《算法设计与分析》

第三章 分治法

马丙鹏

2024年9月30日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第三章 分治法

- 3.1 一般方法
- 3.2 二分检索
- 3.3 找最大和最小元素
- 3.4 归并排序
- 3.5 快速排序
- 3.6 选择问题
- 3.7 最接近点对问题
- 3.8 斯特拉森矩阵乘法
- 3.9 大整数乘法

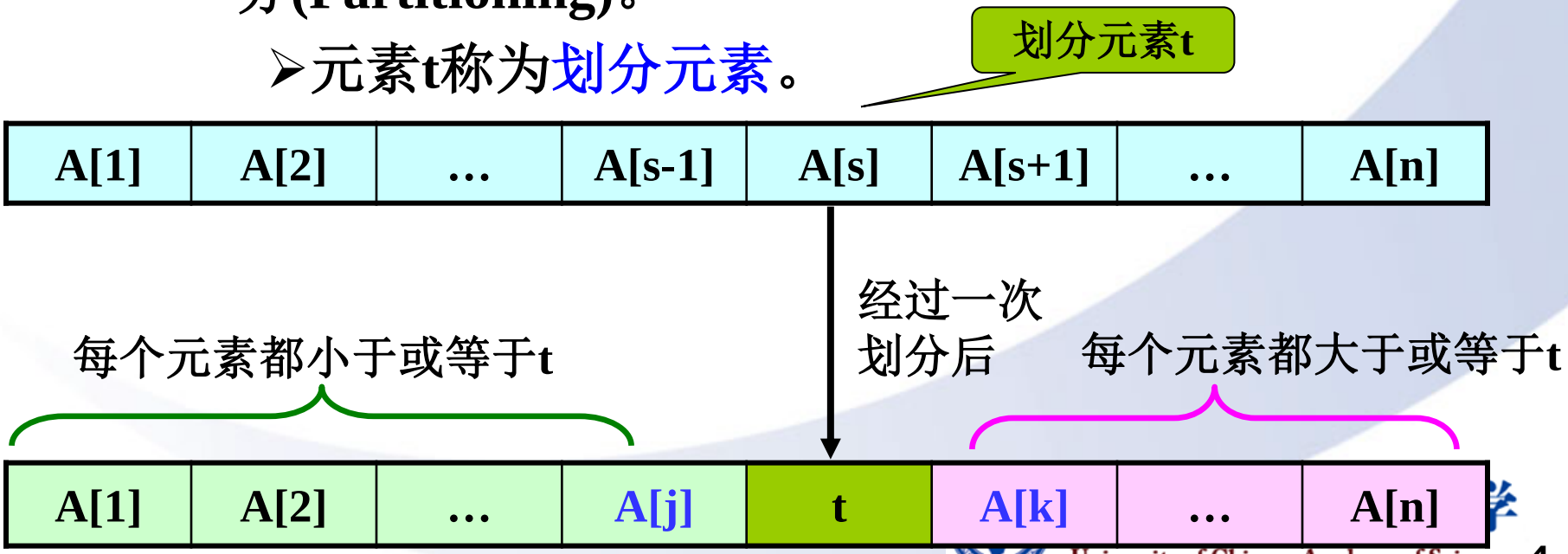
3.5 快速排序

- 概述
  - 任何一个基于比较来确定两个元素相对位置的排序算法需要Ω(nlogn)计算时间。
  - 如果我们能设计一个需要O(nlogn)时间的排序算法，则在渐近的意义上，这个排序算法就是最优的。
  - 许多排序算法都是追求这个目标。
- 快速排序的定义
  - 快速排序是一种基于划分的排序方法；
  - 通过反复地对待排序集合进行划分达到排序目的的排序算法。
  - 快速排序在平均情况下需要O(nlogn)时间。

3.5 快速排序

■ 快速排序的定义

- □划分：选取待排序集合A中的某个元素t，按照与t的大小关系重新整理A中元素，使得整理后的序列中所有在t以前出现的元素均小于等于t，而所有出现在t以后的元素均大于等于t。这一元素的整理过程称为划分(Partitioning)。
  - ➢元素t称为划分元素。



