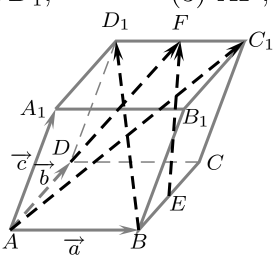
第一章　向量代数

§1　向量的线性运算

1. 如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E、F 分别是棱 BC、C_1D_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{c}$. 试用 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 表示下列向量:

(1) $\overrightarrow{AC_1}$;　　(2) $\overrightarrow{BD_1}$;　　(3) $\overrightarrow{AF}$;　　(4) $\overrightarrow{EF}$.



第 1 题图

解: (1) 因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1},$$

所以

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}$, 而

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\quad \overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1}.$$

所以

$$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}.$$

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1F}$, 而

$$\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AA_1},\quad \overrightarrow{D_1F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$$

(4) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AF} - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$

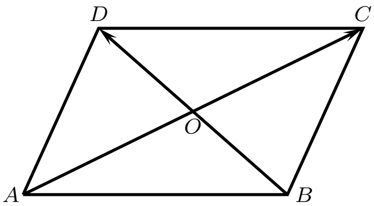
2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 AC 和 BD. 设 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

解: 如图,

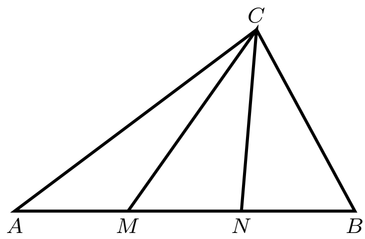
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}),$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}),$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$



第 2 题图



第 3 题图

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 是 AB 边上的三等分点. 设 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$. 求 $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$.

解: 如图, 因为

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a},$$

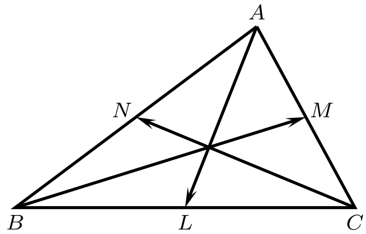
$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a}.$$

4. 设 L, M, N 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点. 证明三中线向量 $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

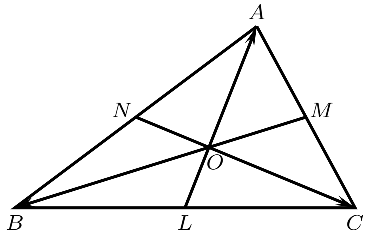
证明: 因为 $\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形, 当且仅当将这三个向量之和为零向量. 由

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\quad \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}),\quad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),$$

可得: $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$.



第 4 题图



第 5 题图

5. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0.$$

解: 如图, 设 AL,BM,CN 是 3 条中线, O 是三角形的重心. 则 $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{LA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CN}$, 因此由第 4 题,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN})=0.$$

6. 在四面体 $O-ABC$ 中, 设点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心. 用 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 来表示向量 $\overrightarrow{OG}$.

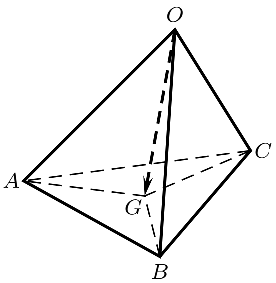
解: 因为 $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CO}$. 而由第 5 题知 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$. 因此

$$3\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}.$$

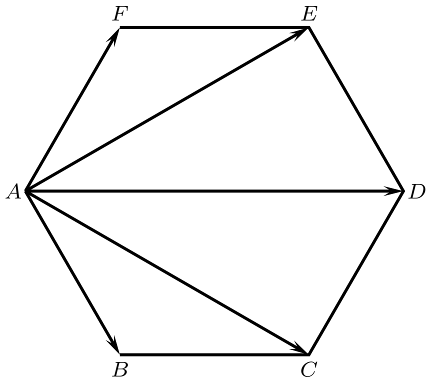
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

7. 设 $ABCDEF$ 为正六边形, 求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

解: 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.



第 6 题图



第 7 题图

8. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=-5\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是不共线的非零向量). 证明 $ABCD$ 为梯形.

证明: 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$. 但 $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$, 所以 $ABCD$ 是梯形.

9. 设 A,B,C,D 是一个四面体的四个顶点, M,N 分别是边 AB, CD 的中点. 证明:

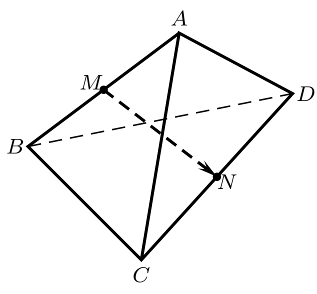
$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

证明: 如图,

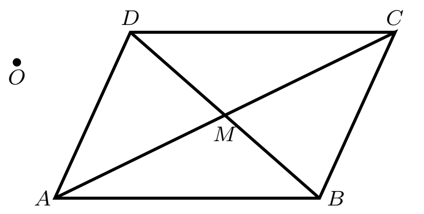
$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),\quad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

所以

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$



第 9 题图



第 10 题图

10. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

证明: 如图, 因为

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}),$$

所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

11. 要使下列各式成立, 向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$; (2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$;

(3) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$; (4) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

解: (1) 利用“三角形两边之和大于第三边”可知: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$. 且要使 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$ 必须: $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 同向, 或 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 中至少有一为 0.

(2) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}$, 原式化为: $|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|+|\overrightarrow{b}|$. 所以 $\overrightarrow{b}/\!/\overrightarrow{c}$ 且反向. 由此可得: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$, 反向, 且 $|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.

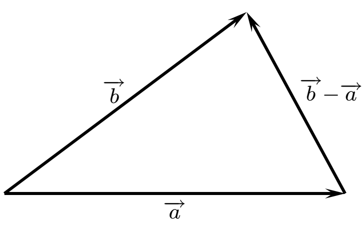
(3) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, 原式化为: $|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|$. 由 (1) 知: $\overrightarrow{b}/\!/\overrightarrow{c}$ 且同向. 所以 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$ 且同向. 又因$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|\geq 0$, 所以$|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.

(4) 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, 原式化为: $|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{c}|-|\overrightarrow{b}|$. 由 (2) 知: $\overrightarrow{c}/\!/\overrightarrow{b}$ 且反向, 或 $\overrightarrow{b}=0$, 同时, $|\overrightarrow{c}|\geq|\overrightarrow{b}|$. 所以$\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$ 且反向, 或 $\overrightarrow{b}=0$ 或 $\overrightarrow{a}=0$.

12. 证明下列不等式, 并说明等号什么时候成立.

(1) $|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|\geqslant|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$; (2) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|$.

证明: (1) 如图, 利用“三角形两边之差小于第三边”可得欲证的不等式. 等式成立的条件可参见习题 11(3): $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$, 同向, 且 $|\overrightarrow{a}|\geq|\overrightarrow{b}|$, 或 $\overrightarrow{b}=0$.



第 12(1) 题图

(2) 令 $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$. 则: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{d}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|$. 等号成立当且仅当(i) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 互相平行且同向, 或(ii) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 中至少两个为 0 (也可看成 (i) 的特例).

***13.** O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心. 证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

证明: 先考虑 n 为偶数的情形. 此时. 显然有: $\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$. 再看 n 为奇数的情形: 我们增加一倍顶点 $B_1,\cdots,B_n$ 使原来正 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 成为: $A_1B_1A_2B_2\cdots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$, 这是一个 $2n$ 边形. 所以

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OB_n}=0.$$

注意到 $\overrightarrow{OB_i}$ 是由 $\overrightarrow{OA_i}$ 旋转一个定角 $\dfrac{\pi}{n}$ 而得到, 若记:

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n},$$
$$\overrightarrow{q}=\overrightarrow{OB_1}+\cdots+\overrightarrow{OB_n},$$

那么 $\overrightarrow{q}$ 是由 $\overrightarrow{p}$ 旋转 $\dfrac{\pi}{n}$ 角而得到. 由于 $0<\dfrac{\pi}{n}<\pi$, $\overrightarrow{q}$ 与 $\overrightarrow{p}$ 不平行, 故 $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q}=0$.

*__14.__ O 为正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, P 是任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}.$$

证明: 因为

$$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{A_iO}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$n\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}+(\overrightarrow{A_1O}+\cdots+\overrightarrow{A_nO})=\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}$$

(利用第 13 题的结论).

§2　向量的共线与共面

1. 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 不共线, 则向量 $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{d}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 是否线性相关?

解: 设有 $k\ \ m$ 使: $k\overrightarrow{c}+m\overrightarrow{d}=0$, 即

$$3k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}+2m\overrightarrow{a}-m\overrightarrow{b}=0,$$

整理后为

$$(3k+2m)\overrightarrow{a}+(k-m)\overrightarrow{b}=0.$$

由于 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 不共线, 故 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases}3k+2m=0\\k-m=0\end{cases}\qquad \text{解得 } k=m=0,$$

即 $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ 线性无关.

2. 如果 3 个向量都能被两个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 线性表示, 那么这 3 个向量一定共面.

证明: 设 $\overrightarrow{p} = c_{11}\overrightarrow{a} + c_{12}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = c_{21}\overrightarrow{a} + c_{22}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{r} = c_{31}\overrightarrow{a} + c_{32}\overrightarrow{b}$. 则

$$x_1\overrightarrow{p} + x_2\overrightarrow{q} + x_3\overrightarrow{r} = (x_1c_{11} + x_2c_{21} + x_3c_{31})\overrightarrow{a} + (x_1c_{12} + x_2c_{22} + x_3c_{32})\overrightarrow{b}.$$

方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + c_{31}x_3 = 0 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + c_{32}x_3 = 0 \end{cases}$$

的变量个数超过方程个数, 一定有一组非零解 $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, $x_3 = k_3$, 使得

$$k_1\overrightarrow{p} + k_2\overrightarrow{q} + k_3\overrightarrow{r} = (k_1c_{11} + k_2c_{21} + k_3c_{31})\overrightarrow{a} + (k_1c_{12} + k_2c_{22} + k_3c_{32})\overrightarrow{b} = 0.$$

因此 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ 线性相关, 从而共面.

3. 证明三个向量 $k_1\overrightarrow{a} - k_2\overrightarrow{b}$, $k_2\overrightarrow{b} - k_3\overrightarrow{c}$, $k_3\overrightarrow{c} - k_1\overrightarrow{a}$ 共面.

证明: 由等式

$$(k_1\overrightarrow{a} - k_2\overrightarrow{b}) + (k_2\overrightarrow{b} - k_3\overrightarrow{c}) + (k_3\overrightarrow{c} - k_1\overrightarrow{a}) = 0,$$

可知这 3 个向量线性相关, 所以共面.

4. 设 $\overrightarrow{a_1} = 2\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{b_3}$, $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{b_3}$, $\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3}$. 证明向量 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 共面的充分必要条件是 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 共面.

证明:

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} = 2k_1\overrightarrow{b_1} + (3k_1 + k_2 + k_3)\overrightarrow{b_2} + (-k_1 - k_2 + k_3)\overrightarrow{b_3}.$$

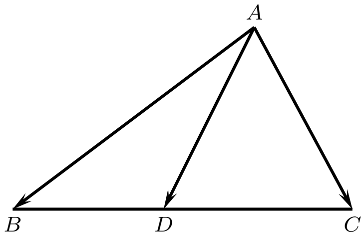
从方程组

$$\begin{cases} 2k_1 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

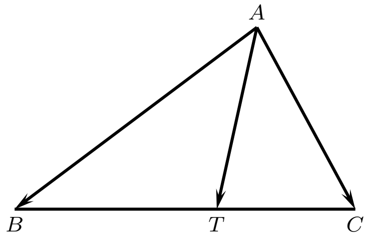
解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 也就是说, k_1, k_2, k_3 不全为零当且仅当 $2k_1, 3k_1 + k_2 + k_3, -k_1 - k_2 + k_3$ 不全为零. 即 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 线性相关当且仅当 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 线性相关. 从而 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ 共面.

5. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的点, 满足 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$. 试用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 来表示 $\overrightarrow{AD}$.

解: 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. 代入 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{DC}$, 得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AD}$, 解得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$.



第 5 题图



第 6 题图

6. 设 AT 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线 (与 BC 交于 T 点), 将 $\overrightarrow{AT}$ 用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 来表示.

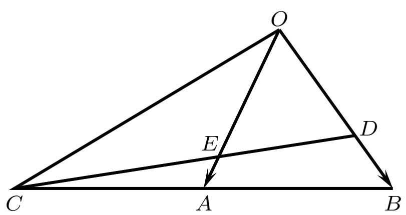
解: 设 $\overrightarrow{BT}=k\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{TC}=(1-k)\overrightarrow{BC}$. 由角平分线的性质可知, $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{AC}|=k:(1-k)$, 因此 $k=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$. 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).\end{aligned}$$

7 平面上有一个三角形 $\triangle OAB$, 点 B 和 C 关于中心 A 对称, 点 D 把线段 OB 分成 $2:1$, DC 和 OA 交于点 E. 设 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$.

(1) 试用 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 来表示 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{DC}$;

(2) 求比值 $OE:OA$.



第 7 题图

解: (1) 因 B 和 C 关于中心 A 对称, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}=2(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$. 又因 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$, 得 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{b}$. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.

(2) 设 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{a}$, 则由 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+m\overrightarrow{DC}$ 可知 $k\overrightarrow{a}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}+m\left(2\overrightarrow{a}-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{b}\right)$. 解得 $k=\dfrac{4}{5}$, 因此 $OE:OA=4:5$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 分线段 AB 为 $2:1$, 点 N 分线段 AC 为 $3:2$. 设 CM 与 BN 的交点为 P, 直线 AP 与边 BC 交于点 Q. 试用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 来表示 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AQ}$.

解: 因为 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BN}$. 则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}$ 得

$$k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+m\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).$$

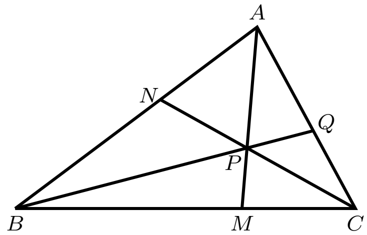
解出 $k=\dfrac{2}{3}$. 所以

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

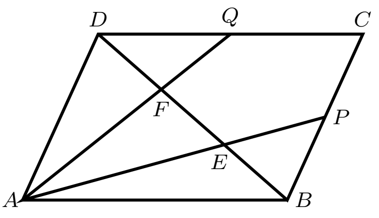
又点 Q 在 BC 及 AP 的延长线上, 所以 $\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$. 即

$$l\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}).$$

解出 $l=\dfrac{9}{7}$, 即有 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.



第 8 题图



第 9 题图

9. 设 $ABCD$ 是平行四边形, P,Q 分别是边 BC,CD 的中点. 证明 AP,AQ 与对角线 BD 相交于 E,F, 而将 BD 三等分.

证明: 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, 则

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}.$$

又设

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AP} \quad (k > 0), \quad \overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AQ} \quad (m > 0),$$

则

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{a} + \frac{k}{2}\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{b} + \frac{m}{2}\overrightarrow{a}.$$

但是

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \quad (t > 0).$$

所以

$$k\overrightarrow{a} + \frac{k}{2}\overrightarrow{b} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b},$$

即:

$$(k+t-1)\overrightarrow{a} = \left(t - \frac{k}{2}\right)\overrightarrow{b},$$

由于 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不平行, 所以

$$\begin{cases} k+t-1=0 \\ t-\dfrac{k}{2}=0 \end{cases} \qquad \text{即} \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

同理, 由

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{BD} = (1-s)\overrightarrow{b} + s\overrightarrow{b} \quad (s > 0),$$

可得:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}+s-1=0 \\ s-m=0, \end{cases} \qquad \text{即:} \begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ s=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

最后得到:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD},$$

说明 E, F 是线段 BD 的三等分点.

10. 设 O 是一个定点, 证明: 对于不在一直线上的 3 个点 A, B, C, 点 M 位于平面 ABC 上的充分必要条件是存在实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

证明: 已知 A B C 三点不共线, 故 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性无关. 任意点 M 位于平面 ABC 上当且仅当 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 共面, 即: $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性相关, 当且仅当存在不全为 0 的实数m_1,m_2,m_3, 使

$$m_1\overrightarrow{AM}+m_2\overrightarrow{AB}+m_3\overrightarrow{AC}=0,$$

当且仅当对于定点 O 有:

$$m_1(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})+m_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m_3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$m_1\overrightarrow{OM}=(m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{OA}-m_2\overrightarrow{OB}-m_3\overrightarrow{OC}.$$

显然 $m_1\neq 0$, 不然与 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 线性无关矛盾. 因此若记:

$$k_1=\frac{1}{m_1}(m_1+m_2+m_3),\quad k_2=-\frac{m_2}{m_1},$$

$$k_3=-\frac{m_3}{m_1},$$

则

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},$$

且 $k_1+k_2+k_3=1$.

11. 设 O 是一个定点, 证明: 点 M 位于 $\triangle ABC$ 上 (包括它的边) 的充分必要条件是存在非负实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},\quad 且\ k_1+k_2+k_3=1.$$

证明: 延长 AM, 必可交 BC 于 D 点. 因此 $\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD}$, 其中 $0\le l\le 1$. 由于 D 在线段 BC 上, 根据例 2.1, 存在实数 m_1,m_2, 使得

$$\overrightarrow{OD}=m_1\overrightarrow{OB}+m_2\overrightarrow{OC},\quad m_1+m_2=1,m_1,m_2\ge 0.$$

于是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OD}=(1-l)\overrightarrow{OA}+lm_1\overrightarrow{OB}+lm_2\overrightarrow{OC}.$$

令 $k_1=1-l$, $k_2=lm_1$, $k_3=lm_2$, 即得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},\quad k_1+k_2+k_3=1,\ k_1,k_2,k_3\ge 0.$$

反之, 不妨设 $k_1 \neq 1$, 解方程组

$$\begin{cases} 1-l=k_1 \\ lm_1=k_2 \\ lm_2=k_3 \end{cases} \quad \text{可得} \begin{cases} l=1-k_1, \\ m_1=\dfrac{k_2}{1-k_1}, \\ m_2=\dfrac{k_3}{1-k_1}, \end{cases}$$

则有

$$m_1+m_2=1, \quad m_1,m_2 \geq 0, \quad 0<l\leq 1.$$

令

$$\overrightarrow{OD}=m_1\overrightarrow{OB}+m_2\overrightarrow{OC},$$

则 D 点在线段 BC 上. 由

$$\overrightarrow{OM}=(1-l)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OD}$$

可以得出 $\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD}$, 因此 M 在线段 AD 上, 从而在 $\triangle ABC$ 上.

12. 证明: 任意不同的三点 A,B,C 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3=0.$$

证明: $A\,B\,C$ 共线, 当且仅当 $l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=0$ (l,m 都不为零), 当且仅当

$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

$$-(l+m)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=0.$$

令 $k_1=-(l+m)$, $k_2=l$, $k_3=m$, 显然它们不全为零, 且:

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0, \quad k_1+k_2+k_3=0.$$

13. 证明: 任意不同的四点 A,B,C,D 共面的充分必要条件是存在四个不全为零的实数, 使得

$$0=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}, \quad \text{且 } k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

证明: $A\,B\,C\,D$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 线性相关, 当且仅当有不全为零的数 l,m,n 使:

$$l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}=0,$$

当且仅当

$$l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=0,$$

当且仅当

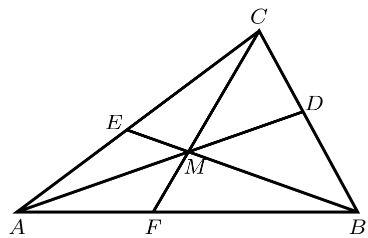
$$-(l+m+n)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OD}=0.$$

记 $k_1=-(l+m+n)$, $k_2=l$, $k_3=m$, $k_4=n$, 显然它们不全为零, 使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}=0,\quad k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

*__14.__ 用向量的方法证明契维定理: 若 $\triangle ABC$ 的三条边 AB, BC, CA 依次被分割成 $AF:FB=k_1:k_2$, $BD:DC=k_3:k_1$, $CE:EA=k_2:k_3$, 其中, $k_1,k_2.k_3$ 均为正数. 则 $\triangle ABC$ 的顶点与它对边的分点的连线交于一点 M, 且对于任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).$$



第 11 题图

证明: 根据分点 D 与 E 的定义可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

设 AD 与 BE 交于 M, 则有

$$\overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BE}.$$

把前面得到的表达式代入以下等式: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, 得到

$$l\left(\frac{k_1}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+m\left(\frac{k_3}{k_2+k_3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).$$

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 线性无关, 由上述等式得到方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{lk_3}{k_1+k_3}=\dfrac{mk_3}{k_2+k_3}\\ \dfrac{lk_1}{k_1+k_3}=1-m\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}l=\dfrac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\\ m=\dfrac{k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}.\end{cases}$$

即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD}.$$

又设 AD 与 CF 相交于 M', 同理可得

$$\overrightarrow{AM'}=\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\overrightarrow{AD},$$

即 M 与 M' 重合, 因此 AD,BE,CF 交于同一点 M.

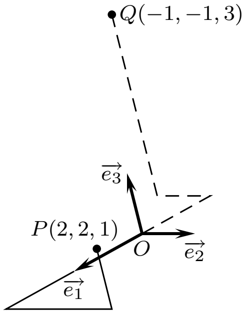
对任意点 O, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1+k_3}{k_1+k_2+k_3}\left(\frac{k_2}{k_1+k_3}\overrightarrow{AB}+\frac{k_3}{k_1+k_3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{k_1}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{k_1+k_2+k_3}(k_2\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

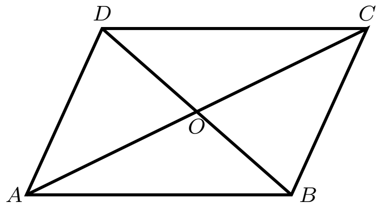
§ 3　用坐标表示向量

1. 设 P,Q 两点在标架$[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]$下的坐标分别是$(2,2,1)$, $(-1,-1,3)$. 试画出 P,Q 点的位置.

解: 见附图.



第 1 题图



第 2 题图

2. 对于平行四边形$ABCD$, 求A, D, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}$在标架$[C; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$ 下的坐标.

解: $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = (-1)\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{BD}$, 点 A 坐标为 $(-1, 0)$;

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

点 D 坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{AD}$ 坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD} = 0\overrightarrow{AC} + (-1)\overrightarrow{BD},$$

$\overrightarrow{DB}$ 坐标为 $(0, -1)$.

3. 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1, 5, 2)$, $(0, -3, 4)$, $(-2, 3, -1)$. 求向量 $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, $-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}$ 的坐标.

解: $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = 2(1, 5, 2) + (-2, 3, -1) = (2, 10, 4) + (-2, 3, -1) = (0, 13, 3)$.

$$\begin{aligned}&-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c} = -3(1, 5, 2) + 2(0, -3, 4) + 4(-2, 3, -1)\\&= (-3, -15, -6) + (0, -6, 8) + (-8, 12, -4) = (-11, -9, -2).\end{aligned}$$

4. 已知 A、B 两点的坐标分别为 $(1, -2, 3)$, $(4, 1, 2)$.

(1) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 AB 成定比 $3 : 2$;

(2) 试确定点 P 的坐标, 使点 P 分线段 BA 成定比 $-2 : 3$.

解: (1) 由 $|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PB}|=3:2$ 可得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$. 利用例 3.1 的定比分点公式, 取 $k=\dfrac{3}{2}$, 可得 P 点坐标 $\left(\dfrac{14}{5},-\dfrac{1}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.

(2) 由已知条件可得 $\overrightarrow{BP}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$, 用定比分点公式算得 P 点坐标 $(10,7,0)$.

5 已知 $A(1,-1)$, $B(-4,5)$, 将线段 AB 延长至 C 使 $|AC|=5|AB|$. 求点 C 的坐标.

解: (1) 当 $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}$. 因此 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 即 B 是线段 AC 的比值为 $\dfrac{1}{4}$ 的定比分点. 所以

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{1+\frac{1}{4}x_C}{1+\frac{1}{4}} \\ y_B=\dfrac{-1+\frac{1}{4}y_C}{1+\frac{1}{4}} \end{cases} \qquad \text{解得: } C(-24,29).$$

(2) 当 $\overrightarrow{AC}=-5\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{AB}$. 所以

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{x_C+5x_B}{1+5} \\ y_A=\dfrac{y_C+5y_B}{1+5} \end{cases} \qquad \text{解得: } C(26,-31).$$

6. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分, 试求出这线段的两个端点 A,B 的坐标.

解: 不妨设 A,B,C,D 四点如图所示, A,B 两点的坐标分别为 (x_A,y_A,z_A) 与 (x_B,y_B,z_B), 则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$. 所以

$$(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C),$$

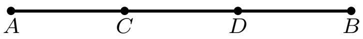
即:

$$\begin{cases} x_A=2x_C-x_D=-1 \\ y_A=2y_C-y_D=2 \\ z_A=2z_C-z_D=4. \end{cases}$$

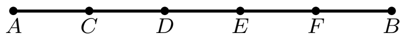
同理,

$$\begin{cases} x_B=2x_D-x_C=8 \\ y_B=2y_D-y_C=-4 \\ z_B=2z_D-z_C=-2. \end{cases}$$

因此 A, B 两点的坐标分别为 $(-1,2,4)$ 与 $(8,-4,-2)$ (两种可能).



第 6 题图



第 7 题图

7. 设 A, B 两点的坐标分别为 $(-6,5,-8)$, $(4,0,7)$, 试确定点 C, D, E, F, 使 C, D, E, F 将线段 AB 五等分.

解: 不妨设 A, B, C, D, E, F 如图. 所以

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB},$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EB}, \quad \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}.$$

利用定比分点公式算得 C 点坐标为 $(-4,4,-5)$, D 点坐标为 $(-2,3,-2)$, E 点坐标为 $(0,2,1)$, F 点坐标为 $(2,1,4)$.

8. $ABCD$ 为平行四边形. 已知 A, B 及对角线交点的坐标分别为 $(-3,1,5)$, $(2,-3,4)$, $(1,-1,2)$. 试确定点 C, D 的坐标.

解: 设对角线交点为 M, C, D 的坐标分别为 $(x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D)$. 由于 M 是 A, C 的中点, 因此

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(-3 + x_C) = 1 \\ \dfrac{1}{2}(1 + y_C) = -1 \\ \dfrac{1}{2}(5 + z_C) = 2, \end{cases}$$

解得 C 点坐标为 $(5,-3,-1)$. 由于 M 也是 B, D 的中点, 同理可得 D 点坐标为 $(0,1,0)$.

9. 证明三角形的三条中线交于一点 (重心).

证明: 设 D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 上的中点. AD 与 BE 交于 G, AD 与 CF 交于 G'. 则

$$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AD} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC}.$$

若建立仿射标架 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, 则点 G 坐标为 $\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k}{2}\right)$. 又

$$\overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{BE} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = m\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right]$$

$$= \frac{m}{2}\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB},$$

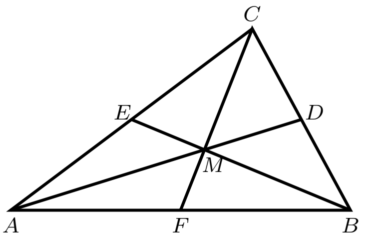
所以 $\overrightarrow{BG}$ 坐标为 $\left(-m, \frac{m}{2}\right)$. 但 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, 所以,

$$\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) = (1,0) + \left(-m, \frac{m}{2}\right),$$

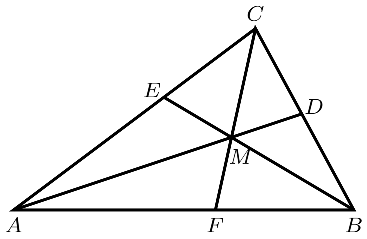
解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 - m \\ \dfrac{k}{2} = \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

得 $k = m = \frac{2}{3}$. 所以 G 的坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 同理, 可以推得 G' 的坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 证得 $G = G'$.



第 9 题图



第 10 题图

*__10.__ 证明三角形的三条角平分线交于一点.

