

# Modélisation du transfert thermique et de masse dans la pyrolyse du bois

Julien Léger, Simon Francheo, Gurwan Le Hebel, Pierre Mériaux

ENSEIRB-Matmeca, Filière Mathématiques et Mécanique 1ère année

13 Mai 2025

## **Encadrants :**

Ludovic Godard-Cadillac  
Thanh-Ha Nguyen-Bui

# Introduction

- Enjeu : Sécurité incendie en forêt et pour les constructions.
- Modèle : Couplage des réactions chimiques de pyrolyse et de la diffusion de la chaleur.
- Utilisation de schémas implicites (Euler implicite, Crank-Nicolson)

# Équations de conservation de la masse

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -(k_1 + k_2)\rho_b \\ \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = k_1\rho_b \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = k_2\rho_b \\ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = -k_3\rho_l \\ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = k_3\rho_l \end{array} \right. \quad (1)$$

- $\rho_b, \rho_c, \rho_g, \rho_l, \rho_v$  : masses volumiques du bois, du charbon, du gaz, du liquide et de la vapeur.
- $k_1, k_2, k_3$  : taux de réactions chimiques.

# Résolution numérique

- Schémas numériques : Euler implicite et Crank-Nicolson.
- Condition de Dirichlet ( $T(t) = 300 + a \cdot t$ ).

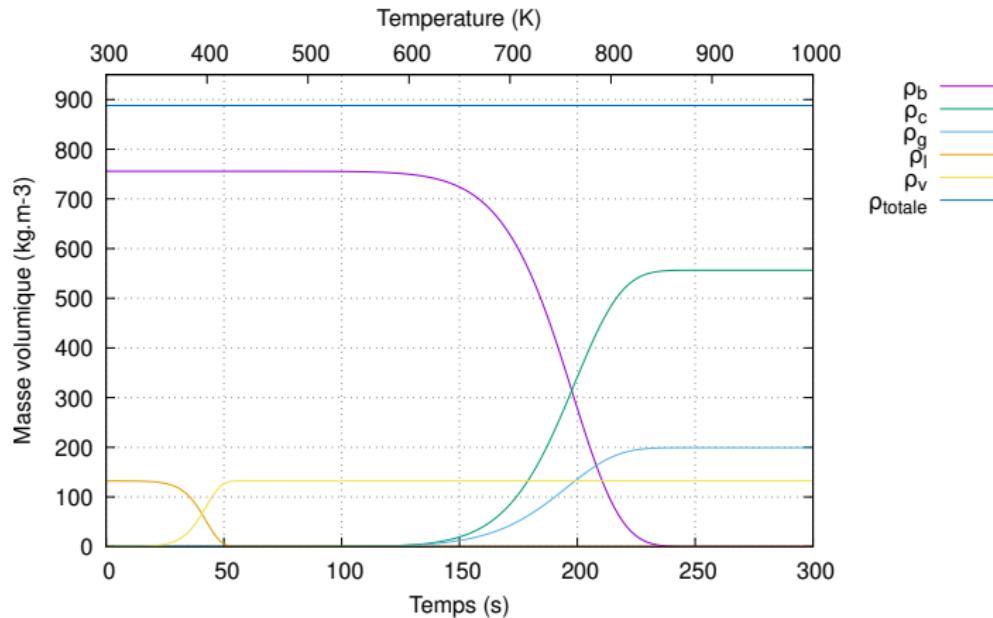
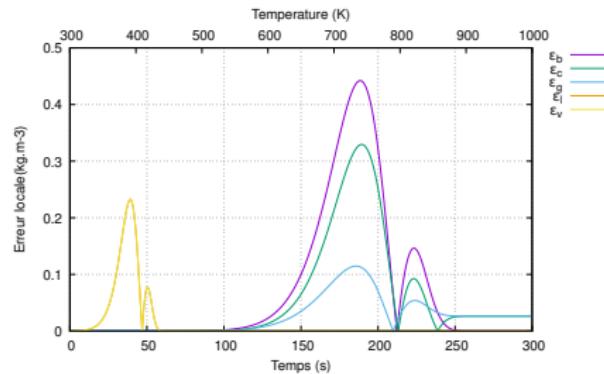