3.5 快速排序

- 算法描述
  - //将A(m), A(m+1), …,A(p-1)中的元素按如下方式重新排列：如果最初t=A(m)，则在重排完成之后，对于m和p-1之间的某个q，有A(q)=t,并使得对于m≤k<q，有A(k)≤t，而对于q<k<p,有A(k)≥t//
  - //退出时，p置为划分元素所在的下标位置//
  - 注：算法对集合A(m:p-1)进行划分。并使用待划分区间的第一个元素A(m)作为划分元素
  - A(p)不在划分区间内，但被定义，且A(p)≥A(m)，用于限界

算法3.2 用A(m)划分集合A(m:p-1)

```
procedure PARTITION(m, p)
    integer m, p, i;   global A(m:p-1)
    v←A(m); i←m //A(m)是划分元素//
    loop
      loop i←i+1  until A(i)≥v repeat     // i由左向右移//
      loop p←p-1 until A(p)≤v repeat   //p由右向左移//
      if i<p then
         call INTERCHANGE(A(i), A(p))
       else exit
      endif
    repeat
    A(m)←A(p);
    A(p)←v //划分元素在位置p//
end PARTITION
```

3.5 快速排序

■ 实例

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	i	p
A:	65	70	75	80	85	60	55	50	45	+∞	2	9
A:	65	45	75	80	85	60	55	50	70	+∞	3	8
A:	65	45	50	80	85	60	55	75	70	+∞	4	7
A:	65	45	50	55	85	60	80	75	70	+∞	5	6
交换A:	65	45	50	55	60	85	80	75	70	+∞	6	5
划分 →	|	.....	...	.....	|							
元素A:	60	45	50	55	65	85	80	75	70	+∞		

3.5 快速排序

- 快速排序
  - 经过一次“划分”后，实现了对集合元素的调整：其中一个子集合的所有元素均小于等于另外一个子集合的所有元素。
  - 按同样的策略对两个子集合进行排序处理。
  - 当子集合排序完毕后，整个集合的排序也完成了。
  - 这一过程避免了子集合的归并操作。
  - 通过反复使用划分过程**PARTITION**实现对集合元素排序的算法称为快速排序。

3.5 快速排序

■ 3.5 快速排序

算法3.13 快速排序

```
procedure QUICKSORT(p, q)
    //将数组A(1:n)中的元素A(p),…A(q)按递增的方式排序。
     A(n+1)有定义，且假定A(n+1)←+∞//
    integer p, q;  global n, A(1: n);
    if p<q then
      j←q+1    //进入时，A(j)定义了划分区间[p, q]的上界，初次调用时j=n+1
      call PARTITION(p, j) //出口时，j带出此次划分后划分元素所在的坐标位置/
      call QUICKSORT(p, j-1)  //前一子集合上递归调用
      call QUICKSORT(j+1, q) //后一子集合上递归调用
    endif
end QUICKSORT
```

3.5 快速排序

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	[65	70	75	80	85	60	55	50	45]
2	[60	45	50	55]	65	[85	80	75	70]
3	[55	45	50]	60	65	[85	80	75	70]
4	[50	45]	55	60	65	[85	80	75	70]
5	[45]	50	55	60	65	[85	80	75	70]
6	45	50	55	60	65	[85	80	75	70]
7	45	50	55	60	65	[70	80	75]	85
8	45	50	55	60	65	70	[80	75]	85
9	45	50	55	60	65	70	[75]	80	85
10	45	50	55	60	65	70	75	80	85

