

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

图论基础和题目选讲

外接圆

武汉大学 计算机学院

2022 年 1 月 26 日

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

① 图论基础



图的定义

图的存储

图的性质

② 图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

③ 常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

④ 图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

图的定义

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

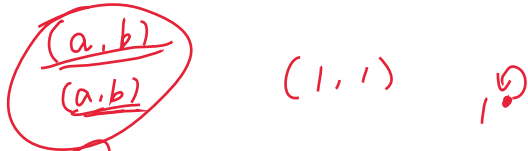
HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

$G = \langle V, E \rangle$, 其中 E 一定是连接集合 V 中的点的。可以用来表示各个元素之间的相互关系。

图的定义



$G = \langle V, E \rangle$, 其中 E 一定是连接集合 V 中的点的。可以用来表示各个元素之间的相互关系。

不考虑重边和自环的情况下, $|E| \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2}$

$1 \leftrightarrow 2$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2, 3, 4, 5 \dots n \\ 2 \rightarrow 3, 4, 5 \dots n. \\ \vdots \\ n \end{array} \right.$

$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

$G = \langle V, E \rangle$ ，其中 E 一定是连接集合 V 中的点的。可以用来表示各个元素之间的相互关系。

不考虑重边和自环的情况下， $|E| \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2}$

https://csacademy.com/app/graph_editor/

图一般分为有向图、无向图；带权图、不带权图。

邻接矩阵

图的存储

$$f[i][j] = f[j][i] = 1 \quad \text{其他} : 0$$

$f[i][j]$ 表示 i 和 j 的连通性，可以 $O(1)$ 查询两个点的连接情况。但是对于某个点的所有出边需要用 $O(n)$ 的时间。

$$n \quad O(n^2) \quad \underline{\underline{O(m)}}$$

$f[i][j]$ 表示 i 和 j 的连通性，可以 $O(1)$ 查询两个点的连接情况。但是对于某个点的所有出边需要用 $O(n)$ 的时间。

特点是按点两两之间的关系存储，对稀疏图并不友好。

邻接矩阵

图的存储

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

$f[i][j]$ 表示 i 和 j 的连通性，可以 $O(1)$ 查询两个点的连接情况。但是对于某个点的所有出边需要用 $O(n)$ 的时间。

特点是按点两两之间的关系存储，对稀疏图并不友好。

而因为矩阵乘法是 $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ ，所以利用矩阵乘法可以解决有向图连通性等问题。

$$C = A \cdot B$$

$$[C]_{(i,j)} = [A]_{(i, \cdot)} \cdot [B]_{(\cdot, j)}$$

邻接矩阵

图的存储



$f[i][j]$ 表示 i 和 j 的连通性，可以 $O(1)$ 查询两个点的连接情况。但是对于某个点的所有出边需要用 $O(n)$ 的时间。

特点是按点两两之间的关系存储，对稀疏图并不友好。

而因为矩阵乘法是 $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ ，所以利用矩阵乘法可以解决有向图连通性等问题。

即考虑 $C_{ij} = \cup_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ ，说明只要存在 $i \rightarrow k, k \rightarrow j$ ，那么 $i \rightarrow j$ 就成立。

$i \leftrightarrow j$

$add(i,j)$
 $add(j,i)$

$cnt=0$
 $cnt=1$

$(3,4)$

$O(m)$
 $O(n^2)$

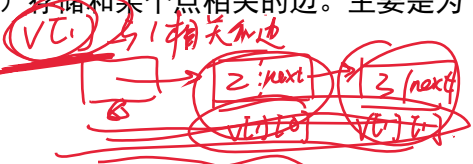
邻接表
图的存储
 $cnt \sim 1$

以点为单位存储。用链表（变长数组）存储和某个点相关的边。主要是为了方便遍历。
 $cnt = x, cnt = x + 1$
 $O(\log n) \leq O(1)$

连通性: $map<int, map<int, int>>$

常用结构: vector, 前向星, 链表

当找反边时需要用特殊的技巧存边。



$vector<int> v[N];$

$v[1].push_back(2);$

```
vector<int> v[100100];  
for(auto i:v[x])  
    dfs(i);
```

