Westfälische hochschule

Informatik

SLA

Stochastik und Lineare Algebra Übungsaufgaben

LaTeX

Author(s):
Eric Seidel, Malte Gaelings, Paul Sandow, Mikel Lautsch, Mario Zinta

Supervisor(s):
Prof. Dr. Frau Anderle

June 3, 2025

Einleitung

Die vorliegende Aufgabensammlung wurde von Frau Prof. Dr. Anderle dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Sie dient der Vertiefung und Anwendung der Inhalte der Vorlesung *Stochastik und Lineare Algebra*.

Die Aufgaben decken alle für die Klausur 2025 relevanten Themen ab und sollen Ihnen die Möglichkeit geben, Ihr Verständnis zu festigen und sich gezielt auf die Prüfung vorzubereiten.

Obwohl die Aufgaben mit Sorgfalt ausgewählt und aufbereitet wurden, kann **für die vollständige Richtigkeit und Fehlerfreiheit keine Gewähr übernommen werden**. Wir empfehlen, die Lösungswege kritisch zu reflektieren und bei Unklarheiten Rücksprache zu halten.

Diese Aufgabensammlung dient als Hilfestellung. Sie sollten versuchen, die Aufgaben selbstständig und nur mit den erlaubten Hilfsmitteln zu bearbeiten und erst nach deren Bearbeitung Ihren eigenen Lösungsweg mit den hier vorliegenden Lösungsvorschlägen zu überprüfen.

Diese Aufgabensammlung enthält auch Lösungen zu den Bonustests. Da diese Tests teilweise viele Variationen aufweisen, ist es wahrscheinlich, dass Ihre konkreten Zahlenwerte und Ihr Ergebnis von den hier dargestellten abweichen werden. Beachten Sie des Weiteren, dass auch die Reihenfolge der Bonustests variieren kann. Achten Sie deswegen bitte auf den Titel des jeweiligen Tests, um die korrekte Lösung zuzuordnen.

Die hier vorgestellten Rechenwege sind der Verständlichkeit halber bewusst sehr detailliert gehalten. In der Prüfung sollten Sie aus zeitlichen Gründen eine kompaktere Darstellung wählen. Es empfiehlt sich, Ihren Professor oder Ihre Professorin mit einer Ihrer Beispielrechnungen zu konsultieren. So können Sie sicherstellen, dass Ihre Notation korrekt ist, keine wesentlichen Schritte fehlen und Ihre Ausführungen den Anforderungen entsprechen, ohne unnötig ausführlich zu sein.

Haben Sie des Weiteren keine Bedenken, einen anderen Lösungsweg zu verfolgen. Die hier aufgezeigten Lösungswege sind lediglich Vorschläge und sind keineswegs die einzig korrekten Wege.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Bearbeitung und eine gute Klausurvorbereitung!

Contents

Part I

Semesterzusammenfassung

1. Vektoren

1.1 Definition eines Vektors

Sollen nicht nur einzelne Zahlen festgehalten werden, sondern mehrere Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge zusammengehören, kommen Vektoren ins Spiel.

Ein **Vektor** im $\mathbb{R}^n$ ist formal betrachtet ein Element des mathematischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Das bedeutet, ein Vektor ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen. Ein solcher Vektor wird oft als Spalte geschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

wobei $v1, v2, \ldots, v_n$ reelle Zahlen sind, die sogenannten **Komponenten** oder **Koordinaten** des Vektors. Die Zahl n gibt die **Dimension** des Vektors an.

- Für n=2 liegen Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) vor, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Für n=3 liegen Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$) vor, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Für $n > 3$ wird von höherdimensionalen Räumen gesprochen, die schwerer vorstellbar, aber mathematisch ebenso bedeutsam sind.

Vektoren werden normalerweise mit einem Pfeil gekennzeichnet $\vec{v}$, jedoch wird der einfachkeit halber oft darauf verzichtet.

Ein Vektor (zumindest in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) kann als ein **Pfeil** interpretiert werden, der von einem Punkt zu einem anderen zeigt. Dieser Pfeil hat eine bestimmte **Länge** (Betrag) und eine bestimmte **Richtung**. Wichtig ist, dass Vektoren oft als "frei" betrachtet werden, d.h., ein Pfeil repräsentiert denselben Vektor, egal wo sein Anfangspunkt im Raum liegt, solange Länge und Richtung gleich bleiben. Häufig wird der Pfeil im Ursprung des Koordinatensystems begonnen; dann zeigen seine Koordinaten direkt auf den Endpunkt des Pfeils.

Mit Vektoren können zwei grundlegende Rechenoperationen durchgeführt werden:

1. **Vektoraddition:** Zwei Vektoren derselben Dimension n können addiert werden, indem ihre entsprechenden Komponenten addiert werden. Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, dann ist ihre Summe:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

   Geometrisch entspricht die Addition von Vektoren dem Aneinanderhängen der Pfeile (Parallelogrammregel oder Spitze-an-Schaft-Regel).

2. **Skalare Multiplikation:** Ein Vektor kann mit einer reellen Zahl (einem sogenannten **Skalar**) multipliziert werden. Dabei wird jede Komponente des Vektors mit diesem Skalar multipliziert. Wenn $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar ist und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Vektor, dann ist das Produkt:

$$c \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{pmatrix}$$

   Geometrisch bewirkt die skalare Multiplikation eine Streckung oder Stauchung des Vektors. Wenn der Skalar negativ ist, kehrt sich zusätzlich die Richtung des Vektors um.

Diese beiden Operationen sind fundamental und bilden die Grundlage für die Struktur eines **Vektorraums**, ein zentrales Konzept in der linearen Algebra. Ein Vektor ist also nicht nur ein Tupel von Zahlen, sondern ein Objekt, das sich auf definierte Weise mit anderen Vektoren (Addition) und Skalaren (skalare Multiplikation) kombinieren lässt.

2. Vektorraum

2.1 Definition

Ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ (Hier inden Vorlesungen immer $\mathbb{R}$) ist eine Menge V, deren Elemente Vektoren genannt werden, zusammen mit zwei Operationen:

- der Vektoraddition $+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$,
- der Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $(s, v) \mapsto s \cdot v$.

