《算法设计与分析》

第三章 分治法

马丙鹏

2024年10月14日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

1

第三章 分治法

- 3.1 一般方法
- 3.2 二分检索
- 3.3 找最大和最小元素
- 3.4 归并排序
- 3.5 快速排序
- 3.6 选择问题
- 3.7 最接近点对问题
- 3.8 斯特拉森矩阵乘法
- 3.9 大整数乘法

3.6 选择问题

- 问题描述
  - 给出含有n个元素表A(1:n)，确定其中的第k小元素。
- 设计思路
  - 直接方法
    - 先排序，后查找。
    - 排序后第k位的元素即为待查找的元素。
    - 时间复杂度O(nlogn)。

3.6 选择问题

■ 设计思路

□利用PARTITION过程

➢第一次划分后，划分元素v测定在A(j)的位置上，则有j-1个元素小于或等于A(j)，且有n-j个元素大于或等于A(j)。

① 若k=j，则A(j)即是第k小元素；

情况1：

j-1个元素

n-j个元素

A[1]	A[2]	…	A[j-1]	A[j]	A[j+1]	…	A[n]

k=j　　A(j)即是第k小元素

3.6 选择问题

■ 设计思路

- 利用PARTITION过程
  - 第一次划分后，划分元素v测定在A(j)的位置上，则有j-1个元素小于或等于A(j)，且有n-j个元素大于或等于A(j)。

② 若k<j，则第k小元素将出现在A(1:j-1)中；

情况2：

j-1个元素 （A[1] … A[j-1]）；n-j个元素 （A[j+1] … A[n]）

A[1]	A[2]	…	A[j-1]	A[j]	A[j+1]	…	A[n]

k<j

第k小元素在A(1:j-1)中，

且是A(1:j-1)中的第k小元素

3.6 选择问题

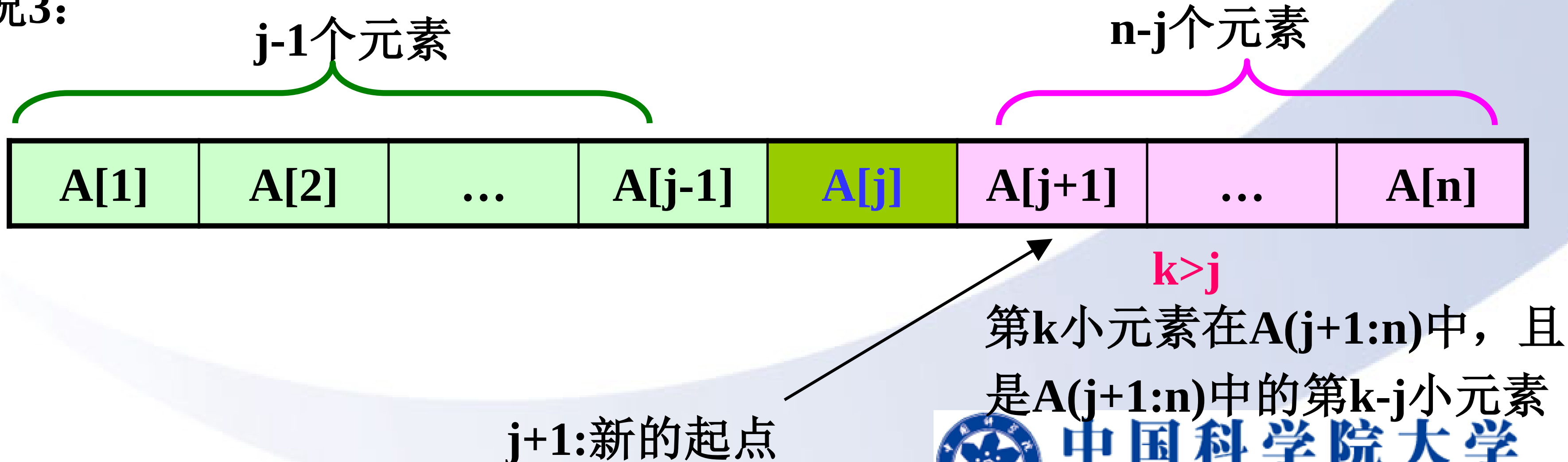
■ 设计思路

□利用PARTITION过程

➢第一次划分后，划分元素v测定在A(j)的位置上，则有j-1个元素小于或等于A(j)，且有n-j个元素大于或等于A(j)。

③ 若k>j，则第k小元素将出现在A(j+1:n)中。

情况3:



3.6 选择问题

■ 算法实现

算法3.15 找第k小元素

```
procedure SELECT(A, n, k)  //在数组A(1:n)中找第k小元素，并将之放在A(k)中。//
   integer n, k, m, r, j;
   m←1; r ←n+1; A(n+1) ←+∞  //A(n+1)被定义，并置为一大值，用于限界//
   loop  //在进入循环时，1≤m≤k≤r≤n+1 //
      j ←r  //将剩余元素的最大下标加1后置给j //
      call PARTITION(m, j)  //返回j,它使得A(j)是第j小的值//
      case
         :k=j:  return
         :k<j:  r←j      //j是新的上界//
         :else: m←j+1  //k>j, j+1是新的下界//
      endcase
   repeat
end SELECT
```

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A[i]	65	70	75	80	85	60	55	50	45

- K=7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	65	70	75	80	85	60	55	50	45
2	60	45	50	55	65	85	80	75	70
3	60	45	50	55	65	70	80	75	85
4	60	45	50	55	65	70	80	75	85
5	60	45	50	55	65	70	75	80	85
6	60	45	50	55	65	70	75	80	85

以上过程分别执行了**PARTITION(1, 10), PARTITION(6, 10), PARTITION(6, 9), PARTITION(7, 9), PARTITION(7, 8)**

3.6 选择问题

- 算法分析
  - 两点假设
    - A中的元素互异。
    - 随机选取划分元素，且选择A中任一元素作为划分元素的概率相同。
  - 分析
    - 每次调用PARTITION(m, j)，所需的元素比较次数是O(j-m+1)。
    - 在执行一次PARTITION后，或者找到第k小元素，或者将在缩小的子集(A(m, k-1)或A(k+1, j))中继续查找。缩小的子集的元素数将至少比上一次划分的元素数少1。

3.6 选择问题

■ 算法分析

□最坏情况

- ➢SELECT的最坏情况时间是$O(n^2)$
- ➢最坏情况特例:
  - ✓输入A(1:n)恰好使对PARTITION的第i次调用选用的划分元素是第i小元素，而**k=n**。

i	0	1	2	3	4	…	n-1	n	n+1
a[i]	--	1	2	3	…	n-2	n-1	n	∞

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

3.6 选择问题

■ 算法分析

- 最坏情况
  - SELECT的最坏情况时间是$O(n^2)$
  - 最坏情况特例:
    - ✓此时(区间下界)m随着PARTITION的每一次调用而仅增加1，j保持不变。PARTITION最终需要调用n次。
    - ✓则n次调用的时间总量是

$$O\left(\sum_1^n (i+1)\right) = O(n^2)$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

3.6 选择问题

对n个不同的元素，问题实例可能的n!种不同情况，综合考查所得的平均值

■ 算法分析

□平均情况

某个特定的k

➢设$T_A^k(n)$是找A(1:n)中第k小元素的平均时间。$T_A(n)$是SELECT的平均计算时间，则有

在所有可能的情况下，找所有可能的k小元素

$$T_A(n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le k \le n} T_A^k(n)$$

并定义

$$R(n) = \max_k \{T_A^k(n)\}$$

有：T(n)≤R(n)。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

3.6 选择问题

■ 算法分析

□定理3.4 SELECT的平均计算时间$T_A(n)$是O(n)
(对比快速排序平均计算时间O(nlogn))

□证明: (课下阅读)

PARTITION和SELECT中，case语句的执行时间是O(n)。在随机等概率选择划分元素时，首次调用PARTITION中划分元素v刚好是A中第i小元素的概率为1/n，1≤i≤n。

则，存在正常数c，c>0,有，

$$T_A^k(n) \le cn + \frac{1}{n}\Big(\sum_{1\le i<k} T_A^{k-i}(n-i) + \sum_{k<i\le n} T_A^k(i-1)\Big) \quad n\ge 2$$

划分元素i<k,将在i的后半部分求解

划分元素i>k,将在i的前半部分求解

3.6 选择问题

■ 算法分析

□证明:

且有,

$$R(n) \le cn + \tfrac{1}{n}\max_{k}\{\sum_{1\le i<k} R(n-i) + \sum_{k<i\le n} R(i-1)\}$$

$$= cn + \tfrac{1}{n}\max_{k}\{\sum_{n-k+1}^{n-1} R(i) + \sum_{k}^{n-1} R(i)\} \quad n\ge 2$$

令**c≥R(1)**。利用数学归纳法证明，对所有**n≥2**，有**R(n)≤4cn.**

①归纳基础 当**n=2**时，由上式得： $R(n) \le 2c + \dfrac{1}{2}\max\{R(1),R(1)\}$

$$\le 2.5c < 4cn$$

②归纳假设 假设对所有得**n, 2≤n<m**，有**R(n)≤4cn**

3.6 选择问题

■ 算法分析

□证明:

③归纳步骤 当**n = m**时，有，

由于R(n)是n的非降函数，故在当m为偶数而k=m/2，或当m为奇数而k=(m+1)/2时，$\sum_{n-k+1}^{n-1} R(i) + \sum_{k}^{n-1} R(i)$ 取得极大值。因此，

若m为偶数，则 $$R(m) \le cm + \frac{2}{m}\sum_{m/2}^{m-1} R(i) \le cm + \frac{8c}{m}\sum_{m/2}^{m-1} i < 4cm$$

若m为奇数，则 $$R(m) \le cm + \frac{2}{m}\sum_{(m+1)/2}^{m-1} R(i) \le cm + \frac{8c}{m}\sum_{(m+1)/2}^{m-1} i < 4cm$$

由于TA(n)≤R(n)，所以TA(n)≤4cn。 故$T_A(n)=O(n)$

3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 基本思想：
    - 精心挑选划分元素v
  - 方法：
    - 二次取中间值
  - 目的：
    - 使v比一部分元素小，比另一部分元素大

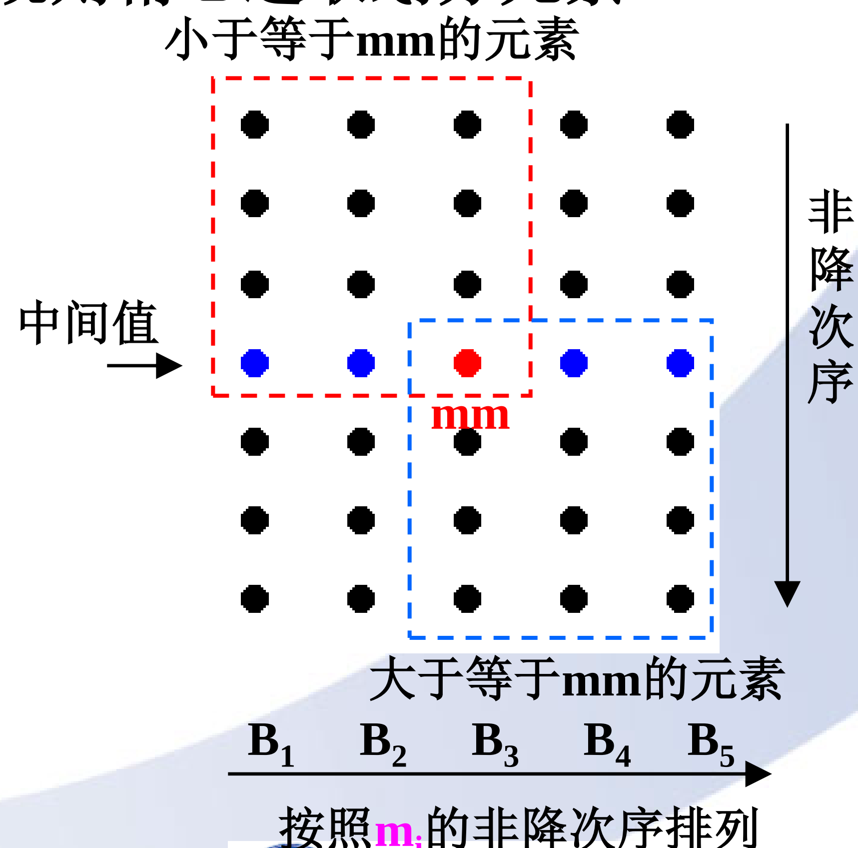
3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 采用两次取中间值的规则精心选取划分元素
    1. ① 将参加划分的n个元素分成$\lfloor n/r \rfloor$组，每组有r个元素($r \geq 1$)。(多余的$n - r\lfloor n/r \rfloor$个元素忽略不计)
    2. ② 对这$\lfloor n/r \rfloor$组每组的r个元素进行排序并找出其中间元素m_i, $1 \leq i \leq \lfloor n/r \rfloor$, 共得$\lfloor n/r \rfloor$个中间值。
    3. ③ 对这$\lfloor n/r \rfloor$个中间值排序，并找出其中间值mm。
    4. ④ 将mm作为划分元素执行划分。