$struct node \{ int n, v, next; \}$

空间复杂度 $O(m)$, 查找特定边的时间复杂度为 $O(n)$

$cnt=0$
 $cnt=1$

iterator

图的性质

树： $m = n - 1$

基环树： $n = m$ （环就是图的根）



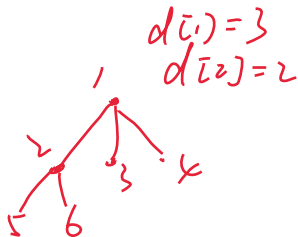
图的性质

树： $m = n - 1$

基环树： $n = m$ （环就是图的根）

点的度：图中：与这个点相连的点的数量

树中：这个点的儿子数量



图的性质

树： $m = n - 1$

基环树： $n = m$ （环就是图的根）

点的度：图中：与这个点相连的点的数量

树中：这个点的儿子数量

简单路径（没有重复的点和重复的边）的边数不超过 $n - 1$
一条起点终点相同的路径，称为环。



最短路



无权图：(分层) bfs, dijkstra, Bellmanford, Floyd

最短路就是一条路径，某一次 bfs/dfs 一定可以找到这条路的。

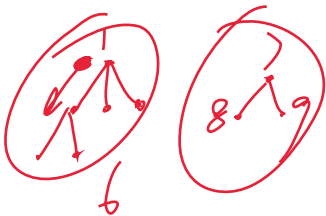
dijkstra 就是基于贪心，可以更快、更有规律地找到最短路

Bellmanford 根据最短路最多只有 $n - 1$ 条边，进行 n 次迭代就能找到最短路

Floyd 比较特殊，它可以找出任意两点之间的最短路。

树和生成树

图的应用/算法



树是图论中最常用的结构之一。不连通的树被称为森林。树上没有环，不走回头路就无法回到原来的节点。除根节点外，每个节点有唯一的父亲。

树和生成树

图的应用/算法



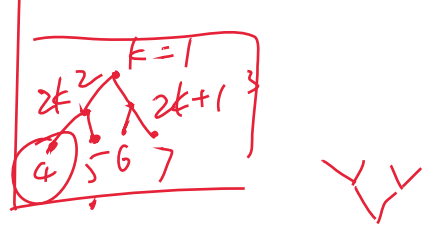
树是图论中最常用的结构之一。不连通的树被称为森林。树上没有环，不走回头路就无法回到原来的节点。除根节点外，每个节点有唯一的父亲。节点的祖先定义为节点的父亲和节点父亲的祖先。

i 找父亲 ---
能找到 j



树和生成树

图的应用/算法



树是图论中最常用的结构之一。不连通的树被称为森林。树上没有环，不走回头路就无法回到原来的节点。除根节点外，每个节点有唯一的父亲。

节点的祖先定义为节点的父亲和节点父亲的祖先。

二叉树的每个节点最多有两个儿子，它有着很多特性。

$\lceil \log_2 n \rceil$

链是除了端点度为 1 外，其他所有点的度均为 2 的树结构。



树和生成树

图的应用/算法

树的遍历：分为先序、中序、后序。

树和生成树

图的应用/算法

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

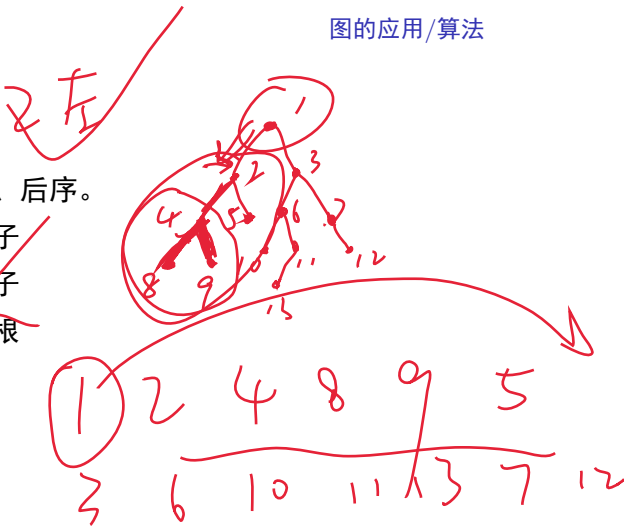
- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

