第四章 光的衍射

前 言

1、 惠更斯-菲涅耳原理

2、 圆孔和圆屏菲涅耳衍射、波带片

3、 夫琅禾费单缝衍射

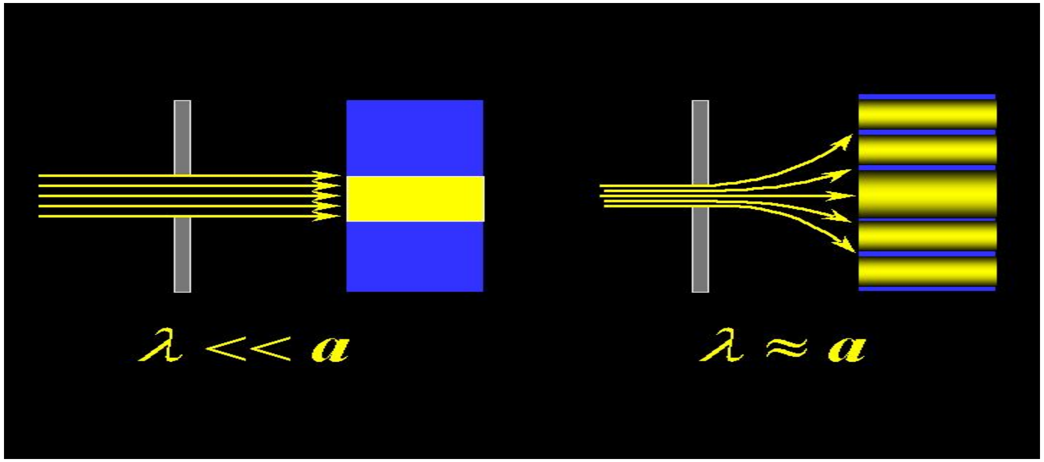
4、 夫琅禾费圆孔衍射和光学仪器的分辨本领

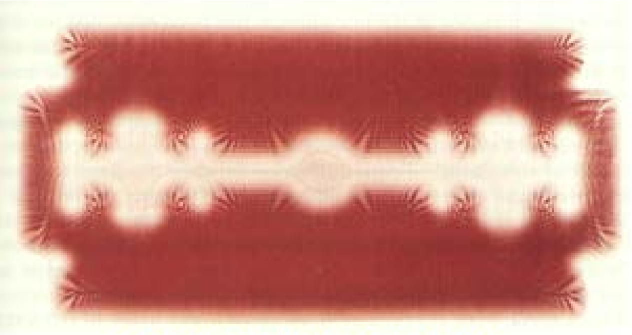
5、 位移-相移定理

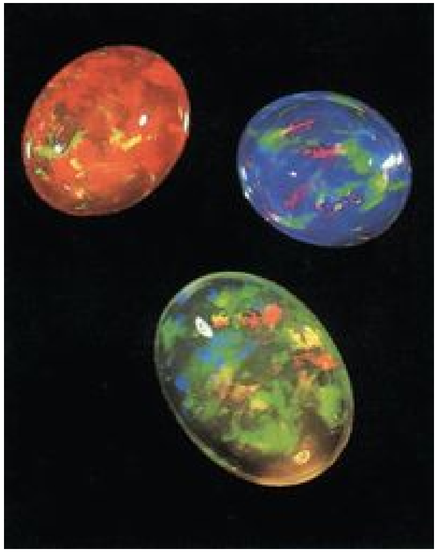
6、 一维光栅、二维光栅

7、 三维光栅—X射线晶体衍射

衍射： 当光波遇到障碍物时，会偏离几何光学的直线传播而绕行的现象称为光的衍射(diffraction).

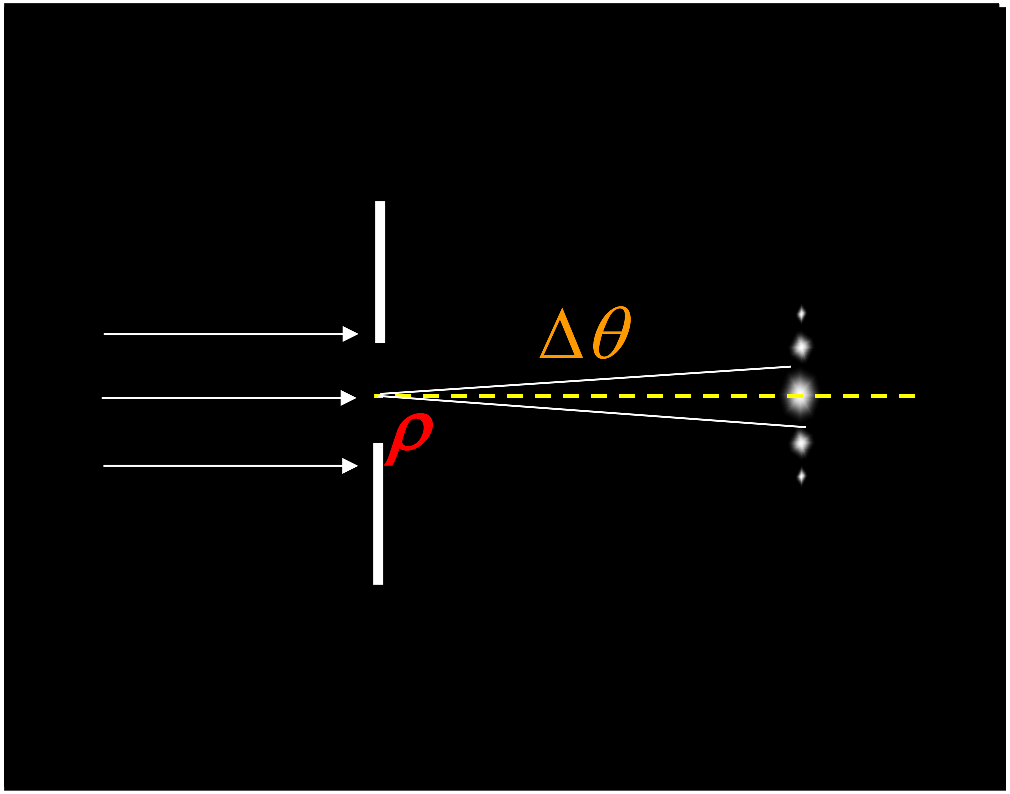



剃须刀片的衍射现象



在欧泊石的内部，由无数规则的二氧化硅球粒一间隙形成了很多的三维衍射光栅，当光线射入到欧泊石内部时，出现了光线的衍射作用，衍射的角度随波长的变化而变化，从而在不同的角度可见不同的颜色，亦就是所谓的变彩。

衍射的限制与展宽

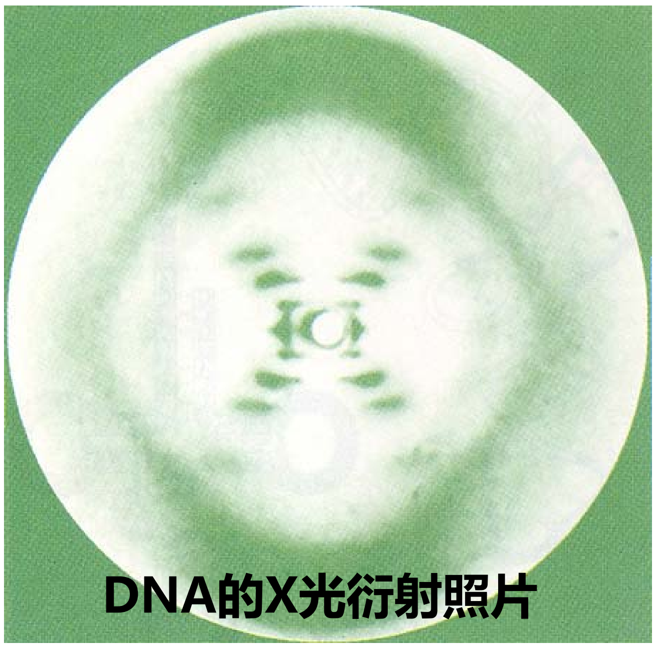


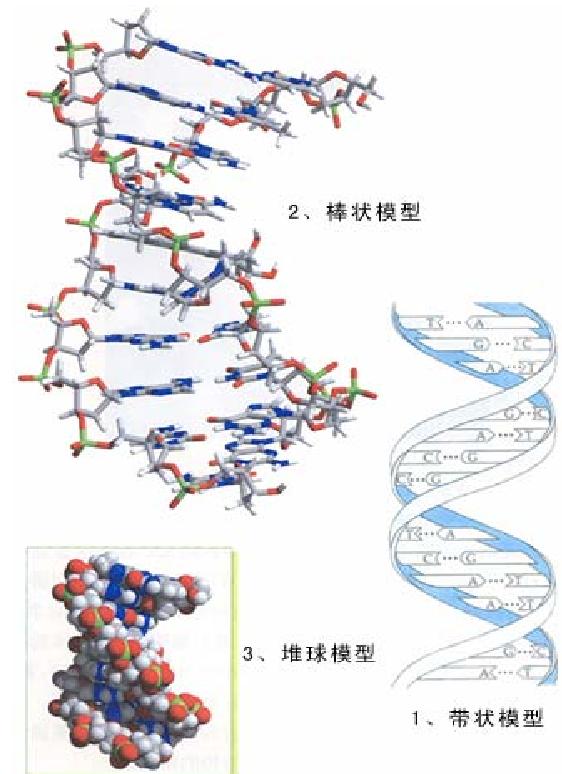
限制尺度、发散角和波长的关系：

$$\rho \cdot \Delta\theta \sim \lambda$$

衍射图样和结构一一对应。结构越细微，相应的衍射图样越大；结构越复杂，相应的衍射图样越复杂

衍射图样 ⇄ 微结构





学科交叉引发创新

克里克(F. Crick)、沃森(J. Watson)、威尔金斯(M. Wilkins)，对DNA晶体所作的X光衍射分析的基础上，根据DNA分子碱基配对原则，构建出了DNA分子的双螺旋结构模型。1962年诺贝尔医学奖。

惠更斯原理与衍射

光扰动同时到达的空间曲面被称为波面或波前，波前上的每一点都可以看成一个新的扰动中心，称为子波源或次波源，次波源向四周发出次波；下一时刻的波前是这些大量次波面的公切面，或称为包络面；次波中心与其次波面上的那个切点的连线方向给出了该处光传播方向。

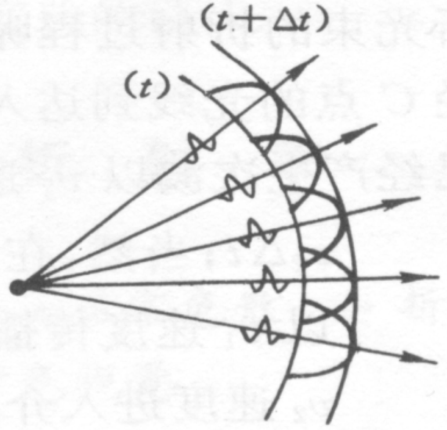


图 1.1　说明惠更斯原理

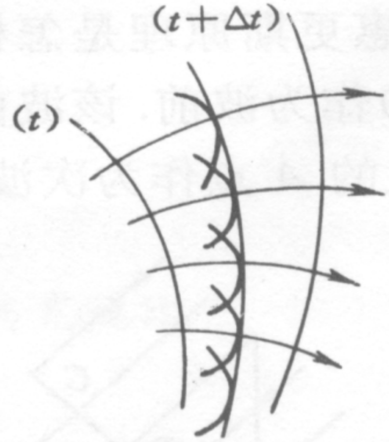


图 1.2　非均匀介质中光线弯曲

1. 不能回答光振幅或光强的传播问题
2. 不能回答光位相的传播问题

第一节 惠更斯-菲涅耳原理

菲涅耳
Augustin-Jean Fresnel
1788-1827

菲涅耳是法国物理学家和铁路工程师。 1788年5月10日生于布罗利耶，1806年毕业于巴黎工艺学院，1809年又毕业于巴黎桥梁与公路学校。1823年当选为法国科学院院士，1825年被选为英国皇家学会会员。1827年7月14日因肺病医治无效而逝世，终年仅39岁。

菲涅耳的科学成就主要有两个方面。一是衍射。他以惠更斯原理和干涉原理为基础，用新的定量形式建立了惠更斯--菲涅耳原理，完善了光的衍射理论。另一成就是偏振。他与D. F. J. 阿拉果一起研究了偏振光的干涉，确定了光是横波（1821）；他发现了光的圆偏振和椭圆偏振现象（1823），用波动说解释了偏振面的旋转；他推出了反射定律和折射定律的定量规律，即菲涅耳公式；解释了马吕斯的反射光偏振现象和双折射现象，奠定了晶体光学的基础。

(*)

惠更斯的次波概念

继承

吸取

光波干涉概念

补充和发展

提出

次波相干叠加的概念

统一的衍射分析的理论框架

惠更斯—菲涅耳原理

惠更斯—菲涅耳原理

波前上的每个面元都可以看成次波源，它们向四周发射次波；波场中任一场点的扰动都是所有次波源所贡献的次级扰动的**相干叠加**

(*)

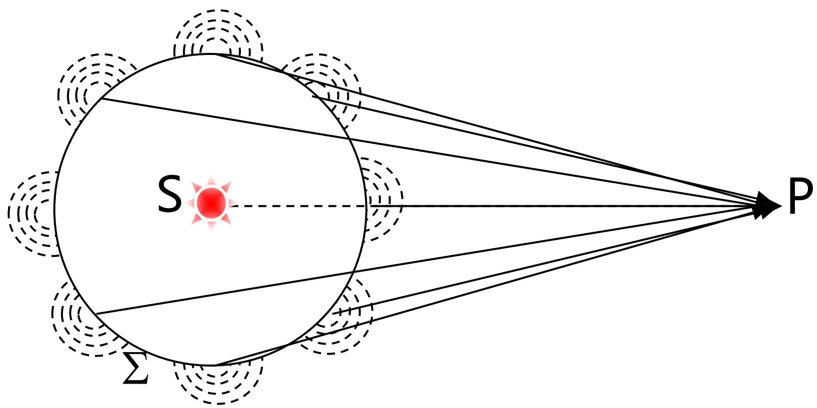
衍射： 当光波遇到障碍物时，会偏离几何光学的直线传播而绕行的现象称为光的衍射(diffraction).

