Westfälische hochschule

Informatik

sla

Stochastik und Lineare Algebra Übungsaufgaben

LaTeX

Author(s):
-

Supervisor(s):
Prof. Dr. Frau Anderle

July 3, 2025

Einleitung

Dieses Dokument wurde im Jahr 2025 erstellt und deckt dementsprechend nur die Vorlesungsinhalte des Jahres 2025 ab. Es wird keine Gewehr auf vollständigkeit oder richtigkeit des Dokumentes gegeben. Solltest du Fehler finden, melde diese gerne.

Contents

Part I

Semesterzusammenfassung

1. Vektoren

1.1 Definition eines Vektors

Sollen nicht nur einzelne Zahlen festgehalten werden, sondern mehrere Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge zusammengehören, kommen Vektoren ins Spiel.

Ein **Vektor** im $\mathbb{R}^n$ ist formal betrachtet ein Element des mathematischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Das bedeutet, ein Vektor ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen. Ein solcher Vektor wird oft als Spalte geschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

wobei $v1, v2, \ldots, v_n$ reelle Zahlen sind, die sogenannten **Komponenten** oder **Koordinaten** des Vektors. Die Zahl n gibt die **Dimension** des Vektors an.

- Für n=2 liegen Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) vor, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Für n=3 liegen Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$) vor, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Für $n > 3$ wird von höherdimensionalen Räumen gesprochen, die schwerer vorstellbar, aber mathematisch ebenso bedeutsam sind.

Vektoren werden normalerweise mit einem Pfeil gekennzeichnet $\vec{v}$, jedoch wird der einfachkeit halber oft darauf verzichtet.

Ein Vektor (zumindest in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) kann als ein **Pfeil** interpretiert werden, der von einem Punkt zu einem anderen zeigt. Dieser Pfeil hat eine bestimmte **Länge** (Betrag) und eine bestimmte **Richtung**. Wichtig ist, dass Vektoren oft als "frei" betrachtet werden, d.h., ein Pfeil repräsentiert denselben Vektor, egal wo sein Anfangspunkt im Raum liegt, solange Länge und Richtung gleich bleiben. Häufig wird der Pfeil im Ursprung des Koordinatensystems begonnen; dann zeigen seine Koordinaten direkt auf den Endpunkt des Pfeils.

Mit Vektoren können zwei grundlegende Rechenoperationen durchgeführt werden:

1. **Vektoraddition:** Zwei Vektoren derselben Dimension n können addiert werden, indem ihre entsprechenden Komponenten addiert werden. Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, dann ist ihre Summe:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

   Geometrisch entspricht die Addition von Vektoren dem Aneinanderhängen der Pfeile (Parallelogrammregel oder Spitze-an-Schaft-Regel).

2. **Skalare Multiplikation:** Ein Vektor kann mit einer reellen Zahl (einem sogenannten **Skalar**) multipliziert werden. Dabei wird jede Komponente des Vektors mit diesem Skalar multipliziert. Wenn $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar ist und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Vektor, dann ist das Produkt:

$$c \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{pmatrix}$$

   Geometrisch bewirkt die skalare Multiplikation eine Streckung oder Stauchung des Vektors. Wenn der Skalar negativ ist, kehrt sich zusätzlich die Richtung des Vektors um.

Diese beiden Operationen sind fundamental und bilden die Grundlage für die Struktur eines **Vektorraums**, ein zentrales Konzept in der linearen Algebra. Ein Vektor ist also nicht nur ein Tupel von Zahlen, sondern ein Objekt, das sich auf definierte Weise mit anderen Vektoren (Addition) und Skalaren (skalare Multiplikation) kombinieren lässt.

1.2 Parallelität

Zwei Vektoren sind Parallel zueinander, falls ein Vektor ein vielfaches eines anderen ist. Um zu prüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ parallel zueinander sind, können einfach die einzelnen Einträde dividiert werden. Wenn alle Ergebnisse gleich sind, sind die Vektoren Parallel.

2. Vektorraum

2.1 Definition

Ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ (Hier inden Vorlesungen immer $\mathbb{R}$) ist eine Menge V, deren Elemente Vektoren genannt werden, zusammen mit zwei Operationen:

- der Vektoraddition $+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$,
- der Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $(s, v) \mapsto s \cdot v$.

Damit $(V, +, \cdot)$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezeichnet werden kann, müssen die folgenden Axiome für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und alle Skalare $s, t \in \mathbb{K}$ erfüllt sein:

Axiome der Vektoraddition (d.h. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe):

- $v + w = w + v$ (Kommutativgesetz der Addition)
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Assoziativgesetz der Addition)
- Es existiert ein Nullelement $\vec{0} \in V$, sodass für alle $v \in V$ gilt: $\vec{0} + v = v$ (Existenz des neutralen Elements der Addition)
- Zu jedem $v \in V$ existiert ein inverses Element $-v \in V$, sodass gilt: $v + (-v) = \vec{0}$ (Existenz des inversen Elements der Addition)

Axiome der Skalarmultiplikation (und Kompatibilität mit der Vektoraddition):

- $s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w$ (Distributivgesetz bezüglich der Vektoraddition)
- $(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$ (Distributivgesetz bezüglich der Skalaraddition)
- $(s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$ (Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation)
- $1 \cdot v = v$, wobei 1 das Einselement des Körpers $\mathbb{K}$ ist (Neutralität des Einselements des Körpers)

Erläuterung Die Vektorraumaxiome stellen sicher, dass die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren sich in einer Weise verhalten, die konsistent und "vernünftig" ist. Die ersten vier Axiome definieren die Eigenschaften der Vektoraddition (die Vektoren bilden eine abelsche Gruppe), während die übrigen Axiome die Wechselwirkung mit der Skalarmultiplikation regeln. Obwohl die Liste der Axiome zunächst umfangreich erscheinen mag, fassen sie im Kern zusammen, dass sich das

Rechnen mit Vektoren und Skalaren in vielerlei Hinsicht analog zum Rechnen mit "normalen" Zahlen (wie den reellen Zahlen $\mathbb{R}$) und deren bekannten Rechengesetzen verhält. Es sind also genau die Eigenschaften, die man intuitiv von Operationen erwarten würde, die man "Addition" und "skalare Multiplikation" nennt.

3. Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind ein fundamentales Konzept in der Mathematik, besonders in der linearen Algebra. Sie beschreiben auf eine sehr spezielle Weise, wie ein Vektor (oder eine Zahl) in einen anderen transformiert wird.

3.1 Was ist überhaupt eine lineare Abbildung? (Der einfache Fall)

Eine Lineare Abbildung ist eine Abbildung mit Konstanten Anteil 0.

Das bedeutet, wenn man sich den Graphen der Funktion vorstellt, muss er **immer durch den Ursprung gehen** (also durch den Punkt $(0, 0)$).

Beispiele:

- $f(x) = 3x$
  - Hier wird jede Zahl x einfach mit 3 multipliziert.
  - Wenn $x = 0$ eingesetzt wird, kommt $f(0) = 3 \cdot 0 = 0$ raus. Der konstante Anteil ist 0.
  - Grafisch ist das eine Gerade, die durch den Ursprung geht.
  - **Das ist eine lineare Abbildung.**
- $f(x) = 3x + 3$
  - Hier wird x mit 3 multipliziert, und dann wird noch 3 addiert.
  - Wenn $x = 0$ eingesetzt wird, kommt $f(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ raus.
  - Dieser "+3"-Teil ist der "konstante Anteil", der eben nicht Null ist.
  - Grafisch ist das eine Gerade, die die y-Achse bei 3 schneidet, nicht im Ursprung.
  - **Das ist KEINE lineare Abbildung.**

3.2 Lineare Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen

Nun wird es etwas allgemeiner. Man stelle sich vor, man hat nicht nur einzelne Zahlen, sondern ganze Räume voller Vektoren. Eine lineare Abbildung kann nun Vektoren aus einem Vektorraum in Vektoren eines anderen

Vektorraums überführen. Damit das "linear" im Sinne der linearen Algebra ist, müssen zwei ganz wichtige Eigenschaften erfüllt sein: **Additivität** und **Homogenität**.

3.2.1 Homogenität ("Skalierungstreue")

Die Homogenität besagt:

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

Bedeutung:

- λ (Lambda) ist ein Skalar.
- v ist ein Vektor.
- $\lambda \cdot v$ bedeutet: Man nimmt den Vektor v und streckt oder staucht ihn um den Faktor λ.
- $f(v)$ ist das Ergebnis, wenn die Abbildung f auf den Vektor v angewendet wird.

Die Regel besagt: Es ist egal, ob ein Vektor **zuerst skaliert** und **dann die Abbildung angewendet wird**, ODER ob **zuerst die Abbildung auf den Vektor angewendet wird** und **das Ergebnis dann skaliert wird**. Es muss dasselbe Ergebnis resultieren.

Beispiel $f(x) = 3x$ (hier ist x ein eindimensionaler Vektor):

Sei $\lambda = 2$ und der "Vektor" $x = 2$.

- **Linke Seite der Gleichung:** $f(\lambda \cdot x)$
  1. Zuerst skalieren: $\lambda \cdot x = 2 \cdot 2 = 4$.
  2. Dann f anwenden: $f(4) = 3 \cdot 4 = 12$.
- **Rechte Seite der Gleichung:** $\lambda \cdot f(x)$
  1. Zuerst f anwenden: $f(x) = f(2) = 3 \cdot 2 = 6$.
  2. Dann das Ergebnis skalieren: $\lambda \cdot f(2) = 2 \cdot 6 = 12$.

Es gilt $12 = 12$. Die Homogenität ist erfüllt.

Der Ausdruck $f(4) = 3 \cdot 4 = 2 \cdot f(2) = f(2 \cdot 2)$ zeigt genau das:

- $f(2 \cdot 2)$ ist die linke Seite (erst skalieren, dann abbilden).
- $2 \cdot f(2)$ ist die rechte Seite (erst abbilden, dann skalieren).

3.2.2 Additivität ("Summentreue")

Die Additivität besagt:

$$f(v + w) = f(v) + f(w)$$

Bedeutung:

- v und w sind zwei Vektoren (aus demselben Vektorraum).
- $v + w$ ist die Summe der beiden Vektoren.

Die Regel besagt: Es ist egal, ob zwei Vektoren **zuerst addiert** und **dann die Abbildung auf die Summe angewendet wird**, ODER ob **zuerst die Abbildung auf jeden Vektor einzeln angewendet wird** und **dann die Ergebnisse addiert werden**. Es muss dasselbe Ergebnis resultieren.

Beispiel mit $f(x) = 3x$:

Seien $v = 1$ und $w = 5$.

- **Linke Seite der Gleichung:** $f(v + w)$
  1. Zuerst addieren: $v + w = 1 + 5 = 6$.
  2. Dann f anwenden: $f(6) = 3 \cdot 6 = 18$.
- **Rechte Seite der Gleichung:** $f(v) + f(w)$
  1. f auf v anwenden: $f(v) = f(1) = 3 \cdot 1 = 3$.
  2. f auf w anwenden: $f(w) = f(5) = 3 \cdot 5 = 15$.
  3. Die Ergebnisse addieren: $3 + 15 = 18$.

Es gilt $18 = 18$. Die Additivität ist erfüllt.

Zusammenfassend für Vektorräume: Eine Abbildung f zwischen zwei Vektorräumen ist linear, wenn sie

1. **homogen** ist: $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$
2. **additiv** ist: $f(v + w) = f(v) + f(w)$

Diese beiden Bedingungen sind der Kern dessen, was eine lineare Abbildung ausmacht. Sie sorgen dafür, dass die Struktur des Vektorraums durch die Abbildung "respektiert" wird.

Warum ist das wichtig? Lineare Abbildungen sind grundlegend für viele Transformationen und haben Eigenschaften, die in Bereichen wie Computergrafik, Physik und Ingenieurwesen nützlich sind.

4. Linearkombinationen

Eine Linearkombination von Vektoren ist eine Summe dieser Vektoren, wobei jeder Vektor zuvor mit einem Skalar (einer reellen Zahl) multipliziert wird. Das Ergebnis einer solchen Operation ist wiederum ein Vektor.

Ein Vektor $\vec{x}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ bezeichnet, falls Skalare $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass gilt:

$$\vec{x} = k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{v}_n$$

Um festzustellen, ob ein gegebener Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination anderer Vektoren dargestellt werden kann und um die entsprechenden Skalare k_i zu bestimmen, wird in der Regel ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und gelöst.

4.1 Beispiel

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es soll geprüft werden, ob $\vec{w}$ eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist. Gesucht sind also Skalare $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = \vec{w}$ erfüllt ist.

Einsetzen der Vektorkomponenten führt zu:

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \text{I:} & a \cdot 2 + b \cdot 0 = 1 \\ \text{II:} & a \cdot 4 + b \cdot 0 = 2 \\ \text{III:} & a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & a \cdot 2 = 1 \quad | : 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ \text{II:} & a \cdot 4 = 2 \quad | : 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ \text{III:} & a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Einsetzen von $a = \dfrac{1}{2}$ in Gleichung III:

$$\begin{cases} \text{I:} & a = \frac{1}{2} \\ \text{II:} & a = \frac{1}{2} \\ \text{III:} & \frac{1}{2} \cdot 1 + b \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + b = 0 \quad | - \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Skalare sind $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{2}$. Damit ist die Bedingung erfüllt und der Vektor $\vec{w}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen:

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

Zur Überprüfung kann das Ergebnis eingesetzt werden:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

5. Gauß-Jordan Verfahren

5.1 Grundlagen des Gauß-Jordan-Verfahrens

Das Gauß-Jordan-Verfahren ist ein Rechenverfahren (Algorithmus) aus der linearen Algebra. Man nutzt es hauptsächlich, um lineare Gleichungssysteme (LGS) zu lösen oder um die Inverse einer Matrix zu finden. Es ist eine Erweiterung des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

5.1.1 Was ist das Ziel?

Das Hauptziel des Gauß-Jordan-Verfahrens ist es, eine Matrix durch bestimmte Umformungen in eine spezielle, sehr einfache Form zu bringen: die **reduzierte Zeilenstufenform**. Aus dieser Form kann man die Lösung eines Gleichungssystems oder die Inverse einer Matrix direkt ablesen. Die Matrix ist in reduzierter Zeilenstufenform, wenn:

- Das erste Element ungleich Null in jeder Zeile (das sogenannte Pivot-Element) eine 1 ist.
- Alle anderen Elemente in der Spalte eines Pivot-Elements Null sind.
- Nulzeilen (falls vorhanden) ganz unten stehen.

5.1.2 Erlaubte Umformungen: Elementare Zeilenumformungen

Um die Matrix umzuformen, sind nur drei Arten von Operationen erlaubt. Diese ändern die Lösungsmenge eines Gleichungssystems nicht:

- **Zeilen vertauschen ($Z_i \leftrightarrow Z_j$):** Zwei komplette Zeilen der Matrix werden miteinander getauscht.
- **Zeile mit Zahl multiplizieren ($Z_i \to c \cdot Z_i$):** Jedes Element einer Zeile wird mit derselben Zahl c multipliziert. Wichtig: c darf nicht Null sein.
- **Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren ($Z_i \to Z_i + k \cdot Z_j$):** Ein Vielfaches einer Zeile wird zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile addiert (oder subtrahiert).

5.2 Die Schritte des Verfahrens

Das Verfahren läuft in zwei Hauptphasen ab:

5.2.1 Phase 1: Vorwärtselimination (Zeilenstufenform erreichen)

In dieser Phase, ähnlich dem Gaußschen Eliminationsverfahren, erzeugt man Nullen unterhalb der Pivot-Elemente. Ein Pivot-Element ist das erste von links gesehene Element einer Zeile, das nicht Null ist.

1. **Pivot finden:** Man beginnt mit der obersten Zeile. Das erste Element ungleich Null (von links) ist das Pivot-Element dieser Zeile. Wenn dieses Element an der Position (i, j) ist, dann werden alle Elemente unterhalb in der Spalte j zu Null gemacht.

2. **Nullen erzeugen:** Mit Hilfe der Zeile, die das aktuelle Pivot-Element enthält (Pivot-Zeile), werden alle Zahlen direkt unter diesem Pivot zu Null. Dies geschieht, indem man passende Vielfache der Pivot-Zeile von den darunterliegenden Zeilen subtrahiert (oder addiert).

3. **Wiederholen:** Man geht zur nächsten Zeile und zum nächsten Pivot-Element und wiederholt den Vorgang, bis unter allen Pivot-Elementen nur noch Nullen stehen. Das Ergebnis nennt man Zeilenstufenform.

5.2.2 Phase 2: Rückwärtselimination (Reduzierte Zeilenstufenform erreichen)

Nun wird die Zeilenstufenform zur einfacheren reduzierten Zeilenstufenform umgewandelt:

1. **Pivots zu 1 machen:** Man beginnt mit dem untersten Pivot-Element (also in der untersten Zeile, die nicht nur Nullen enthält). Dieses Pivot-Element wird zu 1 gemacht, indem man seine gesamte Zeile durch den Wert des Pivot-Elements teilt. (Dieser Schritt kann auch schon während der Vorwärtselimination für jedes Pivot gemacht werden.)

2. **Nullen oberhalb der Pivots erzeugen:** Mit der Zeile, deren Pivot-Element nun 1 ist, werden alle Zahlen in derselben Spalte direkt *über* diesem Pivot zu Null gemacht. Dazu addiert/subtrahiert man Vielfache dieser Pivot-Zeile von den oberen Zeilen.

3. **Wiederholen:** Diese Schritte (Pivot zu 1 machen, Nullen darüber erzeugen) wiederholt man für die darüberliegenden Pivot-Zeilen, von unten nach oben.

Am Ende dieses Prozesses ist die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform.

5.3 Beispiel: Lösen eines Linearen Gleichungssystems (LGS)

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

Wir schreiben dies als erweiterte Matrix $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Phase 1: Vorwärtselimination

1. Das erste Pivot-Element ist die 1 in der ersten Zeile, ersten Spalte ($a_{11} = 1$).
2. Wir wollen die 3 unter diesem Pivot zu Null machen. Dazu rechnen wir: $R_2 \to R_2 - 3R_1$. Die zweite Zeile wird: $(3-3\cdot1, -1-3\cdot2 \quad | \quad 1-3\cdot5) = (0, -7 \quad | \quad -14)$. Die Matrix ist jetzt:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right]$$

Die Vorwärtselimination ist für dieses kleine Beispiel schon fertig (Zeilenstufenform erreicht).

Phase 2: Rückwärtselimination

1. Wir beginnen mit dem untersten Pivot, hier die -7 in der zweiten Zeile ($a_{22} = -7$). Wir machen es zu 1 durch $R_2 \to -\frac{1}{7}R_2$. Die zweite Zeile wird: $(0 \cdot (-\frac{1}{7}), -7 \cdot (-\frac{1}{7}) \quad | \quad -14 \cdot (-\frac{1}{7})) = (0, 1 \quad | \quad 2)$. Die Matrix ist jetzt:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
2. Jetzt erzeugen wir eine Null über dem Pivot der zweiten Zeile (also über der $a_{22} = 1$). Das ist die 2 in der ersten Zeile ($a_{12} = 2$). Dazu rechnen wir: $R_1 \to R_1 - 2R_2$. Die erste Zeile wird: $(1-2\cdot0, 2-2\cdot1 \quad | \quad 5-2\cdot2) = (1, 0 \quad | \quad 1)$. Die Matrix ist jetzt in reduzierter Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Lösung ablesen: Die Matrix entspricht den Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1x + 0y = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = 1 \\ 0x + 1y = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = 2 \end{aligned}$$

Die Lösung des LGS ist also $x = 1$ und $y = 2$.

6. Lineare Unabhängigkeit

6.1 Zwei Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die beide nicht der Nullvektor sind, werden als linear **abhängig** bezeichnet, wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist. Das bedeutet, es existiert eine Zahl (Skalar) $k \in \mathbb{R}$, für die $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ gilt.

Sind die Vektoren nicht linear abhängig, so sind sie linear **unabhängig**. Äquivalent dazu kann die lineare Unabhängigkeit/Abhängigkeit über die Linearkombination zum Nullvektor geprüft werden: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear **unabhängig**, wenn die Vektorgleichung

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ besitzt. Gibt es hingegen eine nichttriviale Lösung (bei der x_1 oder x_2 oder beide ungleich Null sind), sind die Vektoren linear **abhängig**.

Beispiel

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Es wird geprüft, ob ein Skalar k existiert, sodass $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2 = k \cdot 4 & \Rightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 0 = k \cdot 6 & \Rightarrow k = \frac{0}{6} = 0 \\ 1 = k \cdot 8 & \Rightarrow k = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Da die Werte für k ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{8}$) nicht übereinstimmen, existiert kein einheitlicher Skalar k, der alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Somit ist $\vec{a}$ kein skalares Vielfaches von $\vec{b}$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind daher linear **unabhängig**.

Zur Überprüfung mit dem alternativen Ansatz $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{0}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ + 6x_2 = 0 \\ x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung ($6x_2 = 0$) folgt direkt $x_2 = 0$. Setzt man $x_2 = 0$ in die erste Gleichung ein, erhält man $2x_1 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Die dritte Gleichung ($x_1 + 8x_2 = 0$) ist mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ebenfalls erfüllt ($0 + 8 \cdot 0 = 0$). Da $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die einzige Lösung ist (triviale Lösung), sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear **unabhängig**.

6.2 Beliebig viele Vektoren

Eine Menge von n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißt linear **unabhängig**, wenn die Vektorgleichung

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

ausschließlich die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ besitzt. Existiert hingegen mindestens eine nichttriviale Lösung (d.h. mindestens ein Koeffizient $x_i \neq 0$), so sind die Vektoren linear **abhängig**.

Beispiel

Es soll geprüft werden, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig oder abhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dazu wird der Ansatz $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ verfolgt. Dies führt zu dem homogenen linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 1x_1 + 3x_2 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System wird mithilfe des **??** (Gauß-Jordan-Elimination) gelöst. Betrachtet wird die Koeffizientenmatrix:

Linearkombination		
1	-2	4
2	1	3
1	3	-1
Operation: III - I		
1	-2	4
2	1	3
0	-5	5
Operation: II - 2I		
1	-2	4
0	5	-5
0	-5	5
Operation: III + II		
1	-2	4
0	5	-5
0	0	0
Hier ist jetzt eine Nullzeile entstanden. Das bedeutet nur, dass das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist. Diese muss nicht mehr betrachtet werden, da sie als einzige Aussage $0 = 0$ liefert.		
Operation: 5I + 2II		
1	0	10
0	5	-5
Operation: II + 2I		
1	0	10
0	5	0

Aus der reduzierten Zeilenstufenform lassen sich die folgenden Gleichungen ablesen:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad x_1 + 2x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2x_3 \\ \text{II:} \quad x_2 - x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = x_3 \end{aligned}$$

Setzt man $x_3 = t$, wobei $t \in \mathbb{R}$ ein freier Parameter ist, so erhält man die allgemeine Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da es nichttriviale Lösungen gibt (z.B. für $t = 1$ ergibt sich die Lösung $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1$), sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear **abhängig**.

Lineare abhängigkeit kann auch über die **??** geprüft werden. Hierbei sind die Vektoren Linear abhängig, wenn $\det(A) = 0$ ist, wobei A die Matrixkombination aus den Vektoren ist. In dem o.g. Beispiel ist $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Basis von Vektorräumen

Eine Basis eines Vektorraums V ist eine Menge von Vektoren $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, die zwei grundlegende Eigenschaften erfüllen:

- Die Vektoren in $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig.
- Die Vektoren in $\mathcal{B}$ spannen den Vektorraum V auf (d.h., jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{B}$ darstellen).

Jeder Vektor im Vektorraum V kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden. Alle Basen eines gegebenen Vektorraums haben dieselbe Anzahl von Elementen. Diese Anzahl wird als die Dimension des Vektorraums bezeichnet, geschrieben als $\dim(V)$.

Ein Vektorraum besitzt im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Basen (sofern der zugrundeliegende Körper, wie z.B. $\mathbb{R}$, unendlich viele Elemente enthält). Für den häufig betrachteten Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bilden die sogenannten Standardeinheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine spezielle Basis, die als Standardbasis oder kanonische Basis bekannt ist. Beispielsweise ist für $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis gegeben durch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Dimension des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist n. Folglich muss jede Basis des $\mathbb{R}^n$ aus genau n Vektoren bestehen.

- Eine Menge von mehr als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist immer linear abhängig und kann daher keine Basis bilden. Beispielsweise können vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, da sie zwangsläufig linear abhängig sind.
- Eine Menge von weniger als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ kann den Raum $\mathbb{R}^n$ nicht vollständig aufspannen. Beispielsweise können zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ höchstens eine Ebene aufspannen, aber nicht den gesamten dreidimensionalen Raum.

7.1 Bedingungen für eine Basis im $\mathbb{R}^n$

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bildet genau dann eine Basis für den $\mathbb{R}^n$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig.

2. Die Anzahl der Vektoren k ist gleich der Dimension des Raumes, also $k = n$.

Es ist wichtig zu beachten: Wenn bekannt ist, dass $k = n$ (d.h., die Anzahl der Vektoren entspricht der Dimension des Raumes $\mathbb{R}^n$), dann ist die Bedingung der linearen Unabhängigkeit bereits ausreichend. Alternativ ist auch die Bedingung, dass die n Vektoren den Raum $\mathbb{R}^n$ aufspannen, ausreichend. In der Praxis wird oft die lineare Unabhängigkeit von n Vektoren überprüft.

7.2 Beispiel: Überprüfung einer Basis im $\mathbb{R}^3$

Um zu prüfen, ob die Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, müssen diese auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Da es sich um drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ handelt, ist die Anzahl der Vektoren gleich der Dimension des Raumes ($n = 3$). Somit genügt es, die lineare Unabhängigkeit nachzuweisen.

Dazu wird das homogene lineare Gleichungssystem $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet. Dies führt auf die Koeffizientenmatrix:

Linearkombination / Gauß-Algorithmus
$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$
Operation: III - 2I
$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{matrix}$
Operation: 2III + 5II
$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$
Operation: 2I - 3II
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$
Operation: I + $\frac{1}{3}$III
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$
Operation: II - $\frac{1}{3}$III

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 7.1 – *Fortführung von vorheriger Seite*		
Linearkombination / Gauß-Algorithmus		
1	0	0
0	2	0
0	0	3
Operation: II : 2		
Operation: III : 3		
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Da die reduzierte Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix die Einheitsmatrix ist, hat das homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. Dies bedeutet, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Weil es sich um drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ handelt (Anzahl der Vektoren = Dimension des Raumes), bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

8. Spannraum, Dimension und Kern von Untervektorräumen

8.1 Untervektorraum

Ganz einfach gesagt ist ein Untervektorraum ein Teil eines größeren Vektorraums, der selbst alle Eigenschaften eines Vektorraums erfüllt. Betrachtet man den $\mathbb{R}^3$ (den normalen 3D-Raum) als gesamten Raum, so ist ein Untervektorraum ein bestimmter Bereich darin, zum Beispiel:

- Eine Ebene, die genau durch den Ursprung (den Nullpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) geht. Wenn zwei Vektoren in dieser Ebene addiert werden, so liegt das Ergebnis wieder in dieser Ebene. Wenn ein Vektor in dieser Ebene gestreckt oder gestaucht wird, verbleibt man ebenfalls in der Ebene.
- Eine Gerade, die genau durch den Ursprung geht, ist auch ein Untervektorraum.

Wichtig ist: Ein Untervektorraum darf nicht leer sein; er muss mindestens den Nullvektor enthalten (der Ursprung muss Teil davon sein). Eine Ebene, die den Ursprung nicht enthält, ist **kein** Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$: Die Menge aller Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ (also die xy-Ebene) ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Die Menge aller Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ist **kein** Untervektorraum, da sie den Nullvektor nicht enthält und die Addition zweier solcher Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht wieder in der Menge liegt.

8.2 Spannraum

Der Spannraum (auch lineare Hülle genannt) umfasst alles, was mit einer gegebenen Menge von Vektoren "erreicht" oder "aufgespannt" werden kann, indem diese beliebig verlängert, verkürzt und addiert werden. Man kann sich das anhand von Vektoren als Pfeile vorstellen:

- Mit einem einzigen Vektor (der nicht der Nullvektor ist), z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, kann eine Gerade aufgespannt werden. Der Spannraum $span\{\vec{v}\}$ besteht aus allen Vielfachen dieses Vektors (z.B. $2\vec{v}$, $-0.5\vec{v}$, etc.), was eben diese Gerade durch den Ursprung ergibt.

- Mit zwei Vektoren, die in unterschiedliche Richtungen zeigen, z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$, kann eine ganze Ebene aufgespannt werden (hier die xy-Ebene). Der Spannraum ist dann $span\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}\}$.

Der gesamte $\mathbb{R}^3$ wird zum Beispiel von den drei Einheitsvektoren aufgespannt:

$$\mathbb{R}^3 = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Man sagt, diese Vektoren sind ein Erzeugendensystem für den $\mathbb{R}^3$.