证明: 设 $\triangle ABC$ 的三条角平分线分别为 AD, BE 和 CF. 且设 AD 与 BE 交于 T 点. 令

$$\overrightarrow{AT} = k\overrightarrow{AD} = \frac{k}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}(|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}).$$

建立仿射标架 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, 且令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. 则 T 点坐标是 $\left(\frac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$. 我们还知道

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|}(|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA} + |\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}),$$

所以

$$\overrightarrow{BT} = m\overrightarrow{BE} = \frac{m}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}(-|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|\overrightarrow{a} + |\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}))$$

$$= -m\overrightarrow{a} + \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\overrightarrow{b}.$$

由于 $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, 所以

$$\left(\frac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right) = (1, 0) + \left(-m, \frac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}\right),$$

即:

$$\begin{cases} \dfrac{k|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = 1 - m \\ \dfrac{k|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{m|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|} \end{cases}$$

解得:

$$k = \frac{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}|}.$$

又设 AD 与 CF 交于 T' 点,

$$\overrightarrow{AT'} = s\overrightarrow{AD} = \frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} + \frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}.$$

得 T' 点的坐标为 $\left(\dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right)$.

$$\overrightarrow{CT'} = t\overrightarrow{CF} = \frac{t}{|\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|}(|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA} + |\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}) = \frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b},$$

由 $\overrightarrow{AT'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT'}$, 得:

$$\left(\frac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}, \frac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}\right) = (0, 1) + \left(\frac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}, -t\right),$$

即:

$$\begin{cases} \dfrac{s|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = \dfrac{t|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|} \\ \dfrac{s|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|} = 1 - t \end{cases}$$

解得:

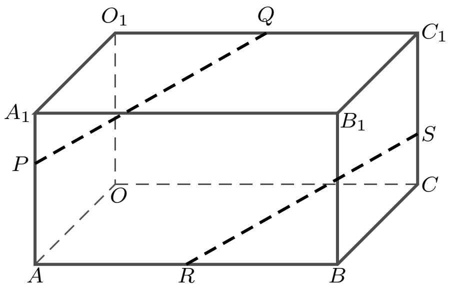
$$s = \frac{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|}.$$

由此可见 $s=k$, 即 $T=T'$.

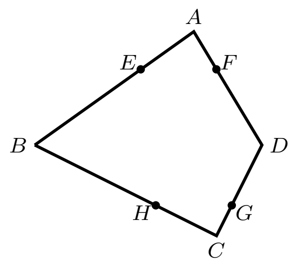
11 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 由 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+mt\overrightarrow{AC}$ 所确定, 其中实数 k,m,t 满足 $k+m=1$, $k\geq\dfrac{1}{3}$, $m\geq\dfrac{1}{3}$, $-1\leq t\leq 1$. 若使 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 k,m,t 各应取什么值?

解: 建立仿射坐标系 $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$. 则 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $P(k,mt)$. 若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $k=\dfrac{1}{3}$, $mt=\dfrac{1}{3}$. 而 $k+m=1$, 推知 $m=\dfrac{2}{3}$, 从而 $t=\dfrac{1}{2}$.

12. 如图, 已知平行六面体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中, 点 P 在棱 AA_1 上, 且 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}$, 点 S 在棱 CC_1 上, 且 $\overrightarrow{CS}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC_1}$, 点 Q,R 分别是棱 O_1C_1,AB 的中点. 求证: 直线 PQ 与直线 RS 平行.



第 12 题图



第 13 题图

证明: 建立坐标系 $[O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}]$. 因为 $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PA_1}|$, 所以

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1Q}=\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

从而

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

类似地,

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1},$$

所以

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

这样就有 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$, 于是 $\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{RS}$.

13. 已知空间四边形 $ABCD$, 将 AB,AD,CD 及 CB 以相同比分之, 证明这四个分点构成一个平行四边形.

证明: 如图. 设分点为 E,F,G,H. 设

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EB}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{FD}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD},$$

则

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BD}.$$

类似地, 由 $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CB}$ 以及 $\overrightarrow{CG}=k\overrightarrow{CD}$ 可以得到 $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. 因此 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, 证明了 $EFGH$ 是平行四边形.

14. 证明: 四面体的四条中线交于一点 (即四面体的重心), 且此交点将每一条中线分成定比为 $3:1$ (由顶点算起) 的两部分. (注: 四面体的中线即四面体的顶点到其对面的重心的连线)

证明: 建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$. G 点为 $\triangle ABC$ 的重心, G_1 为 $\triangle VBC$ 的重心, 由习题 1–2 的第 3 题知:

$$\overrightarrow{VG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_1}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AV})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VB}-\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VA}-\overrightarrow{VA})\\&=\frac{1}{3}(-3\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\left(-1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

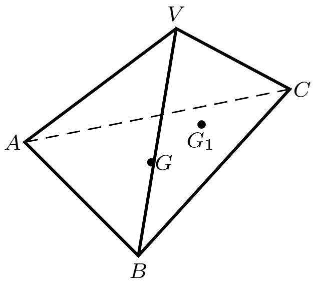
取把中线 VG 分成 $3:1$ 的分点 M, 即

$$\overrightarrow{VM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{VG}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$

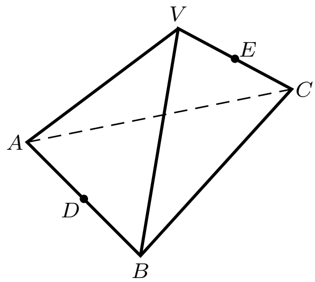
同时,

$$\overrightarrow{VA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM}.$$

所以 M 在 VG 与 AG_1 上. 同理, 可证得: 若设 G_2,G_3 分别是 $\triangle VAB$ 和 $\triangle VAC$ 的重心. 则 CG_2 与 BG_3 也必交于点 M', 且 $\overrightarrow{VM'}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, 因此 $M'=M$, 且交点分每一中线成定比 $3:1$.



第 14 题图



第 15 题图

15. 四面体的不相交的两条棱称为对棱, 每一对对棱的中点的连线称为四面体的拟中线. 证明: 四面体的三条拟中线交于它的重心, 且此重心是每一条拟中线的中点.

证明: 同上题建立仿射坐标系 $[V;\overrightarrow{VA},\overrightarrow{VB},\overrightarrow{VC}]$, 设 M 是四面体的重心, 则 $\overrightarrow{VM}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. 设 D,E 分别为 AB,VC 的中点. 则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{VA},$$

$$\overrightarrow{VD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

$$\overrightarrow{VE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VC}=\left(0,0,\frac{1}{2}\right),$$

所以

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

由于

$$\overrightarrow{VE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\overrightarrow{VM},$$

说明重心 M 在 ED 上且等分 ED. 同理可证其它.

§ 4　线性相关性与线性方程组

1. 计算下列 2 阶与 3 阶行列式:

解: (1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5.$　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2.$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -22.$ (6) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz.$

2. 利用 2 阶或 3 阶行列式解线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+2y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-3, \\ x+3y-2z=-6. \end{cases}$

解: (1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{13}{13} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-13}{13} = -1.$

(2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -6 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-42}{49} = -\dfrac{6}{7}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{189}{49} = \dfrac{27}{7}.$

3. 设 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 为基.

(1) 证明: 向量 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}$ 线性无关;

(2) 求向量 $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ 在基 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 下的坐标;

(3) 求向量 $\overrightarrow{f}$, 使 $-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{f} = 0$.

解: (1) 设有实数 x_1, x_2, x_3 满足线性关系式$x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} + x_3\overrightarrow{c} = 0$, 表达

成坐标形式就是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

它的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -10 & 6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

因此这个方程组只有零解, 即 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 线性无关.

(2) $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 3(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) - 2(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 10\overrightarrow{e_3}) + (-\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 17\overrightarrow{e_2} + 23\overrightarrow{e_3}$, 故 $\overrightarrow{d}$ 的坐标是 $(-2, 17, 23)$.

(3) $\overrightarrow{f} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) = \dfrac{1}{3}(-6\overrightarrow{e_1} + 15\overrightarrow{e_2} + 37\overrightarrow{e_3}) = -2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + \dfrac{37}{3}\overrightarrow{e_3}$.

4. 判断下列每组的三个向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 是否共面? 能否将 $\overrightarrow{c}$ 表示成其它两个向量的线性组合? 若能, 写出具体的表示式子.

(1) $\overrightarrow{a}(5, 2, 1)$, $\overrightarrow{b}(-1, 4, 2)$, $\overrightarrow{c}(-1, -1, 5)$;

(2) $\overrightarrow{a}(3, 3, 2)$, $\overrightarrow{b}(6, 6, 4)$, $\overrightarrow{c}(1, -1, 0)$;

(3) $\overrightarrow{a}(1, 2, -3)$, $\overrightarrow{b}(-2, -4, 6)$, $\overrightarrow{c}(1, 0, 5)$.

解: 问题归结为求解 $x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} + x_3\overrightarrow{c} = 0$.

(1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 121 \neq 0,$$

方程只有零解, 故原向量组不共面.

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3 = -1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合.

(3) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

方程组有非零解, 故原向量组共面. 为将 $\overrightarrow{c}$ 表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合, 可取 $x_3 = -1$ 代入, 得到方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 = -5, \end{cases}$$

这是矛盾方程组, 因此 $\overrightarrow{c}$ 不能表示成 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 的线性组合.

5. 设向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1,-1,2)$, $(2,k,1)$, $(1,1-k,k)$. 问: 当 k 取什么值时, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面? 特别地, k 取什么值时, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ 共线?

解: 这 3 个向量共面的充分必要条件是其坐标的行列式等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1-k & k \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0.$$

因此当 $k=1$ 或 2 时这 3 个向量共面. 要使 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 共线必须使它们的相应坐标成比例, 即 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1-k}{-1}=\dfrac{k}{2}$, 解得 $k=2$. 因此当 $k=2$ 时 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 共线.

6. 设 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ 为基. 问向量 $\overrightarrow{v}$ 能否表为向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 的线性组合? 如能, 则写出表达式.

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=6\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+15\overrightarrow{e_3}$;

(2) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{e_1}+6\overrightarrow{e_2}+5\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$.

解: 设 $\overrightarrow{v}=x_1\overrightarrow{a}+x_2\overrightarrow{b}+x_3\overrightarrow{c}$, 问题归结为解线性方程组.

(1) 方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\2x_1-x_2+x_3=3\\4x_1+x_2+3x_3=15,\end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\4&1&3\end{vmatrix}=0$, 不能断定方程组是否有解. 用加减消去法解得 $\begin{cases}x_1=3-\dfrac{2}{3}x_3\\x_2=3-\dfrac{1}{3}x_3,\end{cases}$ 令 $x_3=3k$ 可以得到线性表示式 $\overrightarrow{v}=(3-2k)\overrightarrow{a}+(3-k)\overrightarrow{b}+3k\overrightarrow{c}$, 其中 k 为任意数.

(2) 方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2\\-2x_1+2x_2+6x_3=1\\3x_1+2x_2+5x_3=0,\end{cases}$ 系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\-2&2&6\\3&2&5\end{vmatrix}=36,$$

方程组有解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&6\\0&2&5\end{vmatrix}}{36}=-\frac{11}{36},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-1\\-2&1&6\\3&0&5\end{vmatrix}}{36}=\frac{16}{9},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\-2&2&1\\3&2&0\end{vmatrix}}{36}=-\frac{19}{36}.$$

线性表示式为 $\overrightarrow{v}=-\frac{11}{36}\overrightarrow{a}+\frac{16}{9}\overrightarrow{b}-\frac{19}{36}\overrightarrow{c}$.

7. 当 a 为何值时, 下列四点共面:

$$M_1(1,a,a^2),\quad M_2(1,-1,1),\quad M_3(2,1,-2),\quad M_4(-1,2,2).$$

解: 根据推论 4.5, 此 4 点共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}1-1&2-1&-1-1\\-1-a&1-a&2-a\\1-a^2&-2-a^2&2-a^2\end{vmatrix}=-7a^2-5a+2=0,$$

解得 $a=-1$ 或 $\frac{2}{7}$.

§5　n 维向量空间

1. 根据 n 维向量的定义证明: 对任意 n 维向量 α, 有

(1) $0\alpha=0$;

(2) $(-1)\alpha=-\alpha$;

(3) $k0=0$ (任意数 k);

(4) 从 $k\alpha=0$ 推出 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

证明: 对任意的 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, 则:

(1) $0\alpha=(0a_1,\cdots,0a_n)=(0,\cdots,0)=0$.

(2) $(-1)\alpha=((-1)a_1,\cdots,(-1)a_n)=(-a_1,\cdots,-a_n)=-\alpha$.

(3) $k0=(k0,\cdots,k0)=(0,\cdots,0)=0$.

(4) $k\alpha=(ka_1,\cdots,ka_n)=(0,\cdots,0)$. 若 $\alpha\neq0$, 则存在 $a_i\neq0$, 由 $ka_i=0$ 可得 $k=0$.

2. 证明: 任一数域都包含有理数域.

证明: 设 K 为一个数域, 则 $1\in K$. 所以对任意的正整数 n 有 $n=\underbrace{1+\cdots+1}_{n}\in K$, 并且 n 的负元 $-n\in K$. 因此 K 含有全部整数. 又因对任意的整数 $n\neq0$, $n\in K$, $\frac{1}{n}$ 为 n 的逆元, 则 $\frac{1}{n}\in K$, 所以对任意的有理数 $\frac{m}{n}$ (其中 m,n 是整数), 有 $\frac{m}{n}=m\times n\in K$, 故有理数域 $\mathbb{Q}\subseteq K$.

3. 证明: 全体形如

$$a+b\sqrt{2},\quad a,b\in\mathbb{Q}$$

的数组成的集合构成一个数域.

证明: 把这个集合记为 K, 设 $a_1+b_1\sqrt{2}, a_2+b_2\sqrt{2}\in K$, 则

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in K$$

(因为有理数的和与差仍是有理数);

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in K$$

(因为有理数的和、差与乘积仍是有理数); 当 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时,

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{a_2^2-2b_2^2}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\in K$$

(有理数关于除法也是封闭的). 因此集合 K 关于加减乘除法都封闭, 成为一个数域.

4. 设 K 为数域, V 为 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对所有的 $k\in K$, $\alpha,\beta\in V$, 有

(1) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$;

(2) $\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n\text{个}}=n\alpha$;

(3) 若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 则 $\beta=\gamma$.

证明: 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$ $(a_i,b_i\in K)$. 则对任意的 $k\in K$,

(1) $k(\alpha-\beta)=k(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)=(k(a_1-b_1),\cdots,k(a_n-b_n))=(ka_1-kb_1,\cdots,ka_n-kb_n)=k(a_1,\cdots,a_n)-k(b_1,\cdots,b_n)=k\alpha-k\beta$.

(2) $\underbrace{\alpha+\cdots+\alpha}_{n}=(\underbrace{a_1+\cdots a_1}_{n},\underbrace{a_2+\cdots+a_2}_{n},\cdots,\underbrace{a_n+\cdots+a_n}_{n})=(na_1,\cdots,na_n)=n\alpha$.

(3) 若设 $\gamma=(c_1,\cdots,c_n)$, 且 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 即: $(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)=(a_1+c_1,\cdots,a_n+c_n)$, 则有 $a_i+b_i=a_i+c_i$, 即$b_i=c_i$, 所以$\beta=\gamma$.

§ 6　几何空间向量的内积

1. 将下列向量单位化:

(1) $\overrightarrow{a}=5\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$;　　　　(2) $\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{k}$.

解: (1) $\overrightarrow{a}^0=\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{\sqrt{70}}{70}(5\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k})$.

(2) $\overrightarrow{b}^0=\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{k})$.

2. 计算下列向量的夹角:

(1) $\overrightarrow{a}=(1,-2,3)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,-2)$; (2) $\overrightarrow{a}=(-2,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,4)$.

解: (1) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{14}$, $|\overrightarrow{b}|=3$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-6$, 所以

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 3}=-\frac{\sqrt{14}}{7},\quad \langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\pi-\arccos\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

(2) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{b}|=3\sqrt{2}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-7$, 所以

$$\cos\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\frac{-7}{6\sqrt{3}}=-\frac{7\sqrt{3}}{18},\quad \langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\pi-\arccos\frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

3. 求向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{e}^0$ 上的投影:

(1) $\overrightarrow{a}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{e}=(1,1,1)$; (2) $\overrightarrow{a}=(-2,1,3)$, $\overrightarrow{e}=(1,2,0)$.

解: (1) $\overrightarrow{e}^0=\dfrac{\overrightarrow{e}}{|\overrightarrow{e}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e}^0}\overrightarrow{a}&=(\Pi_{\overrightarrow{e}^0}\overrightarrow{a})\overrightarrow{e}^0=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}^0)\overrightarrow{e}^0=\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{e}^0\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)=\frac{2}{3}(1,1,1).\end{aligned}$$

(2) 因 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}=0$, 所以 $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{e}^0}\overrightarrow{a}=0$.

4. 证明: 以 $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,2,1)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证明: $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-6,3,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,6,-1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{46}\neq|\overrightarrow{AB}|$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. 证明: 以 $A(3,-2,1)$, $B(7,6,9)$, $C(9,1,-5)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明: $\overrightarrow{AB}=(4,8,8)$, $\overrightarrow{AC}=(6,3,-6)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12(2+2-4)=0$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

6. 设有三个向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 两两构成 60° 角, 且知 $|\overrightarrow{a}|=4$, $|\overrightarrow{b}|=2$, $|\overrightarrow{c}|=6$. 求 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 的长度.

解: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=16+4+36+2(8+24+12)\cos 60^\circ=100$. 所以 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=10$.

7. 已知 $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=2$, $\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$. 试求 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 与 $2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ 的内积.

解: $(3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b})=6\overrightarrow{a}^2-10\overrightarrow{b}^2-11\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=54-40-11\times 3\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=14-33\sqrt{3}$.

8. 在直角坐标系中, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$的坐标分别是$(3,5,7)$, $(0,4,3)$, $(-1,2,-4)$. 求 $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}$ 与 $2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 的夹角.

解: 记

$$\overrightarrow{p}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-5\overrightarrow{c}=(14,21,53),\quad \overrightarrow{q}=2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(-1,10,2),$$

则

$$\overrightarrow{p}^2=3446,\quad \overrightarrow{q}^2=105,\quad \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=302.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}\rangle=\frac{151\sqrt{361830}}{180915}.$$

9. 求下列向量的方向余弦:

(1) $\overrightarrow{a}=(2,-3,-6)$;　　(2) $\overrightarrow{b}=(2,3,-10)$.

解: (1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{-3}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{-6}{7}$.

(2) $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{113}}{113}$, $\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{113}}{113}$, $\cos\gamma=-\dfrac{10\sqrt{113}}{113}$.

10 设向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,4)$, $\overrightarrow{b}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}$ (k 是实数).

(1) 求 k 使 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$;　　(2) 求与 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 都垂直的 $\overrightarrow{d}$.

解: (1) 由已知,

$$\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}^2=0.$$

而 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=7$, $\overrightarrow{a}^2=21$, 所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\overrightarrow{d}$ 垂直于 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ 等价于 $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{c}=0$, 由假设 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}-k\overrightarrow{a}$, 也等价于 $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=0$. 设 $\overrightarrow{d}=(x,y,z)$, 得

$$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=x+2y+4z=0,$$

$$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=x+y+z=0.$$

解得 $x=2z, y=-3z$, 即 $\overrightarrow{d}=(2k,-3k,k)$ (k 是实数).

11 设 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是两个单位向量, s,t 是两个非零实数, 使得

$$|s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|=|t\overrightarrow{a}-s\overrightarrow{b}|,$$

求 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

解: 由 $|s\vec{a}+t\vec{b}|=|t\vec{a}-s\vec{b}|$ 得 $(s\vec{a}+t\vec{b})^2=(t\vec{a}-s\vec{b})^2$. 推出 $s^2+t^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}=t^2+s^2-2st\vec{a}\cdot\vec{b}$. 故 $2st\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 又因 $st\neq 0$, 得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

12. 如图, 已知长方体 $OABC$–$O_1A_1B_1C_1$ 中, $|OA|=8$, $|OC|=6$, $|OO_1|=1$. P 是棱 OC 上的点, 且 $|PC|=2|OP|$, M 是棱 AB 上的点, 且 $|AM|=2|MB|$, N 是棱 B_1C_1 的中点. 求直线 A_1P 与直线 MN 所成的角.

解: 把向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OO_1}$ 的单位向量记为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 建立直角坐标系 $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$. 则

$$\overrightarrow{OA_1}=8\vec{i}+\vec{k}=(8,0,1);$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=2\vec{j}=(0,2,0);$$

$$\overrightarrow{OM}=8\vec{i}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=8\vec{i}+4\vec{j}=(8,4,0);$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+6\vec{j}+\vec{k}=(4,6,1);$$

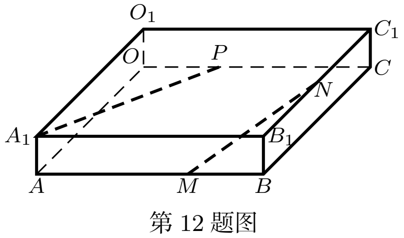
因此

$$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA_1}=(-8,2,-1);$$

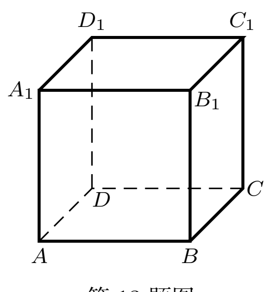
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-4,2,1).$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{A_1P}, \overrightarrow{MN}\rangle=\frac{35}{\sqrt{69}\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{161}}{69}.$$



第 12 题图



第 13 题图

13. 计算正方体的对角线与它的任一个面的对角线之间的夹角.

解: 建立直角坐标系 $[A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}]$, 以对角线 AC_1 来计算此题.

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=(1,1,1).$$

(a) $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=(1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 由对称性, $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{AC}$ 的夹角余弦也为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(b) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$, 所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$, 即 $\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$. 同理. $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CD_1}$ 的夹角也为 $\dfrac{\pi}{2}$.

14. 试问 $(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})$ 一定成立吗? 请给出该向量等式成立的条件.

解: 等式左端是与 $\overrightarrow{c}$ 共线的向量, 右端是与 $\overrightarrow{a}$ 共线的向量. 如果两端都不等于 0, 则 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 即存在 $k\neq 0$, 使 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{c}$. 反之若 $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{c}$, 左边 $=k(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}=(k\overrightarrow{c})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=$ 右边.

若等式两边都等于 0, 则或者 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 中至少有一个零向量; 或者三个向量都不等于 0, 但 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$, 即 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}$ 均正交.

15. 求解向量方程 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$.

解: 因为 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\overrightarrow{x}=0$, 分两种情况: (a) 若 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\neq 0$, 则解 $\overrightarrow{x}$ 为任意与 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直的向量; (b) 若 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=0$, 则任意向量 $\overrightarrow{x}$ 都是解向量.

16. 若向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面, 而且 $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{x}=0$. 则 $\overrightarrow{x}=0$. 试证之.

证明: 因为 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面, 所以它们线性无关, 且 $\overrightarrow{x}$ 可由它们线性表示, 即: $\overrightarrow{x}=k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}$. 于是 $\overrightarrow{x}^2=k_1(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})+k_2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{x})+k_3(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{x})=0$, 即: $\overrightarrow{x}=0$.

17. 证明三个向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{c}\end{vmatrix}=0.$$

证明: $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使: $k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{b}+k_3\overrightarrow{c}=0$. 从而

$$\begin{cases}k_1\overrightarrow{a}^2+k_2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+k_3(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})+k_2\overrightarrow{b}^2+k_3(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})=0\\ k_1(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+k_2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b})+k_3\overrightarrow{c}^2=0,\end{cases}$$

也即齐次线性方程组

$$\begin{cases} x\overrightarrow{a}^2 + y(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) + z(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}) = 0 \\ x(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}) + y\overrightarrow{b}^2 + z(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}) = 0 \\ x(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}) + y(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}) + z\overrightarrow{c}^2 = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

有非零解 $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$. 根据引理 4.1, 系数行列式

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

反之, 若

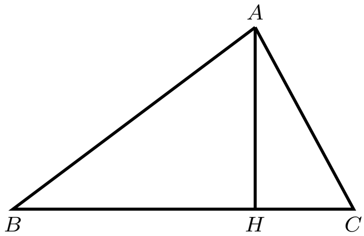
$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

则 $(*)$ 必有非零解, 设为 $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$, 令 $\overrightarrow{p} = k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{c}$, 那么. 从 $(*)$ 知:

$$\overrightarrow{p}^2 = k_1\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b} + k_3\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c} = 0,$$

即 $\overrightarrow{p} = 0$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 线性无关, 必定共面.

18. 三角形 ABC 中, 已知 BC 边上的高为 AH. 试用 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AH}$.



第 18 题图

解: 将 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$ 代入 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, 得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BC}^2 = 0$. 因此

$$k = \frac{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2},$$

得

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}^2}.$$

再用 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 代入, 整理后得

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2}[(\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AC}].$$

19 在平面四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{d}$. 那么, 当 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}$ 时, $ABCD$ 是什么四边形? 为什么?

解: 由于 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=0$, 所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})\\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}=-(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}^2+\overrightarrow{d}^2+2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{d}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2=\overrightarrow{c}^2+\overrightarrow{d}^2$, $\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{d}^2=\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2$. 推知 $\overrightarrow{a}^2=\overrightarrow{c}^2$, $\overrightarrow{b}^2=\overrightarrow{d}^2$. 从而 $|AB|=|CD|$, $|BC|=|AD|$, 即 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}=0$, $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}=0$. 由 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 知 $0=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}$. 因此 $ABCD$ 是矩形.

***20.** 设一个四边形各边之长分别是 a,b,c,d, 且其对角线互相垂直. 求证各边之长也是 a,b,c,d 的任一四边形的两条对角线也相互垂直.

证明: 如图, 有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.$$

考虑以下内积:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=-\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

将上述 4 式相加, 可得:

$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

由

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$$

可得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}.$$

由

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})^2$$

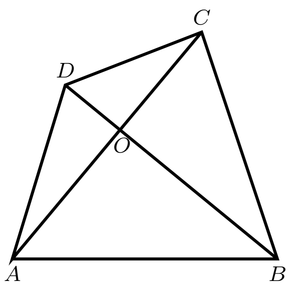
整理得

$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2=2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}).$$

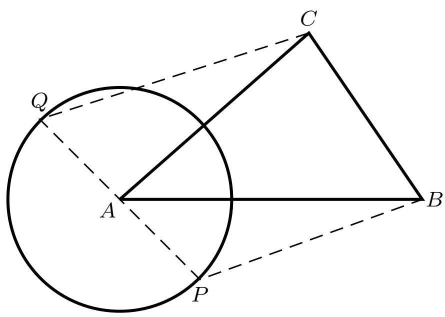
代入上式得

$$4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2)=2(b^2+d^2-a^2-c^2).$$

这说明对角线垂直的充分必要条件是 $a^2+c^2=b^2+d^2$, 只与四边形的边长有关.



第 20 题图



第 21 题图

21 有一个三角形 $\triangle ABC$ 和一个圆. 三角形的三边之长分别是 $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, 圆的圆心在点 A, 半径为 r. 作圆的一条直径 PQ 使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到: (1) 最大, (2) 最小. 试分别求出 $\overrightarrow{PQ}$, 并用 a,b,c 及 r 分别表示这最大值和最小值.

解: 设 $\overrightarrow{PQ}$ 为圆的一条直径, 则 $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AP}$, $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AP}|=r$. 由于 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}$, 得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AP}-r^2\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}-r^2.\end{aligned}$$

(1) 要使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到极大当且仅当 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 达到极大, 当且仅当 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{CB}$, $k>0$;

(2) 要使 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 达到极小当且仅当 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 达到极小, 当且仅当 $\overrightarrow{AP}=-m\overrightarrow{CB}$, $m>0$.

而 $|\overrightarrow{AP}|=r$, 所以 $k=m=\dfrac{r}{a}$, $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{AP}$. 最后得到:

(1) $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{2r}{a}\overrightarrow{CB}$, 最大值为

$$cb\cos\angle BAC+ar-r^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+ar-r^2;$$

(2) $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{2r}{a}\overrightarrow{CB}$, 最小值为

$$cb\cos\angle BAC-ar-r^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-ar-r^2.$$

22 设有一向量集合 $S=\{\overrightarrow{x}\mid|\overrightarrow{x}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\le 1\}$, $\overrightarrow{a}$ 是一个非零向量. 证明: 对于任意 $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S$ 及实数 $0\le t\le 1$, $t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}\in S$.

解:

$$|\overrightarrow{x}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\le 1\iff\left(\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)^2\le 1+\frac{\overrightarrow{a}^2}{4}.$$

若记 $r=1+\dfrac{\overrightarrow{a}^2}{4}$, 则 $\overrightarrow{x}\in S$ 当且仅当 $\overrightarrow{x}$ 落在以 $-\dfrac{\overrightarrow{a}}{2}$ 为圆心, 半径为 r 的圆内 (包括圆周). 因此对 $0\le t\le 1$ 及任意 $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S$, 只需验证

$$\left|t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|\le r=1+\frac{\overrightarrow{a}^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}&\left|t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|=\left|t\left(\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right)\right|\\&\le t\left|\overrightarrow{x}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|+(1-t)\left|\overrightarrow{y}+\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|\le tr+(1-t)r=r.\end{aligned}$$

所以 $t\overrightarrow{x}+(1-t)\overrightarrow{y}\in S$.