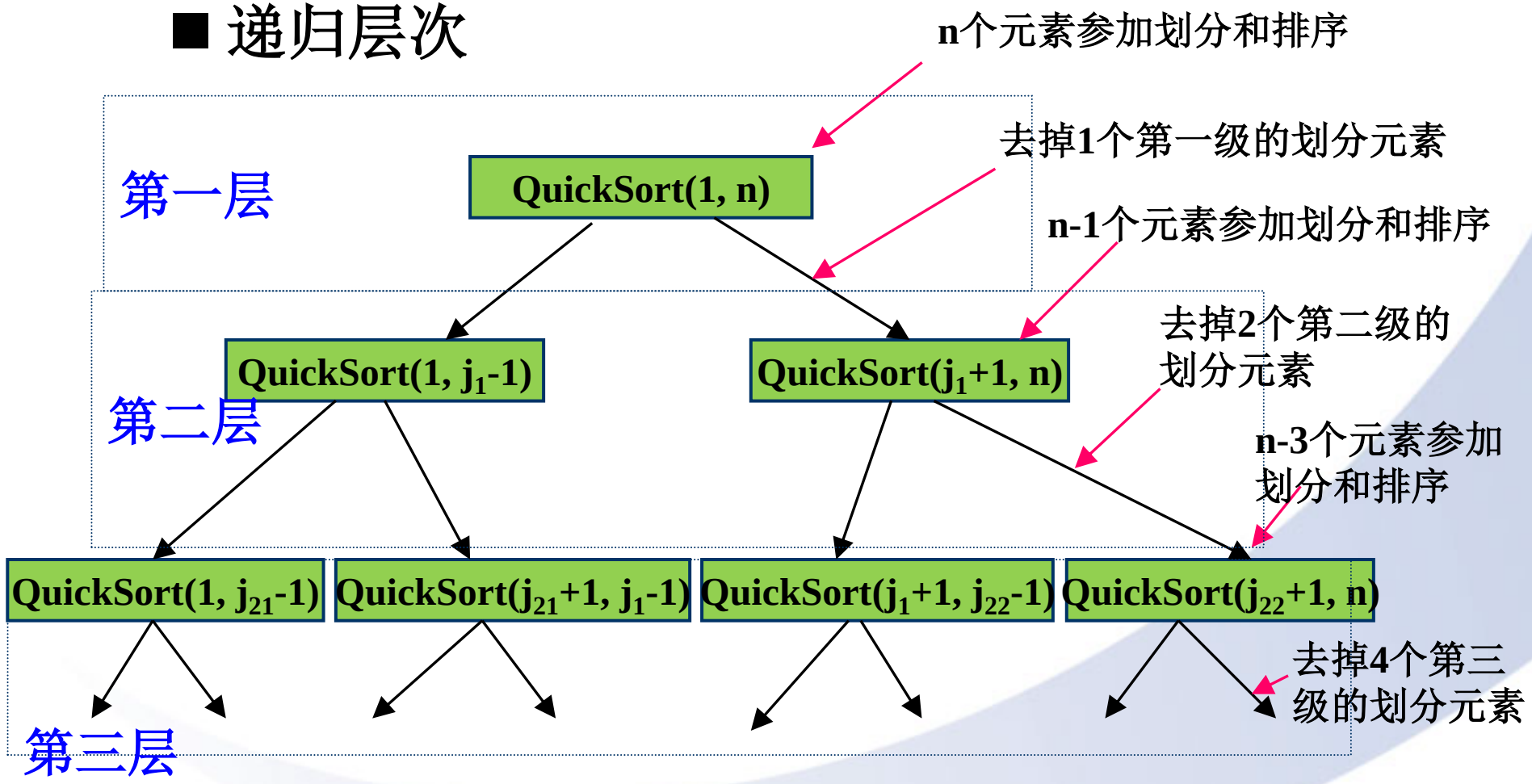
3.5 快速排序

■ 快速排序分析

- □统计的对象：元素的比较次数记为：C(n)
- □两点假设
  - ➢参加排序的n个元素各不相同
  - ➢PARTITION中的划分元素v是随机选取的(针对平均情况的分析)
- □随机选取划分元素：
  - ➢在划分区间[m, p]随机生成某一坐标：i←RANDOM(m, p-1)；调换A(m)与A(i):v←A(i); A(i) ←A(m); i←m
  - ➢作用：将随机指定的划分元素的值依旧调换到A(m)位置。之后，算法主体不变，仍从A(m)开始执行划分操作

3.5 快速排序

■ 递归层次


n个元素参加划分和排序
去掉1个第一级的划分元素
n-1个元素参加划分和排序
去掉2个第二级的划分元素
n-3个元素参加划分和排序
去掉4个第三级的划分元素
第一层
第二层
第三层
QuickSort(1, n)
QuickSort(1, j1-1)
QuickSort(j1+1, n)
QuickSort(1, j21-1)
QuickSort(j21+1, j1-1)
QuickSort(j1+1, j22-1)
QuickSort(j22+1, n)