Wenn die Vektoren, die den Raum aufspannen, linear unabhängig sind (also keiner der Vektoren durch die anderen ausgedrückt werden kann), dann bilden sie eine Basis für diesen Spannraum. Sind sie linear abhängig, gibt es "überflüssige" Vektoren, die man weglassen könnte, ohne den Spannraum zu verkleinern. Zum Beispiel spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ immer noch die $\mathbb{R}^2$-Ebene auf, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht nötig, da er eine Kombination der ersten beiden ist.

8.3 Dimension

Die Dimension eines Vektorraums (oder Untervektorraums) ist einfach die Anzahl der Vektoren, die mindestens benötigt werden, um diesen Raum aufzuspannen. Diese "minimal notwendigen" Vektoren müssen linear unabhängig sein und bilden eine sogenannte Basis.

- Eine Gerade hat die Dimension 1 (es wird ein Vektor benötigt, um sie aufzuspannen).

- Eine Ebene hat die Dimension 2 (es werden zwei linear unabhängige Vektoren benötigt, um sie aufzuspannen).

- Der Raum $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 3 (es werden drei linear unabhängige Vektoren benötigt, z.B. die Einheitsvektoren).

- Der $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.

- Ein Punkt (nur der Nullvektor) hat die Dimension 0.

Die Dimension gibt also an, wie viele "Freiheitsgrade" oder "unabhängige Richtungen" es in dem Raum gibt.

8.4 Kern

Der Kern bezieht sich nicht auf einen Vektorraum allein, sondern auf eine lineare Abbildung (oft dargestellt durch eine Matrix A). Ganz einfach gesagt: Der Kern einer Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die von der Matrix A auf den Nullvektor $\vec{0}$ abgebildet werden. Also alle $\vec{x}$, für die gilt: $A\vec{x} = \vec{0}$.

Man kann sich eine Maschine (die Matrix) vorstellen, in die Vektoren hineingegeben werden. Der Kern sind all die Vektoren, die nach der Verarbeitung durch die Maschine "verschwinden" (also zum Nullvektor werden).

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Es werden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gesucht, sodass $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt zu der Gleichung $x_1 + 2x_2 = 0$, also $x_1 = -2x_2$. Alle Vektoren im Kern haben also die Form $\begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Kern ist also der Spannraum des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, was einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ entspricht. Alle Vektoren auf dieser Geraden werden von der Matrix A auf den Nullvektor abgebildet.

8.4.1 Dimensionssatz

Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$, die durch eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ repräsentiert wird, setzt der Dimensionssatz die Dimension des Definitionsraums V in Beziehung zur Dimension des Kerns und des Bildes von f.

$$n = \dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A)$$

Beispiel

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Der Definitionsraum ist $\mathbb{R}^3$, also ist $n = 3$.

- **Kern:** Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = 0$. Dies führt zum Gleichungssystem $x_1 - x_3 = 0$ und $x_2 - 2x_3 = 0$. Daraus folgt $x_1 = x_3$ und $x_2 = 2x_3$. Der Kern wird also von Vektoren der Form $(t, 2t, t) = t \cdot (1, 2, 1)$ aufgespannt. Eine Basis des Kerns ist $\{(1, 2, 1)\}$, somit ist $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$.

- **Rang:** Die ersten beiden Spaltenvektoren $(1,0)$ und $(0,1)$ sind linear unabhängig und spannen $\mathbb{R}^2$ auf. Der Rang ist also $\text{Rang}(A) = 2$.

Die Dimensionsformel gilt: $3 = 1 + 2$.

8.5 Injektive lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$, also $\dim(\text{Kern}(f)) = 0$.

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y) = (x, y, x+y)$ wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Aus $Ax = 0$ folgt $x = 0$ und $y = 0$. Der Kern ist $\text{Kern}(f) = \{(0,0)\}$, die Abbildung ist injektiv.

8.6 Surjektive lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist surjektiv, wenn $\text{Bild}(f) = W$, also $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aus dem Beispiel zum Dimensionssatz ist surjektiv, da der Rang der Matrix A gleich 2 ist, was der Dimension des Zielraums $\mathbb{R}^2$ entspricht. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ kann als Bild eines Vektors aus $\mathbb{R}^3$ dargestellt werden.

8.7 Bijektive lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Dies ist nur möglich, wenn $\dim(V) = \dim(W)$. Sie muss außerdem invertierbar sein.

Beispiel

Die Drehung um 90 Grad in $\mathbb{R}^2$ wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Determinante ist $\det(A) = 1 \neq 0$, die Matrix ist also invertierbar. Daraus folgt, dass die Abbildung bijektiv ist. Der Kern ist $\{(0,0)\}$ (injektiv) und der Rang ist 2 (surjektiv).

8.8 Orthogonale Projektion

Die orthogonale Projektion des Vektors b auf den Vektor a.

$$\text{proj}_a(b) = \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2} a$$

Beispiel

Seien die Vektoren $b = (2,3)$ und $a = (4,0)$ in $\mathbb{R}^2$.

- Skalarprodukt: $\langle b, a\rangle = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$.
- Norm-Quadrat: $\|a\|^2 = 4^2 + 0^2 = 16$.

Die Projektion ist:

$$\text{proj}_a(b) = \frac{8}{16}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.5\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $(2,0)$ ist der Anteil von b, der in Richtung von a zeigt.

8.9 Orthogonale und Spezielle Orthogonale Gruppen

Orthogonale Matrizen beschreiben Transformationen (Isometrien), die Längen und Winkel erhalten, wie Drehungen und Spiegelungen.

8.9.1 Die Orthogonale Gruppe $O(n)$

Die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen A, deren Inverse ihre Transponierte ist.

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I_n\}$$

Für jede Matrix $A \in O(n)$ gilt $\det(A)^2 = 1$, woraus folgt, dass $\det(A) \in \{+1, -1\}$.

8.9.2 Die Spezielle Orthogonale Gruppe $SO(n)$

Dies ist die Untergruppe von $O(n)$, die nur die Matrizen mit Determinante $+1$ enthält.

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

Matrizen in $SO(n)$ repräsentieren reine Drehungen und erhalten die Orientierung des Raumes. Die Matrix für die 90-Grad-Drehung im obigen Beispiel ist ein Element von $SO(2)$. Eine Spiegelung an der y-Achse in $\mathbb{R}^2$ wird durch $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt. Hier ist $\det(A) = -1$, also $A \in O(2)$, aber $A \notin SO(2)$.

8.9.3 Der Quotient $O(n)/SO(n)$

Da $SO(n)$ ein Normalteiler von $O(n)$ ist, kann die Quotientengruppe $O(n)/SO(n)$ gebildet werden. Diese Gruppe beschreibt die "Orientierung".

$$O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$$

Es gibt zwei Elemente (Nebenklassen) in dieser Gruppe:

1. Die Menge aller orientierungserhaltenden Transformationen (Drehungen), was $SO(n)$ selbst ist.
2. Die Menge aller orientierungsumkehrenden Transformationen (Spiegelungen und Drehspiegelungen).

Der Quotient fasst also alle Drehungen zu einem Element und alle Spiegelungen/orientierungsumkehrenden Abbildungen zum anderen Element zusammen.

9. Skalar- und Kreuzprodukt

9.1 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird in dieser Veranstaltung als $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ notiert. Andere gebräuchliche Schreibweisen sind $\vec{a} \circ \vec{b}$ oder $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Eine Grundvoraussetzung für die Berechnung des Skalarprodukts ist, dass die beiden Vektoren dieselbe Anzahl von Komponenten besitzen, also aus demselben Vektorraum $\mathbb{R}^n$ stammen.

Das Skalarprodukt wird berechnet, indem die korrespondierenden Komponenten der beiden Vektoren multipliziert und die resultierenden Produkte summiert werden. Für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt definiert als:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \cdots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

9.2 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) ist eine mathematische Operation, die zwei Vektoren im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) nimmt und einen neuen Vektor erzeugt. Dieser resultierende Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht (orthogonal) auf der Ebene, die von den beiden ursprünglichen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Die Richtung des Ergebnisvektors wird durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt.

Der Betrag (die Länge) des resultierenden Vektors $||\vec{a} \times \vec{b}||$ entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ berechnet sich das

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

9.2.1 Berechnungsschema

Das Schema zur Berechnung der Komponenten c_1, c_2, c_3 des Kreuzprodukts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ kann visualisiert werden. Die folgende Grafik zeigt eine Methode, die auf der Regel von Sarrus basiert.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ a_2 & \times & b_2 \\ a_3 & & b_3 \\ \color{blue}{a_1} & & \color{blue}{b_1} \\ \color{blue}{a_2} & & \color{blue}{b_2} \end{array} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Figure 9.1: Berechnungsschema des Kreuzprodukts nach der Regel von Sarrus. Die ersten beiden Komponenten jedes Vektors werden unterhalb wiederholt (hier in blau dargestellt).

Erläuterung der Zeichnung zur Kreuzproduktberechnung

Die oben dargestellte Grafik (siehe Abbildung **??**) veranschaulicht eine Methode zur Berechnung des Kreuzprodukts $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, die oft als Erweiterung der Regel von Sarrus bezeichnet wird. So wird die Zeichnung verwendet:

1. **Komponenten aufschreiben:** Die Komponenten der beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden nebeneinander notiert.

2. **Komponenten wiederholen:** Die ersten beiden Komponenten jedes Vektors (a_1, a_2 und b_1, b_2) werden unterhalb der ursprünglichen drei Komponenten erneut aufgeschrieben. In der Zeichnung sind diese wiederholten Komponenten zur Verdeutlichung blau markiert.

3. **Produkte bilden und Komponenten berechnen:** Nun werden die Komponenten des Ergebnisvektors $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ durch diagonale Multiplikation bestimmt:

   - **Für c_1:** Man betrachtet die zweite und dritte Zeile der ursprünglichen Komponenten. Die blau gestrichelte Linie von a_2 nach b_3 zeigt das Produkt $+a_2b_3$. Die rot gestrichelte Linie von a_3 nach b_2 zeigt das Produkt $-a_3b_2$. Somit ist $c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$.

   - **Für c_2:** Man betrachtet die dritte Zeile der ursprünglichen Komponenten (a_3, b_3) und die erste Zeile der wiederholten Komponenten (a_1, b_1, in blau). Die blau gestrichelte Linie von a_3 (Original) nach b_1 (blau, wiederholt) zeigt das Produkt $+a_3b_1$. Die rot gestrichelte Linie von a_1 (blau, wiederholt) nach b_3 (Original) zeigt das Produkt $-a_1b_3$. Somit ist $c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$.

- **Für c_3:** Man betrachtet die erste und zweite Zeile der wiederholten Komponenten (alle blau). Die blau gestrichelte Linie von a_1 (blau, wiederholt) nach b_2 (blau, wiederholt) zeigt das Produkt $+a_1b_2$. Die rot gestrichelte Linie von a_2 (blau, wiederholt) nach b_1 (blau, wiederholt) zeigt das Produkt $-a_2b_1$. Somit ist $c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$.

4. **Ergebnisvektor:** Die berechneten Werte c_1, c_2, c_3 bilden die Komponenten des Kreuzproduktvektors, wie auf der rechten Seite der Zeichnung dargestellt.

10. Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen oder anderen mathematischen Objekten, die in Zeilen und Spalten organisiert sind. Die Notation $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird hier verwendet, um eine Matrix zu beschreiben, welche n Zeilen (Höhe) und m Spalten (Breite) besitzt. Die einzelnen Elemente der Matrix werden mit a_{ij} bezeichnet, wobei i den Zeilenindex (von 1 bis n) und j den Spaltenindex (von 1 bis m) angibt.

Eine solche Matrix M mit n Zeilen und m Spalten hat die allgemeine Form:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix kann auch als eine Zusammenfassung von Spaltenvektoren (wenn jede Spalte als Vektor betrachtet wird) oder Zeilenvektoren (wenn jede Zeile als Vektor betrachtet wird) angesehen werden.

10.1 Matrix-Vektor-Produkt

Das Produkt einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (also n Zeilen, m Spalten) mit einem Spaltenvektor $V \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (also ein Vektor mit m Elementen) ist ein neuer Spaltenvektor $W \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (also ein Vektor mit n Elementen). Die Multiplikation ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix M gleich der Anzahl der Zeilen (Elemente) des Vektors V ist. Hier müssen also beide die Dimension m aufweisen.

Sei $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$.

Das Matrix-Vektor-Produkt MV wird berechnet, indem das Skalarprodukt jeder Zeile der Matrix M mit dem Vektor V gebildet wird:

$$MV = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1m}v_m \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2m}v_m \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nm}v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}v_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}v_j \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist ein Vektor mit n Elementen.

10.2 Diagonalmatrix

Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, d.h. sie besitzt gleich viele Zeilen wie Spalten ($n = m$). Bei einer Diagonalmatrix sind alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen (die von links oben nach rechts unten verläuft) gleich Null. Nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen können von Null verschieden sein.

Eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat die Form:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel einer 3×3 Diagonalmatrix (hier ist $n = m = 3$):

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Das Matrix-Vektor-Produkt mit einer Diagonalmatrix ist besonders einfach zu berechnen. Jedes Element des Vektors wird mit dem entsprechenden Diagonalelement der Matrix multipliziert: Sei $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$DV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot v_1 \\ 2 \cdot v_2 \\ 7 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

10.2.1 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix, oft mit I oder I_n (wobei n die Dimension angibt) bezeichnet, ist eine spezielle Diagonalmatrix. Bei der Einheitsmatrix sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich Eins, und alle anderen Elemente sind Null. Sie ist ebenfalls quadratisch.

Beispiel der 3×3 Einheitsmatrix I_3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Die Multiplikation einer Matrix oder eines Vektors mit der Einheitsmatrix passender Dimension verändert diese nicht (d.h. $IM = M$ und $Iv = v$). Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation.

10.3 Drehmatrizen

Drehmatrizen sind quadratische Matrizen, die verwendet werden, um Vektoren um einen Ursprung (in 2D) oder eine Achse (in 3D) um einen bestimmten Winkel zu drehen.

Drehmatrix in $\mathbb{R}^2$

Eine Drehung eines Vektors in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) um den Ursprung um den Winkel α (üblicherweise gegen den Uhrzeigersinn) wird durch die folgende 2×2-Matrix $R(\alpha)$ beschrieben:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Wird ein Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit dieser Matrix multipliziert, $v' = R(\alpha)v$, so ist v' der um α gedrehte Vektor.

Drehmatrizen in $\mathbb{R}^3$

Im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) erfolgen Drehungen typischerweise um die Koordinatenachsen (x, y, z). Die entsprechenden Drehmatrizen sind 3×3-Matrizen.

Drehung um die x-Achse

Eine Drehung um den Winkel α um die x-Achse wird durch die Matrix $R_x(\alpha)$ repräsentiert:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um die y-Achse

Eine Drehung um den Winkel α (oder β zur Unterscheidung) um die y-Achse wird durch die Matrix $R_y(\alpha)$ repräsentiert:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um die z-Achse

Eine Drehung um den Winkel α (oder γ) um die z-Achse wird durch die Matrix $R_z(\alpha)$ repräsentiert:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.3.1 Drehung um mehrere Achsen

Wenn ein Vektor in $\mathbb{R}^3$ nacheinander um mehrere Achsen gedreht werden soll, können die entsprechenden Drehmatrizen miteinander multipliziert werden (siehte **??**). Das Ergebnis dieser Matrizenmultiplikation ist eine einzelne Matrix, die die Gesamttransformation (also die verkettete Drehung) darstellt. Wird beispielsweise zuerst eine Drehung R_1 und danach eine Drehung R_2 auf einen Vektor v angewendet, so ist der transformierte Vektor $v' = R_2(R_1v) = (R_2R_1)v$. Die Gesamttransformationsmatrix ist $R_{ges} = R_2R_1$. Es ist wichtig zu beachten, dass die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist, d.h. die Reihenfolge der Multiplikation (und somit der Drehungen) ist entscheidend ($R_2R_1 \neq R_1R_2$ im Allgemeinen). Die Matrix, die der zuerst auszuführenden Drehung entspricht, steht im Produkt rechts.

10.4 Spiegelungen

Eine Spiegelungsmatrix ist eine orthogonale Matrix, welche Vektoren an einer Hyperebene spiegelt. Im $\mathbb{R}^2$ ist dies eine Gerade.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

spiegelt Vektoren an der Winkelhalbierenden $y = x$. Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird durch die Multiplikation mit der Matrix A auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ abgebildet:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10.4.1 Anmerkung zur Spiegelung an der x-Achse

Die Spiegelung an der x-Achse wird durch die folgende Matrix realisiert:

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung auf den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.5 Spiegelungen im 3-dimensionalen Raum

Im dreidimensionalen Raum erfolgt die Spiegelung eines Vektors an einer Ebene. Eine Spiegelung an einer Achse oder einem Punkt ist ebenfalls möglich, kann aber als eine Kombination von Drehungen und einer Ebenenspiegelung verstanden werden.

10.5.1 Berechnung von Spiegelungsmatrizen (Householder-Transformation)

Eine Spiegelungsmatrix H für die Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung kann mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n}$ dieser Ebene berechnet werden. Der Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

Für die Berechnung wird ein auf die Länge 1 normierter Normalenvektor $\vec{v}$ benötigt.

Sei $\vec{v}$ der normierte Normalenvektor der Ebene, an der gespiegelt werden soll. Die Spiegelungsmatrix H (oft auch als Householder-Matrix bezeichnet) wird wie folgt berechnet:

$$H = I - 2\vec{v}\vec{v}^T$$

Hierbei ist:

- I die 3x3-Einheitsmatrix.
- $\vec{v}$ der normierte Normalenvektor als Spaltenvektor.
- $\vec{v}^T$ der transponierte Normalenvektor (ein Zeilenvektor).
- Das Produkt $\vec{v}\vec{v}^T$ ist das äußere Produkt, das eine 3x3-Matrix ergibt.

10.5.2 Beispiel

Gesucht ist die Spiegelungsmatrix für die Spiegelung an der xy-Ebene.

1. **Normalenvektor bestimmen:** Der Normalenvektor der xy-Ebene ist der z-Vektor, da er senkrecht auf dieser Ebene steht.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Normalenvektor normieren:** Der Vektor hat bereits die Länge 1, also ist $\vec{v} = \vec{n}$.

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

   Somit ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Äußeres Produkt $\vec{v}\vec{v}^T$ berechnen:**

$$\vec{v}\vec{v}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Spiegelungsmatrix H berechnen:**

$$H = I - 2(\vec{v}\vec{v}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix spiegelt jeden Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$, was der Spiegelung an der xy-Ebene entspricht.

11. Determinante

Die Determinante ist eine spezielle Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet wird. Sie liefert wichtige Informationen über die Matrix und die lineare Transformation, die sie repräsentiert. Geometrisch kann die Determinante einer $n \times n$ Matrix als der Skalierungsfaktor des n-dimensionalen Volumens des Parallelepipeds interpretiert werden, das von den Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren) der Matrix aufgespannt wird. Ist die Determinante gleich null, so ist das Volumen null. Dies bedeutet, dass die Vektoren, welche die Matrix bilden, linear abhängig sind und die Transformation den Raum auf eine niedrigere Dimension abbildet (z.B. eine Ebene auf eine Gerade oder einen Punkt). Eine Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.

11.1 Determinante einer 2×2 Matrix

Um die Determinante einer 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu berechnen, werden ganz einfach die Diagonalen multipliziert und subtrahiert.

$$\det(A) = a \cdot d - c \cdot b$$

11.2 Determinanten von nicht 2×2 Matrizen

Um die Determinante einer nicht 2×2 Matrix zu berechnen, gibt es im Wesentlichen drei Herangehensweisen:

11.2.1 Regel von Sarrus

Die Regel von Sarrus funktioniert **nur bei** 3×3 Matrizen.

$$\left(\begin{array}{ccc|} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 6 & 17 \\ 9 & 32 \\ -5 & -1 \end{array}$$

Die Zahlen an den Linien werden multipliziert. Blaue Linien werden miteinander addiert und Rote subtrahiert.

$$
\begin{aligned}
&(6\cdot 32\cdot 47)+(17\cdot 6\cdot(-5))+(24\cdot 9\cdot(-1))\\
&-((-5)\cdot 32\cdot 24)-((-1)\cdot 6\cdot 6)-(47\cdot 9\cdot 17)\\
&=9024-510-216-(-3840)-(-36)-7191\\
&=9024-510-216+3840+36-7191\\
&=4983
\end{aligned}
$$

11.2.2 Leibniz-Formel (nicht prüfungsrelevant)

Die Leibniz-Formel ist eine allgemeine Definition der Determinante für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$. Die Determinante wird als eine Summe über alle möglichen Permutationen der Spaltenindizes berechnet:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Hierbei ist:

- S_n die Menge aller Permutationen der Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Eine Permutation σ ist eine bijektive Abbildung dieser Menge auf sich selbst; $\sigma(i)$ ist das i-te Element in einer Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$.
- $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Signum (Vorzeichen) der Permutation σ. Es ist $+1$, wenn die Permutation durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente (Transpositionen) aus der Grundreihenfolge $(1, 2, \ldots, n)$ hervorgeht. Es ist -1, wenn sie durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen hervorgeht. Alternativ kann das Signum über die Anzahl k der Fehlstände (Inversionen) der Permutation berechnet werden als $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$. Ein Fehlstand ist ein Paar von Indizes (i, j) derart, dass $i < j$ ist, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt.
- $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ das Produkt von n Matrixelementen $a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$. Dabei wird aus jeder Zeile i genau ein Element ausgewählt, und zwar aus der Spalte $\sigma(i)$, sodass auch aus jeder Spalte genau ein Element stammt.

Für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ergibt sich: S_2 enthält die Permutationen $\sigma_1 = (1, 2)$ (Identität, $\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2$) und $\sigma_2 = (2, 1)$ (Vertauschung, $\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1$).

- $\sigma_1 = (1, 2)$: Anzahl Fehlstände = 0. $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = +1$. Term: $a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = a_{11} a_{22}$.
- $\sigma_2 = (2, 1)$: Ein Fehlstand: $(1, 2)$, da $1 < 2$ aber $\sigma_2(1) = 2 > \sigma_2(2) = 1$. $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1$. Term: $a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{12} a_{21}$.

Somit ist $\det(A) = (+1) \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$. Dies entspricht der bekannten Formel für 2×2-Matrizen.

Beispiel für eine 3×3-Matrix

Betrachtet sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Für $n = 3$ gibt es $3! = 6$ Permutationen in S_3. Die Elemente sind $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3, a_{21} = 0, a_{22} = 4, a_{23} = 5, a_{31} = 1, a_{32} = 0, a_{33} = 6$.

1. $\sigma_1 = (1, 2, 3)$ (d.h. $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$). Fehlstände: 0. $\text{sgn}(\sigma_1) = +1$.
   Produkt: $a_{11}a_{22}a_{33} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$. Term: $(+1) \cdot 24 = 24$.

2. $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ (d.h. $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$). Fehlstand: $(2, 3)$ (weil $2 < 3$, aber $\sigma_2(2) = 3 > \sigma_2(3) = 2$). Anzahl Fehlstände: 1. $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$.
   Produkt: $a_{11}a_{23}a_{32} = 1 \cdot 5 \cdot 0 = 0$. Term: $(-1) \cdot 0 = 0$.

3. $\sigma_3 = (2, 1, 3)$ (d.h. $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$). Fehlstand: $(1, 2)$ (weil $1 < 2$, aber $\sigma_3(1) = 2 > \sigma_3(2) = 1$). Anzahl Fehlstände: 1. $\text{sgn}(\sigma_3) = -1$.
   Produkt: $a_{12}a_{21}a_{33} = 2 \cdot 0 \cdot 6 = 0$. Term: $(-1) \cdot 0 = 0$.

4. $\sigma_4 = (2, 3, 1)$ (d.h. $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$). Fehlstände: $(1, 3)$ (weil $1 < 3$, $\sigma_4(1) = 2 > \sigma_4(3) = 1$); $(2, 3)$ (weil $2 < 3$, $\sigma_4(2) = 3 > \sigma_4(3) = 1$).
   Anzahl Fehlstände: 2. $\text{sgn}(\sigma_4) = +1$.
   Produkt: $a_{12}a_{23}a_{31} = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$. Term: $(+1) \cdot 10 = 10$.

5. $\sigma_5 = (3, 1, 2)$ (d.h. $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$). Fehlstände: $(1, 2)$ (weil $1 < 2$, $\sigma_5(1) = 3 > \sigma_5(2) = 1$); $(1, 3)$ (weil $1 < 3$, $\sigma_5(1) = 3 > \sigma_5(3) = 2$).
   Anzahl Fehlstände: 2. $\text{sgn}(\sigma_5) = +1$.
   Produkt: $a_{13}a_{21}a_{32} = 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Term: $(+1) \cdot 0 = 0$.

6. $\sigma_6 = (3, 2, 1)$ (d.h. $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$). Fehlstände: $(1, 2)$ (weil $1 < 2$, $\sigma_6(1) = 3 > \sigma_6(2) = 2$); $(1, 3)$ (weil $1 < 3$, $\sigma_6(1) = 3 > \sigma_6(3) = 1$); $(2, 3)$ (weil $2 < 3$, $\sigma_6(2) = 2 > \sigma_6(3) = 1$). Anzahl Fehlstände: 3. $\text{sgn}(\sigma_6) = -1$.
   Produkt: $a_{13}a_{22}a_{31} = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$. Term: $(-1) \cdot 12 = -12$.

Die Determinante ist die Summe dieser Terme:

$$\det(A) = 24 + 0 + 0 + 10 + 0 - 12 = 22$$

Dies ist dasselbe Ergebnis, das man mit der Regel von Sarrus für 3×3-Matrizen erhalten würde. Die Leibniz-Formel ist jedoch allgemeingültig für Matrizen beliebiger quadratischer Größe, während die Sarrus-Regel nur für 3×3-Matrizen gilt.

11.2.3 Kästchenregel

Bei der Kästchenregel, auch bekannt als Determinantenformel für Blockmatrizen, kann die Determinante einer Matrix berechnet werden, indem die Matrix in Blöcke (Kästchen) unterteilt wird. Dies ist besonders nützlich, wenn einige der Blöcke Nullmatrizen sind. Für eine Blockmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

wobei A und D quadratische Matrizen sind (und 0 eine Nullmatrix passender Größe ist), ist die Determinante gegeben durch

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$$

Diese Regel vereinfacht die Berechnung erheblich, wenn Matrizen in eine solche obere oder untere Blockdreiecksform gebracht werden können. Die Kästchenregel bietet sich besonders bei $\mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen an, bei denen $n \geq 4$ ist und eine geeignete Blockstruktur vorliegt oder erzeugt werden kann.

Linearkombination
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
I und IV tauschen (Vorzeichenwechsel für Determinante: $\cdot(-1)$)
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
II - I $\rightarrow$ II III - 2I $\rightarrow$ III IV - I $\rightarrow$ IV
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
III + 2II $\rightarrow$ III IV + II $\rightarrow$ IV
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

Die im Beispiel umgeformte Matrix (nennen wir sie M') nach Zeilentausch und Umformungen ist:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat eine obere Dreiecksblockstruktur, wenn man sie betrachtet als:

$$M' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$$

wobei $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $D' = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $\det(M') = \det(A') \cdot \det(D')$.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{array}$$

$\det(A')$

$\det(D')$

$\det(A') = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1$
$\det(D') = (15 \cdot (-2) - 1 \cdot 9) = -30 - 9 = -39$
$\det(M') = \det(A') \cdot \det(D') = 1 \cdot (-39) = -39$

Da die Matrix M' aus der ursprünglichen Matrix durch einen Zeilentausch und elementare Zeilenumformungen, die die Determinante nicht ändern (Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen), hervorgegangen ist, gilt: $\det(\text{ursprüngliche Matrix}) = (-1) \cdot \det(M') = (-1) \cdot (-39) = 39$.

11.3 Transponiertheit

- Die Transponierte einer Matrix A, bezeichnet als A^T, entsteht durch Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen.
- Das Element $A_{m,n}$ der Ursprungsmatrix wird zum Element $A_{n,m}$ der transponierten Matrix.
- Eine $m \times n$-Matrix wird zu einer $n \times m$-Matrix.
- **Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

12. Matritzen Multiplitzieren

Zwei Matritzen A und B dürfen nur miteinander Multiplitziert werden, wenn A so viele Spalten hat, wie B Zeilen. Sein die Matritzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, so werden sie wie folgt Multiplitziert

$$
\begin{aligned}
& A \cdot B \\
& \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 2 & 4 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

13. Matrizen Invertieren

Die Inverse einer quadratischen Matrix A ist eine Matrix A^{-1}, sodass das Produkt von A und A^{-1} die Einheitsmatrix I ergibt:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Eine Methode zur Berechnung der Inversen einer Matrix ist das **??**. Bei diesem Verfahren wird die zu invertierende Matrix A um die Einheitsmatrix I derselben Dimension erweitert, sodass eine Matrix $[A|I]$ entsteht. Durch elementare Zeilenumformungen wird der linke Teil A in die reduzierte Zeilenstufenform überführt. Wenn A in die Einheitsmatrix I transformiert werden kann, ist die resultierende rechte Seite die Inverse A^{-1}, also $[I|A^{-1}]$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix ist, dass ihre **??** ungleich Null ist. Ist $\det(A) = 0$, so ist die Matrix singulär und besitzt keine Inverse.