***23** 设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 C 的内接四边形, H_1,H_2,H_3,H_4 依次是 $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证: H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆. (提示: 以圆 C 的圆心为原点建立直角坐标系)

解: 以圆 C 的圆心为原点 O 建立直角坐标系. 设圆 C 的半径为 r, 则 $|OA_i|=r$. 在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中, 令 $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}$, 则

$$\overrightarrow{A_2H_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}=(\overrightarrow{OH_1}-\overrightarrow{OA_2})(\overrightarrow{OA_4}-\overrightarrow{OA_3})=(\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_3})(\overrightarrow{OA_4}-\overrightarrow{OA_3})=0.$$

同理, $\overrightarrow{A_3H_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_4}=\overrightarrow{A_4H_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=0$, 即 H_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心. 其余同理. 因此有

$$\overrightarrow{OH_i}=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})-\overrightarrow{OA_i},\qquad (i=1,2,3,4)$$

令 $\overrightarrow{OH_0}=\sum_{i=1}^4\overrightarrow{OA_i}$, 这是一个常向量, 则 $|\overrightarrow{OH_i}-\overrightarrow{OH_0}|=|\overrightarrow{OA_i}|=r$. 所以 H_1,H_2,H_3,H_4 在以 H_0 为圆心、半径为 r 的圆周上.

***24** 设 $0<a<1$, $0<b<1$. 用几何方法证明:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geq 2\sqrt{2}.$$

解: 建立平面直角坐标系 $[O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}]$. 取 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ 四个点构成一个正方形, 边长为 1. 设 $P(a,b)$, 则 P 在正方形 $ABCD$ 之内, 且 $|PA|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|PB|=\sqrt{(1-a)^2+b^2}$, $|PC|=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$, $|PD|=\sqrt{a^2+(1-b)^2}$. 由于 $|PA|+|PC|\geq|AC|=\sqrt{2}$, $|PB|+|PD|\geq|BD|=\sqrt{2}$, 得证.

***25** 设 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ 是中心在原点 O、半径为 1 的圆上相异的 6 点. 证明: 总可以在 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_6}$ 中找出两个向量 $\overrightarrow{OP_i}$ 和 $\overrightarrow{OP_j}$ $(1\leq i\neq j\leq 6)$ 使得 $|\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{OP_j}|\geq\sqrt{3}$.

解: 令 a_{ij} 表示 $\overrightarrow{OP_i}$ 与 $\overrightarrow{OP_j}$ 的夹角 $(\leq\pi)$, 即 $a_{ij}=\angle P_iOP_j\neq\pi$. 设 $a_0=\min\{a_{ij}\mid 1\leq i\neq j\leq 6\}$, 我们先证 $0<a_0\leq\dfrac{\pi}{3}$. 不妨设从 $\overrightarrow{OP_1}$ 开始依逆时针转动时依次得到 $\overrightarrow{OP_2},\cdots,\overrightarrow{OP_6}$, 若 $a_{12}>\dfrac{\pi}{3}$, $a_{23}>\dfrac{\pi}{3}$, $\ldots$, $a_{16}>\dfrac{\pi}{3}$, 将导致 $2\pi=a_{12}+\cdots+a_{61}>6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$, 矛盾. 因此不妨设 $a_{12}=\angle P_1OP_2\leq\dfrac{\pi}{3}$. 利用余弦定理便有

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}|^2=2+2\cos a_{12}\geq 2+1=3.$$

即 $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}|\geq\sqrt{3}$.

***26** 设实数 a,b,c 满足: $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. 如果记 $\overrightarrow{r_i}=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\cdots,6)$, 其中 $\{x_i,y_i,z_i\}=\{a,b,c\}$. 则必存在 $\overrightarrow{r_i}\neq\overrightarrow{r_j}$, 使 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j}\geq\dfrac{1}{2}$.

解: 设 $\overrightarrow{p}=(1,1,1)$. 则对任意 $\overrightarrow{r_i}$ $(1\leq i\leq 6)$, 总有 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{p}=0$. 因此 $\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_6}$ 均与 $\overrightarrow{p}$ 垂直, 从而它们共面. 再由 $|\overrightarrow{r_i}|=1$ $(1\leq i\leq 6)$, 可知 $\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_6}$ 是单位圆上的 6 个相异点. 由习题 25 可知, 必存在相异的两个向量, 设为 $\overrightarrow{r_i}\neq\overrightarrow{r_j}$, 使得

$$|\overrightarrow{r_i}+\overrightarrow{r_j}|\geq\sqrt{3}.$$

两边平方之后可知 $|\overrightarrow{r_i}|^2+|\overrightarrow{r_j}|^2+2(\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j})\geq 3$, 即 $\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{r_j}\geq\dfrac{1}{2}$.

§7　几何空间向量的外积

1. 在直角坐标系中, 已知 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,-2,0)$, $(-1,2,1)$, 求 $(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})$ 的坐标.

解: $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(4,-2,3)$, $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(2,-4,-1)$, 所以

$$(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\-4 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -2\\2 & -4\end{vmatrix}\right)$$

$$=(14,10,-12).$$

2. 证明 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2\le\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2$. 并说明等式何时成立.

证明: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle\le|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$, 等号成立当且仅当 $\sin\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=0$. 即: $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$.

3. 已知 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 是两个互不平行的向量, 求证 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$, 并说明它的几何意义.

证明: $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$. 几何意义: 若以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 构成一个平行四边形的相邻两边, 则 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 为此平行四边形的两对角线. 上式说明: 以对角线构成的平行四边形面积为原平行四边形面积 2 倍.

4. 求向量 $\overrightarrow{c}$, 使 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$, 其中,

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=4\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$.

解: 令 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$. 则 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$. 计算得:

(1) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$.

(2) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$. (本题答案不唯一)

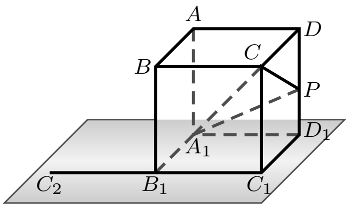
5. 计算由向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 所张成的平行四边形的面积:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$.

解: (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{30}$. 所以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $\sqrt{30}$.

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=2\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 张成的平行四边形面积为 $2\sqrt{3}$.



第 6 题图

6. 如图, 已知 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体, P 是棱 DD_1 上任意一个点. 线段 C_1C_2 的中点是 B_1. 请指出下列各个向量积所确定的向量:

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}$; (2) $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}$; (3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}$.

解: 建立直角标架 $[A_1;\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1D_1},\overrightarrow{A_1A}]$. 设 P 为 DD_1 上任一点. 则: $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{A_1D_1}+k\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k)$, $\overrightarrow{A_1C}=(1,1,1)$.

(1) $\overrightarrow{A_1P}\times\overrightarrow{A_1A}=(0,1,k)\times(0,0,1)=(1,0,0)=\overrightarrow{A_1B_1}$.

(2) $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{A_1C}-\overrightarrow{A_1P}=(1,0,1-k)$, $\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,0,1-k)\times(0,0,1)=(0,-1,0)=-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{D_1A_1}$.

(3) $\overrightarrow{A_1C}\times\overrightarrow{A_1A}=(1,1,1)\times(0,0,1)=(1,-1,0)=\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C_2}$.

7. 设 $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}=-8\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. 求 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, 使 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$.

解: 令 $\overrightarrow{u^0}=\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$, $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\,\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})\overrightarrow{u^0}=\dfrac{-17}{7}(2,3,-1)$. 令

$$\overrightarrow{v_2}=\frac{-17}{7}(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}),\quad \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}=\frac{2}{7}(-11\overrightarrow{i}+8\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}),$$

则: $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, 且 $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=0$.

8. 设 $\overrightarrow{u}$ 为给定的非零向量, $\overrightarrow{v}$ 为任一向量.

(1) 证明: $\overrightarrow{v}$ 可唯一分解为 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 其中, $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$;

(2) 具体写出 $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ 的表达式.

证明: (1) 若 $\overrightarrow{v}$ 有两种分解法: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_1'}+\overrightarrow{v_2'}$, 其中. $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_2'}/\!/\overrightarrow{u}$, 则 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}$. 但 $(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'})\cdot\overrightarrow{u}=0$, $(\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2})\times\overrightarrow{u}=0$, 所以 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\neq 0$, 推出: $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_1'}=0$, $\overrightarrow{v_2'}-\overrightarrow{v_2}=0$, 即 $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_1'}$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_2'}$.

(2) 令 $\overrightarrow{v_2}=\mathrm{pr}_{\overrightarrow{u^0}}\,\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u^0})\overrightarrow{u^0}=\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v_2}$. 则$\overrightarrow{v_2}/\!/\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\dfrac{(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u}^2=0$, 即$\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{u}$. 且知: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, 由 (1) 知

这种分解是唯一的, 故表达式为

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_2}. \end{cases}$$

9. 设 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 为两两不共线的向量. 证明: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ 当且仅当 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

证明: 若 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$, 则此式与 $\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 作外积后可得 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = 0$ 以及 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = 0$, 即 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

反之, 设 $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. 由上述等式可得 $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = 0$ 以及 $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = 0$. 如果 $\overrightarrow{p} \neq 0$, 则由 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{b}$ 共线以及 $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{b}$ 共线可得 $\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{c}$ 共线, 与假设矛盾.

10. 设 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 为两不共线的向量, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$. 证明: A, B, D 三点共线.

证明: 要证 A, B, D 三点共线, 只须证明: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = 0$ 即可. 由

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} = 5(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 5\overrightarrow{AB},$$

可得 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = 0$, 即: A, B, D 三点共线.

11. 三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 满足

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = 0.$$

求证: 三点 A, B, C 共线.

证明: 要证 A, B, C 共线只须证明: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. 因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = 0,$$

故 A, B, C 三点共线.

12. 如果 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{n}$, 则 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面. 试证明之.

证明: 由于 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{c} = 0$, 若 $\overrightarrow{n} \neq 0$, 则 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 共面; 否则, 由 $\overrightarrow{n} = 0$ 可得 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = 0$, 也共面.

§8 几何空间向量的混合积

1. 判断下列向量组是否共面:

(1) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=5\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=11\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=4\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=7\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{k}$;

(4) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{c}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$.

解: (1) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}3&-2&-1\\5&4&-3\\11&0&-1\end{vmatrix}=88\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(2) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix}-2&3&-1\\1&-4&-2\\1&-5&2\end{vmatrix}=25\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(3) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-51&\\7&-5&8\end{vmatrix}=-40\neq 0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 不共面.

(4) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}0&-1&3\\2&-2&0\\-1&2&-3\end{vmatrix}=0$, 所以 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面.

2. 计算由向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所张成的平行六面体的体积:

(1) $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$;

(2) $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$;

(3) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$;

(4) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j};\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.

解: (1) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix}-1&1&2\\1&-1&3\\2&1&1\end{matrix}\right\|=15$.

(2) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix}3&0&1\\2&-1&1\\1&5&-1\end{matrix}\right\|=|-1|=1$.

(3) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix}1&-1&-1\\-3&-2&1\\1&1&0\end{matrix}\right\|=|-1|=1$.

(4) $V=|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{matrix}\right\|=1.$

3. 确定下列四点是否共面:

(1) $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$;

(2) $A(3,-2,1)$, $B(2,0,-1)$, $C(-1,-4,5)$, $D(3,-2,4)$;

(3) $A(1,2,-3)$, $B(3,5,-1)$, $C(0,-2,7)$, $D(2,1,3)$;

(4) $A(1,0,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(1,2,-2)$, $D(2,0,-21)$.

解: 要确定 A,B,C,D 四点是否共面, 只须确定 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 这三个向量是否共面. 所以只须看 $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ 是否为零.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,4)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=0,\quad \text{共面}.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-2,4)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&2&-2\\-4&-2&4\\0&0&3\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad \text{不共面}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(2,3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-4,10)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,6)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&3&2\\-1&-4&10\\1&-1&6\end{vmatrix}=30\neq 0,\quad \text{不共面}.$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(1,0,-22)$,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&2&-3\\1&0&-22\end{vmatrix}=45\neq 0,\quad \text{不共面}.$$

4. 确定以 A, B, C, D 为顶点的四面体的体积:

(1) $A(-1,0,1)$, $B(-2,1,4)$, $C(1,3,-3)$, $D(-2,-1,3)$;

(2) $A(2,-1,1)$, $B(5,4,4)$, $C(2,3,-1)$, $D(4,1,2)$;

(3) $A(1,0,2)$, $B(1,-1,0)$, $C(2,2,-1)$, $D(3,1,0)$;

(4) $A(2,2,-1)$, $B(1,2,-2)$, $C(2,-2,1)$, $D(1,1,1)$.

解: (1) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3,-4)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1&1&3\\2&3&-4\\-1&-1&2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}.$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(3,5,3)$. $\overrightarrow{AC}=(0,4,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,2,1)$,

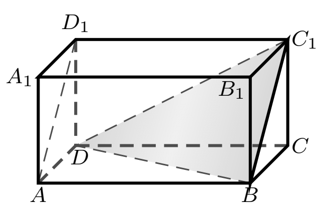
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}3&5&3\\0&4&-2\\2&2&1\end{matrix}\right\|=\frac{|-20|}{6}=\frac{10}{3}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(2,1,-2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}0&-1&-2\\1&2&-3\\2&1&-2\end{matrix}\right\|=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

(4) $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-4,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times\left\|\begin{matrix}-1&0&-1\\0&-4&2\\-1&-1&2\end{matrix}\right\|=\frac{5}{3}.$$



第 5 题图

5. 如图, 已知长方体 $ABCD$–$A_1B_1C_1D_1$, $|AB|=4$, $|AD|=|AA_1|=2$. 求

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离;

(2) 直线 AD_1 与平面 C_1BD 的距离.

解: 设 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的单位向量是 $\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}$, 建立直角坐标系 $[D;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}]$. 则

$$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2),\quad \overrightarrow{DB}=(2,4,0),\quad \overrightarrow{DC_1}=(0,4,2).$$

(1) 点 A_1 到平面 C_1BD 的距离

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}2&0&2\\2&4&0\\0&4&2\end{matrix}\right\|}{|(8,-4,8)|}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

(2) 因为 $AD_1//BC_1$, 所以 $AD_1//$ 平面 C_1BD. 故 AD_1 上任一点到平面 C_1BD 的距离即为 AD_1 到平面 C_1BD 的距离.

$$d=\frac{|(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC_1})|}{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}2&0&0\\2&4&0\\0&4&2\end{matrix}\right\|}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

6. 设 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b}=a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c}=a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3}$. 求证

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}).$$

证明: $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3})\times(a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3})=a_1b_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+a_1c_2\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+b_1a_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}+b_1c_2\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}+c_1a_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}+c_1b_2\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2}=(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}$,

$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=[(a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+(a_1c_2-c_1a_2)\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}+(b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}]\cdot(a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3})=[(a_1b_2-b_1a_2)c_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})-[(a_1c_2-c_1a_2)b_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})+[(b_1c_2-c_1b_2)a_3](\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$.

(只要利用三阶行列式的定义便可计算得).

7. 求证: $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

证明: $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\Big||\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\cos\langle\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle\Big|\le|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$.

8. 证明雅可比恒等式:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})+\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=0.$$

证明: 由命题 7.7 知:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c},$$

$$\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a},$$

$$\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b},$$

相加即得结论.

9. 证明: 空间中四点 A, B, C, P 共面的充分必要条件是, 它们所对应的位置向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p}$ 满足

$$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0.$$

证明: A,B,C,P 共面当且仅当 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面. 已知

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP},$$

故

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\quad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\quad \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p}.$$

因此 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})=0$, 当且仅当

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0,$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=0.$$

10. 证明

(1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$;

(2) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})\overrightarrow{a}$.

证明: (1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=-(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=-[\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\overrightarrow{d}-\overrightarrow{d}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}]=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$.

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b} - [\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a} = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$.

11. 证明对任意四个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 总有
$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a} + (\vec{c},\vec{a},\vec{d})\vec{b} + (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} + (\vec{b},\vec{a},\vec{c})\vec{d} = 0$.

证明: 由第 10 题结论可得

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a},$$

移项后再适当改变混合积中向量次序即可证得.

12. 证明下列向量恒等式:

(1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$;

(2) $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = -2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$;

(3) $(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c}) + (\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$;

(4) $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) + (\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a})$.

证明: (1) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}) = [(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = [(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{b})\vec{a}]\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$.

(2) $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) = -(\vec{a}\times\vec{d})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\vec{d} + (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) = -(\vec{b}\times\vec{d})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = -(\vec{c},\vec{a},\vec{b})\vec{d} + (\vec{c},\vec{a},\vec{d})\vec{b}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c},\vec{d},\vec{a})\vec{b} - (\vec{c},\vec{d},\vec{b})\vec{a}$, 所以

$$\begin{aligned}&(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})\\ &= -2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}.\end{aligned}$$

(3) $(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}$,
$(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{d} + \vec{a}\cdot\vec{d}$,
$(\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d}$,

将上述等式左 右两端分别相加则:

$$(\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{c}) + (\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0.$$

(4) $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{d} - \vec{c}\times\vec{d}$,
$(\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{d} - \vec{a}\times\vec{d}$,
$(\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b}) = -\vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{d} - \vec{b}\times\vec{d}$,

将上述等式左、右两端分别相加得:

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$$
$$=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}).$$

13. 证明对于任意向量 r_i $(i=1,2,3,4)$, 下式成立:

$$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})+(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=0.$$

证明: 根据定理 8.7, $(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2})\cdot(\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_4})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})$,
$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_3})\cdot(\overrightarrow{r_4}\times\overrightarrow{r_2})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_4})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_3})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})$,
$(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_4})\cdot(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3})=(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2})(\overrightarrow{r_3}\cdot\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_3})(\overrightarrow{r_2}\cdot\overrightarrow{r_4})$,
将上述等式的左、右两端分别相加后得到结论.

14. 证明 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 共面的充分必要条件是 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面.

证明: 因为 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 共面当且仅当 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=0$, 但由 12 题的 (1) 知: $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})^2$, 所以 $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$ 共面当且仅当 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}$ 共面.

15 设 a,b,c 为非负实数, 且 $a+b+c<\dfrac{1}{2}$. 证明由 $\overrightarrow{p}=(1-a,0,0)$, $\overrightarrow{q}=(0,1-b,0)$, $\overrightarrow{r}=(0,0,1-c)$ 构成的平行六面体的体积大于 $\dfrac{1}{2}$.

解: 设此平行六面体的体积为 V, 则

$$V=|(\overrightarrow{p}\times\overrightarrow{q})\cdot\overrightarrow{r}|=\left\|\begin{vmatrix}1-a&0&0\\0&1-b&0\\0&0&1-c\end{vmatrix}\right\|=(1-a)(1-b)(1-c).$$

因为

$$(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab\geq 1-(a+b)>0,$$

所以

$$(1-c)(1-b)(1-a)=(1-b)(1-a)-c(1-b)(1-a)\geq 1-a-b-c>\frac{1}{2}.$$

16 设 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$. 利用拉格朗日恒等式证明:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

解: 由拉格朗日恒等式可得

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2.$$

而由

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

算出

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2,\\
&\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2),\\
&(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2.
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2=&(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\\
&-[(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2],
\end{aligned}$$

即有

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

而且等号成立当且仅当 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

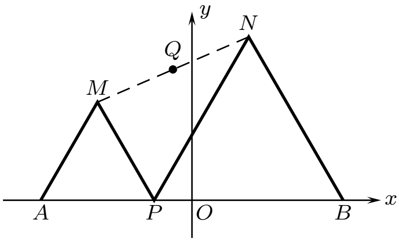
*§ 9 平面曲线的方程

1. 三角形 ABC 底边的两个端点为 $B(-3,0)$, $C(3,0)$. 顶点 A 在直线 $7x-5y-35=0$ 上移动, 求三角形重心的轨迹.

解: 设重心的坐标为 (x,y), 则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{x_A}{3}\\ y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{y_A}{3},\end{cases}\qquad 即\ \begin{cases} x_A=3x\\ y_A=3y.\end{cases}$$

而 (x_A,y_A) 满足方程 $7x-5y-35=0$, 代入即得 $21x-15y-35=0$.



第 2 题图

2. 在长为 l 的线段 AB 上有一动点 P. 在 AB 的同侧, 以 AP, PB 为边分别作等边三角形 AMP 和 BNP. 求 MN 的中点 Q 的轨迹.

解: 以 AB 的中点 O 为原点, 以 AB 为 x 轴, 建立直角坐标系 $[O; \overrightarrow{i}. \overrightarrow{j}]$. 于是

$$A\left(-\frac{l}{2}, 0\right), \quad B\left(\frac{l}{2}, 0\right), \quad P(t, 0), \quad \left(-\frac{l}{2} < t < \frac{l}{2}\right).$$

则

$$M\left(\frac{t-\frac{l}{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{l}{2}\right)\right), \quad N\left(\frac{t+\frac{l}{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}-t\right)\right).$$

所以 MN 的中点 Q 的坐标为:

$$\begin{cases} x_Q = \dfrac{t}{2} & \left(-\dfrac{l}{2} < t < \dfrac{l}{2}\right) \\ y_Q = \dfrac{\sqrt{3}}{4} l. \end{cases}$$

即 Q 点的轨迹方程为: $y = \frac{\sqrt{3}}{4} l \left(-\frac{l}{4} < x < \frac{l}{4}\right)$.

第二章　行列式

§1　映射与变换

1. 判别下列映射哪些是单映射, 哪些是满映射, 哪些是可逆映射?

(1) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad a \longmapsto |a|$

(2) V 为几何空间, $\overrightarrow{e}$ 为一固定的单位向量, 映射

$\sigma : V \longrightarrow V$

$\qquad \overrightarrow{a} \longmapsto \sigma(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} - 2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{e})\overrightarrow{e}$

(3) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\qquad n \longmapsto n+1$

解: (1) 非单, 非满, 不可逆.

(2) 单, 满, 可逆.

(3) 单, 非满, 不可逆.

2. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的映射, 证明:

(1) 如果 gf 为单映射, 则 f 为单映射;

(2) 如果为 gf 满映射, 则 g 为满映射.

证明: (1) 对任意的 $s_1, s_2 \in S$, 如 $f(s_1) = f(s_2)$, 则 $gf(s_1) = gf(s_2)$. 因 gf 是单映射, 故 $s_1 = s_2$, 从而 f 是单映射.

(2) 对任意的 $s'' \in S''$, 因 gf 是满映射, 故存在 $s \in S$, 使 $gf(s) = s''$, 从而 $s' = f(s) \in S'$, 使 $g(s') = s''$, 故 g 是满映射.

3. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的可逆映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的可逆映射, 则 gf 为集合 S 到集合 S'' 的可逆映射, 且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

证明: 因为 f 与 g 都可逆, 所以 $f^{-1}g^{-1}$ 是集合 S'' 到 S 的一个映射, 且

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}1_{S'}f = f^{-1}f = 1_S,$$

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g1_{S'}g^{-1} = gg^{-1} = 1_{S''}.$$

§2 置换的奇偶性

1. 设:

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&4&7&6&2&1\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&1&7&6&4&3\end{pmatrix}.$$

求 pq, $p^{-1}qp$, 并把 p,q 分别表示成对换的乘积.

解: $pq=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&3&1&2&7&4\end{pmatrix}$, $p^{-1}qp=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&5&4&1&3&2&6\end{pmatrix}$,
$p=(13)(34)(47)(25)(56)$, $q=(12)(25)(56)(64)(47)(73)$. (后面两个表示式不唯一).

2. 计算下列置换的逆序数, 并确定其奇偶性:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&4&5&6&3&2&8&7\\6&8&5&4&7&2&1&3\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&5&4&3&9&8&6&7&1\\6&3&1&2&7&9&8&5&4\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}1&3&5&\cdots&2n-1&2&4&6&\cdots&2n\\2&4&6&\cdots&2n&1&3&5&\cdots&2n-1\end{pmatrix}$.

解: (1) 逆序数是 8, 偶.

(2) 逆序数是 20, 偶.

(3) 逆序数是 11, 奇.

(4) 逆序数是 n, 奇偶性同 n 的奇偶性.

3. 计算下列排列的逆序数, 并确定其奇偶性:

(1) 5317246;　　(2) 384576192;

(3) 246813579;　　(4) 987654321.

解: (1) 逆序数是 9, 奇.

(2) 逆序数是 18, 偶.

(3) 逆序数是 10, 偶.

(4) 逆序数是 36, 偶.

4. 确定 i 及 k, 使

(1) $237i864k5$ 成偶排列;　　(2) $469k1i752$ 成奇排列.

解: (1) $i=1,k=9$.

(2) $i=8,k=3$.

5. 计算下列排列的逆序数:

(1) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots642$;

(2) $(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots321$.

解: (1) $n(n-1)$.

(2) $n(2n+1)$.

6. 已知置换 p 的逆序数为 a, 求 p^{-1} 的逆序数.

解: a.

7. 已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 a, 求 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解: 因为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数 $+x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的顺序数 $=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 而 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数 $=x_1x_2\cdots x_n$ 的顺序数, 所以 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数 $=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

***8.** 证明: 对任何不超过 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的正整数 k, 必存在逆序数为 k 的 n 阶排列.

证明: 对 k 用数学归纳法.

首先, 当 $k=1$ 时, $213\cdots n$ 的逆序数为 1;

假定结论对 $k-1$ 成立 $\left(k\leq\dfrac{n(n-1)}{2}\right)$, 即存在 n 阶排列

$$i_1i_2\cdots i_n \tag{1}$$

其逆序数为 $k-1$, 则必存在 $j<k$, 使 $i_j<i_k$ (否则此排列的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$), 从而在 j,k 之间必有两个相邻的编号 $j\leq r<r+1\leq k$, 使 $i_r<i_{r+1}$. 作排列

$$i_1\cdots i_{r-1}i_{r+1}i_ri_{r+2}\cdots i_n,$$

则此排列的逆序数 = 排列 (1) 的逆序数 $+1=k$.

由归纳法原理知结论成立.

***9.** 在所有 n 阶置换中, 分别有多少个逆序数为 1, 2, 3 的置换?

解: 由排列与置换的关系, 我们只需对排列确定相应的值即可.

当 $k=1$ 时, 因任意逆序数为 1 的排列都可以由排列 $123\cdots n$ 交换两个相邻的数而得到, 故逆序数为 1 的排列个数等于 $P_1(n)=n-1$.

由于任一 n 阶排列都可以由 $n-1$ 阶排列添加数 n 而得到. 故当 $k=2$ 时, 逆序数为 2 的排列可由下述方式得到:

(a) $12\cdots n-2\ n-1\longrightarrow 12\cdots n-3\ n\ n-2\ n-1$;

(b) $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ (逆序数 1) $\longrightarrow i_1i_2\cdots i_{n-2}\ n\ i_{n-1}$;

(c) $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ (逆序数 2) $\longrightarrow i_1i_2\cdots i_{n-1}\ n$.

所以逆序数为 2 的排列个数为

$$P_2(n) = 1 + P_1(n-1) + P_2(n-1).$$

由此可得

$$\begin{aligned} &P_2(n-1) = 1 + P_1(n-2) + P_2(n-2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &P_2(3) = 1 + P_1(2) + P_2(2), \end{aligned}$$

所以 $P_2(n) = (n-2) + (n-1) + \cdots + 2 = \dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$.

当 $n = 3$ 时, 类似于上面的讨论, 可得

$$P_3(n) = 1 + P_1(n-1) + P_2(n-1) + P_3(n-1),$$

所以

$$P_3(n) - P_3(n-1) = \frac{(n-2)(n+1)}{2},$$

由此可得 $P_3(n) = \dfrac{n(n^2-7)}{6}$.

§3 矩阵

1. 用初等行变换将下列矩阵变为上三角形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$;

解: (1) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -16 & 38 & 5 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 用初等列变换将下列矩阵变为下三角形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -30 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 10 & -11 \\ -1 & 1 & -15 & 8 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \\ -3 & -35 & -54 & 0 \\ -1 & -30 & 27 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§4 行列式的定义

1. 确定下列行列式的项前面所带的符号:

(1) $a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}$; (2) $a_{31}a_{23}a_{14}a_{42}a_{65}a_{56}$.

解: (1) $+$.

(2) $+$.

2. 下列各项是否为五阶行列式的项 (包括符号)?

(1) $-a_{21}a_{34}a_{15}a_{23}a_{52}$; (2) $+a_{32}a_{15}a_{24}a_{53}a_{41}$.

解: (1) 不是.

(2) 是.

3. 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

解: $-a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $-a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$, $-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$.

4. 在 n 阶行列式中, 两条对角线上各元素的乘积分别应取什么符号?

解: $+$, $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5. 按定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

(5) $\begin{vmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x \\ x & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$;

解: (1) 0.

(2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

(3) $(-1)^{n-1}n!$.

(4) $n!$.

(5) a^5+x^5.

(6) $acfh+bdeg-adeh-bcfg$.

§5 行列式的性质

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & -cd & ed \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a & a_4 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a \end{vmatrix}$.