Damit $(V, +, \cdot)$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezeichnet werden kann, müssen die folgenden Axiome für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und alle Skalare $s, t \in \mathbb{K}$ erfüllt sein:

Axiome der Vektoraddition (d.h. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe):

- $v + w = w + v$ (Kommutativgesetz der Addition)
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Assoziativgesetz der Addition)
- Es existiert ein Nullelement $\vec{0} \in V$, sodass für alle $v \in V$ gilt: $\vec{0} + v = v$ (Existenz des neutralen Elements der Addition)
- Zu jedem $v \in V$ existiert ein inverses Element $-v \in V$, sodass gilt: $v + (-v) = \vec{0}$ (Existenz des inversen Elements der Addition)

Axiome der Skalarmultiplikation (und Kompatibilität mit der Vektoraddition):

- $s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w$ (Distributivgesetz bezüglich der Vektoraddition)
- $(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$ (Distributivgesetz bezüglich der Skalaraddition)
- $(s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$ (Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation)
- $1 \cdot v = v$, wobei 1 das Einselement des Körpers $\mathbb{K}$ ist (Neutralität des Einselements des Körpers)

Erläuterung Die Vektorraumaxiome stellen sicher, dass die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren sich in einer Weise verhalten, die konsistent und "vernünftig" ist. Die ersten vier Axiome definieren die Eigenschaften der Vektoraddition (die Vektoren bilden eine abelsche Gruppe), während die übrigen Axiome die Wechselwirkung mit der Skalarmultiplikation regeln. Obwohl die Liste der Axiome zunächst umfangreich erscheinen mag, fassen sie im Kern zusammen, dass sich das

Rechnen mit Vektoren und Skalaren in vielerlei Hinsicht analog zum Rechnen mit "normalen" Zahlen (wie den reellen Zahlen $\mathbb{R}$) und deren bekannten Rechengesetzen verhält. Es sind also genau die Eigenschaften, die man intuitiv von Operationen erwarten würde, die man "Addition" und "skalare Multiplikation" nennt.

3. Lineare Abbildungen

Eine Lineare Abbildung ist eine Abbildung mit Konstanten Anteil 0

- $f(x) = 3x$ ist eine Lineare Abbildung
- $f(x) = 3x + 3$ ist **keine** Lineare Abbildung

3.1 Lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen

Wenn zwei Vektorräume eine Lineare Abbildung bilden, muss Homogenität gelten

- $f(4) = 3 \cdot 4 = 2 \cdot f(2) = f(2 \cdot 2)$, wobei $f(x) = 3x$
- $f(v + w) = f(v) + f(w)$

4. Linearkombinationen

Eine Linearkombination beschreibt eine Summe aus Vektoren. Das Ergebnis aus einer Linearkombination von Vektoren ist selbst ein Vektor. Ein Vektor ist eine Linearkombinationen von Vektoren, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $u = a \cdot v + b \cdot w$ gilt. Dies berechnet man durch ein Lineares Gleichungssystem

4.1 Beispiel

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$au + bv = w$$

$$\begin{cases} \text{I:} & a \cdot 2 + b \cdot 0 = 1 \\ \text{II:} & a \cdot 4 + b \cdot 0 = 2 \\ \text{III:} & a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & a \cdot 2 = 1 \quad | : 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ \text{II:} & a \cdot 4 = 2 \quad | : 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ \text{III:} & a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{in III einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & a = \frac{1}{2} \\ \text{II:} & a = \frac{1}{2} \\ \text{III:} & \frac{1}{2} \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + b = 0 \quad | - \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ ist also die Linearkombination für $u + v = w$

Part II

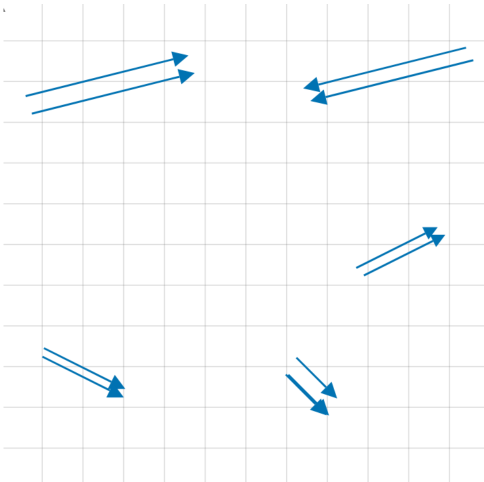
Bonusteste

5. Bonustest 1 - Rechnen mit Vektoren

5.1 Frage 1

Wie viele verschiedene Vektoren sind auf diesem Bild zu sehen?

In dieser Aufgabe geht es im wesentlichen darum, die **verschiedenen** Pfeile zu zählen. Es ist hilfreich, die Vektoren in dem Graphen so zu verschieben, dass gleiche Vektoren beieinander sind. So muss nur noch die Anzahl der Cluster gezählt werden.

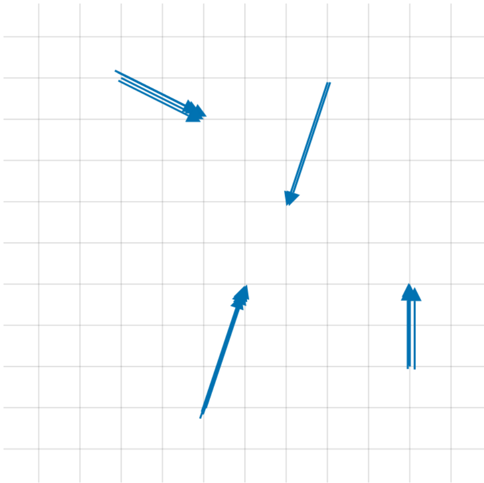


Hier gibt es **5** verschiedene Vektoren.

5.2 Frage 2

In der folgenden Abbildung sind verschiedene Vektoren dargestellt. Ein Kästchen entspricht einer Längeneinheit. Geben Sie die verschiedenen Vektoren, die im Bild zu sehen sind, als Liste in eckigen Klammern an. Die Einträge dieser Liste sind dabei die verschiedenen Vektoren dargestellt als Paare von Zahlen in eckigen Klammern. Ihre Antwort sollte also ein Ausdruck der Form [[1,3],[-2,0],[1,1]] oder [[0,3],[1,-1],[-1,1],[4,2]] etc. sein.

Hier ist es auch wieder Sinnvoll, die Vektoren zu sortieren. Dann müssen die Vektoren nur noch abgelesen werden. Die Vektoren werden über [x, y] benannt, wobei x der weg ist, den der Vektor nach rechts "geht" und y die höhe des Vektors ist.