13.1 Beispiel

Es soll die Inverse der Matrix A bestimmt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Zuerst wird die Determinante von A berechnet, um die Invertierbarkeit zu prüfen. Nach der Regel von Sarrus (für 3x3-Matrizen):

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1 \cdot 1 \cdot 0) + (2 \cdot 4 \cdot 5) + (3 \cdot 0 \cdot 6) \\ &\quad - (5 \cdot 1 \cdot 3) - (6 \cdot 4 \cdot 1) - (0 \cdot 0 \cdot 2) \\ &= 0 + 40 + 0 - 15 - 24 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da $\det(A) = 1 \neq 0$, ist die Matrix A invertierbar.

Nun wird das Gauß-Jordan-Verfahren angewendet. Die erweiterte Matrix ist:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matrix	Inverse
$1 \quad 2 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$0 \quad 1 \quad 4$	$0 \quad 1 \quad 0$
$5 \quad 6 \quad 0$	$0 \quad 0 \quad 1$
Operation: III - 5I	
$1 \quad 2 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$0 \quad 1 \quad 4$	$0 \quad 1 \quad 0$
$0 \quad -4 \quad -15$	$-5 \quad 0 \quad 1$
Operation: III + 4II	
$1 \quad 2 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$0 \quad 1 \quad 4$	$0 \quad 1 \quad 0$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-5 \quad 4 \quad 1$
Operation: I - 2II	
$1 \quad 0 \quad -5$	$1 \quad -2 \quad 0$
$0 \quad 1 \quad 4$	$0 \quad 1 \quad 0$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-5 \quad 4 \quad 1$
Operation: II - 4III	
$1 \quad 0 \quad -5$	$1 \quad -2 \quad 0$
$0 \quad 1 \quad 0$	$20 \quad -15 \quad -4$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-5 \quad 4 \quad 1$
Operation: I + 5III	
$1 \quad 0 \quad 0$	$-24 \quad 18 \quad 5$
$0 \quad 1 \quad 0$	$20 \quad -15 \quad -4$
$0 \quad 0 \quad 1$	$-5 \quad 4 \quad 1$

Die linke Seite ist nun die Einheitsmatrix. Die rechte Seite ist die Inverse A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

13.2 Umkehrabbildung

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann als eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ interpretiert werden. Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ wird durch die Matrix A auf einen Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet:

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Diese Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist bijektiv (also sowohl injektiv als auch surjektiv) genau dann, wenn die Matrix A invertierbar ist.

Wenn die Matrix A invertierbar ist, existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diese Umkehrabbildung bildet den Vektor $\vec{y}$ zurück auf den ursprünglichen Vektor $\vec{x}$ ab. Die Abbildungsmatrix dieser Umkehrabbildung ist die Inverse A^{-1}:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

Somit macht die Umkehrabbildung die ursprüngliche Abbildung rückgängig. Wendet man beide Abbildungen nacheinander an, erhält man die identische

Abbildung, bei der jeder Vektor auf sich selbst abgebildet wird:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$$

$$A(A^{-1}\vec{y}) = (AA^{-1})\vec{y} = I\vec{y} = \vec{y}$$

Die Existenz einer Umkehrabbildung ist also direkt an die Invertierbarkeit der Abbildungsmatrix A geknüpft, was wiederum bedeutet, dass $\det(A) \neq 0$ sein muss.

13.2.1 Beispiel zur Umkehrabbildung

Betrachten wir die Matrix A aus dem vorherigen Beispiel und ihre Inverse A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Abbildung mit A ergibt:

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Nun wird die Umkehrabbildung mit A^{-1} auf $\vec{y}$ angewendet, um $\vec{x}$ zurückzuerhalten:

$$A^{-1}\vec{y} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \cdot 6 + 18 \cdot 5 + 5 \cdot 11 \\ 20 \cdot 6 - 15 \cdot 5 - 4 \cdot 11 \\ -5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -144 + 90 + 55 \\ 120 - 75 - 44 \\ -30 + 20 + 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

Dies demonstriert, wie die durch A^{-1} repräsentierte Umkehrabbildung den Vektor $\vec{y}$ auf den ursprünglichen Vektor $\vec{x}$ zurückführt.

14. Definitheit

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann eine der folgenden Eigenschaften haben:

- Positiv definit
- Positiv semidefinit
- Negativ definit
- Negativ semidefinit
- Indefinit

14.1 Bestimmung über Eigenwerte

Die Definitheit lässt sich anhand der Vorzeichen der Eigenwerte λ_i einer Matrix bestimmen.

- **Positiv definit**, wenn alle $\lambda_i > 0$.
- **Positiv semidefinit**, wenn alle $\lambda_i \geq 0$.
- **Negativ definit**, wenn alle $\lambda_i < 0$.
- **Negativ semidefinit**, wenn alle $\lambda_i \leq 0$.
- **Indefinit**, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt.

14.1.1 Beispiel

Bei einer Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Da alle Eigenwerte größer als Null sind, ist die Matrix **positiv definit**.

14.2 Hurwitz-Kriterium

Um die aufwändige Berechnung der Eigenwerte zu umgehen, kann das Hurwitz-Kriterium (auch Kriterium der Hauptminoren) genutzt werden. Dabei werden die Determinanten der führenden Hauptminoren Δ_k betrachtet.

$$
\begin{array}{ccccc}
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & \Delta_n \\
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}
$$

Figure 14.1: Schematische Darstellung der Hauptminoren Δ_k.

Die Vorzeichenfolge der Determinanten $\det(\Delta_k)$ ist entscheidend:

- **Positiv definit**: Alle Vorzeichen sind positiv. (`+, +, +, ...`)
- **Negativ definit**: Die Vorzeichen alternieren, beginnend mit negativ. (`-, +, -, +, ...`)
  Achtung: Die Vorzeichenfolgen `+, -, +, -, ...` und `-, -, -, -, ...` sind kontraintuitiv **NICHT** Negativ definit.
- **Indefinit**: Alle anderen Vorzeichenfolgen.
- **Negativ bzw Positiv semidefinit**: Wenn durch auftauchende Nullen die Zeichenkette unterbrochen wird (z.B. `-, +, 0, +, 0, 0, -, ...`), *kann* die Matrix Positiv bzw Negativ semidefinit sein. **Sie kann aber auch Indefinit sein!** Hier müssen die Eigenwerte ausgerechnet werden, um die Definitheit sicher bestimmen zu können.

Wichtig: Noch einmal; treten Nullen bei den Determinanten auf, kann dieses vereinfachte Kriterium nicht zuverlässig zwischen semidefinit und indefinit unterscheiden.

14.2.1 Beispiel

Untersuchung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- $\det(\Delta_1) = -2$
- $\det(\Delta_2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$
- $\det(\Delta_3) = \det(A) = -4$

Die Vorzeichenfolge ist `-, +, -`. Die Matrix ist somit **negativ definit**.

15. Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Multiplikation einer quadratischen Matrix A mit einem ihrer Eigenvektoren $\vec{v}$ resultiert in einem skalierten Vielfachen des selben Vektors. Der Skalierungsfaktor wird als Eigenwert λ bezeichnet.

15.1 Eigenwerte Berechnen

Die Eigenwerte λ einer Matrix A werden durch das Nullsetzen der Determinante von $(A - \lambda I)$ ermittelt.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Die resultierenden Nullstellen für λ sind die Eigenwerte der Matrix.

15.2 Eigenvektoren Berechnen

Für jeden Eigenwert λ_i wird der zugehörige Eigenvektor $\vec{x}$ durch das Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems gefunden:

$$(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$$

Der Lösungsraum (Spannraum) dieses Systems stellt die Menge der Eigenvektoren zum jeweiligen Eigenwert λ_i dar.

16. Arithmetisches Mittel, Median und Moduls

16.1 Arithmetisches Mittel

Das Arithmetische Mittel beschreibt den Durchschnitt. Beispielsweise ist der Notendurchschnitt das Arithmetische Mittel.

16.1.1 Beispiel

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	5	3	3	7	2	1

Das Arithmetische Mittel wird hier berechnet, indem die Anzahl mit der Wertigkeit multiplitziert und durch die gesammtanzahl geteilt wird

$$\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{21} \approx 3.0476$$

16.2 Median

Der Durchschnitt kann von der Realität stark abweichen. Beispielsweise hat eine Stadt 999 Einwohler, welche je 2000, und einen Einwohler, welcher 2000000 verdient. Das Durchschnittliche einkommen dieser Stadt ist 3998, allerdings verdient kein Einwohner annährend so viel Geld.

Der Median beschreibt den mittleren Wert einer sortierten Folge. Gibt es keine Mitte, so wird das Arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte gebildet.

16.2.1 Beispiel

Eine Stadt hat folgende Temperaturhistorie in grad Celsius:

`12, 16, 17, 21, 25, 29, 32, 36`

Das Median hier ist $\frac{21+25}{2} = 23$.

16.3 Modus

Der Modus ist der Wert mit der größten Häufigkeit.

17. Verteilungen

17.1 Bernoulliverteilung

Beschreibung Unterscheidet zwischen zwei Ergebnissen: Erfolg (`1`) und Misserfolg (`0`).

Formel

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \quad P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$$

Erwartungswert

$$E(X)=p$$

Varianz

$$\text{Var}(X)=p(1-p)$$

Anwendungsbeispiel Einmaliger Münzwurf (Kopf oder Zahl), Würfeln einer 6 (6 oder keine 6).

17.2 Binomialverteilung

Beschreibung Beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer festen Serie von unabhängigen Bernoulliversuchen.

Formel

$$X \sim B(n,p) \quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert

$$E(X)=n \cdot p$$

Varianz

$$\text{Var}(X)=n \cdot p \cdot (1-p)$$

Anwendungsbeispiel Anzahl der Sechsen bei fünffachem Würfeln.

17.3 Geometrische Verteilung

Beschreibung Beschreibt die Anzahl der Misserfolge, bevor der erste Erfolg in einer Serie von Bernoulliversuchen eintritt.

Formel

$$X \sim \text{Geom}(p) \quad P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p$$

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1 - p}{p}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Anwendungsbeispiel Wie oft muss man würfeln, bis die erste 6 gewürfelt wird?

17.4 Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung Beschreibt die Wahrscheinlichkeit, bei n Zügen ohne Zurücklegen aus einer Gesamtmenge N, die M Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft enthält, genau k solcher Objekte zu ziehen.

Formel

$$X \sim H(N, M, n) \quad P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

Anwendungsbeispiel Lottospiel (Ziehen von 6 aus 49 Kugeln), Qualitätskontrolle (Ziehen einer Stichprobe aus einer Warenlieferung).

17.5 Normalverteilung

Beschreibung Eine stetige Verteilung, die häufig zur Modellierung von Messfehlern oder biologischen Merkmalen (z.B. Körpergröße) verwendet wird. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird sie primär als Approximation der Binomialverteilung bei großem n mittels des **Satzes von de Moivre-Laplace** (**??**) betrachtet.

Formel (Dichtefunktion)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Anwendungsbeispiel Approximation der Binomialverteilung bei großem n, Messfehler, Körpergrößen in einer Population.

18. Satz von Moivre-Laplace

Der Satz von de Moivre-Laplace ist ein zentraler Grenzwertsatz der Stochastik. Er besagt, dass die Binomialverteilung für eine große Anzahl von Versuchen n durch die Normalverteilung angenähert werden kann. Dies vereinfacht die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, da die oft aufwändige Summation von Binomialkoeffizienten vermieden wird.

18.1 Voraussetzung: Laplace-Bedingung

Die Näherung ist in der Regel ausreichend genau, wenn die sogenannte Laplace-Bedingung erfüllt ist. Diese Faustregel besagt, dass die Varianz größer als 9 sein muss:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$$

18.2 Stetigkeitskorrektur

Da eine diskrete Verteilung (Binomialverteilung, ganzzahlige Werte) durch eine stetige Verteilung (Normalverteilung, beliebige reelle Werte) angenähert wird, ist eine Stetigkeitskorrektur notwendig. Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen ganzzahligen Wertes k wird dabei auf das Intervall $[k - 0.5, k + 0.5]$ "verteilt", um die Genauigkeit der Approximation zu verbessern.

Die Anwendung der Korrektur hängt von der gesuchten Wahrscheinlichkeit ab:

- $P(X \leq k) \quad \rightarrow \quad P(X \leq k + 0.5)$
- $P(X < k)$, was identisch ist zu $P(X \leq k - 1)$, wird zu $\quad \rightarrow \quad P(X \leq k - 0.5)$
- $P(X \geq k) \quad \rightarrow \quad P(X \geq k - 0.5)$
- $P(X > k)$, was identisch ist zu $P(X \geq k + 1)$, wird zu $\quad \rightarrow \quad P(X \geq k + 0.5)$
- $P(X = k) \quad \rightarrow \quad P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$

18.3 Ablesen aus der z-Tabelle

Die Wahrscheinlichkeiten für die Standardnormalverteilung werden aus einer z-Tabelle abgelesen. Eine solche Tabelle mit auf zwei Nachkommastellen gerundeten z-Werten findet sich beispielsweise auf Wikipedia.

Die Tabelle gibt den Wert der kumulativen Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ an, also die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq z)$, wobei Z standardnormalverteilt ist.

Vorgehen

Ein z-Wert wird auf die ersten beiden Nachkommastellen gerundet. Der Wert wird aufgeteilt:

- Die **erste Spalte** der Tabelle zeigt den z-Wert bis zur ersten Nachkommastelle.
- Die **erste Zeile** der Tabelle zeigt die zweite Nachkommastelle des z-Wertes.

Der gesuchte Tabellenwert $\Phi(z)$ steht am Schnittpunkt der entsprechenden Zeile und Spalte.

Beispiel: Ablesen von $\Phi(0.29)$

1. Suche in der ersten Spalte den Wert für **0.2**.
2. Suche in der ersten Zeile den Wert für **0.09**.
3. Der Wert am Schnittpunkt der Zeile "0.2" und der Spalte "0.09" ist der gesuchte Wert ≈ 0.6141.

z	$\cdots$	**0.08**	**0.09**
$\vdots$	$\ddots$		
0.2	$\cdots$	0.6103	**0.6141**

18.4 Beispielrechnung

Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass von 300 Schrauben, von denen jede mit 99% Wahrscheinlichkeit funktioniert, mindestens 298 funktionieren.

$$X = \text{Anzahl der funktionierenden Schrauben}$$

$$X \sim B(300, 0.99)$$

$$E(X) = 300 \cdot 0.99 = 297$$

$$Var(X) = 297 \cdot 0.01 = 2.97$$

$$\sigma = \sqrt{2.97}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 298) &\overset{\text{Stetigkeitskorrektur}}{=} P(X \geq 297.5) \\ &= 1 - P(X < 297.5) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{297.5 - 297}{\sqrt{2.97}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{297.5 - 297}{\sqrt{2.97}}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.29) \\
&\overset{\text{Tabelle}}{\approx} 1 - 0.6141 \\
&= 0.3859 = 38.59\%
\end{aligned}
$$

19. Der Z-Test (100% Klausuraufgabe)

Der Z-Test ist ein grundlegendes statistisches Verfahren zur Überprüfung von Hypothesen über Populationsparameter. Er ermöglicht es, basierend auf einer Stichprobe zu beurteilen, ob ein beobachtetes Ergebnis durch Zufall entstanden ist oder ob es eine signifikante Abweichung von einer angenommenen Grundgesamtheit darstellt.

Die Anwendbarkeit des Z-Tests beruht maßgeblich auf dem **Zentralen Grenzwertsatz**. Dieser Satz besagt, dass die Verteilung von Stichprobenmittelwerten (oder Summen) sich einer Normalverteilung annähert, wenn der Stichprobenumfang ausreichend groß ist. Dies gilt unabhängig von der ursprünglichen Verteilung der Population und ist entscheidend für die Durchführung parametrischer Tests wie des Z-Tests.

19.1 Grundlagen eines Hypothesentests

Jeder statistische Hypothesentest folgt einer standardisierten Struktur, die aus den folgenden wesentlichen Komponenten besteht.

19.1.1 Nullhypothese (H_0)

Die Nullhypothese repräsentiert die ursprüngliche Annahme oder den bestehenden Zustand, der vorläufig als wahr angenommen wird. Ihr Ziel ist es, diese Annahme zu widerlegen. Häufig postuliert H_0, dass kein Effekt, kein Unterschied oder keine Beziehung in der Grundgesamtheit vorliegt.

- *Beispiel Münzwurf:* H_0: Die Münze ist fair; die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ ist $p = 0.5$.

19.1.2 Alternativhypothese (H_1)

Die Alternativhypothese stellt die Annahme dar, die der Nullhypothese entgegensteht. Sie wird akzeptiert, wenn die Nullhypothese aufgrund der Testergebnisse abgelehnt wird. H_1 formuliert in der Regel den Effekt, den Unterschied oder die Beziehung, die in den Daten vermutet wird.

- *Beispiel Münzwurf:* H_1: Die Münze ist nicht fair ($p \neq 0.5$) oder sie ist zugunsten von „Kopf“ gezinkt ($p > 0.5$).

19.1.3 Signifikanzniveau (α) und Konfidenzniveau ($1 - \alpha$)

Die Festlegung dieser Werte erfolgt vor der Testdurchführung und bestimmt die Kriterien für die Ablehnung der Nullhypothese.

- **Das Signifikanzniveau** α (Alpha) ist die vorab festgelegte maximale Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist (Fehler 1. Art). Übliche Werte sind $\alpha = 0.05$ (5%) oder $\alpha = 0.01$ (1%).
- **Das Konfidenzniveau**, definiert als $1-\alpha$, gibt die Wahrscheinlichkeit an, eine wahre Nullhypothese korrekt beizubehalten.

Ein Ergebnis wird als **statistisch signifikant** betrachtet, wenn die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens unter Annahme der Gültigkeit von H_0 kleiner als α ist. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt.

19.2 Systematisches Vorgehen beim Z-Test

Ein Hypothesentest mittels Z-Test folgt einer klaren Abfolge von Schritten:

1. **Hypothesenformulierung:** Präzise Definition der Nullhypothese (H_0) und der Alternativhypothese (H_1). Festlegung, ob ein ein- oder zweiseitiger Test erforderlich ist.
2. **Signifikanzniveauwahl:** Bestimmung des akzeptablen Risikos für einen Fehler 1. Art (α).
3. **Voraussetzungsprüfung:** Verifikation der Anwendbarkeit des Z-Tests (z.B. Normalverteilungsannahme, bekanntes σ oder ausreichend großer Stichprobenumfang n).
4. **Teststatistikberechnung:** Ermittlung des Z-Werts auf Basis der Stichprobendaten.
5. **Entscheidungsfindung:** Vergleich des berechneten Z-Werts mit den kritischen Werten (aus der Z-Tabelle) oder Analyse des p-Werts im Verhältnis zu α.
6. **Schlussfolgerung:** Ablehnung oder Beibehaltung von H_0 und Interpretation der Ergebnisse im Kontext der ursprünglichen Fragestellung.

19.3 Anwendungsbeispiel 1: Einseitiger Z-Test

Ein Unternehmen strebt eine maximale Materialfehlerquote von 20% an. Eine Qualitätskontrolle von 100 Bauteilen zeigt 15 Defekte. Es soll überprüft werden, ob die angenommene Fehlerhäufigkeit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10% aufrechterhalten werden kann.

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Kein Materialfehler} \\ 1 & \text{Materialfehler} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, p) \quad \text{(Summe der Fehler ist binomialverteilt)} \\
H_0 :& p \leq 0.2 \quad \text{(Fehleranteil ist höchstens 20\%)} \\
H_1 :& p > 0.2 \quad \text{(Fehleranteil ist größer als 20\%)} \\
\alpha &= 0.10 \quad \text{(Signifikanzniveau von 10\%)} \\
& \rightarrow \text{Für den Test wird der Randfall von } H_0 \text{ betrachtet: } p = 0.2 \\
E(S_n) &= n \cdot p = 100 \cdot 0.2 = 20 \\
\sigma(S_n) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}
$$

Der standardisierte Z-Wert mittels Normalapproximation ist:

$$
Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - 20}{4} \overset{\text{ldm}}{\approx} N(0,1)
$$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn der berechnete Z-Wert den kritischen Wert überschreitet. Für $\alpha = 0.10$ bei einem einseitig rechten Test ist der kritische Z-Wert ca. 1.28. Der Annahmebereich für S_n ist daher:

$$
\begin{aligned}
\frac{S_n - 20}{4} &\leq 1.28 \\
S_n &\leq 1.28 \cdot 4 + 20 \\
S_n &\leq 5.12 + 20 \\
S_n &\leq 25.12
\end{aligned}
$$

Beobachtetes Ergebnis:

$$
S_n = 15
$$

Da $15 \leq 25.12$, liegt das beobachtete Ergebnis im Annahmebereich von H_0. Der berechnete Z-Wert ist $Z = \frac{15-20}{4} = -1.25$. Da -1.25 nicht größer als 1.28 ist (d.h., nicht im kritischen Bereich liegt), wird H_0 nicht abgelehnt. **Schlussfolgerung:** Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden. Es liegen keine statistisch signifikanten Belege (bei $\alpha = 10\%$) vor, die darauf hindeuten, dass die Fehlerquote über 20% liegt. Die angenommene Fehlerhäufigkeit kann aufrechterhalten werden.

19.4 Anwendungsbeispiel 2: Zweiseitiger Z-Test

Historisch regnete es im Sommer an durchschnittlich 20% der Tage. Eine aktuelle Studie untersucht, ob eine Klimaveränderung stattgefunden hat. Von 150 analysierten Sommertagen regnete es an 53 Tagen. Es soll beurteilt werden, ob bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 6% von einem Klimawandel ausgegangen werden kann.

$$
X = \text{Indikator für Regentag}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{150} X_i \sim B(150, p) \\
H_0 : & p = 0.2 \quad \text{(Anteil der Regentage ist 20\%)} \\
H_1 : & p \neq 0.2 \quad \text{(Anteil der Regentage weicht von 20\% ab)} \\
\alpha &= 0.06 \quad \text{(Signifikanzniveau von 6\%)} \\
\mu &= n \cdot p = 150 \cdot 0.2 = 30 \\
\sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{150 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{24} \approx 4.899
\end{aligned}
$$

Der standardisierte Z-Wert für die Stichprobe ist:

$$
Z = \frac{S_n - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - 30}{\sqrt{24}} \stackrel{\text{ldm}}{\approx} N(0,1)
$$

Für einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0.06$ (was 3% in jedem Endbereich entspricht), sind die kritischen Z-Werte ca. ± 1.88. Der Annahmebereich für H_0 liegt zwischen diesen Werten:

$$
\begin{aligned}
-1.88 \cdot \sqrt{24} + 30 \leq S_n &\leq 1.88 \cdot \sqrt{24} + 30 \\
-9.21 + 30 \leq S_n &\leq 9.21 + 30 \\
20.79 \leq S_n &\leq 39.21
\end{aligned}
$$

Gerundet auf ganze Tage (da S_n eine diskrete Zählgröße ist):

!Man würde die 20.79 **immer** aufrunden und die 39.21 **immer** abrunden!

$$
21 \leq S_n \leq 39
$$

Beobachtetes Ergebnis:

$$
S_n = 53
$$

Da $53 > 39$, liegt das beobachtete Ergebnis außerhalb des Annahmebereichs von H_0. Der berechnete Z-Wert ist $Z = \frac{53-30}{\sqrt{24}} \approx 4.695$. Da $4.695 > 1.88$ (und somit im Ablehnungsbereich liegt), wird H_0 abgelehnt.

Schlussfolgerung: Die Nullhypothese wird abgelehnt. Es kann bei einem Signifikanzniveau von 6% statistisch gesichert davon ausgegangen werden, dass der Anteil der Regentage von 20% abweicht, was auf einen Klimawandel hindeutet.

Part II

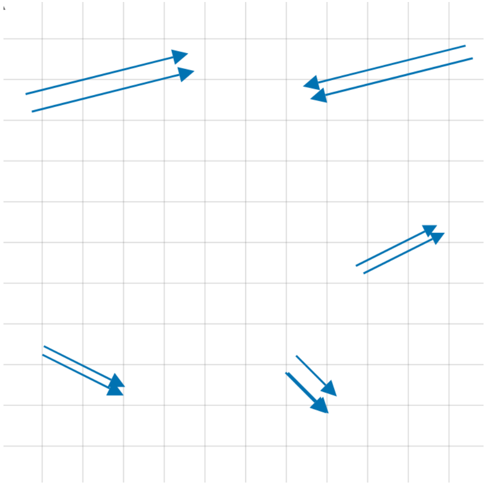
Bonusteste

20. Bonustest 1 - Rechnen mit Vektoren

20.1 Frage 1

Wie viele verschiedene Vektoren sind auf diesem Bild zu sehen?

In dieser Aufgabe geht es im wesentlichen darum, die **verschiedenen** Pfeile zu zählen. Es ist hilfreich, die Vektoren in dem Graphen so zu verschieben, dass gleiche Vektoren beieinander sind. So muss nur noch die Anzahl der Cluster gezählt werden.

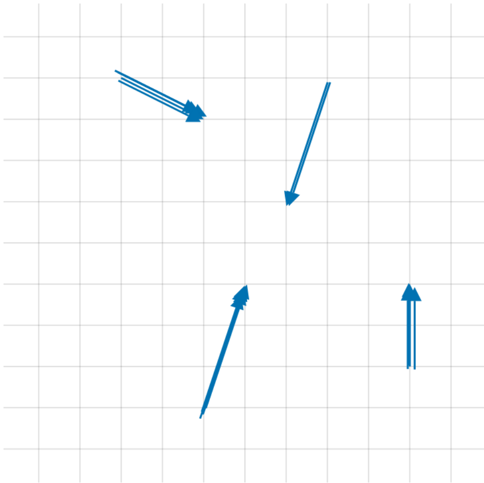


Hier gibt es **5** verschiedene Vektoren.

20.2 Frage 2

In der folgenden Abbildung sind verschiedene Vektoren dargestellt. Ein Kästchen entspricht einer Längeneinheit. Geben Sie die verschiedenen Vektoren, die im Bild zu sehen sind, als Liste in eckigen Klammern an. Die Einträge dieser Liste sind dabei die verschiedenen Vektoren dargestellt als Paare von Zahlen in eckigen Klammern. Ihre Antwort sollte also ein Ausdruck der Form [[1,3],[-2,0],[1,1]] oder [[0,3],[1,-1],[-1,1],[4,2]] etc. sein.

Hier ist es auch wieder Sinnvoll, die Vektoren zu sortieren. Dann müssen die Vektoren nur noch abgelesen werden. Die Vektoren werden über [x, y] benannt, wobei x der weg ist, den der Vektor nach rechts "geht" und y die höhe des Vektors ist.



Hier befinden sich in der Abbildung die Vektoren [[1, 3], [0, 2], [2, -1], [-1, -3]]

20.3 Frage 3

Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in Komponentendarstellung, wobei $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

20.3.1 a

Geben Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in Koordinatendarstellung an.

I

Es ist $\vec{u} = \frac{3\vec{e_3}}{2} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_1}$

Hier muss der Vektor berechnet werden. Da die Vektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ die standardvektoren sind, ist deren Wert bekannt $\left(\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Bevor das Ergebnis berechnet wird, sollte noch der Bruch aufgelöst werden:

$$\frac{3\vec{e_3}}{2} = \frac{3 \cdot \vec{e_3}}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\vec{e_3}}{1} = \frac{3}{2}\vec{e_3}$$

Jetzt können die Einheitsvektoren einfach eingesetzt werden

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{u}$ ist also $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

II

es ist $\vec{v} = 2\vec{e_3} + 2\vec{e_2}$.

Hier können wieder die Einheitsvektoren eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20.3.2 b

Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus Teilaufgabe a folgende Größen. Geben Sie die Lösung exakt, also nicht näherungsweise an.

I

Es ist $\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 2 - 4 \\ \frac{3}{2} - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

II

Es ist $|3\vec{u} + 3\vec{v}|$

Die Betragsstriche meinen hier, dass die Länge des Vektors berechnet werden soll. Diese kann über die Formel $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ berechnet werden. Es muss also zunächst der resultierende Vektor von $3\vec{u} + 3\vec{v}$ berechnet werden und von diesen Vektor muss dann die Länge bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
&\left| 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{9^2 + 12^2 + \frac{21}{2}^2} \\
&= \sqrt{\frac{1341}{4}}
\end{aligned}$$

III

Es ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

Hier soll das Skalarprodukt berechnet werden. Das Skalarprodukt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ berechnet sich aus $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 \\
&= 0 + 4 + 3 \\
&= 7
\end{aligned}$$

IV

Es ist $\vec{u} \times \vec{v}$

Hier soll das Kreuzprodukt berechnet werden. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der länge 3 lässt sich über $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - \frac{3}{2} \cdot 2 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 0 - 6 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20.4 Frage 4

In welchem der folgenden Bilder ist das Skalarprodukt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ negativ?

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist negativ, wenn der Winkel zwischen den Vektoren größer als 90° beträgt.

Herleitung: Vorzeichen des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist fundamental durch ihre Beträge und den von ihnen eingeschlossenen Winkel θ definiert:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Hierbei sind $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ die Längen der Vektoren. Der Winkel θ ist der kleinste Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sodass $0° \leq \theta \leq 180°$.

