

第7周周二作业 (编程部分)

大学物理 A (上)

2020-2021-2

更新日期: 2021-04-06

作业须知

1. 可下载样本文件(week7_assignments.ipynb), 在样本文件的基础上增删, 完成作业。
2. 编程作业须在第8周周日(2021-04-18) **Canvas平台**线上上交。

编程习题

1. 以下是8大行星到太阳的平均距离与公转周期的测量数据。通过数据拟合, 验证**开普勒第三定律** (又称调和定律, 或周期定律): 绕以太阳为焦点的椭圆轨道运行的所有行星, 其椭圆轨道半长轴的立方与周期的平方之比是一个常量。
 - (1) 先取靠近太阳最近的4个行星的数据进行拟合;
 - (2) 取全部8个行星的数据拟合。

行星	平均距离 ($\text{km} \times 10^6$)	周期 (地球日)
水星	57.59	87.99
金星	108.11	224.70
地球	149.57	365.26
火星	227.84	686.98
木星	778.14	4,332.4
土星	1,427.0	10,759
天王星	2,870.3	30,684
海王星	4,499.9	60,188

2. 质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的物体, 在保守力 $F(x)$ 的作用下, 沿 x 轴正向运动 ($x > 0$), 相应的势能是

$$V(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}, \quad x > 0$$

式中 x 以 m 为单位, 势能以 J 为单位, $a = 1 \text{ J}\cdot\text{m}^2$, $b = 2 \text{ J}\cdot\text{m}$. 设物体的总能量 $E = -0.50 \text{ J}$ 保持不变。

(1) 画出物体的势能曲线和力的曲线, 并指出平衡位置;

(2) 物体的运动被引力束缚在一定范围内, 求出物体的运动范围.

(提示: `from scipy.optimize import fsolve` 后使用 `fsolve` 函数求解非线性方程的根。)

3. (选做) 以地球球心作为坐标原点, 可以证明从地面上发射飞船运动的动力学方程为

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{GM_E m}{r^2} = -\frac{g R_E^2 m}{r^2}$$

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

其中飞船在极坐标下的坐标为 (r, θ) , M_E , R_E 分别为地球的质量与半径。 g 为地面加速度。 初始时刻飞船处于地面上, 其速度 \vec{v} 方向垂直于径向方向。

为了方便数值求解, 引入约化半径 r^* 与约化时间 t^* ,

$$r^* = \frac{r}{R_E}, \quad t^* = \sqrt{\frac{R_E}{2g}}$$

则动力学方程可化为

$$\frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} - r^* \left(\frac{d\theta}{dt^*} \right)^2 = -\frac{1}{2r^{*2}}$$

$$r^* \frac{d^2 \theta}{dt^{*2}} + 2 \frac{dr^*}{dt^*} \frac{d\theta}{dt^*} = 0$$

并且定义约化径向速度 v_r^* 与约化角速度 v_θ^* 为

$$v_r^* \equiv \frac{dr^*}{dt^*}, \quad v_\theta^* \equiv \frac{d\theta}{dt^*}$$

飞船的初始位置 $(r_0^*, \theta_0) = (1, 0)$, 飞船的初始速度 $(v_{r0}^*, v_{\theta0}^*) = (0, v_0/v_{II})$, 其中 v_0 为飞船的发射速度, v_{II} 为第二宇宙速度。

- (1) 若初始约化角速度采用如下不同的取值 $v_{\theta 0}^* = 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1, 1.05$ ，数值计算相应的轨道，并将结果画在一张图上。
- (2) 以 $v_{\theta 0}^* = 0.8, 0.9$ 为例，验证飞船的机械能守恒，角动量守恒 (必须取多个周期)。