Hier befinden sich in der Abbildung die Vektoren [[1, 3], [0, 2], [2, -1], [-1, -3]]

5.3 Frage 3

Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in Komponentendarstellung, wobei $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

5.3.1 a)

Geben Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in Koordinatendarstellung an.

I

Es ist $\vec{u} = \frac{3\vec{e_3}}{2} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_1}$

Hier muss der Vektor berechnet werden. Da die Vektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ die standardvektoren sind, ist deren Wert bekannt $\left(\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Bevor das Ergebnis berechnet wird, sollte noch der Bruch aufgelöst werden:

$$\frac{3\vec{e_3}}{2} = \frac{3 \cdot \vec{e_3}}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\vec{e_3}}{1} = \frac{3}{2}\vec{e_3}$$

Jetzt können die Einheitsvektoren einfach eingesetzt werden

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Vektor $\vec{u}$ ist also $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

II

es ist $\vec{v} = 2\vec{e_3} + 2\vec{e_2}$.

Hier können wieder die Einheitsvektoren eingesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.3.2 b)

Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus Teilaufgabe a) folgende Größen. Geben Sie die Lösung exakt, also nicht näherungsweise an.

I

Es ist $\vec{u} - 2\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}3\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}3\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}3-0\\2-4\\\frac{3}{2}-4\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}3\\-2\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

II

Es ist $|3\vec{u}+3\vec{v}|$

Die Betragsstriche meinen hier, dass die Länge des Vektors berechnet werden soll. Diese kann über die Formel $\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$ berechnet werden. Es muss also zunächst der resultierende Vektor von $3\vec{u}+3\vec{v}$ berechnet werden und von diesen Vektor muss dann die Länge bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
&\left|3\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}3\cdot 3\\3\cdot 2\\3\cdot\frac{3}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot 0\\3\cdot 2\\3\cdot 2\end{pmatrix}\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}9\\6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}9\\12\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}\right|\\
&=\sqrt{9^2+12^2+\frac{21}{2}^2}\\
&=\sqrt{\frac{1341}{2}}
\end{aligned}
$$

III

Es ist $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$

Hier soll das Skalarprodukt berechnet werden. Das Skalarprodukt $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$ berechnet sich aus $a_1\cdot b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 \\
&= 0 + 4 + 3 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

IV

Es ist $\vec{u} \times \vec{v}$

Hier soll das Kreuzprodukt berechnet werden. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der länge 3 lässt sich über $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - \frac{3}{2} \cdot 2 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 0 - 6 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.4 Frage 4

In welchem der folgenden Bilder ist das Skalarprodukt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ negativ?

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist negativ, wenn der Winkel zwischen den Vektoren größer als 90° beträgt.

Herleitung: Vorzeichen des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist fundamental durch ihre Beträge und den von ihnen eingeschlossenen Winkel θ definiert:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Hierbei sind $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ die Längen der Vektoren. Der Winkel θ ist der kleinste Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sodass $0° \leq \theta \leq 180°$.

Die Rolle des Kosinus

Die Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind per Definition stets nicht-negativ. Wenn wir annehmen, dass weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ der Nullvektor ist (d.h. $|\vec{a}| > 0$ und $|\vec{b}| > 0$), dann sind ihre Beträge positive Zahlen. Das Produkt zweier positiver Zahlen ($|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$) ist ebenfalls positiv. Folglich hängt das Vorzeichen des gesamten Skalarprodukts $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ ausschließlich vom Vorzeichen des Terms $\cos(\theta)$ ab:

$$\text{Vorzeichen}(\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle) = \text{Vorzeichen}(\cos(\theta))$$

Verhalten von $\cos(\theta)$ im relevanten Winkelbereich

Betrachten wir das Vorzeichen von $\cos(\theta)$ für die möglichen Werte des Winkels θ zwischen zwei Vektoren:

- **Spitzer Winkel:** $0° \leq \theta < 90°$

  Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus positiv: $\cos(\theta) > 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

  $$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{positiv}} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle > 0$$

- **Rechter Winkel:** $\theta = 90°$

  Für einen rechten Winkel ist der Kosinus Null: $\cos(90°) = 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

  $$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos(90°)}_{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$$

  In diesem Fall stehen die Vektoren orthogonal (senkrecht) aufeinander.

- **Stumpfer Winkel:** $90° < \theta \leq 180°$

  Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus negativ: $\cos(\theta) < 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

  $$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{negativ}} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle < 0$$

Schlussfolgerung aus der Herleitung

Das Skalarprodukt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ ist **genau dann negativ**, wenn der Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels θ negativ ist. Dies ist der Fall, wenn der Winkel θ ein stumpfer Winkel ist, also $90° < \theta \leq 180°$.

Part III

Übungsaufgaben Lineare Algebra

6. Übungsblatt 5

6.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Rechenoperationen.

6.1.1 a

$$\begin{aligned}
3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\cdot 4\\5\cdot 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3+20\\3+5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}23\\8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.1.2 b

$$\begin{aligned}
10\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}10\cdot 5\\10\cdot 4\\10\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\cdot 1\\4\cdot 1\\4\cdot 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}50\\40\\30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}50+4+3\\40+4+2\\30+0+1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}57\\46\\31\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.2 Aufgabe 2

Sind die folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig? Können sie durch Entfernen eines Vektors linear unabhängig gemacht werden?

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier zwei gängige Ansätze:

1. Prüfung über die Determinante: Man bildet aus den Vektoren eine quadratische Matrix A. Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn die Determinante dieser Matrix ungleich null ist ($\det(A) \neq 0$). Ist die Determinante gleich null ($\det(A) = 0$), sind die Vektoren linear abhängig. (Diese Methode ist direkt nur anwendbar, wenn die Anzahl der Vektoren der Dimension des Raumes entspricht, z.B. 2 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$).

2. Prüfung über die Definition der linearen Unabhängigkeit: Eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig, wenn die einzige Lösung der Vektorgleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}$$

die sogenannte triviale Lösung ist, bei der alle Skalare $x_1, x_2, \dots, x_n$ gleich null sind ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$). Wenn es mindestens eine nicht-triviale Lösung gibt (d. h. mindestens ein $x_i \neq 0$), dann sind die Vektoren linear abhängig.

6.2.1 a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Prüfung für a über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinante der Matrix A berechnen

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} - A_{2,1} \cdot A_{1,2} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 - 1 = -1$$

Da die Determinante ungleich null ist, ist die Linearkombination linear unabhängig.