Die Rolle des Kosinus

Die Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind per Definition stets nicht-negativ. Wenn wir annehmen, dass weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ der Nullvektor ist (d.h. $|\vec{a}| > 0$ und $|\vec{b}| > 0$), dann sind ihre Beträge positive Zahlen. Das Produkt zweier positiver Zahlen ($|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$) ist ebenfalls positiv. Folglich hängt das Vorzeichen des gesamten Skalarprodukts $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ ausschließlich vom Vorzeichen des Terms $\cos(\theta)$ ab:

$$\text{Vorzeichen}(\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle) = \text{Vorzeichen}(\cos(\theta))$$

Verhalten von $\cos(\theta)$ im relevanten Winkelbereich

Betrachten wir das Vorzeichen von $\cos(\theta)$ für die möglichen Werte des Winkels θ zwischen zwei Vektoren:

- **Spitzer Winkel:** $0° \leq \theta < 90°$

  Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus positiv: $\cos(\theta) > 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{positiv}} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle > 0$$

- **Rechter Winkel:** $\theta = 90°$

  Für einen rechten Winkel ist der Kosinus Null: $\cos(90°) = 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\cos(90°)}_{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$$

  In diesem Fall stehen die Vektoren orthogonal (senkrecht) aufeinander.

- **Stumpfer Winkel:** $90° < \theta \leq 180°$

  Für Winkel in diesem Bereich ist der Kosinus negativ: $\cos(\theta) < 0$. Das Skalarprodukt ist somit:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{negativ}} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle < 0$$

Schlussfolgerung aus der Herleitung

Das Skalarprodukt $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ ist **genau dann negativ**, wenn der Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels θ negativ ist. Dies ist der Fall, wenn der Winkel θ ein stumpfer Winkel ist, also $90° < \theta \leq 180°$.

20.5 Frage 5

Gegeben sind zwei $\mathbb{R}^3$-Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen a und b und runden diesen auf zwei Dezimalstellen genau in Grad und Bogenmaß.

20.5.1 a

Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann berechnet werden, über $\cos(\theta) = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Hier müssen ganz einfach die Vektoren eingesetzt werden

$$\cos(\theta) = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = -\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{8}{3}$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{8}{3}$$
$$= \frac{7}{6}$$

$$|a| = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + \frac{8}{3}^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{64}{9} + 1} = \sqrt{\frac{373}{36}}$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 0^2 + \frac{8}{3}^2}$$
$$= \sqrt{1 + 0 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{73}{9}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{7}{6}}{\sqrt{\frac{373}{36}} \cdot \sqrt{\frac{73}{9}}} = \frac{21\sqrt{27229}}{27229}$$
$$\arccos\left(\frac{21\sqrt{27229}}{27229}\right) \approx 1.44rad$$
$$\arccos\left(\frac{21\sqrt{27229}}{27229}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 82.71°$$

Der Winekl zwischen den gegebenen Vektoren beträgt in Gradmaß $\theta_{grad} = 82.71$.

20.5.2 b

Der Winkel zwischen den gegebenen Vektoren beträgt in Bogenmaß $\theta_{Bogen} = 1.44$.

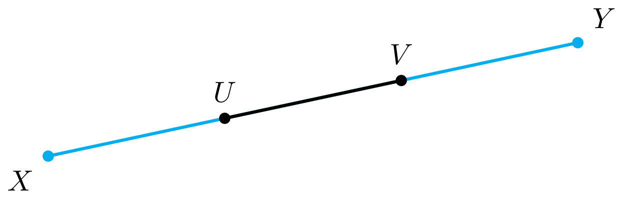
20.6 Frage 6

Gegeben sind die zwei Ortsvektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ der beiden Punkte } U \text{ und } V.$$

20.6.1 a

Wie in der folgenden Abbildung dargestellt, unterteilen die Punkte U und V die Strecke von Punkt X zu Punkt Y in drei gleich lange Teile.



Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ der Punkte X und Y.

Lösung

Der Verbindungsvektor von Punkt U nach Punkt V lässt sich aus den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{UV} &= \vec{v} - \vec{u} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-6\\1\\-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da die Strecke in drei gleich lange Teile unterteilt ist, gilt $\vec{XU} = \vec{UV} = \vec{VY}$.

Der Ortsvektor $\vec{x}$ des Punktes X kann somit durch Subtraktion des Vektors $\vec{UV}$ vom Ortsvektor $\vec{u}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{u} - \vec{UV} \\ &= \begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\1\\-6\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}11\\-2\\10\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Analog ergibt sich der Ortsvektor $\vec{y}$ des Punktes Y aus der Addition des Vektors $\vec{UV}$ zum Ortsvektor $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{v} + \vec{UV} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\1\\-6\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-7\\1\\-8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

20.6.2 b

Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Lösung

Aus Teil a sind die Beziehungen $\vec{x} = \vec{u} - \vec{UV}$ und $\vec{y} = \vec{v} + \vec{UV}$ bekannt, sowie $\vec{UV} = \vec{v} - \vec{u}$. Durch Einsetzen von $\vec{UV}$ lässt sich $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{u} - (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{u} - \vec{v} + \vec{u} \\ &= 2\vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

Ebenso für $\vec{y}$:

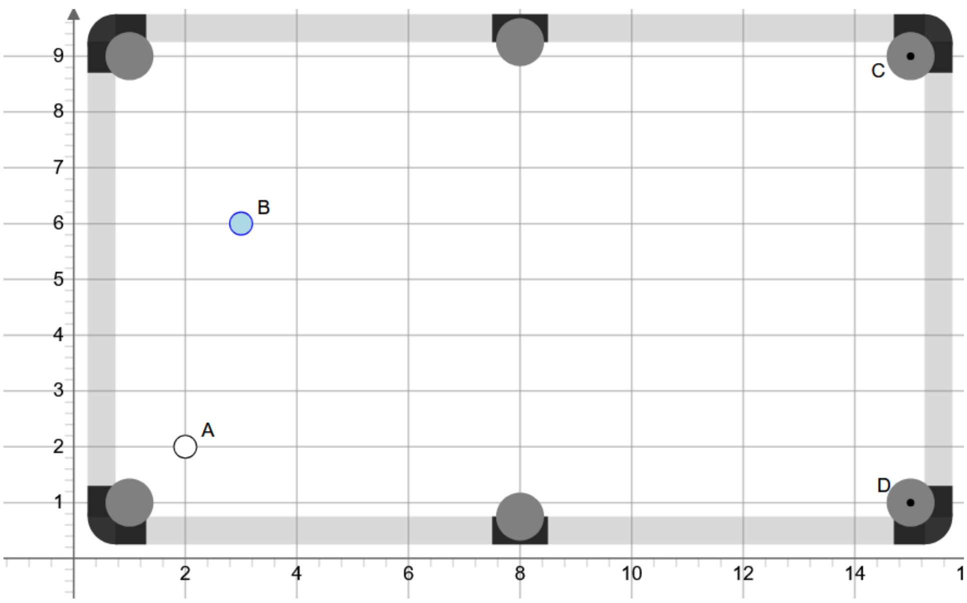
$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{v} + (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{v} + \vec{v} - \vec{u} \\ &= 2\vec{v} - \vec{u} \end{aligned}$$

Die gesuchten Linearkombinationen lauten somit:

$$\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{y} = -\vec{u} + 2\vec{v}$$

20.7 Frage 7

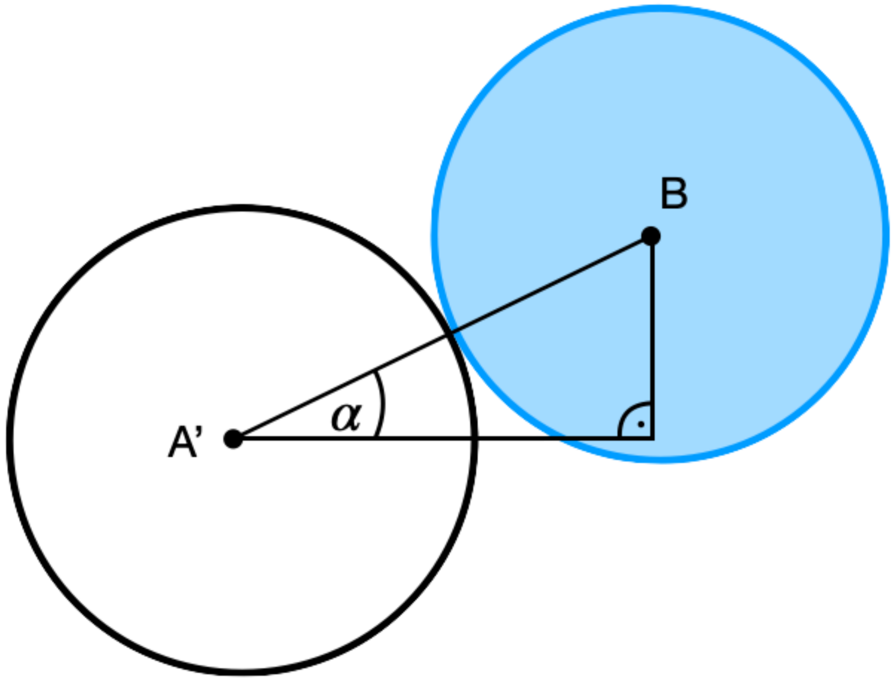
Auf einem Billardtisch befinden sich eine blaue und eine weiße Kugel. Die weiße Kugel und die blaue Kugel haben beide einen Durchmesser $d = 57.2\,\text{mm}$. In der folgenden Abbildung ist der Billardtisch dargestellt. Der Punkt A bezeichnet den Mittelpunkt der weißen Kugel und der Punkt B den Mittelpunkt der blauen Kugel. Die Punkte liegen jeweilts auf einem Gitterpunkt des quadratischen Rasters, wobei ein Kästchen eine skalierung von $1\,\text{dm}$ hat. Die obere rechte Tasche des Billarftisches wird mit C und die untere rechte Tasche mit D bezeichnet.



Hier ist die Kugel B bei $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Kugel A bei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die weiße Kugel wird so gespielt, dass die blaue Kugel danach direkt zu Punkt C rollt. Die folgende Abbildung zeigt die weiße und blaue Kugel beim

Stoß. Dabei ist A' die Position der weißen Kugel, wenn diese auf die blaue Kugel trifft. Der Impuls wird hierbei entlang der Linie $A'B$ übertragen.



20.7.1 a

Berechnen Sie den Winkel α, unter dem die weiße Kugel die blaue Kugel treffen muss, damit die blaue Kugel direkt in Loch C trifft. Geben Sie den Winkel in Gradmaß und auf zwei Dezimalstellen genau ein.

Der Richtungsvektor der blauen Kugel ist $\vec{BC}$.

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Winkel θ dieses Vektors zur x-Achse $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist:

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}| \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|} = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{12}{\sqrt{153}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{153}}\right) \approx 14.04^\circ$$

20.7.2 b

Berechnen Sie den Vektor $\vec{A'B}$ in dm und auf zwei Dezimalstellen genau.

Der Vektor $\vec{A'B}$ verläuft vom Zentrum der weißen Kugel (A') zum Zentrum der blauen Kugel (B) im Moment des Stoßes. Er hat die Richtung von $\vec{BC}$ und die Länge des Kugeldurchmessers $d = 0.572\,\mathrm{dm}$.

$$\vec{A'B} = d \cdot \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = 0.572 \cdot \frac{1}{\sqrt{153}} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\approx 0.572 \cdot \begin{pmatrix} 0.9701 \\ 0.2425 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

20.7.3 c

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{AA'}$, in dessen Richtung die weiße Kugel gespielt wird, in dm und auf zwei Dezimalstellen genau.

Zuerst wird die Position von A' bestimmt: $\vec{A'} = \vec{B} - \vec{A'B}$.

$$\vec{A'} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.45 \\ 5.86 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Stoßrichtung $\vec{AA'}$ ist dann $\vec{A'} - \vec{A}$.

$$\vec{AA'} \approx \begin{pmatrix} 2.45 \\ 5.86 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 3.86 \end{pmatrix}$$

20.7.4 d

Berechnen Sie den Winkel β zwischen dem Stoßvektor $\vec{AA'}$ und der Horizontalen.

Der gesuchte Winkel β ist der Winkel zwischen dem Stoßvektor $\vec{AA'}$ und der horizontalen Achse.

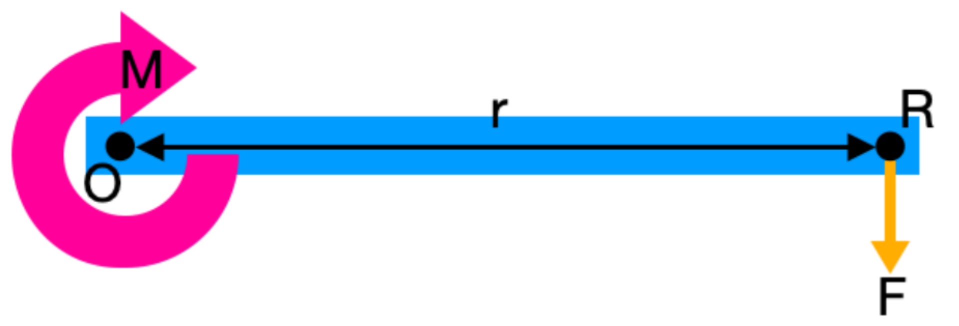
$$\cos(\beta) = \frac{\vec{AA'} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\vec{AA'}| \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|}$$

$$\begin{aligned}
\vec{AA'} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\approx 0.45 \cdot 1 + 3.86 \cdot 0 = 0.45 \\
|\vec{AA'}| &\approx \sqrt{0.45^2 + 3.86^2} = \sqrt{0.2025 + 14.8996} = \sqrt{15.1021} \approx 3.886 \\
|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}| &= 1 \\
\cos(\beta) &\approx \frac{0.45}{3.886 \cdot 1} \approx 0.1158 \\
\beta &= \arccos(0.1158) \approx 83.35°
\end{aligned}$$

Der gesuchte Winkel beträgt also 83.35°.

20.8 Frage 8

Auf einem Körper, der den Punkt O drehbar ist, wirkt eine am Punkt R angreifende Kraft $\vec{F}$. Der vektor $\vec{r}$ ist der Ortsvektor von Punkt O nach Punkt R. In der folgenden Abbildung ist der Körper dargestellt.



Das auf den Körper wirkende Drehmoment $\vec{M}$ ist das Kreuzprodukt $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Im folgenden sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

20.8.1 a

Berechnen Sie das auf den Körper wirkende Drehmoment $\vec{M}$.

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot -6 - -1 \cdot -3 \\ -1 \cdot 2 - 4 \cdot -6 \\ 4 \cdot -3 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} -12 - 3 \\ -2 - -24 \\ -12 - 4 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} -15 \\ 22 \\ -16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

20.8.2 b

Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments und geben Sie das ergebnsi exakt an.

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{M}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} -15 \\ 22 \\ -16 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{-15^2 + 22^2 - 16^2} \\
&= \sqrt{225 + 484 + 256}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{965}$$

21. Bonustest 2 - Skalarprodukt, Kreuzprodukt, lineare Gleichungssystem, Matzitzen und lineare Abbildungen

21.1 Frage 1

Bilden die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine basis des $\mathbb{R}^4$?

Hierfür müssen die Vektoren auf Lineare unabhängigkeit geprüft werden

$$x_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

				Linearkombination
6	1	−2	1	
0	3	3	−1	
7	−1	0	0	
−7	0	5	1	
III + IV				

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 21.1 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ -7 & 0 & 5 & 1 \end{matrix}$
6IV + 7I
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & 16 & 13 \end{matrix}$
IV + 7III
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -19 & 6 \end{matrix}$
3III + II
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & -19 & 6 \end{matrix}$
-12IV + 19III
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -148 \end{matrix}$
IV : -148
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
III + 4IV
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II + IV
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I - IV
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
III : -12

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 21.1 – *Fortführung von vorherier Seite*
Linearkombination
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II - 3III
$\begin{matrix} 6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I + 2III
$\begin{matrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II : 3
$\begin{matrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I - II
$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I : 6
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

Da das Gleichungssystem bestimmt und nicht unterbestimmt ist, bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

21.2 Frage 2

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie Werte der Parameter a und b, sodass $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind. Geben Sie bei mehreren Lösungen eine für a und b beispielhaft an.

Ein möglicher Lösungsansatz besteht darin, die Bedingung für lineare Abhängigkeit zu nutzen. Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante der Matrix, die aus diesen Vektoren als Spalten gebildet wird, gleich Null ist.

Die aufgestellte Matrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & b & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix wird berechnet:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-4 \cdot 1 \cdot -4) + (3 \cdot 2 \cdot 1) + (2 \cdot a \cdot b) - (1 \cdot 1 \cdot 2) - (b \cdot 2 \cdot -4) - (-4 \cdot a \cdot 3) \\ &= 16 + 6 + 2ab - 2 - (-8b) - (-12a) \\ &= 20 + 2ab + 8b + 12a \end{aligned}$$

Für lineare Abhängigkeit muss die Determinante Null sein:

$$12a + 8b + 2ab + 20 = 0$$

Diese Gleichung lässt sich durch 2 dividieren, um sie zu vereinfachen:

$$6a + 4b + ab + 10 = 0$$

Es gibt unendlich viele Paare (a, b), die diese Gleichung erfüllen. Um eine beispielhafte Lösung anzugeben, kann ein Wert für einen der Parameter frei gewählt und der andere berechnet werden.

Beispiel 1: $a = 0$ Wird $a = 0$ in die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6(0) + 4b + (0)b + 10 &= 0 \\ 4b + 10 &= 0 \\ 4b &= -10 \\ b &= -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ein mögliches Wertepaar ist $a = 0$ und $b = -2.5$.

Beispiel 2: $b = 1$ Wird $b = 1$ in die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6a + 4(1) + a(1) + 10 &= 0 \\ 7a + 14 &= 0 \\ 7a &= -14 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Ein weiteres mögliches Wertepaar ist $a = -2$ und $b = 1$.

21.3 Frage 3

Bestimmen Sie das folgende Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9 \cdot -1 - -2 \cdot -1 \\ -2 \cdot 2 - 1 \cdot -1 \\ 1 \cdot -1 - 9 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -9 - 2 \\ -2 - 1 \\ -1 - 18 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ -19 \end{pmatrix}$$

21.4 Frage 4

Bestimmen Sie das folgende Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 - -4 \\ -4 - 2 \\ 2 - 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

21.5 Frage 5

Ein Tetraeder wird als Modell eines Methanmoleküls verwendet. Dabei stellen die vier Eckpunkte die vier Wasserstoffatome und der Punkt $C(1, 1, 1)$ das Kohlenstoffatom dar.

Die Wasserstoffatome befinden sich im Tetraeder an den Eckpnkten $H_1(2, 0, 0)$, $H_2(0, 2, 0)$, $H_3(0, 0, 2)$ und $H_4(2, 2, 2)$.

Für diese Aufgabe ist die Abbildung des Moleküls irrelevant.

Der winkel α zwischen den Strecken $\overline{CH_1}$ und $\overline{CH_2}$ wird Bindungswinkel genannt. Berechnen Sie den Bindungswinkel im Methanmolekül in Grad und auf zwei Nachkommastellen genau.

$$\begin{aligned}\overline{CH_1} &= H_1 - C \\ &= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CH_2} &= H_2 - C \\ &= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle\overline{CH_1}, \overline{CH_2}\rangle}{|\overline{CH_1}| \cdot |\overline{CH_2}|}$$

$$\begin{aligned}&\langle\overline{CH_1}, \overline{CH_2}\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 1 \cdot -1 + -1 \cdot 1 + -1 \cdot -1 \\ &= -1 + -1 + 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|\overline{CH_1}| \\ &= \left| \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{1+1+1} \\ &\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|\overline{CH_2}| \\ &= \left| \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{1+1+1} \\
&\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{\langle \overline{CH_1}, \overline{CH_2} \rangle}{|\overline{CH_1}| \cdot |\overline{CH_2}|} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\
\arccos(\frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}) \cdot \frac{180}{\pi} \\
&\approx 109.47^\circ
\end{aligned}
$$

21.6 Frage 6

Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x - y - z \\ z \\ x + y \end{bmatrix}$

Berechnen Sie die Abbildungsmatrix A von T bezüglich der Standardbasis $\mathbb{R}^3$.

Die Spalten der Abbildungsmatrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren unter der linearen Abbildung T. Die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus den Vektoren:

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Die Bilder dieser Basisvektoren werden wie folgt berechnet:

1. **Erste Spalte:**

$$
T(e_1) = T(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2(1) - 0 - 0 \\ 0 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

2. **Zweite Spalte:**

$$
T(e_2) = T(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2(0) - 1 - 0 \\ 0 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

3. **Dritte Spalte:**

$$
T(e_3) = T(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2(0) - 0 - 1 \\ 1 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Zusammensetzen der Spalten ergibt die Abbildungsmatrix A:

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

21.7 Frage 7

Sei $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n.

Sei $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ die Abbilfung mit $T(f) := f'$.

Berechnen sie die Dimension vom $Bild(T)$.

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Die lineare Abbildung $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch die Ableitung:

$$T(f) = f'$$

Gesucht ist die Dimension des Bildes von T, geschrieben als $\dim(\text{Bild}(T))$.

Anwendung des Dimensionssatzes

Der Dimensionssatz (auch Rang-Defekt-Satz) für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ lautet:

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(T)) + \dim(\text{Bild}(T))$$

1. **Dimension des Urbildraums bestimmen:** Der Urbildraum ist $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Eine Basis für diesen Raum ist $\{1, x, x^2, x^3\}$. Die Anzahl der Basisvektoren ist 4.

   $$\dim(\mathbb{P}_3) = 4$$

2. **Dimension des Kerns bestimmen:** Der Kern von T enthält alle Polynome $f \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, für die $T(f) = 0$ gilt.

   $$T(f) = f' = 0$$

   Dies ist genau dann der Fall, wenn das Polynom f eine Konstante ist, d.h. $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Der Kern besteht also aus allen konstanten Polynomen.

   $$\text{Kern}(T) = \{c \mid c \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{1\}$$

   Eine Basis des Kerns ist das Polynom $\{1\}$. Die Dimension des Kerns ist somit:

   $$\dim(\text{Kern}(T)) = 1$$

3. **Dimension des Bildes berechnen:** Durch Umstellen des Dimensionssatzes ergibt sich:

   $$\dim(\text{Bild}(T)) = \dim(\mathbb{P}_3) - \dim(\text{Kern}(T))$$

   Einsetzen der bekannten Werte:

   $$\dim(\text{Bild}(T)) = 4 - 1 = 3$$

22. Bonustest 3 - Invertieren von Matzitzen

22.1 Frage 1

Bestimmen Sie die Umkehrabbildung für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zunächst muss geprüft werden, ob die Matrx invertierbar ist. Eine Matrix, welche Invertierhar hat, besitzt eine $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 \\ &\quad -2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 6 + 8 + 12 - 6 - 3 - 32 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Da $\det(A) \neq 0$, ist die Matrix invertierbar. Nun kann die Matrix invertiert werden. Hierfür wird das **??** verwendet.

Matrix	Einheitsmatrix
$3 \quad 4 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$4 \quad 1 \quad 1$	$0 \quad 1 \quad 0$
$2 \quad 1 \quad 2$	$0 \quad 0 \quad 1$
Operation: II - 2III	
$3 \quad 4 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$0 \quad -1 \quad -3$	$0 \quad 1 \quad -2$
$2 \quad 1 \quad 2$	$0 \quad 0 \quad 1$
Operation: 3III - 2I	
$3 \quad 4 \quad 3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$0 \quad -1 \quad -3$	$0 \quad 1 \quad -2$
$0 \quad -5 \quad 0$	$-2 \quad 0 \quad 3$
Operation: I + 4II	

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 22.1 – *Fortführung von vorherier Seite*

Matrix	Einheitsmatrix
$\begin{matrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix}$
Operation: III - 5II	
$\begin{matrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 13 \end{matrix}$
Operation: 15II + 3III	
$\begin{matrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 4 & -8 \\ -6 & 0 & 9 \\ -2 & -5 & 13 \end{matrix}$
Operation: 15I + 9III	
$\begin{matrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3 & 15 & -3 \\ -6 & 0 & 9 \\ -2 & -5 & 13 \end{matrix}$
Operation: I : 45	
Operation: II : -15	
Operation: III : 15	
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{13}{15} \end{matrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}$$

22.2 Frage 2

Bestimmen Sie die Inverse Matrix für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zunächst muss geprüft werden, ob die Matrx invertierbar ist. Eine Matrix, welche Invertierhar hat, besitzt eine $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &\quad -2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 4 + 12 + 3 - 12 - 3 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Matrix besitzt also *keine inverse*.

22.3 Frage 3

Bestimmen Sie die inverse Matrix für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die erweiterte Matrix:}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$II - 2I$$
$$III - 4I$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$-II$$
$$III + 2II$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$I - II$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{-1}{5} III$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$
$$I - III \text{und} II - III$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

22.4 Frage 4

Bestimmen Sie die inverse Matrix für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II - 2I$$

$$III - I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} III$$

$$II \leftrightarrow III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - II$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - \frac{7}{3}$$

$$II + \frac{1}{3} III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.5 Frage 5

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 16 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

zunächst muss geprüft werden, ob die Matrx invertierbar ist. Eine Matrix, welche Invertierhar hat, besitzt eine $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\cdot 2\cdot 3 + 8\cdot 16\cdot 1 + (-5)\cdot 0\cdot(-1)\\ &\quad -1\cdot 2\cdot(-5) - (-1)\cdot 16\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 8\\ &= 6 + 128 + 0 - (-10) - (-16) - 0\\ &= 160\end{aligned}$$

Da $\det(A) \neq 0$, ist die Matrix invertierbar. Nun kann die Matrix invertiert werden. Hierfür wird das **??** verwendet.

Matrix	**Einheitsmatrix**
$\begin{matrix}1 & 8 & -5\\ 0 & 2 & 16\\ 1 & -1 & 3\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$
Operation: III - I	
$\begin{matrix}1 & 8 & -5\\ 0 & 2 & 16\\ 0 & -9 & 8\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}$
Operation: I - 4II	
$\begin{matrix}1 & 0 & -69\\ 0 & 2 & 16\\ 0 & -9 & 8\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}$
Operation: 2III + 9II	
$\begin{matrix}1 & 0 & -69\\ 0 & 2 & 16\\ 0 & 0 & 160\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 9 & 2\end{matrix}$
Operation: 10II - III	
$\begin{matrix}1 & 0 & -69\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 160\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 9 & 2\end{matrix}$
Operation: 160I + 69III	
$\begin{matrix}160 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 160\end{matrix}$	$\begin{matrix}22 & -19 & 138\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 9 & 2\end{matrix}$
Operation: I : 160	
Operation: II : 20	
Operation: III : 160	
$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$	$\begin{matrix}\frac{11}{80} & -\frac{19}{160} & \frac{69}{180}\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{80} & \frac{9}{160} & \frac{1}{80}\end{matrix}$

Nun können die Elemente abgelesen werden: $A^{-1}_{12} = -\frac{19}{160}, A^{-1}_{22} = \frac{1}{20}, A^{-1}_{31} = -\frac{1}{80}$.

22.6 Frage 6

Bestimmen Sie die Inverse von $M = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Als erstes sollte bestimmt werden, ob die Matrix eine Inverse besitzt. Sie besitzt eine Inverse, wenn $\det(M) \neq 0$.

$$\det(M) = 3 \cdot 1 - (-1 \cdot -2) = 3 - 2 = 1$$

Die Matrix besitzt also eine Inverse. Diese kann nun über das Gauß-jordan verfahren ermittelt werden

Matrix	Einheitsmatrix
$3 \quad -2$	$1 \quad 0$
$-1 \quad 1$	$0 \quad 1$
Operation: 3II + I	
$3 \quad -2$	$1 \quad 0$
$0 \quad 1$	$1 \quad 3$
Operation: I + 2II	
$3 \quad 0$	$3 \quad 6$
$0 \quad 1$	$1 \quad 3$
Operation: I : 3	
$1 \quad 0$	$1 \quad 2$
$0 \quad 1$	$1 \quad 3$

Die Inverse M^{-1} ist also $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

22.7 Frage 7

Bestimmen Sie die Inverse von $M = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 9 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Als erstes sollte bestimmt werden, ob die Matrix eine Inverse besitzt. Sie besitzt eine Inverse, wenn $\det(M) \neq 0$

$$\begin{aligned} \det(M) = -5 \cdot 1 \cdot -1 + 1 \cdot 2 \cdot -3 + -3 \cdot 9 \cdot 0 \\ -(-3 \cdot 1 \cdot -3) - (0 \cdot 2 \cdot -5) - (-1 \cdot 9 \cdot 1) \\ = 5 - 6 + 0 - 9 + 0 + 9 = -10 \end{aligned}$$

Die Matrix besitzt also eine Inverse. Diese kann über das Gauß-jordan verfahren berechnet werden.