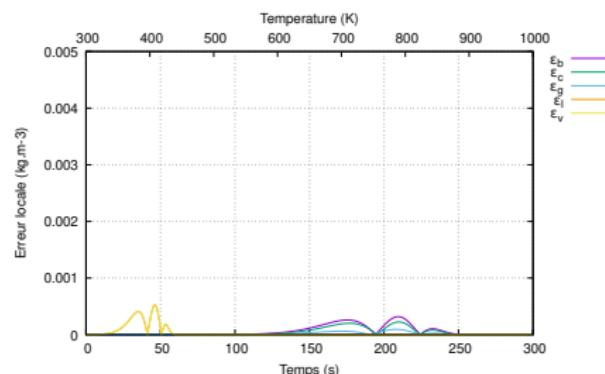
Figure – Évolution des masses volumiques avec le schéma de Crank-Nicolson

# Étude de l'erreur

- Comparaison des erreurs numériques locales entre Euler implicite et Crank-Nicolson.
- Le schéma de Crank-Nicolson est plus précis que celui d'Euler implicite.



Erreurs locales – Euler implicite



Erreurs locales – Crank-Nicolson

# Équation de la chaleur

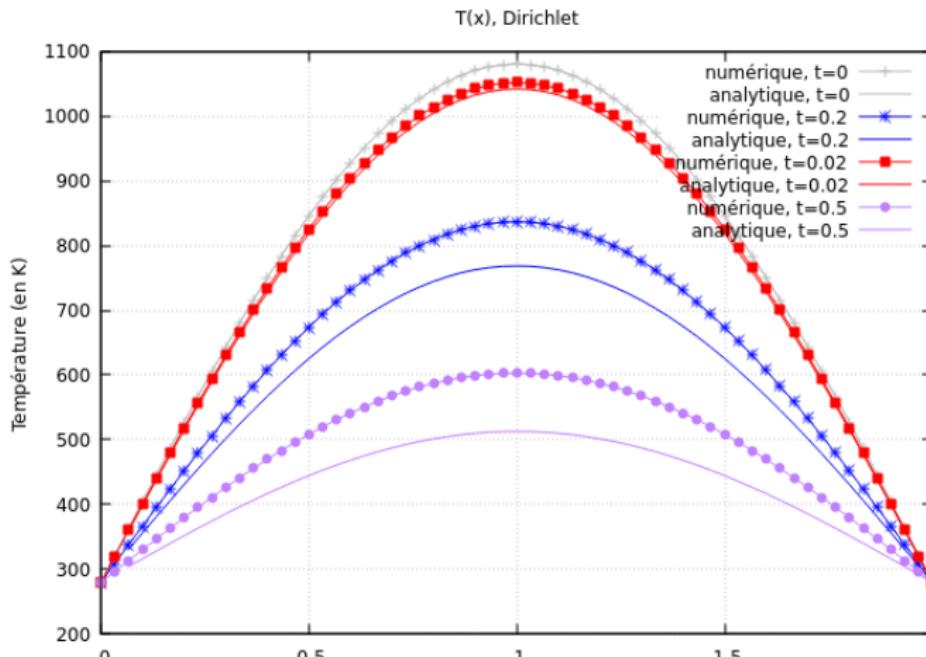
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q_r \quad (2)$$

- $\lambda, \rho, C_p$  : conductivité thermique, densité, chaleur spécifique.
- $Q_r$  : terme source de chaleur.
- EDP linéaire par rapport à  $T$
- Schéma numérique retenu (avec  $\lambda = \rho = D = 1$  et  $Q_r = 0$ ) :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