Prüfung für a über Linearkombination

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases} & \\
\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 \qquad = 0 \end{cases} & \\
\text{in I einsetzen} & \\
0 + x_2 &= 0 \\
x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem $x_1 = x_2 = 0$ ist, sind die Vektoren linear unabhängig.

6.2.2 b

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}
$$

Es können nur drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sein. Jede Kombination aus mehr als drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig. Daher sind die vier Vektoren linear abhängig.

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, wird ein beliebigen Vektor entfernt. hier wird der vierte Vektor entfernt.

Im schlimmsten Fall kann es passieren, dass vier Linearkombinationen auf lineare Unabhängigkeit prüfen müssen, bis wir eine Linearkombination gefunden wird, welche linear unabhängig ist.

Prüfung für b über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. Determinante der Matrix B berechnen

$$\begin{aligned}\det(B) = B_{1,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{3,3} + B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{3,1} + B_{1,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{3,2} \\ -B_{3,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{1,3} - B_{3,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{1,1} - B_{3,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{1,2} \\ = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ = 0 + 1 + 2 - 0 - 1 - 1 \\ = 1\end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich null ist, kann die Vektormenge durch entfernen des vierten Vektors linear unabhängig gemacht werden.

Prüfung für b über Linearkombination

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 \cdot x_1\\1 \cdot x_1\\1 \cdot x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 \cdot x_2\\0 \cdot x_2\\1 \cdot x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 \cdot x_3\\1 \cdot x_3\\1 \cdot x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0\\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0\\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{I:} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\\ \text{II:} & x_1 \qquad + \ \ x_3 = 0 \quad | - x_3 \Leftrightarrow x_1 = -x_3\\ \text{III:} & x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}x_1 \text{ in III einsetzen}\\ -x_3 + x_2 + x_3 = 0\\ \Leftrightarrow x_2 = 0\\ x_1 \text{ und } x_2 \text{ in I einsetzen}\\ -x_3 + 0 + 2x_3 = 0\\ \Leftrightarrow -x_3 + 2x_3 = 0\\ \Leftrightarrow x_3 = 0\\ x_3 \text{ in II einsetzen}\\ x_1 + 0 = 0\\ \Leftrightarrow x_1 = 0\end{aligned}$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, das heißt, dass die Vektormenge ohne den vierten Vektor linear unabhängig ist.

6.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums

$$V := \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension eines Untervektorraums ist die anzahl der Basisvektoren. Um herauszufinden, ob die gegebenen Vektoren eines Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, muss auf lineare unabhängigkeit geprüft werden.

Hier bietet es sich nicht an, dies über die Determinante zu errechnen, da nur quadratische Matzitzen eine Determinante besitzen.

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \\
&\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_1 \qquad = 0 \end{cases} \\
&x_1 \text{ in I einsetzen} \\
&0 + x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 = 0
\end{aligned}$$

Da $x_1 = x_2 = 0$ ist, ist die Vektormenge linear unabhängig. Diese zwei linear unabhängigen Vektoren spannen den Untervektorraum V auf und bilden somit eine Basis dieses Untervektorraums V. Da diese Basis aus zwei Vektoren besteht, ist die Dimension des Untervektorraums V gleich 2.

7. Übungsblatt 6

7.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

7.1.1 a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
3 2	1
5 4	5
Operation: 3II - 5I	
3 2	1
0 2	10
Operation: I - II	
3 0	-9
0 2	10
Operation: I : 3	
Operation: II : 2	
1 0	-3
0 1	5

$x_1 = -3 \quad x_2 = 5$

7.1.2 b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad -x_3 = 10 \\ 15x_1 + x_2 \quad -4x_3 = 10 \\ -x_1 \quad -3x_3 = 10 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
$1 \quad 2 \quad -1$	10
$15 \quad 1 \quad -4$	10
$-1 \quad 0 \quad -3$	10
Operation: II + 15III	
$1 \quad 2 \quad -1$	10
$0 \quad 1 \quad -49$	160
$-1 \quad 0 \quad -3$	10
Operation: III + I	
$1 \quad 2 \quad -1$	10
$0 \quad 1 \quad -49$	160
$0 \quad 2 \quad -4$	20
Operation: III - 2II	
$1 \quad 2 \quad -1$	10
$0 \quad 1 \quad -49$	160
$0 \quad 0 \quad 94$	-300
Operation: III : 94	
$1 \quad 2 \quad -1$	10
$0 \quad 1 \quad -49$	160
$0 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{150}{47}$
Operation: I + III	
$1 \quad 2 \quad 0$	$\frac{320}{47}$
$0 \quad 1 \quad -49$	160
$0 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{150}{47}$
Operation: II + 49III	
$1 \quad 2 \quad 0$	$\frac{320}{47}$
$0 \quad 1 \quad 0$	$\frac{170}{47}$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{150}{47}$
Operation: I - 2II	
$1 \quad 0 \quad 0$	$-\frac{20}{47}$
$0 \quad 1 \quad 0$	$\frac{170}{47}$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{150}{47}$

$x_1 = -\frac{20}{47} \quad x_2 = \frac{170}{47} \quad x_3 = -\frac{150}{47}$

7.1.3 c)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
$1 \quad -1 \quad -1$	1
$1 \quad 1 \quad -1$	2
Operation: II - I	
$1 \quad -1 \quad -1$	1
$0 \quad 2 \quad 0$	1
Operation: 2I + II	
$2 \quad 0 \quad -2$	3
$0 \quad 2 \quad 0$	1
Operation: I : 2	
Operation: II : 2	
$1 \quad 0 \quad -1$	$\frac{3}{2}$
$0 \quad 1 \quad 0$	$\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 - x_3 = \frac{3}{2}$

$x_3 =: t \quad t \in \mathbb{R}$

$x_1 - t = \frac{3}{2} \quad | + t$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} + t$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + t \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ wobei $t \in \mathbb{R}$

7.2 Aufgabe 2

7.2.1 a)

Wenn fünf Ochsen und zwei Schafe acht Taels Gold kosten, sowie zwei Ochsen und acht Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines Tieres? (Chiu-Chang Suan-Chu, 300 n.Chr.)