Matrix	Einheitsmatrix
$-5 \quad 1 \quad -3$	$1 \quad 0 \quad 0$
$9 \quad 1 \quad 2$	$0 \quad 1 \quad 0$
$-3 \quad 0 \quad -1$	$0 \quad 0 \quad 1$

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 22.4 – *Fortführung von vorherier Seite*

Matrix	**Einheitsmatrix**
Operation: II + 3III	
$\begin{matrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: 5III - 3I	
$\begin{matrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{matrix}$
Operation: I - II	
$\begin{matrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{matrix}$
Operation: III + 3II	
$\begin{matrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 14 \end{matrix}$
Operation: II + III	
$\begin{matrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & 14 \end{matrix}$
Operation: I + 2III	
$\begin{matrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5 & 5 & 25 \\ -3 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & 14 \end{matrix}$
Operation: I : -5	
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & -5 \\ -3 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & 14 \end{matrix}$

Die Inverse M^{-1} ist also $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -3 & 4 & 17 \\ -3 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

23. Bonustest 4 - Determinanten

23.1 Frage 1

Bestimmen Sie $\det(A)$ für die Matrix A: $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}\right) &= 2 \cdot 22 - 7 \cdot 7 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Die Determinante ist also $\det(A) = -5$.

23.2 Frage 2

Bestimmen Sie $\det(A)$ für die Matrix A: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 17 & 24 & 38 \\ 5 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 17 & 24 & 38 \\ 5 & 13 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 2 \cdot 24 \cdot 0 + 6 \cdot 38 \cdot 5 + 0 \cdot 17 \cdot 13 \\ &\quad -(5 \cdot 24 \cdot 0) - (13 \cdot 38 \cdot 2) - (0 \cdot 17 \cdot 6) \\ &= 0 + 1140 + 0 + 0 - 988 + 0 \\ &= 152 \end{aligned}$$

Die Determinante ist also $\det(A) = 152$.

23.3 Frage 3

Bestimmen Sie $\det(A)$ für die Matrix A: $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 23 & 34 \\ 15 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix}7 & 0 & 7\\ 0 & 23 & 34\\ 15 & 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 7\cdot 23\cdot 0 + 0\cdot 34\cdot 15 + 7\cdot 0\cdot 1$$
$$-(15\cdot 23\cdot 7) - (1\cdot 34\cdot 7) - (0\cdot 23\cdot 0)$$
$$= 0 + 0 + 0 - 2415 - 238 + 0 = -2653$$

Die Determinante ist also $\det(A) = -2653$.

23.4 Frage 4

Bestimmen Sie $\det(A)$ für die Matrix A: $A = \begin{pmatrix}7 & -6 & 8\\ 0 & 21 & 34\\ 22 & -17 & 0\end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix}7 & -6 & 8\\ 0 & 21 & 34\\ 22 & -17 & 0\end{pmatrix}\right) = 7\cdot 21\cdot 0 + -6\cdot 34\cdot 22 + 8\cdot 0\cdot -17$$
$$-(22\cdot 21\cdot 8) - (-17\cdot 34\cdot 7) - (0\cdot 0\cdot -6)$$
$$= 0 - 4488 + 0 - 3696 + 4046 + 0 = -4138$$

Die Determinante ist also $\det(A) = -4138$.

24. Bonustest 5 - geometrische Interpretation linearer Abbildungen

24.1 Frage 1

Wählen Sie die richtige Achse für die entsprechende Drehmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um die Z-Achse}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um die X-Achse}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(a) & 0 & -\sin(a) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um die Y-Achse}$$

24.2 Frage 2

Wählen Sie die richtigen Lösungen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{orthogonale Matrix aber keine Drehmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Drehmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Weder Drehmatrix noch orthogonale Matrix}$$

24.3 Frage 3

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

☑ a Inverse Matrizen zu orthogonalen Matrizen sind ebenfalls orthogonale Matrizen.
☑ b Alle Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen.
☐ c $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist eine Untergruppe von $O(n)$.
☑ d Multipliziert man zwei orthogonale Matrizen, so ist das Ergebnis auch eine orthogonale Matrix.

24.4 Frage 4

Eine orthogonale Matrix A ist eine Matrix, für die gilt: $A^{-1} = A^T$

Wahr

24.5 Frage 5

Sei $D_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die jeden Vektor aus $\mathbb{R}^2$ um $\frac{\pi}{2}$ dreht.

Stellen Sie die Matrix zu $D_{\frac{\pi}{2}}$ auf.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $D_{\frac{\pi}{2}}(v)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\left\langle v, D_{\frac{\pi}{2}}(v) \right\rangle$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = 0$$

24.6 Frage 6

Sei $D_{\frac{\pi}{3}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die jeden Vektor aus $\mathbb{R}^2$ um $\frac{\pi}{3}$ dreht.

Stellen Sie die Matrix zu $D_{\frac{\pi}{3}}$ auf.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $D_{\frac{\pi}{3}}(v)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\left\langle v, D_{\frac{\pi}{3}}(v) \right\rangle$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

25. Bonustest 6 - Eigenwerte und Eigenvektoren

25.1 Frage 1

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(x)$ der Matrix M.

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= (-2-\lambda) \cdot (5-\lambda) - -4 \cdot 3 \\ &= -10 + 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 12 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

25.2 Frage 2

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -27 & 18 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge aller Eigenwerte der Matrix M.

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -27 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 \\ -27 & 18-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(M - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 \\ -27 & 18-\lambda \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = (9-\lambda) \cdot (18-\lambda) - 27 \cdot 0 = 162 - 9\lambda - 18\lambda + \lambda^2 \\ = \lambda^2 - 27\lambda + 162 \end{aligned}$$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 - 27\lambda + 162 = 0 \quad |pq$$
$$p = -27, q = 162$$
$$-\frac{-27}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-27}{2}\right)^2 - 162}$$
$$\lambda_1 = 18 \quad \lambda_2 = 9$$

25.3 Frage 3

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -45 & 30 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix M.

$$\begin{aligned} M - \lambda I &= \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -45 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 - \lambda & 0 \\ -45 & 30 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= (15 - \lambda) \cdot (30 - \lambda) - -45 \cdot 0 \\ &= +450 - 15\lambda - 30\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 - 45\lambda + 450 \end{aligned}$$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 - 45\lambda + 450 = 0 \quad |pq$$
$$p = -45 \quad q = 450$$
$$-\frac{-45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-45}{2}\right)^2 - 450}$$
$$\lambda_1 = 30 \quad \lambda_2 = 15$$

$$\text{Eigenwerte für } \lambda = 30$$
$$\begin{pmatrix} 15 - 30 & 0 \\ -45 & 30 - 30 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -45 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \text{I:} & -15x_1 = 0 \\ \text{II:} & 30x_1 = 0 \end{cases} \quad x_1 = 0$$
$$x_2 = t \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eigenwerte für } \lambda = 15$$
$$\begin{pmatrix} 15-15 & 0 \\ -45 & 30-15 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -45 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 0 = 0 \\ \text{II:} & -45x_1 + 15x_2 = 0 \quad |:-15| - x_2 \Leftrightarrow 3x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = t \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$$
$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \; span = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

25.4 Frage 4

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$M - \lambda I \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\det(M - \lambda I)$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)\cdot(-3-\lambda)$$
$$= -12 - 4\lambda + 3\lambda + \lambda^2$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 12$$
$$\text{Das charakteristische Polynom ist } \lambda^2 - 7\lambda + 13$$
$$\det(M - \lambda I) = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \quad |pq$$
$$p = -1 \quad q = -12$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$
$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -3$$
$$\text{Die Eigenwerte sind: } 4, -3$$

$$\text{Eigenvektoren für } \lambda = 4$$
$$M - \lambda I = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 0 \\ -1 & -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 8x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ \text{II:} & -1x_1 - 7x_2 = 0 \quad | + x_1 \Leftrightarrow -7x_2 = x_1 \end{cases}$$

$$x_1 = t | t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ -7t \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eigenvektoren für } \lambda = -3$$

$$M - \lambda I = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4+3 & 0 \\ -1 & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 7x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \\ \text{II:} & -1x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = t | t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

25.5 Frage 5

Gegeben ist die Matrix$M = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 15 & -9 \\ 9 & -9 & 15 \end{pmatrix}$

$$M - \lambda I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -9 & 15 & -9 \\ 9 & -9 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -9 & 9 \\ -9 & 15-\lambda & -9 \\ 9 & -9 & 15-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \cdot (15-\lambda) \cdot (15-\lambda) + -9 \cdot -9 \cdot 9 + 9 \cdot -9 \cdot -9$$

$$-9\cdot(15-\lambda)\cdot 9 - -9\cdot -9\cdot(3-\lambda) - -9\cdot -9\cdot(15-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\cdot(\lambda^2-30\lambda+225)+729+729$$
$$-81\cdot(15-\lambda)-81\cdot(3-\lambda)-81\cdot(15-\lambda)$$

$$= (3\lambda^2-90\lambda+675-\lambda^3+30\lambda^2-225\lambda)+1458$$
$$-1215+81\lambda-243+81\lambda-1215+81\lambda$$

$$= (-\lambda^3+33\lambda^2-315\lambda+675)+1458-2673+243\lambda$$

$$= -\lambda^3+33\lambda^2-315\lambda+2133-2673+243\lambda$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3+33\lambda^2-72\lambda-540$$

$$\det(M-\lambda I)=0$$
$$-\lambda^3+33\lambda^2-72\lambda-540=0 \quad |\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3-33\lambda^2+72\lambda+540=0$$

Nullstellen müssen ausprobiert werden.

Wähle $\lambda=-3$

$$\Leftrightarrow (-3)^3-33\cdot(-3)^2+72\cdot(-3)+540=0$$
$$\Leftrightarrow -27-297-216+540=0$$
$$\Leftrightarrow -540+540=0$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$
$$\lambda_1=-3$$

$$(\lambda^3-33\lambda^2+72\lambda+540):(\lambda+3)$$
$$(\lambda^3+3\lambda^2)$$
$$-36\lambda^2+72\lambda$$
$$-(-36\lambda^2-108\lambda)$$
$$180\lambda+540$$
$$-(180\lambda+540)$$
$$0$$

Resultat: $\lambda^2-36\lambda+180$

$$\lambda^2-36\lambda+180=0$$
$$\lambda_{2,3} = -(\frac{-36}{2})\pm\sqrt{(\frac{-36}{2})^2-180}$$
$$\lambda_{2,3} = 18\pm\sqrt{(-18)^2-180}$$
$$\lambda_{2,3} = 18\pm\sqrt{324-180}$$
$$\lambda_{2,3} = 18\pm\sqrt{144}$$

$$\lambda_{2,3} = 18 \pm 12$$

$$\lambda_2 = 18 + 12 = 30$$
$$\lambda_3 = 18 - 12 = 6$$
$$\text{Die Eigenwerte sind: } -3, 6, 30$$

$$\text{Eigenvektoren für } \lambda_1 = -3$$
$$M - \lambda_1 I = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} 3-(-3) & -9 & 9 \\ -9 & 15-(-3) & -9 \\ 9 & -9 & 15-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \text{I:} & 6x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & -9x_1 + 18x_2 - 9x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \text{III:} & 9x_1 - 9x_2 + 18x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\text{Aus III: } x_1 = x_2 - 2x_3$$
$$\text{in II eingesetzt: } (x_2 - 2x_3) - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow -x_2 - x_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -x_3$$
$$\text{damit ist } x_1 = (-x_3) - 2x_3 = -3x_3$$
$$x_3 = t \quad | t \in \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{span} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eigenvektoren für } \lambda_2 = 6$$
$$M - \lambda_2 I = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} 3-6 & -9 & 9 \\ -9 & 15-6 & -9 \\ 9 & -9 & 15-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \text{I:} & -3x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & -9x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{III:} & 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Aus II: } x_2 &= x_1 + x_3 \\
\text{in I eingesetzt: } -x_1 - 3(x_1 + x_3) + 3x_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow -x_1 - 3x_1 - 3x_3 + 3x_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow -4x_1 &= 0 \\
\Leftrightarrow x_1 &= 0 \\
\text{damit ist } x_2 = 0 + x_3 &= x_3 \\
x_3 = t \quad &|t \in \mathbb{R} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{span} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Eigenvektoren für } \lambda_3 &= 30 \\
M - \lambda_3 I &= \vec{0} \\
\begin{pmatrix} 3-30 & -9 & 9 \\ -9 & 15-30 & -9 \\ 9 & -9 & 15-30 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -27 & -9 & 9 \\ -9 & -15 & -9 \\ 9 & -9 & -15 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\text{I:} & -27x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \Leftrightarrow -3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
\text{II:} & -9x_1 - 15x_2 - 9x_3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\
\text{III:} & 9x_1 - 9x_2 - 15x_3 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Aus I: } x_3 &= 3x_1 + x_2 \\
\text{in III eingesetzt: } 3x_1 - 3x_2 - 5(3x_1 + x_2) &= 0 \\
\Leftrightarrow 3x_1 - 3x_2 - 15x_1 - 5x_2 &= 0 \\
\Leftrightarrow -12x_1 - 8x_2 &= 0 \\
\Leftrightarrow x_2 &= -\frac{3}{2}x_1 \\
\text{damit ist } x_3 = 3x_1 + (-\frac{3}{2}x_1) &= \frac{3}{2}x_1 \\
\text{Wähle } x_1 = 2t \quad |t \in \mathbb{R} \text{ (um Brüche zu vermeiden)} \\
\Rightarrow x_2 = -3t, \quad x_3 &= 3t \\
\begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 3t \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\text{span} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

26. Bonustest 7 - Zufallsvariablen und Verteilungen

26.1 Frage 1

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0.2$. Berechnen Sie, auf zwei Nachkommastellen genau:

26.1.1 a

$P(X = 2)$

$$X \sim B(20, 0.2)$$
$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{18} \approx 13.69\%$$

26.1.2 b

$P(X \geq 12)$

$$X \sim B(20, 0.2)$$
$$P(X \leq 12) = \sum_{i=0}^{12} \left(\binom{20}{i} \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{20-i} \right) \approx 100\%$$
$$\text{Alternativ:}$$
$$P(X \leq 12) = 1 - P(X > 12) =$$
$$1 - \sum_{i=12}^{20} \left(\binom{20}{i} \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{20-i} \right) \approx 100\%$$

26.1.3 c

$P(X > 2)$

$$X \sim B(20, 0.2)$$

$$P(X > 2) = \sum_{i=3}^{20} \left(\binom{20}{i} \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{20-i} \right) \approx 79.39\%$$

$$\text{Alternativ:}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) =$$

$$1 - \sum_{2}^{0} \left(\binom{20}{i} \cdot 0.2^i \cdot 0.8^{20-i} \right) \approx 79.39\%$$

26.2 Frage 2

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit fünf Kindern...

Die Zufallsvariable ist Binomialverteilt, da sie in mehreren, voneinander unabhängigen Zufallsexperimenten zwischen Treffer und Niete unterscheidet.

$p = 0.5$ Junge und Mädchen haben modelliert gleiche Wahrscheinlichkeit

$n = 5$ 5 Kinder

26.2.1 a

genau drei Mädchen sind?

$$X \sim B(5, 0.5)$$

$$X = \text{Anzahl der Mädchen}$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^2 = 31.25\%$$

26.2.2 b

mindestens zwei Mädchen sind

$$X \sim B(5, 0.5)$$

$$X = \text{Anzahl der Mädchen}$$

$$P(X \geq 2) = \sum_{i=2}^{5} \left(\binom{5}{i} \cdot 0.5^i \cdot 0.5^{5-i} \right) \approx 81.25\%$$

26.2.3 c

kein Junge ist

$$X \sim B(5, 0.5)$$

$$X = \text{Anzahl der Jungen}$$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^5 \approx 3.13$$

26.2.4 d

vier Mädchen und ein Junge sind?

$$\begin{aligned} X &\sim B(5, 0.5) \\ X &= \text{Anzahl der Mädchen} \\ P(X = 4) &= \binom{5}{4} \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^1 = 15.63 \end{aligned}$$

(gibt es 4 Mädchen muss es auch einen Jungen geben. Die Aussage ist also Äquivalen zu den Aussagen 'genau vier Mädchen sind' und 'genau ein Junge ist')

26.3 Frage 3

Beim Spiel 'Mensch, ärgere dich nicht' muss zum Spielbeginn eine Sechs gewürfelt werden.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, genau nach 3-maligem Würfeln mitspielen zu dürfen?

Hier wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, nach *genau* 3 malen eine 6 zu würfeln, also keine 6, keine 6, 6. Dies sind drei aneinander gereihte Bernoulliexperimente.

$$\begin{aligned} X &\sim Bernoulli(\frac{1}{6}) \\ X &= 6 \text{ gewürfelt} \\ P(X = 0) \cdot P(X = 0) \cdot P(X = 1) & \\ = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} &\approx 11.57 \end{aligned}$$

26.4 Frage 4

Bei einer unfairen Münze liegt die Wahrscheinlichkeit Kopf zu werfen bei $p = \frac{1}{5}$.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst beim dritten Versuch Kopf geworfen wird?

Hier ist nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, *genau* nach dem dritten mal Kopf zu würfeln. Also sind hier 3 aneinander gekettete Bernoulliexperimente vertreten.

$$
\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(\frac{1}{5}) \\
X &= \text{Kopf geworfen} \\
P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=1) &= \\
\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} &= 12.8\%
\end{aligned}
$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst beim fünften Versuch Kopf geworfen wird?

$$
\begin{aligned}
X &\sim Bernoulli(\frac{1}{5}) \\
X &= \text{Kopf geworfen} \\
P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=0) \cdot P(X=1) &= \\
\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} &\approx 8.19\%
\end{aligned}
$$

26.5 Frage 5

Für eine Stelle haben sich 16 Personen beworben, davon haben 5 bereits Arbeitserfahrung, die übrigen 11 noch nicht.

Es werden nun 6 Personen per Losentscheid ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Personen mit Arbeitserfahrung ausgewählt werden?

Die Zufallsvariable ist Hypergeometrisch verteilt, da aus einer Gesamtmenge eine kleinere Zielmenge gezogen wird.

$$
\begin{aligned}
X &\sim H(16, 5, 6) \\
X &= \text{Anzahl Personen mit Berufserfahrung} \\
P(X=3) &= \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{16}{6}} \approx 20.60\%
\end{aligned}
$$

26.6 Frage 6

In einer Packung seien 500 Nägel. Davon seien 10 Nägel defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 5 zufällig aus der Packung gezogenen Nägel genau einer defekt ist?

Die Zufallsvariable ist Hypergeometrisch verteilt, da aus einer Gesamtmenge eine kleinere Zielmenge gezogen wird.

$$\begin{aligned} X &\sim H(500, 10, 5) \\ X &= \text{Anzahl Defekter Nägel} \\ P(X = 1) &= \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{490}{4}}{\binom{500}{5}} \approx 9.30\% \end{aligned}$$

27. Bonustest 8 - Lagemaße und Normalverteilung

27.1 Aufgabe 1

Auf einer Kirmes steht ein Glücksrad mit 20 gleichgroßen Feldern. Die Felder sind mit 1 bis 20 durchnummeriert. Innerhalb eines Jahrzehnts wird das Glücksrad 2000000 Mal gedreht. Bezeichne X wie oft dabei das Glücksrad auf der Zahl 18 stehengeblieben ist.

27.1.1 Ohne Stetigkeitskorrektur:

$$
\begin{aligned}
X \sim B(2000000, \frac{1}{20}) E(X) &= 2000000 \cdot \frac{1}{20} = 100000 \\
Var(x) &= E(x) \cdot \frac{19}{20} = 95000 \\
\sigma &= \sqrt{95000} \\
P(X \leq 100012) = P &\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{100012 - 100000}{\sqrt{95000}} \right) \\
&\Phi \left(\frac{100012 - 100000}{\sqrt{95000}} \right) \\
&\approx \Phi(0.04) \overset{Tabelle}{\approx} 51.60\%
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 100013) &= 1 - P(X \leq 100012) \\
&= 1 - 0.51595 \approx 48.41\% \\
P(100012 < X < 100030) &= P(X < 100030) - P(X < 100012) \\
P(X < 100130) = P &\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{100130 - 100000}{\sqrt{95000}} \right) \\
&\Phi(\frac{100030 - 100000}{\sqrt{95000}}) \\
&\approx \Phi(0.42) \overset{Tabelle}{\approx} 66.28\% \\
&\text{Da keine Stetigkeitskorrektur gemacht wird, ist} \\
P(X \leq 100012) &= P(X < 100012) = P(X > 100012) \\
&0.6628 - 0.5160 = 14.68\%
\end{aligned}
$$

27.1.2 Mit Stetigkeitskorrektur:

$$X \sim B(2000000, \frac{1}{20})$$
$$E(X) = 100000 \quad | \quad Var(X) = 95000 \quad | \quad \sigma = \sqrt{95000}$$

$$\begin{aligned} P(100012 < X < 100130) &= P(100013 \leq X \leq 100129) \\ &\approx P(100012.5 \leq X_{\text{korr}} \leq 100129.5) \\ &= P(X_{\text{korr}} \leq 100129.5) - P(X_{\text{korr}} \leq 100012.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{\text{korr}} \leq 100129.5) &= \Phi\left(\frac{100129.5 - 100000}{\sqrt{95000}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{129.5}{\sqrt{95000}}\right) \\ &\approx \Phi(0.42) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 0.6628 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{\text{korr}} \leq 100012.5) &= \Phi\left(\frac{100012.5 - 100000}{\sqrt{95000}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{12.5}{\sqrt{95000}}\right) \\ &\approx \Phi(0.04) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 0.5160 \end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis} = 0.6628 - 0.5160 = 0.1468 = 14.68\%$$

27.2 Frage 2

Bei einer Meinungsumfrage werden 500 Personen befragt. Zum Zeitpunkt der Umfrage sind 30% der Bevölkerung Anhänger der Partei A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Umfrage zwischen 28% und 32% der Befragten Anhänger der Partei A sind?

27.2.1 Ohne Stetigkeitskorrektur

$$\begin{aligned} X &\sim B(0.3, 500) \\ X &= \text{Anzahl Anhänger von Partei A} \\ E(X) &= 500 \cdot 0.3 = 150 \\ Var(X) &= 150 \cdot 0.7 = 105 \\ \sigma &= \sqrt{105} \\ 28\% &\Rightarrow 500 \cdot 0.28 = 140 \\ 32\% &\Rightarrow 500 \cdot 0.32 = 160 \\ P(140 \leq X \leq 160) &= P(160 < X) - P(140 < X) \\ P(160 < X) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{160 - 150}{\sqrt{105}}\right) &\Phi\left(\frac{160 - 150}{\sqrt{105}}\right) \\ &\approx \Phi(0.98) \overset{Tabelle}{\approx} 83.65\% \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(140 < X) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} < \frac{140-150}{\sqrt{105}}\right) \Phi\left(\frac{140-150}{\sqrt{105}}\right) \\
\approx \Phi(-0.98) = 1 - \Phi(0.98) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.83646 \approx 16.35\% \\
P(140 \leq X \leq 160) = 0.8365 - 0.1635 = 67.30\%
\end{aligned}
$$

27.2.2 Mit Stetigkeitskorrektur

$$
\begin{aligned}
X \sim B(0.3, 500) \\
X = \text{Anzahl Anhänger von Partei A} \\
E(X) = 150 \\
\sigma = \sqrt{105} \approx 10.247
\end{aligned}
$$

$$
P(140 \leq X \leq 160) \rightarrow P(139.5 \leq X_{stetig} \leq 160.5)
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_{stetig} \leq 160.5) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} \leq \frac{160.5-150}{\sqrt{105}}\right) \\
= \Phi\left(\frac{10.5}{\sqrt{105}}\right) \\
\approx \Phi(1.02) \overset{Tabelle}{\approx} 84.61\%
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_{stetig} \leq 139.5) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} \leq \frac{139.5-150}{\sqrt{105}}\right) \\
= \Phi\left(\frac{-10.5}{\sqrt{105}}\right) \approx \Phi(-1.02) = 1 - \Phi(1.02) \\
\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.8461 = 15.39\%
\end{aligned}
$$

$$
P(140 \leq X \leq 160) \approx 0.8461 - 0.1539 = 0.6922 = 69.22\%
$$

27.3 Frage 3

Ein Würfel trägt 3 Einser, 2 Zweier und eine Sechs. Er wird 1000 mal geworfen. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten, mithilfe des Satzes von De Moivre-Laplace.

27.3.1 Ohne Stetigkeitskorrektur

$$
\begin{aligned}
X \sim B(0.5, 1000) \\
X = \text{Anzahl gewürfelter Einsen} \\
E(X) = 1000 \cdot 0.5 = 500 \\
Var(X) = 500 \cdot 0.5 = 250 \\
\sigma = \sqrt{250} \\
P(X < 520) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} < \frac{520-500}{\sqrt{250}}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Phi\left(\frac{520-500}{\sqrt{250}}\right)$$
$$\approx \Phi(1.26) \overset{Tabelle}{\approx} 89.62\%$$

$$X \sim B(\frac{1}{3}, 1000)$$
$$X = \text{Anzahl gewürfelter Zweien}$$
$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1000}{3}$$
$$Var(X) = \frac{1000}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2000}{9}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2000}{9}}$$
$$P(X > 300) = 1 - P(X \leq 300)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{300 - \frac{1000}{3}}{\sqrt{\frac{2000}{9}}}\right)$$
$$1 - \Phi\left(\frac{300 - \frac{1000}{3}}{\sqrt{\frac{2000}{9}}}\right)$$
$$\approx \Phi(-2.24) \approx 1 - (1 - \Phi(2.24))$$
$$\overset{Tabelle}{\approx} 1 - (1 - 98.75)\% = 1 - 1 + 98.75\% = 98.75\%$$

$$X \sim B(\frac{1}{6}, 1000)$$
$$X = \text{Anzahl gewürfelter Sechsen}$$
$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{3}$$
$$Var(X) = \frac{500}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1250}{9}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{1250}{9}}$$
$$P(140 \geq X \geq 180) = P(X < 180) - P(X < 140)$$
$$P(X < 180) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{180 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right) \Phi\left(\frac{180 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right)$$
$$\approx \Phi(1.13) = \overset{Tabelle}{\approx} 0.87076 = 87.08\%$$
$$P(X < 140) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{140 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right) \Phi\left(\frac{140 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right)$$
$$\approx \Phi(-2.26) = 1 - \Phi(2.26) = 1 - 0.98809 = 0.0119 = 1.19\%$$
$$P(140 \geq X \geq 180) = 0.87076 - 0.0119 = 0.8217 = 85.89\%$$

27.3.2 Mit Stetigkeitskorrektur

$$X \sim B(0.5, 1000)$$

$$X = \text{Anzahl gewürfelter Einsen}$$
$$E(X) = 1000 \cdot 0.5 = 500$$
$$Var(X) = 500 \cdot 0.5 = 250$$
$$\sigma = \sqrt{250}$$
$$P(X < 520) = P(X \leq 519) \approx P(X \leq 519.5)$$
$$P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{519.5 - 500}{\sqrt{250}}\right)$$
$$\Phi\left(\frac{519.5 - 500}{\sqrt{250}}\right)$$
$$\approx \Phi(1.23) \overset{Tabelle}{\approx} 89.07\%$$

$$X \sim B(\frac{1}{3}, 1000)$$
$$X = \text{Anzahl gewürfelter Zweien}$$
$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1000}{3}$$
$$Var(X) = \frac{1000}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2000}{9}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2000}{9}}$$
$$P(X > 300) = P(X \geq 301) \approx P(X \geq 300.5)$$
$$= 1 - P(X < 300.5)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{300.5 - \frac{1000}{3}}{\sqrt{\frac{2000}{9}}}\right)$$
$$1 - \Phi\left(\frac{300.5 - \frac{1000}{3}}{\sqrt{\frac{2000}{9}}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(-2.20) = \Phi(2.20)$$
$$\overset{Tabelle}{\approx} 98.61\%$$

$$X \sim B(\frac{1}{6}, 1000)$$
$$X = \text{Anzahl gewürfelter Sechsen}$$
$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{3}$$
$$Var(X) = \frac{500}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1250}{9}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{1250}{9}}$$
$$P(140 \leq X \leq 180) \approx P(139.5 \leq X \leq 180.5)$$
$$P(X \leq 180.5) - P(X \leq 139.5)$$
$$P(X \leq 180.5) = \Phi\left(\frac{180.5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right)$$

$$\approx \Phi(1.17) \overset{Tabelle}{\approx} 0.8790 = 87.90\%$$

$$P(X \leq 139.5) = \Phi\left(\frac{139.5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right)$$

$$\approx \Phi(-2.31) = 1 - \Phi(2.31) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.9896 = 0.0104 = 1.04\%$$

$$P(139.5 \leq X \leq 180.5) = 0.8790 - 0.0104 = 0.8686 = 86.86\%$$

27.4 Frage 4

In einer Bonbon-Tüte gibt es grüne, blaue und rote Bonbons. Die Anzahl der blauen Bonbons kann mit einer Normalverteilung beschrieben werden. Hierbei liegt der Erwartungswert bei 24 und die Standardabweichung bei 4.

$$X \sim N(24, 4)$$

$$X = AnzahlblauerBonbons$$

$$P(X > 19) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} > \frac{19 - 24}{4}\right)$$

$$\Phi(\frac{19 - 24}{4})$$

$$\approx \Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.89435 = 0.10565 = 19.57\%$$

Wie muss der Erwartungswert gewählt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit bei weniger als 19 blauen Bonbons bei 95% liegt?