惠更斯—菲涅耳原理

波前的遮挡或扭曲，导致次波源部分失去，或次波源的相位发生改变。被改变的次波源相干叠加，产生衍射强度分布。**这种新的强度分布带有障碍物的信息。**

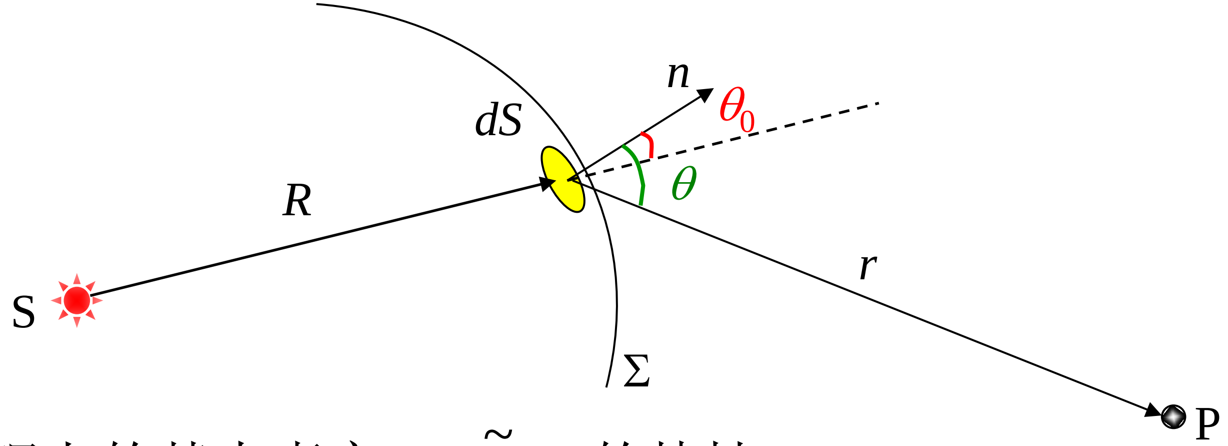
惠更斯—菲涅耳原理的数学表示：(*)

波前上的每个面元都可以看成次波源，它们向四周发射次波；波场中任一场点的扰动都是所有次波源所贡献的次级扰动的相干叠加



$$\tilde{U}(P) = \oiint_{(\Sigma)} d\tilde{U}(P)$$ 复振幅

$$d\tilde{U}(P) = ???$$



基于物理上的基本事实，$d\tilde{U}(P)$的特性：

$$
\begin{cases}
d\tilde{U}(P) \propto dS & \text{——波前上作为次波源的微分面元} \\
d\tilde{U}(P) \propto \tilde{U}_0(Q) & \text{——次波源的自身复振幅} \\
d\tilde{U}(P) \propto \dfrac{1}{r}e^{ikr} & \text{——次波源发出的球面波到达场点} \\
d\tilde{U}(P) \propto f(\theta_0,\theta) & \text{——倾斜因子表示次波面源的发射非各向同性}
\end{cases}
$$

引进比例常数，惠更斯—菲涅耳原理的数学表达式：

$$\tilde{U}(P) = \underline{\underline{K}} \oiint_{(\Sigma)} \underline{\underline{f(\theta_0,\theta)}}\,\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

? ?

? ?

基尔霍夫衍射积分公式： (*)

基尔霍夫 (G.R. Kirchhoff, 1824—1887) 德国物理学家。

$$\tilde{U}(P) = K \oint\!\!\oint_{(\Sigma)} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

$kr >> 1$

$r >> \lambda$

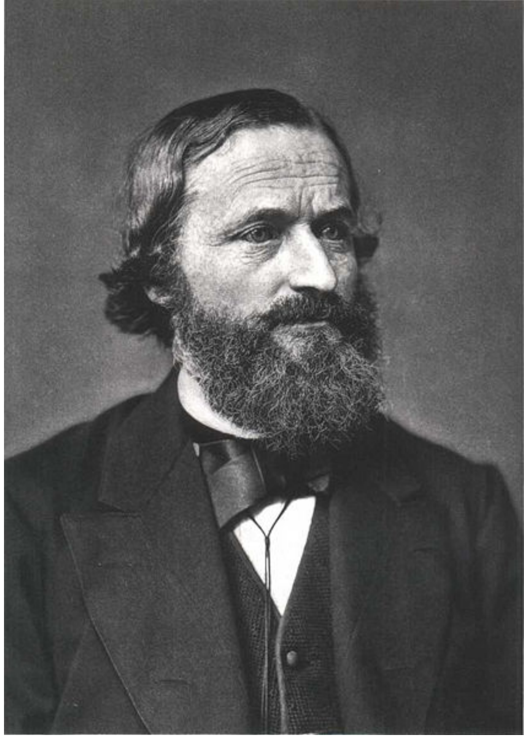
$$\tilde{U}(P) = \frac{-i}{\lambda}\oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

(1) 明确了倾斜因子，$f(\theta_0,\theta)=\dfrac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}$，

闭合面上的各个次波源均对场点扰动有贡献

(2) 给出了比例系数，$K=\dfrac{-i}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(3) 明确指出，积分面(Σ)不限于等相面，可以是隔离光源和场点的任意闭合曲面。



Robert Kirchhoff, a physicist who
made important contributions to
topology and to elasticity.
of currents, voltages and
resistances of electrical circuits

IEEE Gustav Robert Kirchhoff Award

impact.

<u>基尔霍夫假定：</u> **(*)**

(1), 无穷远面上的波前对场点P的贡献为0；
(2), 光屏面对光的反射和吸收，其上波前函数为0，它对场点也无贡献；
(3), 只有光孔面的波前对场点有贡献，且假设其波前函数等于无屏障时自由传播的光场。

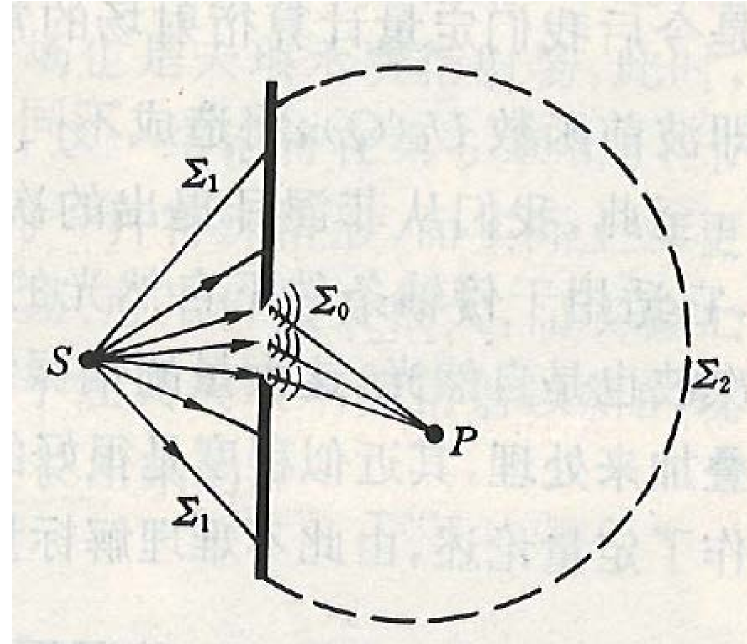


图 2.29 说明基尔霍夫边界条件

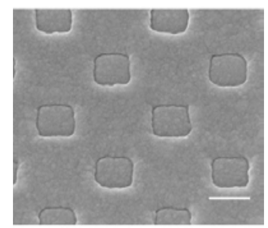
才得到前面所述的基尔霍夫公式

讨论？？？

从严格的电磁波理论来看，不自洽和不严格：

(1), 光屏面上光场为0，而一旦过边缘进入光孔就有了光场，这种场的突变不满足边界条件。例如plasmonics。。。

(2), 无穷远那里的波前函数虽然趋近于0，但其积分面也无穷，积分结果对场点的贡献是否为0，结论并不显然。


矩形孔透光

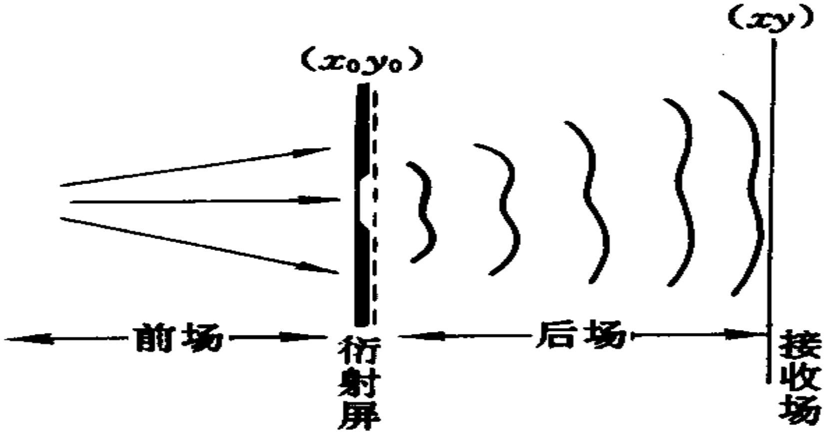
透光系数
>>
传统衍射理论预测

Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays

T. W. Ebbesen*†, H. J. Lezec‡, H. F. Ghaemi*, T. Thio* & P. A. Wolff*§

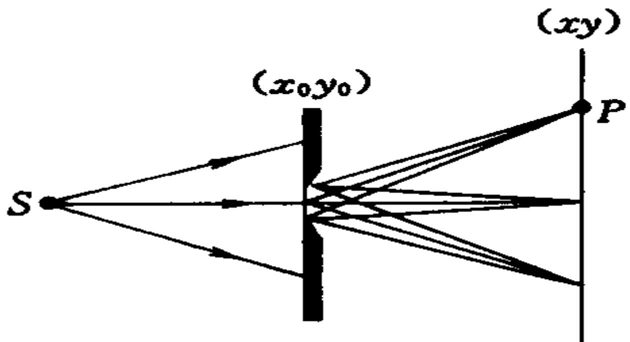
Nature (1998)

第二节、圆孔和圆屏的菲涅耳衍射、波带片 (*)



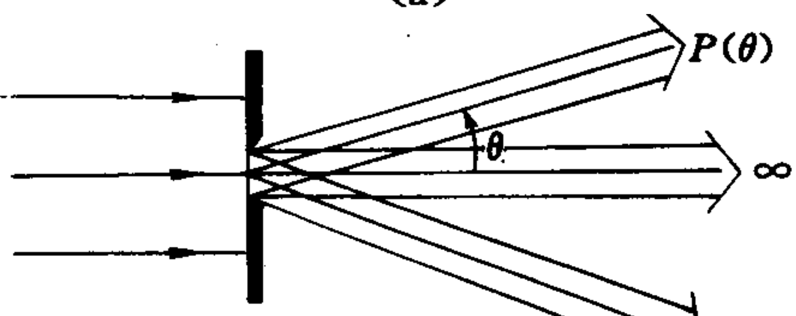
衍射：光在通过空间结构时由于波动性而偏离直线传播的现象。

按光源、衍射屏和接收屏三者之间的距离关系将衍射分为两大类：



(a)

菲涅耳衍射：光源—衍射屏—接收屏之间距离为有限远。



(b)

夫琅禾费衍射：光源—衍射屏—接收屏之间距离为无限远。

衍射巴比涅原理（互补衍射屏） (*)

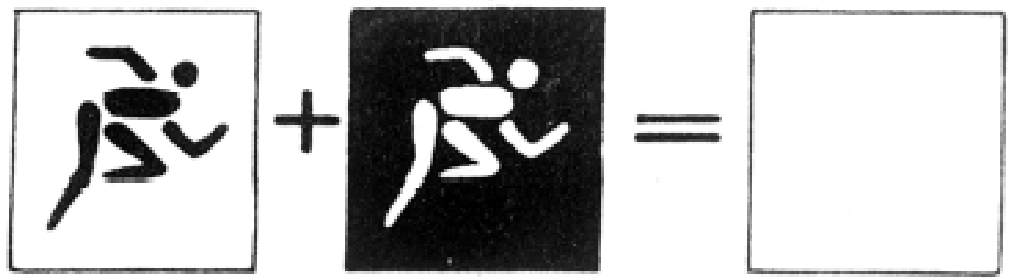


图 2.39　巴比涅原理中的一对互补屏

一衍射屏在某处的衍射强度是亮的，其互补屏在该处的衍射强度是明是暗？

衍射屏 $\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma_0$ 自由畅通

$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{\lambda}\oiint_{(\Sigma_0=\Sigma_a+\Sigma_b)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

$$=\underline{\underline{\frac{-i}{\lambda}\oiint_{(\Sigma_a)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS}}+\underline{\underline{\frac{-i}{\lambda}\oiint_{(\Sigma_b)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS}}$$

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}(P)$$

一、圆孔和圆屏的菲涅耳衍射

圆孔及圆屏的衍射图样及其特征

泊松亮斑(Poisson’s spot)：数学家泊松(粒子学说的信奉者)利用惠更斯—菲涅耳衍射原理，计算出圆屏衍射中心竟会是一亮斑，这在泊松看来是十分荒谬的，影子中间怎么会出现亮斑呢？这差点使得菲涅尔的论文中途夭折。但菲涅耳的同事阿拉果(**Dominique Arago**)在关键时刻坚持要进行实验检测，结果发现真的有一个亮点如同奇迹一般地出现在圆盘阴影的正中心，位置亮度和理论符合得相当完美。

一、圆孔和圆屏的菲

圆孔及圆屏的衍射

泊松亮斑(Poisson'