3.6 选择问题

- ■ 最坏情况是O(n)的选择算法
  - □采用两次取中间值的规则精心选取划分元素

- 例：设 n=35, r=7。
- 分为n/r = 5个元素组：B_1, B_2, B_3, B_4, B_5；每组有7个元素。
- B_1-B_5按照各组的m_i的非降次序排列。$mm = m_i$的中间值，$1 \le i \le 5$
- 由图所示有：

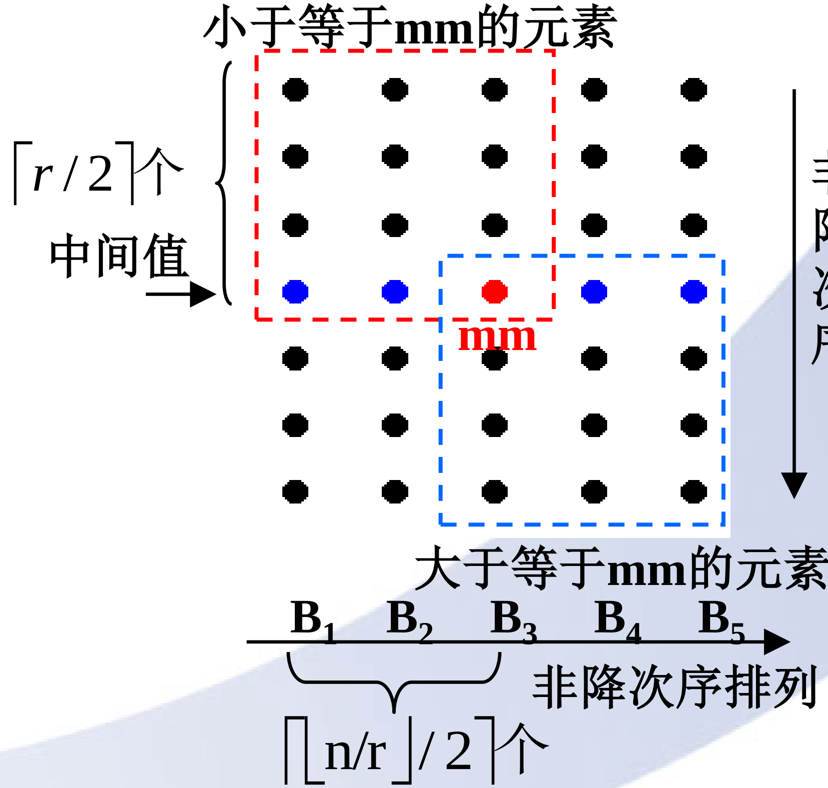


3.6 选择问题

■ **最坏情况是O(n)的选择算法**

□采用两次取中间值的规则精心选取划分元素

- r个元素的中间值是第$\lceil r/2 \rceil$小元素；
- 至少有$\lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil$个$m_i$小于或等于mm；
- 至少有$\lfloor n/r \rfloor - \lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil + 1 \geq \lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil$个$m_i$大于或等于mm。
- 故，至少有$\lceil r/2 \rceil \lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil$个元素小于或等于(或大于或等于)mm。



3.6 选择问题

■ 最坏情况是O(n)的选择算法

- 采用两次取中间值的规则精心选取划分元素
  - ➢当r=5，则使用两次取中间值规则来选择v=mm
  - ➢至少有$1.5\lfloor n/5\rfloor$个元素小于等于划分元素v。

$$\lceil r/2\rceil \lceil \lfloor n/r\rfloor/2\rceil = \lceil 5/2\rceil \lceil \lfloor n/5\rfloor/2\rceil \geq 3\lfloor n/5\rfloor/2$$
$$= 1.5\lfloor n/5\rfloor$$