28. Bonustest 9: z-Test

28.1 Frage 1

Ein Unternehmen stellt elektronische Massenware her, von welcher maximal 20% mit Materialfehlern behaftet sein sollen. Die Prüfabteilung untersucht 100 Bauteile und stellt bei 15 Bauteilen einen Defekt fest.

Kann die angenommene Fehlerhäufigkeit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10% aufrecht erhalten werden?

$$
\begin{aligned}
X = \begin{cases} 0 & \text{Wenn keine Materialfehler} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, p) \\
H_0 : p \leq 0.2 \\
\rightarrow \text{Extremster Wert: } p = 0.2 \\
E(S_n) = 100 \cdot 0.2 = 20 \\
\sigma(S_n) = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{16} = 4 \\
\frac{S_n - 20}{4} \overset{ldm}{\approx} N(0,1) \\
\text{Nullhypothese wird abgelehnt, falls} \\
\frac{S_n - 20}{4} \leq 1.29 \\
\Leftrightarrow S_n \leq 1.29 \cdot 4 + 20 \\
\Leftrightarrow S_n = 25.16 \\
\text{d.h. } S_n \leq 25 \\
\text{beobachtetes Ergebnis:} \\
S_n = 15 \\
\text{Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt.}
\end{aligned}
$$

28.2 Frage 2

Ein sehr böser Ganove stellt für ein privates Casino Würfel her, bei denen angeblich in höchstens 10% der Fälle eine Eins fällt. Um das zu überprüfen, wirft der ebenfalls böse Casinobetreiber den Würfel 80 Mal. Er zählt 17 Mal die Eins.

Kann mit einer Sicherheit von mindestens 97% gesagt werden, dass die Angaben des Ganoven stimmen?

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Gewürfelte einsen} \\
S_n &= \sum_{i=1}^{80} X_i \sim B\left(80, p\right) \\
H_0 &: p \geq 0.1 \\
\rightarrow \text{Extremster Wert: } & p = 0.1 \\
E(S_n) &= 80 \cdot 0.1 = 8 \\
\sigma(S_n) &= \sqrt{8 \cdot 0.9} = \sqrt{7.2} \\
\frac{S_n - 8}{\sqrt{7.2}} &\overset{ldm}{\approx} N(0,1) \\
\text{Nullhypothese wird abgelehnt falls} & \\
\frac{S_n - 8}{\sqrt{7.2}} &\geq 1.89 \\
\Leftrightarrow S_n &\geq 1.89 \cdot \sqrt{7.2} + 8 \\
\Leftrightarrow S_n &\geq 13.07 \\
\text{d.h. } S_n &\geq 14 \\
\text{beobachtetes Ergebnis:} & \\
S_n &= 17 \\
\text{Die Nullhypothese wird abgelehnt.} & \\
\text{Der Z-Wert ist 3.35} &
\end{aligned}
$$

28.3 Frage 3

In den letzten Jahrzehnten hat es im Sommer an durchschnittlich 20% der Tage geregnet. Nun wird eine Studie angelegt, die prüfen soll, ob es einen Klimawandel gab. 150 Tage werden getestet und es wird festgestellt, dass es an 53 Tagen regnete. Kann mit einer Irrtumwahrscheinlichkeit von höchstens 6% davon ausgegangen werden, dass ein Klimawandel stattfand?

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Geregnete Tage} \\
S_n &= \sum_{i=1}^{150} X_i \sim B(150, p) \\
H_0 &: p = 0.2 \\
\text{Alternativhypothese: } H_1 &: p \neq 0.2 \\
\text{Signifikanzniveau: } & 0.06 \\
\mu &= 150 \cdot 0.2 = 30 \\
E(S_n) &= 150 \cdot 0.2 = 30 \\
\sigma(S_n) &= \sqrt{30 \cdot 0.8} = sqrt(24) \\
\frac{S_n - 30}{\sqrt{24}} &\overset{ldm}{\approx} N(0,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Nullhypothese wird abgelehnt falls}\\
\frac{S_n - 30}{\sqrt{24}} &\leq 1.89\\
\Rightarrow \frac{S_n - 30}{\sqrt{24}} &\leq -1.89\\
\text{Annahmebereich: } -1.89 &\leq z \leq 1.89\\
\Leftrightarrow -1.89 \cdot \sqrt{24} + 30 &\leq x \leq 1.89 \cdot \sqrt{24} + 30\\
\Leftrightarrow 20.74 &\leq x \leq 39.26\\
\Leftrightarrow 21 &\leq x \leq 39
\end{aligned}
$$

28.4 Frage 4

Jörn behauptet gegenüber seiner neuen Freundin Bianca, dass mindestens 10% seiner Socken ein Loch haben. Als Bianca nun Jörns Waschmaschine ausräumt, stellt sie fest, dass von den 30 Paar Socken, 4 einzelne Socken ein Loch haben. Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% davon ausgegangen werden, dass Jörn weiß wovon er spricht ?

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Socken mit Loch}\\
S_n &= \sum_{i=1}^{60} X_i \sim B\left(60, p\right)\\
H_0 &: p \geq 0.1\\
H_1 &: p < 0.1\\
\rightarrow \text{Extremster Wert: } p &= 0.1\\
E(S_n) &= 60 \cdot 0.1 = 6\\
\sigma(S_n) &= \sqrt{6 \cdot 0.9} = \sqrt{5.4}\\
\frac{S_n - 6}{\sqrt{5.4}} &\overset{ldm}{\approx} N(0,1)\\
\text{Nullhypothese wird abgelehnt falls}\\
\frac{S_n - 6}{\sqrt{5.4}} &\leq -1.65\\
\Leftrightarrow S_n &\leq -1.65 \cdot \sqrt{5.4} + 6\\
\Leftrightarrow S_n &\leq 2.17\\
\text{d.h. } S_n &\leq 2\\
\text{beobachtetes Ergebnis:}\\
S_n &= 4\\
\text{Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt}
\end{aligned}
$$

Part III

Übungsaufgaben Lineare Algebra

29. Übungsblatt 5

29.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Rechenoperationen.

29.1.1 a

$$\begin{aligned}
3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\cdot 4\\5\cdot 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3+20\\3+5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}23\\8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

29.1.2 b

$$\begin{aligned}
10\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}10\cdot 5\\10\cdot 4\\10\cdot 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\cdot 1\\4\cdot 1\\4\cdot 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}50\\40\\30\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}50+4+3\\40+4+2\\30+0+1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}57\\46\\31\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

29.2 Aufgabe 2

Sind die folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig? Können sie durch Entfernen eines Vektors linear unabhängig gemacht werden?

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier zwei gängige Ansätze:

1. Prüfung über die Determinante: Man bildet aus den Vektoren eine quadratische Matrix A. Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn die Determinante dieser Matrix ungleich null ist ($\det(A) \neq 0$). Ist die Determinante gleich null ($\det(A) = 0$), sind die Vektoren linear abhängig. (Diese Methode ist direkt nur anwendbar, wenn die Anzahl der Vektoren der Dimension des Raumes entspricht, z.B. 2 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$).

2. Prüfung über die Definition der linearen Unabhängigkeit: Eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig, wenn die einzige Lösung der Vektorgleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}$$

die sogenannte triviale Lösung ist, bei der alle Skalare $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleich null sind ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$). Wenn es mindestens eine nicht-triviale Lösung gibt (d. h. mindestens ein $x_i \neq 0$), dann sind die Vektoren linear abhängig.

29.2.1 a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Prüfung für a über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinante der Matrix A berechnen

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} - A_{2,1} \cdot A_{1,2} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 - 1 = -1$$

Da die Determinante ungleich null ist, ist die Linearkombination linear unabhängig.

Prüfung für a über Linearkombination

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\text{in I einsetzen}$$

$$0 + x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem $x_1 = x_2 = 0$ ist, sind die Vektoren linear unabhängig.

29.2.2 b

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es können nur drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sein. Jede Kombination aus mehr als drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig. Daher sind die vier Vektoren linear abhängig.

Um auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, wird ein beliebigen Vektor entfernt. hier wird der vierte Vektor entfernt.

Im schlimmsten Fall kann es passieren, dass vier Linearkombinationen auf lineare Unabhängigkeit prüfen müssen, bis wir eine Linearkombination gefunden wird, welche linear unabhängig ist.

Prüfung für b über Determinante

1. Matrix aus den Vektoren erstellen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determinante der Matrix B berechnen

$$\begin{aligned} \det(B) &= B_{1,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{3,3} + B_{1,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{3,1} + B_{1,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{3,2} \\ &\quad - B_{3,1} \cdot B_{2,2} \cdot B_{1,3} - B_{3,2} \cdot B_{2,3} \cdot B_{1,1} - B_{3,3} \cdot B_{2,1} \cdot B_{1,2} \\ &= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 0 + 1 + 2 - 0 - 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich null ist, kann die Vektormenge durch entfernen des vierten Vektors linear unabhängig gemacht werden.

Prüfung für b über Linearkombination

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 \quad\quad + \ \ x_3 = 0 \quad | - x_3 \Leftrightarrow x_1 = -x_3 \\ \text{III:} & x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 \text{ in III einsetzen} \\ -x_3 + x_2 + x_3 = 0 \\ \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ x_1 \text{ und } x_2 \text{ in I einsetzen} \\ -x_3 + 0 + 2x_3 = 0 \\ \Leftrightarrow -x_3 + 2x_3 = 0 \\ \Leftrightarrow x_3 = 0 \\ x_3 \text{ in II einsetzen} \\ x_1 + 0 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, das heißt, dass die Vektormenge ohne den vierten Vektor linear unabhängig ist.

29.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums

$$V := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension eines Untervektorraums ist die anzahl der Basisvektoren. Um herauszufinden, ob die gegebenen Vektoren eines Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, muss auf lineare unabhängigkeit geprüft werden.

Hier bietet es sich nicht an, dies über die Determinante zu errechnen, da nur quadratische Matzitzen eine Determinante besitzen.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{II:} & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \\ \text{III:} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_1 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ in I einsetzen}$$

$$0 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$

Da $x_1 = x_2 = 0$ ist, ist die Vektormenge linear unabhängig. Diese zwei linear unabhängigen Vektoren spannen den Untervektorraum V auf und bilden somit eine Basis dieses Untervektorraums V. Da diese Basis aus zwei Vektoren besteht, ist die Dimension des Untervektorraums V gleich 2.

30. Übungsblatt 6

30.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

30.1.1 a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
3 2	1
5 4	5
Operation: 3II - 5I	
3 2	1
0 2	10
Operation: I - II	
3 0	-9
0 2	10
Operation: I : 3	
Operation: II : 2	
1 0	-3
0 1	5

$x_1 = -3 \quad x_2 = 5$

30.1.2 b

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad -x_3 = 10 \\ 15x_1 + x_2 \quad -4x_3 = 10 \\ -x_1 \quad -3x_3 = 10 \end{cases}$$

Linearkombination			Konstanten
1	2	-1	10
15	1	-4	10
-1	0	-3	10
Operation: II + 15III			
1	2	-1	10
0	1	-49	160
-1	0	-3	10
Operation: III + I			
1	2	-1	10
0	1	-49	160
0	2	-4	20
Operation: III - 2II			
1	2	-1	10
0	1	-49	160
0	0	94	-300
Operation: III : 94			
1	2	-1	10
0	1	-49	160
0	0	1	$-\frac{150}{47}$
Operation: I + III			
1	2	0	$\frac{320}{47}$
0	1	-49	160
0	0	1	$-\frac{150}{47}$
Operation: II + 49III			
1	2	0	$\frac{320}{47}$
0	1	0	$\frac{170}{47}$
0	0	1	$-\frac{150}{47}$
Operation: I - 2II			
1	0	0	$-\frac{20}{47}$
0	1	0	$\frac{170}{47}$
0	0	1	$-\frac{150}{47}$

$x_1 = -\frac{20}{47} \quad x_2 = \frac{170}{47} \quad x_3 = -\frac{150}{47}$

30.1.3 c

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
$1 \quad -1 \quad -1$	1
$1 \quad 1 \quad -1$	2
Operation: II - I	
$1 \quad -1 \quad -1$	1
$0 \quad 2 \quad 0$	1
Operation: 2I + II	
$2 \quad 0 \quad -2$	3
$0 \quad 2 \quad 0$	1
Operation: I : 2	
Operation: II : 2	
$1 \quad 0 \quad -1$	$\frac{3}{2}$
$0 \quad 1 \quad 0$	$\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 - x_3 = \frac{3}{2}$

$x_3 =: t \quad t \in \mathbb{R}$

$x_1 - t = \frac{3}{2} \quad | + t$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} + t$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + t \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}$ wobei $t \in \mathbb{R}$

30.2 Aufgabe 2

30.2.1 a

Wenn fünf Ochsen und zwei Schafe acht Taels Gold kosten, sowie zwei Ochsen und acht Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines Tieres? (Chiu-Chang Suan-Chu, 300 n.Chr.)

$x_1 :=$ Ochsen $\quad x_2 :=$ Schafe

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 8x_2 = 8 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
$5 \quad 2$	8
$2 \quad 8$	8
Operation: 5II - 2I	
$5 \quad 2$	8
$0 \quad 36$	24
Operation: 36I - 2II	

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.4 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination		**Konstanten**
180	0	240
0	36	24
Operation: I: 180		
Operation: II: 36		
1	0	$\frac{4}{3}$
0	1	$\frac{3}{2}$

30.2.2 b

Ein 9-Tupel $(x1, ..., x9)$ nennt man "magisches Quadrat der Ordnung 3", wenn gilt:

$$\begin{aligned} x1+x2+x3 &= x4+x5+x6 = x7+x8+x9 = x1+x4+x7 \\ &= x2+x5+x8 = x3+x6+x9 = x1+x5+x9 = x3+x5+x7 \end{aligned}$$

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu diesen sieben Bedingungen äquivalent ist, und bestimmen Sie den Lösungsraum in $\mathbb{R}^9$. Wie kann man die Menge der rationalen Lösungen (also der $(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{Q}^9$) beschrieben? Gibt es auch eine Lösung in $\mathbb{Z}^9$? Oder gar in $\mathbb{N}^9$? (siehe J. W. von Goethe 1: Faust. Der Tragödie erster Teil, Hexenküche).

(Diese Aufgaben sind entnommen aus: *Peter Knaber, Wolf P. Barth:* Lineare Algebra. Aufgaben und Lösungen. *Springer Verlag,* 2017. Seite 4.)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5-x_6=0 \\ x_4+x_5+x_6-x_7-x_8-x_9=0 \\ x_7+x_8+x_9-x_1-x_4-x_7=0 \Rightarrow -x_1-x_4+x_8+x_9=0 \\ x_1+x_4+x_7-x_2-x_5-x_8=0 \Rightarrow x_1-x_2+x_4-x_5+x_7-x_8 \\ x_2+x_5+x_8-x_3-x_6-x_9=0 \Rightarrow x_2-x_3+x_5-x_6+x_8-x_9 \\ x_3+x_6+x_9-x_1-x_5-x_9=0 \Rightarrow -x_1+x_3-x_5+x_6 \\ x_1+x_5+x_9-x_3-x_5-x_7=0 \Rightarrow x_1-x_3-x_7+x_9 \end{cases}$$

	Linearkombination								
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	−1	0	0	−1	0	0	0	1	1
IV	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Ziel: erste Spalte bereinigen									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination									
Operation: III + I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: IV - I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	−1	0	1	0	−1	1	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: VI + I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	1	0	−1	0	0	0	−1	0	1
Operation: VII - I									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
III	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Ziel: zweite Spalte bereinigen									
Operation: II und III tauschen									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	−2	−1	2	0	1	1	−1	0
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Operation: IV + 2V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

	Linearkombination								
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	0	−3	2	2	−1	1	1	−2
V	0	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Operation: V - VI									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	0	−3	2	2	−1	1	1	−2
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	1	2	−1	−2	0	0	0	0
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Operation: VI + VII									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	0	−3	2	2	−1	1	1	−2
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	−1	−2	1	1	1	−1	0	1
Operation: VII + II									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
IV	0	0	−3	2	2	−1	1	1	−2
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
Ziel: dritte Spalte bereinigen									
Operation: III und VII tauschen									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
IV	0	0	−3	2	2	−1	1	1	−2
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: IV - V									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

	Linearkombination								
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	−3	1	3	−1	0	1	−1
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: V - 3III									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	−1	−1	0	0	−1	1	2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	4	3	−1	3	−2	−7
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: III · (-1)									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	4	3	−1	3	−2	−7
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Ziel: vierte Spalte bereinigen									
Operation: V - 4VII									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	0	−1	−5	7	2	−3
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
Operation: VII - IV									
I	1	1	1	−1	−1	−1	0	0	0
II	0	1	1	−2	−1	−1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	−1	−2
IV	0	0	0	1	−1	0	1	0	−1
V	0	0	0	0	−1	−5	7	2	−3
VI	0	0	0	0	−1	1	−1	0	1
VII	0	0	0	0	2	1	−2	−1	0
Ziel: fünfte Spalte bereinigen									
Operation: 2VI + VII									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

	Linearkombination								
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
VI	0	0	0	0	-1	1	-1	0	1
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: VI - V									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	-1	-5	7	2	-3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Operation: V · (-1)									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	3	-4	-1	2
Ziel: sechste Spalte bereinigen									
Operation: 2VII - VI									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	6	-8	-2	4
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Operation: VI : 6									
I	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0
II	0	1	1	-2	-1	-1	0	1	1
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1
V	0	0	0	0	1	5	-7	-2	3
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Die siebte Zeile (VII) besteht ausschließlich aus nullen. Das bedeutet, dass die ursprüngliche siebte Gleichung von den anderen linear abhängig war und keine neuen Informationen liefert. Diese Zeile wird daher im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -7 & -2 & 3 \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Ziel: Einträge in Spalte sechs oberhalb des Pivots eleminieren
Operation: V - 5VI
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Operation: II + VI
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Operation: I + VI
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Ziel: Einträge in Spalte fünf oberhalb des Pivots eleminieren
Operation: IV + V
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Operation: II + V
$\begin{array}{cccccccccc} I & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ II & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ III & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ IV & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ VI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$
Operation: I + V

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
III	0	0	1	1	0	0	1	-1	-2
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte vier oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: III - IV									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	-2	0	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: II + 2IV									
I	1	1	1	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I + IV									
I	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
II	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte drei oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: II - III									
I	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Operation: I - III									
I	1	1	0	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ziel: Einträge in Spalte zwei oberhalb des Pivots eleminieren									
Operation: I - II									

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 30.5 – *Fortführung von vorherier Seite*

	Linearkombination								
I	1	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	0	1	0	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
III	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
IV	0	0	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
V	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
VI	0	0	0	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Hierraus lässt sich jetzt Schließen, dass

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{2}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9,\\
x_2 - \frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9,\\
x_3 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{2}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9,\\
x_4 + \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{4}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_4 = -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9,\\
x_5 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_5 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9,\\
x_6 - \frac{4}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 = 0 &\Leftrightarrow x_6 = \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{1}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 + \frac{1}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_8 - \frac{2}{3}x_9 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_7 \\ \frac{2}{3}x_7 \\ -\frac{1}{3}x_7 \\ -\frac{2}{3}x_7 \\ \frac{1}{3}x_7 \\ \frac{4}{3}x_7 \\ 1x_7 \\ 0x_7 \\ 0x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_8 \\ -\frac{1}{3}x_8 \\ \frac{2}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ \frac{1}{3}x_8 \\ 0x_8 \\ 1x_8 \\ 0x_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{2}{3}x_9 \\ \frac{4}{3}x_9 \\ \frac{1}{3}x_9 \\ -\frac{2}{3}x_9 \\ 0x_9 \\ 0x_9 \\ 1x_9 \end{pmatrix}$$

$$= x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}$

Der Lösungsraum des Tupels in $\mathbb{R}^9$ ist also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Menge der Rationalen Lösungen kann eingach beschrieben werden also

$$L = \left\{ x_7 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Um eine Lösung in $\mathbb{Z}^9$ zu erhalten kann sichergestellt werden, dass alle Komponenten ein vielfaches von drei sind. Hierfür kann beispielsweise die hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dass $x_7 = 3a, x_8 = 3b, x_9 = 3c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aufgestellt werden.

Man wähle beispielsweise $a = 1, b = 1, c = 1$, so erhält an das magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dieses ist auch eine Lösung für ein magisches Quadrat aus $\mathbb{N}^9$.

30.3 Aufgabe 3

Schreiben Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus in Pseudocode auf.

```
def gauss_jordan(matrix: list[list[float]], constants: list[list[float]] | None) -> list[list[float]]:
  n = len(matrix)
  m = len(matrix[0])
  i = 0

  while i < n and i < m:
    pivot_zeile = i

    for zeile in range(i + 1, n): # beste Zeile zum tauschen finden
      if abs(matrix[zeile][i]) > abs(matrix[pivot_zeile][i]):
        pivot_zeile = zeile

    if pivot_zeile != i: # Zeilen ggf. tauschen
      matrix[i], matrix[pivot_zeile] = matrix[pivot_zeile], matrix[i]
      if constants:
        constants[i], constants[pivot_zeile] = constants[pivot_zeile], constants[i]

    if matrix[i][i] == 0:
      i += 1
      continue # Es gab keinen geeigneten Tauschkanidat. Eleminierung wird uebersprungen.

    pivot_wert = matrix[i][i]
    for k_norm in range(i, m):
      matrix[i][k_norm] = matrix[i][k_norm] / pivot_wert
    if constants and i < len(constants) and constants[i] is not None:
      for c_col in range(len(constants[i])):
        constants[i][c_col] = constants[i][c_col] / pivot_wert

    for j in range(0, i): # Nullen oberhalb
        factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
        for k in range(i, m):
            matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * factor
        if constants and len(constants[0]) > 0:
```

```
            num_const_cols = len(constants[0])
            for c_col in range(num_const_cols):
                constants[j][c_col] = constants[j][c_col] - constants[i][c_col] * factor

    for j in range(i + 1, n): # Nullen unterhalb
        factor = matrix[j][i] / matrix[i][i]
        for k in range(i, m):
            matrix[j][k] = matrix[j][k] - matrix[i][k] * factor
        if constants and len(constants[0]) > 0:
            num_const_cols = len(constants[0])
            for c_col in range(num_const_cols):
                constants[j][c_col] = constants[j][c_col] - constants[i][c_col] * factor

    i += 1

  return matrix, constants
```

31. Übungsblatt 7

31.1 Aufgabe 1

31.1.1 a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \\ -1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 + 7 \cdot 1 & -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}$$

31.1.2 b

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 36 \end{pmatrix}$$

31.1.3 c

$$A \cdot w$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 15 + 17 \cdot 50 + 24 \cdot 36 \\ 9 \cdot 15 + 32 \cdot 50 + 6 \cdot 36 \\ -5 \cdot 15 - 1 \cdot 50 + 47 \cdot 36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1804 \\ 1951 \\ 1567 \end{pmatrix}$$

31.2 Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit:

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \varphi(u_2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \varphi(u_3) = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}$$

31.2.1 a

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Prüfen auf lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 &= 0\\
\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\2x_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\-x_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\begin{cases}\text{I:} & x_1 + x_2 = 0\\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 0\\ \text{III:} & x_3 = 0\end{cases}\\
&\text{I} = \text{II}\\
x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 \quad &|- x_1 \quad |+ x_2\\
&\Leftrightarrow 2x_2 = x_1\\
&\Leftrightarrow x_1 = 2x_2\\
&\text{in I einsetzen}\\
&2x_2 + x_2 = 0\\
&\Leftrightarrow 3x_2 = 0 \quad |:3\\
&\Leftrightarrow x_2 = 0\\
&x_1 = 2 \cdot 0\\
&\Leftrightarrow x_1 = 0
\end{aligned}$$

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Das bedeutet, dass die Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig sind. Dementsprechend bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$

31.2.2 b

Berechnen Sie $\varphi(u_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 = 4 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II} \begin{cases} \text{I:} & 3x_1 = 6 \quad | : 3 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ \text{II:} & 2x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III:} & x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{in II einsetzen} \\ &2 \cdot 2 - x_2 = 2 \\ \Leftrightarrow 4 - x_2 = 2 \quad | - 4 \quad &| \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

u_4 ist linear abhängig zu den Vektoren $\{u_1, u_2, u_3\}$ mit den Faktor 2.

$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3 &= u_4 \\ \varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3) &= \varphi(u_4) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \\ = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} &= \varphi(u_4) \end{aligned}$$

31.2.3 c

Geben Sie einen Vektor u_5 an, mit $\varphi(u_5) = w$.

$$\begin{aligned} \varphi(u_5) &= x_1 \cdot \varphi(u_1) + x_2 \cdot \varphi(u_2) + x_3 \cdot \varphi(u_3) \\ \varphi(u_5) &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_2 + 2x_3 = 2 \\ \text{II:} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ \text{III:} & 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Linearkombination	Konstanten
0 1 2	2
1 2 −1	3
0 3 7	5
Operation: I und II tauschen	
1 2 −1	3
0 1 2	2
0 3 7	5
Operation: III - 3II	
1 2 −1	3
0 1 2	2
0 0 1	−1
Operation: II - 2III	
1 2 −1	3
0 1 0	4
0 0 1	−1
Operation: I + III	
1 2 0	2
0 1 0	4
0 0 1	−1
Operation: I - 2II	
1 0 0	−6
0 1 0	4
0 0 1	−1

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1$$

$$\begin{aligned} u_5 = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = u_5 \end{aligned}$$

31.2.4 d

Geben Sie die lineare Abbildung φ in der Form $\varphi(x) = Ax$ an.

$$c_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} + c_{2,1} = 1 \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,1} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,1} - c_{2,1} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,1} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,1} = 0 \quad | + c_{2,1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = c_{2,1} \\ \text{III:} & c_{3,1} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} + c_{2,2} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,2} = 1 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2c_{1,2} - c_{2,2} = 1 \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,2} = \frac{1}{3} \\ \text{II:} & 2 \cdot \frac{1}{3} - c_{2,2} = 1 \quad | + c_{2,2} \quad | - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = c_{2,2} \\ \text{III:} & c_{3,2} = 0 \end{cases}$$

$$c_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{2,3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} + c_{2,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 3c_{1,3} = 0 \quad | : 3 \Leftrightarrow c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2c_{1,3} - c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{in II einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & c_{1,3} = 0 \\ \text{II:} & 2 \cdot 0 - c_{2,3} = 0 \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow c_{2,3} = 0 \\ \text{III:} & c_{3,3} = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) + \frac{2}{3}\varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_1) - \frac{1}{3} \cdot \varphi(u_2)$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(u_3)$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

31.3 Aufgabe 3

31.3.1 a

Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deren Kern nur den Nullvektor enthält. Bestimmen Sie weiterhin eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deren Kern der gesamte Raum $\mathbb{R}^3$ ist.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

31.3.2 b

Bestimmen Sie Bild und Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild

$$\begin{aligned} n &= \dim(Bild(A)) + \dim(Kern(A)) \\ 3 &= \dim(Bild(A)) + 1 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow 2 &= \dim(Bild(A)) \end{aligned}$$

Kern

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{III} + \text{II}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{in I einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 = 0 \quad | - x_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{in I einsetzen}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 2 \cdot -x_2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \text{II:} & x_1 = -x_2 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

31.4 Aufgabe 4

31.4.1 a

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch: $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass T invertierbar ist, und geben Sie eine Formel für T^{-1} an.

Prüfen, ob Matrix invertierbar ist

Dass eine Matrix invertierbar ist, muss sie linear unabhängig sein. $\to \det(T) \neq 0$.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 3$$

$$-2 \cdot -1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Die Matrix ist nicht invertierbar.

31.4.2 b

Bestimmen Sie die inverse Matrix für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob Matrix invertierbar ist

$$
\begin{aligned}
\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 2 \cdot -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot -1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \\
&- -1 \cdot -1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \\
&= -2 + 0 + 6 - 3 - 0 - 2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Die Matrix ist invertierbar.

Matrix	**Einheitsmatrix**
$\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: II + III	
$\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: I + III	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Operation: III + I	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$
Operation: III - 6II	
$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: I - 4II	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: II + III	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -6 & -4 \end{matrix}$
Operation: III · (-1)	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{matrix}$

Die Inverse der Matrix ist also $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

32. Übungsblatt 8

32.1 Aufgabe 1

32.1.1 a

Bestimmen Sie Skalarprodukt und Kreuzprodukt der Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} &\langle e_1, e_2 \rangle \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} &e_1 \times e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

32.1.2 b

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei $e_i \in \mathbb{R}^n (i \in \{1, \ldots, n\})$ der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $\langle v, e_i \rangle$ und (für den Fall $n = 3$) $v \times e_i$.

