

WESTFÄLISCHE HOCHSCHULE

INFORMATIK

SLA

---

Stochastik und Lineare Algebra  
Übungsaufgaben

---

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

*Author(s):*

Eric Seidel, Malte Gaelings,  
Paul Sandow, Mikel  
Lautsch, Mario Zinta

*Supervisor(s):*

Prof. Dr. Frau Anderle

June 2, 2025

**Copyright © 2025 Westfälische hochschule**

This document, including appendices, is property of Westfälische hochschule and is confidential, privileged and only for use of the intended addressees and may not be used, published or redistributed without the prior written consent of Westfälische hochschule.

## Einleitung

Die vorliegende Aufgabensammlung wurde von Frau Prof. Dr. Anderle dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Sie dient der Vertiefung und Anwendung der Inhalte der Vorlesung *Stochastik und Lineare Algebra*.

Die Aufgaben decken alle für die Klausur 2025 relevanten Themen ab und sollen Ihnen die Möglichkeit geben, Ihr Verständnis zu festigen und sich gezielt auf die Prüfung vorzubereiten.

Obwohl die Aufgaben mit Sorgfalt ausgewählt und aufbereitet wurden, kann **für die vollständige Richtigkeit und Fehlerfreiheit keine Gewähr übernommen werden**. Wir empfehlen, die Lösungswege kritisch zu reflektieren und bei Unklarheiten Rücksprache zu halten.

Diese Aufgabensammlung dient als Hilfestellung. Sie sollten versuchen, die Aufgaben selbstständig und nur mit den erlaubten Hilfsmitteln zu bearbeiten und erst nach deren Bearbeitung Ihren eigenen Lösungsweg mit den hier vorliegenden Lösungsvorschlägen zu überprüfen.

Diese Aufgabensammlung enthält auch Lösungen zu den Bonustests. Da diese Tests teilweise viele Variationen aufweisen, ist es wahrscheinlich, dass Ihre konkreten Zahlenwerte und Ihr Ergebnis von den hier dargestellten abweichen werden. Beachten Sie des Weiteren, dass auch die Reihenfolge der Bonustests variieren kann. Achten Sie deswegen bitte auf den Titel des jeweiligen Tests, um die korrekte Lösung zuzuordnen.

Die hier vorgestellten Rechenwege sind der Verständlichkeit halber bewusst sehr detailliert gehalten. In der Prüfung sollten Sie aus zeitlichen Gründen eine kompaktere Darstellung wählen. Es empfiehlt sich, Ihren Professor oder Ihre Professorin mit einer Ihrer Beispielrechnungen zu konsultieren. So können Sie sicherstellen, dass Ihre Notation korrekt ist, keine wesentlichen Schritte fehlen und Ihre Ausführungen den Anforderungen entsprechen, ohne unnötig ausführlich zu sein.

Haben Sie des Weiteren keine Bedenken, einen anderen Lösungsweg zu verfolgen. Die hier aufgezeigten Lösungswege sind lediglich Vorschläge und sind keineswegs die einzig korrekten Wege.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Bearbeitung und eine gute Klausurvorbereitung!

# Contents

<b>I</b>	<b>Bonusteste</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Bonustest 1 - Rechnen mit Vektoren</b>	<b>2</b>
1.1	Frage 1 . . . . .	2
1.2	Frage 2 . . . . .	2
1.3	Frage 3 . . . . .	3
1.3.1	a) . . . . .	3
1.3.2	b) . . . . .	4
1.4	Frage 4 . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Übungsblatt 5</b>	<b>9</b>
2.1	Aufgabe 1 . . . . .	9
2.1.1	a . . . . .	9
2.1.2	b . . . . .	9
2.2	Aufgabe 2 . . . . .	9
2.2.1	a . . . . .	10
2.2.2	b . . . . .	11
2.3	Aufgabe 3 . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Übungsblatt 6</b>	<b>14</b>
3.1	Aufgabe 1 . . . . .	14
3.1.1	a . . . . .	14
3.1.2	b) . . . . .	14
3.1.3	c) . . . . .	15
3.2	Aufgabe 2 . . . . .	16
3.2.1	a) . . . . .	16
3.2.2	b) . . . . .	17
3.3	Aufgabe 3 . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Übungsblatt 7</b>	<b>28</b>
4.1	Aufgabe 1 . . . . .	28
4.1.1	a . . . . .	28
4.1.2	b . . . . .	28
4.1.3	c . . . . .	28
4.2	Aufgabe 2 . . . . .	29

4.2.1	a . . . . .	29
4.2.2	b . . . . .	30
4.2.3	c . . . . .	30
4.2.4	d . . . . .	31
4.3	Aufgabe 3 . . . . .	34
4.3.1	a . . . . .	34
4.3.2	b . . . . .	34
4.4	Aufgabe 4 . . . . .	35
4.4.1	a . . . . .	35
4.4.2	b . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Übungsblatt 8</b>	<b>37</b>
5.1	Aufgabe 1 . . . . .	37
5.1.1	a . . . . .	37
5.1.2	b . . . . .	37
5.1.3	c . . . . .	38
5.2	Aufgabe 2 . . . . .	39
5.2.1	a . . . . .	39
5.2.2	b . . . . .	40
5.2.3	c . . . . .	41
5.3	Aufgabe 3 . . . . .	41
5.3.1	a . . . . .	41
5.3.2	b . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Übungsblatt 9</b>	<b>43</b>
6.1	Aufgabe 1 . . . . .	43
6.1.1	a . . . . .	43
6.1.2	b . . . . .	43
6.2	Aufgabe 2 . . . . .	43
6.2.1	a . . . . .	43
6.2.2	b . . . . .	44
6.3	Aufgabe 3 . . . . .	44
6.3.1	a . . . . .	44
6.3.2	b . . . . .	44
6.3.3	c . . . . .	44

