中的二次项不能轻易舍弃，保留到二次项：

$$\tilde{U}(x, y) \approx \frac{A}{Z_0} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{ikz_0}$$

特点：常数振幅，非线性因子。

**傍轴条件：**

$$z_0^2 \gg \rho^2$$

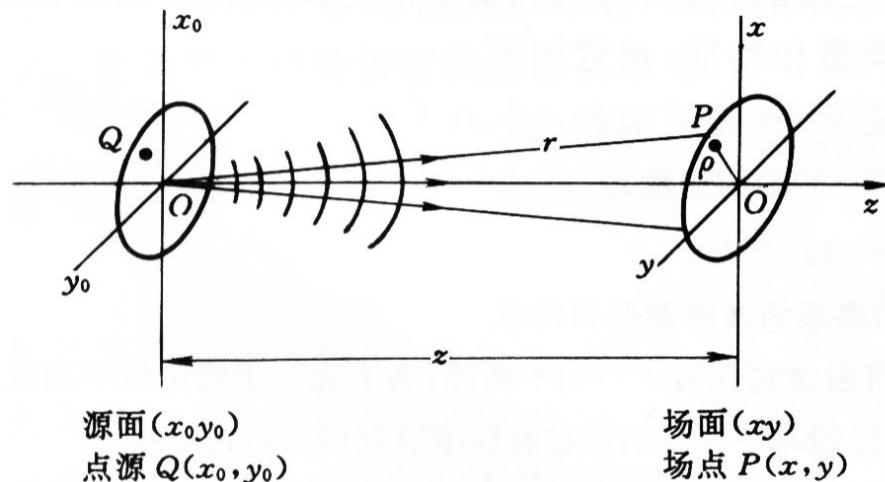


图 2.11 考察球面波向平面波的转化

## B、远场条件或相位条件

$$\tilde{U}(x, y) \approx \frac{A}{Z_0} e^{ik\frac{x^2 + y^2}{2z_0}} \cdot e^{ikz_0}$$

相因子对物理状态的影响具有周期性，周期为 $2\pi$ 。相因子中可以忽略的小量应该是远远小于 $\pi$ 。

可以忽略二次项的条件：

$$k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = k \frac{\rho^2}{2z_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z_0} \ll \pi$$

$z_0 \lambda \gg \rho^2$  **远场条件，或称相位条件。**

同时满足傍轴条件和远场条件：

$$U(x, y) = \frac{A}{z_0} e^{ikz_0}$$

球面波  $\rightarrow$  正入射平面波

## 傍轴条件

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} = z_0 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z_0^2}} = z \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z_0^4} + \dots \right)$$

—————      << 1

## 远场条件

$$k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = k \frac{\rho^2}{2z_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z_0} << \pi \quad \underline{\frac{1}{\lambda} \frac{\rho^2}{z_0} << 1}$$

相同几何条件下的差异：波长与空间距离的关系

## C、相同Z条件下，比较傍轴和远场条件

例题1、设波长 $\lambda \sim 500\text{nm}$ ,横向距离 $\rho \sim 1\text{mm}$ ，约定“>>”为50倍，推算傍轴条件下的纵向距离 $Z_p$ 和远场条件的 $Z_f$ .

$$Z_p \approx \sqrt{50}\rho = \sqrt{50} \times 1\text{mm} \approx 7\text{mm}$$

$$Z_f \approx 50 \frac{\rho^2}{\lambda} = 50 \rho \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) = 50 \times 1\text{mm} \times (2 \times 10^3) = 100\text{m}$$

$Z_f > Z_p$ ,因为 $\rho/\lambda$ 带来高倍率。

例题2、设波长 $\lambda \sim 1\text{m}$ ,横向距离 $\rho \sim 10\text{cm}$ ，约定“>>”为50倍，推算傍轴条件下的纵向距离 $Z_p$ 和远场条件的 $Z_f$ .

$$Z_p \approx \sqrt{50}\rho = \sqrt{50} \times 10\text{cm} \approx 70\text{cm}$$

$$Z_f \approx 50 \frac{\rho^2}{\lambda} = 50 \rho \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) = 50 \times 10\text{cm} \times (0.1) = 50\text{cm}$$

$Z_f < Z_p$ ,因为 $\rho/\lambda$ 小于1

## 结论：

1. 比较傍轴条件和远场条件谁对纵向距离要求更远，  
取决于  $\rho/\lambda$ 。
2. 在可见光波段，通常  $\rho/\lambda \gg 1$ ，故  $Z_f \gg Z_p$