✓同理，至少有$1.5\lfloor n/5\rfloor$个元素大于等于v

- ➢至多有 $n - 1.5\lfloor n/5\rfloor \leq 0.7n + 1.2$ 个元素大于等于v。

$$n - 1.5\lfloor n/5\rfloor \leq n - 1.5(n-4)/5 = 0.7n + 1.2$$

注：$\lfloor n/5\rfloor \geq (n-4)/5$

✓同理，至多有 $0.7n+1.2$个元素小于等于v。

3.6 选择问题

- ■ 最坏情况是O(n)的选择算法
  - ◻采用两次取中间值的规则精心选取划分元素
    - ➢故，这样的v可较好地划分A中的n个元素：
    - ➢比足够多的元素大，也比足够多的元素小，
    - ➢不论落在那个区域，总可以在下一步查找前舍去足够多的元素，
    - ➢而在剩下的“较小”范围内继续查找。

算法3.16 使用二次取中规则得选择算法的说明性描述

procedure SELECT2(A, k, n) //在集合A中找第k小元素，使用两次取中规则//

① 若n≤r，则采用插入法直接对A排序并返回第k小元素

② 把A分成大小为r的$\lfloor n/r \rfloor$个子集合，忽略多余的元素

③ 设M={$m_1, m_2, \ldots, m_{\lfloor n/r \rfloor}$}是$\lfloor n/r \rfloor$子集合的中间值集合

④ v←SELECT2(M, $\lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil$, $\lfloor n/r \rfloor$)

⑤ j←PARTITION(A, v) //v作为划分元素，划分后j等于划分元素所在位置的下标//

⑥ **case**

:k=j: **return**(v)

:k<j: 设S是A(1:j-1)中元素的集合

return(SELECT2(S, k, j-1))

:else: 设R是A(j+1:n)中元素的集合

return(SELECT2(R, k-j, n-j))

endcase

end SELECT2

3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 算法分析
    - 记T(n)是SELECT2所需的最坏情况时间
      对特定的r分析SELECT2：选取r=5。
    - 假定A中的元素各不相同，则有

算法3.16 使用二次取中规则得选择算法的说明性描述

procedure SELECT2(A, k, n)　　//在集合A中找第k小元素，使用两次取中规则//

① 若$n \le r$，则采用插入法直接对A排序并返回第k小元素 →O(1)

② 把A分成大小为r的$\lfloor n/r \rfloor$个子集合，忽略多余的元素 →O(n)

③ 设$M=\{m_1, m_2, \ldots m_{\lfloor n/r \rfloor}\}$是$\lfloor n/r \rfloor$子集合的中间值集合 →O(n)

④ $v \leftarrow$ SELECT2(M, $\lceil \lfloor n/r \rfloor /2 \rceil$, $\lfloor n/r \rfloor$) →T(n/5)

⑤ $j \leftarrow$ PARTITION(A, v) →O(n)

⑥ **case** →T(3n/4), $n \ge 24$

:k=j: **return**(v)

:k<j: 设S是A(1:j-1)中元素的集合

return(SELECT2(S, k, j-1))

:**else**: 设R是A(j+1:n)中元素的集合

return(SELECT2(R, k-j, n-j))

endcase

end SELECT2

3.6 选择问题

■ 最坏情况是O(n)的选择算法

□算法分析

r为定值，记对r个元素的直接排序的时间为“定值”故有，

$$T(n)=\begin{cases} cn & n<24, \\ T(n/5)+T(3n/4)+cn & n\geq 24 \end{cases}$$

用归纳法可证：

$T(n)\leq 20cn$

故，在r=5的情况下，求解n个不同元素选择问题的算法SELECT2的最坏情况时间是O(n)。

3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 当A中的元素可能相同
    - 步骤⑤经PARTITION调用所产生的S和R两个子集合中可能存在一些元素等于划分元素v，可能导致|S|或|R|大于0.7n+1.2。影响到算法的效率。