## Part I

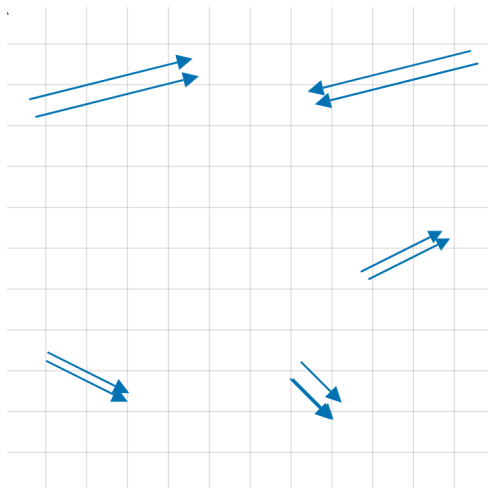
# Bonusteste

# 1. Bonustest 1 - Rechnen mit Vektoren

## 1.1 Frage 1

Wie viele verschiedene Vektoren sind auf diesem Bild zu sehen?

In dieser Aufgabe geht es im wesentlichen darum, die **verschiedenen** Pfeile zu zählen. Es ist hilfreich, die Vektoren in dem Graphen so zu verschieben, dass gleiche Vektoren beieinander sind. So muss nur noch die Anzahl der Cluster gezählt werden.

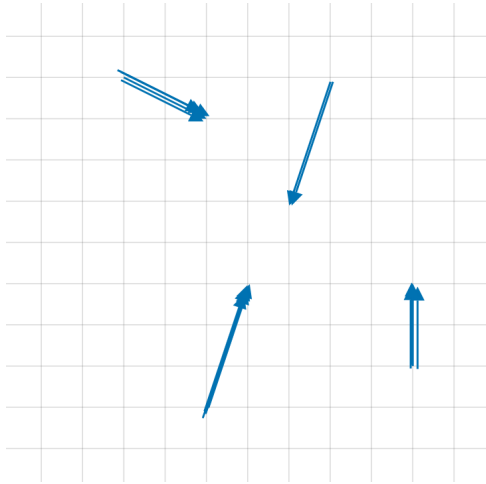


Hier gibt es **5** verschiedene Vektoren.

## 1.2 Frage 2

In der folgenden Abbildung sind verschiedene Vektoren dargestellt. Ein Kästchen entspricht einer Längeneinheit. Geben Sie die verschiedenen Vektoren, die im Bild zu sehen sind, als Liste in eckigen Klammern an. Die Einträge dieser Liste sind dabei die verschiedenen Vektoren dargestellt als Paare von Zahlen in eckigen Klammern. Ihre Antwort sollte also ein Ausdruck der Form  $[[1,3],[-2,0],[1,1]]$  oder  $[[0,3],[1,-1],[-1,1],[4,2]]$  etc. sein.

Hier ist es auch wieder Sinnvoll, die Vektoren zu sortieren. Dann müssen die Vektoren nur noch abgelesen werden. Die Vektoren werden über  $[x, y]$  benannt, wobei  $x$  der weg ist, den der Vektor nach rechts "geht" und  $y$  die höhe des Vektors ist.



Hier befinden sich in der Abbildung die Vektoren  $[[1, 3], [0, 2], [2, -1], [-1, -3]]$

### 1.3 Frage 3

Gegeben sind im  $\mathbb{R}^3$  die beiden Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  in Komponentendarstellung, wobei  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  ist.

#### 1.3.1 a)

Geben Sie die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  in Koordinatendarstellung an.

**I**

Es ist  $\vec{u} = \frac{3\vec{e}_3}{2} + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1$

Hier muss der Vektor berechnet werden. Da die Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  die Standardvektoren sind, ist deren Wert bekannt  $\left( \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Bevor das Ergebnis berechnet wird, sollte noch der Bruch aufgelöst werden:

$$\frac{3\vec{e}_3}{2} = \frac{3 \cdot \vec{e}_3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\vec{e}_3}{1} = \frac{3}{2}\vec{e}_3$$

Jetzt können die Einheitsvektoren einfach eingesetzt werden



$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Vektor  $\vec{u}$  ist also  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ .

## II

es ist  $\vec{v} = 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2$ .

Hier können wieder die Einheitsvektoren eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 1.3.2 b)

Berechnen Sie für die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aus Teilaufgabe a) folgende Größen.  
Geben Sie die Lösung exakt, also nicht näherungsweise an.