解: (1) $4abcdef$.

(2) 48.

(3) 12.

(4) 160.

(5) a^2b^2.

(6) $(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)$.

2. 证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

证明: (1) 左边 $= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha-\cos^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2\beta-\cos^2\beta & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2\gamma-\cos^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -\cos(2\alpha) & \cos^2\alpha & \cos(2\alpha) \\ -\cos(2\beta) & \cos^2\beta & \cos(2\beta) \\ -\cos(2\gamma) & \cos^2\gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0$.

(2) 左边 $= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a'+b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ a''+b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a'+b'+c' & -b' & -c' \\ a''+b''+c'' & -b'' & -c'' \end{vmatrix} =$ 右边.

(3) 左边 $=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

§6 行列式按一行(一列)展开

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ b & -1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 2 & 3 \\ d & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

的第一列各元素的代数余子式.

解: $A_{11} = -1$, $A_{21} = 1$, $A_{31} = 2$, $A_{41} = 2$.

2. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

的全部元素的代数余子式.

解: $A_{11} = 7$, $A_{12} = -12$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 6$, $A_{22} = 4$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = -5$, $A_{32} = 5$, $A_{33} = 5$.

3. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & c & d \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 & 1 \\ x^3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

解: (1) 0.

(2) -53.

(3) $-x^3-x^2-x+2$.

(4) $-5x+2y+2z+2t$.

(5) $(ah-bg)(cf-ed)$.

§ 7　用行列式解线性方程组的克拉默法则

1. 用克拉默法则解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3=1, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=11; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ x_1+\ \ x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+5x_2+\ \ x_3+2x_4=0, \\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-\ \ x_3+2x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4=4; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-5x_3+\ \ x_4=-14, \\ x_1-3x_2-6x_3=-11, \\ -2x_2+\ \ x_3+2x_4=9, \\ x_1+4x_2+7x_3+6x_4=20. \end{cases}$

解: (1) $|A|=12$, $|B_1|=24$, $|B_2|=-24$, $|B_3|=36$, $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$.

(2) $|A|=-20$, $|B_1|=|B_2|=|B_3|=|B_4|=0$, $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

(3) $|A|=12$, $|B_1|=12$, $|B_2|=24$, $|B_3|=-12$, $|B_4|=-24$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=-2$.

(4) $|A|=-9$, $|B_1|=-9$, $|B_2|=18$, $|B_3|=-27$, $|B_4|=-9$, $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=1$.

2. 求一个二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$, 使$f(1)=1$, $f(-1)=9$, $f(2)=3$.

解: $f(x)=2x^2-4x+3$.

3. 证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\cdots+\ \ x_n=0, \\ 2x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+\cdots+n^nx_n=0 \end{cases}$$

仅有零解.

证明: 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1!2!\cdots n! \neq 0,$$

根据推论 7.2, 原方程只有零解.

§8　拉普拉斯定理

1. 将下列行列式按拉普拉斯定理展开, 以求下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$;

(4) $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots\cdots\cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \qquad \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a \quad b & & & \\ & & & b \quad a & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \qquad \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots\cdots\cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n}.$$

解: (1) 按第 1, 2 两行展开:

$$原式 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^8 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

(2) $(ax-by)(cz-dw)$.

(3) 按第 1, 2, 3 行展开:

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 16 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2.$$

(4) 依次按中间两行展开:

$$原式 = (a^2-b^2)D_{2(n-1)} = \cdots = (a^2-b^2)^n.$$

2. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$, $(a \neq b)$;

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解: (1) 各行加到第 1 行, 得 $D=(-1)^{n+2}\cdot(-1)^n=1$.

(2) 自第 1 行起, 各行乘以 x 加到下一行:

$$D=(-1)^{n+1}(1+2x+\cdots+nx^{n-1})\cdot(-1)^{n-1}=1+2x+\cdots+nx^{n-1}.$$

(3) $D_n=\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

$+\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (x-a)D_{n-1},$$

所以

$$D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1},$$

又,

$$D_n = D_n^{\mathrm{T}} = a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1},$$

消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

(4) 类似于上题, 可得

$$D_n = z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1}.$$

又

$$D_n = D_n^{\mathrm{T}} = y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}.$$

当 $y \neq z$ 时, 由上两式消去 D_{n-1}, 得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

当 $y = z$ 时, 由递推公式 $D_n = y(x-y)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}$, 得 $D_n = (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

(5) 令 $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$, $\ldots$, $\Delta_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$, 则

$$(a+b)\Delta_k - ab\Delta_{k-1} = \Delta_{k+1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \Delta_1 & b\Delta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta_1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b-\dfrac{ab\Delta_0}{\Delta_1} & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$=\begin{vmatrix} (a+b)\Delta_1-ab\Delta_0 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta_2 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1} = \cdots = \Delta_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

(6)

$$D_n=\begin{vmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

第三章　线性方程组与线性子空间

§1　用消元法解线性方程组

1. 用消元法解下列线性方程组:

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

解: (1) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 1$.

(2) $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$, $x_4 = -4$.

2. 分别用矩阵的初等行变换和列变换将下列矩阵化为行阶梯矩阵和列阶梯矩阵:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

解: (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 4 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & -11 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{11} & -\frac{16}{11} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{10}{3} & -\frac{17}{18} & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 证明: 线性方程组的第二类, 第三类初等变换把线性方程组化成与它同解的线性方程组.

证明: (略)

4. 证明推论 1.4.

证明: 对矩阵 A^{T} 应用推论 1.3, 则 A^{T} 可以经过一系列初等行变换化成简化行阶梯矩阵. 将上述变换施行于矩阵 A 的列上, 就将 A 化成简化列阶梯矩阵.

***5.** 思考题:

(1) 线性方程组的解集可以看作是空间的一个点集. 那么, 线性空间中任一点集是否一定是某个线性方程组的解集合呢? 如果是这样, 那么, 空集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 与两点集 $\{(0,0,\cdots,0),(1,1,\cdots,1)\}$ 分别是怎样的线性方程组的解集合呢? 如果不是这样, 那么, 怎样的点集才是某个线性方程组的解集合呢?

(2) 线性方程组的初等变换把线性方程组变成同解的线性方程组. 那么, 两个同解的线性方程组是否一定可以通过初等变换互化呢?

解: (1) 除了空集与单点集外, 线性方程组的解集合一定是无限集. 空集是矛盾方程组的解集, 单点集 $\{(0,0,\cdots,0)\}$ 可以是以下方程组

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

的解集. 线性方程组的解集合是一个线性流形. 解集合的性质可参看 §2, §6, §7 的讨论.

(2) 在允许添加或删去平凡方程 “$0=0$” 的前提下, 此结论是正确的.

§2　线性方程组的解的情况

1. 用消元法解下列线性方程组:

$$(1)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-\ \ x_4-\ \ x_5=2 \\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3\qquad\ \ -2x_5=2 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-\ \ x_5=5 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-\ \ x_4-\ \ x_5=4 \\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4-2x_5=1 \\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3\qquad\ \ -2x_5=3 \\ 2x_1+2x_2-5x_3+2x_4-\ \ x_5=-4 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-\ \ x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}\qquad (4)\ \begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=2 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=3 \\ x_1+\ \ x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=12 \end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases} 2x_1-\ \ 2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4+\ \ x_5=0 \\ x_1-\ \ 4x_2+2x_3-2x_4+3x_5=0 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=0 \\ x_1+\ \ 2x_2-\ \ x_3+\ \ x_4-2x_5=0 \end{cases}$$

解: (1) 无解.

(2) $x_3=1-x_1+2x_2$, $x_4=-4x_1+5x_2$, $x_5=-1-x_1+2x_2$, x_1,x_2 为自由未知量.

(3) $x_1=2x_2-x_3$, $x_4=1$, x_2,x_3 为自由未知量.

(4) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

(5) $x_1=\dfrac{1}{3}x_5$, $x_2=\dfrac{1}{6}(3x_3-3x_4+5x_5)$, x_3,x_4,x_5 为自由未知量.

2. 选择 λ, 使方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ \ \ x_4=1 \\ x_1+2x_2-\ \ x_3+\ \ 4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$

有解, 并求它的一般解.

解: 仅当 $\lambda = 5$ 时有无穷多解, 其一般解为 $x_1 = \dfrac{1}{5}(4 - x_3 - 6x_4)$, $x_2 = \dfrac{1}{5}(3 + 3x_3 - 7x_4)$, x_3, x_4 为自由未知量.

3. a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求一般解.

解: 仅当 $a = 0, b = 2$ 时有解, 其一般解为 $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$, x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

4. 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.$$

在有解的情况下, 求它的一般解.

证明: ($\Rightarrow$) 如线性方程组有解, 设 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 为其一个解, 将它代入原方程组, 并将各式相加, 即得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$.

($\Leftarrow$) 如 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$, 则由最后一个方程得 $x_5 = x_1 + a_5$, 依次代入前一个方程, 得 $x_4 = a_4 + a_5 + x_1$, $x_3 = a_3 + a_4 + a_5 + x_1$, $x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1$, 将 x_2, x_3, x_4, x_5 代入第一个方程, 得

$$x_1 - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1) = -a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = a_1.$$

所以原方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x_1 \\ x_3 = a_3 + a_4 + a_5 + x_1 \\ x_4 = a_4 + a_5 + x_1 \\ x_5 = a_5 + x_1 \end{cases} \qquad x_1 \text{ 为自由未知量.}$$

5. 求一多项式 $f(x) = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 使 $f(1) = -3$, $f(-1) = -7$, $f(2) = -1$, $f(-2) = -21$.

解: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

6. 给出平面上 3 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 共线的充分必要条件.

解: 若点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 共线, 不妨设此直线的方程为 $Ax+By+C = 0$, 则

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1t_1 + y_1t_2 + t_3 = 0 \\ x_2t_1 + y_2t_2 + t_3 = 0 \\ x_3t_1 + y_3t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解 (A, B, C)

$\Leftrightarrow$ 其系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

7. 给出平面上 3 条不平行直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

共点的充分必要条件.

解: 此 3 条直线有公共点 (x_0, y_0) 的充分必要条件是相应的齐次线性方程组

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

有非零解 $(x_0, y_0, 1)$, 当且仅当系数矩阵等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3 向量组的线性相关性

1. 设 $\alpha_1 = (2,5,1,3)$, $\alpha_2 = (10,1,5,10)$, $\alpha_3 = (4,1,-1,1)$. 求一向量 α, 使 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$.

解: $\alpha = (1,2,3,4)$.

2. 已知 $3\alpha + 4\beta = (2,1,1,2)$, $2\alpha - 3\beta = (-1,2,3,1)$. 求 α 与 β.

解: $\alpha = \dfrac{1}{17}(2,11,15,10)$, $\beta = \dfrac{1}{17}(7,-4,-7,1)$.

3. 把向量 β 表成向量 α_1, α_2, α_3 的线性组合:

(1) $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,-1)$, $\alpha_3 = (1,-1,-1)$, $\beta = (1,2,1)$;

(2) $\alpha_1 = (1,3,5)$, $\alpha_2 = (6,3,-2)$, $\alpha_3 = (3,1,0)$, $\beta = (5,8,8)$;

解: (1) $\beta = \alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 - \dfrac{1}{2}\alpha_3$.

(2) $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$.

4. 判别下列向量组是否线性相关:

(1) $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (1,3,6)$;

(2) $\alpha_1 = (3,2,-5,4)$, $\alpha_2 = (2,1,-3,-5)$, $\alpha_3 = (3,5,-13,11)$, $\alpha_4 = (4,5,-14,-3)$;

(3) $\alpha_1 = (1,-1,2,4)$, $\alpha_2 = (0,3,1,2)$, $\alpha_3 = (1,7,8,9)$, $\alpha_4 = (3,2,1,2)$;

(4) $\alpha_1 = (1,2,-1,4)$, $\alpha_2 = (9,1,2,-3)$, $\alpha_3 = (3,5,0,2)$, $\alpha_4 = (3,2,2,1)$, $\alpha_5 = (1,3,3,2)$.

解: (1) 否; (2) 是; (3) 否; (4) 是.

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的数, 令

$$\alpha_1 = (1, a_1, a_1^2, \cdots, a_1^{n-1}),$$

$$\alpha_2 = (1, a_2, a_2^2, \cdots, a_2^{n-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n = (1, a_n, a_n^2, \cdots, a_n^{n-1}).$$

证明: 任一 n 维向量都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

又对任意的 n 维向量 β, 向量组 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 从而向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

6. 设向量组 α_1, α_2, α_3 线性无关. 证明:向量组 $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

证明: 设

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

则

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

因为 α_1, α_2, α_3 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

7. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ (其中 $\alpha_1 \neq 0$) 线性相关的充要条件是至少有一个 α_i $(1 < i \leqslant s)$ 可被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

证明: 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_s$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

设 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 中最后一个不为零的为 k_i, 则 $i \neq 1$ (否则 $\alpha_1 = 0$ 与假设矛盾), 从而 $i > 1$. 故

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} = -k_i\alpha_i,$$

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_i}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}.$$

8. 证明: 如果向量组的一个延伸组线性相关, 则此向量组也线性相关.

证明: 设向量组 (II) 为 (I) 的延伸组, 如向量组 (I) 线性无关, 则由例 3.9 知, (II) 也线性无关, 与已知矛盾, 故此向量组线性无关.

9. 下列论断是否成立? 对的, 加以证明; 错的, 举出反例.

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则其中每一个都可由其余向量线性表示;

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也线性无关;

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_s + \beta_s$ 也线性无关;

(4) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 则一定存在 r 个不等于零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0;$$

(5) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则它的任何线性组合都不等于零.

解: (1) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1)$ 线性相关, 但 α_2 不可由 α_1 线性表示.

(2) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2)$ 线性无关, $\beta_1 = (2, 2)$, $\beta_2 = (0, 1)$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性相关.

(3) 错. 如 $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1)$, $\beta_1 = (1, -1)$, $\beta_2 = (1, 2)$ 线性无关, 但 $\alpha_1 + \beta_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 + \beta_2 = (1, 3)$ 线性相关.

(4) 错. 如 $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$ 线性相关, 但对任意的 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$.

(5) 错. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的零线性组合就等于零.

§ 4 线性子空间

1. 在三维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 下列集合 W 是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?

(1) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \perp (1, 1, 1)\}$;

(2) W 是终点在某直线上的全体向量所构成的集合;

(3) W 是与空间中某固定非零向量 (x_0, y_0, z_0) 的夹角等于定值的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 如直线过原点, 是; 否则, 不是; (3) 夹角等于 $\frac{\pi}{2}$, 是; 否则, 不是.

2. 设 V 为数域 K 上 n 维向量空间, 判断 V 的下列子集 W 是否构成 V 的线性子空间.

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量,

$$W = \{\beta \in V \mid \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta \text{ 线性相关}\};$$

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 V 中给定的 r 个向量, W是V中不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ α_r 线性表示的全体向量所构成的集合.

解: (1) 是; (2) 不是.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 K^n 中给定的 r 个向量, 证明:

$$W = \{(c_1, c_2, \cdots, c_r) \mid c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r = 0\}$$

组成 K^r 的子空间.

证明: 显然 $W \subseteq K^r$ 且 $(0, 0, \cdots, 0) \in W$, 从而 W 非空.

对任意的 $(a_1, \cdots, a_r), (b_1, \cdots, b_r) \in W$ 以及 $k \in K$, 有

$$(a_1+b_1)\alpha_1+\cdots+(a_r+b_r)\alpha_r = a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r+b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r = 0+0 = 0.$$

所以

$$(a_1, \cdots, a_r) + (b_1, \cdots, b_r) \in W.$$

$$(ka_1)\alpha_1 + (ka_2)\alpha_2 + \cdots + (ka_r)\alpha_r = k(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r) = k \cdot 0 = 0.$$

所以

$$k(a_1, \cdots, a_r) \in W.$$

W 成为 K^r 的子空间.

4. 设 $\alpha_1 = (2, 1, 11, 2), \alpha_2 = (1, 0, 4, -1), \alpha_3 = (1, 4, 16, 15),$ $\beta_1 = (3, 1, 15, 1),$ $\beta_2 = (1, 1, 7, 3),$ $\gamma = (1, 6, 22, \lambda)$.

(1) λ 取什么值时才能使 $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;

(2) 验证: $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(\beta_1, \beta_2)$.

解: (1) $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \iff \gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 得线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + 4k_3 = 6 \\ 11k_1 + 4k_2 + 16k_3 = 22 \\ 2k_1 - k_2 + 15k_3 = \lambda. \end{cases}$$

当且仅当 $\lambda = 23$ 时 (k_1, k_2, k_3) 有解 $(6, -11, 0)$. 即当且仅当 $\lambda = 23$ 时 $\gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

(2) 因为 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, 所以 $L(\beta_1, \beta_2) \subseteq L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 反之, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{2}(-3\beta_1 + 11\beta_2)$, 所以 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subseteq L(\beta_1, \beta_2)$.

***5.** 设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 为 K^n 的 s 个线性子空间. $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$. 证明: W 为 K^n 的线性子空间的充分必要条件是, 存在 i $(1 \le i \le s)$, 使 $W = W_i$.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性. 对 s 用归纳法. 当 $s = 1$ 时结论显然成立. 假定结论对 $s - 1$ 成立, 考察 $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$. 如果 $W \neq W_s$, 则可取 $\beta \in W \setminus W_s$. 对于任意的 $\alpha \in W_s$, 必有 $\beta + k\alpha \in W \setminus W_s$ (从 $\beta + k\alpha \in W_s$ 以及 $\alpha \in W_s$ 可以推得 $\beta \in W_s$, 矛盾). 当 $k = 1, \cdots, s$ 时, s 个向量中必有两个向量属于同一个 W_i $(1 \le i \le s - 1)$. 这两个向量相减后可得 $\alpha \in W_i$. 因此 $W_s \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_{s-1}$, 于是 $W = W_1 \cup \cdots \cup W_{s-1}$. 利用归纳假设, 可得一个 i, $1 \le i \le s - 1$ 使得 $W = W_i$. 结论成立.

§ 5　线性子空间的基与维数

1. 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是一个线性子空间, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 并且 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基.

证明: 由于 W 中的任意向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合, 而 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 因此 W 中的任意向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示. 根据命题 5.1, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基.

2. 利用练习 1 验证:

(1) 若 $\alpha_1 = (2, 1, 11, 2)$, $\alpha_2 = (1, 0, 4, -1)$, $\alpha_3 = (1, 4, 16, 15)$, $\alpha_4 = (2, -1, 5, -6)$, $\alpha_5 = (1, 6, 22, 23)$, 则 α_1, α_2 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 的基;

(2) 若 $\alpha_1=(1,-4,15,5,-4)$, $\alpha_2=(0,7,29,-8,7)$, $\alpha_3=(2,-1,1,1,-3)$, $\alpha_4=(1,-4,3,5,-4)$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的基.

解: (1) 因为 α_1,α_2 线性无关且 $\alpha_3=4\alpha_1-7\alpha_2$, $\alpha_4=-\alpha_1+4\alpha_2$, $\alpha_5=6\alpha_1-11\alpha_2$.

(2) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

3. 设 W 为向量空间 V 的子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 W 的一个基, $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j$, $i=1,2,\cdots,r$.

证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 因此

$$k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{ij}\right)\alpha_j=0$$

当且仅当 $k_1,\cdots,k_r$ 是以下齐次线性方程组的解

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jr}k_r=0 \qquad j=1,2,\cdots,r.$$

因此要使 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也是 W 的基的充分必要条件是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 这等价于上述齐次线性方程组只有零解, 也就是它的系数行列式不等于零, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

将上述行列式转置后得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

***4.** 设 V 为数域 K 上的 n 维向量空间. 证明: 对任何大于 n 的自然数 m, 一定存在由 V 的 m 个向量组成的向量组, 使其中任何 n 个向量都线性无关.

证明: 由习题 3–4.5 的结果可以知道, V 不可能表示成它的有限多个真线性子空间的并集. 对 $m \geq n$ 施行数学归纳法. 当 $m = n$ 时结论成立. 假设已经找到满足条件的 $m-1 \geq n$ 个向量的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$. 把其中任意 $n-1$ 的向量生成的线性子空间记为 W_i $(i = 1, \cdots, s)$, 则因 $V \neq \bigcup W_i$, 存在向量 $\alpha_m \notin \bigcup W_i$ $(i = 1, \cdots, s)$. 则向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 也满足条件.

§6 齐次线性方程组的解的结构

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解: (1) $(1, -2, 1, 0, 0)$, $(1, -2, 0, 1, 0)$, $(3, -4, 0, 0, 1)$.

(2) $(-1, 24, 9, 0)$, $(2, -21, 0, 9)$.

(3) $(-7, 7, -1, 1, 0)$, $(-25, 28, -4, 0, 1)$.

(4) $(0, 1, 2, 1)$.

2. 证明: 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 方程组的秩是 $n-1$, 并且矩阵 A 中 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$, 那么 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

证明: 由于

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = |A| = 0,$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad \text{当 } i \neq k \text{ 时},$$

因此 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是题设齐次线性方程组的解. 又因 $A_{kl} \neq 0$, 这是一个非零解. 由假设知道方程组的秩是 $n-1$, 所以此齐次线性方程组的基础解系由一个非零解构成. 因此 $(A_{k1}, A_{k2}, \cdots, A_{kn})$ 是此齐次线性方程组的一个基础解系.

3. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A, M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列所得的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵的行列式. 证明:

(1) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;

(2) 如果这个线性方程组的秩为 $n-1$, 某个 $M_i \neq 0$, 证明方程组的解全是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{(n-1)}M_n)$ 的倍数.

证明: (1) 作齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{nn}=0$, 则此线性方程组与原方程组同解, 且系数矩阵等于 0. 故由上题, 最后一行的代数余子式 $(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解. 又 $A_{ni}=(-1)^{n+i}M_i$, 所以 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)=(-1)^{n+1}(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})$ 为原方程组的解.

(2) 因原方程组的秩为 $n-1$, 且有一个 $M_i\neq 0$. 因此原方程组的基础解系由一个非零解向量构成. 从而非零解 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 构成原线性方程组的一个基础解系. 故原方程组的每一个解都是

$$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$$

的倍数.

§7　非齐次线性方程组的解的结构, 线性流形

1. 求下列线性方程组的全部解:

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3+7x_4=0\\4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0\\2x_1-x_2+x_3-5x_4=0\\2x_1-x_2+6x_3+10x_4=0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=2\\x_1-x_2+2x_3-x_4=1\\4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=8\\2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=9\end{cases}$

(4) $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=-2\\2x_1+5x_2+5x_3+3x_4+x_5=4\\x_1-x_2-x_3-2x_4+5x_5=-6\\x_1+6x_2+8x_3+5x_4-3x_5=9\end{cases}$

解: (1) $k_1(4,0,-3,1)+k_2(0,8,3,-1)$.

(2) $(1,0,1,0)+k(-3,3,-1,2)$.

(3) $(1,0,0,0,-1)+k_1(-1,1,1,0,0)+k_2(7,5,0,2,6)$.

(4) $(1,0,0,1,-1)+k(-1,1,0,-1,0)$.

2. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (b_i \text{ 不全为 } 0)$$

的任意 r 个解, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\eta_i \, (k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, r)$. 证明: 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = 1$ 时, η 也是这个非齐次线性方程组的解.

证明: 设 $\eta_i = (c_{1i}, c_{2i}, \cdots, c_{ni}) \, (i = 1, \cdots, r)$. 则

$$a_{j1}c_{1i} + a_{j2}c_{2i} + \cdots + a_{jn}c_{ni} = b_j, \qquad j = 1, \cdots, m, i = 1, \cdots, r.$$

而

$$\eta = \sum_{i=1}^{r} k_i\eta_i = \left(\sum_{i=1}^{r} k_ic_{1i}, \sum_{i=1}^{r} k_ic_{2i}, \cdots, \sum_{i=1}^{r} k_ic_{ni}\right),$$

代入非齐次线性方程组后得

$$\begin{aligned} & a_{j1}\sum_{i=1}^{r} k_ic_{1i} + a_{j2}\sum_{i=1}^{r} k_ic_{2i} + \cdots + a_{jn}\sum_{i=1}^{r} k_ic_{ni} \\ = & \sum_{i=1}^{r} k_i(a_{j1}c_{1i} + a_{j2}c_{2i} + \cdots + a_{jn}c_{ni}) \\ = & \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\right) b_j, \qquad j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

由于 b_j 不全为 0, 因此 η 是这个非齐次线性方程组的解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = 1$.

3. 设 γ_0 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (b_i \text{ 不全为 } 0)$$

的一个解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是它的导出组的基础解系.

证明: (1) $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 线性无关;

(2) $\gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \gamma_0+\eta_2, \cdots, \gamma_0+\eta_r$ 也线性无关;

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的任意解, 则 $\gamma, \gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \cdots, \gamma_0+\eta_r$ 线性相关;

(4) K^n 中向量 γ 是这个非齐次线性方程组的解的充分必要条件是存在 $r+1$ 个数 k_i $(i=0,1,\cdots,r)$, $\sum\limits_{i=0}^{r} k_i = 1$, 使得

$$\gamma = k_0\gamma_0 + k_1(\gamma_0+\eta_1) + k_2(\gamma_0+\eta_2) + \cdots + k_r(\gamma_0+\eta_r).$$

证明: (1) 设

$$\alpha = k_0\gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_r\eta_r = 0,$$

则

$$0 = A\alpha = k_0A\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_iA\eta_i = k_0B.$$

所以 $k_0=0$, $k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0$. 由于 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 线性无关, 可得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 因此 $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 线性无关.

(2) 设

$$k_0\gamma_0 + k_1(\gamma_0+\eta_1) + \cdots + k_r(\gamma_0+\eta_r) = 0,$$

则

$$(k_0+k_1+\cdots+k_r)\gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_r\eta_r = 0,$$

由 (1), $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 线性无关, 所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0, \qquad k_0+k_1+\cdots+k_r = 0,$$

进而 $k_0=k_1=\cdots=k_r=0$. 因此 $\gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \gamma_0+\eta_2, \cdots, \gamma_0+\eta_r$ 线性无关.

(3) 如 γ 是这个非齐次线性方程组的解, 则 $\gamma-\gamma_0$ 是它的导出组的解. 所以存在 $k_i \in K$, 使 $\gamma-\gamma_0 = \sum k_i\eta_i$. 于是

$$\gamma = \gamma_0 + \sum k_i\eta_i = \left(1-\sum_{i=1}^{r} k_i\right)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\gamma_0+\eta_i),$$

从而 $\gamma, \gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \cdots, \gamma_0+\eta_r$ 线性相关.

(4) $(\Rightarrow)$ γ 为非齐次线性方程组的解, 则由 (3) 的证明可得

$$\gamma = \left(1-\sum_{i=1}^{r} k_i\right)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\gamma_0+\eta_i),$$

从而此线性表示式的系数之和等于

$$\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)+\sum_{i=1}^{r}k_i=1.$$

($\Leftarrow$) 如 $\sum\limits_{i=0}^{r}k_i=1$, 则由上题的结论可知 γ 是一个解.

*$\mathbf{4.}$ 设 Y_1,Y_2 为向量空间 V 的两个线性流形, 下列集合是否构成 V 的线性流形?

(1) $Y_1\cap Y_2$;

(2) $Y_1\cup Y_2$;

(3) $Y_1+Y_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in Y_1,\alpha_2\in Y_2\}$.

解: (1) 是. 设 $\alpha\in Y_1\cap Y_2$, 则

$$Y_1=\alpha+W_1,\qquad Y_2=\alpha+W_2,$$

其中 W_1,W_2 为子空间, 于是

$$Y_1\cap Y_2=\alpha+(W_1\cap W_2),$$

可知 $Y_1\cap Y_2$ 也是线性流形.

(2) 不一定. 如取 α,β 线性无关, 令

$$Y_1=L(\alpha),\qquad Y_2=L(\beta),$$

则 Y_1,Y_2 都是线性流形, 但 $\alpha+\beta\notin Y_1\cup Y_2$.

(3) 是. 如

$$Y_1=\alpha_1+W_1,\qquad Y_2=\alpha_2+W_2,$$

其中 W_1,W_2 为子空间, 则

$$Y_1+Y_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(W_1+W_2),$$

可知 Y_1+Y_2 也是线性流形.

*$\mathbf{5.}$ 设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 V 的 $r+1$ 个向量, 证明:

$$Y=\left\{\sum_{i=0}^{r}k_i\alpha_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r}k_i=1,k_i\in K,i=0,1,\cdots r\right\}$$

构成 V 的一个线性流形.