$x_1 :=$ Ochsen $\quad x_2 :=$ Schafe

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 8x_2 = 8 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
$5 \quad 2$	8
$2 \quad 8$	8
Operation: 5II - 2I	
$5 \quad 2$	8
$0 \quad 36$	24
Operation: 36I - 2II	

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.4 – *Fortführung von vorherier Seite*	
Linearkombination	**Konstanten**
180 0	240
0 36	24
Operation: I: 180	
Operation: II: 36	
1 0	$\frac{4}{3}$
0 1	$\frac{3}{2}$

7.2.2 b)

Ein 9-Tupel $(x1, ..., x9)$ nennt man "magisches Quadrat der Ordnung 3", wenn gilt:

$$x1 + x2 + x3 = x4 + x5 + x6 = x7 + x8 + x9 = x1 + x4 + x7$$
$$= x2 + x5 + x8 = x3 + x6 + x9 = x1 + x5 + x9 = x3 + x5 + x7$$

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu diesen sieben Bedingungen äquivalent ist, und bestimmen Sie den Lösungsraum in $\mathbb{R}^9$. Wie kann man die Menge der rationalen Lösungen (also der $(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{Q}^9$) beschrieben? Gibt es auch eine Lösung in $\mathbb{Z}^9$? Oder gar in $\mathbb{N}^9$? (siehe J. W. von Goethe 1: Faust. Der Tragödie erster Teil, Hexenküche).

(Diese Aufgaben sind entnommen aus: *Peter Knaber, Wolf P. Barth:* Lineare Algebra. Aufgaben und Lösungen. *Springer Verlag,* 2017. Seite 4.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 - x_7 - x_8 - x_9 = 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 - x_1 - x_4 - x_7 = 0 \Rightarrow -x_1 - x_4 + x_8 + x_9 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 - x_2 - x_5 - x_8 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 - x_8 \\ x_2 + x_5 + x_8 - x_3 - x_6 - x_9 = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 + x_5 - x_6 + x_8 - x_9 \\ x_3 + x_6 + x_9 - x_1 - x_5 - x_9 = 0 \Rightarrow -x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \\ x_1 + x_5 + x_9 - x_3 - x_5 - x_7 = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 - x_7 + x_9 \end{cases}$$

Linearkombination									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	−1	0	0	−1	0	0	0	1	1
IV	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Ziel: erste Spalte bereinigen									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*									
Linearkombination									
Operation: III + I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: IV - I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: VI + I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: VII - I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Ziel: zweite Spalte bereinigen									
Operation: II und III tauschen									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Operation: IV + 2V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*									
Linearkombination									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
IV	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
V	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
VI	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
VII	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: V - VI									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
IV	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
V	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
VI	0	1	2	-1	-2	0	0	0	0
VII	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: VI + VII									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
IV	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
V	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
VI	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
VII	0	-1	-2	1	1	1	-1	0	1
Operation: VII + II									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
IV	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
V	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
VI	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
VII	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
Ziel: dritte Spalte bereinigen									
Operation: III und VII tauschen									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	2
IV	0	0	-3	2	2	-1	1	1	-2
V	0	0	-3	1	3	-1	0	1	-1
VI	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
Operation: IV - V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*									
Linearkombination									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: V - 3III									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	4	3	−1	3	−2	−7
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: III · (-1)									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	4	3	−1	3	−2	−7
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Ziel: vierte Spalte bereinigen									
Operation: V - 4VII									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	0	−1	−5	7	2	−3
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: VII - IV									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	0	−1	−5	7	2	−3
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	0	2	1	−2	−1	0
Ziel: fünfte Spalte bereinigen									
Operation: 2VI + VII									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
VI	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: VI - V									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: V · (-1)									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Ziel: sechste Spalte bereinigen									
Operation: 2VII - VI									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Operation: VI : 6									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Die siebte Zeile (VII) besteht ausschließlich aus nullen. Das bedeutet, dass die ursprüngliche siebte Gleichung von den anderen linear abhängig war und keine neuen Informationen liefert. Diese Zeile wird daher im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte sechs oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: V - 5VI									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + VI									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + VI									
I	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
II	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte fünf oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: IV + V									
I	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
II	0	1	1	-2	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + V									
I	1	1	1	-1	-1	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
II	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte vier oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: III - IV									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + 2IV									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + IV									
I	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
II	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte drei oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: II - III									
I	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I - III									
I	1	1	0	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte zwei oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: I - II									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.5 – *Fortführung von vorherier Seite*									
Linearkombination									
I	1	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Hierraus lässt sich jetzt Schließen, dass

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9, \\
x_2 - \frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9, \\
x_3 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9, \\
x_4 + \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{4}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_4 = -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9, \\
x_5 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_5 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9, \\
x_6 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_6 = \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 \\ \frac{2}{3}x_7 \\ -\frac{1}{3}x_7 \\ -\frac{2}{3}x_7 \\ \frac{1}{3}x_7 \\ \frac{4}{3}x_7 \\ 1x_7 \\ 0x_7 \\ 0x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_8 \\ -\frac{1}{3}x_8 \\ \frac{2}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ 0x_8 \\ 1x_8 \\ 0x_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_9 \\ 0x_9 \\ 0x_9 \\ 1x_9 \end{pmatrix}$$

$$= x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}$

Der Lösungsraum des Tupels in $\mathbb{R}^9$ ist also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Menge der Rationalen Lösungen kann eingach beschrieben werden also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Um eine Lösung in $\mathbb{Z}^9$ zu erhalten kann sichergestellt werden, dass alle Komponenten ein vielfaches von drei sind. Hierfür kann beispielsweise die hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dass $x_7 = 3a, x_8 = 3b, x_9 = 3c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aufgestellt werden.

Man wähle beispielsweise $a = 1, b = 1, c = 1$, so erhält an das magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dieses ist auch eine Lösung für ein magisches Quadrat aus $\mathbb{N}^9$.