## I

Es ist  $\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-4 \\ \frac{3}{2}-4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## II

Es ist  $|3\vec{u} + 3\vec{v}|$

Die Betragsstriche meinen hier, dass die Länge des Vektors berechnet werden soll. Diese kann über die Formel  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$  berechnet werden. Es muss also zunächst der resultierende Vektor von  $3\vec{u} + 3\vec{v}$  berechnet werden und von diesen Vektor muss dann die Länge bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
& \left| 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{9^2 + 12^2 + \frac{21^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1341}{2}}
\end{aligned}$$

## III

Es ist  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Hier soll das Skalarprodukt berechnet werden. Das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  berechnet sich aus  $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 \\
&= 0 + 4 + 3 \\
&= 7
\end{aligned}$$

#### IV

Es ist  $\vec{u} \times \vec{v}$

Hier soll das Kreuzprodukt berechnet werden. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  der Länge 3 lässt sich über  $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - \frac{3}{2} \cdot 2 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 0 - 6 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 1.4 Frage 4

In welchem der folgenden Bilder ist das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  negativ?

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist negativ, wenn der Winkel zwischen den Vektoren größer als  $90^\circ$  beträgt.

#### Herleitung: Vorzeichen des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist fundamental durch ihre Beträge und den von ihnen eingeschlossenen Winkel  $\theta$  definiert:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Hierbei sind  $|\vec{a}|$  und  $|\vec{b}|$  die Längen der Vektoren. Der Winkel  $\theta$  ist der kleinste Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , sodass  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .

## Die Rolle des Kosinus

Die Beträge  $|\vec{a}|$  und  $|\vec{b}|$  sind per Definition stets nicht-negativ. Wenn wir annehmen, dass weder  $\vec{a}$  noch  $\vec{b}$  der Nullvektor ist (d.h.  $|\vec{a}| > 0$  und  $|\vec{b}| > 0$ ), dann sind ihre Beträge positive Zahlen. Das Produkt zweier positiver Zahlen ( $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ) ist ebenfalls positiv. Folglich hängt das Vorzeichen des gesamten Skalarprodukts  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  ausschließlich vom Vorzeichen des Terms  $\cos(\theta)$  ab:

$$\text{Vorzeichen}(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle) = \text{Vorzeichen}(\cos(\theta))$$

## Verhalten von $\cos(\theta)$ im relevanten Winkelbereich

Betrachten wir das Vorzeichen von  $\cos(\theta)$  für die möglichen Werte des Winkels  $\theta$  zwischen zwei Vektoren:

- **Spitzer Winkel:**  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$

Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus positiv:  $\cos(\theta) > 0$ . Das Skalarprodukt ist somit:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{positiv}} \implies \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle > 0$$

- **Rechter Winkel:**  $\theta = 90^\circ$

Für einen rechten Winkel ist der Kosinus Null:  $\cos(90^\circ) = 0$ . Das Skalarprodukt ist somit:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos(90^\circ)}_0 \implies \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

In diesem Fall stehen die Vektoren orthogonal (senkrecht) aufeinander.

- **Stumpfer Winkel:**  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$

Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus negativ:  $\cos(\theta) < 0$ . Das Skalarprodukt ist somit:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{negativ}} \implies \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$$

## Schlussfolgerung aus der Herleitung

Das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  ist **genau dann negativ**, wenn der Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\theta$  negativ ist. Dies ist der Fall, wenn der Winkel  $\theta$  ein stumpfer Winkel ist, also  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ .

## Part II

# Lineare Algebra

## 2. Übungsblatt 5

### 2.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Rechenoperationen.

#### 2.1.1 a

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 20 \\ 3 + 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 2.1.2 b

$$\begin{aligned} 10 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \cdot 5 \\ 10 \cdot 4 \\ 10 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 + 4 + 3 \\ 40 + 4 + 2 \\ 30 + 0 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 57 \\ 46 \\ 31 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

### 2.2 Aufgabe 2

Sind die folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig? Können sie durch Entfernen eines Vektors linear unabhängig gemacht werden?

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier zwei gängige Ansätze:

1. Prüfung über die Determinante: Man bildet aus den Vektoren eine quadratische Matrix  $A$ . Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn die Determinante dieser Matrix ungleich null ist ( $\det(A) \neq 0$ ). Ist die Determinante gleich null ( $\det(A) = 0$ ), sind die Vektoren linear abhängig. (Diese Methode ist direkt nur anwendbar, wenn die Anzahl der Vektoren der Dimension des Raumes entspricht, z.B. 2 Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  oder 3 Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ ).
2. Prüfung über die Definition der linearen Unabhängigkeit: Eine Menge von Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist linear unabhängig, wenn die einzige Lösung der Vektorgleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \mathbf{0}$$

die sogenannte triviale Lösung ist, bei der alle Skalare  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gleich null sind ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ). Wenn es mindestens eine nicht-triviale Lösung gibt (d. h. mindestens ein  $x_i \neq 0$ ), dann sind die Vektoren linear abhängig.

### 2.2.1 a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

#### Prüfung für a über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinante der Matrix A berechnen

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} - A_{2,1} \cdot A_{1,2} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 - 1 = -1$$

Da die Determinante ungleich null ist, ist die Linearkombination linear unabhängig.

## Prüfung für a über Linearkombination

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 = 0 \end{cases}$$

in I einsetzen

$$0 + x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem  $x_1 = x_2 = 0$  ist, sind die Vektoren linear unabhängig.

### 2.2.2 b

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es können nur drei Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear unabhängig sein. Jede Kombination aus mehr als drei Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  ist linear abhängig. Daher sind die vier Vektoren linear abhängig.

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, wird ein beliebigen Vektor entfernt. hier wird der vierte Vektor entfernt.

