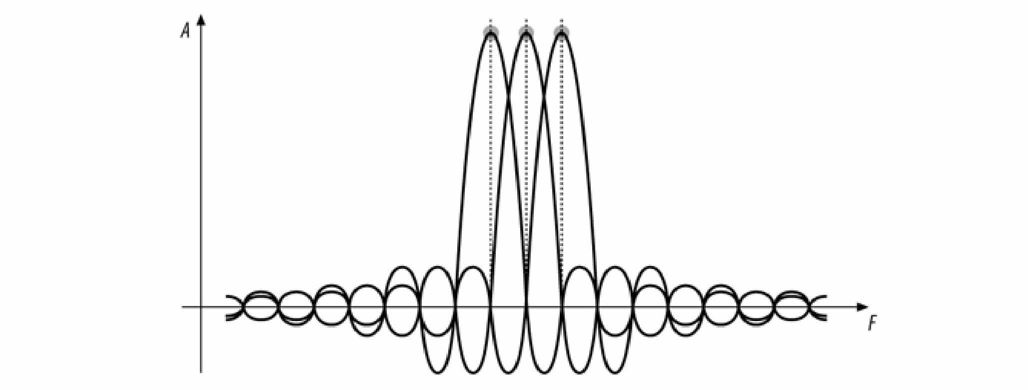
Author: Wei-Hsiang Liao

Supplementary Materials of Wi-Fi Physical Layer

1. OFDM subcarrier 相互正交之證明



Assume there are two arbitrary subcarriers which represent as

$$a_1 e^{jmt}, a_2 e^{jnt}$$

$\{a_1, a_2\}$ as the amplitudes and $a_i \in \mathbb{R}$.
Follow the definition of inner product

$$< f(x), g(x) > = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

"$\overline{g(x)}$" means the complex conjugates of $g(x)$.
We find

$$< a_1 e^{jmt}, a_2 e^{jnt} > = a_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{jmt}) e^{-jnt} dt$$

The definition of Fourier transfer is

$$\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-j\omega x} dx = F(\omega)$$

So we have

$$< e^{jmt}, e^{jnt} > = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{jmt}) e^{-jnt} dt = \Im\{e^{jmt}\}$$

In order to solve $\Im\{e^{jmt}\}$, we must introduce $\delta(x)$, Dirac Delta function

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

According to the definition of Dirac Delta function and Fourier transfer

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk$$

$$\Im\{e^{jmt}\} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{jmt}) e^{-jnt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(m-n)t}\, dt$$

We can find the corresponding relations about k and x

$$k \to t, x \to (m-n)$$

So

$$\Im\{e^{j\omega_0 t}\} = \ 2\pi\, \delta(\omega_0 - \omega)$$
$$< e^{jmt}, e^{jnt} > = \Im\{e^{jmt}\} = 2\pi\, \delta(m-n)$$

Because $m \neq n$, so $m - n \neq 0$, we can find

$$< a_1 e^{jmt}, a_2 e^{jnt} > \ = a_1 a_2 < e^{jmt}, e^{jnt} > \ = a_1 a_2 * 2\pi\, \delta(m-n) = a_1 a_2 * 2\pi * 0 = 0$$

根據內積的定義，正交等價於內積為零，故兩任意 subcarrier 相互正交。

2. Hardware 中 OFDM 的離散工作原理

假設總共有 N 組 subcarriers $\{a_1 e^{jkt},\ a_2 e^{j2kt}, \cdots, a_N e^{jNkt}\}$ 在週期 T 中，發送的信號為

$$\mathrm{s(t)} = \sum_{k=1}^{N} a_k * e^{jkt},\ 0 \leq t \leq T$$

在接收端，令s(t)與第 N 個 subcarrier 的相位做內積

$$< \mathrm{s(t)}, e^{jkt} > = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{k=1}^{N} a_k * e^{jkt}) * e^{-jkt} dt = a_k$$

