

《算法设计与分析》

第一章 算法引论

马丙鹏

2024年09月02日



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

第一章 算法引论

- 1.1 算法的定义及特性
- 1.2 复杂性分析初步
- 1.3 递归



1.3 递归

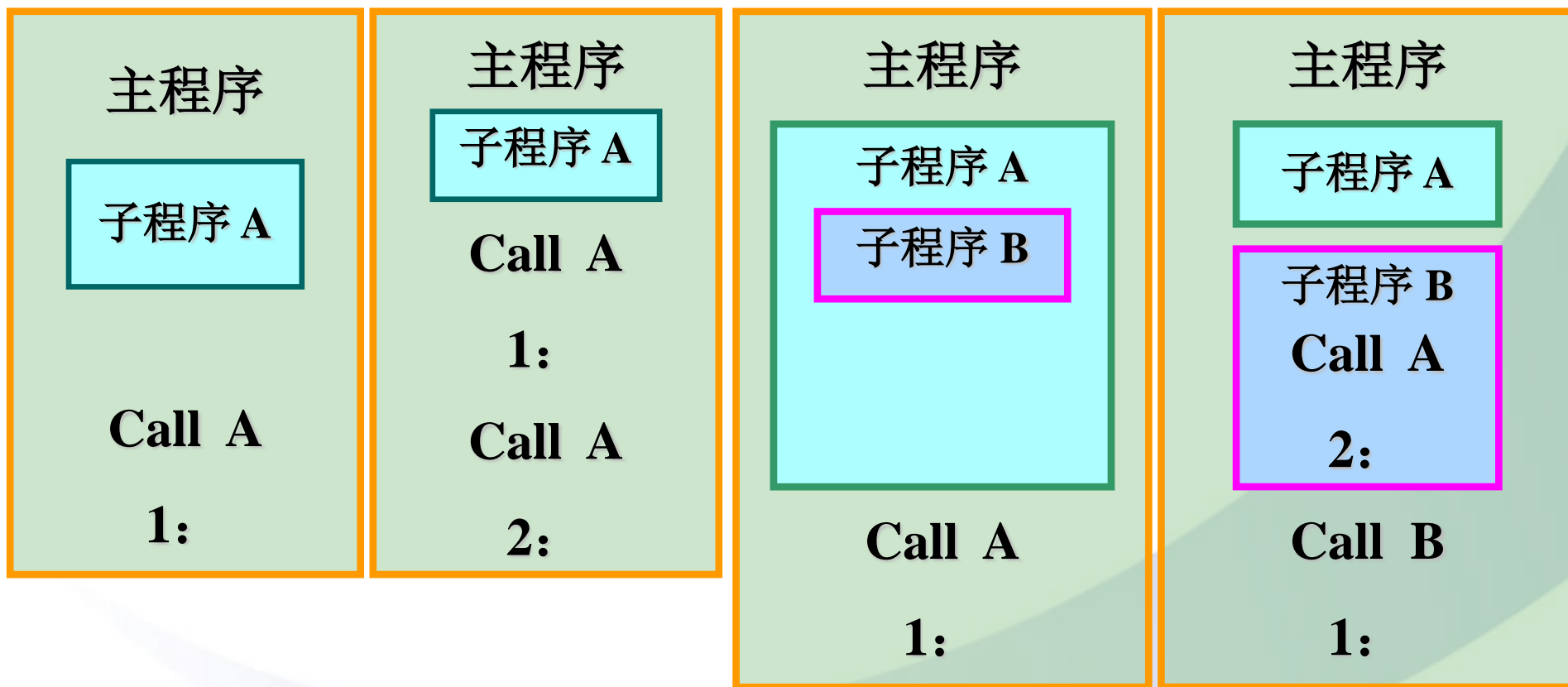
■ 1. 定义

- 程序调用自身的编程技巧称为递归(recursion)。包括直接或间接调用自身。
- 它通常把一个大型复杂的问题层层转化为一个与原问题相似的规模较小的问题来求解，递归策略只需少量的程序就可描述出解题过程所需要的多次重复计算，大大地减少了程序的代码量。
- 递归是一种强有力的设计方法
 - 与数学模型一致, 表述简单清晰, 容易实现, 容易证明正确性。
 - 效率较低。