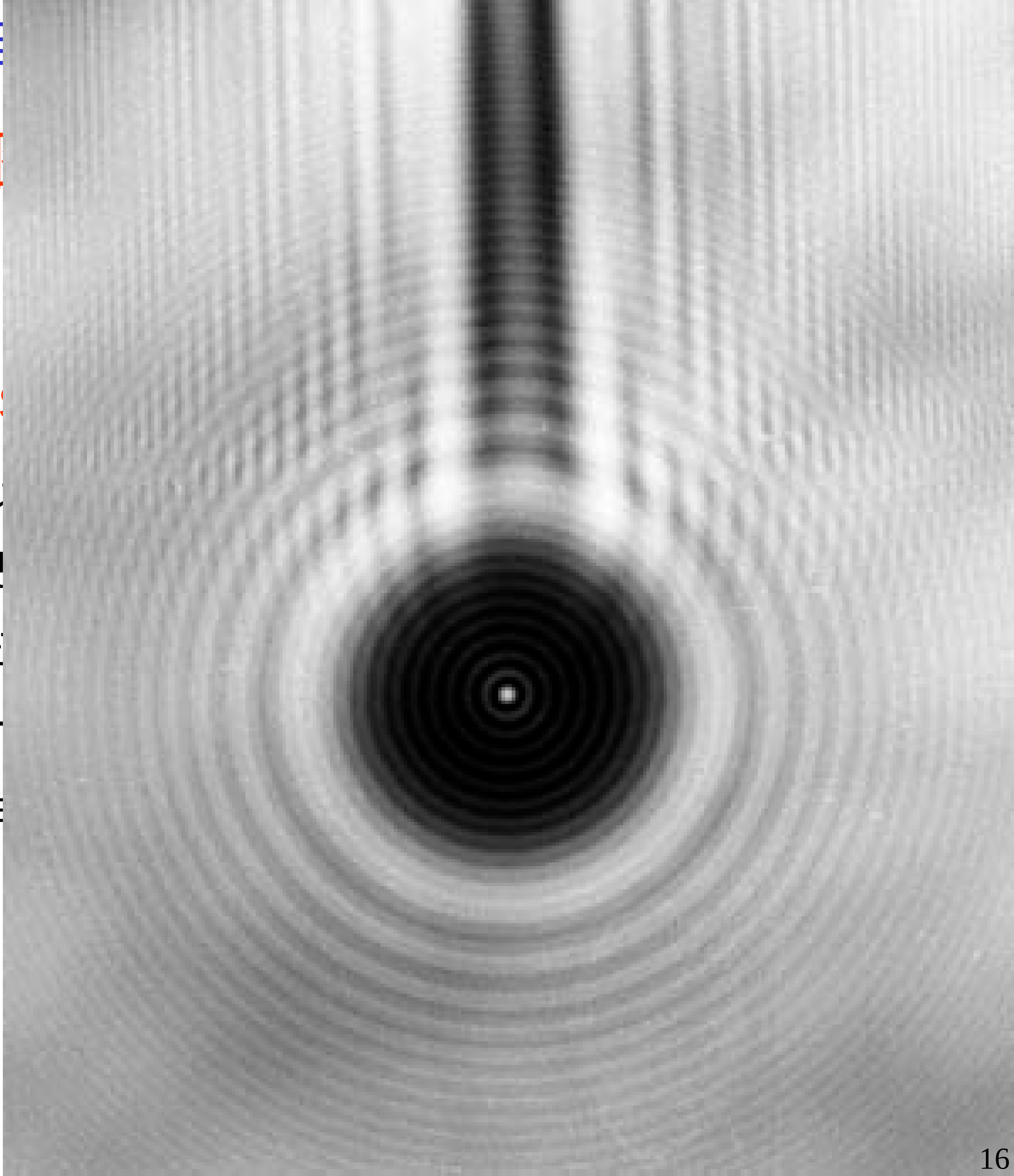
更斯—菲涅耳衍射原理，i

是十分荒谬的，影子中间怎

夭折。但菲涅耳的同事阿

验检测，结果发现真的有一

位置亮度和理论符合得相当



（1）半波带方法对圆孔（屏）衍射的描述 (*)

均匀位相间隔的叠加

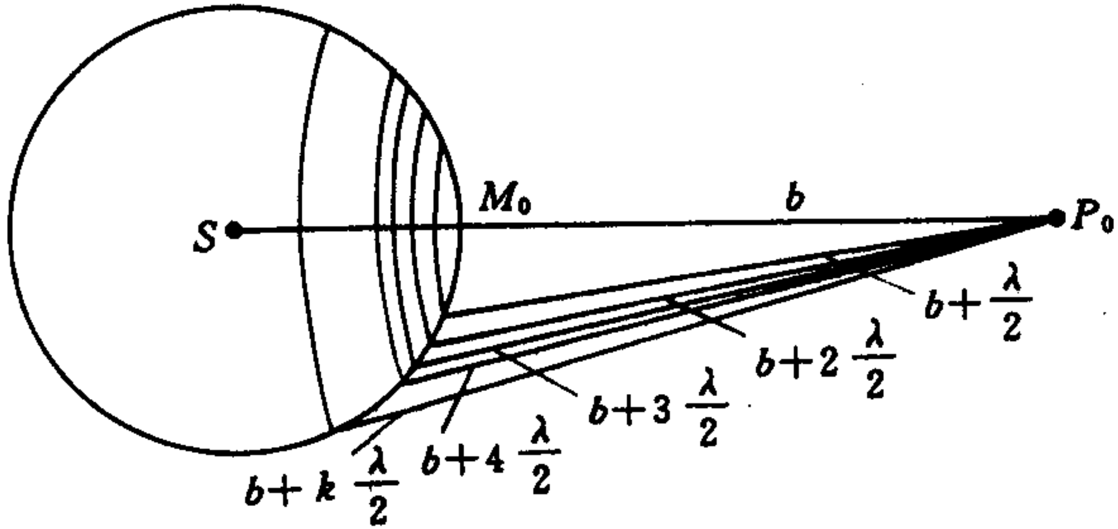


图 2.39 分割波前的半波带方法

以光源S为球心，以R为半径作闭合球面，球面为等相位的波前,点源与场点P_0的连线通过该波前M_0点，$M_0P_0=b$；尔后以P_0为中心，分别以$b+\lambda/2$, $b+2\lambda/2$, $b+3\lambda/2$,…为半径分割波前，形成一系列环带，相邻环带到场点的光程差均为半波长，故称这些环带为**半波带**。

半波带的面积依次为$\Delta\Sigma_1$，$\Delta\Sigma_2$，$\Delta\Sigma_3$…,对场点的贡献依次为$\Delta\tilde{U}_1$，$\Delta\tilde{U}_2$，$\Delta\tilde{U}_3$…,则总扰动为：

$$\tilde{U}(P_0)=\sum_i \Delta\tilde{U}_i$$

惠更斯-菲涅尔原理：*振幅与相位的叠加。*

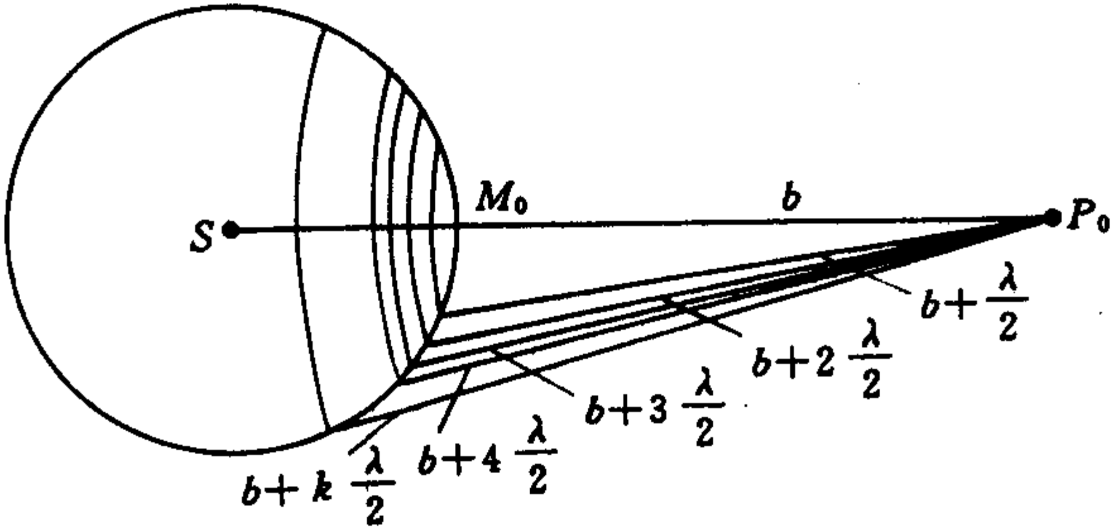


图 2.39　分割波前的半波带方法

$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{\lambda}\oiint_{(\Sigma)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS=\sum\Delta\tilde{U}_i$$

相位关系：各个半波带到场点的光程差依次递增λ/2，对场点扰动的贡献相差π。由于各个波带处于等相面上，复振幅 $\tilde{U}_0(Q)$ 无附加位相差。

$$\Delta\tilde{U}_1=A_1,\quad \Delta\tilde{U}_2=-A_2,\quad \Delta\tilde{U}_3=A_3,\ldots\quad \Delta\tilde{U}_k=(-1)^{k+1}A_k,\ldots$$

则：$\tilde{U}(P_0)=\sum_k(-1)^{k+1}A_k$

特点：相邻项符号彼此相反

振幅关系：

$$A_k \propto f(\theta_0,\theta_k)\underline{\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}},\quad f(\theta_0,\theta_k)=\frac{1}{2}\left(\cos\theta_0+\cos\theta\right)\xrightarrow{\cos\theta_0=1}\underline{\frac{1}{2}\left(1+\cos\theta\right)}$$

？？　　？？

球冠面积：$\Sigma = 2\pi R^2(1-\cos\alpha)$，于是环带的面积为：

$$d\Sigma = 2\pi R^2\sin(\alpha)d\alpha$$

三角函数的余弦定理：$\cos\alpha=\dfrac{R^2+(R+b)^2-r^2}{2R(R+b)}$，两边求微分：$\sin(\alpha)d\alpha=\dfrac{rdr}{R(R+b)}$

于是：$d\Sigma=\dfrac{2\pi R}{R+b}rdr\propto r$

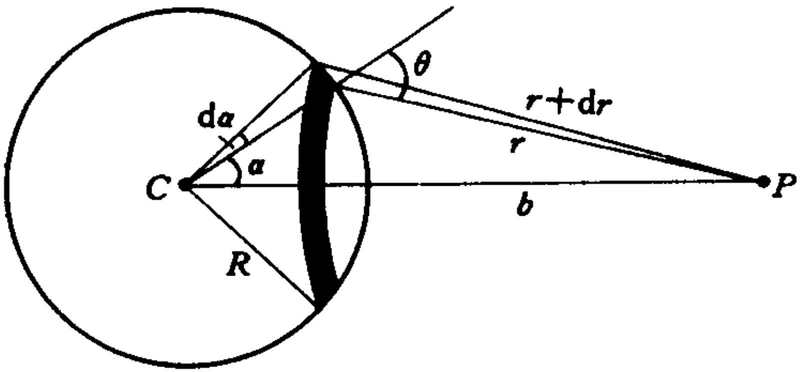


图 2.40　考量环带面积

$$\frac{d\Sigma}{r}=\frac{2\pi R}{R+b}dr，恰好和r无关。$$

相邻半波带间的$\Delta r=\dfrac{\lambda}{2}<<R$，$b$。可用$\Delta r$代替$dr$：

$$\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}\approx\frac{\pi R\lambda}{R+b}，\quad 与k无关。$$

讨论：$f(\theta_0,\theta_k)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\theta\right)=??$

$\lambda\sim 600nm$，$R\sim 1m$，$b\sim 1m$，$k=10^4$

$$\cos\theta_k=\frac{(R+b)^2-R^2-(b+k\lambda/2)^2}{2R(b+k\lambda/2)}\xrightarrow{k\frac{\lambda}{2}=3mm<<R,b,\text{所以近似为：}}\cos\theta_k\approx 1-\frac{k\lambda}{2R}=1-0.003$$

$f(\theta_{10000})\approx 1-0.0015=0.9985\approx 1$，可以看出倾斜因子的变化非常缓慢！！

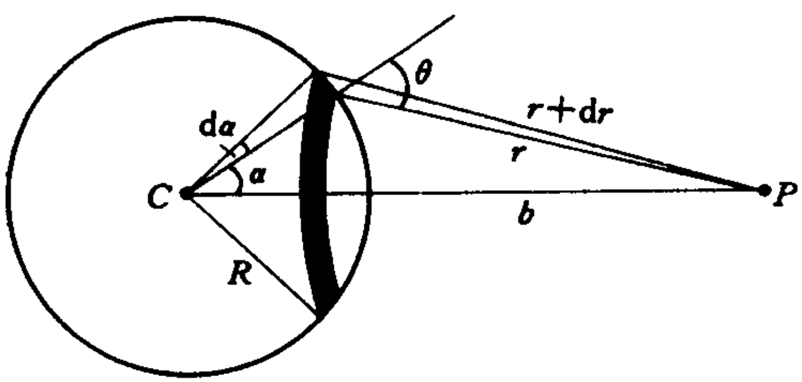
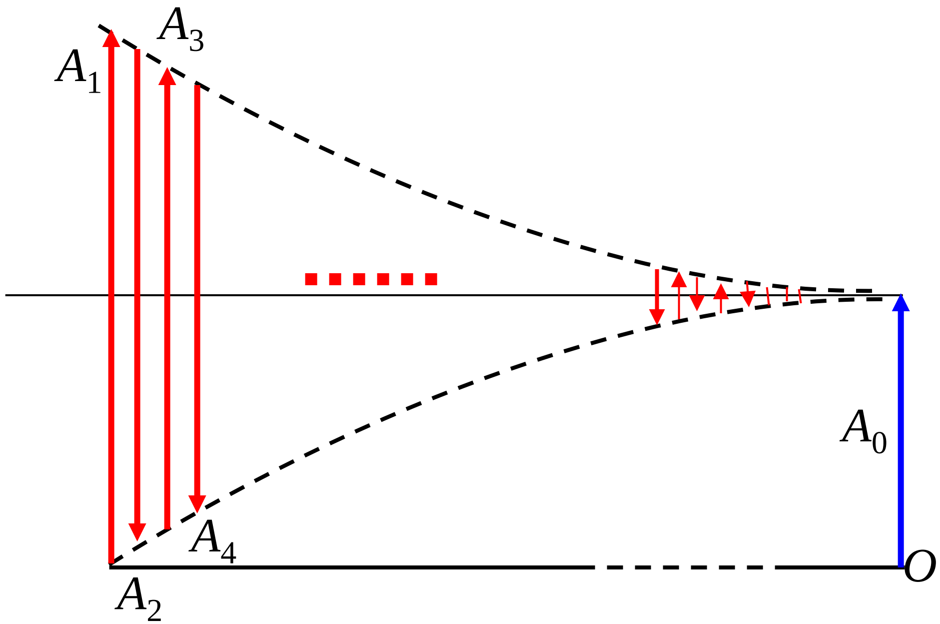