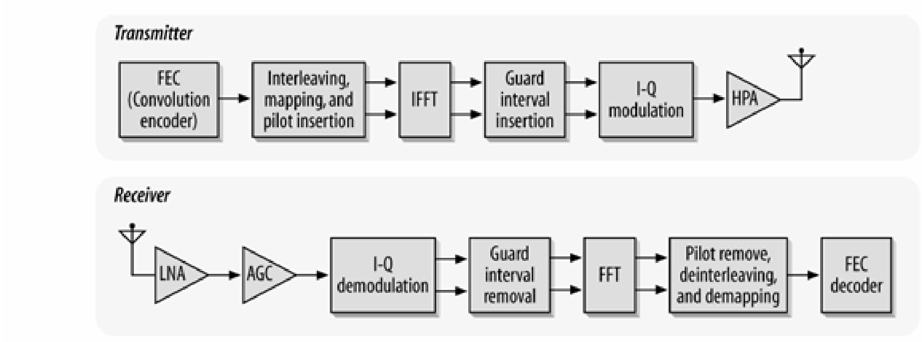
應用 Nyquist－Shannon 取樣定理，對個別 subcarrier 進行兩倍周期 n/2T 的採樣，s(t)改寫為

$$\mathrm{s(t)} = \sum_{k=1}^{N} a_k * e^{j\frac{kn}{2T}}$$

同理，s(t)與 subcarrier 相位的內積改寫為

$$< \mathrm{s(t)}, e^{jkt} > = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k * e^{j\frac{kn}{2T}} \right) * e^{-j\frac{kn}{2T}}$$

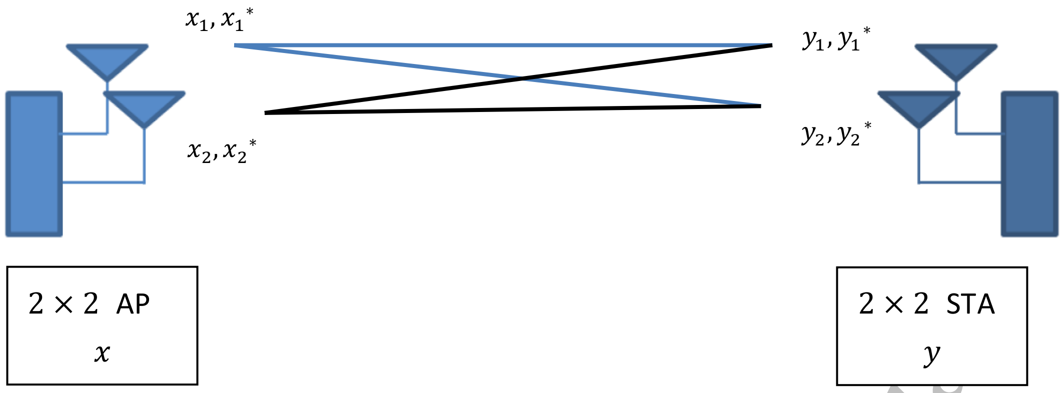
上式等同先對a_k進行離散傅立葉反轉換（IDFT）再進行 DFT。故 Hardware 結構圖中可見在 TX 端先行 IDFT，到 RX 端再做 DFT 將所收到之 subcarrier 振幅a_k還原解碼。



[注] 以上兩圖皆出自 802.11 Wireless Networks: The Definitive Guide, 2nd Edition, Matthew Gast, O'Reilly Media Inc., 2005.

3. 802.11ac TX Beamforming (MIMO) 工作原理與範例

假設現有一2×2的無線 AP 與一2×2的無線網卡 （STA），考慮 STBC 編碼的情況下，如下圖所示



其線性系統存在以下關係

$$y = Hx + n$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_1^* \\ n_2^* \end{bmatrix}$$

其中y代表 STA 端接收 symbol 向量，x代表 AP 端發送 symbol 向量，H代表 transmits matrix，n代表 noise（$n_i \in \mathbb{C}$）。