Im schlimmsten Fall kann es passieren, dass vier Linearkombinationen auf lineare Unabhängigkeit prüfen müssen, bis wir eine Linearkombination gefunden wird, welche linear unabhängig ist.

## Prüfung für b über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



2. Determinante der Matrix B berechnen

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= B_{1,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{3,3} + B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{3,1} + B_{1,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{3,2} \\
 &\quad - B_{3,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{1,3} - B_{3,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{1,1} - B_{3,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{1,2} \\
 &= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= 0 + 1 + 2 - 0 - 1 - 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich null ist, kann die Vektormenge durch entfernen des vierten Vektors linear unabhängig gemacht werden.

### Prüfung für b über Linearkombination

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_3 = 0 \quad | -x_3 \Leftrightarrow x_1 = -x_3 \\ \text{III:} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$x_1$  in III einsetzen

$$-x_3 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$

$x_1$  und  $x_2$  in I einsetzen

$$-x_3 + 0 + 2x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_3 + 2x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 0$$

$x_3$  in II einsetzen

$$x_1 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem ist  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , das heißt, dass die Vektormenge ohne den vierten Vektor linear unabhängig ist.

---

## 2.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums

$$V := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension eines Untervektorraums ist die Anzahl der Basisvektoren. Um herauszufinden, ob die gegebenen Vektoren eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden, muss auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden.

Hier bietet es sich nicht an, dies über die Determinante zu errechnen, da nur quadratische Matritzen eine Determinante besitzen.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_1 = 0 \end{cases} \\ x_1 \text{ in I einsetzen} \\ 0 + x_2 = 0 \\ \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{aligned}$$

Da  $x_1 = x_2 = 0$  ist, ist die Vektormenge linear unabhängig. Diese zwei linear unabhängigen Vektoren spannen den Untervektorraum  $V$  auf und bilden somit eine Basis dieses Untervektorraums  $V$ . Da diese Basis aus zwei Vektoren besteht, ist die Dimension des Untervektorraums  $V$  gleich 2.

# 3. Übungsblatt 6

## 3.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

### 3.1.1 a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
3 2	1
5 4	5
Operation: 3II - 5I	
3 2	1
0 2	10
Operation: I - II	
3 0	-9
0 2	10
Operation: I : 3	
Operation: II : 2	
1 0	-3
0 1	5

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 5$$

### 3.1.2 b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 15x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \\ -x_1 - 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
1 2 -1	10
15 1 -4	10
-1 0 -3	10
Operation: II + 15III	
1 2 -1	10
0 1 -49	160
-1 0 -3	10
Operation: III + I	
1 2 -1	10
0 1 -49	160
0 2 -4	20
Operation: III - 2II	
1 2 -1	10
0 1 -49	160
0 0 94	-300
Operation: III : 94	
1 2 -1	10
0 1 -49	160
0 0 1	$-\frac{150}{47}$
Operation: I + III	
1 2 0	$\frac{320}{47}$
0 1 -49	160
0 0 1	$-\frac{150}{47}$
Operation: II + 49III	
1 2 0	$\frac{320}{47}$
0 1 0	$\frac{170}{47}$
0 0 1	$-\frac{150}{47}$
Operation: I - 2II	
1 0 0	$\frac{20}{47}$
0 1 0	$\frac{170}{47}$
0 0 1	$-\frac{150}{47}$

$$x_1 = -\frac{20}{47} \quad x_2 = \frac{170}{47} \quad x_3 = -\frac{150}{47}$$

### 3.1.3 c)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
1 -1 -1	1
1 1 -1	2
Operation: II - I	
1 -1 -1	1
0 2 0	1
Operation: 2I + II	
2 0 -2	3
0 2 0	1
Operation: I : 2	
Operation: II : 2	
1 0 -1	$\frac{3}{2}$
0 1 0	$\frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 =: t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_1 - t = \frac{3}{2} \quad | + t$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} + t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + t \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

## 3.2 Aufgabe 2

### 3.2.1 a)

Wenn fünf Ochsen und zwei Schafe acht Taels Gold kosten, sowie zwei Ochsen und acht Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines Tieres? (Chiu-Chang Suan-Chu, 300 n.Chr.)

$$x_1 := \text{Ochsen} \quad x_2 := \text{Schafe}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 8x_2 = 8 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
5 2	8
2 8	8
Operation: 5II - 2I	
5 2	8
0 36	24
Operation: 36I - 2II	

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

Table 3.4 – Fortführung von vorheriger Seite									
Linearkombination					Konstanten				
180	0				240				
0	36				24				
Operation: I: 180									
Operation: II: 36									
1	0				$\frac{4}{3}$				
0	1				$\frac{3}{2}$				

### 3.2.2 b)

Ein 9-Tupel  $(x_1, \dots, x_9)$  nennt man “magisches Quadrat der Ordnung 3”, wenn gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= x_4 + x_5 + x_6 = x_7 + x_8 + x_9 = x_1 + x_4 + x_7 \\ &= x_2 + x_5 + x_8 = x_3 + x_6 + x_9 = x_1 + x_5 + x_9 = x_3 + x_5 + x_7 \end{aligned}$$

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu diesen sieben Bedingungen äquivalent ist, und bestimmen Sie den Lösungsraum in  $\mathbb{R}^9$ . Wie kann man die Menge der rationalen Lösungen (also der  $(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Q}^9$ ) beschreiben? Gibt es auch eine Lösung in  $\mathbb{Z}^9$ ? Oder gar in  $\mathbb{N}^9$ ? (siehe J. W. von Goethe 1: Faust. Der Tragödie erster Teil, Hexenküche).