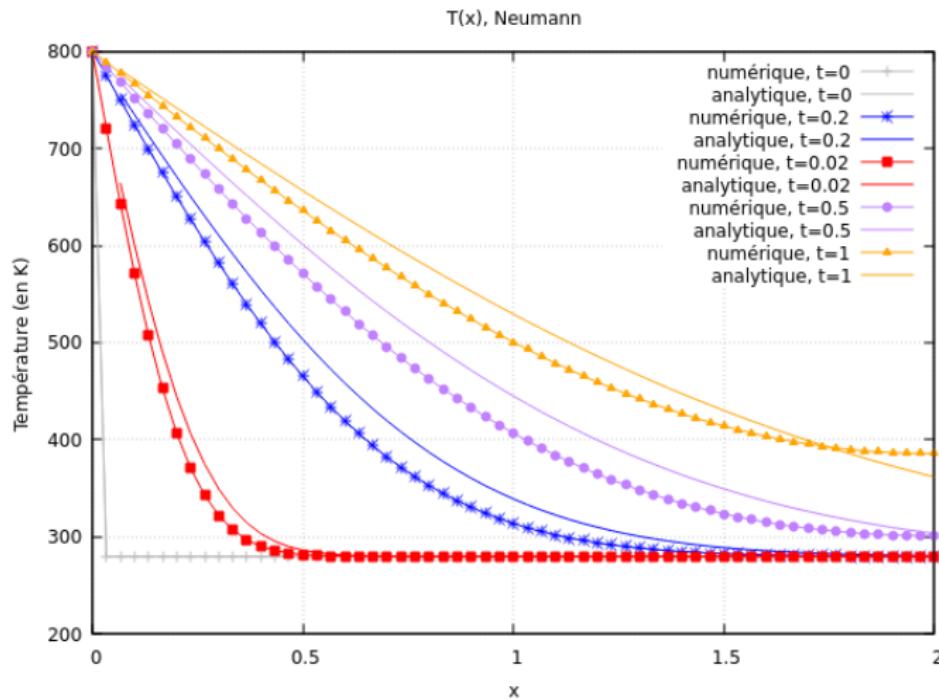
# Résultats et interprétations

- Évolution du champ de température.
- Validation du modèle par comparaison avec des solutions analytiques.
- Condition de Dirichlet :  $T(t, x = 0) = 280K$  et  $T(t, x = L) = 280K$



## Deuxième condition

- Condition de Dirichlet à gauche  $T(t, x = 0) = 800K$
- Condition de Neumann à droite  $\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0$



- Équation de la chaleur sous forme complète :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + Q_r \quad (4)$$

- Coefficients  $\rho$ ,  $\lambda$  dépendant de  $T \Rightarrow$  EDP non linéaire
- **1D** : Maillage régulier en espace de  $Nx + 2$  points.
- Approximation du flux thermique ( $\lambda \nabla T$ ) aux milieux des mailles.
- Méthodes implicites pour garantir la stabilité du schéma et améliorer le temps de calcul.

## Conditions initiales et aux limites

- Condition initiale :  $T(0, x) = T_{\text{init}}(x) = 300K$
- Condition de Dirichlet à gauche :  $T(t, x = 0) = T_G = 800K$
- Condition de Neumann adiabatique à droite :  $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$

# Schéma d'Euler implicite à 3 points

$$-\beta_{i-1}^n T_{i-1}^{n+1} + (1 + \alpha_i^n) T_i^{n+1} - \beta_{i+1}^n T_{i+1}^{n+1} = T_i^n + \gamma_i^n Q_i^n \quad (5)$$

- $\beta_{i\pm 1}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{\lambda_{i\pm \frac{1}{2}}^n}{(\rho C_p)_i^n}$ ,  $\alpha_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2 (\rho C_p)_i^n} \left( \lambda_{i-\frac{1}{2}}^n + \lambda_{i+\frac{1}{2}}^n \right)$ ,  $\gamma_i^n = \frac{\Delta t}{(\rho C_p)_i^n}$ 
  - Discrétisation sous forme matricielle MOL.
  - Résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$(I + A) \cdot T^{n+1} = b \quad (6)$$