图 2.40　考量环带面积

结论：<u>A_k随着k的增加缓慢减小</u>

以矢量法描述各个波带的相干叠加



根据相位和振幅分析，半波带矢量相干叠加。如果没有屏障，波前完整，为自由传播。自由光场振幅：

$$A_0 = \frac{1}{2} A_1 \qquad 或 \qquad A_1 = 2A_0$$

A_1：第一个波带片的振幅

$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{\lambda}\oiint\limits_{(\Sigma)}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

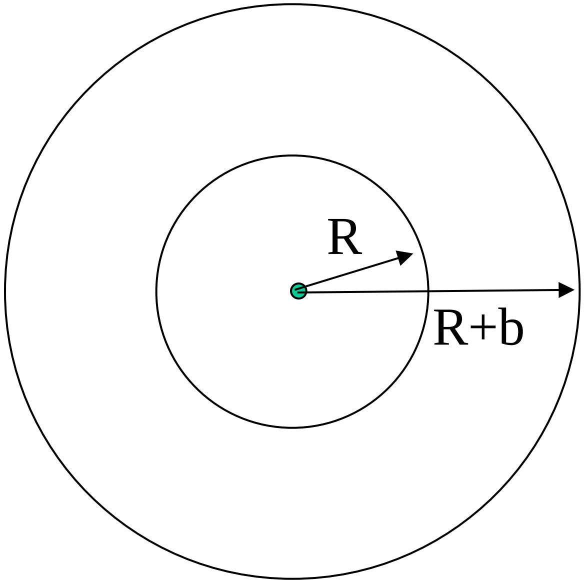
$$A_1=\frac{1}{\lambda}f(\theta_0,\theta_1)A(Q)\frac{\Delta\Sigma_1}{r_1}$$

$$f(\theta_0,\theta_1)\approx 1$$

$$A(Q)=\frac{a}{R}$$

波前处场

$$\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}\approx\frac{\pi R\lambda}{R+b}$$



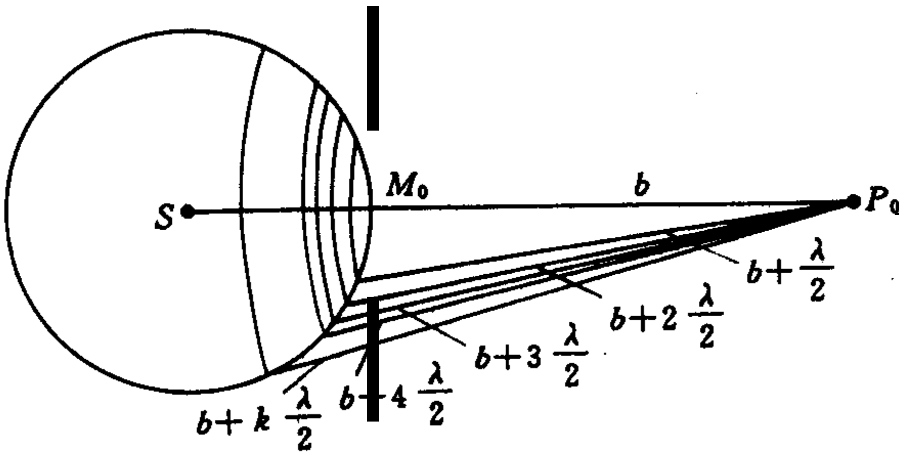
$$A_1\approx\pi\frac{a}{R+b}$$

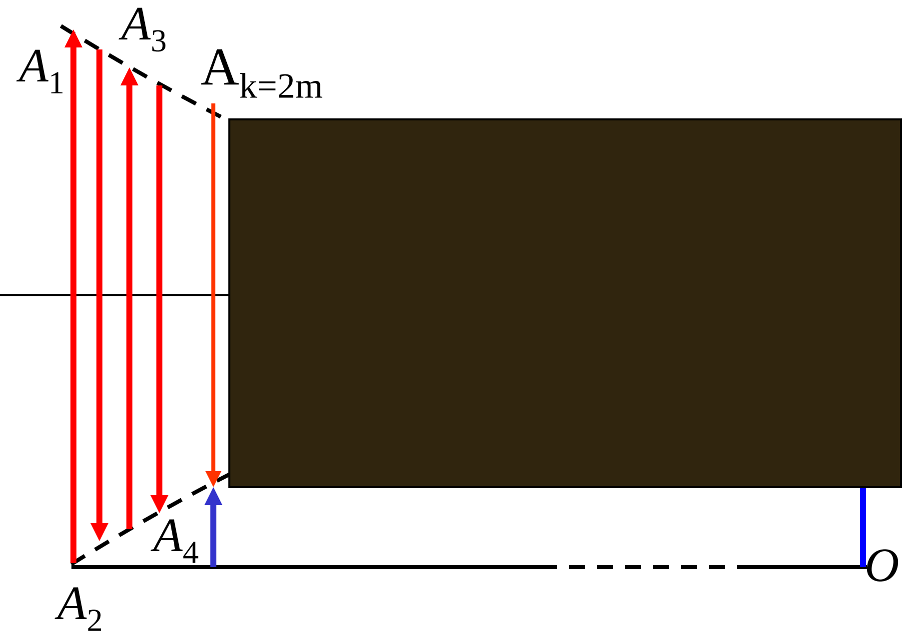
$$A_0\approx\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{R+b}\quad\neq\quad A_0=\frac{a}{R+b}$$

思考：为什么两种方法求解A_0不相等？是否有“过分”的近似？

（2）半波带相干叠加的矢量图解 (*)

圆孔



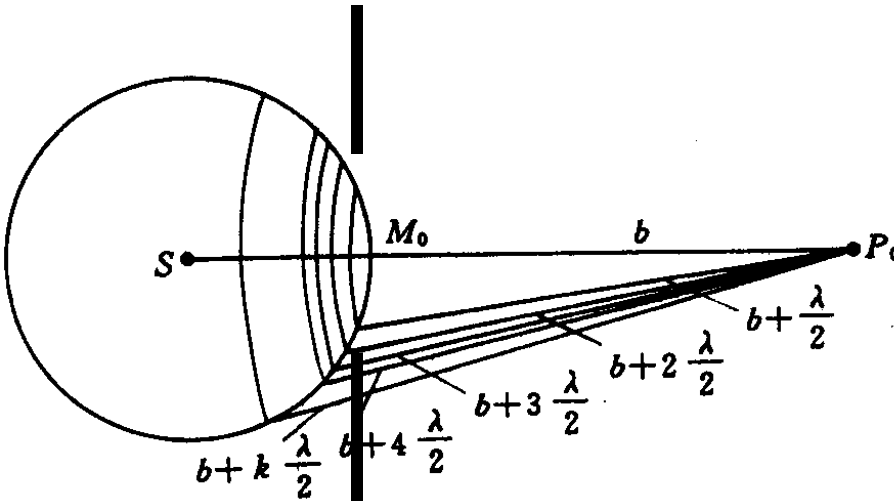


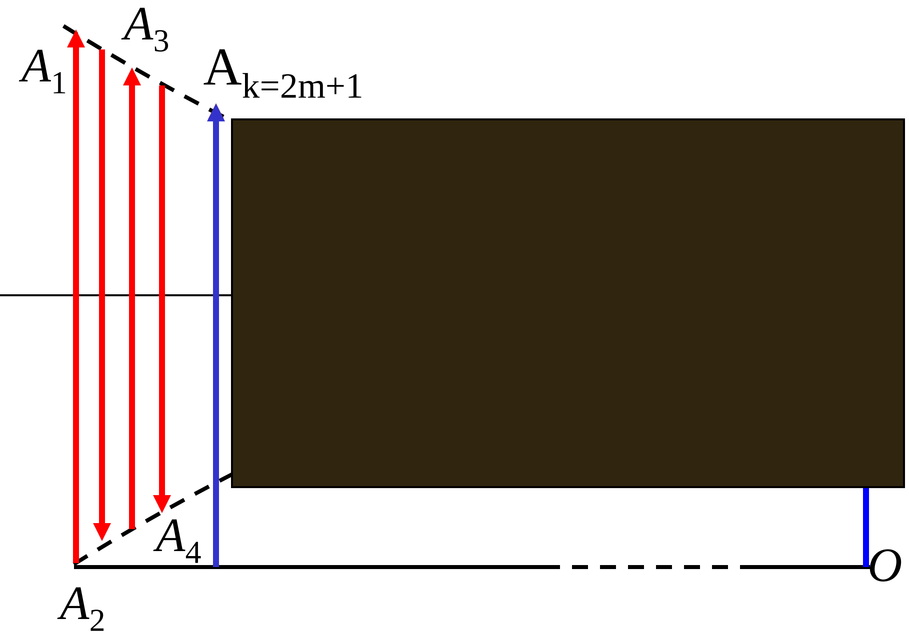
如果k=2m为偶数，

$$\tilde{U}(P_0) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots - A_{2m} \approx 0$$

即轴上衍射光强约等于0，中心为暗斑。

圆孔





如果k=2m+1为奇数，

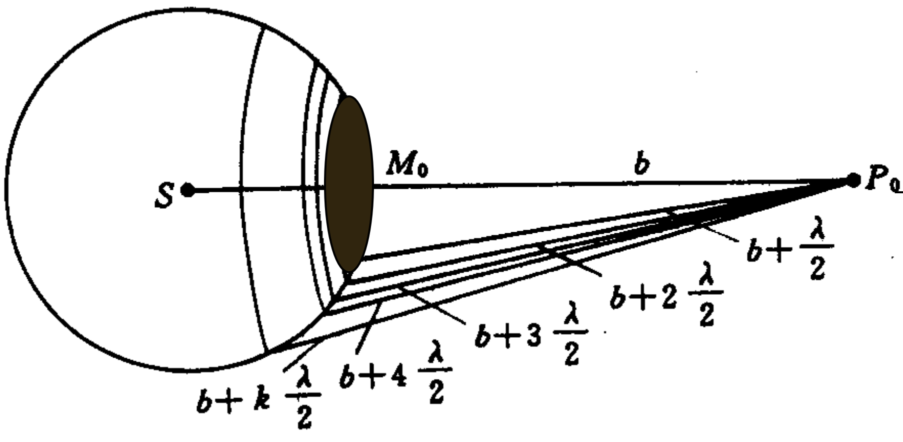
$$\tilde{U}(P_0) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots + A_{2m+1} \approx A_1 = 2A_0$$