(Diese Aufgaben sind entnommen aus: *Peter Knaber, Wolf P. Barth: Lineare Algebra. Aufgaben und Lösungen. Springer Verlag, 2017. Seite 4.*)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 - x_7 - x_8 - x_9 = 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 - x_1 - x_4 - x_7 = 0 \Rightarrow -x_1 - x_4 + x_8 + x_9 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 - x_2 - x_5 - x_8 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 - x_8 \\ x_2 + x_5 + x_8 - x_3 - x_6 - x_9 = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 + x_5 - x_6 + x_8 - x_9 \\ x_3 + x_6 + x_9 - x_1 - x_5 - x_9 = 0 \Rightarrow -x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \\ x_1 + x_5 + x_9 - x_3 - x_5 - x_7 = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 - x_7 + x_9 \end{array} \right.$$

Linearkombination									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
III	-1	0	0	-1	0	0	0	1	1
IV	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
V	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
VI	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0
VII	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1

Ziel: erste Spalte bereinigen

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
Operation: III + I									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>III</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>IV</i>	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0
<i>VII</i>	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
Operation: IV - I									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>III</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>IV</i>	0	-2	-1	2	0	1	1	-1	0
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0
<i>VII</i>	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
Operation: VI + I									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>III</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>IV</i>	0	-2	-1	2	0	1	1	-1	0
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
<i>VII</i>	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
Operation: VII - I									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>III</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>IV</i>	0	-2	-1	2	0	1	1	-1	0
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
<i>VII</i>	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Ziel: zweite Spalte bereinigen									
Operation: II und III tauschen									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>IV</i>	0	-2	-1	2	0	1	1	-1	0
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
<i>VII</i>	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: IV + 2V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>IV</i>	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
<i>V</i>	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
<i>VII</i>	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: V - VI									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>IV</i>	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
<i>V</i>	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
<i>VII</i>	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: VI + VII									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>IV</i>	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
<i>V</i>	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: VII + II									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
<i>IV</i>	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
<i>V</i>	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
Ziel: dritte Spalte bereinigen									
Operation: III und VII tauschen									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
<i>IV</i>	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
<i>V</i>	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Operation: IV - V									

Fortsetzung siehe nächste Seite



Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Operation: V - 3III									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	4	3	-1	3	-2	-7
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Operation: III · (-1)									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	4	3	-1	3	-2	-7
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Ziel: vierte Spalte bereinigen									
Operation: V - 4VII									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Operation: VII - IV									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	0	2	1	-2	-1	0
Ziel: fünfte Spalte bereinigen									
Operation: 2VI + VII									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
<i>VI</i>	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
<i>VII</i>	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: VI - V									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
<i>VII</i>	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: V · (-1)									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
<i>VII</i>	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Ziel: sechste Spalte bereinigen									
Operation: 2VII - VI									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
<i>VII</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Operation: VI : 6									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
<i>VII</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die siebte Zeile (VII) besteht ausschließlich aus nullen. Das bedeutet, dass die ursprüngliche siebte Gleichung von den anderen linear abhängig war und keine neuen Informationen liefert. Diese Zeile wird daher im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte sechs oberhalb des Pivots eliminieren									
Operation: V - 5VI									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + VI									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + VI									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte fünf oberhalb des Pivots eliminieren									
Operation: IV + V									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + V									
<i>I</i>	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite

Linearkombination									
<i>I</i>	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte vier oberhalb des Pivots eliminieren									
Operation: III - IV									
<i>I</i>	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + 2IV									
<i>I</i>	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
<i>II</i>	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + IV									
<i>I</i>	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
<i>II</i>	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte drei oberhalb des Pivots eliminieren									
Operation: II - III									
<i>I</i>	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
<i>II</i>	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I - III									
<i>I</i>	1	1	0	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>II</i>	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte zwei oberhalb des Pivots eliminieren									
Operation: I - II									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 3.5 – Fortführung von vorheriger Seite										
Linearkombination										
<i>I</i>	1	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
<i>II</i>	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
<i>III</i>	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
<i>IV</i>	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	
<i>V</i>	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
<i>VI</i>	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Hieraus lässt sich jetzt Schließen, dass

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9, \\
x_2 - \frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9, \\
x_3 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9, \\
x_4 + \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{4}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_4 = -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9, \\
x_5 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_5 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9, \\
x_6 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 &= 0 \Leftrightarrow x_6 = \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 \\ \frac{2}{3}x_7 \\ -\frac{1}{3}x_7 \\ -\frac{2}{3}x_7 \\ \frac{1}{3}x_7 \\ \frac{4}{3}x_7 \\ 1x_7 \\ 0x_7 \\ 0x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_8 \\ -\frac{1}{3}x_8 \\ \frac{2}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ 0x_8 \\ 1x_8 \\ 0x_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_9 \\ 0x_9 \\ 0x_9 \\ 1x_9 \end{pmatrix} \\
&= x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wobei  $x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}$

Der Lösungsraum des Tupels in  $\mathbb{R}^9$  ist also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Menge der Rationalen Lösungen kann einfach beschrieben werden also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Um eine Lösung in  $\mathbb{Z}^9$  zu erhalten kann sichergestellt werden, dass alle Komponenten ein vielfaches von drei sind. Hierfür kann beispielsweise die hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dass  $x_7 = 3a, x_8 = 3b, x_9 = 3c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  aufgestellt werden.