## D、轴外点源情况

点源位置  $Q(x_0, y_0)$ , 场点位置  $P(x, y)$

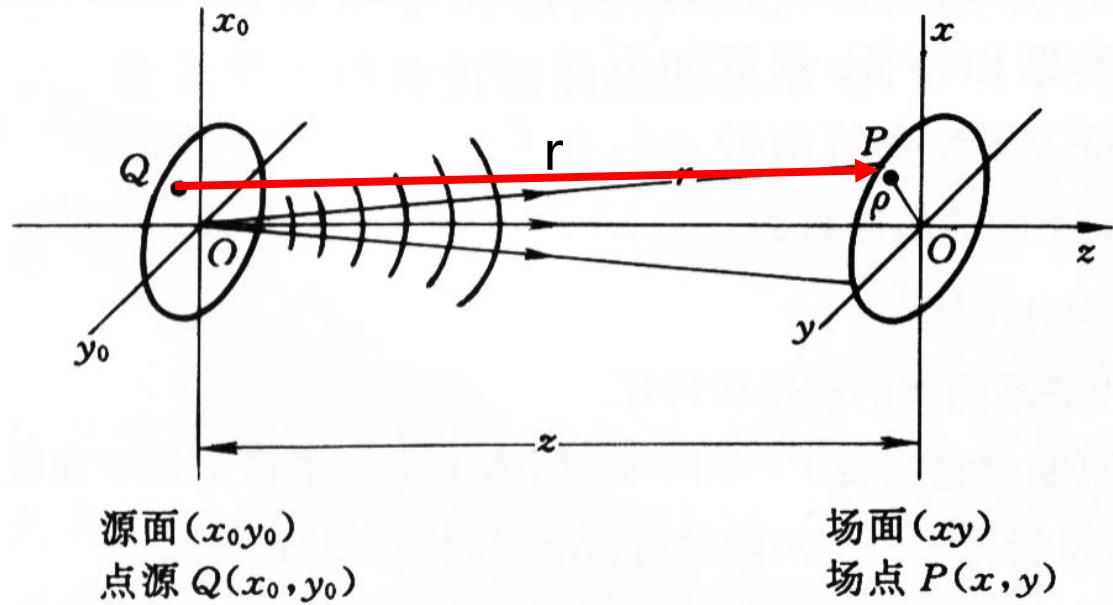


图 2.11 考察球面波向平面波的转化

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \\ &= z \left( 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z^2} - \frac{\left( (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)^2}{8z^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

(1) 源点和场点满足傍轴条件  $z^2 \gg \rho_0^2, \rho^2$

$$\tilde{U}(x, y) \approx \frac{A}{z} e^{ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}} \cdot e^{ikz} \propto e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \cdot e^{ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}} \cdot e^{-ik\frac{xx_0+yy_0}{z}}$$

点源的二次因子，场点的的二次因子，交叉线性因子。

(2) 源点满足远场条件，场点满足傍轴条件

$$z\lambda \gg \rho_0^2, z^2 \gg \rho^2$$

$$\tilde{U}(x, y) \propto e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \cdot e^{-ik\frac{xx_0+yy_0}{z}}$$

场点的的二次因子，和 $(x_0, y_0)$ 有关的线性因子。

(3) 源点满足傍轴条件，场点满足远场条件

$$z\lambda \gg \rho^2, z^2 \gg \rho_0^2$$

$$\tilde{U}(x, y) \propto e^{ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}} \cdot e^{-ik\frac{xx_0+yy_0}{z}}$$