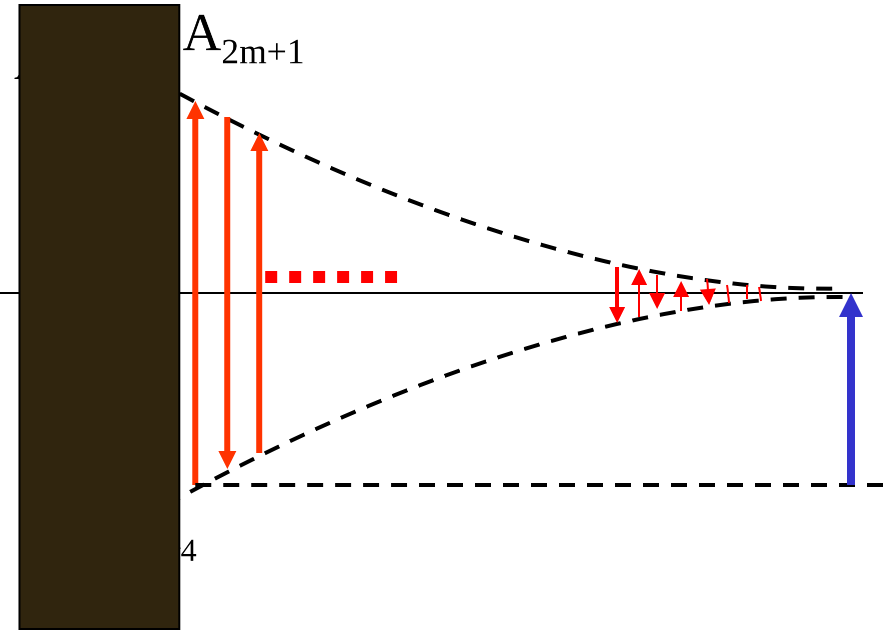
即轴上衍射光振幅约等于$2A_0$，中心为亮斑。

$$I(P_0) = 4A_0^2 = 4I_0$$

中心亮斑光强为自由光强的4倍。

圆屏



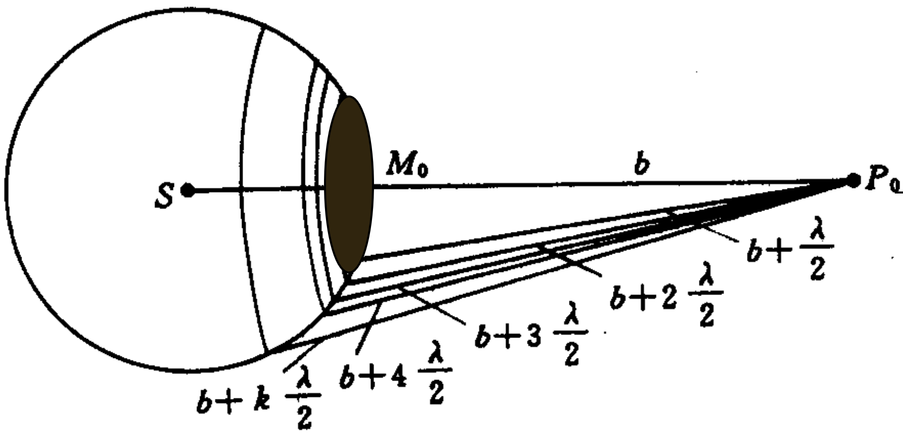


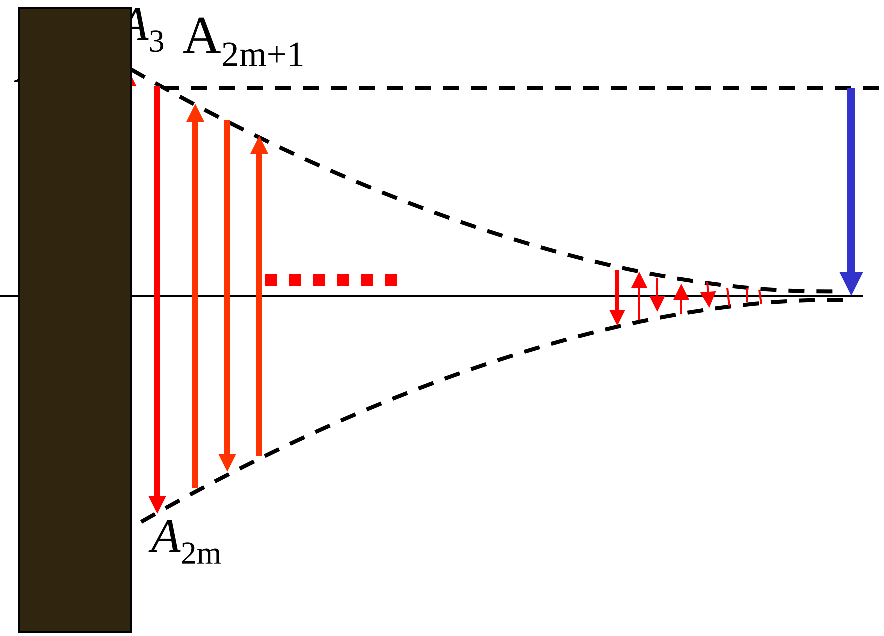
如果k=2m+1为奇数，

$$\tilde{U}(P_0) = A_{2m+1} - A_{2m+2} + A_{2m+3} + \ldots \approx A_0$$

即轴上衍射光振幅约等于A_0，中心为亮斑。

圆屏





如果k=2m为偶数，

$$\tilde{U}(P_0) = -A_{2m} + A_{2m+1} - A_{2m+2} + A_{2m+3} + \ldots \approx -A_0$$

即轴上衍射光强约等于$I_0 = (-A_0)^2$，中心为亮斑。

问题：如果第一个波带挡住一半，是否会出现暗斑？

（3）半波带半径公式 (*)

$$\rho_k = R\sin\alpha_k = R\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha_k};\quad \cos\alpha_k = \frac{R^2+(R+b)^2-(b+k\frac{\lambda}{2})^2}{2R(R+b)}$$

所以：$\rho_k = R\sqrt{1-\left(\frac{R^2+(R+b)^2-(b+k\frac{\lambda}{2})^2}{2R(R+b)}\right)^2}$，因为$k\lambda << R,b$，忽略$(k\lambda)^2$和高阶项，得：

$$\rho_k = \sqrt{k\frac{Rb\lambda}{R+b}} = \sqrt{k}\cdot\rho_1;\qquad \rho_1 = \sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}$$

$$\Delta\rho_k = \rho_{k+1}-\rho_k = \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\rho_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{k}}\rho_1$$

即半波带越来越密集。

$$\boxed{\frac{1}{R}+\frac{1}{b} = k\frac{\lambda}{\rho_k^2}}$$

注：k不一定为整数

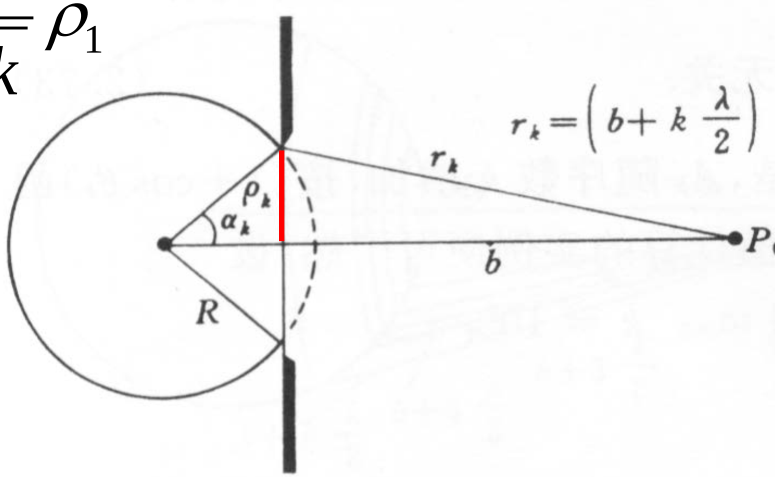
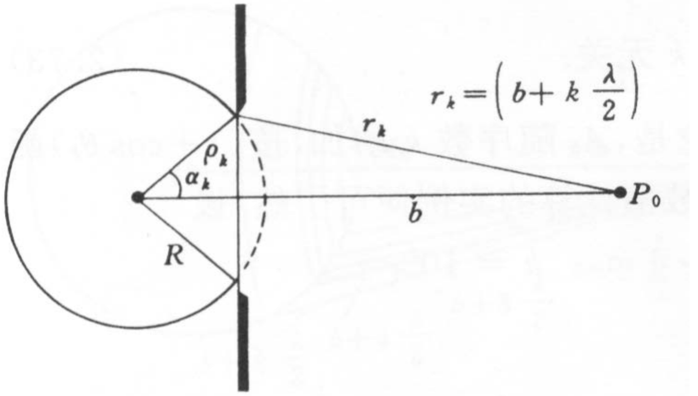


图 2.42　导出半波带半径公式

例题：设$\lambda=600nm$，$\rho=2mm$，$R=1m$，试问该圆孔包含的半波带的最少数目？



解：

$$k=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{\rho^2}{\lambda},$$ 当$b\to\infty$时，k为最少；

$$k_m=\frac{1}{R}\cdot\frac{\rho^2}{\lambda}=\frac{2^2}{1000\times600\times10^{-6}}=6.7;$$ 这个数为非整数，接近奇数7，

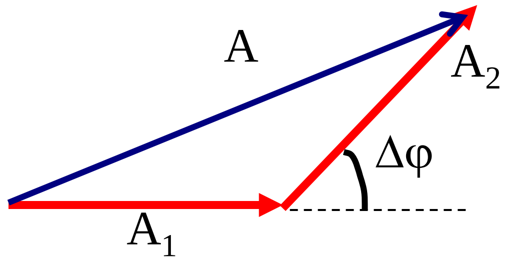
问题1：严格包含7个半波带时的纵向距离为多少？

问题2：k为非整数时，如何求衍射光强？

（1）$$:\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=k\frac{\lambda}{\rho^2}\Rightarrow b=\frac{1}{k\frac{\lambda}{\rho^2}-\frac{1}{R}}=\frac{R\rho^2}{k\lambda R-\rho^2}=20m$$

问题2如何求解？？？

（4）细致的矢量图解—螺旋式曲线 (*)



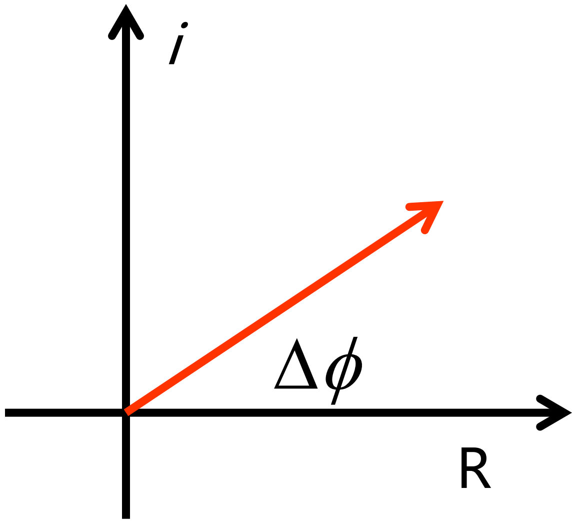
复平面上的矢量叠加

$$\tilde{A} = A_1 e^{i\phi} + A_2 e^{i\phi+\Delta\varphi}$$

$$|A| = \sqrt{\tilde{A}\cdot\tilde{A}^*} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

实数轴：$A_1 + A_2{}^*\cos(\Delta\varphi)$

虚数轴：$A_2{}^*\sin(\Delta\varphi)$



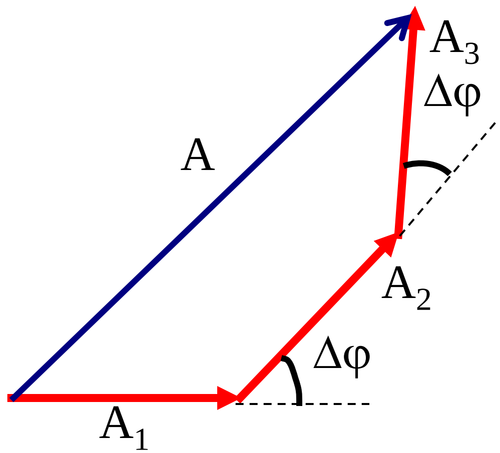
矢量长度：$|A|$

矢量角度余弦： $[A_1+A_2{}^*\cos(\Delta\varphi)]/\ |A|$

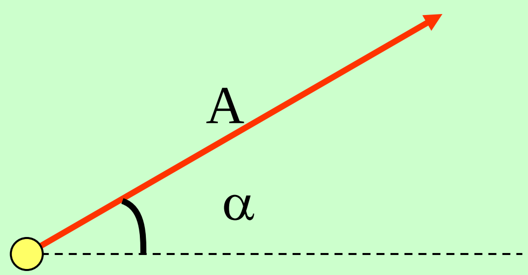
三束光、多光束是两光束矢量叠加方式的扩展

$$\tilde{A} = A_1 e^{i\phi} + A_2 e^{i\phi+\Delta\varphi} + A_3 e^{i\phi+2\Delta\varphi}$$

$$|A| = \sqrt{\tilde{A}\cdot\tilde{A}^*} = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_3^{\,2} + 2\left(A_1A_2 + A_2A_3\right)\cos\Delta\varphi + 2A_1A_3\cos 2\Delta\varphi}$$



$\tilde{A} = Ae^{i\alpha}$ 代表一个矢量：

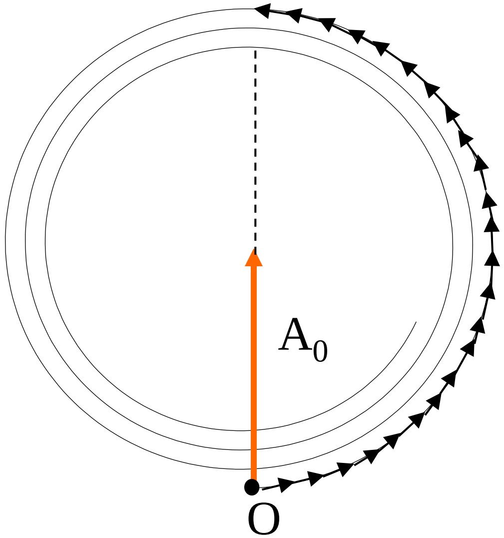


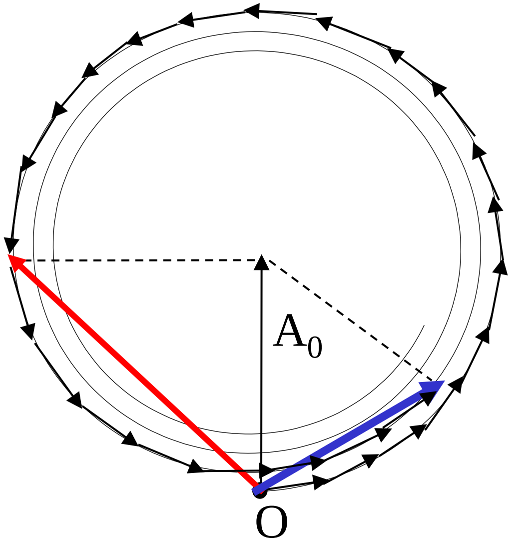
当合成矢量达到π时，认为此矢量代表一个半波带。因此每个半波带可以看做细分成N个子环带的矢量叠加：

$$\Delta\tilde{U}_k = \sum_{n=1}^{N}\Delta\tilde{U}_{kn} = \Delta\tilde{U}_{k1}\cdot\sum_{n=1}^{N} e^{i\pi\frac{n}{N}}$$

$$\Delta\tilde{U}_k = \sum_{m=1}^{N} \Delta\tilde{U}_{km} = \Delta\tilde{U}_{k1} \cdot \sum_{m=1}^{N} e^{i\pi\frac{m}{N}},$$

可等效为N个小矢量的和，相位代表各小矢量的方向，首尾衔接形成半个多边形，当$N \to \infty$时，半个多边形过度成半圆。





求解k为非整数的衍射光强：

$k = 1.5$时，光强？

$$A_{1.5} = \sqrt{2}A_0,\quad \text{光强} I_{1.5} = \left(\sqrt{2}A_0\right)^2 = 2I_0$$

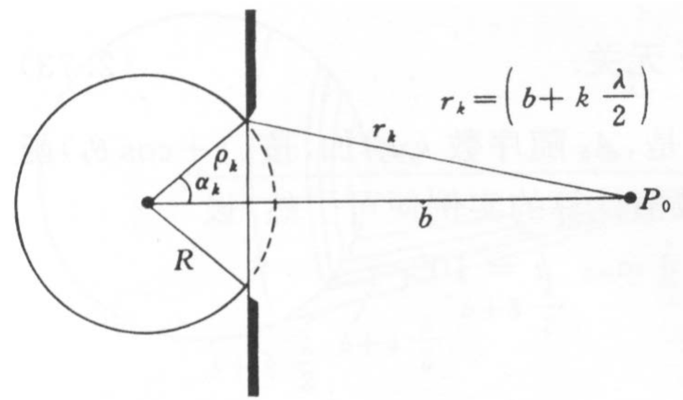
$k = 2.25$时，光强？

$$A_{2.25} = 2A_0 \sin\frac{\pi}{8},\quad \text{光强} I_{2.25} = \left(2A_0 \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 \approx 0.6I_0$$