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} &\langle v, e_1 \rangle \\ &= v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 \\ &= v_1 \end{aligned}$$

allgemein

$$\begin{aligned} &\langle v, e_i \rangle \\ = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \cdots + v_n \cdot e_i \\ = v_i \end{aligned}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} &v \times e_1 \\ = &\begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 1 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v \times e_2 \\ = &\begin{pmatrix} v_2 \cdot 0 - v_3 \cdot 1 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 0 \\ v_1 \cdot 1 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v \times e_3 \\ = &\begin{pmatrix} v_2 \cdot 1 - v_3 \cdot 0 \\ v_3 \cdot 0 - v_1 \cdot 1 \\ v_1 \cdot 0 - v_2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

32.1.3 c

Bestimmen Sie einen Vektor, der auf der von $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren steht orthogonal auf der von diesen Vektoren aufgespannten Ebene.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 - 9 \cdot 2 \\ 9 \cdot 1 - 5 \cdot 10 \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 18 \\ 9 - 50 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -41 \\ 9 \end{pmatrix}$$

32.2 Aufgabe 2

32.2.1 a

Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $det(A)$

1. mittels der Saurrus-Regel
2. mittels der Leibniz-Formel
3. mittels der Kästchenregel

Saurrus Regel

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 6 & 17 & 24 & 6 & 17 \\ 9 & 32 & 6 & 9 & 32 \\ -5 & -1 & 47 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Die Zahlen an den Linien werden Multipliziert. Blaue Linien werden miteinander addiert und Rote subtrahiert.

$$\begin{aligned} &6 \cdot 32 \cdot 47 + 17 \cdot 6 \cdot -5 + 24 \cdot 9 \cdot -1 \\ &- -5 \cdot 32 \cdot 24 - -1 \cdot 6 \cdot 6 - 47 \cdot 9 \cdot 17 \\ &= 4983 \end{aligned}$$

Leibniz-Formel

Muss ich nachher machen

Kästchenregel

Linearkombination
$\begin{matrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ -5 & -1 & 47 \end{matrix}$
Operation: III + $\frac{5}{6}$I
$\begin{matrix} 6 & 17 & 24 \\ 9 & 32 & 6 \\ 0 & \frac{79}{6} & 67 \end{matrix}$
Operation: II - $\frac{3}{2}$I

Fortsetzung siehe nächste Seite

Table 32.1 – *Fortführung von vorherier Seite*

Linearkombination
$\begin{matrix} 6 & 17 & 24 \\ 0 & \frac{13}{2} & -30 \\ 0 & \frac{79}{6} & 67 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} & 6 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -30 \\ \frac{79}{6} & 67 \end{pmatrix}\right) \\ &= 6 \cdot \frac{13}{2} \cdot 67 - \frac{79}{6} \cdot -30 \\ &= 4983 \end{aligned}$$

32.2.2 b

Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $det(B)$

Linearkombination
$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$
I und IV tauschen
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$
IV - 2I
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$
IV + II
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{matrix}$
III + 2II
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{matrix}$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. Die Determinante ist $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

$$\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}} & & 1 & 1 \\ & & 7 & -2 \\ \hline \det(A) & & & \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{array}{cc} 15 & 1 \\ 9 & -2 \end{array}} & \\ 0 & 0 & & \\ & & \det(D) & \end{array}$$

$$\det(B) = \underbrace{(1 \cdot 0 - 1 \cdot -1)}_{\det(A)} \cdot \underbrace{(15 \cdot -2 - 9 \cdot 1)}_{\det(D)} = (0-1) \cdot (-30-9) = -1 \cdot -39 = 39$$

32.2.3 c

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie ohne Rechung $det(C)$.

Die Matrix ist Linear abhängig. Daher ist die Determinante $= 0$.

32.3 Aufgabe 3

32.3.1 a

Prüfen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

$$det\left(\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 9 + 4 \cdot 1 \cdot 3$$
$$-9 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 10 + 36 + 12 - 72 - 60 - 1$$
$$= -75$$

32.3.2 b

Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ = 2 + 0 + 0 - 8 - 0 - 0 \\ = -6 \end{aligned}$$

Da die Matrix Linear unabhängig ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

33. Übungsblatt 9

33.1 Aufgabe 1

33.1.1 a

Seien die Geraden G_1 und G_2 definiert durch:

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie liegen G_1 und G_2 zueinander im Raum? Bestimmen Sie, je nach Lage, Schnittpunkt oder Abstand der beiden Geraden.

Da beide Vektoren die selben Richtungsvektoren besitzen, sind sie entweder echt parallel oder identisch. Um zu prüfen, ob die beiden Vektoren Identisch sind, muss das Gleichungssystem $G_1 = G_2 + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 = 3 + \mu \quad | -3 \Leftrightarrow -2 = \mu \\ \text{II:} & 2 = 3 + \mu \quad | -3 \Leftrightarrow -1 = \mu \\ \text{III:} & 3 = 3 + \mu \quad | -3 \Leftrightarrow 0 = \mu \end{cases}$$

Da das resultierende Gleichungssystem nicht lösbar ist, sind die Vektoren nicht identisch. Nun muss geprüft werden, ob sie echt parallel zueinander stehen. Hierfür muss der Abstand d der Vektoren $G_1 : r = p_1 + \lambda u$ und $G_2 : r = p_2 + \mu u$ bestimmt werden, welcher sich über die Formel $d = \frac{|(p_2 - p_1) \times u|}{|u|}$ berechnen lässt.

$$d = \frac{|(p_2 - p_1) \times u|}{|u|}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{2}$$

Der Abstand zwischen den beiden Vektoren beträgt $\sqrt{2}$. Das bedeutet, dass diese echt parallel zueinander sind.

33.1.2 b

Es sei E definiert durch:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Geben Sie E in Normalenform an.

Nicht Klausurrelevant?

33.2 Aufgabe 2 - nicht klausurrelevant?

33.2.1 a

Sei $v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $G := \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie die Projektion v_w von v auf die von w aufgespannte Gerade G. Bestimmen Sie weiterhin die Matrix, die die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^3 \to G, a \mapsto aw$ dastellt. Was ist der Rang dieser Matrix? Was ist ihr Kern? Was ihr Bild?

33.2.2 b

(Transferfrage) Sei $E := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie kann man die orthogonale Projektion von v auf E bestimmen? Welcher Vektor kommt dabei heraus?

33.3 Aufgabe 3

33.3.1 a

Sei $D_\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die jeden Vektor aus $\mathbb{R}^2$ um π dreht. Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sellen Sie die Matrix zu D_π auf und bestimmen Sie $D_\pi(v)$. Bestimmen Sie $\langle v, D_\pi(v) \rangle$.

Die 2x2 Matrix zur Drehung ist $D_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Die Drehmatrix, welche um π dreht, ist somit $D_\pi = \begin{pmatrix} cos(\pi) & -sin(\pi) \\ sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} & D_\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle v, D_\pi(v) \rangle \\ = & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ = & 1 \cdot -1 + 2 \cdot -2 \\ = & -1 + (-4) \\ = & -5 \end{aligned}$$

33.3.2 b

Sei $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung, die den Vektor $(1,0,0)^t$ auf den Vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ abbildet. Bestimmen Sie die Drehmatrix, die D darstellt.

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1\\c_1\\c_1\end{pmatrix}$$

Erste Bedingung an c_2

$$\langle c_1, c_2\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Zweite Bedingung an c_2

$$|c_2| = 1$$

$$\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Wähle $x_3 = 0$

In erste Bedingung einsetzen

$$x_1 + x_2 + 0 = 0 \quad | - x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

In zweite Bedingung einsetzen

$$x_1^2 + (-x_1^2) + 0^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_1^2 = 1$$

$$2x_1^2 = 1 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = \frac{1}{2} \quad |\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -x_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = c_1 \times c_2$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

33.3.3 c

Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Bestimmen Sie für die Drehmatrix $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $A_{3,\varphi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (Drehung um die x_3-Achse) die Determinante. Bestimmen Sie weiterhin das Produkt $A_\varphi^t A_\varphi^t$ bzw. $A_{3,\varphi}^t A_{3,\varphi}$. Was ist also die Inverse A_φ^{-1} bzw. $A_{3,\varphi}^{-1}$?

34. Übungsblatt 10

34.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte der folgenden Matrizen:

34.1.1 a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \cdot I$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =: A_\lambda$$
$$\det(A_\lambda) = (1-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (-\lambda)$$
$$+2 \cdot 6 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot (5-\lambda) \cdot 3$$
$$-0 \cdot 6 \cdot (1-\lambda) - (-\lambda) \cdot 4 \cdot 2$$
$$= (5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2) \cdot (-\lambda) + 0$$
$$+0 - 0 - 0 + 4\lambda \cdot 2$$
$$= -5\lambda + \lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 8\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda$$
$$\lambda \text{ Ausklammern}$$
$$\lambda(-\lambda^2 + 6\lambda + 3)$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 6\lambda + 3) = 0$$
$$\text{Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor gleich null ist}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{Oder} \\ -\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$-\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \quad |\text{PQ-Formel}$$

$$p = 6 \quad q = -3$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3}$$

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{(3)^2 + 3}$$

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 + 3}$$

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{12}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{12}, \quad \lambda_3 = 3 - \sqrt{12}$$

34.1.2 b

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - \lambda \cdot I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =: B_\lambda$$

$$\begin{aligned} \det(B_\lambda) &= (1-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (1-\lambda) \\ &+1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (1-\lambda) \cdot 1 \\ &-1 \cdot 1 \cdot (1-\lambda) - (1-\lambda) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= (1 - \lambda - \lambda + \lambda^2) \cdot (1-\lambda) + 1 \\ &+1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2) \cdot (1-\lambda) + 2 - 3(1-\lambda) \\ &= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 3 + 3\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 \end{aligned}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$$

$$\lambda \text{ Ausklammern}$$
$$\lambda(-\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist.

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{Oder} \\ -\lambda^2 + 3\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda \text{ Ausklammern}$$
$$\lambda(\lambda + 3) = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist.

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{Oder} \\ \lambda + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_3 + 3 = 0 \quad | -3$$
$$\lambda_3 = -3$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -3$$

34.1.3 c

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & C - \lambda \cdot I \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - & \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} & =: C_\lambda \\ \det(C_\lambda) = -\lambda \cdot -\lambda \cdot -\lambda & \\ = -\lambda^3 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda^3 = 0 \quad & | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow \lambda^3 = 0 \quad & | \sqrt[3]{0} \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2,3} = 0 & \end{aligned}$$

34.1.4 d

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D - \lambda \cdot I \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} =: D_\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(D_\lambda) &= -\lambda \cdot (3 - \lambda) - 2 \cdot 1 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \quad |PQ \\
p = -3 \quad q = -2 \\
-\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2} \\
\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right) + 2} \\
\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}} \\
\lambda_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}
\end{aligned}$$

34.2 Aufgabe 2

34.2.1 a

Ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ positiv definit?

$$\begin{aligned}
\det(\Delta_1) &= 1 \\
\det(\Delta_2) &= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3
\end{aligned}$$

Die Determinante des dritten Hauptminoren ist hier uninteressant, da die Vorzeichenfolge für positive definitheit durch den zweiten Hauptminoren bereits verletzt wurde. Die Matrix ist *nicht* positiv definit, sondern Indefinit.

34.2.2 b

Wie kann man das Hauptminorenkriterium nutzen, um zu zeigen, dass eine Matrix negativ definit ist? Nutzen Sie Ihr Ergebnis, um zu zeigen, dass die Matrix $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (negativ definit ist??)

$$\begin{aligned} \det(\Delta_1) &= -1 \\ \det(\Delta_2) &= -1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Die Matrix ist negativ definit.

34.3 Aufgabe 3

34.3.1 a

Für welche Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ hat eine Drehmatrix $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ reele Eigenwerte? Lösen Sie diese Aufgabe einerseits durch geometrische Argumentation, andererseits rechnerisch.

Geometrische Argumentation

Drehmatritzen mit gerader Dimension haben keine reellen Eigenwerte. Aus diesem Grund hat nur die Drehmatrix, welche um den Winkel 0 dreht (also gar nicht dreht) reele Eigenwerte.

Rechnerisch

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \lambda_{1,2} = 1 \\ \det\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) &= 0 \\ (\cos(\varphi) - \lambda) \cdot (\cos(\varphi) - \lambda) - \sin(\varphi) \cdot - \sin(\varphi) &= 0 \\ \cos(\varphi)^2 - \cos(\varphi) \cdot \lambda - \cos(\varphi) \cdot \lambda + \lambda^2 + \sin(\varphi)^2 &= 0 \\ \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 - 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \lambda + \lambda^2 &= 0 \\ 1 - 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \lambda + \lambda^2 &= 0 \quad |PQ \\ p = -2 \cdot \cos(\varphi), \quad q &= 1 \\ -\frac{-2 \cdot \cos(\varphi)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2 \cdot \cos(\varphi)}{2}\right)^2 - 1} \\ \cos(\varphi) \pm \sqrt{(-\cos(\varphi))^2 - 1} \\ \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos(\varphi)^2 - 1} \\ \cos(\varphi) \pm \sqrt{-\sin(\varphi)^2} \\ \text{Aus negativen Zahlen kann die Wurzel nicht gezogen werden.} \\ \text{Für alle } \varphi \neq 0 \text{ Gibt es keine reellen lösungen.} \end{aligned}$$

34.3.2 b

Bestimmen Sie mindestens eine Matrix, die in $O(n)\backslash SO(n)$ enthalten ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

35. Übungsblatt 11

35.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils sämtliche Eigenvektoren der folgenden Matzitzen. Hinweis: Die Eigenwerte haben Sie bereits auf dem letzten Übungsblatt bestimmt:

35.1.1 a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{12}, \quad \lambda_3 = 3 - \sqrt{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Für } \lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 2 & 3 \\ 4 & 5-0 & 6 \\ 0 & 0 & 0-0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0 \\ \text{II:} & 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 0 \\ \text{III:} & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ \text{III:} & 0 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination

1	2	3
4	5	6
II - 2I		
1	2	3
2	1	0
I - 2II		
-3	0	3
2	1	0
I : (-3)		
1	0	-1
2	1	0
II - 2I		
1	0	-1
0	1	-2

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 - x_3 = 0 \quad | + x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_3 \\ \text{II:} & x_2 - 2x_3 = 0 \quad | + 2x_3 \Leftrightarrow x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$x_3 = t, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Für } \lambda_2 = 3 + \sqrt{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(3+\sqrt{12}) & 2 & 3 \\ 4 & 5-(3+\sqrt{12}) & 6 \\ 0 & 0 & 0-(3+\sqrt{12}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3-\sqrt{12} & 2 & 3 \\ 4 & 5-3-\sqrt{12} & 6 \\ 0 & 0 & 0-3-\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{12} & 2 & 3 \\ 4 & 2-\sqrt{12} & 6 \\ 0 & 0 & -3-\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{12} & 2 & 3 \\ 4 & 2-\sqrt{12} & 6 \\ 0 & 0 & -3-\sqrt{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & (-2-\sqrt{12})x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & 4x_1 + (2-\sqrt{12})x_2 + 6x_3 = 0 \\ \text{III:} & 0x_1 + 0x_2 + (-3-\sqrt{12})x_3 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination		
$-2-\sqrt{12}$	2	3
4	$2-\sqrt{12}$	6
0	0	$-3-\sqrt{12}$
III : (-3 - $\sqrt{12}$)		
$-2-\sqrt{12}$	2	3
4	$2-\sqrt{12}$	6
0	0	1
(-2 - $\sqrt{12}$)II - 4I		
$-2-\sqrt{12}$	2	3
0	0	$-24-12\sqrt{3}$
0	0	1
II - $(-24-12\sqrt{3})$III		
$-2-\sqrt{12}$	2	3
0	0	0
0	0	1
I - 3III		
$-2-\sqrt{12}$	2	0
0	0	0
0	0	1
I : (-2 - $\sqrt{12}$)		
1	$\frac{2}{-2-\sqrt{12}}$	0
0	0	0
0	0	1

$$x_2 = t,\ \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + \frac{2}{-2-\sqrt{12}}t = 0 \quad | - \frac{2}{-2-\sqrt{12}}t \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{-2-\sqrt{12}}t \\ \text{II:} & 0 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{-2-\sqrt{12}}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{-2-\sqrt{12}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{-2-\sqrt{12}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für $\lambda_3 = 3 - \sqrt{12}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(3-\sqrt{12}) & 2 & 3 \\ 4 & 5-(3-\sqrt{12}) & 6 \\ 0 & 0 & 0-(3-\sqrt{12}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{12} & 2 & 3 \\ 4 & 2+\sqrt{12} & 6 \\ 0 & 0 & -3+\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{12} & 2 & 3 \\ 4 & 2+\sqrt{12} & 6 \\ 0 & 0 & -3+\sqrt{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & (-2+\sqrt{12})x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II:} & 4x_1 + (2+\sqrt{12})x_2 + 6x_3 = 0 \\ \text{III:} & (-3+\sqrt{12})x_3 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination

$-2+\sqrt{12}$	2	3
4	$2+\sqrt{12}$	6
0	0	$-3+\sqrt{12}$
III : (-3 + $\sqrt{12}$)		
$-2+\sqrt{12}$	2	3
4	$2+\sqrt{12}$	6
0	0	1
I - 3III		
II - 6III		
$-2+\sqrt{12}$	2	0
4	$2+\sqrt{12}$	0
0	0	1
(-2 + $\sqrt{12}$)II - 4I		
$-2+\sqrt{12}$	2	0
0	0	0
0	0	1
I : (-2 + $\sqrt{12}$)		
1	$\frac{2}{-2+\sqrt{12}}$	0
0	0	0
0	0	1

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + \frac{2}{-2+\sqrt{12}} x_2 = 0 \quad | - \frac{2}{-2+\sqrt{12}} x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} x_2 \\ \text{II:} & 0 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = t \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{-2+\sqrt{12}} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{-2+\sqrt{12}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$span \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{-2+\sqrt{12}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

35.1.2 b

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -3$$

$$\text{Für } \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{III:} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination

1	1	1
1	1	1
1	1	1
II - I		
1	1	1
0	0	0
1	1	1
III - I		
1	1	1
0	0	0
0	0	0

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad | - x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \\ \text{II:} & 0 = 0 \\ \text{III:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = t \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

$$x_3 = p \text{ wobei } p \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -t-p \\ t \\ p \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} -1-p \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Für $\lambda_3 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1--3 & 1 & 1 \\ 1 & 1--3 & 1 \\ 1 & 1 & 1--3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{II:} & x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ \text{III:} & x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}$
II - III
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}$
4III - I
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -15 \end{matrix}$
III + II
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -18 \end{matrix}$
II : 3
III : -18
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II + III
$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I - III
$\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II - III
$\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
I : 4
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 = 0 \\ \text{II:} & x_2 = 0 \\ \text{III:} & x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

35.1.3 c

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$$\text{Für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & 0 = 0 \\ \text{II:} & 0 = 0 \\ \text{III:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = t \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = p \text{ wobei } p \in \mathbb{R}$$

$$x_3 = u \text{ wobei } u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ p \\ u \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

35.1.4 d

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\text{Für } \lambda_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{17}{4}}\right) & 1 \\ 2 & 3-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{17}{4}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} & 1 \\ 2 & 3-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}x_1 + x_2 = 0 \\ \text{II:} & 2x_1 + \frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}x_2 = 0 \end{cases}$$

Linearkombination	
$-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}$	1
2	$\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}$
$(-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}})$II - 2I	
$-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}$	1
0	0

$$\begin{cases} \text{I:} & -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}x_1 + x_2 = 0 \quad -x_2 \\ \text{II:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}x_1 = -x_2 \quad -x_2 \\ \text{II:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = t \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}} \\ t \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Für } \lambda_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0-(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}) & 1 \\ 2 & 3-(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} & 1 \\ 2 & 3-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix}$$

Linearkombination

$-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$	1
2	$\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$
$(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}})$II - 2I	
$-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$	1
0	0

$$\begin{cases} \text{I:} & -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}x_1 + x_2 = 0 \quad -x_2 \\ \text{II:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I:} & -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}x_1 = -x_2 \quad -x_2 \\ \text{II:} & 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = t \text{ wobei } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \\ t \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$span = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Part IV

Übungsaufgaben Stochastik

36. Übungsblatt 5

36.1 Aufgabe 1

36.1.1 a

Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit der rechten Hand eine zwei zu zeigen (also zwei Finger ausgestreckt, die andere eingeklappt zu lassen)? (Anatomisch schwierige Kombinationen und Verrenkungen werden mitgezählt!)

$$\begin{aligned} &\frac{5!}{2!(5-2)!} \\ &= \frac{5!}{2!3!} \\ &= \frac{120}{2*6} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Es gibt 10 Möglichkeiten, eine zwei mit einer Hand zu zeigen.

36.1.2 b

Wie viele Möglichkeiten gibt es, irgendeine Zahl zwischen 0 und 5 mit einer Hand zu zeigen? (Auch hier: missverständliche Handzeichen und Verrenkungen werden mitgezählt)

$$\begin{aligned} &\frac{5!}{0!(5-0)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{5!}{2!(2-5)!} \\ &+ \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!} \\ &= 32 \end{aligned}$$

36.2 Aufgabe 2

Eine Freundin hat Ihnen zum Geburtstag sämtliche Buchstaben Ihres Vor- und Nachnamens aus Beton gegossen. Wie (unterscheidbare) viele Wörter können Sie damit bilden, ohne Buchstaben wegzulassen? Wie viele davon enthalten Ihren Vornamen?

Mit Vorname mit 4 unterschiedlichen und Nachname mit 6 unterschiedlichen Buchstaben (Alle sind unterschiedlich):

$$(4 + 6)! = 3628800$$

36.3 Aufgabe 3

Sie werfen eine (faire) Münze dreimal.

36.3.1 a

Was ist ein passender Ereignisraum Ω?

Ein passender Ereignisraum listet alle 8 möglichen, geordneten Ergebnisse auf. Wir kürzen Kopf mit K und Zahl mit Z ab.

$$\Omega = \{\text{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ}\}$$

36.3.2 b

Wie viele Elemente hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$?

Die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) des Ereignisraums beträgt $|\Omega| = 8$. Die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist 2 hoch die Mächtigkeit von Ω.

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^8 = 256$$

Die Potenzmenge hat somit 256 Elemente.

36.3.3 c

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dreimal dasselbe Ergebnis erziehlen?

$$\frac{1}{2}^3 + \frac{1}{2}^3$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

37. Übungsblatt 6

37.1 Aufgabe 1

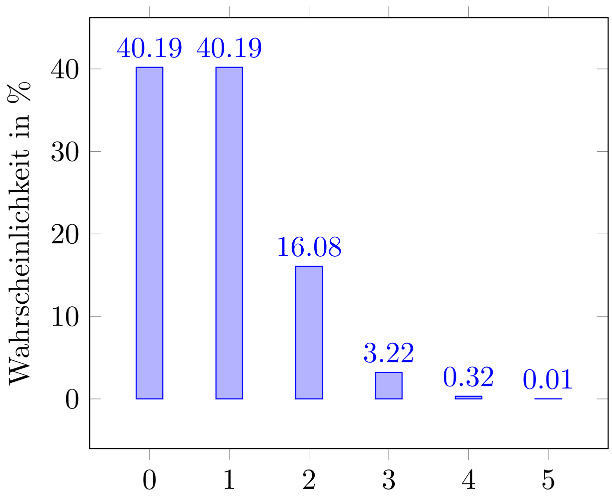
37.1.1 a

In der Vorlesung wurde behauptet, dass die Binomalverteilung viel mit der Bernouilli-Verteilung zu tun hat. Sortieren Sie für sich selbst: wie hängen die beiden genau zusammen?

Die Bernouilli-Verteilung ist ein einmaliger Zufallsversuch, die Binomialverteilung betrachtet n Zufallsversuche

37.1.2 b

Zeichnen Sie das Stäbchendiagramm zu $B(5, \frac{1}{6})$



37.2 Aufgabe 2

37.2.1 a

Sie haben Geburtstag und Ihr Lieblingsonkel liebt seltsame Geschenke. Als Teil seines Geburtstagsgeschenks sollen Sie ein Spiel mit ihm spielen: sie müssen 10 Mal mit einem 12-seitigen Würfel würfeln. Würfeln Sie dabei mindestens 2 Mal den Monat Ihres Geburtstags, dann schenkt Ihr Onkel Ihnen ein neues Fahrrad. Wenn nicht, schenkt er Ihnen eine Tafel Schokolade. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie ein Fahrrad bekommen?

$$X = \text{"Anzahl gewürfelter Geburtsmonate"}$$
$$X \sim B(n,p)$$
$$X \sim B\left(10, \frac{1}{12}\right)$$
$$P(X) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$P(X \geq 2) = 1 - \begin{pmatrix} \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{10-0} \\ + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{10-1} \end{pmatrix}$$
$$P(X \geq 2) \approx 1 - \begin{pmatrix} 0.4189 \\ + 0.3808 \end{pmatrix}$$
$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0.7997$$
$$P(X \geq 2) \approx 0.2003$$
$$P(X \geq 2) \approx 20.03\%$$

37.2.2 b

In einer Pralinenschachtel sind 8 mit Marzipan und 8 mit Nougat gefüllte Pralinen, die von außen gleich aussehen, zufällig angeordnet. Sie entnehmen und verspeisen 5 Pralinen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 5 Pralinen mit Marzipan gefüllt sind?

$$X = \text{"verspeisten pralinen mit Marzipan"}$$
$$X \sim H(N, M, n)$$
$$X \sim H(16, 8, 5)$$
$$P(X) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X = 5) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{16-8}{5-5}}{\binom{16}{5}}$$
$$P(X = 5) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{8}{0}}{\binom{16}{5}}$$
$$P(X = 5) = \frac{56 \cdot 1}{4368}$$
$$P(X = 5) = \frac{56}{4368}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{78}$$
$$P(X=5) \approx 0.0128$$
$$P(X=5) \approx 1.28\%$$

37.2.3 c

Erinnern Sie sich an Max aus dem PIN-Beispiel (Foliensatz zu ST-K03, Seite 2 und 3)? Angenommen, er braucht 20 Sekunden, um eine PIN zu probieren. Wie groß ist (im Szenario von Seite 3) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der innerhalb von 5 Minuten die richtige PIN errät, wenn er sich merkt, welche PINs er bereits durchprobiert hat? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn er sich nicht merkt, welche Zahlenkombinationen er bereits durchprobiert hat?

38. Übungsblatt 7

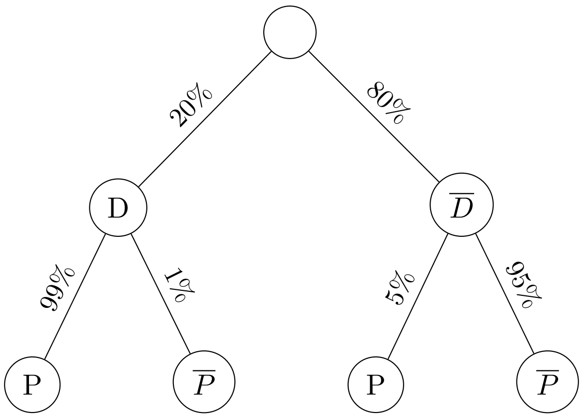
38.1 Aufgabe 1

Herr Huber hat eine Alarmanlage in seinem Auto installiert. Es werden die Ereignisse A: "Alarmanlage springt an" und E: "Jemand versucht, das Auto aufzubrechen" betrachtet. Beschreiben Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Worten: $P(A|E), P(E|A), P(A|E^C), P(E|A^C)$. Welche dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten möglichst hoch bzw. niedrig seien?

- $P(A|E)$ `Die Alarmanlage springt an, unter der Bedingung dass jemand versucht, das Auto aufzubrechen`: Die Wahrscheinlichkeit hierfür sollte möglichst hoch sein, da dies der sinn der Alarmanlage sein. Im idealfall sollte die Wahrscheinlichkeit hierfür gegen 100% sein.
- $P(E|A)$ `Jemand versucht, in das Auto einzubrechen, unter der Bedingung, dass die Alarmanlage angeht`: Die Wahrscheinlichkeit hierfür sollte hoch sein, aber nicht 100%, da die Alarmanlage den Dieb verschrecken sollte.
- $P(A|E^C)$ `Die Alarmanlage springt an, unter der Bedingung, dass niemand versucht, das Auto aufzubrechen (Fehlarlarm)`: Die Wahrscheinlichkeit hierfür sollte möglichst niedrig sein, da niemand versucht in das Auto einzubrechen.
- $P(E|A^C)$ `Jemand versucht, in das Auto einzubrechen, unter der Bedingung, dass die Alarmanlage` **`nicht`** `angeht`: Die Wahrscheinlichkeit hierfür sollte sehr niedrig sein.

38.2 Aufgabe 2

Bei einer Sportveranstaltung wird ein Dopingtest durchgeführt. Wenn ein Sportler gedopt hat, dann fällt der Test zu 99% positiv aus. Hat ein Sportler aber nicht gedopt, zeigt der Test trotzdem zu 5% ein positives Ergebnis an. Aus Erfahrung weiß man das 20% der Sportler gedopt sind.