## 5、波前相因子分析法 (\*)

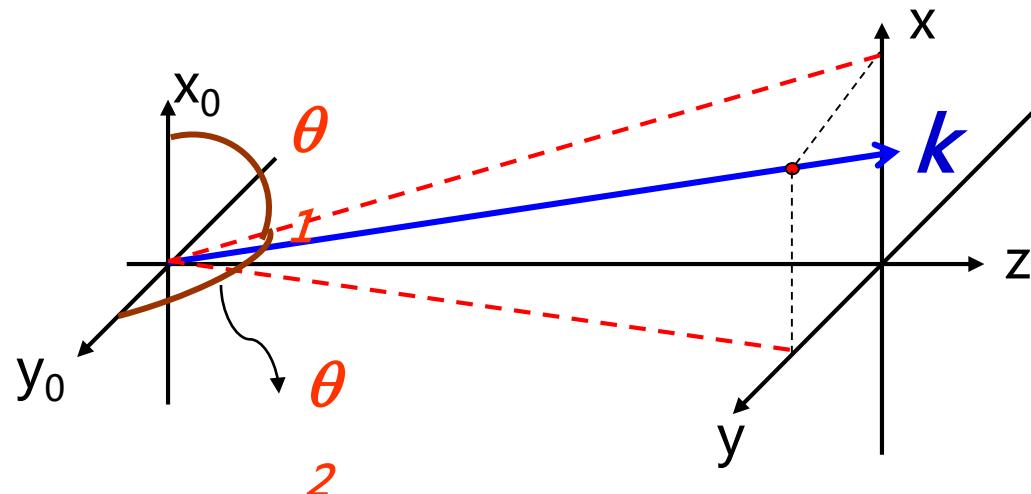
波的类型和特性  $\Leftrightarrow$  波前函数

波场的主要特征体现在波前函数的相因子中。如果能将一个复杂的波场中复振幅的相因子与平面波或球面波的相因子作一比较，使之联系起来，则复杂波场即可分解为一系列平面波或球面波成分，从而使我们比较容易从概念上去掌握它。所谓“**相因子判断法**”，简言之，即根据波前函数的相因子来判断波场的性质，分析波场的主要特征。为了使用相因子判断法，我们先要熟悉**两件事**：一是平面波和几种典型情况下球面波在波前上的相因子。

波的类型和特性  $\Leftrightarrow$  波前相因子

# (1) 平面波

平面波的波前函数具有线性相因子，



$\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是波矢 $\mathbf{k}$ 的两个方向余弦角的余角。

$$k_x = k \cos \theta_1, \quad k_y = k \cos \theta_2$$

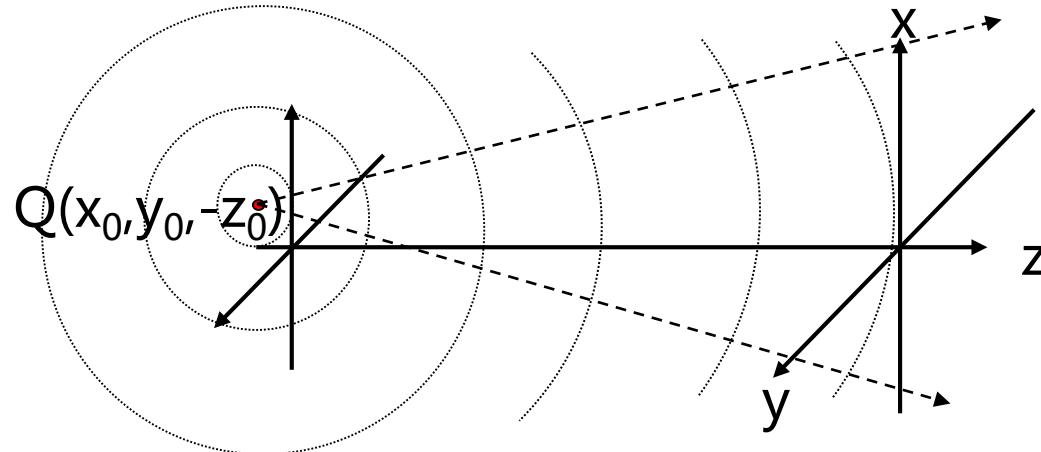
在 $z=0$ 平面的波前函数和**相因子**：

$$\tilde{U}(x, y) = A e^{ik(\cos \theta_1 \cdot x + \cos \theta_2 \cdot y)} \propto e^{ik(\cos \theta_1 \cdot x + \cos \theta_2 \cdot y)}$$