（5）轴上光强变化 (*)

我们反过来再认识公式：$\rho_k=\sqrt{k\dfrac{Rb\lambda}{R+b}}=\sqrt{k}\cdot\rho_1$，当圆孔半径$\rho$给定时，

它所包含的半波带数目k可求解：



$$k=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{\rho^2}{\lambda}$$

习惯写成：

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=k\frac{\lambda}{\rho^2}$$

说明，当屏幕由近至远，b增加时，k数减少，时为偶数，时为奇数，也就是轴上光强时暗时亮。

当 $\dfrac{\rho^2}{\lambda}\cdot\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{b}\right)=2k+1$ 时，$I(b)=4I_0$，为衍射亮斑。

当 $\dfrac{\rho^2}{\lambda}\cdot\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{b}\right)=2k$ 时，$I(b)=0$，为衍射暗斑。

二、波带片 (*)
(Zone plate)

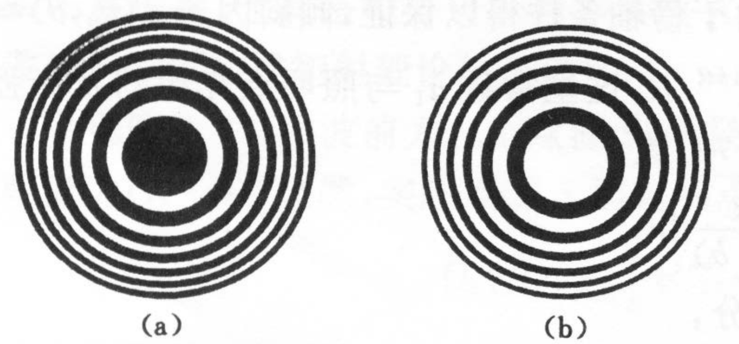
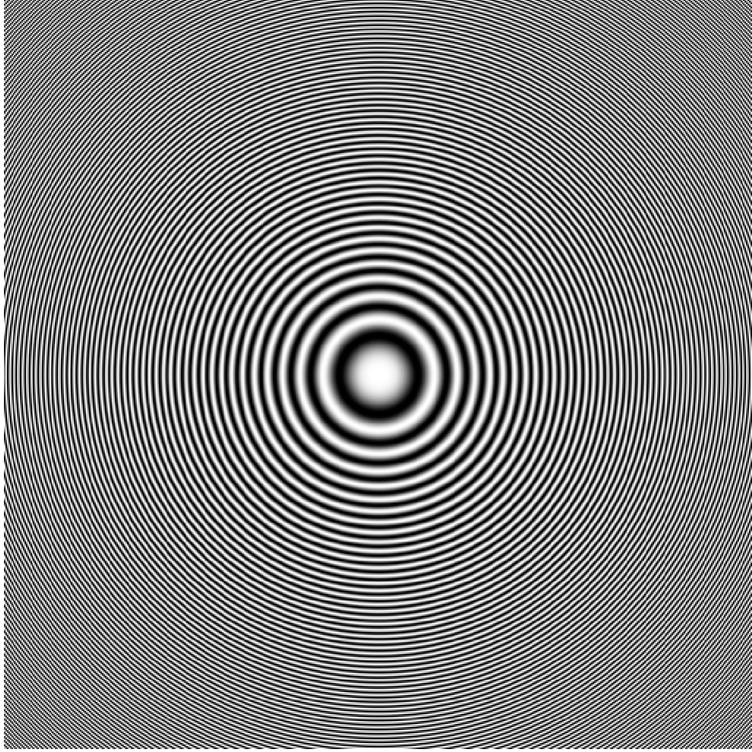
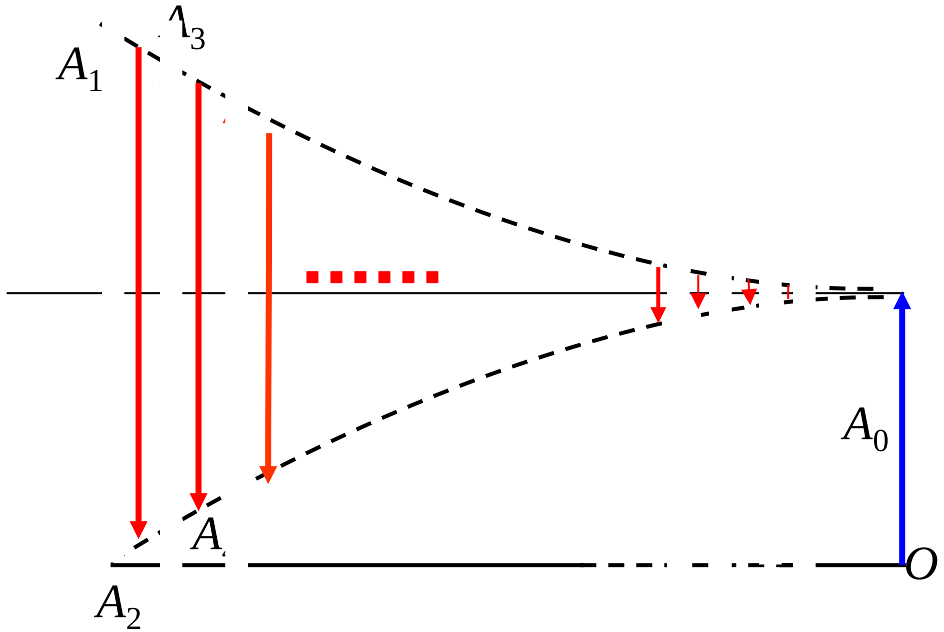
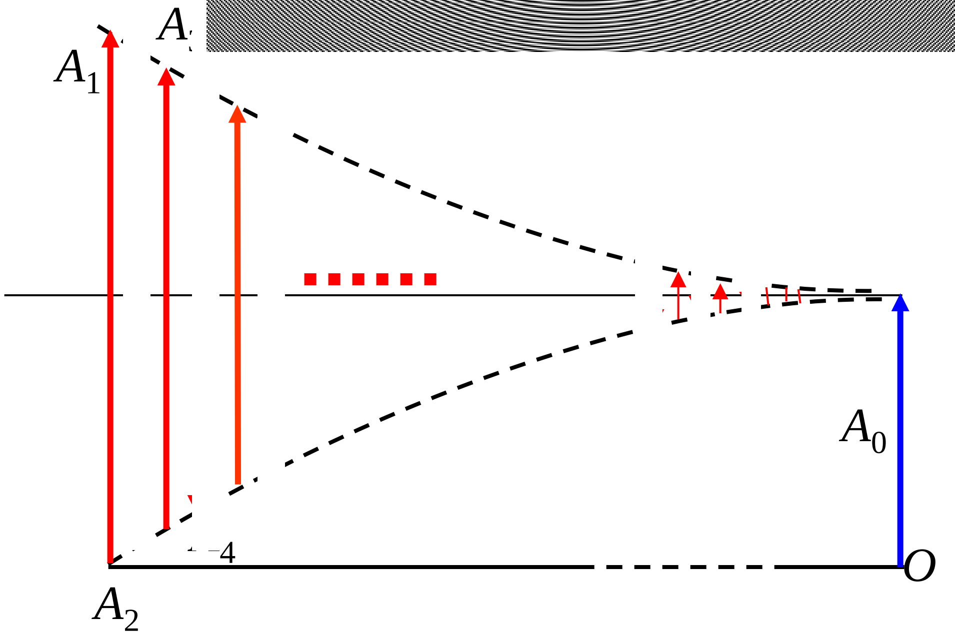


图 2.45 菲涅耳波带片.(a) 开放偶数半波带,(b) 开放奇数半波带





$A(P_0)=A_2+A_4+A_6+A_8+\ldots$



$A(P_0)=A_1+A_3+A_5+A_7+\ldots$

菲涅耳波带片的衍射场—实焦点和虚焦点

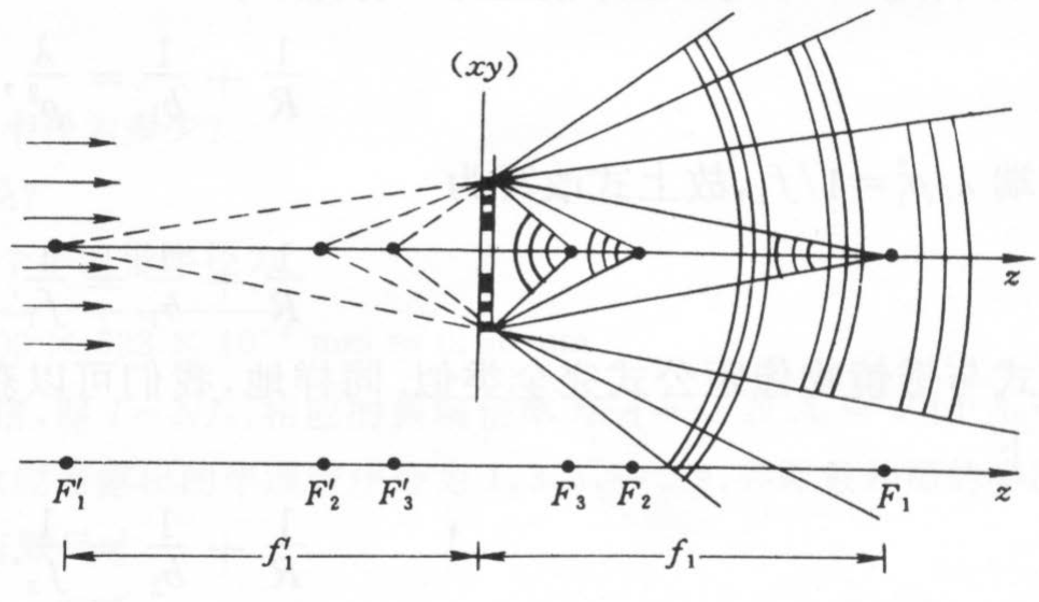


图 2.46 菲涅耳波带片衍射产生实焦点和虚焦点

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_k^2} \xrightarrow{R\to\infty} b=\frac{\rho_k^2}{k\lambda}$$

波带片制作时，使得中间圆孔恰为第一个半波带 $f_1 = b = \dfrac{\rho_1^2}{\lambda}$ →主焦距！

如何理解其它焦点？

波带片衍射成像—类似透镜成像公式

菲涅耳波带片有若干**实焦点**和**虚焦点**，它既具有汇聚透镜的功能，又具有发散透镜的功能，当物点发射球面波照明波带片时，可以产生若干实象和虚象，成像公式类似与透镜成像：

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_k},\quad 其中 k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3\ldots \qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_1^{\ 2}}\xrightarrow{R\to\infty} f_k=\frac{\rho_1^{\ 2}}{k\lambda}$$

例题：对于一张经典菲涅耳波带片的制作，提出两点要求:(1)对λ=633nm的光，其第一焦距f_1=400mm，（2）主焦点的光强为自由光强的10^4倍。

问：(1)待制作的波带片的第一个半波带的半径为多少？

(2)这张波带片的至少应该有多大的有效半径？

解（1）根据第一焦距公式，$f_1=b=\frac{\rho_1^{\ 2}}{\lambda}$ 得：

$$\rho_1=\sqrt{f_1\lambda}=\sqrt{400\times633\times10^{-6}}\approx0.50mm$$

（2）焦点光强I为自由光强I_0的N倍，即$I=NI_0$，相应的振幅$A=\sqrt{N}A_0$，此题：$A=\sqrt{N}A_0=\sqrt{10^4}A_0=100A_0=50A_1$，有一半的半波带被遮掩，如果漏出奇数半波带，1，3，5...99,如果漏出偶数，2，4，6...100，所以最外围的半波带的序号为99或100，它决定了波带片的有效尺度：

$$\rho_k=\sqrt{k}\rho_1,\quad \rho_{100}=\sqrt{100}\rho_1=5.0mm,\quad \rho_{99}=\sqrt{99}\rho_1\approx5.0mm$$

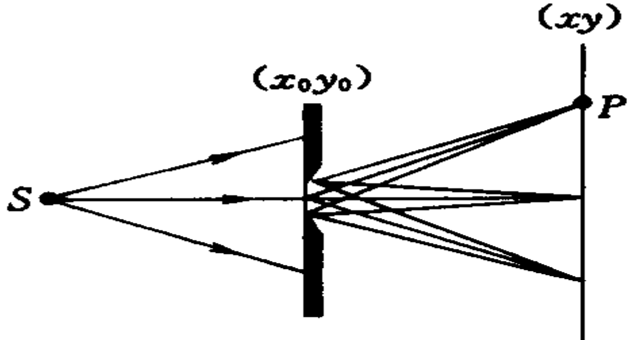
作业：

1、在菲涅耳圆孔衍射实验中，点光源距离圆孔1.5m，接受屏距离圆孔6.0m，圆孔的半径ρ从0.5mm开始逐渐展宽，设波长为0.63μm， 求：
（1）最先两次出现中心亮斑时圆孔的半径ρ_1和ρ_2
（2）最先两次出现中心暗斑时圆孔的半径ρ'_1和ρ'_2

2、若一个菲涅耳波带片前5个偶数半波带被遮挡，其余地方都开放，求衍射场中心强调与自由传播时之比。

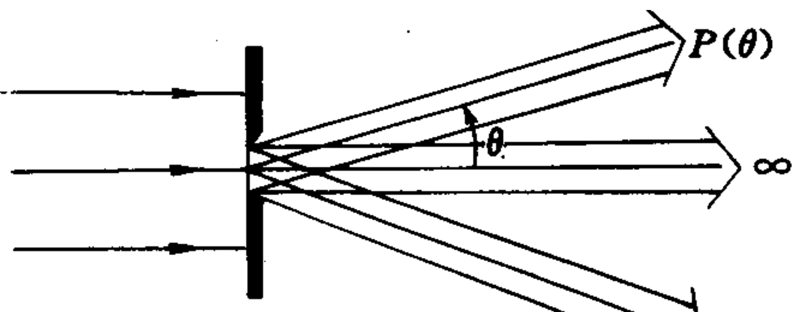
3、菲涅耳波带片第一个半波带的半径为5mm。
（1）用波长1.06微米的单色平行光照明，求主焦距；
（2）如果要求主焦距为25厘米，需将此波带片缩小多少倍。