Man wähle beispielsweise  $a = 1, b = 1, c = 1$ , so erhält man das magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dieses ist auch eine Lösung für ein magisches Quadrat aus  $\mathbb{N}^9$ .

### 3.3 Aufgabe 3

Schreiben Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus in Pseudocode auf.

```

1 def gauss_jordan(matrix: list[list[float]], constants: ←
    list[list[float]] | None) -> list[list[float]]:
2     n = len(matrix)
3     m = len(matrix[0])
4     i = 0
5
6     while i < n and i < m:
7         pivot_zeile = i
8
9         for zeile in range(i + 1, n): # beste Zeile zum ←
            tauschen finden
10            if abs(matrix[zeile][i]) > abs(matrix[pivot_zeile ←
                ][i]):
11                pivot_zeile = zeile
12
13            if pivot_zeile != i: # Zeilen ggf. tauschen
14                matrix[i], matrix[pivot_zeile] = matrix[ ←
                    pivot_zeile], matrix[i]
15            if constants:
16                constants[i], constants[pivot_zeile] = constants ←
                    [pivot_zeile], constants[i]
17
18            if matrix[i][i] == 0:
19                i += 1
20                continue # Es gab keinen geeigneten Tauschkanidat. ←
                    Eliminierung wird uebersprungen.
21
22            pivot_wert = matrix[i][i]
23            for k_norm in range(i, m):
24                matrix[i][k_norm] = matrix[i][k_norm] / pivot_wert
25            if constants and i < len(constants) and constants[i] ←
                is not None:
26                for c_col in range(len(constants[i])):
27                    constants[i][c_col] = constants[i][c_col] / ←
                        pivot_wert
28
29            for j in range(0, i): # Nullen oberhalb
30                factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
31                for k in range(i, m):
32                    matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * ←
                        factor
33            if constants and len(constants[0]) > 0:

```

```

34         num_const_cols = len(constants[0])
35         for c_col in range(num_const_cols):
36             constants[j][c_col] = constants[j][c_col] ←
                ] - constants[i][c_col] * factor
37
38     for j in range(i + 1, n): # Nullen unterhalb
39         factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
40         for k in range(i, m):
41             matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * ←
                factor
42         if constants and len(constants[0]) > 0:
43             num_const_cols = len(constants[0])
44             for c_col in range(num_const_cols):
45                 constants[j][c_col] = constants[j][c_col] ←
                    ] - constants[i][c_col] * factor
46
47     i += 1
48
49     return matrix, constants

```



## 4. Übungsblatt 7

### 4.1 Aufgabe 1

#### 4.1.1 a

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 7 \cdot 1 & -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.1.2 b

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.1.3 c

$$\begin{aligned} &A \cdot w \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 15 + 17 \cdot 50 + 24 \cdot 36 \\ 9 \cdot 15 + 32 \cdot 50 + 6 \cdot 36 \\ -5 \cdot 15 - 1 \cdot 50 + 47 \cdot 36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1804 \\ 1951 \\ 1567 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 4.2 Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sowie die lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit:

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

### 4.2.1 a

Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\{u_1, u_2, u_3\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden.

Prüfen auf lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} & x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{I} = \text{II}$$

$$x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 \quad | -x_1 \quad | +x_2$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 = x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

in I einsetzen

$$2x_2 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = 0 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 = 2 \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems ist  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Das bedeutet, dass die Vektoren  $\{u_1, u_2, u_3\}$  linear unabhängig sind. Dementsprechend bilden sie eine Basis des  $\mathbb{R}^3$

### 4.2.2 b

Berechnen Sie  $\varphi(u_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 4 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II} \begin{cases} \text{I:} & 3x_1 = 6 \quad | : 3 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

in II einsetzen

$$2 \cdot 2 - x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 4 - x_2 = 2 \quad | -4 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2$$

$u_4$  ist linear abhängig zu den Vektoren  $\{u_1, u_2, u_3\}$  mit den Faktor 2.

$$u_1, u_2, u_3 = u_4$$

$$\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3) = \varphi(u_4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \varphi(u_4)$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \varphi(u_4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \varphi(u_4)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} = \varphi(u_4)$$

### 4.2.3 c

Geben Sie einen Vektor  $u_5$  an, mit  $\varphi(u_5) = w$ .

$$\varphi(u_5) = x_1 \cdot \varphi(u_1) + x_2 \cdot \varphi(u_2) + x_3 \cdot \varphi(u_3)$$

$$\varphi(u_5) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_2 + 2x_3 = 2 \\ \text{II:} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ \text{III:} & 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
0 1 2	2
1 2 -1	3
0 3 7	5
Operation: I und II tauschen	
1 2 -1	3
0 1 2	2
0 3 7	5
Operation: III - 3II	
1 2 -1	3
0 1 2	2
0 0 1	-1
Operation: II - 2III	
1 2 -1	3
0 1 0	4
0 0 1	-1
Operation: I + III	
1 2 0	2
0 1 0	4
0 0 1	-1
Operation: I - 2II	
1 0 0	-6
0 1 0	4
0 0 1	-1

$$\begin{aligned} x_1 &= -6, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1 \\ u_5 &= -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = u_5 \end{aligned}$$