3.5 快速排序

- 递归层次
  - 设在任一级递归调用上，调用PARTITION处理的所有元素总数为r，则初始时r=n，以后的每级递归上，由于删去了上一级的划分元素，故r比上一级至少少1：
  - 理想情况，
    - 第一级少1，第二级少2，第三级少4，…；
  - 最坏情况
    - 每次仅减少1(如集合元素已经按照递增或递减顺序排列)

k	0	1	2	3	4	…	n-1	n	n+1
a[k]	--	n	1	2	3	…	n-2	n-1	∞

3.5 快速排序

- 最坏情况分析
  - PARTITION(m, p)一次调用中的元素比较数是p-m+1
    - 元素个数 = (p-1)-m +1 = p-m
    - 划分结束后i, p中间没有其他元素
    - 元素比较次数为 i-(m+1)+1 + (p-1)-(i-1)+1
    - 元素比较次数 = 元素个数 +1
  - 记最坏情况下的元素比较次数是$C_w(n)$;
  - 最坏情况下(第i次调用Partition所得的划分元素恰好是第i小元素)，每级递归调用的元素总数仅比上一级少1，故$C_w(n)$是r由n到2的累加和。

    即：$C_w(n)= \sum_{2\le r\le n} r = O(n^2)$

3.5 快速排序

■ 最坏情况分析

k	0	1	2	3	4	…	n-1	n	n+1
a[k]	--	n	1	2	3	…	n-2	n-1	∞

$$C_W(n)=\begin{cases}3 & n=2\\ n+1+C_W(n-1) & n>2\end{cases}$$

渐近时间复杂度

$$C_W(n)=O(n^2)$$

3.5 快速排序

- 最好情况分析
  - 在最好情况下，每次划分所取的划分元素恰好为中值，即每次划分都产生两个大小为n/2的区域

$$C_B(n)=\begin{cases}3 & n=2\\ 2C_B((n-1)/2)+n+1 & n>2\end{cases}$$

渐近时间复杂度

$$C_B(n)=O(n\log n)$$

3.5 快速排序

- 平均情况分析
  - 平均情况是指集合中的元素以任意一种顺序排列，且任选所有可能的元素作为划分元素进行划分和排序，在这些所有可能的情况下，算法执行性能的平均值。

3.5 快速排序

■ 平均情况分析

- 设调用PARTITION(m, p)时，所选取划分元素v恰好是A(m:p-1)中的第i小元素(1≤i≤p-m)的概率相等。则经过一次划分，所留下的待排序的两个子文件恰好是A(m:j-1)和A(j+1:p-1)的概率是：1/(p-m), m≤j<p。记平均情况下的元素比较次数是$C_A(n)$；则有，

$$C_A(n) = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}(C_A(k-1) + C_A(n-k))$$

- 其中
  - n+1是PARTITION第一次调用时所需的元素比较次数。
  - $C_A(0) = C_A(1) = 0$

3.5 快速排序

■ 平均情况分析

$nC_A(n) = n(n+1) + (C_A(0)+\ldots+C_A(n-2)+C_A(n-1)) + (C_A(n-1)+C_A(n-2)+\ldots+C_A(0))$

$(n-1)C_A(n-1) = (n-1)n + (C_A(0)+\ldots+C_A(n-2)) + (C_A(n-2)+\ldots+C_A(0))$

两式相减可得：

$nC_A(n) - (n-1)C_A(n-1) = 2n + 2C_A(n-1)$

$nC_A(n) = 2n + (n+1)C_A(n-1)$

3.5 快速排序

■ 平均情况分析

化简上式可得：

$$C_A(n)/(n+1) = C_A(n-1)/n + 2/(n+1)$$

$$= C_A(n-2)/(n-1)+2/n+2/(n+1)$$

$$= C_A(n-3)/(n-2)+2/(n-1)+2/n+2/(n+1)$$

$$\cdots$$

$$= C_A(1)/2+2\sum_{3\le k\le n+1} 1/k$$

由于

$$\sum_{3\le k\le n+1} 1/k \le \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} < \log_e(n+1)$$