按光源、衍射屏和接收屏三者之间的距离关系将衍射分为<u>两大类</u>：



(a)

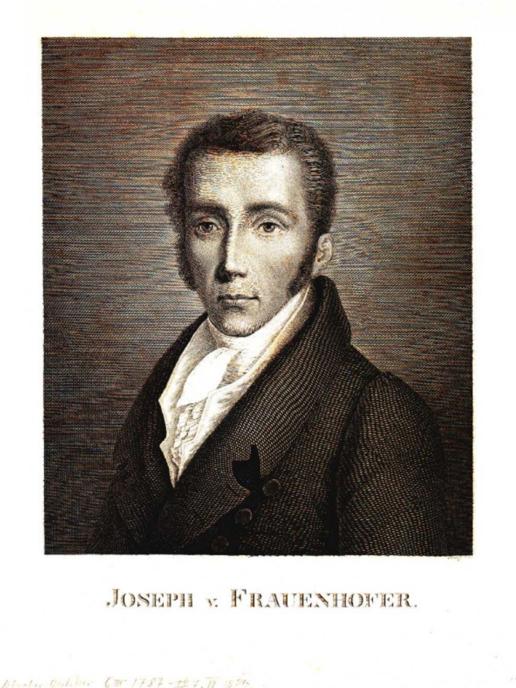
菲涅耳衍射：光源—衍射屏—接收屏之间距离为有限远。



(b)

夫琅禾费衍射：光源—衍射屏—接收屏之间距离为无限远。

第三节、 夫琅禾费衍射 (*)

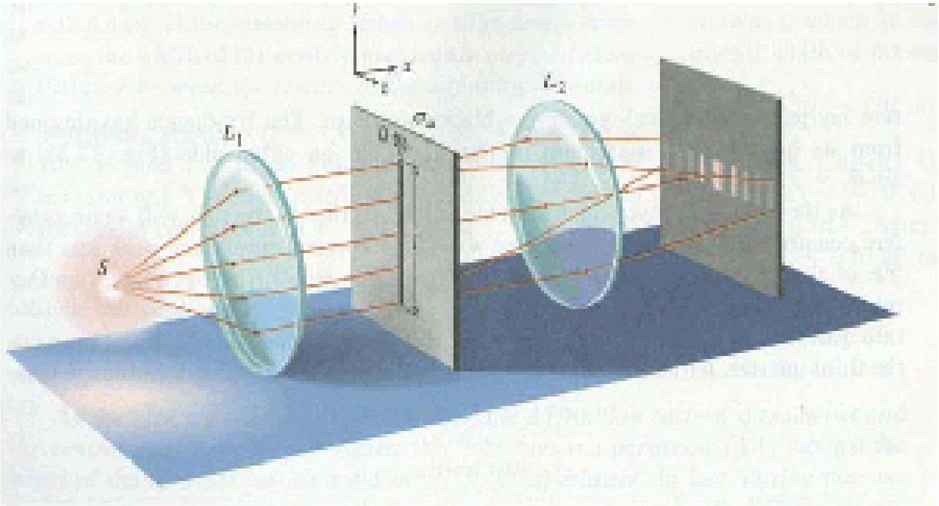


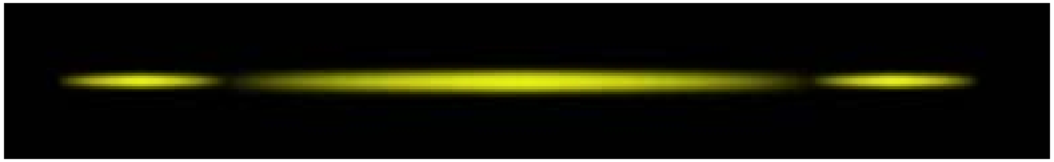
夫琅禾费（Joseph von Fraunhofer 1787—1826)

夫琅禾费是**德国**物理学家。1787年3月6日生于斯特劳宾，父亲是玻璃工匠，夫琅禾费幼年当学徒，后来自学了数学和光学。1806年开始在光学作坊当光学机工，1818年任经理，1823年担任慕尼黑科学院物理陈列馆馆长和慕尼黑大学教授，慕尼黑科学院院士。夫琅禾费自学成才，一生勤奋刻苦，终身未婚，1826年6月7日因肺结核在慕尼黑逝世。

夫琅禾费集工艺家和理论家的才干于一身，把理论与丰富的实践经验结合起来，对光学和光谱学作出了重要贡献。1814年他用自己改进的分光系统，**发现并研究了太阳光谱中的暗线**（现称为夫琅禾费谱线），利用衍射原理测出了它们的波长。他**设计和制造了消色差透镜**，首创**用牛顿环方法检查光学表面**加工精度及透镜形状，对应用光学的发展起了重要的影响。他所制造的**大型折射望远镜**等光学仪器负有盛名。他发表了**平行光单缝及多缝衍射的研究成果**（后人称之为夫琅禾费衍射），做了光谱分辨率的实验，第一个**定量地研究了衍射光栅**，用其测量了光的波长，以后又给出了光栅方程。

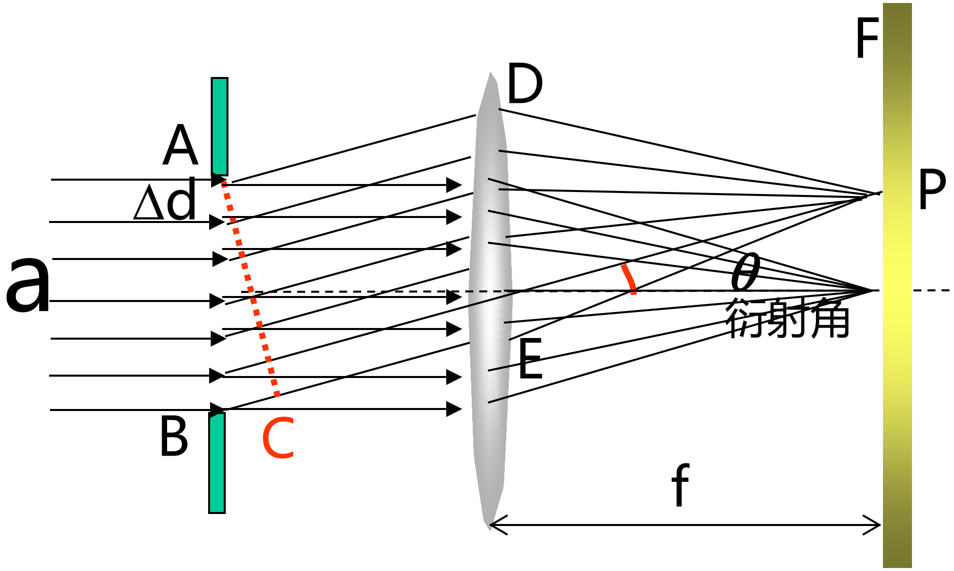
♫ 实验装置和现象

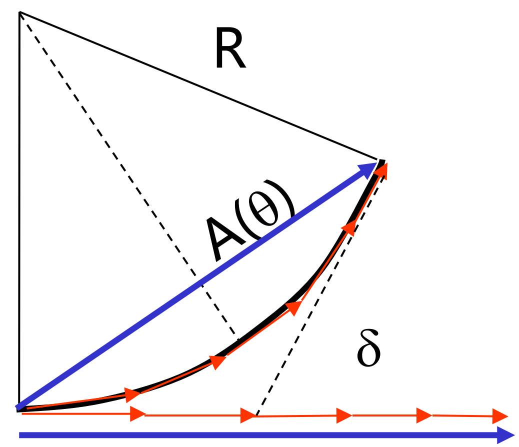




实验装置如上图，在透镜的后焦面接受夫琅禾费衍射场，中心为亮斑，并且亮度大于两侧的亮条纹，中心亮条纹宽度是两侧的二倍，亮斑的宽度随狭缝的变窄而展宽。

♫ 矢量图解法—衍射强度



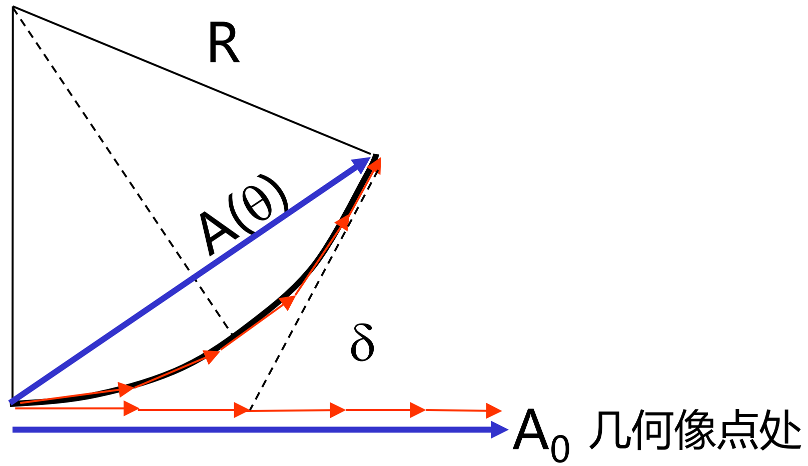


把狭缝AB分成N等份，光程差$\overline{ADP}=\overline{CEP}$，所以由$A$到$B$，每点附加的光程差：$\Delta l=\Delta d\sin\theta$；所以$P$点的复振幅可以写成：

$$\tilde{U}(\theta)=\sum_{i=0}^{N}\Delta\tilde{U}_i(\theta)=\Delta Ae^{ikL_0}\left(1+e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\sin\theta}+e^{i\frac{2\pi}{\lambda}2\Delta d\sin\theta}+e^{i\frac{2\pi}{\lambda}3\Delta d\sin\theta}+\ldots+e^{i\frac{2\pi}{\lambda}N\Delta d\sin\theta}\right)$$

相当于一系列小矢量首尾衔接的和，矢量方向依次相差$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\sin\theta$的角度。

$$\delta=N\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta;\quad R=\frac{A_0}{\delta}=\frac{A_0}{\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta}$$



$$\delta = N\frac{2\pi}{\lambda}\Delta d\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta; \quad R = \frac{A_0}{\delta} = \frac{A_0}{\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta}$$

$$A(\theta) = 2R\sin\frac{\delta}{2} = \frac{A_0}{\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta\right);$$ 引进宗量$\alpha = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$，得：

$$A(\theta) = A_0\frac{\sin(\alpha)}{\alpha};$$

光强：$I(\theta) = \left(A(\theta)\right)^2 = I_0\left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)^2$

衍射图样的主要特点：

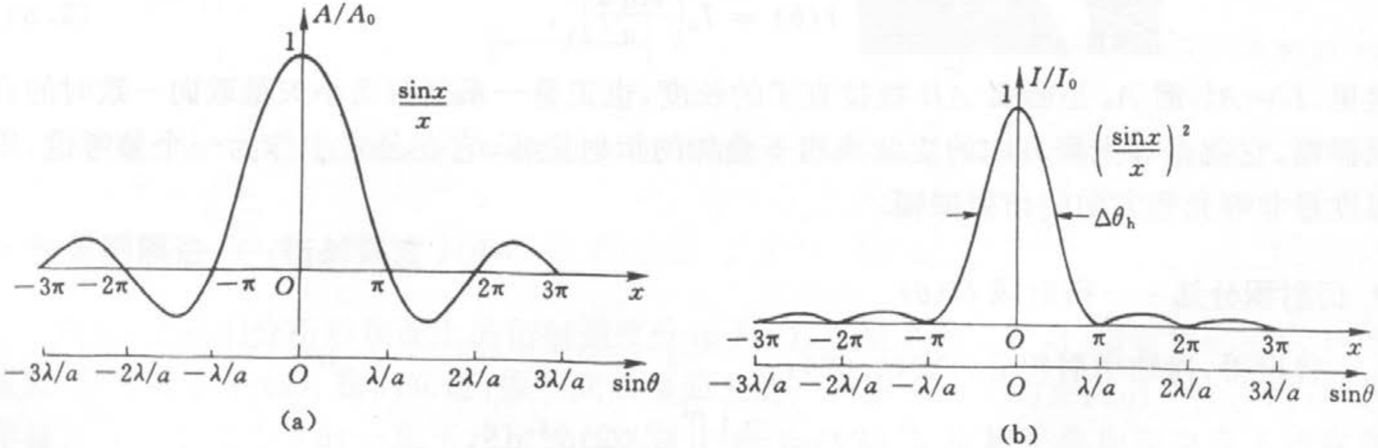


图 2.50　单缝夫琅禾费衍射.(a)振幅分布,(b)强度分布

$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right),\quad 其中\tilde{c}=\frac{-i}{\lambda f}Aabe^{ikL_0},\quad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$I(\theta)=\tilde{U}(\theta)\tilde{U}^*(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

亦可：$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{\lambda r_0}\iint_{(\Sigma)}\tilde{U}_0(Q)e^{ikr}dS$ 傍轴衍射积分公式