#### 4.2.4 d

Geben Sie die lineare Abbildung  $\varphi$  in der Form  $\varphi(x) = Ax$  an.

$$c_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} + c_{2,1} = 1 \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

I + II

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,1} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

in II einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,1} = 0 \quad | + c_{2,1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = c_{2,1} \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} + c_{2,2} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

I + II

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,2} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

in II einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,2} = 1 \quad | + c_{2,2} \quad | - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = c_{2,2} \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} + c_{2,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

I + II

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,3} = 0 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

in II einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2 \cdot 0 - c_{2,3} = 0 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) + \frac{2}{3} \varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) - \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(u_3)$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

### 4.3 Aufgabe 3

#### 4.3.1 a

Bestimmen Sie eine lineare Abbildung  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , deren Kern nur den Nullvektor enthält. Bestimmen Sie weiterhin eine lineare Abbildung  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , deren Kern der gesamte Raum  $\mathbb{R}^3$  ist.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 4.3.2 b

Bestimmen Sie Bild und Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Bild**

$$\begin{aligned} n &= \dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) \\ 3 &= \dim(\text{Bild}(A)) + 1 \quad | -1 \\ &\Leftrightarrow 2 = \dim(\text{Bild}(A)) \end{aligned}$$

**Kern**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{III} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

in I einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \quad | -x_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

in I einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & 2 \cdot -x_2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \text{II:} & x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

## 4.4 Aufgabe 4

### 4.4.1 a

Es sei  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch:  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass  $T$  invertierbar ist, und geben Sie eine Formel für  $T^{-1}$  an.

**Prüfen, ob Matrix invertierbar ist**

Dass eine Matrix invertierbar ist, muss sie linear unabhängig sein.  $\rightarrow \det(T) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= 2 \cdot -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 3 \\ &\quad - 2 \cdot -1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0 \\ \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Die Matrix ist nicht invertierbar.

### 4.4.2 b

Bestimmen Sie die inverse Matrix für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Prüfen, ob Matrix invertierbar ist

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) &= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad - (-1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2) \\ &= -2 + 0 + 6 - 3 - 0 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Die Matrix ist invertierbar.

Linearkombination	Konstanten
2   2   3	1   0   0
1   -1   0	0   1   0
-1   2   1	0   0   1
Operation: II + III	
2   2   3	1   0   0
0   1   1	0   1   1
-1   2   1	0   0   1
Operation: I + III	
1   4   4	1   0   1
0   1   1	0   1   1
-1   2   1	0   0   1
Operation: III + I	
1   4   4	1   0   1
0   1   1	0   1   1
0   6   5	1   0   2
Operation: III - 6II	
1   4   4	1   0   1
0   1   1	0   1   1
0   0   -1	1   -6   -4
Operation: I - 4II	
1   0   0	1   -4   -3
0   1   1	0   1   1
0   0   -1	1   -6   -4
Operation: II + III	
1   0   0	1   -4   -3
0   1   0	1   -5   -3
0   0   -1	1   -6   -4
Operation: III · (-1)	
1   0   0	1   -4   -3
0   1   0	1   -5   -3
0   0   1	-1   6   4

Die Inverse der Matrix ist also  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .

## 5. Übungsblatt 8

### 5.1 Aufgabe 1

#### 5.1.1 a

Bestimmen Sie Skalarprodukt und Kreuzprodukt der Einheitsvektoren  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

#### Skalarprodukt

$$\begin{aligned} & \langle e_1, e_2 \rangle \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} & e_1 \times e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 5.1.2 b

Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Sei  $e_i \in \mathbb{R}^n (i \in \{1, \dots, n\})$  der i-te Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^n$ . Bestimmen Sie  $\langle v, e_i \rangle$  und (für den Fall  $n = 3$ )  $v \times e_i$ .

#### Skalarprodukt

$$\begin{aligned} & \langle v, e_1 \rangle \\ &= v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 \\ &= v_1 \end{aligned}$$

allgemein

$$\begin{aligned} & \langle v, e_i \rangle \\ &= v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \cdots + v_n \cdot e_i \\ &= v_i \end{aligned}$$

### Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} & v \times e_1 \\ &= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 1 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v \times e_2 \\ &= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 1 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 1 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v \times e_3 \\ &= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 1 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 1 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 5.1.3 c

Bestimmen Sie einen Vektor, der auf der von  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$  aufgespannten

Ebene senkrecht steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren steht orthogonal auf der von diesen Vektoren aufgespannten Ebene.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 - 9 \cdot 2 \\ 9 \cdot 1 - 5 \cdot 10 \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 18 \\ 9 - 50 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -41 \\ 9 \end{pmatrix}$$

## 5.2 Aufgabe 2

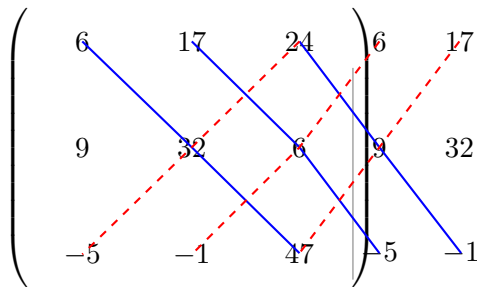
### 5.2.1 a

Sei  $A = \begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $\det(A)$

1. mittels der Saurrus-Regel
2. mittels der Leibniz-Formel
3. mittels der Kästchenregel