38.2.1 a

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Dopingtest positiv ausfällt?

$$0.2 \cdot 0.99 + 0.8 \cdot 0.05 = 0.238 = 23.8\%$$

38.2.2 b

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test negativ ausfällt, obwohl der Sportler gedopt hat?

$$1\%??$$

38.2.3 c

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sportler gedopt hat, falls sein Dopingtest negativ ausgefallen ist?

$$\frac{0.2 \cdot 0.01}{0.8 \cdot 0.95} = \frac{0.002}{0.76} = \frac{1}{380} \approx 0.0026 = 0.26\%$$

38.3 Aufgabe 3

Herr Mayer kommt im Durchschnitt an 10 von 100 Tagen zu spät für den Vorlesungsbeginn zur Hochschule. Er fährt manchmal mit dem eigenen Auto zur W-HS, an 60% aller Vorlesungstage nimmt er jedoch öffentliche Verkehrsmittel. Er hat beobachtet, dass er durchschnittlich in 5% aller Fälle mit dem Auto unterwegs ist und zu spät zur Hochschule kommt. Sind das Zu-Spät-Kommen und die Nutzung des eigenen Autos voneinander stochastisch unabhängig?

Das Zuspät kommen ist stochastisch abhängig, da die Nutzung des Autos direkt in verbindung mit der Wahrscheinlichkeit, dass Herr Mayer zu spät kommt, steht.

38.4 Aufgabe 4

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seinen $A, B, C \subset \Omega$ drei Ergebnisse. Man sagt, A, B und C seien *Vollständig stochastisch unabhängig*, wenn gilt, dass

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

38.4.1 a

Was ist der Unterschied zwischen vollständiger stochastischer Unabhängigkeit und paarweiser stochastischer Unabhängigkeit?

Paarweise Stochastische unabhängigkeit ist gegeben, wenn die Bedingung $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ *nicht* gegeben ist, aber alle anderen Bedingungen gegeben sind.

38.4.2 b

Wie kann man diese Definition auf beliebig viele Ereignisse verallgemeinern?

38.4.3 c

Finden Sie ein Beispiel für drei Ereignisse, die paarweise stochastisch unabhängig sind, aber nicht vollständig stochastisch unabhängig.

39. Übungsblatt 8

39.1 Aufgabe 1

Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben. Seien dabei jeweils $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$.

39.1.1 a

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

39.1.2 b

$E(X) \leq E(Y),$ falls $P(X \leq Y) = 1$

39.1.3 c

$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y),$ falls X und Y stochastisch unabhängig sind.

39.2 Aufgabe 2

Sei X die Anzahl der 'Zahl'-Würfe beim zehnmaligen Münzwurf. Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

39.2.1 a

von Hand

39.2.2 b

mittels der Formel für Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Sei Y die Wartezeit bis zum ersten 'Zahl'-Wurf. Berechnen Sie $E(Y)$ und $Var(Y)$

39.3 Aufgabe 3

Sie kaufen ein Paket mit 300 Schrauben. Laut Herstellerangaben sind 1% der verkauften Schrauben Ausschluss und somit nicht verwendbar. Für ein Bauprojekt benötigen Sie 298 Schrauben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verwendbaren Schrauben ausreichen

- exakt mit Hilfe der Binomialverteilung und
- näherungsweise an Hand des Satzes von de Moivere-Laplace.

Binomialverteilung

$$\begin{aligned} &\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ \sum_{i=298}^{300} &\left(\binom{300}{i} \cdot 0.99^i \cdot (1-0.99)^{300-i}\right) \\ &\approx 0.4221 \\ &= 42.21\% \end{aligned}$$

Die Schrauben reichen zu 42.21% aus.

Satz von Moivere-Laplace

$$\begin{aligned} X &= \text{Anzahl der funktionierenden Schrauben} \\ X &\sim B(300, 0.99) \\ E(X) &= 300 \cdot 0.99 = 297 \\ Var(X) &= 297 \cdot 0.01 = 2.97 \\ \sigma &= \sqrt{2.97} \\ P(X \geq 298) &\overset{Stetigkeitskorrektur}{=} P(X \geq 297.5) \\ &1 - P(X < 297.5) \\ 1 - P(\frac{X - E(X)}{\sigma} &< \frac{297.5 - 297}{\sqrt{2.97}}) \\ &1 - \Phi(\frac{297.5 - 297}{\sqrt{2.97}}) \\ &1 - \Phi(0.29) \\ &\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.61409 \\ &0.38501 = 38.50\% \end{aligned}$$

40. Übungsblatt 9

40.1 Aufgabe 1

40.1.1 a

Die größenverteilung von Männern in Deutschland kann laut einer Studie als normalverteilt angenommen werden mit Mittelwert $176.69cm$ und Standardabweichung $6.959cm$. Wie groß ist nach diesen Daten die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähler Mann größer als $200cm$ ist?

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Größe der Männer in cm} \\
E(x) &= 176.69 \\
\sigma &= 6.959 \\
P(X &> 200) \\
1 - P(X &\leq 200) \\
1 - P(\frac{X - E(X)}{\sigma} &\leq \frac{200 - 176.69}{6.959}) \\
&= 1 - \Phi(\frac{200 - 176.69}{6.959}) \\
&\approx 1 - \Phi(3.35) \\
&\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.99960 \\
&= 0.0004 \\
&= 0.04\% \\
\text{Zum spaß an der Freude} \\
P(X &> 300) \\
1 - P(X &\leq 300) \\
1 - P(\frac{X - E(X)}{\sigma} &\leq \frac{300 - 176.69}{6.959}) \\
&= 1 - \Phi(\frac{300 - 176.69}{6.959}) \\
&= 1 - \Phi(17.72) \\
&\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 1 \\
&= 0 \\
&= 0\%
\end{aligned}
$$

40.1.2 b

Gemäß einer Definition von Armut gilt als arm, wer ein monatliches Haushaltseinkommen von weniger als 60% des Medians der monatlichen Haushaltseinkommen eines Landes zur Verfügung hat. Angenommen, die Haushaltseinkommen in einem Land seien normalverteilt mit einem Mittelwert von 3382€ (das entspricht den mittleren Haushaltseinkommen in Deutschland 2019) und einer Standardabweichung von 1000€. Bis zu welcher Einkommensgrenze gilt ein Mensch als arm? Was hinkt an dieser Definition?

$$3382 \cdot 0.6 = 2029.2??$$

$$\begin{aligned} P(X) &= 0.6 \\ \frac{X - 3382}{1000} &= 1 - 0.26 \quad | \cdot 1000 \quad | + 3382 \\ x &= (1 - 0.26) \cdot 1000 + 3382 \\ x &= 4122??? \end{aligned}$$

Das Haushaltseinkommen kann nicht normalverteilt sein, da die Glockensymmetrie nicht gegeben sein kann.

40.2 Aufgabe 2

Da erfahrungsgemäß etwa 4% der Fluggäste nicht zum Abflug erscheinen, werden Flugzeuge systematisch überbucht. Für eine Maschine mit 98 Sitzplätzen werden 100 Tickets verkauft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr Ticketinhaber zum Abflug erscheinen als Pläte vorhanden sind, unter der Annahme, dass das Erscheinen der Ticketinhaber paarweise stochastisch unabhängig ist

40.2.1 a

exakt an Hand der Binomialverteilung

$$\begin{aligned} X &= \text{Anzahl Fluggäste} \\ X &\sim B(100, 0.96) \\ \sum_{i=99}^{100} \left(\binom{100}{i} \cdot 0.96^i \cdot (1 - 0.96)^{100-i} \right) \\ &\approx 0.0872 \\ &8.72\% \end{aligned}$$

40.2.2 b

näherungsweise mit dem Satz von Moivere-Laplace ohne Stetigkeitskorrektur

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Anzahl Fluggäste}\\
X &\sim B(100, 0.96)\\
E(X) &= 100 \cdot 0.96 = 96\\
Var(X) &= 96 \cdot 0.04 = 3.84\\
\sigma &= \sqrt{3.84} P(X \geq 99)\\
&= 1 - P(X < 99)\\
= 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{99 - 96}{\sqrt{3.84}}\right)\\
&\approx 1 - \Phi(1.53)\\
&\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.93699\\
&\approx 0.0630\\
&= 6.30\%
\end{aligned}
$$

40.2.3 c

näherungsweise mit dem Satz von Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur.

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Anzahl Fluggäste}\\
X &\sim B(100, 0.96)\\
E(X) &= 100 \cdot 0.96 = 96\\
Var(X) &= 96 \cdot 0.04 = 3.84\\
\sigma &= \sqrt{3.84} P(X \geq 99)\\
& P(X \geq 98.5)\\
& 1 - P(X < 98.5)\\
1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{98.5 - 96}{\sqrt{3.84}}\right)\\
&\approx 1 - \Phi(1.28)\\
&\overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.89973\\
&\approx 0.1003\\
&= 10.03\%
\end{aligned}
$$

40.3 Aufgabe 3

Wie oft müssen Sie eine faire Münze werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 die relative Häufigkeit der Würfe mit dem Ergebnis 'Kopf' zwischen 0.49 und 0.51 liegt? Arbeiten Sie mit der Näherungsformel aus dem Satz von de Moivre-Laplace.

$$
X = \text{Münzwurf mit Kopf}, \begin{cases} 0 & \text{bei Kof,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}
$$

$$P(0.49 \le X \le 0.51)$$

$$\Phi(1-0.49) = \Phi(0.51)$$

$$\Phi(0.51) = 0.03$$

$$\frac{n - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{2\sqrt{n}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{2\sqrt{n}} = 0.03$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} = 0.03 \quad | \cdot \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow n = 0.03\sqrt{n}$$

41. Übungsblatt 10

41.1 Aufgabe 1

Einer Handelskette wurde vertraglich zugesichert, dass maximal 1% der Becher einen Defekten Deckel besitzen. Normalerweise kann dieser Qualitätsstandard leicht eingehalten werden. Eines Tages stellt sich bei einer Qualitätskontrolle in der Molkerei heraus, dass 4% der Joghurtbecher einen Defekten Deckel aufweisen. Bei einem schon beladenen Lkw ist ungewiss, ob die Joghurtbecher bereits aus der Produktion mit dem erhöhten Anteil an defekten Deckeln stammen. Deshalb wird der Ladung eine Stichprobe entnommen und untersucht.

41.1.1 a

Falls bei einer Stichprobe aus 100 Bechern mindestens zwei Becher einen defekten Deckel haben, wird der Lkw in der Molkerei wieder entladen, andernfalls wird die Lieferung freigegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung freigegeben wird, obwohl sie einen erhöhten Anteil an Joghurtbechern mit defektem Deckel aufweist? Wie groß kann die Wahrscheinlichkeit für ein unnötiges Entladen des Lkws bei Einhaltung des zugesicherten Qualitätsstandards maximal werden?

41.1.2 b

Nun soll die Wahrscheinlichkeit eines unnötigen Ausladens des Lkws auf 5% festgelegtz werden und damit das Konfidenzniveau des beabsichtigten Tests auf 95%. Bestimmen Sie eine Anzahl $z \in \mathbb{N}$ an Joghurtbechern mit defekten Deckel, ab der die Hypothese, dass die Ladung dem Qualitätsstandard entspricht, abgelehnt werden soll.

41.1.3 c

Um das Risiko einer fälschlichen Auslieferung noch kleiner zu machen, soll die Lieferung nur dann freigegeben werden, wenn sich kein defekter Deckel in einer Stichprobe der Länge n befindet. Bestimmen Sie n so, dass dieses Risiko nach der neuen Regel höchstens 1% beträgt.

41.2 Aufgabe 2

41.2.1 a

Die erwartete Jahresrendite eines Aktieninvestments A beträgt 5% und die Standardabwichung der Jahresrendite ebenfalls 5%. Weiterhin sei die Aktienrendite normalverteilt. Außerdem gibt es eine von A unabhängige, risikolose Anlagemöglichkeit R, die eine Jahresrendite von 2% einbringt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Rendite des Aktieninvestments höher als die der risikolosen Anlage?

41.2.2 b

Ein Gartencenter bietet Gurkensamen an, die zu 95% keimen, Berechen Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass von 600 ausgesätzten samen

- höchstens 565 keimen
- weniger als 570 keimen
- mindestens 565 keimen
- 565 bis 575 keimen

42. Übungsblatt 11

42.1 Aufgabe 1

Hinweis: Bisher haben wir z-Tests in der Regel auf binomialverteilte Zufallsvariablen angewandt, indem wir die zu Grunde liegende Binomialverteilung mittels des Satzes von de Moivre-Laplace mit einer Normalverteilung approximiert haben. Natürlich kann man diese Art von Test aber auch direkt auf eine normalverteilte Zufallsvariable anwenden. Das soll im Folgenden geübt werden.

43. Moodle Übungsaufgaben

43.1 Aufgabe: Sterbewahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit einer zufällig gewählten 65-jährigen Person in der Bundesrepublik Deutschland, im Laufe der kommenden zwölf Monate zu sterben, ist $p = 0.01$. Eine kleine Pensionsversicherung hat $n = 400$ Verscicherte dieses Alters.

Wie viele von ihnen werden in den kommenden zwölf Monaten sterben?

43.1.1 a

Geben Sie zunächst an, welche Verteilung diejenige Zufallsvariable X haben könnte, die diese Anzahl beschreibt.

Antwort: Binomialverteilung

43.1.2 b

Bitte geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X an.

$P(K) = \binom{400}{k} \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{400-k}$

43.1.3 c

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. Bitte geben Sie einen exakten, ungerundeten Wert an.

$E(X) = 400 \cdot 0.01$

43.1.4 d

Bestimmen Sie die Varianz von X. Bitte geben Sie einen exakten, ungerundeten Wert an.

$Var(X) = 400 \cdot 0.01 \cdot 0.99$

43.1.5 e

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 4 Todesfälle in dieser Altersgruppe gibt?

$$
\begin{aligned}
1 - P(X \leq 3) &= \\
1 - \sum_{i=0}^{3} \left(\binom{400}{i} \cdot 0.01^i \cdot 0.99^{400-i} \right) \\
&= 1 - 0.432487956 \\
&= 0.567512044
\end{aligned}
$$

43.1.6 f

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Altersgruppe keinen Todesfall gibt?

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) = \binom{400}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{400} \\
&= 0.017950553
\end{aligned}
$$

43.2 Aufgabe: Nachrichtenkanal

Über einen Nachrichtenkanal wird ein Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.96 korrekt übertragen. Eine Nachricht besteht aus 75 Zeichen. Wir bezeichnen die Zahl der falsch übertragenen Zeichen mit X.

43.2.1 a

Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung eignet sich am besten zur Modelierung von X?

$Bin(75, 0.04)$

43.2.2 b

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 75 \cdot 0.04 = 3 \\
Var(X) &= 75 \cdot 0.04 \cdot 0.96 = 2.88
\end{aligned}
$$

43.2.3 c

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{75} \left(\binom{75}{i} \cdot 0.04^i \cdot 0.96^{75-i} \right) \\
&= 0.581388125
\end{aligned}
$$

43.3 Aufgabe: Brettspiel

Beim Brettspiel ‘Mensch ärgere dich nicht’ darf man zu Beginn dreimal würfeln und kann starten, wenn man dabei mindestens eine 6 würfelt. Ansonsten muss man warten, bis man das nächste mal an der Reihe ist und dann wieder dreimal würfeln darf.

43.3.1 a

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei den drei Versuchen zu Beginn mindestens eine 6 zu erhalten?

$$\begin{aligned} &P(X \geq 1) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{3}{0} \cdot \frac{1}{6}^0 \cdot \frac{5}{6}^3 \\ &= 1 - 0.578703704 \\ &= 0.421296 \end{aligned}$$

43.3.2 b

Wir bezeichnen mit X Die Anzahl der Runden, die man warten muss, bevor man starten kann. Bestimmen Sie die Verteilung von X

Geometrische Verteilung

43.3.3 c

Bitte geben Sie den Parameter der Verteilung an

0.42??

43.3.4 d

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X

$E(X) = \frac{1-\frac{91}{216}}{\frac{91}{216}} \approx 1.38$

43.3.5 e

Bestimmen Sie die Vaianz von X.

$Var(X) = \frac{1-\frac{91}{216}}{\frac{91}{216}^2} \approx 3.287981$

43.4 Aufgabe: Würfel konstruieren

Sei X eine Zufallsvariable, die die gewürfelte Augenzahl beim Wurf mit einem (unfairen) sechsseitigen Würfel beschreibt. Der Erwartungswert dieser

Zufallsvariable soll bei $E(X) = 2.6$ liegen. Geben Sie ein Beispiel für einen Würfel mit dieser Eigenschaft an, indem Sie die Verteilung von X (d.h. die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für $k = 1, \dots, 6$) angeben. Wählen Sie die Verteilung so, dass $P(X = k) = 0$ für höchstens k gilt.

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 &= 1 \\ P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 &= 2.6 \end{aligned}$$

Linearkombination						**Konstanten**
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	2.6
Operation: II - I						
1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	1.6
Operation: I - II						
1	0	-1	-2	-3	-4	-0.6
0	1	2	3	4	5	1.6

$$\begin{aligned} P_1 - P_3 - 2P_4 - 3P_5 - 4P_6 &= -0.6 \\ P_1 &= -0.6 + P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 \\ P_2 + 2P_3 + 3P_4 + 4P_5 + 5P_6 &= 1.6 \\ P_2 &= 1.6 - 2P_3 - 3P_4 - 4P_5 - 5P_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &> 0 \\ -0.6 + P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 > 0 \quad &| + 0.6 \\ P_3 + 2P_4 + 3P_5 + 4P_6 &> 0.6 P_2 > 0 \\ 1.6 - 2P_3 - 3P_4 - 4P_5 - 5P_6 > 0 \quad &| - 1.6 \\ -2P_3 - 3P_4 - 4P_5 - 5P_6 > -1.6 \quad &| \cdot (-1) \\ 2P_3 + 3P_4 + 4P_5 + 5P_6 &< 1.6 \\ \text{Wähle: } P_3 = P_4 = P_5 &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4P_6 &> 0.6 \\ \frac{3}{5} + 4P_6 > 0.6 \quad &| - \frac{3}{5} \\ 4P_6 > 0 \quad &| : 4 \\ P_6 &> 0 \end{aligned}$$

$$2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 5P_6 < 1.6$$

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{10} + 5P_6 < 1.6 \quad | - \frac{9}{10} \\
5P_6 < \frac{7}{10} \quad | : 5 \\
5P_6 < \frac{7}{10} \quad | : 5 \\
P_6 < \frac{7}{50} \quad | : 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Wähle} P_6 = \frac{5}{50} \\
P_1 = -0.6 + \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{5}{50} \\
P_1 = \frac{2}{5} \\
P_2 = 1.6 - 2 \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot \frac{1}{10} - 4 \cdot \frac{1}{10} - 5 \cdot \frac{5}{50} \\
P_2 = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

43.5 Aufgabe: Normalapproximation

Beim Paketversand kann es bei jedem Paket unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{12}$ zu Lieferverzögerungen kommen. Täglich werden $n = 240$ Pakete verschickt. Sei X die zufällige Anzahl der Pakete, die nicht rechtzeitig zugestellt werden können.

43.5.1 a

Berechnen Sie exakt die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag bei mindestens 19, aber gleichzeitig nur höchstens 23 Paketen zu Lieferverzögerungen kommt.

$$
\begin{aligned}
X = \text{Anzahl Verspäteter Pakete} \\
X \sim B(n, p) \\
P(19 \leq X \leq 23) = P(X \leq 23) - P(X < 19) \\
= \sum_{i=0}^{23} \left(\binom{240}{i} \cdot \frac{1}{12}^{i} \cdot \frac{11}{12}^{240-i} \right) - \\
\sum_{i=0}^{18} \left(\binom{240}{i} \cdot \frac{1}{12}^{i} \cdot \frac{11}{12}^{240-i} \right) \\
= 0.422379171
\end{aligned}
$$

43.5.2 b

Wir können die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch approximativ berechnen, indem wir die Normalapproximation verwenden, welche auf dem zentralen Grenzwertsatz beruht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag bei mindestens 19, aber gleichzeitig nur höchstens 23 Paketen zu

Lieferverzögerungen kommt, approximativ mittels einer Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur.

$$\begin{aligned}
X &= \text{Anzahl Verspäteter Pakete}\\
X &\sim B(n,p)\\
E(X) &= 240 \cdot \frac{1}{12} = 20\\
Var(X) &= 240 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{3}\\
\sigma(X) &= \sqrt{\frac{55}{3}}\\
P(19 \geq X \geq 23) &= P(X \leq 23) - P(X \leq 18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 23) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{23-20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right)\\
\varphi\left(\frac{23-20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right)\\
\approx \varphi\left(\frac{23-20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) = \varphi(0.70)\\
\overset{Tabelle}{\approx} = 0.75804 = 75.80\%
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 18) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} < \frac{18-20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right)\\
\varphi\left(\frac{18-20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right)\\
\approx \varphi\,(-0.47) =\\
1 - \varphi\,(0.47) = 1 - 0.68082 =\\
0.31918 \approx 31.92\%\\
P(19 \geq X \geq 23)\\
= 0.75804 - 0.31918\\
= 0.43886 = 43.89\%
\end{aligned}$$

43.5.3 c

Bei Zufallsvariablen mit Werten in den ganzen Zahlen kann die Normalapproximation um eine sogenannte Stetigkeitskorrektur erweitert werden. Dabei werden die (ganzzahligen) Intervallgrenzen um 0.5 erhöht bzw. um 0.5 verringert, sodass die mit der Binomialverteilung exakt berechnete Wahrscheinlichkeit unverändert bleibt, aber bei der Approximation durch die Normalverteilung sich eine oftmals bessere Näherung an den exakten Wert ergibt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag bei mindestens 19, aber gleichzeitig nur höchstens 23 Paketen zu Lieferverzögerungen kommt, approximativ mittels einer Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

$$\begin{aligned}
X &= \text{Anzahl Verspäteter Pakete} \\
X &\sim B(n,p) \\
E(X) &= 240 \cdot \frac{1}{12} = 20 \\
Var(X) &= 240 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{3} \\
\sigma(X) &= \sqrt{\frac{55}{3}} \\
P(19 \geq X \geq 23) &= P(X \leq 23) - P(X \leq 18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(23 \leq X) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{23 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\text{Stetigkeitskorrektur} \\
P(23 \leq X) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{23.5 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\varphi\left(\frac{23.5 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\approx \varphi(0.82) \overset{Tabelle}{\approx} 0.79389
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(18 \leq X) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{18 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\text{Stetigkeitskorrektur} \\
P(18 \leq X) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{18.5 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\varphi\left(\frac{18.5 - 20}{\sqrt{\frac{55}{3}}}\right) \\
&\approx \varphi\left(-0.35\right) \\
&= 1 - \varphi\left(0.35\right) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - 0.63683 \\
&= 0.36317
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(19 \geq X \geq 23) &= 0.79389 - 0.36317 \\
&= 0.43072
\end{aligned}$$

43.6 Aufgabe: Sigma-Bereiche

43.6.1 a

Bei einer einzeldosierten Arzneiform mit einem Sollgewicht von $\mu = 50mg$ gibt der Hersteller als Standardabweichung den Wert $\sigma = 1.5mg$ an. Zur Qualitätskontrolle einer produzierten Charge werden 20 ausgewählten Tabletten die Gewichte $x_1, \dots, x_{20}$ mittels einer Analysewaage gewogen und das arithmetische Mittel $\overline{x}_{20} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$ als Prüfgröße herangezogen. Es wird angenommen, dass die gemessenen Gewichte Realisierungen von unabhängigen und identischen $N(50, 2.25)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{20}$ sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Gewicht X_1 einer einzelnen Tablette um höchstens eine Standardabweichung von σ vom Sollgewicht μ abweicht.

$$
\begin{aligned}
P\left(|X_1 - \mu| \leq \sigma\right) &= P\left(|X_1 - 50| \leq 1.5\right) \\
&-1.5 \leq X_1 - 50 \leq 1.5 \quad | + 50 \\
&\Leftrightarrow -1.5 + 50 \leq X_1 \leq 1.5 + 50 \\
&\Leftrightarrow 48.5 \leq X_1 \leq 51.5 \\
X &= \text{Gewicht einer Tablette in mg} \\
P\left(48.5 \leq X_1 \leq 51.5\right) &= P(X_1 \leq 51.5) - P(X_1 \leq 47.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \leq 51.5) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{51.5 - 50}{1.5}\right) \\
&\varphi\left(\frac{51.5 - 50}{1.5}\right) \\
&= \varphi(1) \overset{Tabelle}{\approx} 0.84134
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \leq 48.5) &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma} \leq \frac{48.5 - 50}{1.5}\right) \\
\varphi(-1) = 1 - \varphi(1) &= 1 - 0.84134 = 0.15866 \\
&P(48.5 \leq X_1 \leq 51.5) \\
&= 0.84134 - 0.15866 \\
&= 0.68268 = 68.27\%
\end{aligned}
$$

43.6.2 b

Als Prüfsumme bei der Qualitätskontrolle wird nicht das Gewicht einer einzelnen Tablette, sondern das mittlere Gewicht von 20 Tabletten ermittel. Man kann zeigen, dass die Zufallsvariable $\overline{X}_{20}$, die das arithmetische Mittel der Gewichte beschreibt, wieder eine Normalverteilung besitzt. Berechen Sie die Parameter dieser Normalverteilung, also dem Erwartungswert $\overline{\mu} = E(\overline{X}_{20})$ und die Varianz $\overline{\sigma}^2 = Var(\overline{X}_{20})$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}^2 &= Var(\overline{X}_{20}) \\
&= Var(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i) \\
&= \frac{1}{20^2}\sum_{i=1}^{20} \sigma^2 \\
&= \frac{1}{20}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{20} \\
= \frac{1.5}{20} &= 0.1125 = \overline{\sigma}^2 \\
\overline{\mu} &= E(\overline{X}_{20}) \\
&= E\left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i\right) \\
&= \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} E(X_i) \\
&= \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} \mu \\
&= \mu \\
&= 50 = \overline{\mu}
\end{aligned}
$$

$$\overline{X}_{20} \sim N(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2) = N(50, 0.1125)$$

43.6.3 c

Es gibt $\overline{X}_{20} \sim N(50, 0.1125)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}_{20}$ um höchstens eine Standardabweichung $\overline{\sigma}$ von Mittelwert $\overline{\mu}$ abweicht.

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}_{20} - \overline{\mu}\right| \leq \overline{\sigma}\right) &= P\left(\left|\overline{X}_{20} - 50\right| \leq \frac{0.75}{\sqrt{5}}\right) \\
-\frac{0.75}{\sqrt{5}} \leq X_{20} - 50 &\leq \frac{0.75}{\sqrt{5}} \quad | + 50 \\
-\frac{0.75}{\sqrt{5}} + 50 \leq X_{20} &\leq \frac{0.75}{\sqrt{5}} + 50 \\
\frac{1000 - 3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20} &\leq \frac{1000 + 3\sqrt{5}}{20} \\
P\left(\frac{1000 - 3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20} \leq \frac{1000 + 3\sqrt{5}}{20}\right) \\
= P\left(\frac{1000 + 3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20}\right) - P\left(\frac{1000 - 3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{1000+3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20}\right) \\
&= P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} \leq \frac{\frac{1000+3\sqrt{5}}{20}-50}{\sqrt{0.1125}}\right) \\
&\varphi\left(\frac{\frac{1000+3\sqrt{5}}{20}-50}{\sqrt{0.1125}}\right) \approx \varphi(1) \\
&\overset{Tabelle}{\approx} 0.84134
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\left(\frac{1000-3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20}\right) \\
&= P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} \leq \frac{\frac{1000-3\sqrt{5}}{20}-50}{\sqrt{0.1125}}\right) \\
&\varphi\left(\frac{\frac{1000-3\sqrt{5}}{20}-50}{\sqrt{0.1125}}\right) = \varphi(-1) \\
&= 1-\varphi(1) = 1-0.84134 = 0.15866 \\
&P\left(\frac{1000-3\sqrt{5}}{20} \leq X_{20} \leq \frac{1000+3\sqrt{5}}{20}\right) \\
&= 0.84134 - 0.15866 \\
&= 0.68268 = 68.27\%
\end{aligned}
$$

43.7 Aufgabe: Passagiere eines Transatlantikflugs

Die Lufthansa Weiß aus Erfahrung, dass Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zum Flug erschienen. Für einen Transatlantikflug hat sie 900 Tickets verkauft. Wir bezeichnen mit X die Anzahl an Passagiere, die zum Flug erscheinen.

Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 819 Passagiere zum Abflug erscheinen. Verwenden Sie dazu die Normalapproximation und geben Sie das Ergebnis auf mindestens zwei Nachkommastellen genau an.

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Anzahl passagiere die erscheinen} \\
B &\sim (900, 0.9) \\
E(X) &= 900 \cdot 0.9 = 810 \\
Var(X) &= 810 \cdot 0.1 = 81 \\
\sigma &= \sqrt{81} = 9 \\
P(X \leq 819) &= P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma} \leq \frac{819-810}{9}\right) \\
\varphi\left(\frac{819-810}{9}\right) &= \varphi(1) \overset{Tabelle}{\approx} 0.84134
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{X - 810}{9} \\
\{X \leq 819\} &= \frac{819 \leq 810}{9} \\
\frac{819}{9} &\leq \frac{810}{9} \quad | \cdot 9 \\
819 &\leq 810 \quad | \cdot 9
\end{aligned}
$$