证明: 设

$$\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} k_i = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i \in Y, \qquad \sum_{i=0}^{r} l_i = 1,$$

则对任意的 $k, l \in K$, $k + l = 1$, 有

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i\right) = \sum_{i=0}^{r}(kk_i + ll_i)\alpha_i,$$

而

$$\sum_{i=0}^{r} kk_i + \sum_{i=0}^{r} ll_i = k\sum_{i=0}^{r} k_i + l\sum_{i=0}^{r} l_i = k + l = 1,$$

于是

$$k\left(\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i\right) + l\left(\sum_{i=0}^{r} l_i\alpha_i\right) \in Y,$$

从而 Y 是线性流形.

*6. 设 Y 为向量空间 V 的一个线性流形. 证明: 存在 Y 中的 $r+1$ 个向量 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 使

$$Y = \left\{\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r} k_i = 1, k_i \in K, i = 0, 1, \cdots r\right\}.$$

证明: 设 $Y = \alpha_0 + W$, 其中 W 是子空间. 设 W 的基为 $\eta_1, \cdots, \eta_r$, 令

$$\alpha_0 = \alpha_0, \alpha_1 = \alpha_0 + \eta_1, \cdots, \alpha_r = \alpha_0 + \eta_r,$$

则 $\alpha_i \in Y$, 且对任意的 $k_i \in K$, $\sum\limits_{i=0}^{r} k_i = 1$, 有

$$\sum_{i=0}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_0 + \sum_{i=0}^{r} k_i\eta_i \in \alpha_0 + W = Y.$$

反之, 对任意的 $\alpha = \alpha_0 + \eta \in Y = \alpha_0 + W$, 存在 k_i, 使 $\eta = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\eta_i$, 从而

$$\alpha = \left(1 - \sum_{i=1}^{r} k_i\right)\alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} k_i(\alpha_0 + \eta_i),$$

其中

$$\left(1-\sum_{i=1}^{r}k_i\right)+k_1+k_2+\cdots+k_r=1.$$

这证明了

$$Y=\left\{\sum_{i=0}^{r}k_i\alpha_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{r}k_i=1, k_i\in K, i=0,1,\cdots r\right\}.$$

第四章　几何空间中的平面与直线

§1　几何空间中平面的仿射性质

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程和参数方程:

(1) 过 $(-1,2,0),(-2,-1,4),(3,1,-5)$ 三点的平面;

(2) 过点 $(3,1,2)$ 和 $(1,0,-2)$, 平行于向量 $\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 的平面.

解: (1) 过 3 点的平面三点式方程是:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 4 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

展开后得

$$19x+11y+13z-3=0.$$

它的参数方程为:

$$\begin{cases} x=-1-u+4v \\ y=2-3u-v \\ z=4u-5v. \end{cases}$$

(2) 由已知条件, 平面通过 $(3,1,2)$, 它的方向向量是 $\xi_1=\overrightarrow{v}=(1,-2,-3)$ 以及 $\xi_2=(1-3,0-1,-2-2)=(-2,-1,-4)$, 因此平面的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+u-2v \\ y=1-2u-v \\ z=2-3u-4v, \end{cases}$$

平面的一般方程为

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

展开后得 $x+2y-z-3=0$.

2. 在给定的仿射坐标系中, 求下列平面的一般方程:

(1) 过点 $(1,2,-4)$ 和 x 轴的平面;

(2) 过点 $(2,1,2)$ 以及平面 $\Pi_1:\ x+y-z=0$, $\Pi_2:\ 2x-3z-1=0$ 的交线的平面;

(3) 过点 $(0,4,-3)$ 和 $(1,-2,6)$, 且平行于 x 轴的平面;

(4) 过点 $(3,1,-2)$ 且平行于平面 $x-2y-2z+1=0$ 的平面;

(5) 过点 $(2,0,-1),(-1,3,4)$ 且与 y 轴平行的平面方程.

解: (1) 设平面的一般方程是 $Ax+By+Cz+D=0$, 因为它过 x 轴, 所以 $A=D=0$; 又因它过点 $(1,2,-4)$, 所以 $B=2C$. 故平面的方程为 $2y+z=0$.

(2) 解线性方程组

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3z-1=0 \end{cases}$$

求得平面交线上的两个点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 以及 $\left(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$. 得到所求平面的三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -\frac{3}{2} & -2 \\ y-1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ z-2 & -2 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $5x+3y-6z-1=0$.

(3) 所求平面的一个方向向量是 $(1,0,0)$, 因此所求平面的方程为:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-4 & 0 & -6 \\ z+3 & 0 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

展开后得 $3y+2z-6=0$.

(4) 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $x-2y-2z+D=0$. 因该平面过 $(3,1,-2)$ 点, 所以 $3-2+4+D=0$, 即 $D=-5$. 故所求方程为 $x-2y-2z-5=0$.

(5) 由于该平面平行于 y 轴, 因此可设它的方程为 $Ax+Cz+D=0$. 把两个点的坐标代入, 解方程 $\begin{cases} 2A-C=D=0 \\ -A+4C+D=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} A=-\frac{5}{7}D \\ C=-\frac{3}{7}D \end{cases}$ 即平面方程为 $5x+3z-7=0$.

3. 已知一平面通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ $(z_0\neq 0)$, 且在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 求它的方程.

解: 设平面在 z 轴上的截距为 c, 则该平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

又因 P_0 点在平面上, 所以 $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$, 得 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{z_0}\left(1-\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)$, 所以平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\left(1-\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\frac{z}{z_0}=1.$$

4. 求过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 且平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的平面的方程.

解: 由两平面平行的性质可知, 所求平面的方程应为 $Ax+By+Cz+D_1=0$. 因该平面过 P_0 点, 所以 $D_1=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, 故所求平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

5. 证明命题 1.2.

证明: 因为向量与线性流形平行定义为这个向量在线性子空间 W 内, 因此 $\overrightarrow{v}$ 与平面平行的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}\in W$. 而线性子空间 W 又是由导出方程 $Ax+By+Cz=0$ 定义的, 所以 $\overrightarrow{v}\in W$ 的充分必要条件是 $\overrightarrow{v}$ 的分量 (X,Y,Z) 满足导出方程, 即 $AX+BY+CZ=0$.

6. 判断下列各平面的相关位置:

(1) $2x+y-z=0$ 与 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y-\dfrac{1}{4}z+2=0$;

(2) $x-2y+z-2=0$ 与 $3x+y-2z-1=0$;

(3) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 其中 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$.

解: (1) 因为

$$\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{-1}{-\frac{1}{4}}\neq\frac{0}{2},$$

所以两平面平行.

(2) 因为 $\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{-2}{1}$, 所以两平面相交.

(3) 因为 $A_1:B_1\neq A_2:B_2$, 所以两平面相交.

7. 已知两个平面 $\Pi_1:\ x-2y+pz-1=0$, $\Pi_2:\ 2x-4y+5z+q=0$. 问当 p,q 取何值时:

(1) Π_1 与 Π_2 相交; (2) Π_1 与 Π_2 平行; (3) Π_1 与 Π_2 重合.

解: (1) 当 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}\neq\dfrac{p}{5}$, 即 $p\neq\dfrac{5}{2}$, q 取任意实数时两平面相交.
(2) 当 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{p}{5}\neq\dfrac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\dfrac{5}{2}$, $q\neq-2$ 时两平面平行.
(3) 当 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{p}{5}=\dfrac{-1}{q}$ 时, 即 $p=\dfrac{5}{2}$, $q=-2$ 时两平面重合.

8. 已知点 $A(3,10,-5)$ 和平面 $\Pi:\ 7x-4y-z-1=0$. 求 z 轴上的点 B 的坐标, 使 AB 平行于 Π.

解: 设 B 点的坐标为 $(0,0,k)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(-3,-10,k+5)$. 根据命题 8.2, $\overrightarrow{AB}$ 的分量必须满足 $7(-3)-4(-10)-(k+5)=0$, 即 $k=14$. 故 B 点的坐标为 $(0,0,14)$.

9 坐标满足方程 $(ax+by+cz+d)^2-(px+qy+rz+s)^2=0$ 的点的轨迹.

解: $(ax+by+cz+d)^2-(px+qy+rz+s)^2=0$ 当且仅当

$$((a-p)x+(b-q)y+(c-r)z+(d-s))((a+p)x+(b+q)y+(c+r)z+(d+s))=0.$$

所以点的轨迹为

$$(a-p)x+(b-q)y+(c-r)z+(d-s)=0 \qquad (*)$$

$$(a+p)x+(b+q)y+(c+r)z+(d+s)=0 \qquad (**)$$

当 $(a,b,c,d)=\pm(p,q,r,s)$ 时, 轨迹为全空间; 当 $(a,b,c)=(p,q,r)$, $d\neq s$ 时, 轨迹是平面 $(**)$; 当 $(a,b,c)=-(p,q,r)$, $d\neq -s$ 时, 轨迹是平面 $(*)$; 其余情形轨迹是平面 $(*)$ 与 $(**)$ 的并.

10. 证明三个平面

$$\begin{aligned}
&a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\
&a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\
&k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)+m=0
\end{aligned}$$

当 $m\neq kd_1+ld_2$ 时, 没有公共点.

证明: 三个平面有公共点当且仅当线性方程组

$$\begin{cases}
a_1x+b_1y+c_1z=-d_1\\
a_2x+b_2y+c_2z=-d_2\\
k(a_1x+b_1y+c_1z)+l(a_2x+b_2y+c_2z)=-m
\end{cases}$$

有解. 对这个方程组作初等变换, 从第 3 个方程减去第 1 个方程的 k 倍和第 2 个方程的 l 倍后得到 $0 = kd_1 + ld_2 - m$, 当 $m \neq kd_1 + ld_2$ 时, 这是个矛盾方程, 因此没有公共点.

*****11.*** 证明任何一个经过相交的两平面

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

的相交直线 L 的平面方程能写成

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中, α, β 是不全为零的实数.

证明: L 中的点的坐标满足 Π_1 与 Π_2 的方程, 从而也满足方程 $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, 因此 L 在此平面上.

反之, 如果平面 Π' 通过直线 L, 我们可在 Π' 上取一个不含于 L 的点 $M(x_0, y_0, z_0)$. 令

$$\alpha_0 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2, \ \beta_0 = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1,$$

由于 $M \notin L$, 所以 $\alpha_0, beta_0$ 不全为 0. M_0 的坐标显然满足以下方程:

$$\alpha_0(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \beta_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

由前面的讨论知上述方程确定的平面一定通过交线 L, 由通过一条直线及线外一点的平面的唯一性, 可见上述方程定义的平面就是 Π'.

12. 设平面 $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 与连接两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线相交于点 M, 而且 $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{MM_2}$. 证明:

$$k = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

证明: 设点 M 的坐标是 (x_0, y_0, z_0), 则由定比分点公式知

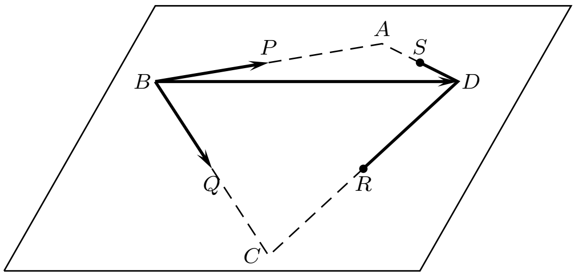
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + kx_2}{1 + k} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + ky_2}{1 + k} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + kz_2}{1 + k} \end{cases} \qquad (k \neq -1).$$

但由于 $M_0 \in \Pi$, 所以

$$A\frac{x_1 + kx_2}{1 + k} + B\frac{y_1 + ky_2}{1 + k} + C\frac{z_1 + kz_2}{1 + k} + D = 0,$$

化简后即得
$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

*13. 一平面与空间四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 分别交于 P, Q, R, S, 则
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$
试证之.



第 13 题图

证明: 如图, 我们以 B 点为原点, 以 $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{BD}$ 为基向量构作一个仿射坐标系 $[B;\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BD}]$. 令
$$\overrightarrow{QC}=a\overrightarrow{BQ},\ \overrightarrow{CR}=b\overrightarrow{RD},\ \overrightarrow{DS}=c\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{PA}=d\overrightarrow{BP}.$$
设
$$\overrightarrow{BR}=k\overrightarrow{BQ}+l\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},\quad \overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_3},$$
则
$$\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BC}=(k-1-a)\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},$$
$$\overrightarrow{RD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BR}=-k\overrightarrow{e_2}+(1-l)\overrightarrow{e_3}.$$
由 $\overrightarrow{CR}=b\overrightarrow{RD}$ 可得:
$$\begin{cases}k-1-a=-bk\\ l=b(1-l),\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}a=\dfrac{k+l-1}{1-l}\\ b=\dfrac{l}{1-l}.\end{cases}$$

又因
$$\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{e_1}+(n-1)\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BS}=(1+d-m)\overrightarrow{e_1}-n\overrightarrow{e_3}.$$

由 $\overrightarrow{DS}=c\overrightarrow{SA}$ 可得:

$$\begin{cases}m=c(1+d-m)\\ n-1=-cn,\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}c=\dfrac{1-n}{n}\\ d=\dfrac{m+n-1}{1-n}.\end{cases}$$

所以

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{dbc}{a}=\frac{l(m+n-1)}{n(k+l-1)}.\qquad(*)$$

又,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR}&=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BQ}=(k-1)\overrightarrow{e_2}+l\overrightarrow{e_3},\\ \overrightarrow{QP}&=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2},\\ \overrightarrow{QS}&=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BQ}=m\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+n\overrightarrow{e_3},\end{aligned}$$

因为这 3 个向量共面, 所以

$$\begin{vmatrix}0&1&m\\ k-1&-1&-1\\ l&0&n\end{vmatrix}=l(m-1)-n(k-1)=0.$$

从而

$$l(m+n-1)=ln+l(m-1)=ln+n(k-1)=n(k+l-1).$$

将上式代入 (*) 即得:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

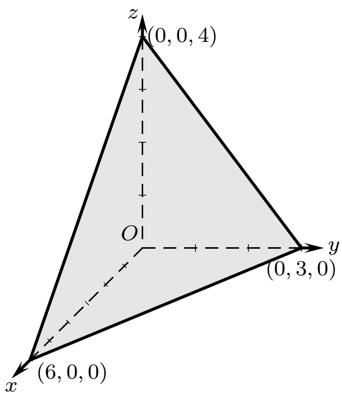
14 画出以下平面的直观图:

(1) $2x+4y+3z-12=0$;　(2) $4x+3y+12z=0$;

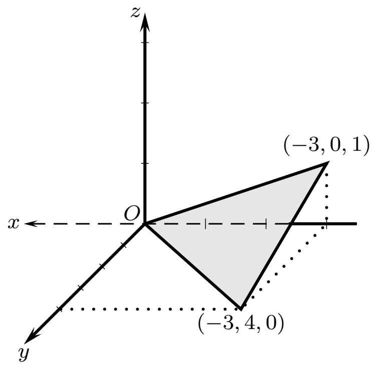
(3) $2x-5y-10=0$;　(4) $3y-2z-6=0$;

(5) $4x+3y=0$;　(6) $y=-3$.

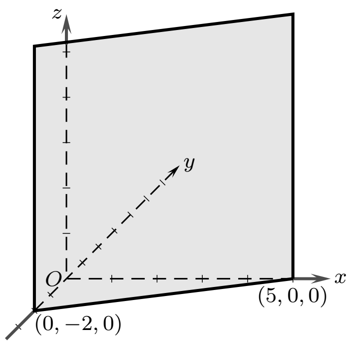
解:



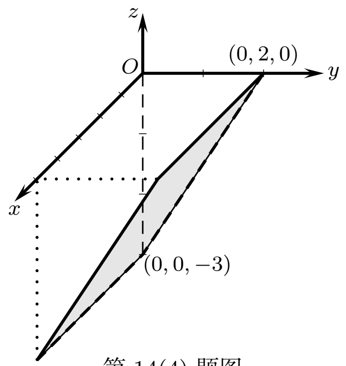
第 14(1) 题图



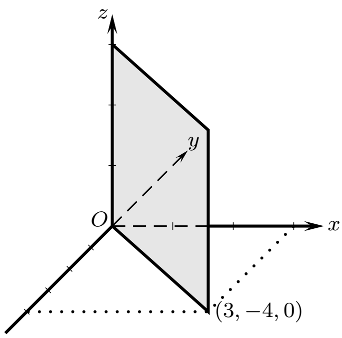
第 14(2) 题图



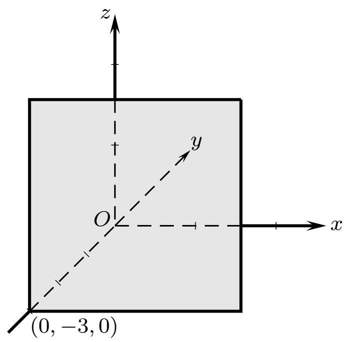
第 14(3) 题图



第 14(4) 题图



第 14(5) 题图



第 14(6) 题图

§2 几何空间中平面的度量性质

1. 试求通过点 $A(1,1,1)$ 与 $B(1,0,2)$ 且垂直于平面 $x+2y-z-6=0$ 的平面方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\nu = (A,B,C)$, 则 $\nu \perp \overrightarrow{AB}$, ν 也与平面 $x+2y-z-6=0$ 的法向量垂直. 因此有方程组

$$\begin{cases} 0\cdot A+(-1)B+C=0 \\ A+2B-C=0. \end{cases}$$

解得 $A:B:C=1:-1:-1$. 可得点法式方程 $(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$, 即 $x-y-z+1=0$.

2. 平面 Π 过 3 个点 $M_1(3,-1,5)$, $M_2(4,-1,1)$ 和 $M_3(2,0,2)$. 求平面 Π 的一个法向量, 并求出 Π 的方程.

解: 平面 Π 的一个法向量可取为 $\nu=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=(4,7,1)$. 可得点法式方程 $4(x-2)+7y+(z-2)=0$, 即 $4x+7y+z-10=0$.

3. 平面 Π 过点 $M_0(2,3,1)$, 且和两平面 $\Pi_1:\ x+3y-z+3=0$, $\Pi_2:\ 2x+y-2z+1=0$ 都垂直, 求 Π 的方程.

解: 利用例 4.5 知平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5x-5z+15=0,$$

化简得 $x+z-3=0$.

4. 平面 Π 在 x,y,z 轴上的截距分别是 $-1,\dfrac{3}{2},3$, 求自原点指向平面的单位法向量的方向余弦.

解: 利用平面的截距式方程得到该平面的方程:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{3}=1.$$

化简后得 $-3x+2y+z-3=0$. 它的法向量可取为 $\pm(-3,2,1)$. 因为点 $P_0(-1,0,0)$ 在此平面上, 而 $\overrightarrow{OP_0}$ 与本题所要求的法向量之间的夹角应该小于 $\dfrac{\pi}{2}$, 即内积大于 0. 故应取法向量为 $(-3,2,1)$. 它的方向余弦为 $\left(-\dfrac{3\sqrt{14}}{14},\dfrac{\sqrt{14}}{7},\dfrac{\sqrt{14}}{14}\right)$.

5. 求过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 60° 角的平面 Π 的方程.

解: 过 z 轴的平面的法向量应为 $\nu=(A,B,0)$. 它应与已知平面成 60° 角, 所以 $\dfrac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{10}}=\pm\dfrac{1}{2}$. 推得 $3A=B$ 或 $A=-3B$. 故平面方程为 $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

6. 已知平面 Π: $4x-4y-2z+3=0$. 点 P 与平面 Π 的距离为 2, 求点 P 的轨迹.

解: 设满足条件的点为 $P(x,y,z)$, 则有

$$\frac{|4x-4y-2z+3|}{6}=2,$$

推得 $4x-4y-2z+3=\pm12$. 即点 P 的轨迹是两个平行平面:

$$4x-4y-2z-9=0 \text{ 和 } 4x-4y-2z+15=0.$$

7. 已知两个平面由下式确定, 求它们的交角, 并确定点 $(0,0,1)$ 所在的两面角的大小:

$$(x+2y+4z-3)(-3x+y-z-1)=0.$$

解: 两平面的法向量分别为 $(1,2,4)$ 与 $(-3,1,-1)$. 则交角 θ 满足 $\cos\theta=\pm\dfrac{-5}{\sqrt{21}\sqrt{11}}=\pm\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$, 所以 $\theta=\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$.

为确定点 $(0,0,1)$ 所在的两面角, 计算此点关于两个平面的离差分别为 $\dfrac{1}{\sqrt{21}}$ 与 $\dfrac{-2}{\sqrt{11}}$, 由于它们异号, 因此所求两面角的大小为 $\pi-\arccos\dfrac{5\sqrt{231}}{231}$.

8. 在直角坐标系下, 求下列点到平面的距离.

(1) 点 $(2,1,4)$, 平面 $2x-y+4z-12=0$;

(2) 点 $(-1,0,5)$, 平面 $x-3y+5z-2=0$.

解: (1) $d=\dfrac{|4-1+16-12|}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

(2) $d=\dfrac{|-1+25-2|}{\sqrt{35}}=\dfrac{22\sqrt{35}}{35}$.

9. 设有两平行平面 $2x-3y+6z+2=0$ 与 $4x-6y+12z-3=0$. 问: 原点 O 位于空间的哪一部分?

解: 只要计算原点 O 关于两个平面的离差. $\delta_1=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}>0$, $\delta_2=\dfrac{-3}{\sqrt{4^2+6^2+12^2}}<0$, 所以 O 在两个平面之间.

10. 在直角坐标系中, 设 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 都不在平面 Π : $Ax+By+Cz+D=0$ 上, 且 $M_1\neq M_2$. 证明: M_1 与 M_2 在平面 Π 的同侧当且仅当 $F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号.

解: M_i 位于 Π 的同侧当且仅当它们到 Π 的离差同号. 而离差等于 $\dfrac{F_i}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, 与 F_i 同号. 因此 M_i 位于 Π 的同侧当且仅当 F_1 与 F_2 同号.

11. 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的 3 个顶点分别是 $A(0,1,0), B(2,-1,1), C(1,1,1)$. 求与 $\triangle ABC$ 所在平面平行但与之相距为 2 的平面方程.

解: 首先易得 $\triangle ABC$ 所在平面的方程为 $\Pi: 2x+y-2z-1=0$. 取 $M(a,b,c)$ 使 M 到 Π 的距离为 2. 即 $\dfrac{2a+b-2c-1}{3}=\pm 2$, 得 $2a+b-2c=7$ 或 $2a+b-2c=-5$. 所以过 M 且与 Π 平行的平面与 Π 相距为 2. 因此所求平面的方程为 $2x+y-2z-7=0$ 和 $2x+y-2z+5=0$.

12. 设两个平行平面为 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_2=0$ $(D_1\neq D_2)$. 求与它们平行且将 Π_1 与 Π_2 的距离三等分的平面.

解: 分别在 Π_1 和 Π_2 上各取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 设线段 M_1M_2 的 2 个三等分点为 $M'(x',y',z'), M''(x'',y'',z'')$, 则分别通过 M' 或 M'' 且与已知平面平行的平面即为所求. 由假设, $\overrightarrow{M_1M'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M''}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{M_1M_2}$. 即

$$3(x'-x_1,y'-y_1,z'-z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

$$3(x''-x_1,y''-y_1,z''-z_1)=2(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

于是

$$3(A(x'-x_1)+B(y'-y_1)+C(z'-z_1))=A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1),$$

$$3(A(x''-x_1)+B(y''-y_1)+C(z''-z_1))=2(A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)).$$

利用平面方程, 可得

$$3(Ax'+By'+Cz')+3D_1=-D_2+D_1,$$

$$3(Ax''+By''+Cz'')+3D_1=2(-D_2+D_1).$$

因此过 M' 的平行平面方程是

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(2D_1+D_2)=0.$$

因此过 M'' 的平行平面方程是

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(D_1+2D_2)=0.$$

13. 设有两个平行平面 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\Pi_1: Ax+By+Cz+D_2=0$ $(D_1\neq D_2)$. 点 $S(x_0,y_0,z_0)$ 不在 Π_1 与 Π_2 上. 过 S 作一条直线

分别与 Π_1,Π_2 交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 求 λ 使 $\overrightarrow{SM_1}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}$, 并分析 λ 的符号.

解: 由

$$(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)=\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

可得

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)=\lambda(A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)),$$

代入平面方程后,

$$-D_1-(Ax_0+By_0+Cz_0)=\lambda(-D_2+D_1).$$

解得

$$\lambda=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D_1}{D_1-D_2}.$$

再分析 λ 的符号. 设 S 关于 Π_1,Π_2 的离差为 $\delta_{S,\Pi_1},\delta_{S,\Pi_2}$, 则由离差的定义可知 $|\delta_{S,\Pi_1}|,|\delta_{S,\Pi_2}|$ 表示 S 到 Π_1,Π_2 的距离.

(1) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 同号, 且 $|\delta_{S,\Pi_1}|<|\delta_{S,\Pi_2}|$, 则 M_1 在线段 SM_2 上, 此时 $\lambda>0$.

(2) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 同号, 且 $|\delta_{S,\Pi_1}|>|\delta_{S,\Pi_2}|$, 则 M_1 在线段 SM_2 外, 此时 $\lambda<0$.

(3) 若 δ_{S,Π_1} 与 δ_{S,Π_2} 异号, 则 S 在线段 M_1M_2 上, 此时 $\lambda<0$.

14. 在直角坐标系中, 设平面 Π_i 的方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2.$$

且这两平面相交. 求它们交成的两面角的角平分面的方程.

解: 点 $P(x,y,z)$ 在 Π_1 与 Π_2 的某个两面角的角平分面上当且仅当该点到这两个平面的距离相等. 因此点 P 应满足方程

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

所以角平分面的方程为

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

15. 求到两个给定平面

$$\Pi_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2,$$

的距离为定比 k 的点的轨迹方程.

解: 设两个给定平面的方程为

$$\Pi_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\qquad i=1,2.$$

设 $P(x,y,z)$ 点到 Π_1 与 Π_2 的距离之比为 k, 则有

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=k\frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

因此 P 点的轨迹方程为

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm k\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

16. 在直角坐标系下, 已知平面 Π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 求 Π 关于 xOy 平面的对称面 Π' 的方程和关于坐标原点的对称面 Π'' 的方程.

解: 设点 $P'(x',y',z')\in\Pi'$, 则 P' 关于 xOy 平面的对称点是 $(x',y',-z')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $Ax'+By'-Cz'+D=0$, 所以 Π' 的方程为 $Ax+By-Cz+D=0$.

同理, 设点 $P''(x'',y'',z'')\in\Pi''$, 则 P'' 关于原点的对称点是 $(-x'',-y'',-z'')$, 该点应在平面 Π 上, 故有 $-Ax''-By''-Cz''+D=0$, 所以 Π'' 的方程为 $Ax+By+Cz-D=0$.

§3　几何空间中直线的仿射性质

1. 在给定的仿射坐标系中, 求下列直线的方程:

(1) 过点 $P(3,1,-1)$ 且平行于向量 $\overrightarrow{v}(4,7,-8)$;

(2) 过点 $P_0(-3,0,1)$ 和 $P_1(2,5,1)$;

(3) 已知三角形的三个顶点是 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$, 求三条中线的方程.

解: (1) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+1}{-8}$.

(2) 用两点式方程可得 $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{0}$.

(3) $\dfrac{x-x_i}{x_i-\dfrac{x_{i+1}+x_{i+2}}{2}}=\dfrac{y-y_i}{y_i-\dfrac{y_{i+1}+y_{i+2}}{2}}=\dfrac{z-z_i}{z_i-\dfrac{z_{i+1}+z_{i+2}}{2}}$, 当 $i+1$, $i+2$ 大于 3 时即减去 3.

2. 在直角坐标系中, 求过点 $P(1,6,3)$ 且平行于平面 $3x+y-2z-5=0$ 的直线的方程.

解: 设直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$, 则 ξ 与平面 $3x+y-2z-5=0$ 平行, 故 $3A+B-2C=0$, 而直线方程为 $\dfrac{x-1}{A}=\dfrac{y-6}{B}=\dfrac{z-3}{C}$.

3. 求过点 $A(0,-2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+6y-4z+2=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ 的直线方程.

解: 先将直线方程化为标准方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$, 其方向向量为 $\xi(2,-1,-1)$, 故所求直线方程为 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

4. 求直线 $L:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{2}$ 与平面 $\Pi:\ 2x-3y+2z-2=0$ 的交点坐标.

解: 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases} x=3t \\ y=2-2t \\ z=-4+2t. \end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$2(3t)-3(2-2t)+2(-4+2t)-2=0,$$

解得 $t=1$, 所以交点为 $(3,0,-2)$.

5. 求过点 $A(3,1,2)$ 及直线 $L:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$ 的平面的方程.

解: 直线上有一点 $(0,0,-2)$, 因此平面的方向向量是 $\xi_1=(1,-2,-3)$, $\xi_2=(-3,-1,-4)$. 故平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -3 \\ y-1 & -2 & -1 \\ z-2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

计算得 $5x+13y-7z-14=0$.