#### Saurrus Regel



Die Zahlen an den Linien werden Multipliziert. Blaue Linien werden miteinander addiert und Rote subtrahiert.

$$\begin{aligned}
 & 6 \cdot 32 \cdot 47 + 17 \cdot 6 \cdot -5 + 24 \cdot 9 \cdot -1 \\
 & - - 5 \cdot 32 \cdot 24 - -1 \cdot 6 \cdot 6 - 47 \cdot 9 \cdot 17 \\
 & = 4983
 \end{aligned}$$

#### Leibniz-Formel

Muss ich nachher machen

#### Kästchenregel

Linearkombination		
6	17	24
9	32	6
-5	-1	47
Operation: III + $\frac{5}{6}$ I		
6	17	24
9	32	6
0	$\frac{79}{6}$	67
Operation: II - $\frac{3}{2}$ I		

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

Table 5.1 – Fortführung von vorheriger Seite		
Linearkombination		
6	17	24
0	$\frac{13}{2}$	-30
0	$\frac{79}{6}$	67

$$\begin{aligned}
& 6 \cdot \det \left( \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -30 \\ \frac{79}{6} & 67 \end{pmatrix} \right) \\
&= 6 \cdot \frac{13}{2} \cdot 67 - \frac{79}{6} \cdot -30 \\
&= 4983
\end{aligned}$$

### 5.2.2 b

Sei  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $\det(B)$

Linearkombination			
1	0	2	0
1	2	9	0
2	0	1	5
1	1	1	1
I und IV tauschen			
1	1	1	1
1	2	9	0
2	0	1	5
1	0	2	0
IV - 2I			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
2	0	1	5
1	0	2	0
IV + II			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
2	0	1	5
0	0	9	-2
III + 2II			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
0	0	15	1
0	0	9	-2

---


$$B = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $D = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$ . Die Determinante ist  $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$ .

$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 7 & -2 \end{array}$	$\begin{aligned} \det(B) &= \\ &\underbrace{(1 \cdot 0 - 1 \cdot -1)}_{\det(A)} \cdot \underbrace{(15 \cdot -2 - 9 \cdot 1)}_{\det(D)} = \\ &(0 - 1) \cdot (-30 - 9) = -1 \cdot -39 = 39 \end{aligned}$
$\det(A)$ $\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{array}$	
	$\det(D)$	

### 5.2.3 c

Sei  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie ohne Rechnung  $\det(C)$ .

Die Matrix ist Linear abhängig. Daher ist die Determinante  $= 0$ .

## 5.3 Aufgabe 3

### 5.3.1 a

Prüfen Sie die Vektoren  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf lineare Unabhängigkeit.

$$\begin{aligned} &\det \left( \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad - 9 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 10 + 36 + 12 - 72 - 60 - 1 \\
&= -75
\end{aligned}$$

### 5.3.2 b

Ist das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned}
&\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \\
&\quad - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\
&= 2 + 0 + 0 - 8 - 0 - 0 \\
&= -6
\end{aligned}$$

Da die Matrix Linear unabhängig ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

## 6. Übungsblatt 9

### 6.1 Aufgabe 1

#### 6.1.1 a

Seien die Geraden  $G_1$  und  $G_2$  definiert durch:

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie liegen  $G_1$  und  $G_2$  zueinander im Raum? Bestimmen Sie, je nach Lage, Schnittpunkt oder Abstand der beiden Geraden.

#### 6.1.2 b

Es sei  $E$  definiert durch:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Geben Sie  $E$  in Normalenform an.

### 6.2 Aufgabe 2

#### 6.2.1 a

Sei  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $G := \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Bestimmen Sie die

Projektion  $v_w$  von  $v$  auf die von  $w$  aufgespannte Gerade  $G$ . Bestimmen Sie weiterhin die Matrix, die die lineare Abbildung  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow G, a \mapsto aw$  darstellt.

Was ist der Rang dieser Matrix? Was ist ihr Kern? Was ihr Bild?



### 6.2.2 b

(Transferfrage) Sei  $E := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ . Sei  $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Wie kann man die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $E$  bestimmen? Welcher Vektor kommt dabei heraus?

## 6.3 Aufgabe 3

### 6.3.1 a

Sei  $D_\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die lineare Abbildung, die jeden Vektor aus  $\mathbb{R}^2$  um  $\pi$  dreht. Sei  $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Sellen Sie die Matrix zu  $D_\pi$  auf und bestimmen Sie  $D_\pi(v)$ . Bestimmen Sie  $\langle v, D_\pi(v) \rangle$ .

### 6.3.2 b

Sei  $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Drehung, die den Vektor  $(1, 0, 0)^t$  auf den Vektor  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  abbildet. Bestimmen Sie die Drehmatrix, die  $D$  darstellt.

### 6.3.3 c

Sei  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Bestimmen Sie für die Drehmatrix  $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $A_{3,\varphi} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  (Drehung um die  $x_3$ -Achse) die Determinante. Bestimmen Sie weiterhin das Produkt  $A_\varphi^t A_\varphi^t$  bzw.  $A_{3,\varphi}^t A_{3,\varphi}$ . Was ist also die Inverse  $A_\varphi^{-1}$  bzw.  $A_{3,\varphi}^{-1}$ .