树的遍历：分为先序、中序、后序。

先序为：根、左儿子、右儿子

中序为：左儿子、根、右儿子

后序为：左儿子、右儿子、根



树和生成树

图的应用/算法

树的遍历：分为先序、中序、后序。

先序为：根、左儿子、右儿子

中序为：左儿子、根、右儿子

后序为：左儿子、右儿子、根

是一个递归的过程。

树和生成树

图的应用/算法

树的直径是树上最长的一条简单路径。

树和生成树

图的应用/算法

树的直径是树上最长的一条简单路径。

更多树的概念会在《离散数学》这门课中涉及。

树的直径是树上最长的一条简单路径。

更多树的概念会在《离散数学》这门课中涉及。

生成树一般是连通图中最重要的一棵树，有最小生成树、dfs 树等。

最常用的是最小生成树，接下来简单讲一下最小生成树的求法。

tarjan 算法

图的应用/算法



图中会有环路，无向图中有的环是**点双连通分量**，有的环是**边双连通分量**；有向图中会有**强连通分量**。

点双是指去掉任何一个点，分量（子图）仍然连通，且在图中极大；**边双**是指去掉任意一条边，分量仍然连通，且在图中极大。





tarjan 算法

图的应用/算法

图中会有环路，无向图中有的环是**点双连通分量**，有的环是**边双连通分量**；有向图中会有**强连通分量**。

点双是指去掉任何一个点，分量（子图）仍然连通，且在图中极大；边双是指去掉任意一条边，分量仍然连通，且在图中极大。

有向强连通分量是指分量中任意两个点两两可互相到达。

上述分量均要求在图中表现出“**极大**”，意思是，加上其他任意一个点集都不再是相应的连通分量了。

tarjan 算法

图的应用/算法

运用 tarjan 算法可以求出上述几个分量，根据图的性质来解决相应问题。

tarjan 算法

图的应用/算法

运用 tarjan 算法可以求出上述几个分量，根据图的性质来解决相应问题。

dfn 代表时间戳，low 表示当前节点能访问到的同一连通分量里的最小时间戳。



tarjan 算法

图的应用/算法

运用 tarjan 算法可以求出上述几个分量，根据图的性质来解决相应问题。

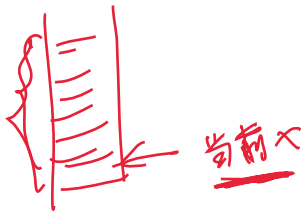
dfn 代表时间戳，low 表示当前节点能访问到的同一连通分量里的最小时间戳。

一般我们会用一个栈来存放当前节点访问到的、还没判定为属于某个连通分量的节点。

如果访问到一个已被访问但是不在栈中的节点，说明这个节点已经被处理完了，不需要它的信息了。

tarjan 算法

图的应用/算法



最后当一个节点的 $low=dfn$ 时，说明当前栈中的所有节点和当前节点处于同一个连通分量，可以弹栈了。

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

tarjan 算法

图的应用/算法

oi-wiki.org

最后当一个节点的 $\text{low}=\text{dfn}$ 时，说明当前栈中的所有节点和当前节点处于同一个连通分量，可以弹栈了。

tarjan 算法的思路就是这样，三种连通分量的细节大同小异，可以参考具体代码和算法细节进行学习。

tarjan 算法

图的应用/算法

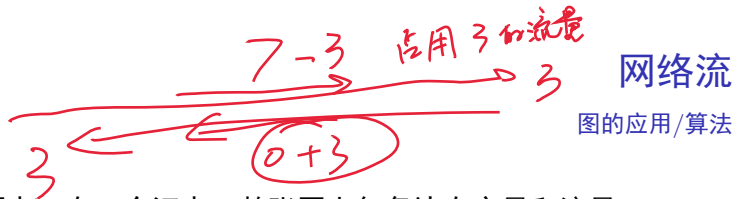
- 割点：删掉这个点之后整个图的连通分量个数会增加
- 桥：删掉这条边后整个图的连通分量数增加

桥的两边一定是割点，连接两个割点的边不一定是桥。

网络流

图的应用/算法

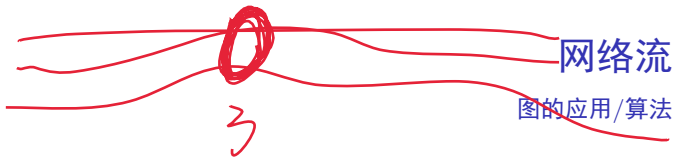
有一个源点，有一个汇点，整张图上每条边有容量和流量。



网络流
图的应用/算法

有一个源点，有一个汇点，整张图上每条边有容量和流量。
我们在加入一条有向边时，会同时加入一条反向边，当有向边的流量增加 x 时，为了方便回撤，会对反向边的流量增加 $-x$ 。

允许反悔



有一个源点，有一个汇点，整张图上每条边有容量和流量。

我们在加入一条有向边时，会同时加入一条反向边，当有向边的流量增加 x 时，为了方便回撤，会对反向边的流量增加 $-x$ 。

核心在**增广**。增广就是找到一条从源点到汇点的所有剩余容量都大于 0 的路径，只要我们能在图中找到一条增广路，就意味着我们还没有找到这张图的最大流。

dfs

$$a = \{4, 5, (3), 7\}$$

-3 -1 -3

最小值

网络流

图的应用/算法

权值和最小值



有一个源点，有一个汇点，整张图上每条边有容量和流量。
我们在加入一条有向边时，会同时加入一条反向边，当有向边的流量增加 x 时，为了方便回撤，会对反向边的流量增加 $-x$ 。

核心在增广。增广就是找到一条从源点到汇点的所有剩余容量都大于 0 的路径。只要我们能在图中找到一条增广路，就意味着我们还没有找到这张图的最大流。
总流量 = 流量

$dfs(s) \dots T$

找最大流的方法：
EK(基于 bfs), Dinic(基于 bfs 分层后的 dfs)
其他问题：费用流、上下界

最小费用

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

有 n 个同学（编号为 1 到 n ）正在玩一个信息传递的游戏。在游戏里每人都有一个固定的信息传递对象，其中，编号为 i 的同学的信息传递对象是编号为 T_i 的同学。

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

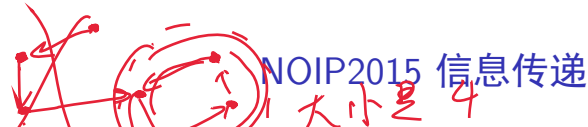
HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

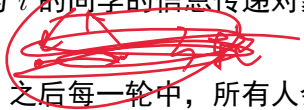
HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla



有 n 个同学（编号为 1 到 n ）正在玩一个信息传递的游戏。在游戏里每人都有一个固定的信息传递对象，其中，编号为 i 的同学的信息传递对象是编号为 T_i 的同学。



游戏开始时，每人都只知道自己的生日。之后每一轮中，所有人会同时将自己当前所知的生日信息告诉各自的信息传递对象（注意：可能有人可以从若干人那里获取信息，但是每人只会把信息告诉一个人，即自己的信息传递对象）。当有人从别人口中得知自己的生日时，游戏结束。请问该游戏一共可以进行几轮？



NOIP2015 信息传递

有 n 个同学（编号为 1 到 n ）正在玩一个信息传递的游戏。在游戏里每人都有一个固定的信息传递对象，其中，编号为 i 的同学的信息传递对象是编号为 T_i 的同学。