线性相因子系数 ( $\cos \theta_1, \cos \theta_2$ ) 与平面波的传播方向一一对应。

## (2) 球面波

### I、发散球面波



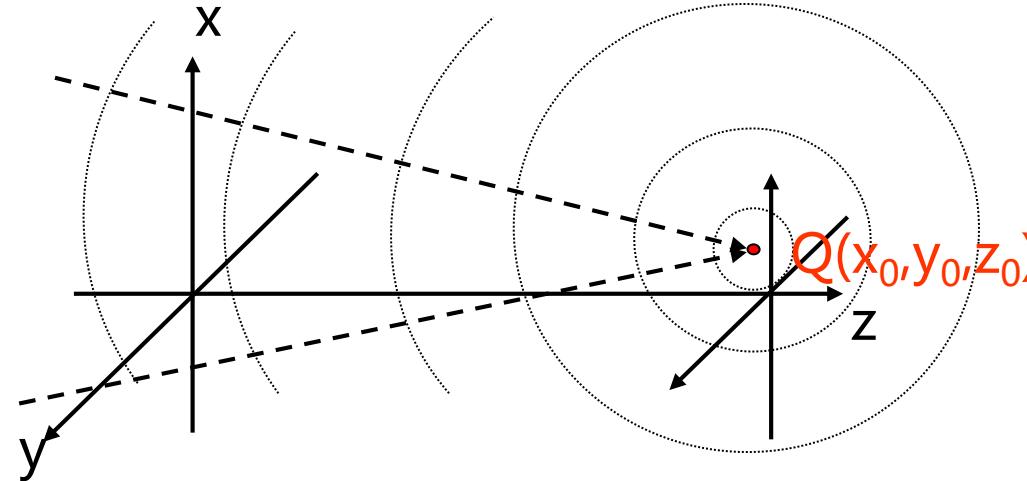
$$\tilde{U}(x, y) = \frac{A}{r} e^{ikr}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$$

在傍轴条件下：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x, y) &\approx \frac{A}{z_0} e^{\frac{ik(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z_0}} \cdot e^{ikz_0} \propto e^{\frac{ikx^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{\frac{ikx_0^2+y_0^2}{2z_0}} \cdot e^{-ik\frac{xx_0+yy_0}{z_0}} \\ &\propto e^{\frac{ikx^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{-ik\frac{xx_0+yy_0}{z_0}}\end{aligned}$$

发散中心为 **Q ( x₀, y₀, -z₀ )**

## II、汇聚球面波



$$\tilde{U}(x, y) = \frac{A}{r} e^{-ikr}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$$

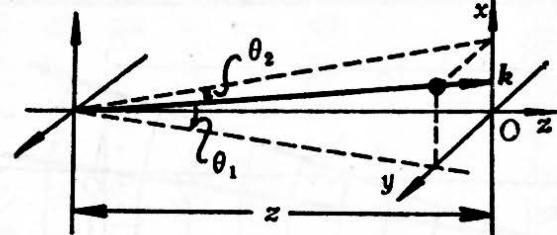
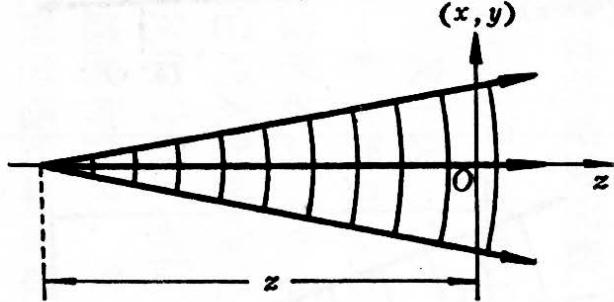
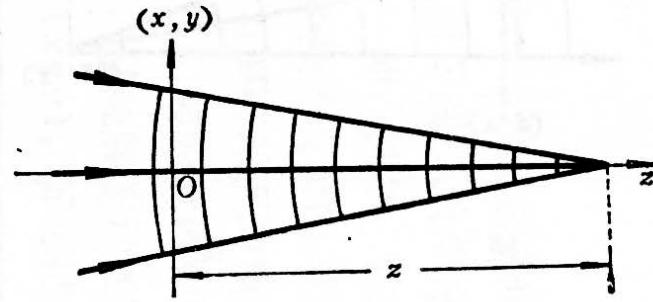
在傍轴条件下：

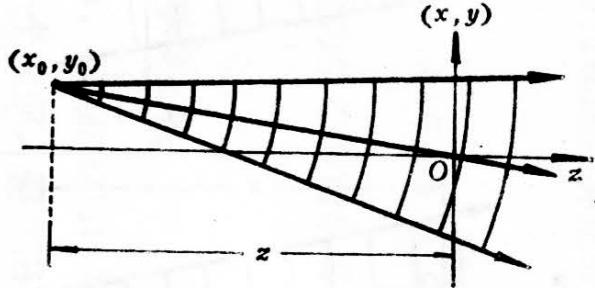
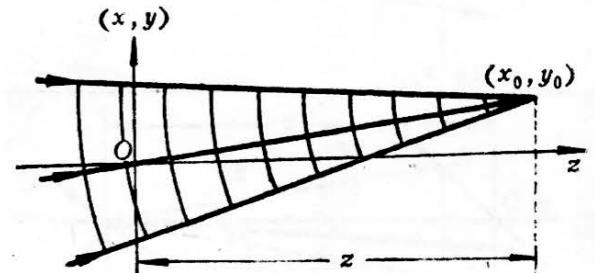
$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, y) &\approx \frac{A}{z_0} e^{-ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z_0}} \cdot e^{-ikz_0} \propto e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{-ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0}} \cdot e^{ik\frac{xx_0+yy_0}{z_0}} \\ &\propto e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{ik\frac{xx_0+yy_0}{z_0}} \end{aligned}$$