所以得，$C_A(n)<2(n+1)\log_e(n+1) = O(n\log n)$

3.5 快速排序

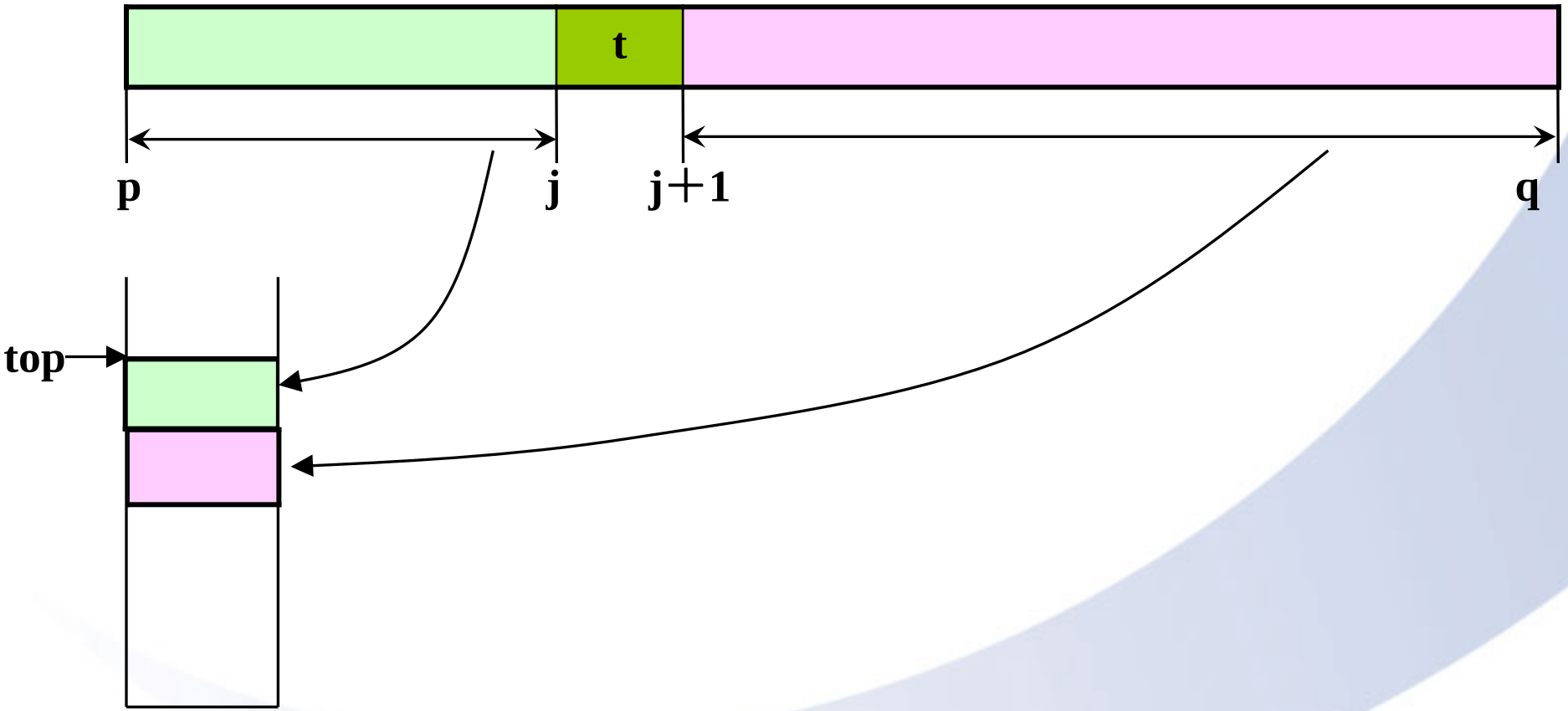
- 空间分析
  - 最坏情况下，
    - 递归的最大深度为n-1
    - 需要栈空间：O(n)
  - 使用一个迭代模型可以将栈空间总量减至O(logn)