游戏开始时，每人都只知道自己的生日。之后每一轮中，所有人会同时将自己当前所知的生日信息告诉各自的信息传递对象（注意：可能有人可以从若干人那里获取信息，但是每人只会把信息告诉一个人，即自己的信息传递对象）。当有人从别人口中得知自己的生日时，游戏结束。请问该游戏一共可以进行几轮？

对于 30% 的数据， $n \leq 200$ ；

对于 60% 的数据， $n \leq 2500$ ；

对于 100% 的数据， $n \leq 200000$ 。

NOIP2015 信息传递

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

每个人向自己的传递对象传递消息，这个过程可以在图中进行，就是每个人向传递对象点连边。我们要找的是最小的一个环，也就是当这个环跑满一圈时，游戏结束。

NOIP2015 信息传递

Solution

每个人向自己的传递对象传递消息，这个过程可以在图中进行，就是每个人向传递对象点连边。我们要找的是最小的一个环，也就是当这个环跑满一圈时，游戏结束。

当然这个图的建模非常的简单，因为每个点只有一个出边，所以 dfs 的过程甚至不需要邻接表。

$$v[x] \rightarrow \boxed{\text{out}} \rightarrow \underline{\text{NULL}}$$

NOIP2015 信息传递

Solution

每个人向自己的传递对象传递消息，这个过程可以在图中进行，就是每个人向传递对象点连边。我们要找的是最小的一个环，也就是当这个环跑满一圈时，游戏结束。

当然这个图的建模非常的简单，因为每个点只有一个出边，所以 dfs 的过程甚至不需要邻接表。

在 dfs 的过程中，只要发现现在的出边（传递对象）是在同一轮已经被访问过的点，就说明找到了环。

时间复杂度 $O(n)$ 。

$vis[i]$ $\begin{cases} true \\ false \end{cases}$ cnt

经典题：斗地主¹

这副牌一共有 n 张，每张有正反两面，每面上面有一个整数。第 i 张牌正面的数为 t_i ，反面的数为 b_i 。

它们发现了一个新游戏，每轮选两张牌 i, j ，然后扔掉其中一张，得分为 $t_i \oplus b_j$ 和 $b_i \oplus t_j$ 中的较小值，其中 \oplus 是异或符号。直到只剩最后一张牌。

他们想知道一轮游戏的最大得分是多少。

对于 10% 的数据， $n \leq 5$ ， $0 \leq t_i, b_i \leq 10$ ；

对于 20% 的数据， $n \leq 10$ ， $0 \leq t_i, b_i \leq 1000$ ；

对于 40% 的数据， $n \leq 20$ ；

对于 60% 的数据， $n \leq 300$ ；

对于另外 20% 的数据，对任意 $1 \leq i \leq n$ ，都有 $t_i = b_i$ 。

对于 100% 的数据，满足 $2 \leq n \leq 5000$ ， $0 \leq t_i, b_i \leq 10^9$ 。

¹<https://www.luogu.com.cn/problem/U124059>

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

经典题：斗地主

Solution

经典题：斗地主

Solution

一开始有 n 张牌，每次操作删掉一张，最后剩 1 张，说明进行了 $n - 1$ 次操作。



经典题：斗地主

Solution

一开始有 n 张牌，每次操作删掉一张，最后剩 1 张，说明进行了 $n - 1$ 次操作。

n 个点， $n - 1$ 条边，很容易联想到树的结构。由于树上除了根节点，每个点只有一个父亲，每张牌也只能被删一次。那么我们可以认为如果 a 把 b 删除了， a 就是 b 的父亲。

这个时候我们发现，任意两个点之间都是相连的，我们需要找出最大的 $n - 1$ 次，使得这些边连成一棵树。

i 和 j $dis(i, j)$

经典题：斗地主

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海-Life is a Game

牛客-Eyjaþjalla

一开始有 n 张牌，每次操作删掉一张，最后剩 1 张，说明进行了 $n - 1$ 次操作。

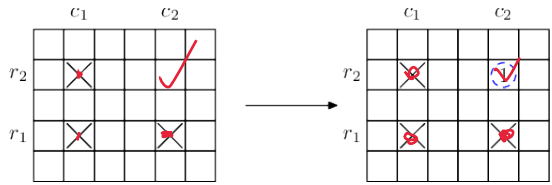
n 个点， $n - 1$ 条边，很容易联想到树的结构。由于树上除了根节点，每个点只有一个父亲，每张牌也只能被删一次。那么我们可以认为如果 a 把 b 删除了， a 就是 b 的父亲。

这个时候我们发现，任意两个点之间都是相连的，我们需要找出最大的 $n - 1$ 次，使得这些边连成一棵树。 n^2

由于 Kruskal 算法的复杂度是 $O(m \log m)$ ，相当于 $O(n^2 \log n)$ ，无法通过。所以可以直接用 $O(n^2)$ 的 Prim 算法。

eJOI
CF1012B 元素周期表

如果有在元素周期表中位置为 (r_1, c_1) , (r_1, c_2) , (r_2, c_1) (其中 $r_1 \neq r_2$, $c_1 \neq c_2$) 的三种元素的样品, 就可以生成位置为 (r_2, c_2) 的样品。如图所示:



注意: 被使用的样品并不会消失, 它们可以参与之后的反应; 反应得到的样品也可以参与反应。

他们已经获得了 q 种元素的样品。为了集齐所有元素的样品, 他们会购买一些样品, 然后制造出剩下元素的样品。请求出他们至少需要购买的元素样品的数量。 $1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5, 0 \leq q \leq \min\{n \times m, 2 \times 10^5\}$