1.3 递归

■ 2. 子程序调用的一般形式



递归求阶乘的算法

```
procedure f(integer n)
integer y;
  if (n=0) return 1
  y ← f(n-1);
  return(n*y);
end f
```

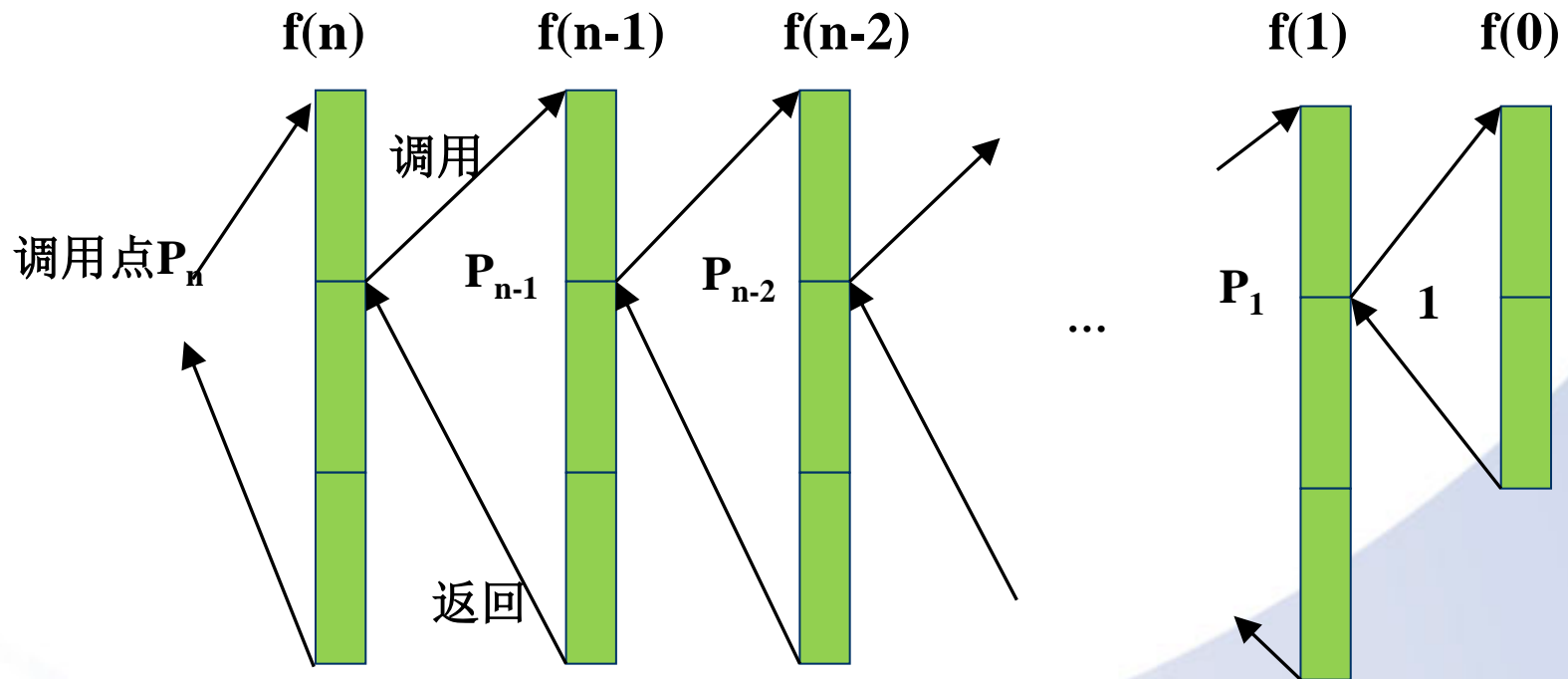
主程序:

```
integer fn;
fn ← f(4);
```



为了保证递归调用的正确性，需要保存调用点的现场(返回地址、局部变量、被调用函数的参数等)，以便正确地返回，并且按先进后出的原则来管理这些信息。

高级语言编译程序是利用栈来实现的。