6. 已知直线 $L:\ \dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-a}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$, 平面 $\Pi:\ x-2y-4z+1=0$. 问当 a,m 取什么值时

(1) L 与 Π 相交;　　(2) L 平行于 Π;　　(3) L 在 Π 内.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi=(m,-2,3)$, 若 L 与 Π 相交, 则 ξ 不与 Π 平行, 故 $m+4-12\neq 0$, 即 $m\neq 8$, a 是任意实数.

(2) ξ 必须与 Π 平行, 即 $m=8$, 同时 L 上的点 $(1,a,-2)$ 不在 Π 上, 即 $1-2a+8+1\neq 0$, $a\neq 5$.

(3) $m=8$, $a=5$.

7. 求通过点 $(2,2,2)$ 且与两直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \text{ 和} \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解: 设所求直线的方向向量是 $\xi=(X,Y,Z)$. 已知第一条直线上的点 $M_1(0,0,0)$, 方向向量 $\xi_1=(1,2,3)$. 第二条直线上的点 $M_2(1,2,3)$, 方向向量 $\xi_2=(2,1,4)$. 为使所求直线与第一条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & X \\ 2 & 2 & Y \\ 2 & 3 & Z \end{vmatrix}=2X-4Y+2Z=0.$$

同理, 为使所求直线与第二条直线相交, 必须使

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & Y \\ -1 & 4 & Z \end{vmatrix}=X-6Y+Z=0.$$

解此线性方程组得 $X:Y:Z=1:0:-1$. 因此所求直线的方程是

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

8. 将下列直线的一般式方程化成标准方程.

(1) $\begin{cases} 2x-3y+4z-12=0 \\ x+4y-2z-10=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2y-4z-5=0 \\ 6x-y-2z-4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 4y+3z+1=0. \end{cases}$

解: (1) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)=(-10,8,11).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(8,0,-1)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x-8}{-10}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{11}.$$

(2) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-8, -18, -15).$$

为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $\left(\dfrac{1}{3}, 0, -1\right)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x - \dfrac{1}{3}}{8} = \frac{y}{18} = \frac{z+1}{15}.$$

(3) 此直线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-3, -9, 12).$$

此向量可化简为 $(1, 3, -4)$. 为求直线上的点, 解原线性方程组, 得到一个解 $(0, 2, -3)$. 因此直线的标准方程是

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-4}.$$

9. 求直线与平面的交点.

(1) $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ 与 $3x + 2y + z = 0$;

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 与 xOy 平面.

解: (1) 把直线写成参数方程:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

然后代入平面方程得

$$3(-1-2t) + 2(-1+3t) + (3+4t) = 0,$$

解得 $t = \dfrac{1}{2}$, 所以交点为 $\left(-2, \dfrac{1}{2}, 5\right)$.

(2) 交点的坐标是 $(x, y, 0)$, 解方程组 $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 8$, $y = -5$. 故交点为 $(8, -5, 0)$.

10. 求出过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且与相交平面

$$\Pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2$$

都平行的直线的方程.

解: 根据命题 9.1, 平面 Π_1 与 Π_2 的交线的方向向量是

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

因所求直线必须与交线平行, 因此这也是所求直线的方向向量. 故所求直线的方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

11. 直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOz 坐标平面内.

解: 平面 xOz 的方程是 $y=0$, 因此直线落在平面 xOz 内的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ y=0\end{cases}$$

有无穷解. 而上述方程组与

$$\begin{cases} A_1x+C_1z+D_1=0\\ A_2x+C_2z+D_2=0\\ y=0\end{cases}\tag{$*$}$$

同解. 而方程组 (*) 有无穷多解的充分必要条件是前两个方程的系数成比例, 即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

最后一个不等式是直线方程的必要条件.

§4 几何空间中直线的度量性质

1. 判断下列直线与平面的位置关系. 如果相交, 则求它们的交点与夹角.

(1) 直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ 与平面 $4x+3y-z+3=0$;

(2) 直线 $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-4t\\z=-1+5t\end{cases}$ 与平面 $x+2y+2z-7=0$;

(3) 直线 $\begin{cases}x-y+z=5\\x+y-z=-1\end{cases}$ 与平面 $2x+y+z-5=0$.

解: (1) 直线的方向向量是 $\xi=(2,-1,5)$, 平面的法向量是 $\nu=(4,3,-1)$. 因为 $(\xi,\nu)=0$, 直线上的点 $(1,-3,-2)$ 又满足平面方程, 所以直线在平面内.

(2) 直线的方向向量是 $\xi=(-2,-4,5)$, 平面的法向量是 $\nu=(1,2,2)$. 因为 $(\xi,\nu)=0$, 直线上的点 $(1,2,-1)$ 不满足平面方程, 所以直线与平面平行.

(3) 直线的标准方程是 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{2}$, 与平面方程联立后求得交点 $(2,-1,2)$. 直线的方向向量是 $\xi=(0,2,2)$, 平面的法向量是 $\nu=(2,1,1)$, 设直线与平面的交角为 θ, 则 $\sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 所以夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 求过点 $A(3,-1,1)$ 且与平面 $\Pi:\ x+y+z=1$ 垂直的直线方程.

解: 因所求直线与平面垂直, 直线的方向向量是 $\xi=(1,1,1)$. 故直线方程为 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

3. 判断下列直线间的关系, 并求它们的夹角. 对于相交的直线并求交点:

(1) $L_1:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, $L_2:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$;

(2) $L_1:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$, $L_2:\ \dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z}{7}$.

解: (1) 根据第三章命题 9.2, 行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}6&4&1\\-4&2&3\\-2&3&2\end{vmatrix}=-30\neq 0,$$

所以两直线异面. 设夹角为 θ, 则 $\cos\theta=\dfrac{16}{\sqrt{29}\sqrt{14}}=\dfrac{8\sqrt{406}}{203}$, 故 $\theta=\arccos\dfrac{8\sqrt{406}}{203}$.

(2) 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

所以两直线共面, 又因它们的方向向量不平行, 故两直线相交. 设夹角为 θ, 则 $\cos\theta = \dfrac{13\sqrt{5365}}{1073}$, 故 $\theta = \arccos\dfrac{13\sqrt{5365}}{1073}$. 解联立方程, 求得交点为 $\left(1, 2, \dfrac{7}{2}\right)$.

4. 已知直线 L 的方程是 $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$ 求点 $A(3,2,-1)$ 到 L 的距离.

解: 直线的方向向量是 $\xi = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0,3,-3)$, 且点 $(1,2,1)$ 在直线上, 故点 A 到直线的距离为

$$d = \frac{|(2,0,-2)\times(0,1,-1)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

5. 试证直线

$$L_1: \begin{cases} x = 3+3t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad 与 \quad L_2: \begin{cases} x = -1+u \\ y = 2 \\ z = u \end{cases} \quad (其中\ t, u\ 是参数)$$

是异面直线, 并求它们的公垂线和两直线间的距离.

解: 直线 L_1 通过点 $M_1(3,0,1)$, 方向向量是 $\xi_1 = (3,1,0)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(-1,2,0)$, 方向向量是 $\xi_2 = (1,0,1)$. 因此

$$\xi_1 \times \xi_2 = (1,-3,-1).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \xi_1\times\xi_2)|}{|\xi_1\times\xi_2|} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11}.$$

由 $M_1, \xi_1, \xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x+3y-10z+13 = 0.$$

由 $M_2, \xi_2, \xi_1 \times \xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & -3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3x+2y-3z-1=0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases} x-3y+10z-13=0 \\ 3x+2y-3z-1=0. \end{cases}$$

6. 已知直线 $L: \begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 及定点 $P_0(2,0,-1)$. 求 P_0 关于 L 的对称点.

解: 我们通过考虑点关于平面 $\Pi_1: x-y-4z+12=0$ 及 $\Pi_2: 2x+y-2z+3=0$ 的离差来确定 P_0 关于 L 的对称点 P_0'. $P_0(2,0,-1)$ 关于 Π_1 的离差 $\delta_1 = \dfrac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta_2 = \dfrac{9}{3} = 3$. 所以对称点 $P_0'(x',y',z')$ 关于 Π_1 的离差 $\delta_1' = \dfrac{x'-y'-4z'+12}{\sqrt{18}} = -\delta_1 = -\sqrt{18}$, 关于 Π_2 的离差 $\delta_2' = \dfrac{2x'+y'-2z'+3}{3} = -\delta_2 = -3$. 因此

$$\begin{cases} x-y-4z+12=-18 \\ 2x+y-2z+3=-9, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x-y-4z=-30 \\ 2x+y-2z=-12. \end{cases} \tag{$*$}$$

又因为 $\overrightarrow{P_0P_0'}$ 应与直线 L 垂直, 即

$$\begin{vmatrix} x'-2 & 1 & 2 \\ y' & -1 & 1 \\ z'+1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6x'-6y'+3z'-9=0, \tag{$**$}$$

联立此 3 个方程解得: $x'=0$, $y'=2$, $z'=7$. 即对称点的坐标为 $(0,2,7)$.

7. 直线过点 $(2,-3,5)$ 且与三条坐标轴的正向交成等角, 求点 $P(1,-2,3)$ 到此直线的距离.

解: 显然直线方程为

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{1}.$$

所以点 $P(1,-2,3)$ 到这条直线的距离为

$$d=\frac{|(1,-1,2)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}.$$

8. 求通过两直线 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z-5}{-3}$ 和

$$\begin{cases}x=3+4t\\y=21+5t\\z=-11-10t\end{cases}$$

的交点, 且与这两直线都垂直的直线方程.

解: 因该直线与已知两直线都垂直, 而已知直线的方向分别为 $\xi_1=(-1,8,-3)$, $\xi_2=(4,5,-10)$. 故所求直线的方向向量为 $\xi=\xi_1\times\xi_2=(-65,-22,-37)$. 这两条直线的交点可求得为 $(-1,16,-1)$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{65}=\frac{y-16}{22}=\frac{z+1}{37}.$$

9. 求在平面 $2x+3y+4z-9=0$ 上经过点 $(1,1,1)$ 且与 xOy 平面交成最大角的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$. 因直线在平面 $\Pi:\ 2x+3y+4z-9=0$ 上, 所以 $2A+3B+4C=0$. xOy 平面的方程为 $z=0$, 我们在几何中已经知道, 当且仅当平面上的直线与两个平面的交线垂直时, 这条直线与另一平面的交角达到极大. 而这两个平面的交线的方向向量是 $(2,3,4)\times(0,0,1)=(3,-2,0)$, 因此 ξ 与 $(3,-2,0)$ 垂直, 即 $3A-2B=0$. 解得 $A=\dfrac{2}{3}B$, $C=-\dfrac{13}{12}B$. 故所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{12}=\frac{z-1}{-13}.$$

10. 求下列两直线间的距离, 如两直线有共垂线, 求出它们的公垂线的方程.

(1) $\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\x-y-z-22=0,\end{cases}$ 与 $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$;

(2) $\begin{cases}x=3t-5\\y=2t-5\\z=-2t+1,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-y+z+5=0\\x+2y-z-14=0.\end{cases}$

解: (1) 第一条直线化成标准方程为

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z+10}{4},$$

因此两直线平行. 距离为

$$d=\frac{|(13,-11,-19)\times(3,-1,4)|}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}}=25.$$

(2) 直线 L_1 通过点 $M_1(-5,-5,1)$, 方向向量是 $\xi_1=(3,2,-2)$. 直线 L_2 通过点 $M_2(4,1,-8)$, 方向向量是 $\xi_2=(-1,2,3)$. 因此

$$\xi_1\times\xi_2=(10,-7,8).$$

于是 L_1 与 L_2 的距离是

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\xi_1\times\xi_2)|}{|\xi_1\times\xi_2|}=\frac{24}{\sqrt{213}}=\frac{24\sqrt{213}}{213}.$$

由 $M_1,\xi_1,\xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_1 的方程是

$$\begin{vmatrix} x+5 & 3 & 10\\ y+5 & 2 & -7\\ z-1 & -2 & 8\end{vmatrix}=2x-44y-41z-169=0.$$

由 $M_2,\xi_2,\xi_1\times\xi_2$ 确定的平面 Π_2 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 10\\ y-1 & 2 & -7\\ z+8 & 3 & 8\end{vmatrix}=37x+38y-13z-290=0.$$

简化后可得公垂线方程为

$$\begin{cases}2x-44y-41z-169=0\\ 37x+38y-13z-290=0.\end{cases}$$

11. 已知一点 $P(a,b,c)$ $(abc\neq 0)$. 过 P 点向各个坐标面作垂线, 垂足分别为 L,M,N, 求证: OP 与各个面 OMN,ONL,OLM 的交角相等.

证明: 根据假设, 垂足分别为 $L(a,b,0)$, $M(a,0,c)$, $N(0,b,c)$. 则面 OMN 的法向量可取为 $\nu_1=\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(-bc,-ac,ab)$, 类似地, 面 OLM 的法向

量可取为 $\nu_2=(bc,-ac,-ab)$, 面 ONL 的法向量可取为 $\nu_3=(-bc,ac,-ab)$. 而 $\overrightarrow{OP}=(a,b,c)$, 由于

$$\overrightarrow{OP}\cdot\nu_1=\overrightarrow{OP}\cdot\nu_2=\overrightarrow{OP}\cdot\nu_3=-abc,$$

可知 OP 与这 3 个面的交角相等.

12. 已知两条异面直线 L_1 和 L_2. 求证连接 L_1 上任一点和 L_2 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

证明: 适当选择坐标系可使 L_1 为 x 轴, 方程为 $\begin{cases}y=0\\z=0,\end{cases}$ L_2 的方程则为 $\begin{cases}kx-y=0\\z=a,\end{cases}$ $(ak\neq 0)$. 设 $P_1(x_1,0,0)$ 为 L_1 上任意一个点, $P_2(x_2,kx_2,a)$ 是 L_2 上任意点, 则 P_1P_2 的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{kx_2}{2},\dfrac{a}{2}\right)$. 即此轨迹满足参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v\\y=\dfrac{k}{2}u\\z=\dfrac{a}{2},\end{cases}\qquad u,v\text{ 为参数.}$$

显然是平面 $z=\dfrac{a}{2}$. 这也是两条异面直线的公垂线段的垂直平分面.

13. 已知直线 L 通过点 $(1,1,0)$ 且与直线

$$L_1:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1},\quad L_2:\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2}$$

垂直, 求直线 L 在各个坐标面上的射影的方程.

解: 因为 L 与 L_1,L_2 都垂直, 所以可取 L 的方向向量为 $\xi=(4,-2,1)\times(4,-3,-2)=(7,12,-4)$, 则 L 的方程为

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{12}=\frac{z}{-4}.$$

它在 xOy 平面 $z=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z}{0}$, 在 yOz 平面 $x=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{z}{-4}$, 在 xOz 平面 $y=0$ 上的投影方程为 $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-4}$.

14. 求过点 $(2,-3,-1)$ 且与直线

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$$

垂直相交的直线.

解: 设所求直线的方向向量为 $\xi=(A,B,C)$, 因它必须与已知直线垂直, 故有 $-2A-B+C=0$. 再写出所求直线的参数方程 $\begin{cases}x=2+At\\ y=-3+Bt\\ z=-1+Ct,\end{cases}$ 代入已知直线的方程, 得

$$\frac{1+At}{-2}=\frac{-2+Bt}{-1}=\frac{-1+Ct}{1}.$$

由上式可得 $(3A-B+5C)t=0$. 由于 $t=0$ 显然不是解, 而两直线相交说明 t 一定有解, 因此 $3A-B+5C=0$. 最后解得 $A:B:C=4:-13:-5$. 从而直线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-13}=\frac{z+1}{-5}.$$

*§5 平面束

1. 求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且满足下列条件之一的平面:

(1) 通过原点; (2) 与 y 轴平行;

(3) 通过 $(0,0,1)$ 点;

(4) 与 xOy 平面的交线平行于方向 $(4,5,0)$.

解: (1) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,0)$ 代入得 $k=2m$. 所以平面方程为

$$9x+3y+5z=0.$$

(2) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

y 轴的方向向量是 $\xi = (0,1,0)$, 平面与 ξ 平行的条件是 $-k+5m=0$, 即 $k=5m$. 所以平面方程为

$$21x+14z-3=0.$$

(3) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

用 $(0,0,1)$ 代入得 $2k+m=0$, 即 $m=-2k$. 所以平面方程为

$$2x-11y+5z-5=0.$$

(4) 所求方程为

$$k(4x-y+3z-1)+m(x+5y-z+2)=0,$$

此平面与向量 $(4,5,0)$ 平行的条件是 $4(4k+m)+5(-k+5m)=0$, 即 $11k=-29m$. 所以平面方程为

$$-105x+84y-98z+51=0.$$

2. 求与平面 $x-2y-z+2=0$ 平行且在 x 轴上的截距为 4 的平面.

解: 根据平行平面束性质, 所求平面的方程为 $x-2y-z+D=0$. 化为截距式:

$$\frac{x}{-D}+\frac{y}{\frac{D}{2}}+\frac{z}{D}=1.$$

可见 $D=-4$. 故所求方程为 $x-2y-z-4=0$.

3. 直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线落在 xOy 平面内.

解: 过已知直线的平面束的方程为

$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

平面 $z=0$ 应该在此平面束内, 所以有以下关系式:

$$\begin{cases} kA_1+mA_2=0 \\ kB_1+mB_2=0 \\ kC_1+mC_2\neq 0 \\ kD_1+mD_2=0. \end{cases}$$

结论是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

4. 与不共面的直线

$$L_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和直线

$$L_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

都相交的直线 L 的方程为

$$\begin{cases} k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \\ k'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + m'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0, \end{cases}$$

其中, k, m 是不全为零的实数, k', m' 也是不全为零的实数.

解: 由相交直线 L 与 L_1 确定的平面方程一定有以下形式:

$$k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 k, m 不同时为 0. 同理, 由 L 与 L_2 确定的平面方程为

$$k'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + m'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0,$$

其中 k', m' 不同时为 0. 由于 L_1, L_2 不共面, 上述两个平面不重合, 它们的交线就是 L.

第五章　矩阵的秩与矩阵的运算

§1　向量组的秩

1. 对下列向量组, 将 α_1 扩充成向量组的一个极大无关组:

(1) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$;

(2) $\alpha_1=(1,-1,0,1,1)$, $\alpha_2=(2,1,3,-1,0)$, $\alpha_3=(3,0,3,0,1)$, $\alpha_4=(1,-1,1,-1,1)$, $\alpha_5=(-1,-5,-6,5,3)$, $\alpha_6=(2,1,2,1,0)$.

解: (1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是它的一个部分组. 证明: 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

证明: 作为向量组的部分组, $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 当然可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 因此这两个向量组等价, 从而有相同的秩 r. 于是由命题 1.9 可知向量组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关. 由推论 1.8 可知它是极大线性无关组.

3. 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个可以被另一个线性表示. 证明: 这两个向量组等价.

证明: 设向量组 (I) 可被向量组 (II) 线性表示, 它们生成的线性子空间分别记为 L_1,L_2. 则 $L_1\subseteq L_2$. 又因它们有相同的秩, 因此它们生成的线性子空间有相同的维数, 从而 $L_1=L_2$, 即 (I) 与 (II) 等价.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\alpha_{t+2},\cdots,\alpha_s$ 有相同的秩. 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

证明: 根据假设, 有

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)\subseteq L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_s),$$

又因这两个向量组有相同的秩, 因此它们张成的线性子空间有相同的维数, 从而相等. 再利用命题 1.1, 可知这两个向量组线性等价.

5. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\le\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

证明: 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组, 则

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\text{ 线性等价于 }\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}\},$$

所以

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}=\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}\}\\&\le r_1+r_2=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.\end{aligned}$$

6. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩分别是 r_1, r_2, r_3. 证明:

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2.$$

证明: 由于向量组 $\{\alpha_1,,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 都可由向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 线性表示, 故

$$r_1\le r_3,\qquad r_2\le r_3,$$

从而

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3.$$

$r_3\le r_1+r_2$ 就是练习 5 的结论.

7. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$, $\{\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s\}$ 的秩分别是 r_1, r_2, r_3. 证明: $r_3\le r_1+r_2$.

证明: 因为 $\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_s+\beta_s\}$ 可由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 线性表示, 因此它的秩

$$\begin{aligned}&r_3\le\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_s\}\\&\le\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=r_1+r_2.\end{aligned}$$

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$ 为它的一个部分组. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}\}\ge r+m-s.$$

证明: 设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的秩等于 t, 则它的一个极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_t}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性无关组, 它可被扩充为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 而这些扩充的向量不可能是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的向量, 否则与极大无关组矛盾. 而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中共有 $s-m$ 个不属于 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 的向量, 其中选出 $r-t$ 个不同的向量添加到 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_t}$ 以生成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 从而

$$r-t\leq s-m,$$

移项得

$$\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}\}=t\geq r+m-s.$$

9. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示. 证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 等价.

证明: 由假设, 存在 $a_1,\cdots,a_s\in K$ 使得

$$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_s\alpha_s.$$

如果 $a_s=0$, 则 β 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 与假设矛盾, 因此 $a_s\neq 0$. 于是

$$\alpha_s=\frac{1}{a_s}\beta-\frac{a_1}{a_s}\alpha_1-\cdots-\frac{a_{s-1}}{a_s}\alpha_{s-1},$$

即 α_s 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示. 从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示. 另一方面, 根据假设, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 可以被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 因此这两个向量组等价.

*__10.__ (**替换定理**) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示. 证明: 存在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的一个置换 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$, 使向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{i_{r+1}},\beta_{i_{r+2}},\cdots,\beta_{i_t}$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价 $(r=1,\cdots,s)$.

证明: 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 故 $s\leq t$.

下面用归纳法证明替换定理.

(i) 设 $s=1$.

因为 α_1 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 故存在 $a_i\in K$ 使得 $\alpha_1=\sum\limits_{i=1}^{t}a_i\beta_i$. 而 α_1 线性无关, 即 $\alpha_1\neq 0$, 所以 $a_1,\cdots,a_t$ 不全为零. 必有 $a_l\neq 0$ $(1\leq l\leq t)$. 则

$$\beta_l=\frac{1}{a_l}\alpha_1-\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{t}\frac{a_i}{a_l}\beta_i,$$

因此向量组 $\alpha_1,\beta_1,\cdots,\beta_{l-1},\beta_{l+1},\cdots,\beta_t$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价.

令 $\beta_{i_1}=\beta_l$, $\beta_{i_2}=\beta_1$, $\ldots$, $\beta_{i_l}=\beta_{l-1}$, $\beta_{i_{l+1}}=\beta_{l+1}$, $\ldots$, $\beta_{i_t}=\beta_t$, 即得结论.

(ii) 假定结论对 $s-1$ 成立. 考察 s 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性无关, 由归纳假设, 存在 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个置换 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$, 使

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{j_{r+1}},\cdots,\beta_{j_t}\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\quad(r=1,\cdots,s-1).$$

又 α_s 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 所以 α_s 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\beta_{j_s},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表示. 故存在 $k_i,l_k\in K$, $i=1,\cdots,s-1$, $k=s,\cdots,t$, 使得

$$\alpha_s=\sum_{i=1}^{s-1}k_i\alpha_i+\sum_{k=s}^{t}l_k\beta_{j_k}.$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 故 $l_s,\cdots,l_t$ 不全为零. 设第一个不为零的是 l_h, 则 $h\geq s$. 从而 β_{j_h} 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{j_{h+1}},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表示. 令 $\beta_{i_s}=\beta_{j_h}$, $\beta_{i_1}=\beta_{j_1}$, $\ldots$, $\beta_{i_{s-1}}=\beta_{j_{s-1}}$, $\beta_{i_{s+1}}=\beta_{j_{s+1}}$, $\ldots$, $\beta_{i_t}=\beta_{j_t}$, 则

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_{i_{s+1}},\cdots,\beta_{i_t}\}\cong\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

由归纳法原理可知结论成立.

§2 矩阵的秩

1. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix}1&4&10&0\\3&2&4&2\\4&1&1&3\\2&3&7&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\1&-1&1&-5\\2&0&8&-2\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-1&1\\1&-1&1&3&1\\0&0&1&1&1\\1&1&1&2&3\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}2&0&3&1&-1\\1&2&1&2&1\\3&-2&5&0&-3\\-1&1&0&2&3\end{pmatrix}$

解: (1) 2; (2) 2; (3) 4; (4) 3.

2. 求下列向量组的秩与极大线性无关组:

(1) $\alpha_1=(3,2,-1,-3,-2)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1,-3)$, $\alpha_3=(1,-4,7,5,4)$, $\alpha_4=(1,-7,11,9,5)$;

(2) $\alpha_1=(1,-1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,1,-1,1,1)$, $\alpha_3=(1,1,1,-1,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,1,-1)$, $\alpha_5=(1,1,1,1.1)$;

(3) $\alpha_1=(2,-1,3,-2,4)$, $\alpha_2=(4,-2,5,1,7)$, $\alpha_3=(2,-1,1,8,2)$, $\alpha_4=(2,-1,2,3,3)$;

(4) $\alpha_1=(1,3,3,5)$, $\alpha_2=(3,2,-5,1)$, $\alpha_3=(2,3,0,4)$, α_4=$(5,4,-7,1)$, $\alpha_5=(3,5,1,7)$.

解: (1) 秩 4, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(2) 秩 5, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$.

(3) 秩 2, α_1,α_2.

(4) 秩 3, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

3 求向量组 $\alpha_1=(-3,1,1,1),\alpha_2=(1,-3,1,1),\alpha_3=(1,1,-3,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,-3)$ 的所有极大线性无关组.

解: 任意 3 个向量都构成极大线性无关组.

4. 求下列向量组所张成的子空间的基与维数:

(1) α_1=$(4,-5,2,6)$, α_2=$(2,1,3,2)$, α_3=$(2,-6,-1,4)$, α_4=$(2,13,5,-6)$;

(2) $\alpha_1=(1,0,0,1,-1)$, $\alpha_2=(0,1,0,2,1)$, $\alpha_3=(0,0,1,-1,-2)$, $\alpha_4=(1,1,1,2,-2)$.

解: (1) 维数 3, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(2) 维数 3, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

5. 求下列矩阵的秩:

$$(1)\ \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为此矩阵的任意两行都线性相关, 因此秩 ≤ 1. 而此矩阵的秩等于 0 的充分必要条件是所有的 $a_ib_j=0$. 如 $(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$, 则必有 $(b_1,\cdots,b_n)=0$, 如 $(b_1,\cdots,b_n)\neq 0$, 则必有 $(a_1,\cdots,a_n)=0$. 因此当 $(a_1,\cdots,a_n)=0$ 或 $(b_1,\cdots,b_n)=0$ 时, 秩为 0, 否则, 秩为 1.

(2) 当 $a=1$ 时, 秩为 1; 当 $a=\dfrac{1}{1-n}$ 时, 秩为 $n-1$ $(n>1)$; 其余情形, 秩为 n.

6. 设

$$W=\{(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)\mid a_i\in K,\ i=1,\cdots,r\}\subseteq K^m$$

证明: $\dim W = r$.

证明: 设$\alpha_1 = (1,0,\cdots,0,\cdots,0)$, $\ldots$, $\alpha_r = (0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 且对任意的 $\alpha = (a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0) \in W$, 有 $\alpha = a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r$, 所以 $\dim W = r$.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{r} a_{ij}\alpha_i$ $(j=1,\cdots,s)$, 令 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\} = \operatorname{rank} A.$$

证明: (i) 设 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组. 考察 A 的列向量组 $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$. 则

$$(\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t}) = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t}).$$

如果 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\gamma_{j_i} = 0$, 则

$$(\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\beta_{j_i} = 0$, 由于 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性无关, 因此 $k_1 = \cdots = k_t = 0$, 即 $\gamma_{j_1},\cdots,\gamma_{j_t}$ 线性无关. 所以

$$\operatorname{rank}(A) \geq t = \operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}.$$

(ii) 设 $\gamma_{j_1},\cdots,\gamma_{j_t}$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组, 则由 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i\beta_{j_i} = 0$ 可得

$$(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = (\beta_{j_1}\ \cdots\ \beta_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 必须有

$$(\gamma_{j_1}\ \cdots\ \gamma_{j_t})\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = 0,$$

由 $\gamma_{j_1},\cdots,\gamma_{j_t}$ 的线性无关性可得 $k_1=\cdots=k_t=0$, 即 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性无关, 因而

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}\geq t=\operatorname{rank}(A).$$

最终得到

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=\operatorname{rank}(A).$$

8. 设 $A\in M_{m,n}(K)$. 已知 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行组成 A 的行向量组的极大线性无关组, A 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列组成 A 的列向量组的极大线性无关组. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}\neq 0.$$

证明: 适当交换矩阵的行与列, 可设矩阵的前 r 行与前 r 列分别为矩阵的行向量组与列向量组的极大线性无关组. 从而矩阵可经初等行变换化为

$$B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

因矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量的线性关系, 故矩阵 B 的前 r 列仍为 B 的列向量组的极大线性无关组. 从而 B 可经初等列变换化为

$$C=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(B)=r$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix}\neq 0.$$

§3 用矩阵的秩判断线性方程组解的情况

1. λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3\lambda \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: 系数行列式等于 $\lambda^2(\lambda-1)$. 当 $\lambda \neq 0, 1$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda-3}{\lambda-1} \\ x_2 = \dfrac{\lambda+3}{\lambda-1} \\ x_3 = \dfrac{3-\lambda}{\lambda-1}, \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 一般解为: $x_1 = -x_3$, $x_2 = x_3$, x_3 是自由未知量;
当 $\lambda = 1$ 时, 原方程组无解.