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

CF1012B 元素周期表

Solution

CF1012B 元素周期表

Solution

这是一个很经典的行列问题。

(r_1, c_1) 相当于将 r_1 行与 c_1 列产生了联系； (r_1, c_2) 相当于将 r_1 行与 c_2 列产生了联系； (r_2, c_1) 相当于将 r_2 行与 c_1 列产生了联系。



CF1012B 元素周期表

Solution

这是一个很经典的行列问题。

(r_1, c_1) 相当于将 r_1 行与 c_1 列产生了联系； (r_1, c_2) 相当于将 r_1 行与 c_2 列产生了联系； (r_2, c_1) 相当于将 r_2 行与 c_1 列产生了联系。

这个时候 $r_2 \rightarrow c_1 \rightarrow r_1 \rightarrow c_2$ ，发现 r_2 与 c_2 也产生了联系，这个时候 (r_2, c_2) 就可以产生样品了。

CF1012B 元素周期表

Solution

这是一个很经典的行列问题。

(r_1, c_1) 相当于将 r_1 行与 c_1 列产生了联系； (r_1, c_2) 相当于将 r_1 行与 c_2 列产生了联系； (r_2, c_1) 相当于将 r_2 行与 c_1 列产生了联系。

这个时候 $r_2 \rightarrow c_1 \rightarrow r_1 \rightarrow c_2$ ，发现 r_2 与 c_2 也产生了联系，这个时候 (r_2, c_2) 就可以产生样品了。

经过上述分析，我们只需要让每一行和每一列都互相连接起来，就可以产生全部的样品了。这时我们有 $2n$ 个点，每个已有的元素样品相当于一条边。



CF1012B 元素周期表

Solution

这是一个很经典的行列问题。

(r_1, c_1) 相当于将 r_1 行与 c_1 列产生了联系； (r_1, c_2) 相当于将 r_1 行与 c_2 列产生了联系； (r_2, c_1) 相当于将 r_2 行与 c_1 列产生了联系。

这个时候 $r_2 \rightarrow c_1 \rightarrow r_1 \rightarrow c_2$ ，发现 r_2 与 c_2 也产生了联系，这个时候 (r_2, c_2) 就可以产生样品了。

经过上述分析，我们只需要让每一行和每一列都互相连接起来，就可以产生全部的样品了。这时我们有 $2n$ 个点，每个已有的元素样品相当于一条边。

假设最后连通块数量为 cnt ，我们就还需要 $\text{cnt} - 1$ 条边，即 $\text{cnt} - 1$ 个新元素来连接行和列。

CF1012B 元素周期表

Solution

这是一个很经典的行列问题。

(r_1, c_1) 相当于将 r_1 行与 c_1 列产生了联系； (r_1, c_2) 相当于将 r_1 行与 c_2 列产生了联系； (r_2, c_1) 相当于将 r_2 行与 c_1 列产生了联系。

这个时候 $r_2 \rightarrow c_1 \rightarrow r_1 \rightarrow c_2$ ，发现 r_2 与 c_2 也产生了联系，这个时候 (r_2, c_2) 就可以产生样品了。

经过上述分析，我们只需要让每一行和每一列都互相连接起来，就可以产生全部的样品了。这时我们有 $2n$ 个点，每个已有的元素样品相当于一条边。

假设最后连通块数量为 cnt ，我们就还需要 $\text{cnt} - 1$ 条边，即 $\text{cnt} - 1$ 个新元素来连接行和列。

计算连通块数量可以用并查集这一数据结构来维护。时间复杂度 $O(n\alpha(n))$ 。

$\text{Union}(x, y)$
 $\text{Find}(x, y)$

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

图论例题选讲

2021HDU(8) Ink on Paper²

无限大平面上有 n 个墨点，它们同时以 $0.5/s$ 的速度向四周扩散。问多久之后所有的墨点会连在一起。

$$2 \leq n \leq 5000$$

²hdu 现无法提交，可使用 <https://www.luogu.com.cn/problem/U199468>

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II
- 上海 -Life is a Game
- 牛客 -Eyjafjalla

2021HDU(8) Ink on Paper

Solution

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

2021HDU(8) Ink on Paper

Solution

当所有墨点连在一起时，说明他们之间形成了同一个连通块，没有间断。

2021HDU(8) Ink on Paper

Solution

当所有墨点连在一起时，说明他们之间形成了同一个连通块，没有间断。

那么什么时候才恰好形成同一个连通块呢？就是当生成一棵最大边权最小的最小生成树时。

这和 Kruskal 算法的思路很像，从小到大枚举每一条边，每成功一条，连通块个数 -1 ，如果连通块个数减少了 $n - 1$ ，就说明形成了同一个连通块。

2021HDU(8) Ink on Paper

Solution

当所有墨点连在一起时，说明他们之间形成了同一个连通块，没有间断。

那么什么时候才恰好形成同一个连通块呢？就是当生成一棵最大边权最小的最小生成树时。

这和 Kruskal 算法的思路很像，从小到大枚举每一条边，每成功一条，连通块个数 -1 ，如果连通块个数减少了 $n - 1$ ，就说明形成了同一个连通块。

当然因为前面提到了，Kruskal 的复杂度仍然是过不了 $n \leq 5000$ 规模的，所以要使用 Prim。注意这时的最小生成树是要最小化最大边权，那么在扩展的过程中就要对这个进行记录。