## Matrice A et second membre b

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^n & -\beta_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_1^n & \alpha_2^n & -\beta_3^n & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & -\beta_{N_x-2}^n & \alpha_{N_x-1}^n & -\beta_{N_x}^n \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta_{N_x-1}^n & \beta_{N_x}^n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} T_1^n + \beta_0^n T_G + \gamma_1^n Q_1^n \\ T_2^n + \gamma_2^n Q_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N_x}^n + \gamma_{N_x}^n Q_{N_x}^n \end{bmatrix}$$

# Schéma de Crank-Nicolson à 3 points

$$-\frac{\beta_{i-1}^n}{2} T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha_i^n}{2}\right) T_i^{n+1} - \frac{\beta_{i+1}^n}{2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{\beta_{i-1}^n}{2} T_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\alpha_i^n}{2}\right) T_i^n + \frac{\beta_{i+1}^n}{2} T_{i+1}^n + \gamma_i^n Q_i^n \quad (7)$$

- Schéma d'ordre 2 global.
- Résolution sous forme matricielle.

$$(I + \frac{1}{2}A) \cdot T^{n+1} = (I - \frac{1}{2}A) T^n + \gamma^n \cdot Q^n \quad (8)$$

- **Solveur linéaire :** Méthode LU adapté aux matrices tridiagonales
- Complexité en  $O(n)$

# Principe de l'algorithme

## Pseudo-code résumé

### ① Initialisation :

- Initialisation des constantes de réaction
- Initialisation des masses volumiques
- Calcul de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .
- Initialisation des températures.

### ② Schéma numérique :

- Calcul de  $\rho C_p$ ,  $\lambda$ , et  $Q_r$ .
- Selon le schéma choisi (Euler implicite, Crank-Nicolson) :
  - Remplissage de la matrice  $A$  et construction du second membre  $b$ .
  - Résolution du système  $A \cdot T^{n+1} = b$ .
  - Application des conditions aux limites.
- Mise à jour des masses volumiques.
- Enregistrement des données au temps  $t_n$ .

### ③ Mise à jour des températures et incrémentation du temps.

# Résultats du couplage en 1D

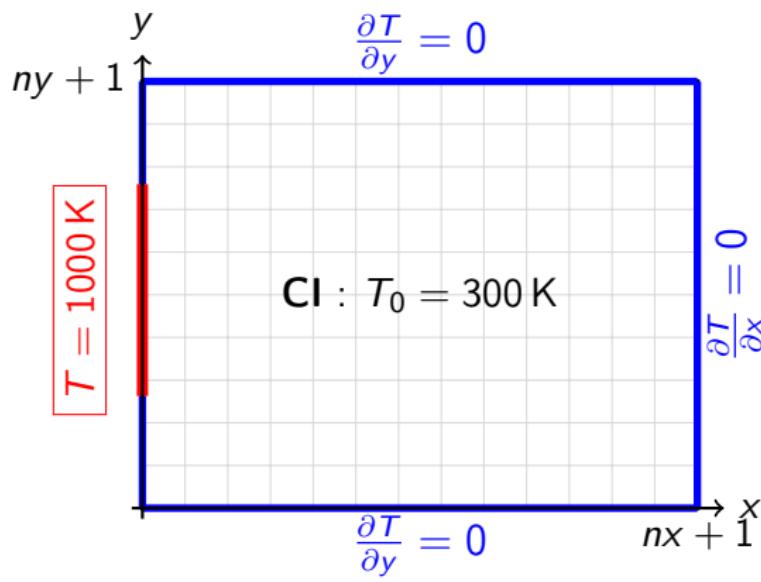
Figure – Évolution de la température et des masses volumiques en 1D avec Crank-Nicolson

# Cas bidimensionnel

- Construction d'un schéma d'EI pour l'équation de la chaleur en 2D.