2. a, b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解? 在有解的情况下, 求出一般解.

解: (a) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b-1}{b(a-1)} \\ x_2 = \dfrac{1}{b} \\ x_3 = \dfrac{2ab-4b+1}{b(a-1)}; \end{cases}$$

(b) 当 $b = 0$ 时, 或当 $a = 1$, $b \neq \dfrac{1}{2}$ 时, 原方程组无解;

(c) 当 $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ 时, 一般解为: $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = 2$, x_3 是自由未知量.

3. 讨论下列含参量线性方程组的解的情况, 并求解.

(1) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 = 1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1. \end{cases}$

解: (1) 当 $b(a-1)(a+2) \neq 0$ 时有解:

$$x_1 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \quad x_2 = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \quad x_3 = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)};$$

当 $a = b = -2$ 时, 有解 $x_1 = x_3 = -1 - 2x_2$;

当 $a = b = 1$ 时, 有解 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$;

其余情形无解;

(2) 当 $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ 时有解: $x_1 = \dfrac{\lambda^2 + 4\lambda - 15}{\lambda^2}$, $x_2 = \dfrac{\lambda^2 + \lambda + 15}{\lambda^2}$, $x_3 = \dfrac{-4\lambda^2 + \lambda + 15}{\lambda^2}$;

当 $\lambda = 1$ 时有解: $x_1 = 2 - x_3$, $x_2 = -7 + 2x_3$;

当 $\lambda = 0$ 时无解;

(3) 当 $a \neq 0$, $b \neq \pm 1$ 时有解: $x_1 = \dfrac{5-b}{a(b+1)}$, $x_2 = \dfrac{-2}{b+1}$, $x_3 = \dfrac{2(b-1)}{b+1}$;

当 $b = 1$ 时有解: $x_2 = 1 - ax_1$, $x_3 = 0$;

当 $a = 0$, $b = 5$ 时有解: $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, $x_3 = \dfrac{4}{3}$, x_1 为任意数;

其余情形无解.

4. 利用线性方程组的理论证明: 如果直线

$$L_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

与直线

$$L_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

相交, 那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

解: 根据例 3.3 的解, 如果 L_1 与 L_2 相交, 那么线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = -D_4 \end{cases}$$

有唯一解, 从而 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\tilde{A}) = 3$, 这里 A 与 $\tilde{A}$ 分别是上述方程组的系数矩阵与增广矩阵. 因此行列式 $|\tilde{A}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 求三个平面 $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ 分别满足下列关系的充要条件.

(1) 有一个公共点; (2) 有一条公共直线;

(3) 三个平面平行; (4) 三个平面构成三棱柱.

解: 考察非齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \tag{$*$}$$

它的系数矩阵与增广矩阵分别记为 A 与 $\tilde{A}$.

(1) 三个平面有一个公共点 $\iff$ 方程组 $(*)$ 有唯一解 $\iff$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\tilde{A}) = 3 \iff |A| \neq 0$.

(2) 三个平面有一条公共直线 $\iff$ 方程组 $(*)$ 有解, 而且 $(*)$ 的导出方程组的基础解系只含一个向量 $\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\tilde{A}) = 2$.

(3) 三个平面平行 $\iff \dfrac{A_i}{A_j} = \dfrac{B_i}{B_j} = \dfrac{C_i}{C_j} \neq \dfrac{D_i}{D_j}$ $1 \le i < j \le 3$.

(4) 三个平面构成三棱柱 $\Longleftrightarrow$ 方程组 $(*)$ 无解, 而 $(*)$ 的导出方程组的基础解系含一个向量 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=2$, $\operatorname{rank}(\tilde{A})=3$, 而且 A 中任意两行都不成比例.

§4　线性映射及其矩阵

1. 判别下列哪些映射为线性映射?

(1) 在向量空间 V 中, $\mathcal{A}(\xi)=\alpha$, 其中 α 为固定向量;

(2) $\mathcal{A}:\ K^2 \longrightarrow K^3$

$$(x,y) \longmapsto (-1,2,3)$$

(3) $\mathcal{A}:\ K^3 \longrightarrow K^3$

$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (2x_1+x_2-x_3,-x_2+x_3,x_1+2x_2-x_3)$$

(4) $\mathcal{A}:\ K^3 \longrightarrow K^2$

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2+y^2-z,xy)$$

(5) $\mathcal{A}(\S\varepsilon_\infty+\dagger\varepsilon_\in+\ddagger\varepsilon_\ni)=(\S+\dagger)\varepsilon_\infty+(\S-\dagger+\ddagger)\varepsilon_\in+(\dagger-\ddagger)\varepsilon_\ni$, 其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为线性空间 V 的基;

(6) 几何空间 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathcal{R}$ 为平面按逆时针方向绕原点旋转 45° 的变换.

解: (1) 如 $\alpha=0$, 是; 如 $\alpha\neq 0$, 不是.

(2) 不是.

(3) 是.

(4) 不是.

(5) 是.

(6) 是.

2. 对于上题中的线性映射, 求出它们在相应基下的矩阵 (如未指明基, 则取自然基).

解: (1) $\alpha=0$ 时为零矩阵.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$.

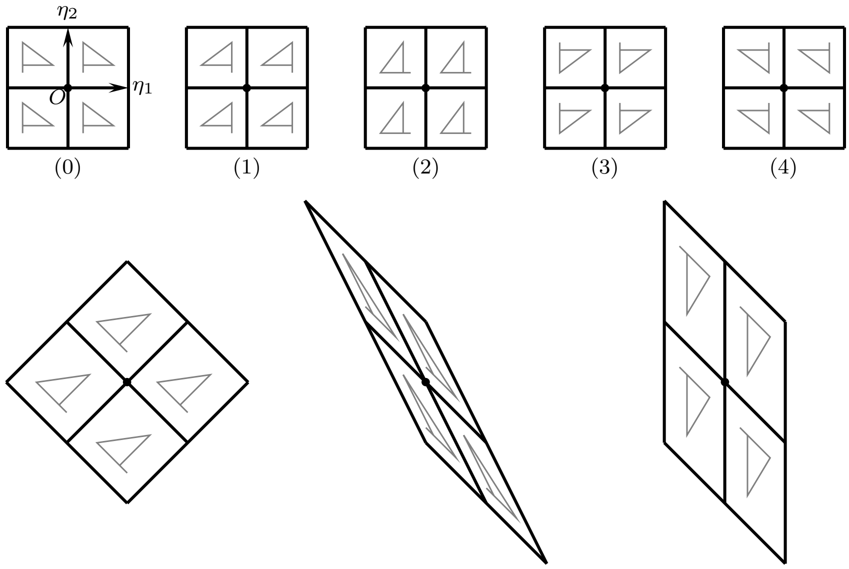
3. 设 $\mathcal{A}$ 为向量空间 V_1 到向量空间 V_2 的线性映射, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in V_1$, $\mathcal{A}(\alpha_{\rangle}) = \beta_{\rangle}$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 证明: 如果$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关.

证明: 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) = 0 \\
\Rightarrow &k_1\mathscr{A}(\alpha_1) + k_2\mathscr{A}(\alpha_2) + \cdots + k_m\mathscr{A}(\alpha_m) = 0 \\
\Rightarrow &k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m = 0,
\end{aligned}$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关, 可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

4. 下面图中的 (1)–(7) 都是图 (0) 经过整系数矩阵的线性变换而得到的. 图 (0) 中标出了原点 O 及基向量 η_1, η_2. 试通过确定基向量在图 (1)–(7) 中的象以及它们关于 η_1, η_2 的坐标 (均为整数) 以写出相应线性变换的矩阵.



第 4 题图

解: (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

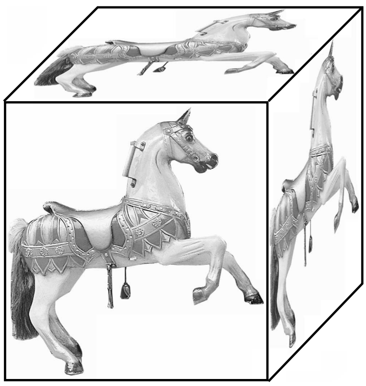
(4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. 有一个边长为 1 的立方体的每个表面都贴上了相同的浮雕马的平面图. 广告设计师决定采用第三章 §8 所述的斜二测投影画出它的立体图 (如附图). 他发现只要对正面的图形作两个线性变换就能得到顶面和侧面的两个图形 (为什么?). 如果把每个侧面的左下角取为原点, 请写出顶面和右侧面的图形对应的变换矩阵.



第 5 题图

解: 顶面: $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$, 右侧面: $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

§ 5　线性映射及矩阵的运算

1. 计算下列矩阵的运算结果:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$;

求 AB, $AB-BA$, $(A-B)^2$.

解: (1) $AB=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $(A+B)^2=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $AB=\begin{pmatrix} ac+ba+cb & ac+ba+cb & a^2+b^2+c^2 \\ ac+ba+cb & a^2+b^2+c^2 & ac+ba+cb \\ a^2+b^2+c^2 & ac+ba+cb & ac+ba+cb \end{pmatrix}$,

$$AB-BA=\begin{pmatrix} (b-c)(a-b) & -(a-c)(a-b) & (a-b)^2 \\ -(a-c)(a-b) & (a-b)^2 & (b-c)(a-b) \\ (a-b)^2 & (b-c)(a-b) & -(a-c)(a-b) \end{pmatrix},$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} (a-c)(a+b-2c) & 0 & -(a-c)(a+b-2c) \\ -(a-b)(a+b-2c) & 0 & (a-b)(a+b-2c) \\ -(b-c)(a+b-2c) & 0 & (b-c)(a+b-2c) \end{pmatrix}.$$

2. 计算:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$;

(5) $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$;

(8) $(\lambda E_n + A)^n$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

(5) $(a^2 + b^2 + c^2)$.

(6) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

(8) $\lambda^n \left(E - \dfrac{1}{n} A \right) + \dfrac{1}{n} (\lambda + n)^n A$.

3. 计算矩阵多项式, 设

(1) $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 11 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. 如果 $AB = BA$, 称矩阵 A 与 B 可交换. 设

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

求所有与 A 可交换的矩阵.

解: (1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & c & a+b-c \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

5. 设

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad 其中\ a_i \neq a_j,\ \forall i \neq j.$$

证明: 与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明: 设 $B = (b_{ij})$ 与 A 可交换, 则

$$a_i b_{ij} = b_{ij} a_j, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$(a_i - a_j) b_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

但当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$, 所以对于 $i \neq j$ 有 $b_{ij} = 0$, 即

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

*6. 证明: 与所有矩阵可交换的矩阵只能是标量矩阵.

证明: 显然标量矩阵与所有矩阵可交换. 设 B 与所有矩阵可交换, 则由上题知 $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$. 又对任意的 $i\neq j$ 有 $BE_{ij}=E_{ij}B$, 因此对 $i\neq j$ 有 $b_i=b_j$, 即 $b_1=b_2=\cdots=b_n=b$, 所以 $B=bE_n$.

*7. 证明: 不存在矩阵 A, B, 使 $AB-BA=E_n$.

证明: $AB-BA$ 的对角线元素之和 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\right)$ $=0$, 而 E_n 的对角线元素之和 $=n$, 可见 $AB-BA\neq E_n$.

8. 设 $A=B+E$. 证明: $A^2=2A$ 当且仅当 $B^2=E$.

证明: $(\Rightarrow)$ $B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E=E$.

$(\Leftarrow)$ $A^2=(B+E)^2=B^2+2B+E=2(B+E)=2A$.

9. 已知数域 K 上的两个方阵 A 与 B 可交换. 证明:

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;

(3) $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kA^kB^{n-k}$.

证明: 略.

10. 证明: 上 (下) 三角形矩阵的乘积还是上 (下) 三角形矩阵.

证明: 设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是上三角形矩阵, 即对 $i>j$ 有 $a_{ij}=0$ 以及 $b_{ij}=0$. 于是当 $i>j$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}&=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\cdot 0=0,\end{aligned}$$

因此 AB 是上三角形矩阵. 对于下三角形矩阵也可以类似地证明.

11. 求出平方为零的所有二阶方阵.

解: 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $A^2=0$. 如果 $b_{12}=0$, 则

$$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}^2&(a_{11}+a_{22})a_{12}\\0&a_{22}^2\end{pmatrix}=0,$$

于是 $a_{11}=a_{22}=0$, $A=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$.

再设 $a_{12} = b \neq 0$, $a_{11} = a$, 由于 $0 < \operatorname{rank}(A) = 1 < 2$, 则有 $A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}$. 于是

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(a+kb) & ka(a+kb) \\ b(a+kb) & kb(a+kb) \end{pmatrix} = 0.$$

由于 $b \neq 0$, 可得 $a + kb = 0$, $k = -\dfrac{a}{b}$. 因此矩阵 A 的可能形式是

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

*__12.__ 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times s$ 非零矩阵 B, 使 $AB = 0$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank} A < n$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设有非零矩阵 B 使得 $AB = 0$, 则 B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 而且其中有非零解. 因此 $\operatorname{rank} A < n$.

$(\Leftarrow)$ 设 $\operatorname{rank} A < n$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

令

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times s} \neq 0,$$

则 $AB = 0$.

*__13.__ 设 A, B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵. 证明: 如果 $AB = 0$, 则

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n.$$

证明: B 的列向量都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 而这个齐次线性方程组的解空间最多含有 $n - \operatorname{rank} A$ 个线性无关的向量, 从而

$$\operatorname{rank} B \leq n - \operatorname{rank} A,$$

移项得 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$.

*14. 设 A 为 $n\times r$ 矩阵, B 为 $r\times s$ 矩阵, $\operatorname{rank}B=r$. 证明:

(1) 如果 $AB=0$, 则 $A=0$;

(2) 如果 $AB=B$, 则 $A=E$.

证明: (1) 由上题, $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\le r$, 由 $\operatorname{rank}B=r$ 可得 $\operatorname{rank}A=0$, 从而 $A=0$.

(2) 因为 $(A-E)B=0$, 由 (1) 得 $A-E=0$, $A=E$.

15. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 证明: 如果对所有的 n 维向量 $X=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^{\mathrm T}$ 都有 $AX=0$, 则 $A=0$.

证明: 由假设知单位矩阵的列向量也是 $AX=0$ 的解, 因此 $A=AE=0$.

§6　矩阵乘积的行列式与矩阵的逆

1. 计算下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix}4&2&1\\1&0&3\\2&1&2\end{pmatrix}$.

解: (1) $-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-4&1\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}-7&5\\3&-2\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(4) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-1&1&1\\5&4&-2\end{pmatrix}$.

(5) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(6) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -4 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 求下列矩阵的伴随矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -11 & 10 \\ 6 & -14 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 如果存在常数项非零的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$, 则 A 可逆.

证明: 设 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$, $a_m \neq 0$, 使

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE = 0,$$

则

$$A\left(-\frac{a_0}{a_m}A^{m-1} - \frac{a_1}{a_m}A^{m-2} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{a_m}E\right) = E,$$

因此 A 可逆.

4. 设 $B^3 = 0$. 证明: $E - B$ 可逆, 并求 $E - B$ 的逆.

证明: 因为 $(E - B)(E + B + B^2) = E - B^3 = E$, 所以 $E - B$ 可逆, 且 $(E - B)^{-1} = E + B + B^2$.

5. 设 $A^3 = 2E$, $B = A^2 + 2A - E$, 求 B^{-1}.

证明: 由矩阵方程组

$$\begin{cases} B = A^2 + 2A - E \\ AB = 2A^2 - A + 2E \\ A^2B = -A^2 + 2A + 4E \end{cases}$$

通过加减消去法使等式右边只含 E, 可得 $(5A^2 + 4A - 3E)B = 31E$, 因此

$$B^{-1} = \frac{1}{31}(5A^2 + 4A - 3E).$$

6. 设 $A^2 = A$, 证明: $E + A$ 可逆, 并求 $(E + A)^{-1}$.

证明: 设 $B = E + A$, 则 $A = B - E$, 因此 $(B - E)^2 = B - E$, $B^2 - 3B = -2E$, $B(3E - B) = 2E$. 因此 $B^{-1} = \frac{1}{2}(3E - B) = \frac{1}{2}(3E - E + A) = E - \frac{1}{2}A$.

7. 设 $A, B \in M_n(K)$, 证明: 如果 $AB = kE_n$ $(k \neq 0)$, 则 $BA = kE_n$.

证明: 由 $AB = kE_n$ $(k \neq 0)$ 可得 $A^{-1} = \frac{1}{k}B$, $B = kA^{-1}$. 因此 $BA = kA^{-1}A = kE$.

8. 证明: (1) 上 (下) 三角形矩阵的伴随矩阵还是上 (下) 三角形矩阵;

(2) 可逆的上 (下) 三角形矩阵的逆矩阵还是上 (下) 三角形矩阵.

证明: (1) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则当 $j > i$ 时, a_{ij} 的余子式 M_{ij} 还是上三角形的, 且 M_{ij} 的 (i, i) 元素 $= A$ 的 $(i + 1, i)$ 元素 $= 0$, 所以 $M_{ij} = 0$ $(j > i)$. 从而当 $j > i$ 时有 $A_{ij} = 0$. 因此伴随矩阵 A^* 是上三角形矩阵. 类似可证下三角形的情形.

(2) 如 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 仍为三角形矩阵.

9. 证明: 对任何 n 阶方阵 A, 必存在 $\lambda_0 \in K$, 使得 $\lambda_0 E_n - A$ 是可逆阵.

证明: 因为 $|\lambda E - A|$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式, 而 n 次多项式在 K 上最多有 n 个根, 故必存在 $\lambda_0 \in K$ 使得 $|\lambda_0 E - A| \neq 0$. 从而 $\lambda_0 E - A$ 可逆.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 求多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = A^*$.

解: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A - 4\left[\frac{1}{2}(A - E)\right] = 2E - A$, 所以$f(x) = -x + 2$.

11. 证明: 对所有的 $A \in M_2(K)$, 存在 $f(\lambda) = a\lambda + b$, 使 $f(A) = A^*$.

证明: 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, 所以 $A + A^* = (a+d)E$, $A^* = -A + (a+d)E$. 故 $f(\lambda) = -\lambda + (a+d)$.

***12.** 设 $A \in M_n(K)$, 证明:

$$\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} A = n \\ 1, & \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} A < n-1 \end{cases}$$

证明: (i) 当 $\operatorname{rank} A = n$ 时, A 可逆, $|A| \neq 0$. 而 $AA^* = |A|E$, 故 A^* 也可逆, 从而 $\operatorname{rank} A^* = n$.

(ii) 当 $\operatorname{rank} A < n-1$ 时, A 的 $n-1$ 阶子式都等于 0, 因此 $A_{ij} = 0$, $A^* = 0$, 所以 $\operatorname{rank} A^* = 0$.

(iii) 当 $\operatorname{rank} A = n-1$ 时, A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0, 所以 $A^* \neq 0$. 说明 $\operatorname{rank} A^* \geq 1$. 另一方面有 $AA^* = |A|E = 0$, 所以 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} A^* \leq n$. 由于 $\operatorname{rank} A = n-1$, 可得 $\operatorname{rank} A^* \leq 1$. 因此 $\operatorname{rank} A^* = 1$.

***13.** 设 $A \in M_n(K)$ $(n > 2)$, 证明:

(1) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明: 当 $\operatorname{rank} A = n$ 时, $AA^* = |A|E$, 所以 $|A||A^*| = |A|^n$, $|A^*| = |A|^{n-1}$. 于是 $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$. 由 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$ 可得 $A^* = |A|A^{-1}$, 故 $(A^*)^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-2}A$.

当 $\operatorname{rank} A = n-1$ 时, $\operatorname{rank} A^* = 1$, 所以 $(A^*)^* = 0 = |A|^{n-2}A$, $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$.

当 $\operatorname{rank} A < n-1$ 时, $A^* = 0$, 上述等式也成立.

§7 矩阵的分块

1. 设 A, B 为两个同阶矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A \mid B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

证明: 设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, B 的列向量组为 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, 则 $A+B$ 的列向量组为 $\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n$, $(A \mid B)$ 的列向量组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1,$

$\cdots, \beta_n$, 从而由习题 5–1.7,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B) &= \operatorname{rank}\{\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_n+\beta_n\}\\ &\leq \operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n\} = \operatorname{rank}(A \mid B)\\ &\leq \operatorname{rank}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} + \operatorname{rank}\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}\\ &= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.\end{aligned}$$

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解: 设

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &B_{21} = A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\ &B_{22} = 0, \quad (\text{因 } A_{12} \text{ 可逆})\\ &B_{12} = A_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\\ &B_{11} = -A_{21}^{-1}A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&9&2&-1\\1&-14&-3&2\\\hline 1&-1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right).$$

3. 设 A 为可逆的 n 阶方阵,

$$D=\left(\begin{array}{c|c}0&A\\\hline a&0\end{array}\right),\quad a\neq 0,$$

求 D^{-1}.

解: $D^{-1}=\begin{pmatrix}0&a^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$.

4. 设 A_i 为 r_i 阶可逆方阵 $(i=1,2,\cdots,s)$,

$$A=\begin{pmatrix}0&&&A_1\\&&A_2&\\&\iddots&&\\A_s&&&0\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}.

解: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&&&A_s^{-1}\\&&A_{s-1}^{-1}&\\&\iddots&&\\A_1^{-1}&&&0\end{pmatrix}$.

5. 设 E_i 为 r_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 阶单位矩阵, 而

$$A=\begin{pmatrix}a_1E_1&&&0\\&a_2E_2&&\\&&\ddots&\\0&&&a_sE_s\end{pmatrix},\quad a_i\neq a_j,\ i\neq j,$$

证明: 与 A 可交换的矩阵只能是分块对角矩阵.

证明: 设分块矩阵 $B=(B_{ij})$ 与 A 可交换, 而且 B 的分块方式与 A 相同. 则由 $AB=BA$ 得

$$a_iB_{ij}=B_{ij}a_j,\qquad i,j=1,\cdots,s.$$

于是

$$(a_i-a_j)B_{ij}=0,\qquad i,j=1,\cdots,s.$$

但当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$, 所以对于 $i \neq j$ 有 $B_{ij} = 0$, 即

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \quad a_i \neq 0,\ i = 0, 1, 2, \cdots n,$$

求 A^{-1}.

解: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ a_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

7. 设矩阵 $A_{m\times s}$, $B_{t\times n}$ 的秩分别为 r_A, r_B, C 为任意的 $m \times n$ 矩阵, 而

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

证明: 矩阵 D 的秩 $r_D \geq r_A + r_B$.

证明: 设 A 的行向量组的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r_A}}$, B 的行向量组的极大线性无关组为 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_{r_B}}$. 则

$$\gamma_1 = (\alpha_{i_1}, \underbrace{* \cdots *}_{n}), \gamma_2 = (\alpha_{i_2}, \underbrace{* \cdots *}_{n}), \cdots, \gamma_{r_A} = (\alpha_{i_{r_A}}, \underbrace{* \cdots *}_{n})$$

线性无关.

$$\delta_1 = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_1}), \delta_2 = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_2}), \cdots, \delta_{r_B} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{s}, \beta_{j_{r_B}})$$

线性无关. 显然

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B},$$

线性无关, 所以

$$r_D \geq \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r_A}, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r_B}\} = r_A + r_B.$$

8. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 证明: $\operatorname{rank} A = 1$ 的充分必要条件是存在 m 维非零向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 与 n 维非零向量 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 使 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $\operatorname{rank}(A) = 1$, 则 A 必有一行 (设为 $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$) 不等于 0, 而其余各行都是这一行的倍数, 从而

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \alpha^{\mathrm{T}}\beta.$$

$(\Leftarrow)$ 设 α, β 是两个非零向量, 则必有某个 $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$, 从而 $a_ib_j \neq 0$, 使得 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = (a_ib_j) \neq 0$. 于是

$$1 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \min\{\operatorname{rank}(\alpha), \operatorname{rank}(\beta)\} = 1.$$

***9.** 设 A 为二阶方阵. 证明: 如果 $A^k = 0$, 则 $A^2 = 0$.

证明: 由 $A^k = 0$ 可得 $|A| = 0$. 故 $\operatorname{rank} A \leq 1$. 如果 $\operatorname{rank} A = 0$, 则 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $\operatorname{rank} A = 1$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ \cdots \ b_n), \qquad (\text{习题 } 4\text{–}5.12)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ \cdots \ b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ \cdots \ b_n) = \sum_{i=1}^n a_ib_iA,$$

$$A^k = \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^{k-1} A = 0.$$

由于 $A \neq 0$, $\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i = 0$. 所以 $A^2 = 0$.

***10.** 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid B)$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设矩阵方程 $AX = B$ 有解 $X = C$, 则 $AC = B$. 从而 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示, 所以

$$\operatorname{rank}(A \mid B) = \operatorname{rank} A.$$

$(\Leftarrow)$ 如果 $\operatorname{rank}(A \mid B) = \operatorname{rank} A$, 则 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示, 即存在$(c_{1j}, \cdots, c_{nj})^{\mathrm{T}}$ 使得

$$A\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

令

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则 $AC = B$.

***11.** 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 证明: 齐次线性方程组 $AX = 0$ 与齐次线性方程组 $BAX = 0$ 同解的充分必要条件是 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} BA$.

证明: 首先, $AX = 0$ 的解都是 $BAX = 0$ 的解, 从而 $BAX = 0$ 的基础解系至少含有 $n - \operatorname{rank} A$ 个解. 又因为 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} BA$, 所以 $BAX = 0$ 的基础解系恰含有 $n - \operatorname{rank} A$ 个解. 故 $AX = 0$ 的基础解系也是 $BAX = 0$ 的基础解系. 因此 $AX = 0$ 与 $BAX = 0$ 同解.

反之, 如果 $AX = 0$ 与 $BAX = 0$ 同解, 则它们的基础解系含有相同个数的解. 因此 $n - \operatorname{rank} A = n - \operatorname{rank} BA$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} BA$.

§ 8　初等矩阵

1. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\dfrac{1}{4}A$.

2. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解: (1) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

或

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

3. 用多种方法求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解: 仅介绍两种解法:

(i) 因为 $AA = 4E$, 所以 $A^{-1} = \dfrac{1}{4}A$.

(ii) 分块: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}A_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_1 & E & 0 \\ A_1 & -A_1 & 0 & E \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_1 & E & 0 \\ 0 & -2A_1 & -E & E \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E \\ 0 & -2A_1 & -E & E \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}A_1^{-1} & \frac{1}{2}A_1^{-1} \\ 0 & E & \frac{1}{2}A_1^{-1} & -\frac{1}{2}A_1^{-1} \end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & A_1^{-1}\\ A_1^{-1} & -A_1^{-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}A_1 & A_1\\ A_1 & -A_1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A.$$

*__4.__ 设 $A,B,C,D\in M_n(K)$, $|A|\neq 0$, $AC=CA$. 证明:

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证明: 因 $|A|\neq 0$, 故 A 可逆. 而

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|\\ &=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CB|.\end{aligned}$$

*__5.__ 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, 证明:

$$\begin{vmatrix}A & B\\ -B & A\end{vmatrix}=|A-\mathrm{i}B||A+\mathrm{i}B|.$$

(其中 i 为虚数单位, $\mathrm{i}^2=-1$.)

证明: 因为

$$\begin{pmatrix}E & \mathrm{i}E\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -\mathrm{i}E\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\mathrm{i}B & 0\\ -B & A+\mathrm{i}B\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{vmatrix}A & B\\ -B & A\end{vmatrix}=|A-\mathrm{i}B||A+\mathrm{i}B|.$$

*__6.__ 设 $A\in M_{m,r}(K)$. 证明:

(1) A为列满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $P\in M_m(K)$, 使$A=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}$;

(2) A 为列满秩矩阵的充分必要条件是存在行满秩矩阵 $B\in M_{r,m}(K)$, 使 $BA=E_r$.

证明: (1) 因 A 列满秩, A 的典范形为 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 从而存在可逆矩阵 P_1, Q_1, 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix},$$

则

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这就证明了必要性, 而充分性是显然的.

(2) 充分性是显然的, 再证必要性.

由 (1) 知, 存在可逆矩阵 P, 使 $A = P \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 则

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix},$$

令

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ B_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \\ \end{matrix},$$

则 B 行满秩, 且 $BA = E_r$.

