作业七：

1、第一步：将 x 分成两部分

$x_1=(x_0, x_2, x_4, \cdots, x_{14})$

$x_2=(x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{15})$

第二步：对 x_1 和 x_2 各自进行FFT

第三步：合并 x_1 和 x_2 的FFT结果，使用旋转因子 W_{16}^k

2、(1) B_x，B_y 分别为 X，Y 的一组基，且 $r(B_x|B_y)=3$，则 $B_x \cup B_y$ 是 R^3 的一组基

X 与 Y 为一对补空间.

(2) 沿 X 空间到 Y 空间的投影矩阵 Q，沿 Y 空间到 X 空间的投影矩阵 P 分别为：

$$P=[X|0][X|Y]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Q=[Y|0][Y|X]^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}=P$$

$$Q^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}=Q$$

P、Q 为幂等矩阵.

3. $\forall\ A\in R^{n\times n}$ $\quad A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T=\frac{A+A^T}{2}$ 为对称矩阵

$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T=-\frac{A-A^T}{2}$ 为反对称矩阵

$\frac{A+A^T}{2}\in S \qquad \frac{A-A^T}{2}\in K$.

$R^{n\times n}=S\oplus K$ 成立.

4. $\det(A) = -2(4-8) - 4(8-6)$

$= 8 - 8 = 0.$

$\text{rank}(A) = 2 \quad \text{rank}(A^2) = 1$

$\text{rank}(A^3) = 1$, $\text{index}(A) = 2$

$Q = [X \mid Y]$ X 和 Y 分别为 $R(A^2)$ 和

$N(A^2)$ 的一组基

$$X = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

$$C = (2) \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^D = Q \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$