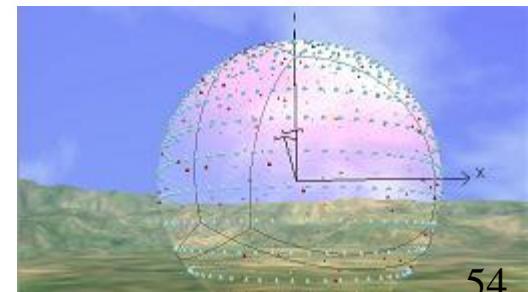
汇聚中心为 **Q ( x₀, y₀, z₀ )**

# 总结：

表V-1 平面波和球面波在波前上的相因子

波的类型	特征	相因子	图解
(1) 平面波	传播方向 $(\theta_1, \theta_2)$ 当 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时	$\begin{cases} \exp[ik(\sin\theta_1 x + \sin\theta_2 y)] \\ 1 \end{cases}$	
(2) 发散球面波	中心在轴上 坐标 $(0, 0, -z)$	$\exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$	
(3) 会聚球面波	中心在轴上 坐标 $(0, 0, z)$	$\exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$	

波的类型	特征	相因子	图解
(4) 发散球面波	中心在轴外 坐标 $(x_0, y_0, -z)$	$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$	
(5) 会聚球面波	中心在轴外 坐标 $(x_0, y_0, z)$	$\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$	



$$-ik \left( 4 \frac{x^2 + y^2}{D} \right)$$

例题：在 $(x, y)$ 平面上波前函数的相因子为  $e^{-ik \left( 4 \frac{x^2 + y^2}{D} \right)}$   $k$ 为波矢，分析波场的类型和特征？

二次相因子  $\rightarrow$  傍轴球面波  
无一次相因子  $\rightarrow$  中心在z轴上  
相因子中的负号  $\rightarrow$  汇聚球面波

进一步确定中心位置，把相因子函数改写成标准形式：

$$e^{-ik \left( 4 \frac{x^2 + y^2}{D} \right)} = e^{-ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2 \left( \frac{D}{8} \right)} \right)}$$

于是判断汇聚中心的位置为 $(0, 0, D/8)$

# 前沿介绍: 脉冲光波

超短脉冲激光ns , ps , fs , as激光，在生物、化学、物理等领域有广泛的应用。

Microsecond  $10^{-6}s$  闪光光解、磷光

Nanosecond  $10^{-9}s$  荧光寿命、蛋白质折叠、

Picosecond  $10^{-12}s$  分子转动

Femtosecond  $10^{-15}s$  分子振动，电子跃迁

Attosecond  $10^{-18}s$  分子内电子运动

飞秒 ( $10^{-15}$  S) ---- 万分之一秒 (超短脉冲)

超快 (3.9fs)

超强 (100TW)

自然界

聚焦强度	$10^{20}$ W/cm <sup>2</sup>	$3.5 \times 10^{16}$ W/cm <sup>2</sup>
光 压	$10^{12}$ bar	1bar
加速度	$10^{21}$ g	g
磁 场	$10^9$ Gauss	0.5Gauss

→ 提供了极端实验条件

## 作业：

1、一束平行光其波长为 $\lambda$ ，其传播方向相对于坐标架(x,y,z)的方向余弦角为 $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $\beta=70^\circ$ ,

(1)写出复振幅 $U(x,y,z)$ ，设振幅为A，初相位为0。

(2)写出 $z=0$ 的波前函数。

2、太阳上一点光源发出的球面波，到达地球上，在多大范围内可以看成平面波，已知太阳和地球的距离为 $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ , 波长取 $0.5 \mu\text{m}$ 。

3、在波前(x, y)平面上，波前函数的相因子具有下面的形式，分别判断这些相因子所对应的波场的形式和特征。

$$\tilde{U}_1 \propto e^{i5k\frac{x^2+y^2}{z_0}}; \quad \tilde{U}_2 \propto e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{-ik\frac{5x+8y}{2z_0}}; \quad \tilde{U}_3 \propto e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \cdot e^{-ik\frac{5x+8y}{2z_0}}$$

$$\tilde{U}_4 \propto e^{-ik\frac{x^2}{2}}$$