$$(1 + \alpha_{i,j}^n)T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \beta_{i+1}^n T_{i+1,j}^{n+1} + \beta_{i-1}^n T_{i-1,j}^{n+1} + \beta_{j+1}^n T_{i,j+1}^{n+1} + \beta_{j-1}^n T_{i,j-1}^{n+1} + \gamma_{i,j}^n Q_{i,j}^n \quad (9)$$

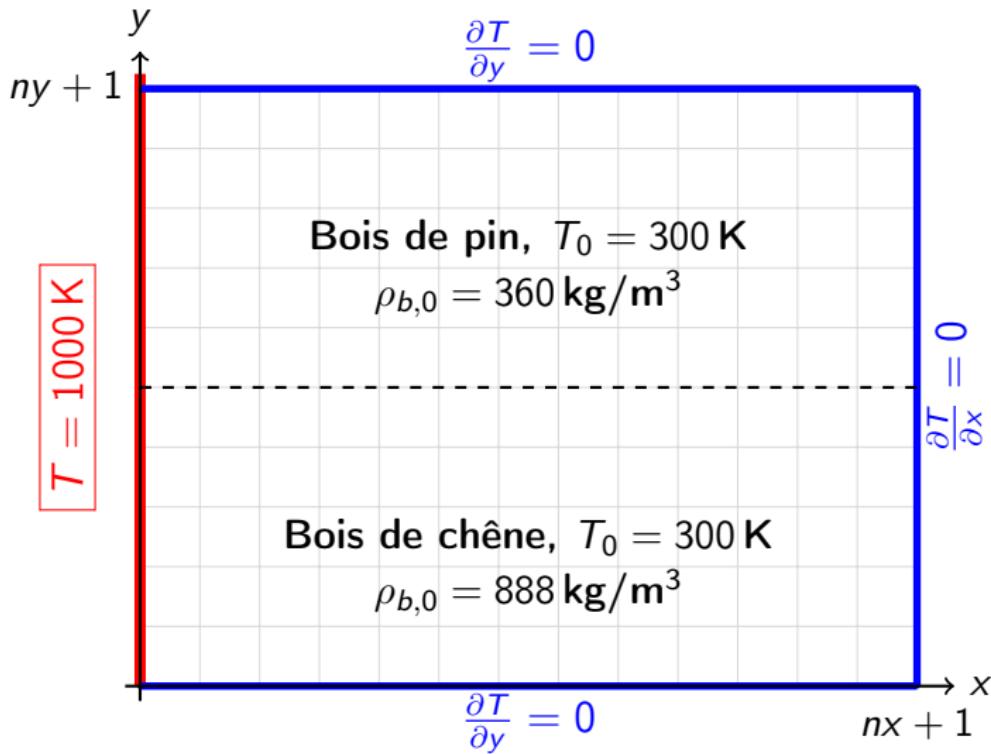
- Méthode itérative de Gauss-Seidel pour la résolution.



# Cas bidimensionnel : 1ère CL

Figure – Évolution des champs de température et de masse volumique du charbon en 2D

## Cas bidimensionnel : 2ème CL



# Cas bidimensionnel : 2ème CL

Figure – Évolution des champs de température en 2D avec 2 bois

## Comparaison des temps d'exécution

- **1D, Euler Implicit** : 0.25 secondes
  - **1D, Crank-Nicolson** : 0.33 secondes
  - **2D, Euler Implicit** : 305.60 secondes
  - **2D avec deux bois, Euler Implicit** : 299.80 secondes
- 
- Différence négligeable entre les schémas 1D
  - Passage à la 2D multiplie exponentiellement les temps de calcul

⇒ Parallélisation pour des problèmes plus grands

# Conclusion

- Modélisation et simulation numérique de la pyrolyse du bois.
- Utilisation de schémas implicites pour étudier l'évolution des champs de température et des masses volumiques.
- Résultats cohérents avec les attentes physiques.