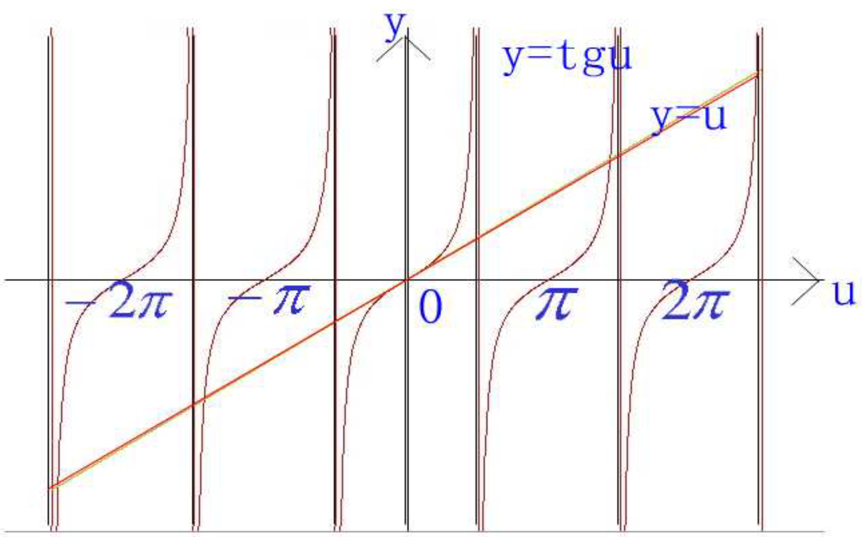
(1) 最大值（I_0）在几何光学像点，$\theta=0$

(2) 零点的位置；

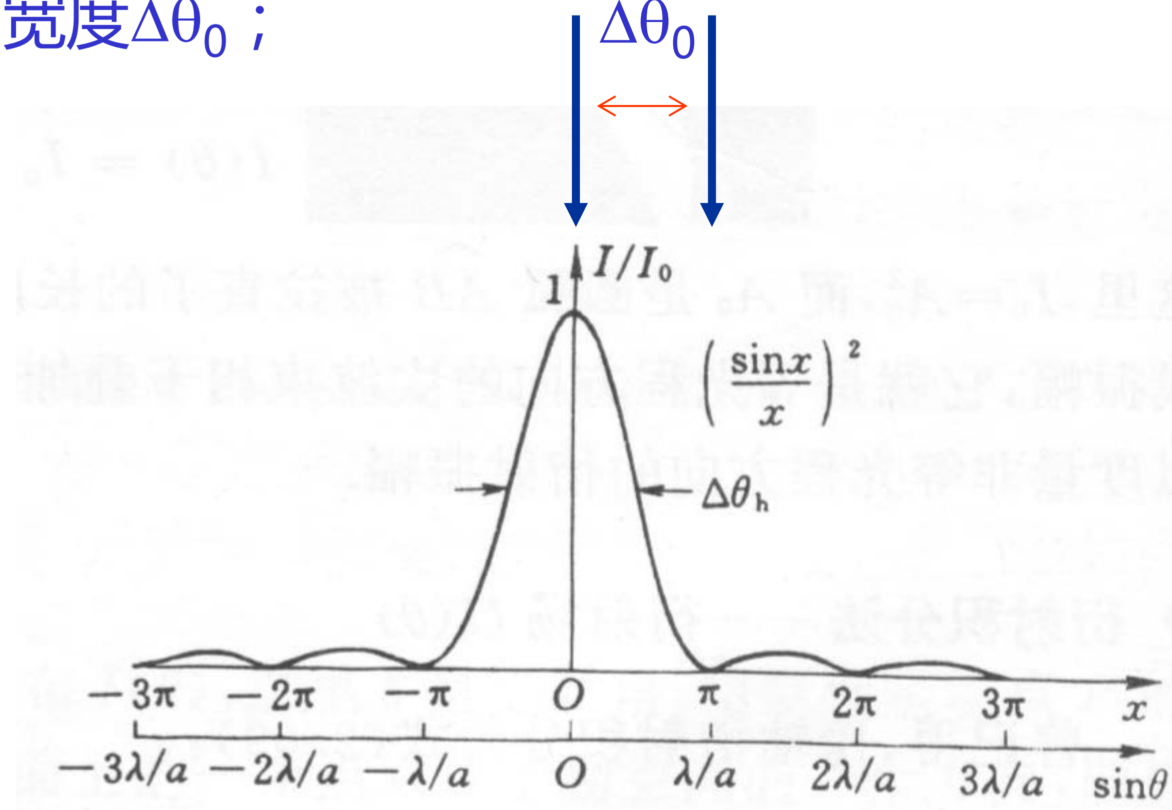
$$\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta = k\pi，即a\sin\theta = k\lambda，k = \pm 1, \pm 2\ldots；衍射强度I(\theta) = 0,出现暗纹。$$

(3) 次极大的位置

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = \frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2} = 0，即\alpha = \tan\alpha时出现次极值。$$



(4) 半角宽度$\Delta\theta_0$；



零级衍射峰值与其相邻的暗点之间的夹角称为衍射的半角宽度。

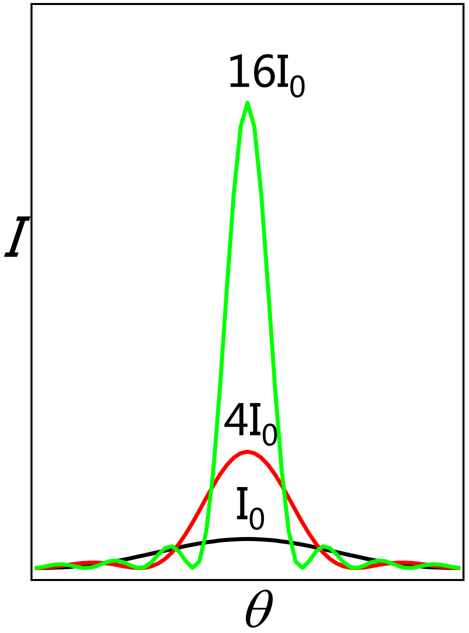
$$\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta_1=\pi\Rightarrow\sin\theta_1=\frac{\lambda}{a}\Rightarrow\theta_1\approx\frac{\lambda}{a},$$

$$\Delta\theta_0=\theta_1-0=\theta_1\approx\frac{\lambda}{a},\quad \text{即}\Delta\theta_0\cdot a\approx\lambda$$

(5) 单缝宽度对衍射图样的影响

$$\Delta\theta_0 \cdot a \approx \lambda$$

$$A_0 \propto S, \quad I_0 = A_0^{\ 2} \propto S^2$$

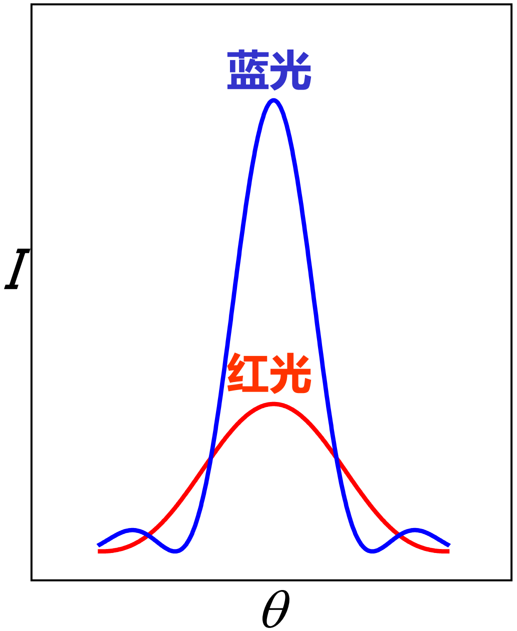


(6) 波长的影响

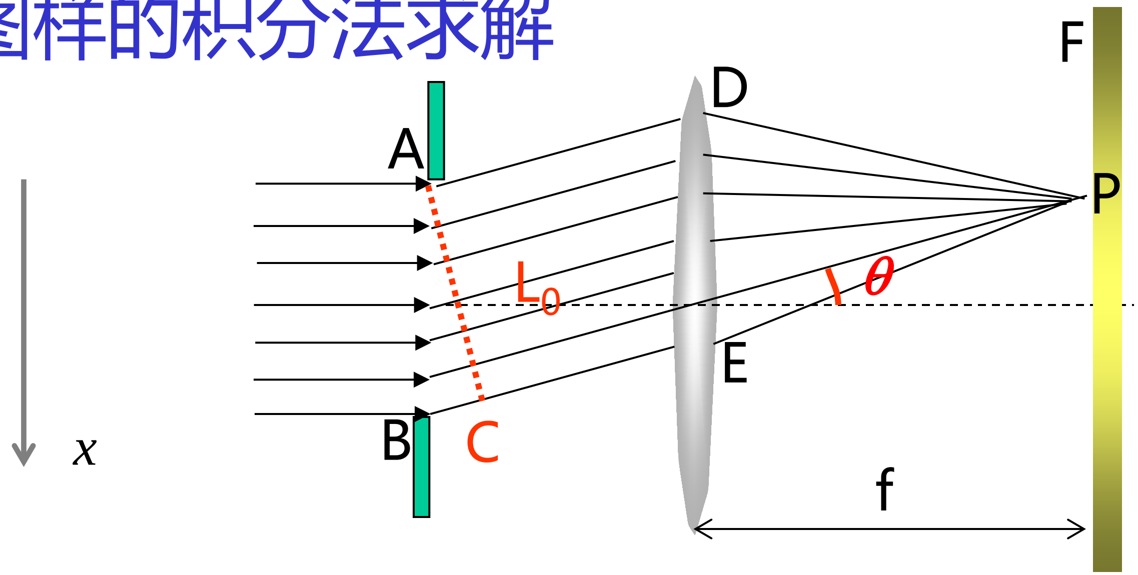
$\Delta\theta_0 \approx \dfrac{\lambda}{a}$，所以长波长的光衍射半角宽度大。

根据基尔霍夫积分公式：

$I \propto \dfrac{1}{\lambda^2}$，所以波长短的光衍射峰值大。



衍射图样的积分法求解



$$\tilde{U}(\theta)=\frac{-i}{\lambda}\iint_{\Sigma_0}\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta)}{2}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}dS$$

$dS=bdx_0$, $\tilde{U}_0(Q)=A$，这里b为常数，

在傍轴条件下，$f(\theta_0,\theta)\approx 1$，振幅系数$\frac{1}{r}\rightarrow\frac{1}{r_0}\xrightarrow{\text{经透镜变换}}\frac{1}{f}$

相因子e^{ikr}, $kr=kL=-kx_0\sin\theta+kL_0$

$$\tilde{U}(\theta)=\frac{-i}{\lambda f}Abe^{ikL_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-ikx_0\sin\theta}dx_0=\frac{-i}{\lambda f}Aabe^{ikL_0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\right)$$

$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right),\quad \text{其中}\tilde{c}=\frac{-i}{\lambda f}Aabe^{ikL_0},\quad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$I(\theta)=\tilde{U}(\theta)\tilde{U}^*(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$ 和矢量图解法的结果一致

回想：光源的空间相干性

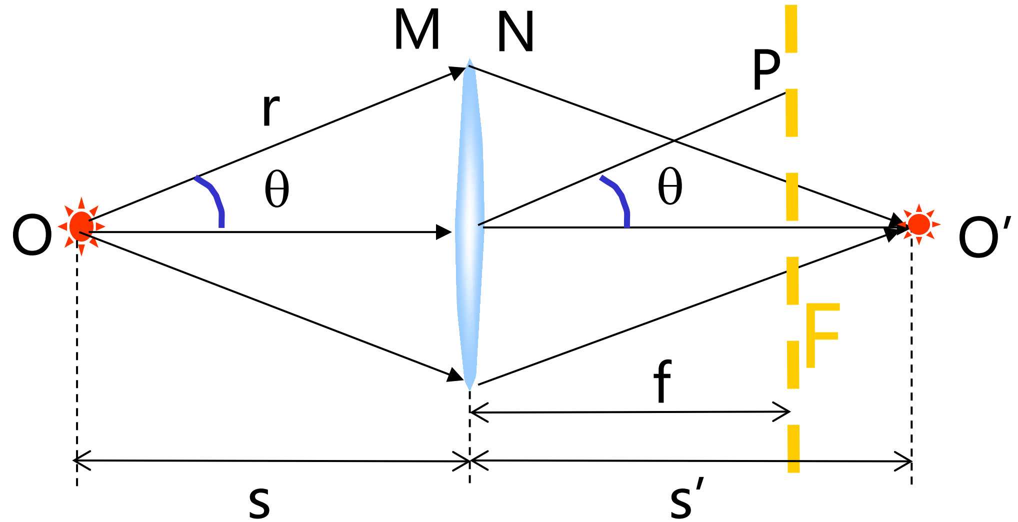
$$\gamma=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\left|\frac{\sin u}{u}\right|,\quad \text{其中}u=\pi\frac{db}{\lambda R}$$

b=a, R=f

衬比度降为零的点u= π, 则d/f= $\theta=\lambda$/a

即，两小孔对光源的张角为光源的衍射<u>半角宽度</u>。

$$*\text{说明}\ \frac{1}{r_0}\xrightarrow{\text{经透镜变换}}\frac{1}{f}$$



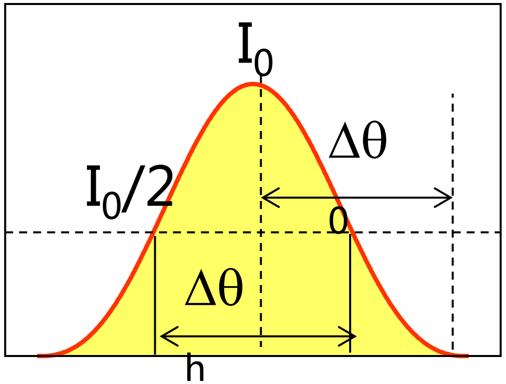
单缝—透镜—后焦面之间是非自由空间，次波源发出的发散球面波经透镜变成汇聚球面波，此时基尔霍夫积分公式中的r已经失去了明确的意义。

阅读：P84-85，现代光学基础，钟锡华

例题：在单缝夫琅禾费衍射实验中，照明光波长为600nm，透镜焦距为200mm，单缝宽度为15μm,求零级衍射斑的半角宽度和屏幕上显示的零级斑的几何宽度？

解：

半角宽度：$\Delta\theta_0 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{600\times10^{-3}}{15} = 0.04rad$



$\Delta\theta_h \approx \Delta\theta_0$，所以几何长度为：

$l \approx f\Delta\theta_0 = 200\times0.04 = 8mm$

作业

1，在夫琅禾费单缝衍射实验中，以钠黄光（589nm）为光源，平行光垂直入射到单缝上。

（1）若缝宽为0.1mm，问第一级极小出现在多大的角度上？

（2）若要使第一级极小出现在0.5度方向上，则缝宽应该多大？

2，试用巴比涅原理证明：互补的衍射屏产生的夫琅禾费衍射图样相同。

3，在夫琅禾费单缝衍射实验中，用白光作光源，问起码可以看到第几级衍射条纹？由于人眼对可见光紫端和红端的灵敏度很低，计算时把光源的波长范围取作500-600nm。