7.3 Aufgabe 3

Schreiben Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus in Pseudocode auf.

```
def gauss_jordan(matrix: list[list[float]], constants: list[list[float]] | None) -> list[list[float]]:
  n = len(matrix)
  m = len(matrix[0])
  i = 0

  while i < n and i < m:
    pivot_zeile = i

    for zeile in range(i + 1, n): # beste Zeile zum tauschen finden
      if abs(matrix[zeile][i]) > abs(matrix[pivot_zeile][i]):
        pivot_zeile = zeile

    if pivot_zeile != i: # Zeilen ggf. tauschen
      matrix[i], matrix[pivot_zeile] = matrix[pivot_zeile], matrix[i]
      if constants:
        constants[i], constants[pivot_zeile] = constants[pivot_zeile], constants[i]

    if matrix[i][i] == 0:
      i += 1
      continue # Es gab keinen geeigneten Tauschkanidat. Eleminierung wird uebersprungen.

    pivot_wert = matrix[i][i]
    for k_norm in range(i, m):
      matrix[i][k_norm] = matrix[i][k_norm] / pivot_wert
    if constants and i < len(constants) and constants[i] is not None:
      for c_col in range(len(constants[i])):
        constants[i][c_col] = constants[i][c_col] / pivot_wert

    for j in range(0, i): # Nullen oberhalb
        factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
        for k in range(i, m):
            matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * factor
        if constants and len(constants[0]) > 0:
```

```
              num_const_cols = len(constants[0])
              for c_col in range(num_const_cols):
                  constants[j][c_col] = constants[j][c_col] - constants[i][c_col] * factor

      for j in range(i + 1, n): # Nullen unterhalb
          factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
          for k in range(i, m):
              matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * factor
          if constants and len(constants[0]) > 0:
              num_const_cols = len(constants[0])
              for c_col in range(num_const_cols):
                  constants[j][c_col] = constants[j][c_col] - constants[i][c_col] * factor

      i += 1

    return matrix, constants
```

8. Übungsblatt 7

8.1 Aufgabe 1

8.1.1 a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 7 \cdot 1 & -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}$$

8.1.2 b

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 36 \end{pmatrix}$$

8.1.3 c

$$A \cdot w$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 15 + 17 \cdot 50 + 24 \cdot 36 \\ 9 \cdot 15 + 32 \cdot 50 + 6 \cdot 36 \\ -5 \cdot 15 - 1 \cdot 50 + 47 \cdot 36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1804 \\ 1951 \\ 1567 \end{pmatrix}$$

8.2 Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit:

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

8.2.1 a

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Prüfen auf lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases} \\
&\text{I} = \text{II} \\
x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 \quad &| - x_1 \quad | + x_2 \\
&\Leftrightarrow 2x_2 = x_1 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \\
&\text{in I einsetzen} \\
&2x_2 + x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x_2 = 0 \quad | : 3 \\
&\Leftrightarrow x_2 = 0 \\
&x_1 = 2 \cdot 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 0
\end{aligned}$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Das bedeutet, dass die Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig sind. Dementsprechend bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$

8.2.2 b

Berechnen Sie $\varphi(u_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 4 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II} \begin{cases} \text{I:} & 3x_1 = 6 \quad | : 3 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{in II einsetzen} \\ &2 \cdot 2 - x_2 = 2 \\ \Leftrightarrow 4 - x_2 = 2 \quad &| - 4 \quad | \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

u_4 ist linear abhängig zu den Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ mit den Faktor 2.

$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3 &= u_4 \\ \varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3) &= \varphi(u_4) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \end{aligned}$$

8.2.3 c

Geben Sie einen Vektor u_5 an, mit $\varphi(u_5) = w$.

$$\varphi(u_5) = x_1 \cdot \varphi(u_1) + x_2 \cdot \varphi(u_2) + x_3 \cdot \varphi(u_3)$$

$$\varphi(u_5) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_2 + 2x_3 = 2 \\ \text{II:} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ \text{III:} & 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	**Konstanten**
0 1 2	2
1 2 −1	3
0 3 7	5
Operation: I und II tauschen	
1 2 −1	3
0 1 2	2
0 3 7	5
Operation: III - 3II	
1 2 −1	3
0 1 2	2
0 0 1	−1
Operation: II - 2III	
1 2 −1	3
0 1 0	4
0 0 1	−1
Operation: I + III	
1 2 0	2
0 1 0	4
0 0 1	−1
Operation: I - 2II	
1 0 0	−6
0 1 0	4
0 0 1	−1

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1$$

$$\begin{aligned} u_5 &= -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = u_5 \end{aligned}$$

8.2.4 d

Geben Sie die lineare Abbildung φ in der Form $\varphi(x) = Ax$ an.

$$c_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} + c_{2,1} = 1 \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,1} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,1} = 0 \quad | + c_{2,1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = c_{2,1} \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} + c_{2,2} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,2} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,2} = 1 \quad | + c_{2,2} \quad | - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = c_{2,2} \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} + c_{2,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,3} = 0 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2 \cdot 0 - c_{2,3} = 0 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) + \frac{2}{3}\varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) - \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(u_3)$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

8.3 Aufgabe 3

8.3.1 a

Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deren Kern nur den Nullvektor enthält. Bestimmen Sie weiterhin eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deren Kern der gesamte Raum $\mathbb{R}^3$ ist.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3.2 b

Bestimmen Sie Bild und Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild

$$\begin{aligned} n &= \dim(Bild(A)) + \dim(Kern(A)) \\ 3 &= \dim(Bild(A)) + 1 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow 2 &= \dim(Bild(A)) \end{aligned}$$

Kern

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{III} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

in I einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \quad | - x_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

in I einsetzen

$$\begin{cases} \text{I:} & 2 \cdot -x_2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \text{II:} & x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8.4 Aufgabe 4

8.4.1 a

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch: $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass T invertierbar ist, und geben Sie eine Formel für T^{-1} an.

Prüfen, ob Matrix invertierbar ist

Dass eine Matrix invertierbar ist, muss sie linear unabhängig sein. $\to \det(T) \neq 0$.

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 3$$

$$-2 \cdot -1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die Matrix ist nicht invertierbar.

8.4.2 b

Bestimmen Sie die inverse Matrix für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob Matrix invertierbar ist

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 2 \cdot -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot -1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad - -1 \cdot -1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -2 + 0 + 6 - 3 - 0 - 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

Die Matrix ist invertierbar.

Linearkombination	**Konstanten**
$\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: II + III	
$\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: I + III	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: III + I	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$
Operation: III - 6II	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: I - 4II	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: II + III	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: III · (-1)	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{matrix}$

Die Inverse der Matrix ist also $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Übungsblatt 8

9.1 Aufgabe 1

9.1.1 a

Bestimmen Sie Skalarprodukt und Kreuzprodukt der Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&\langle e_1, e_2 \rangle \\
&= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}
&e_1 \times e_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

9.1.2 b

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei $e_i \in \mathbb{R}^n (i \in \{1, \ldots, n\})$ der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $\langle v, e_i \rangle$ und (für den Fall $n = 3$) $v \times e_i$.

Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&\langle v, e_1 \rangle \\
&= v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 \\
&= v_1
\end{aligned}$$

allgemein

$$
\begin{aligned}
&\langle v, e_i \rangle \\
&= v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + v_n \cdot e_i \\
&= v_i
\end{aligned}
$$

Kreuzprodukt

$$
\begin{aligned}
&v \times e_1 \\
&= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 1 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v \times e_2 \\
&= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 1 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 1 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v \times e_3 \\
&= \begin{pmatrix} v_2 \cdot 1 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 1 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

9.1.3 c

Bestimmen Sie einen Vektor, der auf der von $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren steht orthogonal auf der von diesen Vektoren aufgespannten Ebene.

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 - 9 \cdot 2 \\ 9 \cdot 1 - 5 \cdot 10 \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 18 \\ 9 - 50 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -41 \\ 9 \end{pmatrix}
$$

9.2 Aufgabe 2

9.2.1 a

Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $det(A)$

1. mittels der Saurrus-Regel
2. mittels der Leibniz-Formel
3. mittels der Kästchenregel

Saurrus Regel

$$\begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}\begin{matrix} 6 & 17 \\ 9 & 32 \\ -5 & -1 \end{matrix}$$

Die Zahlen an den Linien werden Multipliziert. Blaue Linien werden miteinander addiert und Rote subtrahiert.

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 32 \cdot 47 + 17 \cdot 6 \cdot -5 + 24 \cdot 9 \cdot -1 \\ & - -5 \cdot 32 \cdot 24 - -1 \cdot 6 \cdot 6 - 47 \cdot 9 \cdot 17 \\ & = 4983 \end{aligned}$$

Leibniz-Formel

Muss ich nachher machen

Kästchenregel

Linearkombination		
6	17	24
9	32	6
-5	-1	47
Operation: III + $\frac{5}{6}$I		
6	17	24
9	32	6
0	$\frac{79}{6}$	67
Operation: II - $\frac{3}{2}$I		

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 9.1 – *Fortführung von vorherier Seite*		
Linearkombination		
6	17	24
0	$\frac{13}{2}$	-30
0	$\frac{79}{6}$	67

$$\begin{aligned} &6 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -30 \\ \frac{79}{6} & 67 \end{pmatrix}\right) \\ &= 6 \cdot \frac{13}{2} \cdot 67 - \frac{79}{6} \cdot -30 \\ &= 4983 \end{aligned}$$

9.2.2 b

Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $det(B)$

Linearkombination			
1	0	2	0
1	2	9	0
2	0	1	5
1	1	1	1
I und IV tauschen			
1	1	1	1
1	2	9	0
2	0	1	5
1	0	2	0
IV - 2I			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
2	0	1	5
1	0	2	0
IV + II			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
2	0	1	5
0	0	9	-2
III + 2II			
1	1	1	1
-1	0	7	-2
0	0	15	1
0	0	9	-2

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\det(A)} & & \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\det(D)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \\ \underbrace{(1 \cdot 0 - 1 \cdot -1)}_{\det(A)} \cdot \underbrace{(15 \cdot -2 - 9 \cdot 1)}_{\det(D)} &= \\ (0 - 1) \cdot (-30 - 9) = -1 \cdot -39 = 39 \end{aligned}$$

9.2.3 c

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie ohne Rechung $det(C)$.

Die Matrix ist Linear abhängig. Daher ist die Determinante $= 0$.

9.3 Aufgabe 3

9.3.1 a

Prüfen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

$$det\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 3$$
$$-9 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 10 + 36 + 12 - 72 - 60 - 1$$
$$= -75$$

9.3.2 b

Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ = 2 + 0 + 0 - 8 - 0 - 0 \\ = -6 \end{aligned}$$

Da die Matrix Linear unabhängig ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

10. Übungsblatt 9

10.1 Aufgabe 1

10.1.1 a

Seien die Geraden G_1 und G_2 definiert durch:

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie liegen G_1 und G_2 zueinander im Raum? Bestimmen Sie, je nach Lage, Schnittpunkt oder Abstand der beiden Geraden.

Da beide Vektoren die selben Richtungsvektoren besitzen, sind sie entweder echt parallel oder identisch. Um zu prüfen, ob die beiden Vektoren Identisch sind, muss das Gleichungssystem $G_1 = G_2 + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 = 3 + \mu \quad | - 3 \Leftrightarrow -2 = \mu \\ \text{II:} & 2 = 3 + \mu \quad | - 3 \Leftrightarrow -1 = \mu \\ \text{III:} & 3 = 3 + \mu \quad | - 3 \Leftrightarrow 0 = \mu \end{cases}$$

Da das resultierende Gleichungssystem nicht lösbar ist, sind die Vektoren nicht identisch. Nun muss geprüft werden, ob sie echt parallel zueinander stehen. Hierfür muss der Abstand d der Vektoren $G_1 : r = p_1 + \lambda u$ und $G_2 : r = p_2 + \mu u$ bestimmt werden, welcher sich über die Formel $d = \frac{|(p_2 - p_1) \times u|}{|u|}$ berechnen lässt.

$$d = \frac{|(p_2 - p_1) \times u|}{|u|}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{2}$$

Der Abstand zwischen den beiden Vektoren beträgt $\sqrt{2}$. Das bedeutet, dass diese echt parallel zueinander sind.

10.1.2 b

Es sei E definiert durch:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Geben Sie E in Normalenform an.

Nicht Klausurrelevant?

10.2 Aufgabe 2 - nicht klausurrelevant?

10.2.1 a

Sei $v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $G := \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie die Projektion v_w von v auf die von w aufgespannte Gerade G. Bestimmen Sie weiterhin die Matrix, die die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^3 \to G, a \mapsto aw$ dastellt. Was ist der Rang dieser Matrix? Was ist ihr Kern? Was ihr Bild?

10.2.2 b

(Transferfrage) Sei $E := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie kann man die orthogonale Projektion von v auf E bestimmen? Welcher Vektor kommt dabei heraus?

10.3 Aufgabe 3

10.3.1 a

Sei $D_\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die jeden Vektor aus $\mathbb{R}^2$ um π dreht. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sellen Sie die Matrix zu D_π auf und bestimmen Sie $D_\pi(v)$. Bestimmen Sie $\langle v, D_\pi(v) \rangle$.