現欲求得$y - Hx$的最小 norm 值；即滿足$\|y - Hx\|_{min}$ 之最小二成方解為

$$\hat{x} = H^{+}y$$

$$\hat{x} = (H^H H)^{-1} H^H \mathrm{y}$$

$$\hat{x} = (H^H H)^{-1} H^H (Hx + n)$$

上標的 H 表示進行共軛轉置（associate）。

以下使用奇異值分解（Singular value decomposition，SVD）求$\hat{x}$：

a. $H \in \mathbb{C}$，由 SVD，H可分解為

$$H = USV^H$$

U與V皆為么正矩陣（unitary matrix）；即滿足

$$U^H = U^{-1}$$

$$V^H = V^{-1}$$

S為所有奇異值組成的主對角線矩陣，可表示為以下形式

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主對角線元素為奇異值（$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$），且$\sigma_i \in \mathbb{C}$。

b. 將 SVD 結果帶入線性系統方程式得

$$y(x) = USV^H x + n$$

在 AP 端對發送端 symbol 向量x先行乘上V進行預處理（$x \rightarrow Vx$）

$$y(Vx) = USV^{H}Vx + n$$

$$y(Vx) = (US)x + n$$

將(US)視為新的H，即

$$H' = US$$

改寫為線性系統形式

$$\mathrm{y} = H'x + n$$

套用最小二成方解

$$\hat{x}' = (H'^{H}H')^{-1}H'^{H}\mathrm{y}$$

$$\hat{x}' = [(US)^{H}(US)]^{-1}(US)^{H}[(US)x + n]$$

化簡後得

$$\hat{x}' = x + S^{-1}U^{-1}n$$

令

$$U^{-1}n = n'$$

帶入新的 noise

$$\hat{x}' = x + S^{-1}n'$$

由於S為主對角線矩陣，故

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{\sigma_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma_n} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

回歸2×2 AP 與2×2 STA

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STA 端透過 TX Beamforming 機制所得的y decode 出的$\hat{x}'$為

$$\hat{x}' = \begin{cases} \hat{x}'_1 = x_1 + \frac{1}{\sigma_1}n_1' \\ \hat{x}'_2 = x_2 + \frac{1}{\sigma_2}n_2' \end{cases}$$

深究 $\frac{n_i}{\sigma_i}$，因$\sigma_i \in \mathbb{C}$、$n_i \in \mathbb{C}$，故

$$\frac{n_i}{\sigma_i} = \frac{|n_i|}{|\sigma_i|}[Re\left(\frac{n_i|\sigma_i|}{\sigma_i|n_i|}\right) + i * Im\left(\frac{n_i|\sigma_i|}{\sigma_i|n_i|}\right)]$$

當個別 spatial stream 奇異值的絕對值$|\sigma_i|$越大時，各 stream 的 RX 端可 decode 出越清晰的發送端 symbol x_i，越小時則反之。

4. 802.11ac Wifi 單天線 VHT80 最高速率 433.3Mbps 的由來

$$\text{Date rate} = \frac{(Symbol\text{內}bit\text{數}) * (\text{有傳送資訊的}subcarrier\text{個數}) * (Coding\ rate)}{Total\ symbol\ time}$$

a. QAM 256 在一個 symbol 內可傳送 8bit 的資訊
b. 扣掉 pilot subcarrier，實際有傳送資訊的 subcarrier 共有 234 個
c. $Coding\ rate = {}^{5}/_{6}$
d. VHT80 總共含有 256 個 subcarrier，其頻率間隔 $= \frac{80MHz}{256} = 0.3125\text{MHz}$

IDFT 至 DFT 時間間隔 $= \frac{1}{0.3125MHz} = 3.2\mu s$

For short GI, guard interval $= 0.4\mu\text{s}$

$$Total\ symbol\ time = 3.2\mu\text{s} + 0.4\mu\text{s} = 3.6\mu\text{s}$$

So

$$\text{Date rate} = \frac{(8\ bit) * (234) * ({}^{5}/_{6})}{3.6\mu\text{s}} = 433.3\ Mbps$$