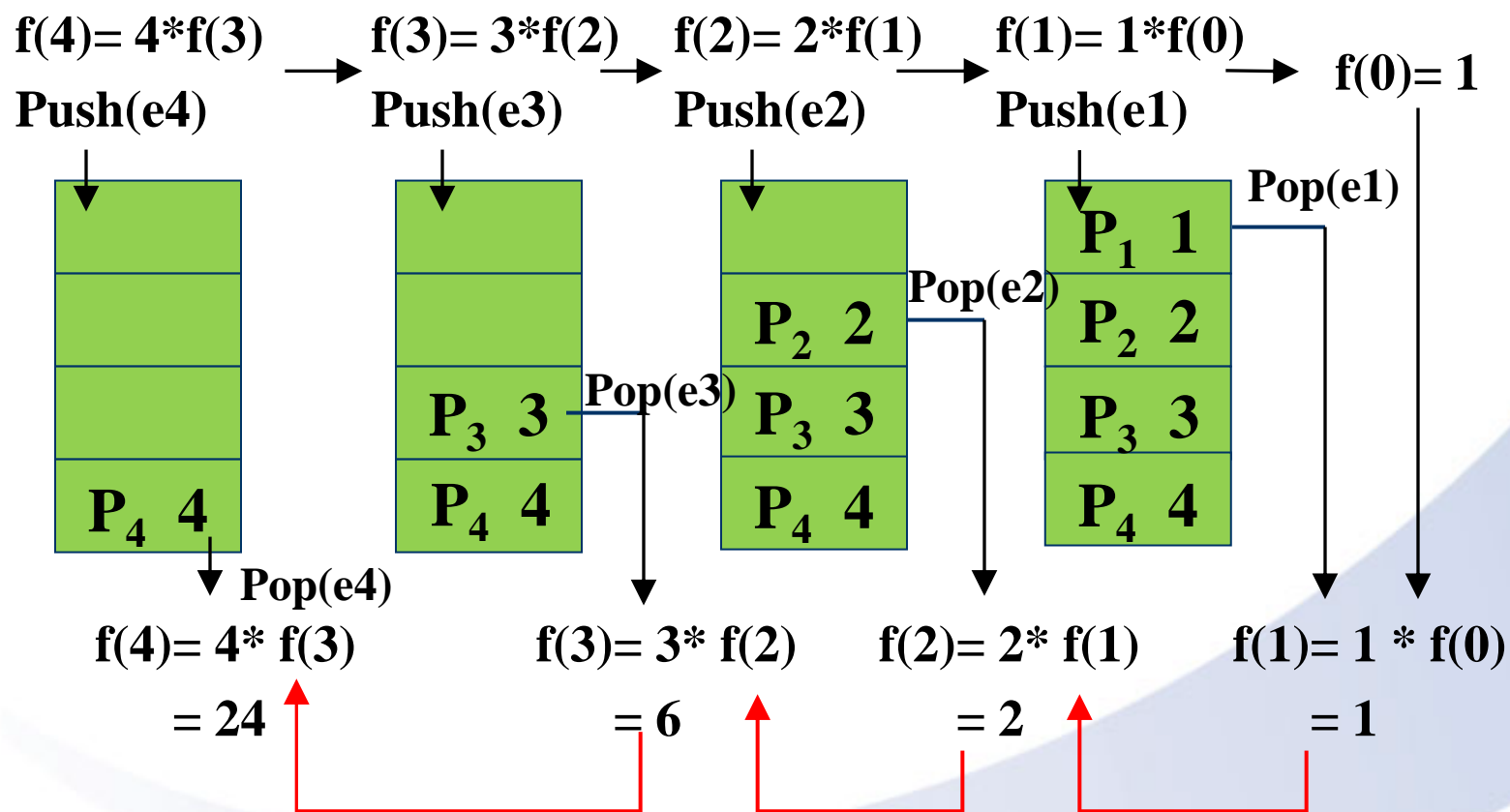


调用时执行入栈操作保存现场，返回时执行出栈操作恢复现场。



计算 4! 递归过程图示:

下图中 P_i 代表现场信息, 栈元素由现场信息和参数构成



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 如果待解决的问题具备下列两个特性，就可以考虑使用递归：

- ① 复杂的问题可以转换为简单些的一个或几个子问题；
- ② 最简单的问题可以直接解决。



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 定义: **树**是一个或多个结点的有限集合, 它使得:

- 有一个指定为根 (root) 的结点
- 剩余结点被划分成 $m \geq 0$ 个不相交的集合: T_1, \dots, T_m , 这些集合的每一个又**都是一棵树**, 并称 T_1, \dots, T_m 为根的子树。

```
int P(参数表)
{
    if (递归出口)
        简单操作
    else
    {
        简单操作;
        P;
        简单操作;
    }
}
```

初始情况

递归部分



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 定义: **二元树** 是结点的有限集合,

- 它或者为空,
- 或者由一个根和两棵称为左子树和右子树的不相交 **二元树** 所组成

□ 二分检索树(略)

```
int P(参数表)
```

```
{
```

```
    if (递归出口)
```

```
        简单操作
```

```
    else
```

```
    {
```

```
        简单操作;
```

```
        P;
```

```
        简单操作;
```

```
    }
```

```
}
```

初始情况

递归部分



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 10

1.3 递归

规模或与规模
相关的参数

■ 3. 递归算法设计

初始情况

降低规模
的处理

```
int P(参数表)
{
    if (递归出口)
        简单操作
    else
    {
        简单操作;
        P;
        简单操作;
    }
}
```

对递归结
果的处理

1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 斐波那契(Fibonacci)序列

➤ 兔子的问题: 假设小兔子每一个月长成大兔子,大兔子每一个月生一个小兔子,第一个月有一只小兔子,不考虑兔子的寿命,求n个月后有多少只兔子?

□ 例1.3 斐波那契(Fibonacci)序列:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} (i > 1)$$



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 斐波那契(Fibonacci)序列

```
procedure F(n)
//返回第n个斐波那契数//
integer n
if n ≤ 1
    then return(1)
else
    return(F(n-1) + F(n-2))
endif
```

$$\begin{aligned} F(5) &= F(4) + F(3) \\ &= (F(3) + F(2)) + ((F(2) + F(1))) \\ &= ((F(2) + F(1)) + (F(1) + F(0))) + ((F(1) + F(0)) + 1) \\ &= (((F(1) + F(0)) + 1) + (1 + 1)) + (1 + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F1(5) &= F2(2, 5, 1, 1) &= F2(3, 5, 1, 2) \\
 &= F2(4, 5, 2, 3) &= F2(5, 5, 3, 5) \\
 &= F2(6, 5, 5, 8)
 \end{aligned}$$

■ 3. 递归算法设计

□ 斐波那契(Fibonacci)序列

- 算法效率：对 $F(n-1)$ 、 $F(n-2)$ 存在大量的重复计算
- 改进：保存中间结果

改进的算法

```

procedure F1(n)
  //返回第n个斐波那契数//
  integer n
  if n<2 then return(1)
    else return(F2(2, n, 1, 1))
  endif
end F1

```

```

procedure F2(i, n, x, y)
  if i≤n then
    call F2(i+1, n, y, x+y)
  endif
  return(y)
end F2

```



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 阶乘函数

➤ 阶乘函数定义为:
$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

```
procedure Factorial(n)
{
    if n==0 then
        return(1)
    else
        return(n*Factorial(n-1))
    endif
}
```



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 最大公因数

- 已知两个非负整数a和b，且 $a > b \geq 0$ ，求这两个数的最大公因数。
- 辗转相除法：
 - ✓ 若 $b=0$ ，则a和b的最大公因数等于a；
 - ✓ 若 $b > 0$ ，则a和b的最大公因数等于b和用b除a的余数的最大公因数。

$$GCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ GCD(b, a \% b) & b > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} GCD(22, 8) &= GCD(8, 22 \% 8) = GCD(8, 6) = GCD(6, 8 \% 6) \\ &= GCD(6, 2) = GCD(2, 6 \% 2) = GCD(2, 0) = 2 \end{aligned}$$



1.3 递归

■ 3. 递归算法设计

□ 最大公因数

➤ 求最大公因数

```
procedure GCD(a, b)
    // 约定a>b //
    if b=0 then return(a)
    else return(GCD(b, a mod b))
endif
end GCD
```

$$\begin{aligned} \text{GCD}(22, 8) &= \text{GCD}(8, 22 \% 8) = \text{GCD}(8, 6) = \text{GCD}(6, 8 \% 6) \\ &= \text{GCD}(6, 2) = \text{GCD}(2, 6 \% 2) = \text{GCD}(2, 0) = 2 \end{aligned}$$