Die 2x2 Matrix zur Drehung ist $D_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Die Drehmatrix, welche um π dreht, ist somit $D_\pi = \begin{pmatrix} cos(\pi) & -sin(\pi) \\ sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} & D_\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle v, D_\pi(v) \rangle \\ = & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ = & 1 \cdot -1 + 2 \cdot -2 \\ = & -1 + (-4) \\ = & -5 \end{aligned}$$

10.3.2 b

Sei $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung, die den Vektor $(1, 0, 0)^t$ auf den Vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ abbildet. Bestimmen Sie die Drehmatrix, die D darstellt.

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1\\c_1\\c_1\end{pmatrix}$$

Erste Bedingung an c_2

$$\langle c_1, c_2\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Zweite Bedingung an c_2

$$|c_2| = 1$$

$$\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Wähle $x_3 = 0$

In erste Bedingung einsetzen

$$x_1 + x_2 + 0 = 0 \quad | - x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

In zweite Bedingung einsetzen

$$x_1^2 + (-x_1^2) + 0^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_1^2 = 1$$

$$2x_1^2 = 1 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = \frac{1}{2} \quad |\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -x_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = c_1 \times c_2$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

10.3.3 c

Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Bestimmen Sie für die Drehmatrix $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $A_{3,\varphi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (Drehung um die x_3-Achse) die Determinante. Bestimmen Sie weiterhin das Produkt $A_\varphi^t A_\varphi^t$ bzw. $A_{3,\varphi}^t A_{3,\varphi}$. Was ist also die Inverse A_φ^{-1} bzw. $A_{3,\varphi}^{-1}$?

11. Übungsblatt 10

11.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte der folgenden Matrizen:

11.1.1 a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11.1.2 b

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11.1.3 c

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11.1.4 d

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

11.2 b

11.2.1 a

Ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ positiv definit?

11.2.2 b

Wie kann man das Hauptminorenkriterium nutzen, um zu zeigen, dass eine Matrix negativ definit ist? Nutzen Sie Ihr Ergebnis, um zu zeigen, dass die Matrix $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

11.3 Aufgabe 3

11.3.1 a

Für welche Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ hat eine Drehmatrix $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ reele Eigenwerte? Lösen Sie diese Aufgabe einerseits durch geometrische Argumentation, andererseits rechnerisch.

11.3.2 b

Bestimmen Sie mindestens eine Matrix, die in $O(n) \backslash SO(n)$ enthalten ist.

12. Übungsblatt 11

12.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweilts sämtliche Eigenvektoren der folgenden Matzitzen. Hinweis: Die Eigenwerte haben Sie bereits auf dem letzten Übungsblatt bestimmt:

12.1.1 a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.1.2 b

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.1.3 c

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.1.4 d

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Part IV

Übungsaufgaben Stochastik

13. Übungsblatt 5

13.1 Aufgabe 1

13.1.1 a

Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit der rechten Hand eine zwei zu zeigen (also zwei Finger ausgestreckt, die andere eingeklappt zu lassen)? (Anatomisch schwierige Kombinationen und Verrenkungen werden mitgezählt!)

13.1.2 b

Wie viele Möglichkeiten gibt es, irgendeine Zahl zwischen 0 und 5 mit einer Hand zu zeigen? (Auch hier: missverständliche Handzeichen und Verrenkungen werden mitgezählt)

13.2 Aufgabe 2

Eine Freundin hat Ihnen zum Geburtstag sämtliche Buchstaben Ihres Vor- und Nachnamens aus Beton gegossen. Wie (unterscheidbare) viele Wörter können Sie damit bilden, ohne Buchstaben wegzulassen? Wie viele davon enthalten Ihren Vornamen?

13.3 Aufgabe 3

Sie werfen eine (faire) Münze dreimal.

13.3.1 a

Was ist ein passender Ereignisraum Ω?

13.3.2 b

Wie viele Elemente hat die Potenzmente $\mathcal{P}(\Omega)$?

13.3.3 c

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dreimal dasselbe Ergebnis erziehlen?

14. Übungsblatt 6

14.1 Aufgabe 1

14.1.1 a

In der Vorlesung wurde behauptet, dass die Binomalverteilung viele mit der Bernouilli-Verteilung zu tun hat. Sortieren Sie für sich selbst: wie hängen die beiden genau zusammen?

14.1.2 b

Zeichnen Sie das Stäbchendiagramm zu $B(5, \frac{1}{6})$

14.2 Aufgabe 2

14.2.1 a

Sie haben Geburtstag und Ihr Lieblingsonkel liebt seltsame Geschenke. Als Teil seines Geburtstagsgeschenks sollen Sie ein Spiel mit ihm spielen: sie müssen 10 Mal mit einem 12-seitigen Würfel würfeln. Würfeln Sie dabei mindestens 2 Mal den Monat Ihres Geburtstags, dann schenkt Ihr Onkel Ihnen ein neues Fahrrad. Wenn nicht, schenkt er Ihnen eine Tafel Schokolade. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie ein Fahrrad bekommen?

14.2.2 b

In einer Pralinenschachtel sind 8 mit Marzipan und 8 mit Nougat gefüllte Pralinen, die von außen gleich aussehen, zufällig angeordnet. Sie entnehmen und verspeißen 5 Pralinen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 5 Pralinen mit Marzipan gefüllt sind?

14.2.3 c

Erinnern Sie sich an Max aus dem PIN-Beispiel (Foliensatz zu ST-K03, Seite 2 und 3)? Angenommen, er braucht 20 Sekunden, um eine PIN zu probieren. Wie groß ist (im Szenario von Seite 3) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der innerhalb von 5 Minuten die richtige PIN errät, wenn er sich merkt, welche PINs er bereits durchprobiert hat? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn er sich nicht merkt, welche Zahlenkombinationen er bereits durchprobiert hat?

15. Übungsblatt 7

15.1 Aufgabe 1

Herr Huber hat eine Alarmanlage in seinem Auto installiert. Es werden die Ereignisse A: "Alarmanlage springt an" und E: "Jemand versucht, das Auto aufzubrechen" betrachtet. Beschreiben Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Worten: $P(A|E), P(E|A), P(A|EC), P(E|AC)$. Welche dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten möglichst hoch bzw. niedrig sein?

15.2 Aufgabe 2

Bei einer Sportveranstaltung wird ein Dopingtest durchgeführt. Wenn ein Sportler gedopt hat, dann fällt der Test zu 99% positiv aus. Hat ein Sportler aber nicht gedopt, zeigt der Test trotzdem zu 5% ein positives Ergebnis an. Aus Erfahrung weiß man das 20% der Sportler gedopt sind.