3.6 选择问题

- ■ 最坏情况是O(n)的选择算法
  - □ 当A中的元素可能相同
    - ➢ 特例：当r=5，且A中的元素不全相同。假设其中有0.7n+1.2个元素比v小而其余的元素都等于v的情况。
      则经过PARTITION，在这些等于v的元素中至多有一半可能在S中，故$|S| \le 0.7n+1.2+(0.3n-1.2)/2=0.85n+0.6$
      同理，$|R| \le 0.85n+0.6$
      可得，步骤④和⑥此时所处理的元素总数将是
      $T(n/5)+T(0.85n+0.6) \approx 1.05n+0.6>n$
      不再是线性关系。故有$T(n) \ne O(n)$

3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 改进方法一：将A集合分成3个子集合U，S和R，其中U是A中所有与v相同的元素组成，S是A中所有比v小的元素组成，R则是A中所有比v大的元素组成。
  - 同时步骤⑥更改：

```
case
    :|S|≥k: return(SELECT2(S, k, |S|))
    :|S|+|U|≥k: return(v)
    :else: return(SELECT2(R, k-|S|-|U|, |R|))
 endcase
```

  - 从而保证 $|S|$和$|R| \le 0.7n+1.2$成立，故关于T(n)的分析仍然成立。$T(n) = O(n)$

3.6 选择问题

■ 最坏情况是O(n)的选择算法

□改进方法二：选取其他的r值进行计算：

取r=9。经计算可得，此时将至少有$2.5\lfloor n/9\rfloor$个元素小于或等于v，同时至少有同样多的元素大于或等于v。

$$\lceil r/2\rceil \lceil\lfloor n/r\rfloor/2\rceil = \lceil 9/2\rceil \lceil\lfloor n/9\rfloor/2\rceil \geq 5\lfloor n/9\rfloor/2 = 2.5\lfloor n/9\rfloor$$

则当n≥90时，|S|和|R|都至多为

相等元素的一半

$$n - 2.5\lfloor n/9\rfloor + \boxed{\frac{1}{2}(2.5\lfloor n/9\rfloor)} = n - 1.25\lfloor n/9\rfloor$$

$$\leq 31n/36 + 1.25 \leq 63n/72$$

基于上述分析，有新的递推式：

3.6 选择问题

- 最坏情况是O(n)的选择算法
  - 改进：

故有，

$$T(n) = \begin{cases} c_1 n & n < 90 \\ T(n/9)+T(63n/72)+c_1 n & n \geq 90 \end{cases}$$

用归纳法可证：

$$T(n) \leq 72c_1 n$$

即，$T(n) = O(n)$

3.6 选择问题

- **SELECT2的实现**
  - 算法中需要解决的两个问题
  - 1) 如何确定子集合的中间值
    - 当**r**较小时，采用**INSERTIONSORT(A, i, j)**直接对每组的**r**个元素排序，在排序好的序列中，中间元素即为当前**r**个元素中的中间位置下标对应的元素。
  - 2) 如何保存$\lfloor n/r \rfloor$个子集合的中间值
    - 注：各组找到的中间元素值将调整到数组**A**的前部，连续保存，从而可方便用递归调用的方式对这些中间值进行排序并找出中间值的中间值。

算法3.17 SELECT2的SPARKS的描述

```
procedure SEL(A, m, p, k)
    global r;  integer n, i, j;        //返回一个i，使得i∈[m, p]，且A(i)是A(m: p)中第k小元素，r是一个全程变量，其取值为大于1的整数
    loop
      if p-m+1≤r then call  INSERTIONSORT(A, m, p);  return (m+k-1); endif
      n←p-m+1 //元素数//
      for i←1 to  ⌊n/r⌋  do  //计算中间值//
         call  INSERTIONSORT(A, m+(i-1)*r, m+i*r-1)  //将中间值收集到A(m:p)的前部//
         call  INTERCHANGE(A(m+i-1), A(m+(i-1)r + ⌊r/2⌋-1))
      repeat
      j←SEL(A, m, m+ ⌊n/r⌋-1,  ⌈⌊n/r⌋/2⌉)//mm//
      call  INTERCHANGE (A(m), A(j)) //产生划分元素，将之调整到第一个元素//
      j←p+1
      call PARTITION(m, j)
      case
        :j-m+1=k: return(j)
        :j-m+1>k: p←j-1
        :else: k←k-(j-m+1); m←j+1
      endcase
    repeat
end SEL
```

作业-课后练习9

- 问题描述
  - 有两个数组A和B，假设A和B已经有序（从大到小），求A和B数组中所有数的第K大元素。
  - 要求
    - 写出算法的基本思想

End