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 已知元素 x ，判断 x 是否在 $A(1:n)$ 中。

□ 在 $A(1:n)$ 中检索 x

procedure SEARCH(i)

//如果在 $A(1: n)$ 中有一元素
 $A(k)=x$ ，则将其第一次出现的
下标 k 返回，否则返回0//

global $n, x, A(1:n)$

case

:i>n: return(0)

:A(i) = x; return(i)

:else: return(SEARCH($i+1$))

endcase

end SEARCH

$$T(A, i, n, x) = \begin{cases} 0 & i > n \\ i & A[i] = x, i \leq n \\ T(A, i+1, n, x) & A[i] \neq x, i \leq n \end{cases}$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 18

1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ n阶汉诺塔（Hanoi）问题

- 在世界中心贝拿勒斯(印度北部) 的圣庙里，一块黄铜板上插着三根宝石针。
- 印度教的主神梵天在创造世界的时候，在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的 64 片金片，这就是所谓的汉诺塔。
- 不论白天黑夜，总有一个僧侣在按照下面的法则移动这些金片：一次只移动一片，不管在哪根针上，小片必须在大片上面。
- 僧侣们预言，当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，而梵塔、庙宇和众生也都将同归于尽。



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ n 阶汉诺塔（Hanoi）问题

➤ X , Y , Z 是三个塔座，开始时有 n 个盘子依其半径大小套在柱子 X 上，其中半径大的在下面。现要将 X 上的圆盘移到 Z 上，并仍按同样顺序叠置。

➤ 移动规则：

- ① 每次只能移动1个圆盘；
- ② 任何时刻都不允许将半径大的圆盘压在半径小的圆盘之上；



1.3 递归

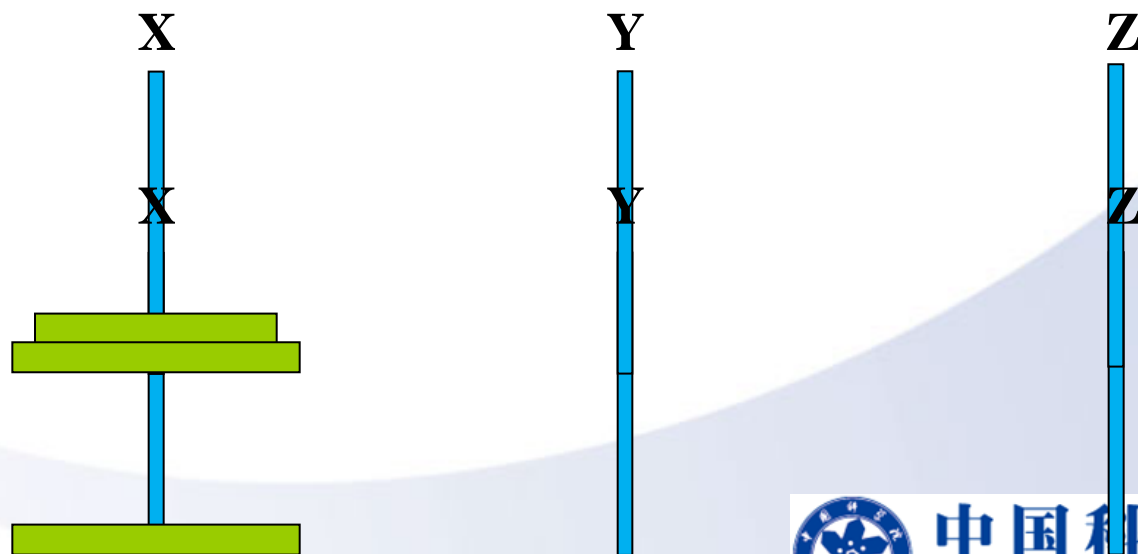
■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ n阶汉诺塔（Hanoi）问题

