Modélisation du transfert thermique et de masse de la pyrolyse du bois
Part 2 - Equation de la chaleur

L. Godard-Cadillac, T.-H. Nguyen-Bui

ludovic.godard-cadillac@u-bordeaux.fr

thanh-ha.nguyen-bui@u-bordeaux.fr

Equation de la chaleur

L'Equation de la chaleur s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q_r, \tag{1}$$

Où : λ (W/(m.K)), ρ (kg/m^3) et C_p (J/(kg.K)) sont respectivement le coefficient de conductivité thermique, la densité, la chaleur spécifique .

Hypothèses : Qr = 0., ρC_p = Constante, λ = Constante

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{2}$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho C_p}$: Diffusivité thermique.

Cas 1 : Dirichlet - Dirichlet

Conditions aux limites:

$$T(t, x = 0) = T_0,$$
$$T(t, x = L) = T_0.$$

Condition initiale:

$$T(t = 0, x) = T_0 + T_1. \sin(\pi \frac{x}{L}).$$

Solution analytique:

$$T(t, x) = T_0 + T_1. \sin(\pi \frac{x}{L}) \exp(-D(\frac{\pi}{L})^2 t).$$

A.P. : $T_0 = 300.$ K, $T_1 = 200.$ K, $L = 1.$ m.

Cas 2 : Dirichlet - Neumann - Milieu semi-infini

Conditions aux limites:

$$T(t, x = 0) = T_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big]_{x=L} = 0.$$

Condition initiale :

$$T(t = 0, 0 < x \leq L) = T_0.$$

Solution analytique:

$$T(t, x) = (T_1 - T_0)\ \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right).$$

A.P. : $T_0 = 300.$ K, $T_1 = 800.$ K, $L = 1.$ m.

Approximation Numérique

Les fonctions mises en jeu dans l'équation de la chaleur étant continues, il est nécessaire de discrétiser celle-ci afin de réaliser des calculs numériques. En effet, la notion de continu n'est pas compatible avec le fonctionnement d'un ordinateur. Pour ce faire, on discrétise, dans un premier lieu, l'espace (dans notre cas, la longueur de la barre) en $N_x + 1$ points séparés par des pas d'espace Δx et le temps en $N_t + 1$ points séparés par des pas de temps Δt. À chaque noeud du réseau correspond alors une température en un point de la barre, à un temps donné.

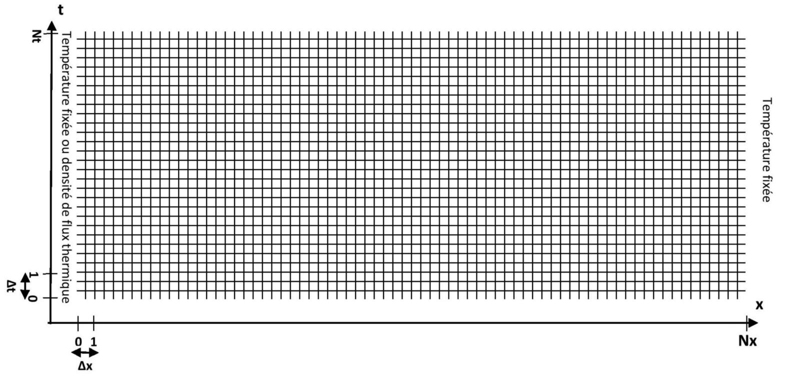

Figure 1: Schéma du maillage effectué

Nous avons :

$$t = n\Delta t, \quad n \in [0, N_t]$$
$$x = i\Delta x \quad i \in [0, N_x]$$

Schéma Différences finies

Comparaison analytique - numérique