时间复杂度 $O(n^2)$ 。

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防³



敌军站在 $(1, 1)$ 单元格内，他们的目标是达到位于 (n, m) 的水晶。敌军每次只能移动到当前相邻的四个格子中，即当他们在 (x, y) 单元时，他们只能移动到周围四个单元格且不能超出地图。

现在一些格点上方有大石块，共 k 个，每个石块都是矩形的，第 i 个石块位于 x_{l_i}, y_{l_i} 和 x_{r_i}, y_{r_i} 之间。小仓鼠可以选择花费 w_i 点魔力击落石块，使得敌军无法到达石块覆盖的格点上。现在小仓鼠要阻止敌军到达水晶。请输出小仓鼠可以阻止敌军到达水晶至少要花费的魔力，或者输出 -1 表示无论如何都不能阻止敌军到达水晶。

$$2 \leq n, m \leq 10^9, 1 \leq k \leq 2000$$

³<https://ac.nowcoder.com/acm/contest/8925/H>

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础和题

目选讲

外接圆

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

我们现在要挡住敌军的去路，就需要让 $(1, 1)$ 到 (n, m) 无法连通。

图论基础和题

目选讲

外接圆

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

我们现在要挡住敌军的去路，就需要让 $(1, 1)$ 到 (n, m) 无法连通。这个“无法连通”可以是上、右边缘到下边缘，或者是上、右边缘到左边缘。

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

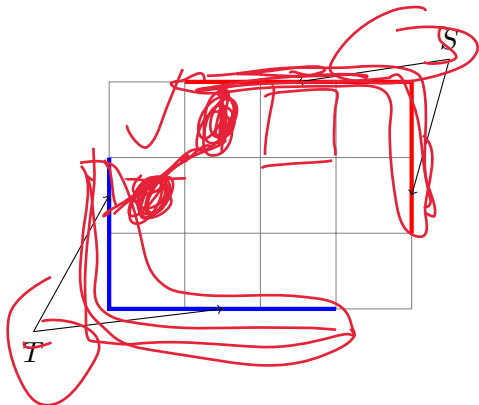
Solution

我们现在要挡住敌军的去路，就需要让 $(1, 1)$ 到 (n, m) 无法连通。这个“无法连通”可以是上、右边缘到下边缘，或者是上、右边缘到左边缘。

我们可以把

$(1, 2) - (1, m) - (n - 1, m)$ 看成一个整体 S ；把 $(2, 1) - (n, 1) - (n, m - 1)$ 看成一个整体 T 。

然后用最少的代价让 $S \rightarrow T$ 连通。



WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

这个时候会想到最小生成树或者最短路。考虑到这里最多只需要一条路径使得 S 与 T 相连（等价于 $(1, 1)$ 与 (n, m) 断开），因此需要求最短路。

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

这个时候会想到最小生成树或者最短路。考虑到这里最多只需要一条路径使得 S 与 T 相连（等价于 $(1, 1)$ 与 (n, m) 断开），因此需要求最短路。

那么现在的问题就是如何建模，怎样才能知道两个点（大石头）是否相连。

WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

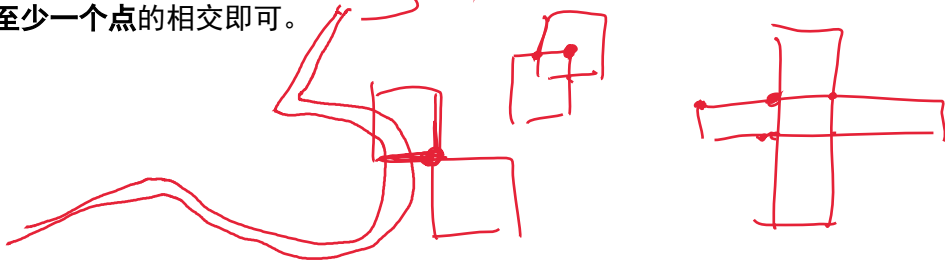
上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

这个时候会想到最小生成树或者最短路。考虑到这里最多只需要一条路径使得 S 与 T 相连（等价于 $(1, 1)$ 与 (n, m) 断开），因此需要求最短路。

那么现在的问题就是如何建模，怎样才能知道两个点（大石头）是否相连。

看到 $k \leq 2000$ ，我们只需要用 $O(k^2)$ 的复杂度判断两个石头两两是否存在至少一个点的相交即可。



WHU2020 新生赛 H 仓鼠与塔防

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

这个时候会想到最小生成树或者最短路。考虑到这里最多只需要一条路径使得 S 与 T 相连（等价于 $(1, 1)$ 与 (n, m) 断开），因此需要求最短路。

那么现在的问题就是如何建模，怎样才能知道两个点（大石头）是否相连。

看到 $k \leq 2000$ ，我们只需要用 $O(n^2)$ 的复杂度判断两个石头两两是否存在至少一个点的相交即可。

具体判断方法就是看两个石头是否有边界相交在至少一个点即可。如果两个石头相互包含，小的石头是没有意义的。

最后跑 $O(k)$ 个节点的最短路即可，时间复杂度 $O(k \log k)$ ，但是上述连边复杂度为 $O(k^2)$ 。

2021HDU(3) New Equipment II⁴

有 n 个工人， n 台设备。你现在需要把每个工人和一个设备匹配起来，每个工人只能配对一个设备、每个设备也只能配对一个工人。 i 号工人和 j 号设备在一起的收益是 $a_i + b_j$ 。