□ $\text{Hanoi}(n, X, Y, Z)$

➤ $n=1, X \rightarrow Z$

➤ $n=2, X \rightarrow Y, X \rightarrow Z, Y \rightarrow Z$



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

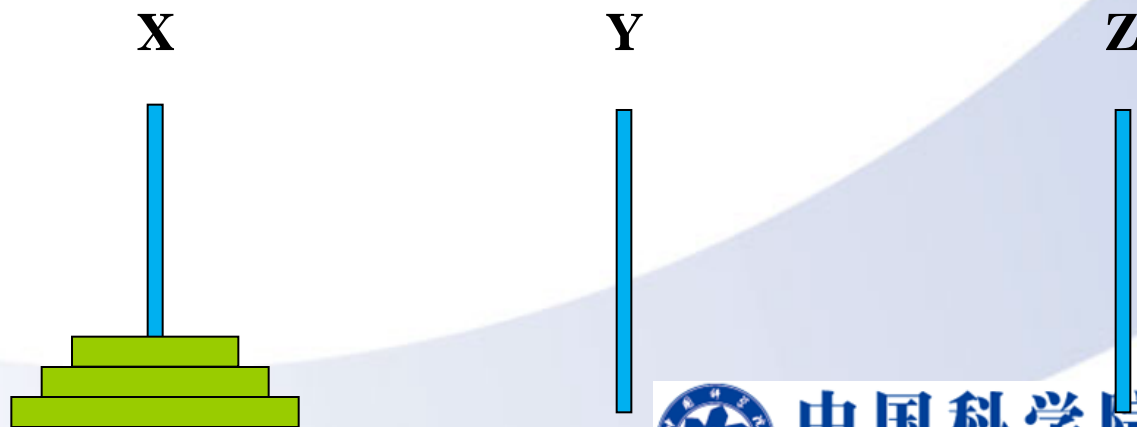
□ n阶汉诺塔（Hanoi）问题

□ $\text{Hanoi}(n, X, Y, Z)$

➤ $n=3, \text{Hanoi}(2, X, Z, Y)$

$X \xrightarrow{3} Z$

$\text{Hanoi}(2, Y, X, Z)$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 22

1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ n阶汉诺塔（Hanoi）问题

```
procedure Hanoi(n, X, Y, Z)
  if (n = 1) then move(X, Z)
  else
    Hanoi(n-1, X, Z, Y)
    move(X, Z)
    Hanoi(n-1, Y, X, Z)
  endif
end Hanoi
```



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 棋子的移动问题

有 $2n$ 个棋子($n \geq 4$)排成一行，白子用0表示，黑子用1表示，例如 $n=5$ 时初始状态为

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 _ _ (后面至少有两个空位)，要求通过棋子移动最终成为

0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

移动规则：

- ① 每次同时移动相邻两个棋子，颜色不限，移动方向不限，
- ② 每次移动必须跳过若干棋子，
- ③ 不能调换两个棋子的位置。



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 棋子的移动问题

➤ $n=4$ 时

0 0 0 0 1 1 1 1 _ _

① 0 0 0 _ _ 1 1 1 0 1

② 0 0 0 1 0 1 1 _ _ 1

③ 0 _ _ 1 0 1 1 0 0 1

④ 0 1 0 1 0 1 _ _ 0 1

⑤ _ _ 0 1 0 1 0 1 0 1



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 棋子的移动问题

➤ n=5时

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 _ _

0 0 0 0 _ _ 1 1 1 1 0 1

0 0 0 0 1 1 1 1 _ _ 0 1

➤ n=6时

0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 _ _

0 0 0 0 0 _ _ 1 1 1 1 1 0 1

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 _ _ 0 1



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 棋子的移动问题

递归出口: $n=4$

move (4, 5) \rightarrow (9, 10)

0 0 0 _ _ 1 1 1 **0 1**

move (8, 9) \rightarrow (4, 5)

0 0 0 **1 0** 1 1 _ _ 1

move (2, 3) \rightarrow (8, 9)

0 _ _ 1 0 1 1 **0 0** 1

move (7, 8) \rightarrow (2, 3)

0 **1 0** 1 0 1 _ _ 0 1

move (1, 2) \rightarrow (7, 8)