3.5 快速排序

- 快速排序算法的迭代模型
  - 处理策略：
    - 每次在Partition将文件A(p:q)分成两个文件A(p:j-1)和A(j+1, q)后，先对其中较小的子文件进行排序。当小的子文件排序完成后，再对较大的子文件进行排序。
  - 栈：需要一个栈空间保存目前暂不排序的较大子文件。并在较小子文件排序完成后，从栈中退出最新的较大子文件进行下一步排序。
  - 栈空间需要量：O(logn)
  - 算法的终止：当栈空时，整个排序过程结束。

3.5 快速排序

■ 快速排序算法的迭代模型



算法3.14 QuickSort2(p, q)

```
procedure QUICKSORT2(p, q)
  integer STACK(1:max), top  //max=2
  global A(1:n); local integer j
  top←0
  loop
    while p<q do
      j←q+1
      call PARTITION(p, j);
      if  j – p < q – j  //先对较小的子文件排序，并将规模较大的子文件入栈
        then  STACK(top+1)←j+1;  STACK(top+2)←q;     q←j-1
        else   STACK(top+1)←p;      STACK(top+2)←j-1;  p←j+1
      endif
      top←top+2  //调整栈顶指针
    repeat
  if top=0 then return endif  //如果栈为空，算法结束
  q←STACK(top); p←STACK(top-1); top←top-2  //从栈中退出先前保存的
                                                较大的子文件
  repeat
end QUICKSORT2
```

3.5 快速排序

- 快速排序算法的迭代模型
  - 空间分析
    - 算法3.14的最大空间是O(logn)
    - 推导：设算法所需的最大栈空间是S(n)，则有

$$S(n)=\begin{cases}2+S(\lfloor (n-1)/2 \rfloor) & n>1\\ 0 & n\le 1\end{cases}$$

3.5 快速排序

- 快速排序与归并排序比较
  - 对排序算法应该从以下几个方面综合考虑：
    ① 时间复杂性；
    ② 空间复杂性；
    ③ 稳定性；
    ④ 算法简单性；
    ⑤ 待排序记录个数n的大小；
    ⑥ 记录本身信息量的大小；
    ⑦ 关键码的分布情况

3.5 快速排序

■ 快速排序与归并排序比较

□时间复杂度：

排序方法	平均情况	最好情况	最坏情况
插入排序	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(n^2)$
冒泡排序	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(n^2)$
快速排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n^2)$
归并排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$

□两者平均情况时间都是O(nlogn)，平均情况下哪种快一些？

□实验证明快速排序要快一些。

3.5 快速排序

- 快速排序与归并排序比较
  - 空间复杂度：

排序方法	辅助空间
插入排序	$O(1)$
冒泡排序	$O(1)$
快速排序	$O(\log_2 n)$ ~$O(n)$
归并排序	$O(n)$

3.5 快速排序

- 快速排序与归并排序比较
  - 简单性：
    - 一类是简单算法，包括直插入排序和冒泡排序，
    - 另一类是改进后的算法，包括快速排序和归并排序，这些算法较复杂。
  - 待排序记录个数比较：
    - n越小，采用简单排序方法越合适，
    - n越大，采用改进的排序方法越合适，
    - 因为n越小，$O(n^2)$同O(nlogn)的差距越小，并且输入和调试简单算法比高效算法要容易。

3.5 快速排序

- 快速排序与归并排序比较
  - 简单性数据的分布情况比较：
    - 当待排序数据初始有序时，插入排序和冒泡排序能达到O(n)的时间复杂度；
    - 对于快速排序而言，这是最坏的情况，此时性能蜕化为$O(n^2)$；
    - 归并排序的性能不受影响。

作业-课后练习7

- 对下面的三组数据进行快速排序
  - (45, 36, 18, 53, 72, 30, 48, 93, 15, 36)
  - (1, 1, 1, 1, 1)
  - (5, 5, 8, 3, 4, 3, 2)
  - 给出每一次划分后的结果。

作业-课后练习8

- 问题描述
  - 在PARTITION(m, p)中，将语句if i<p改为if i≤p，有何优缺点？
  - 在数据集(5, 4, 3, 2, 5, 8, 9)上执行这两个算法，看看他们在执行时有何不同。

小结