然而，有 k 组工人 u_i 和设备 v_i 之间不能配对。在这种情况下，请你求出最大的收益。

$$1 \leq T \leq 200, 1 \leq n \leq 4000, 1 \leq k \leq 10000$$

⁴hdu 现无法提交，可使用 <https://www.luogu.com.cn/problem/U199465>

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

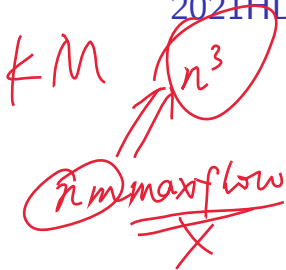
HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

2021HDU(3) New Equipment II

Solution



图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

2021HDU(3) New Equipment II

Solution

正常情况下用 KM 做二分图最大匹配是 $O(n^3)$ 的，本题无法通过。

2021HDU(3) New Equipment II

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

正常情况下用 KM 做二分图最大匹配是 $O(n^3)$ 的，本题无法通过。
但是这个题**不能走的边非常有限**，即 $m \ll O(n^2)$ ，所以介绍一种“补图 BFS”的做法。

2021HDU(3) New Equipment II

Solution



在 $O(n)$ 个节点和 $O(n)$ 个节点两两相连的图中，直接进行 BFS 的复杂度是相当高的。而如果我们采用补图 BFS，也就是每次只去找那些还没有被遍历过的点，这时由于被 block 的边非常的少，所以“还没被遍历过的点”的规模下降得很快。总体而言，进行一次补图 BFS 的过程是 $O(n)$ 的。

10000 - 4000

2021HDU(3) New Equipment II

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

在 $O(n)$ 个节点和 $O(n)$ 个节点两两相连的图中，直接进行 BFS 的复杂度是相当高的。而如果我们采用补图 BFS，也就是每次只去找那些还没有被遍历过的点，这时由于被 block 的边非常的少，所以“还没被遍历过的点”的规模下降得很快。总体而言，进行一次补图 BFS 的过程是 $O(n)$ 的。

在本题中，如果让每台机器优先匹配能和自己匹配的**收益最大的、还没匹配的**工人，同样可以用补图 BFS。只需要先将所有工人从大到小排序，然后让**每台机器在工人链表中从大到小找第一个能和自己匹配的工人**，然后删掉。

所有人的复杂度 $O(m)$

2021HDU(3) New Equipment II

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

在 $O(n)$ 个节点和 $O(n)$ 个节点两两相连的图中，直接进行 BFS 的复杂度是相当高的。而如果我们采用补图 BFS，也就是每次只去找那些还没有被遍历过的点，这时由于被 block 的边非常的少，所以“还没被遍历过的点”的规模下降得很快。总体而言，进行一次补图 BFS 的过程是 $O(n)$ 的。

在本题中，如果让每台机器优先匹配能和自己匹配的**收益最大的、还没匹配的**工人，同样可以用补图 BFS。只需要先将所有工人从大到小排序，然后让每台机器在工人链表中从大到小找第一个能和自己匹配的工人，然后删掉。这个过程就是 $O(n)$ 的了。

2021HDU(3) New Equipment II

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海-Life is a Game

牛客-Eyja fjalla

在 $O(n)$ 个节点和 $O(n)$ 个节点两两相连的图中，直接进行 BFS 的复杂度是相当高的。而如果我们采用补图 BFS，也就是每次只去找那些还没有被遍历过的点，这时由于被 block 的边非常的少，所以“还没被遍历过的点”的规模下降得很快。总体而言，进行一次补图 BFS 的过程是 $O(n)$ 的。

在本题中，如果让每台机器优先匹配能和自己匹配的**收益最大的、还没匹配的**工人，同样可以用补图 BFS。只需要先将所有工人从大到小排序，然后让每台机器在工人链表中从大到小找第一个能和自己匹配的工人，然后删掉。这个过程就是 $O(n)$ 的了。

而 BFS 的过程是 $O(n)$ ，每次还需要进行 $O(n)$ 的增广，最后找到最大权匹配即可。总的时间复杂度为 $O(Tn^2)$ 。

$$O(T(n^2 \log n))$$

200 4000

ICPC2021 Shanghai - Life is a Game⁵

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

给定一个 n 个结点、 m 条无向边的图。初始时你在 x 点，有 k 个积分。第一次走到点 i 时你将获得 a_i 点积分，而经过边 j 时你的积分应至少为 w_j ，经过后积分不会扣除。

求你最终最多能获得多少积分。

q 次询问 (x, k) , $1 \leq n, m, q \leq 10^5$, $1 \leq x \leq n, 1 \leq w, k \leq 10^9$



⁵<https://codeforces.com/gym/103446/problem/H>

图论基础

- 图的定义
- 图的存储
- 图的性质

图的应用/算法

- 最短路
- 树和生成树
- tarjan 和网络流

常用建模选讲

- NOIP2015 信息传递
- 经典题：斗地主
- CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

- HDU-Ink on Paper
- WHU-仓鼠与塔防
- HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