_ _ 0 1 0 1 **0 1** 0 1

2n个棋子的移动: chess(n)

move (n, n+1) \rightarrow (2n+1, 2n+2)

move (2n-1, 2n) \rightarrow (n, n+1) •

call **chess(n-1)**

简单操作
降低问题规模



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 27

1.3 递归

procedure Chess(n)

if n=4 **then**

move (4, 5) \rightarrow (9, 10)

move (8, 9) \rightarrow (4, 5) . . .

move (2, 3) \rightarrow (8, 9)

move (7, 8) \rightarrow (2, 3)

move (1, 2) \rightarrow (7, 8)

else

move (n, n+1) \rightarrow (2n+1, 2n+2)

move (2n-1, 2n) \rightarrow (n, n+1)

call Chess(n-1)

endif

end Chess

递归出口

A(9) \leftarrow A(4)

A(10) \leftarrow A(5)

递归调用



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences 28

1.3 递归






■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用





□ 简单的0/1背包问题





- 背包可容纳物品的最大质量为 m ，现有 n 件物品，质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n ， m_i 均为正整数，要从 n 件物品中挑选若干件，使放入背包的质量之和正好为 m 。
- 例： $m=20, n=5, (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)=(3, 5, 8, 9, 10)$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(1, 0, 1, 1, 0)$
- $m=18$?
- $m=28$?
- 注：对于第 i 件物品要么取，要么舍，不能取一部分，因此这个问题可能有解，也可能无解。



问题分析 $\text{knap}(m, n)$

初始:  m  m_1  m_2  m_{n-1}  m_n

$m_n = m$  m  m_1  m_2  m_{n-1} true

$m_n < m$  m  m_1  m_2  m_{n-1}

$n > 1$, 即还有可选物品  $\text{knap}(m - m_n, n - 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{有解 } \text{knap}(m, n) \leftarrow \text{knap}(m - m_n, n - 1) \\ \text{无解 } \text{knap}(m, n) \leftarrow \text{knap}(m, n - 1) \end{array} \right.$

$m_n > m$  m  m_1  m_2  m_{n-1} $n > 1 \rightarrow \text{knap}(m, n - 1)$
否则 false



1.3 递归

■ 4. 递归在非数值算法设计中的应用

□ 简单的0/1背包问题

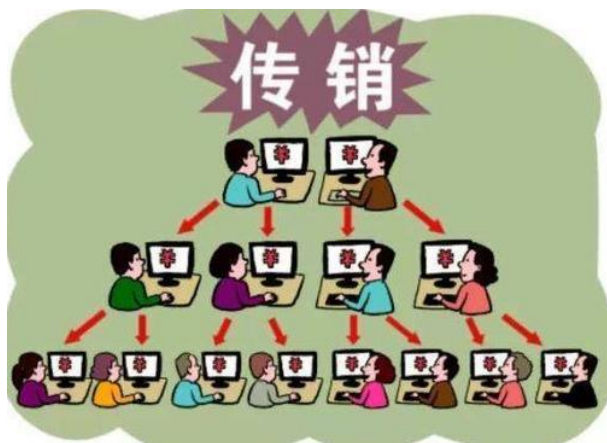
```
function knap(m, n)
  case
    :m-mn=0: knap ←true
    :m-mn>0: if n>1 then
      if knap(m-mn, n-1)=true then
        knap ←true
      else knap ←knap(m, n-1) endif
    else knap ←false endif
    :m-mn<0: if n>1 then knap ←knap(m, n-1)
      else knap ←false; endif
  endcase
end knap
```



1.3 递归

■ 5.课堂讨论

□ 递归算法与传销



作业-算法实现1

■ 问题描述

- 最大间隙问题。给定 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n ，求这 n 个实数在数轴上相邻2个数之间的最大差值。
- 直观解法：将 n 个数排序后计算间距，再找最大值。
- 假设对任何实数的下取整函数耗时 $O(1)$ ，设计解最大间隙问题的线性时间算法。

■ 算法输入：

- 输入数据由文件名 `input.txt` 的文本提供。文件的第一行有一个正整数 n ，接下来有 n 个实数。

■ 算法输出：

- 将找到的最大间隙输出到文件 `output.txt` 中。



作业-算法实现1

■ 要求

- 要求用C语言，或Matlab，或python语言实现
- 要有求解思路的简单说明
- 截屏算法运行的图片
- 上载到 国科大在线 上



■ End