- 牛客 -Eyjafjalla

ICPC2021 Shanghai - Life is a Game

Solution

图论基础和题

目选讲

外接圆

ICPC2021 Shanghai - Life is a Game

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

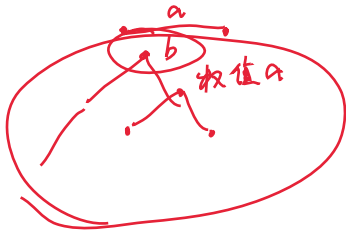
WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

我们发现这个图是可以走回头路的，说明能走的一个区域是一整个连通块，而这个连通块内部一定满足边权全部小于等于某个值。



ICPC2021 Shanghai - Life is a Game

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

我们发现这个图是可以走回头路的，说明能走的一个区域是一整个连通块，而这个连通块内部一定满足边权全部小于等于某个值。

这个特性与 Kruskal 算法类似，可以采用 Kruskal 重构树来重建这个图，然后利用树的结构性质来解决这个问题。

对于每个询问，我们在 Kruskal ^树上判断这个点的位置，如果这个位置合法，那么它子树中所有的节点都是可以走的，然后就可以获取它子树中的所有权值。

ICPC2021 Shanghai - Life is a Game

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

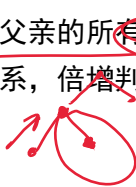
我们发现这个图是可以走回头路的，说明能走的一个区域是一整个连通块，而这个连通块内部一定满足边权全部小于等于某个值。

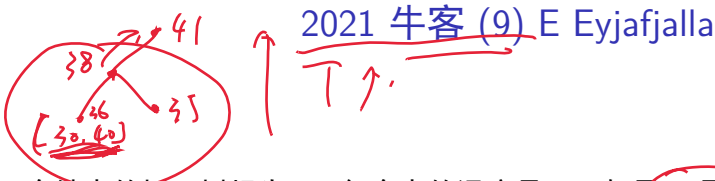
这个特性与 Kruskal 算法类似，可以采用 Kruskal 重构树来重建这个图，然后利用树的结构性质来解决这个问题。

对于每个询问，我们在 Kruskal 上判断这个点的位置，如果这个位置合法，那么它子树中所有的节点都是可以走的，然后就可以获取它子树中的所有权值。

而如果能走到一个点的父亲，那么这个父亲的所有其他儿子的权值也都可以被我们获得。此时可以计算它们之间的关系，倍增判断可以跳到哪里。最终输出答案。

时间复杂度 $O(n \log n + q \log n)$ 。





给定一棵 n 个结点的树，树根为 1，每个点的温度是 t_i 。如果 u 是 v 的祖先，那么一定有 $t_u > t_v$ 。根节点的温度最高。

现在城市 x_i 爆发了新冠，病毒的存活温度为 $[l_i, r_i]$ 。如果一个城市与存在病毒的城市相连，且温度在病毒的存活温度范围内，这个城市就会感染新冠。 q 次询问，每次给定 x, l, r ，问这次爆发会影响多少个城市。

$$1 \leq n, q \leq 10^5, 1 \leq t_i \leq 10^9$$

图论基础和题

目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

2021 牛客 (9) E Eyjafjalla

Solution

2021 牛客 (9) E Eyjafjalla

Solution

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

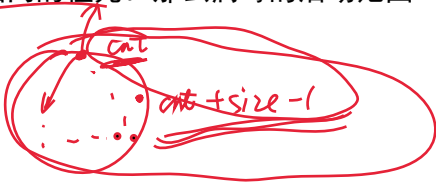
WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

在某棵子树内，dfs 序一定是连续的。而树上的温度是按深度单调的，那么我们可以找到温度最高的在 $[l, r]$ 范围内的祖先。那么病毒的活动范围一定在这个祖先的子树内。



2021 牛客 (9) E Eyjafjalla

Solution

在某棵子树内，dfs 序一定是连续的。而树上的温度是按深度单调的，那么我们可以找到温度最高的在 $[l, r]$ 范围内的祖先。那么病毒的活动范围一定在这个祖先的子树内。

而且根据温度的单调性，所有权值在 $[l, r]$ 范围内的点一定互相连通！

2021 牛客 (9) E Eyjafjalla

Solution

在某棵子树内，dfs 序一定是连续的。而树上的温度是按深度单调的，那么我们可以找到温度最高的在 $[l, r]$ 范围内的祖先。那么病毒的活动范围一定在这个祖先的子树内。

而且根据温度的单调性，所有权值在 $[l, r]$ 范围内的点一定互相连通！

按照 dfs 序，建立可持久化线段树。对于每次询问，倍增到最高的在温度范围内的祖先，然后查询这个祖先的子树范围内有多少温度值在 $[l, r]$ 的节点就可以了。

时间复杂度 $O((n + q) \log^2 n)$ 。

图论基础和题目选讲

外接圆

图论基础

图的定义

图的存储

图的性质

图的应用/算法

最短路

树和生成树

tarjan 和网络流

常用建模选讲

NOIP2015 信息传递

经典题：斗地主

CF1012B 元素周期表

图论例题选讲

HDU-Ink on Paper

WHU-仓鼠与塔防

HDU-Equipment II

上海 -Life is a Game

牛客 -Eyjafjalla

Thanks for listening.

有问题可以与我联系。 包括计算几何。

E-mail:wjyyy1@126.com