***7.** 对于行满秩矩阵, 叙述并证明类似的结论.

解: (1) A为行满秩矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $Q \in M_m(K)$, 使$A = (E_r\ 0)Q$.

(2) A 为行满秩矩阵的充分必要条件是存在列满秩矩阵 $B \in M_{m,r}(K)$, 使 $AB = E_r$.

(证明略)

8. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r. 证明: 存在列满秩矩阵 P 和行满秩矩阵 Q, 使 $A = PQ$.

证明: 存在可逆矩阵 P_1, Q_1, 使

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1.$$

令

$$P = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = (E_r\ 0)Q_1,$$

则 P 列满秩, Q 行满秩, 且

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} (E_r\ 0)Q_1 = PQ.$$

*__9.__ 设 A, B 分别为 $n \times m$ 与 $m \times n$ $(n \geq m)$ 矩阵, $\lambda \neq 0$. 证明:

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|.$$

证明: 由于

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E_n - AB & 0 \\ B & E_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & \lambda E_m - BA \end{pmatrix},$$

所以

$$|\lambda E_n - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix},$$

$$|\lambda E_m - BA| = \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned} \lambda^m|\lambda E_n - AB| &= \lambda^m \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ \lambda B & \lambda E_m \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n \begin{vmatrix} E_n & A \\ B & \lambda E_m \end{vmatrix} = \lambda^n|\lambda E_m - BA|. \end{aligned}$$

因此

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|.$$

*__10.__ 设 A, B 分别为 $s \times n$ 与 $n \times m$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n.$$

证明: $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB)+n &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B, \quad (4\text{–}7.7) \end{aligned}$$

因此 $\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$.

*11. 设 A, B, C 分别为 $s\times n$, $n\times m$ 与 $m\times t$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank} B.$$

证明: $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix}.$$

所以

$$\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC),$$

$$\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank} B.$$

*12. 设 $A\in M_n(K)$, 证明:

$$A^2=E_n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n.$$

证明: $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} A+E_n & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{c|c} 2E_n & A+E_n \\ \hline A-E_n & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 2E_n & A+E_n \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(A^2-E_n) \end{array}\right),$$

所以

$$\operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n+\operatorname{rank}(A^2-E_n).$$

$$\operatorname{rank}(A-E_n)+\operatorname{rank}(A+E_n)=n \iff \operatorname{rank}(A^2-E_n)=0 \iff A^2=E_n.$$

*13. 设 $A\in M_n(K)$, 证明:

$$A^2=A \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-E_n)=n.$$

证明: $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A-E_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} A & -E_n \\ \hline 0 & A-E_n \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E_n \\ \hline A^2-A & A-E_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline A^2-A & 0 \end{array}\right).$$

所以

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A-E_n) = n + \operatorname{rank}(A^2-A).$$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A-E_n) = n \Leftrightarrow A^2 = A.$$

***14.** 设 $A \in M_n(K)$ 是可逆矩阵, X, Y 为 n 维列向量, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = -X^{\mathrm{T}}A^*Y.$$

证明:

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & -X^{\mathrm{T}}A^{-1}Y \end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & Y \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = |A||-X^{\mathrm{T}}A^{-1}Y| = -X^{\mathrm{T}}|A|A^{-1}Y = -X^{\mathrm{T}}A^*Y.$$

*§9 线性映射的象空间与核空间

1. 设 $\mathscr{A}$ 为向量空间 V_1 到 V_2 的线性映射, $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 的核与象的维数与基;

(2) 分别将 $\mathscr{A}$ 的核与象的基扩充为 V_1 与 V_2 的基.

解: (1) 因为 $\operatorname{rank} A = 3$, 因此象空间的维数为 3. A 的列向量组的极大线性无关组构成象空间的基:

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1) = (-1,2,1,-1), \mathscr{A}(\varepsilon_2) = (0,-3,-3,1), \mathscr{A}(\varepsilon_5) = (3,-4,-1,2).$$

核的维数 $= 5-3 = 2$, $AX = 0$ 的基础解系构成核空间的基:

$$\xi_1 = (2,1,1,0,0), \xi_2 = (1,1,0,1,0).$$

(2) ξ_1, ξ_2 可扩充为 V_1 的基:

$$\xi_1, \xi_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5.$$

$\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \mathscr{A}(\varepsilon_5)$ 可以扩充为 V_2 的基:

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1), \mathscr{A}(\varepsilon_2), \mathscr{A}(\varepsilon_5), (1,0,0,0).$$

2. 设 $\mathscr{A}$ 为 K^3 的线性变换, 使

$$\mathscr{A}(x,y,z) = (x+y-z, x+y+z, x+y-2z).$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 的零化度与秩;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与象空间.

解: (1) 零化度 $=1$, 秩 $=2$.

(2) 核 $= L((1,-1,0))$, 象 $= L((1,1,1),(-1,1,-2))$.

3. 设 W_1, W_2 为 V 的两个子空间, 且 $\dim W_1 + \dim W_2 = n$. 证明: 存在线性变换 $\mathscr{A}$, 使 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = W_1$, $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W_2$.

证明: 设 W_1 的基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, W_2 的基为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$. 将 W_1 的基扩充为 V 的基: $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 对任意的 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$, 定义

$$\mathscr{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-r} a_{r+i}\beta_i,$$

则 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换, 且 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = W_1$, $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W_2$.

4. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维向量空间的线性变换, V_1, V_2 为 V 两个线性子空间. 证明: 如果 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = V_1 \cap V_2$, 则存在线性变换 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, 使 $V_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_1$, $V_2 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_2$, 且 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

证明: 设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ 为 $V_1 \cap V_2$ 的基, 将它扩充为 V_1 的基: $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t$, 扩充为 V_2 的基: $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$. 则由维数公式知 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 为 $V_1 + V_2$ 的基. 再把它扩充为 V 的基:

$$\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_s, \eta_1, \cdots, \eta_u, \qquad (r+t+s+u=n).$$

分别定义线性变换如下:

$$\mathscr{A}_1(\gamma_i) = 0, \quad \mathscr{A}_1(\alpha_i) = 0, \quad \mathscr{A}_1(\beta_i) = \mathscr{A}(\beta_i), \quad \mathscr{A}_1(\eta_i) = \mathscr{A}(\eta_i),$$

$$\mathscr{A}_2(\gamma_i) = 0, \quad \mathscr{A}_2(\alpha_i) = \mathscr{A}(\alpha_i), \quad \mathscr{A}_2(\beta_i) = 0, \quad \mathscr{A}_2(\eta_i) = 0.$$

则易证 $V_1 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_1$, $V_2 \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}_2$, 且 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

5. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 n 维向量空间 V 的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, $\mathscr{B}^2 = \mathscr{B}$. 证明:

(1) $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Im}\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}, \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$;

(2) $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \operatorname{Ker}\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}, \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

证明: (1) ($\Rightarrow$) 对任意的 $\alpha \in V$ 存在 $\beta \in V$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta)$. 所以

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta) = \mathscr{B}^2(\beta) = \mathscr{B}(\mathscr{B}(\beta)) = \mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha).$$

即 $\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 同理可证 $\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B}$.

($\Leftarrow$) $\mathscr{B}(V) = \mathscr{A}\mathscr{B}(V) \subseteq \mathscr{A}(V)$, $\mathscr{A}(V) = \mathscr{B}\mathscr{A}(V) \subseteq \mathscr{B}(V)$, 所以 $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Im}\mathscr{B}$.

(2) ($\Rightarrow$) 对任意的 $\alpha \in V$, 由于

$$\mathscr{B}[(\mathscr{B} - \mathscr{E})(\alpha)] = \mathscr{B}^2(\alpha) - \mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{B}(\alpha) - \mathscr{B}(\alpha) = 0,$$

所以 $\mathscr{A}[(\mathscr{B} - \mathscr{E})(\alpha)] = 0$. 于是 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{A}(\alpha)$, $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}$. 同理可证 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

($\Leftarrow$) 对任意的 $\alpha \in \operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 有

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{A}(0) = 0,$$

所以 $\operatorname{Ker}\mathscr{B} \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 同理可证 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathscr{B}$. 因此 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \operatorname{Ker}\mathscr{B}$.

第六章　线性空间与欧几里得空间

§1　线性空间及其同构

1. 按通常数的加法与乘法, 下列集合是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

(1) 整数集 $\mathbb{Z}$;　　(2) 有理数集 $\mathbb{Q}$;　　(3) 实数集 $\mathbb{R}$;　　(4) 复数集 $\mathbb{C}$.

解: (1) 与 (2) 都不是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 因为标量乘法不封闭. (3) 和 (4) 都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

2. 若 K 为复数域 $\mathbb{C}$, 问以实数为元素的一切 $n \times n$ 矩阵的集合对矩阵的加法与标量乘法是否构成 K 上的线性空间? 为什么?

解: 否, 关于标量乘法不封闭.

3. 检验下列集合对于所给的运算是否构成实数域上的线性空间:

(1) 全体实对称 (反称, 上三角形) 矩阵, 对于矩阵的加法与标量乘法;

(2) 次数等于 n $(n \geq 1)$ 的实系数多项式全体, 对于多项式的加法与乘法;

(3) 平面上全体向量, 对于向量的加法与如下定义的标量乘法:

$$k\alpha = \alpha;$$

(4) 全体正实数 $\mathbb{R}^+$, 加法和标量乘法定义为:

$$a \oplus b = ab, \tag{6.1}$$

$$k \circ a = a^k. \tag{6.2}$$

解: (1) 是; (2) 否, 零多项式不在集合中; (3) 否, 因为 当 $\alpha \neq 0$ 时, $0\alpha \neq 0$; (4) 是.

4. 计算上题中所出现的线性空间的维数和基.

解: (1) 实对称: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} + E_{ji} \mid i \leq j\}$;

反称: $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} - E_{ji} \mid i < j\}$;

上三角形: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维, 基 $\{E_{ij} \mid i \leq j\}$.

(4) 1 维, 任何不等于 1 的正实数都可作为基.

5. 证明: 全体以零为极限的实数列

$$S=\left\{\{a_n\}=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots)\,\middle|\, a_i\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}a_n=0\right\}$$

按如下定义的加法与标量乘法:

$$\begin{aligned}&\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\};\\&k\{a_n\}=\{ka_n\}\end{aligned}$$

构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个无限维线性空间.

证明: 验证线性空间略. 为说明它是无限维的, 对任意的正整数 n, 有一个收敛于 0 的数列: $\alpha_n=\{0,\cdots,0,1(\text{第 } n \text{ 项}),0,0,\cdots\}$. 于是对于任意大的 n, 总有 n 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

6. 设

$$P=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\overline{\beta}&\overline{\alpha}\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}.$$

(1) 证明: P 按矩阵的加法与标量乘法构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间;

(2) 求 P 的维数与基.

解: (1) 略. (2) $\dim_{\mathbb{R}}P=4$, 基为: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$.

7. 设 $\mathbb{R}$ 为实数域在它自身上的线性空间, $\mathbb{R}^+$ 为第 3 题 (4) 中的向量空间. 作出同构映射以证明: $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^+$ 同构.

证明: 令

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}^+\\ r&\longmapsto 2^r\end{aligned}$$

则(a) φ 是映射;

(b) φ 是单的: 因为 $2^{r_1}=2^{r_2}\iff r_1=r_2$;

(c) φ 是满的: 因为对任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, $a=2^{\log_2 a}$. 而 $\log_2 a\in\mathbb{R}$, 于是 $\varphi(\log_2 a)=2^{\log_2 a}=a$;

(d) φ 保持运算:

$$\varphi(r_1+r_2)=2^{r_1+r_2}=2^{r_1}2^{r_2}=2^{r_1}\oplus 2^{r_2}=\varphi(r_1)\oplus\varphi(r_2);$$

$$\varphi(kr_1)=2^{kr_1}=(2^{r_1})^k=k\circ 2^{r_1}=k\circ\varphi(r_1).$$

所以 φ 是同构.

*8. 设 F 为全体形如

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots), \qquad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3$$

的实数列所组成的集合, 其加法与标量乘法的定义如第 5 题.

(1) 证明: F 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个二维线性空间;

(2) 给出 F 的一个由等比数列所组成的基;

(3) 求斐波那契 (Fibonacci) 数列

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots)$$

的通项公式.

证明: (1) F 为 $\mathbb{R}$ 上线性空间的证明略. 下面求 F 的维数.

考察数列 $\alpha_1 = (0,1,1,2,3,5,\cdots)$ 与 $\alpha_2 = (1,1,2,3,5,\cdots)$, 显然 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

(a) 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$, 则 $(k_2, k_1+k_2, k_1+2k_2, 2k_1+3k_2, \cdots) = 0$, 所以 $k_2 = 0$, 从而 $k_1 = 0$. 这说明 α_1, α_2 线性无关.

(b) 对任意的

$$\beta = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots), \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

考察

$$\gamma = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2 - \beta \in F,$$

则 $\gamma = (0, 0, x_3, x_4, \cdots)$. 因为 $\gamma \in F$, 所以 $x_3 = 0 + 0 = 0$, $x_4 = x_3 + 0 = 0$, 由归纳法可知 $\gamma = 0$. 这就证明了 $\beta = (a_2 - a_1)\alpha_1 + a_1\alpha_2$. 因此 α_1, α_2 构成 F 的基, $\dim F = 2$.

(2) 设有等比数列

$$(a, aq, aq^2, \cdots) \in F,$$

则对 $n \geq 2$ 有 $aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2}$, 从而 $q^2 = q + 1$, 得到 $q = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

易知

$$\eta_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \cdots\right) \in F,$$

$$\eta_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \cdots\right) \in F.$$

又 η_1, η_2 线性无关, 而 $\dim F = 2$, 所以 η_1, η_2 构成 F 的基.

(3) 斐波那契数列

$$\varphi = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots) \in F,$$

因此存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 使

$$\varphi = c_1\eta_1 + c_2\eta_2.$$

从而

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

由此可得斐波那契数列得通项公式是

$$D_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

***9.** 所谓 n 阶**魔阵**, 是指其各行各列以及主对角和次对角元素之和都相等的 n 阶方阵, 如

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

就是一个三阶魔阵.

(1) 证明: 实数域上全体 n 阶魔阵的集合 M_n 按矩阵的加法与标量乘法构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间;

(2) 求 M_3 的维数.

解: (2) 3 维, 基为:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§2 线性子空间的和与直和

1. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的子空间, 证明以下三个论断是等价的:

(1) $W_1 \subseteq W_2$; (2) $W_1 \cap W_2 = W_1$;

(3) $W_1 + W_2 = W_2$.

证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 以及 (1) $\Rightarrow$ (3) 都是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1): $W_1 + W_2 = W_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_1 + W_2 = W_2$.

2. 求由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间的交与和的基与维数.

(1) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,3,1,-1) \\ \alpha_2 = (1,0,1,2); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (3,-1,-3,-5) \\ \beta_2 = (5,-2,-3,-4); \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,0,1,0) \\ \alpha_2 = (1,1,0,1); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (0,1,0.1) \\ \beta_2 = (0,1,1,0); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \alpha_1 = (1,0,2,0,) \\ \alpha_2 = (2,0,1,1) \\ \alpha_3 = (1,0,-1,1); \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = (3,3,1,-2) \\ \beta_2 = (1,3,0,-3). \end{cases}$

解: 把由向量 α_i 生成的子空间和由向量 β_i 生成的子空间分别记为 W_1, W_2.

(1) $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$,

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(3,-2,3,8)\left(= \dfrac{1}{3}(-2\alpha_1 + 11\alpha_2) = -4\beta_1 + 3\beta_2\right)$;

(2) $\dim(W_1 + W_2) = 4$, $\dim W_1 \cap W_2 = 0$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$;

(3) $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,

$W_1 + W_2$ 的基: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$,

$W_1 \cap W_2$ 的基: $(2,0,1,1)(= \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2)$.

3. 设 W, W_1, W_2 都是向量空间 V 的子空间, 且

$$W_1 \subseteq W_2, \quad W \cap W_1 = W \cap W_2, \quad W + W_1 = W + W_2.$$

证明: $W_1 = W_2$.

证明: $\dim W + \dim W_1 = \dim(W + W_1) + \dim(W \cap W_1)$,

$\dim W + \dim W_2 = \dim(W + W_2) + \dim(W \cap W_2)$,

所以上式右端相等. 可得 $\dim W_1 = \dim W_2$. 又因 $W_1 \subseteq W_2$, 所以 $W_1 = W_2$.

4. 设 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间, 并且满足

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1,$$

证明: $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

证明: 因为 $\dim(V_1 \cap V_2) \leq \dim V_1 \leq \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$, 两个等号中必有一个成立. 如果左边等号成立, 则因 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$, 可得 $V_1 \cap V_2 = V_1$, 从而 $V_1 \subseteq V_2$. 如果右边等号成立, 则因 $V_1 \subseteq V_1 + V_2$, 可得 $V_1 = V_1 + V_2$, 从而 $V_2 \subseteq V_1$.

5. 设 $V = K^4$, $\alpha_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)$, $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 求子空间 W 在 V 中的一个补空间.

解: 设 $\alpha_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 $L((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ 是 W 在 V 中的一个补空间.

6. 证明: 每一个 n 维线性空间都是 n 个一维子空间的直和.

证明: 设 V 为 n 维线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基. 令 $W_i = L(\alpha_i)$, 则 $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$. 又, $n = \dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$, 所以

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

7. 证明: n 维线性空间 V 的每一个真子空间都是若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证明: 设 W 是 V 的真子空间, 则 $r = \dim W < \dim V = n$. 取 W 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 将其扩充成 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 取如下的 $n-r$ 个 $n-1$ 维线性子空间

$$V_j = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n), \quad j = r+1, \cdots, n.$$

则因

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \in V_j \iff a_j = 0,$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \in \bigcap_{j=r+1}^{n} V_j \iff a_{r+1} = \cdots = a_n = 0 \iff \beta \in W.$$

即 $W = \bigcap\limits_{j=r+1}^{n} V_j$.

8. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \quad 与 \quad x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间.

证明: $K^n=V_1\oplus V_2$.

证明: (a) 对任意的 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in K^n$, 令

$$\beta=\left(a_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i, a_2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i,\cdots,a_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right),$$

$$\gamma=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i,\cdots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right),$$

则 $\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, 且 $\alpha=\beta+\gamma$. 所以 $K^n=V_1+V_2$.

(b) 如果 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in V_1\cap V_2$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i=0, \qquad a_1=a_2=\cdots=a_n$$

解得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 即 $\alpha=0$. 所以 $V_1\cap V_2=0$.

综上可得 $K^n=V_1\oplus V_2$.

9. 设 $W_1=\{A\in M_n(K)\mid A^{\mathrm{T}}=A\}$, $W_2=\{A\in M_n(K)\mid A^{\mathrm{T}}=-A\}$.

证明: $M_n(K)=W_1\oplus W_2$.

证明: (a) 对任意的 n 阶矩阵 $A\in M_n(K)$, 有

$$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}}),$$

而 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})\in W_1$, $\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})\in W_2$, 所以 $M_n(K)=W_1+W_2$.

(b) 设 $A\in W_1\cap W_2$, 则

$$-A=A^{\mathrm{T}}=A,$$

由 $2A=0$ 可得 $A=0$. 所以 $W_1\cap W_2=0$.

最终得到 $M_n(K)=W_1\oplus W_2$.

10. 设 $A\in M_n(K)$ 且 $A^2=A$, 令

$$V_1=\{X\in K^n\mid AX=0\}, \quad V_2=\{X\in K^n\mid AX=X\}.$$

证明: $K^n=V_1\oplus V_2$.

证明: (a) 设 $\alpha \in K^n$, 则 $\alpha = (\alpha - A\alpha) + A\alpha$. 而

$$A(\alpha - A\alpha) = A\alpha - A^2\alpha = A\alpha - A\alpha = 0, \quad \text{所以} \quad \alpha - A\alpha \in V_1,$$

$$A(A\alpha) = A^2\alpha = A\alpha, \quad \text{所以} \quad A\alpha \in V_2,$$

从而 $K^n = V_1 + V_2$.

(b) 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则因 $\alpha \in V_1$, 有 $A\alpha = 0$, 由 $\alpha \in V_2$, 有 $A\alpha = \alpha$. 于是 $\alpha = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$.

因此 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

*__11.__ 设 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1, V_2 为 K^n 的两个非平凡的子空间.

证明: 一定存在唯一的幂等矩阵 (即 $A^2 = A$ 的矩阵) $A \in M_n(K)$, 使

$$V_1 = \{X \in K^n \mid AX = 0\}, \quad V_2 = \{X \in K^n \mid AX = X\}.$$

证明: 取 V_1 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 以及 V_2 的一个基 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 K^n 的基. 定义 K^n 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为:

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le r \\ \alpha_i, & r+1 \le i \le n \end{cases}$$

把线性变换 $\mathscr{A}$ 在 K^n 的自然基下的矩阵记为 A. 由 $\mathscr{A}$ 的定义可得 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, 相应地有 $A^2 = A$.

对任意的 $X \in K^n$, 有 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$. 则

$$AX = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathscr{A}(\alpha_i) = \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i.$$

因此

$$AX = 0 \iff \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i = 0 \iff a_i = 0 \forall r+1 \le i \le n \iff X \in V_1,$$

$$AX = X \iff \sum_{i=r+1}^{n} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \iff a_i = 0 \forall 1 \le i \le r \iff X \in V_2.$$

所以 A 是满足条件的幂等矩阵.

再证唯一性: 如果 $B \in M_n(K)$, 使得

$$BX = 0 \quad \forall X \in V_1, \qquad BX = X \quad \forall X \in V_2,$$

则因 $K^n = V_1 \oplus V_2$, 可得

$$(A-B)X = 0, \qquad \forall X \in K^n.$$

所以 $A - B = 0$, 从而 $A = B$.

*__12.__ 设 $A \in M_n(K)$, E 为 n 阶单位方阵. 令

$$V_1 = \{X \in K^n \mid (A-E)X = 0\}, V_2 = \{X \in K^n \mid (A+E)X = 0\}.$$

证明: $K^n = V_1 \oplus V_2 \iff A^2 = E$.

证明: $(\Rightarrow)$ $K^n = V_1 \oplus V_2 \implies n = \dim V_1 + \dim V_2 \implies n = (n - \operatorname{rank}(A-E)) + (n - \operatorname{rank}(A+E)) \implies n = \operatorname{rank}(A-E) + \operatorname{rank}(A+E) \implies A^2 = E$ (习题 5–8.12).

$(\Leftarrow)$ 对任意的 $\alpha \in K^n$,

$$\alpha = \frac{1}{2}(A+E)\alpha - \frac{1}{2}(A-E)\alpha.$$

因为

$$(A-E)\left[\frac{1}{2}(A+E)\alpha\right] = \frac{1}{2}(A^2-E)\alpha = 0,$$

所以 $\frac{1}{2}(A+E)\alpha \in V_1$. 又因

$$(A+E)\left[-\frac{1}{2}(A-E)\alpha\right] = -\frac{1}{2}(A^2-E)\alpha = 0,$$

所以 $-\frac{1}{2}(A-E)\alpha \in V_2$.

因此 $K^n = V_1 + V_2$.

当 $\alpha \in V_1 \cap V_2$ 时又有

$$\alpha = \frac{1}{2}(A+E)\alpha - \frac{1}{2}(A-E)\alpha = 0 + 0 = 0,$$

因此 $V_1 \cap V_2 = 0$. 从而 $K^n = V_1 \oplus V_2$.

§ 3　欧几里得空间

1. 在线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 对任意两个向量 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, 定义

$$(\alpha, \beta) = 5a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

验证在此定义下 $\mathbb{R}^2$ 构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

2. 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 定义

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)\quad \forall A,B\in M_n(\mathbb{R}).$$

(说明: 方阵 A 的迹 $\mathrm{Tr}(A)$ 就是方阵的对角线元素之和) 试问: f 是否 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积?

解: 是. 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 则

(a) $f(A,B)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ki}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ki}=f(B,A)$.

(b) $f(A+B,C)=\mathrm{Tr}((A+B)^{\mathrm{T}}C)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}C+B^{\mathrm{T}}C)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}C)+\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}C)=f(A,C)+f(B,C)$.

(c) $f(kA,B)=\mathrm{Tr}((kA)^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{Tr}(kA^{\mathrm{T}}B)=k\,\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)=kf(A,B)$.

(d) $f(A,A)=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ki}^2\geq 0$, 且

$$f(A,A)=0\iff a_{ki}=0,\quad k,i=1,\cdots,n\iff A=0.$$

所以 f 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一个内积.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

规定

$$(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY\quad \forall X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

(1) 证明: $\mathbb{R}^n$ 关于此定义构成一个欧几里得空间;

(2) 求向量 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots$, $\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$ 的度量矩阵,

(3) 具体写出这个空间的柯西–布涅柯夫斯基不等式.

解: (1) 略.

(2) 度量矩阵为 A.

(3) 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}ka_kb_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}ka_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n}kb_k^2}.$$

4. 设 C 是一个 n 阶实可逆矩阵. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 对任意两个列向量 X, Y, 规定

$$(X,Y)=X^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CY$$

证明: $\mathbb{R}^n$ 关于此定义构成一个欧几里得空间.

证明: 略.

5. 在标准欧几里得空间内计算给定向量的内积, 并求它们之间的夹角:

(1) $\alpha=(1,1,1,1)$, $\beta=(-1,2,4,3)$;

(2) $\alpha=\left(\dfrac{1}{2},-1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$, $\beta=(3,-1,2,2)$;

(3) $\alpha=(3,-1,1,-1)$, $\beta=(-2,2,-2,2)$;

(4) $\alpha=(-1,1,-1,2,1)$, $\beta=(3,1,-1,0,1)$.

解: (1) $(\alpha,\beta)=8$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$.

(2) $(\alpha,\beta)=\dfrac{7}{2}$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\dfrac{7}{10}$.

(3) $(\alpha,\beta)=-12$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{5\pi}{6}$.

(4) $(\alpha,\beta)=0$, $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$.

6. 设 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x,y,z\in\mathbb{R})$, 试利用柯西–布涅柯夫斯基不等式求

$$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{y^2}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}$$

的最小值.

解: 原式 $=-3+\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1-y^2}+\dfrac{1}{1-z^2}$. 而由柯西–布涅柯夫斯基不等式,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2}\\&\cdot\sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2+(\sqrt{1-y^2})^2+(\sqrt{1-y^2})^2}\\&\geq\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)\begin{pmatrix}\sqrt{1-x^2})\\\sqrt{1-y^2}\\\sqrt{1-y^2}\end{pmatrix}=3,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}}\cdot\sqrt{2}\geq 3,$$

所以

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{1-z^2}\geq\frac{9}{2}.$$

$$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{y^2}{1-y^2}+\frac{z^2}{1-z^2}\geq-3+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}.$$

又当 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时上式取等号. 故原式的最小值为 $\dfrac{3}{2}$.

7. 设 $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, 若 $a^2+b^2+c^2=25$, $x^2+y^2+z^2=36$, $ax+by+cz=30$. 试利用柯西–布涅柯夫斯基不等式求 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值.

解: 由柯西–布涅柯夫斯基不等式,

$$\begin{aligned}30=ax+by+cz&=(a\ b\ c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}=30.\end{aligned}$$

因等号成立时, (a,b,c) 与 (x,y,z) 成比例. 设 $(a,b,c)=t(x,y,z)$, 代入得

$$30=t(x^2+y^2+z^2)=36t,$$

解出 $t=\dfrac{5}{6}$. 从而 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{5}{6}$.

8. 在标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 求基 $\alpha_1=(1,0,1)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(0,1,1)$ 的度量矩阵.

解: $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

9. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维欧几里得空间 V 的一个规范正交基.

证明: $\alpha_1=\dfrac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3)$, $\alpha_2=\dfrac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$, $\alpha_3=\dfrac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$ 也是 V 的一个规范正交基.

证明: 直接验证可知, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是单位向量, 且两两正交. 故它们是 V 的单位正交向量组. 又因 $\dim V=3$, 它们构成 V 的规范正交基.

10. 将标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 的基$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,0,1,0)$, $\alpha_3=(-1,0,0,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,-1)$ 化为规范正交基.

解: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2,0)$, $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(-1,1,1,3)$, $\dfrac{1}{2}(-1,1,1,-1)$.

11. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-\ \ x_2+x_3+3x_4-\ \ x_5=0\\x_1+2x_2-x_3\qquad\quad+2x_5=0\end{cases}$$

的解空间 (作为标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^5$ 的子空间) 的一个规范正交基.

解: 该齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

正交化得:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{12}{7}\\\frac{3}{7}\\-\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{5}{17}\\-\frac{23}{34}\\\frac{6}{17}\\\frac{3}{34}\\1\end{pmatrix}.$$

单位化后得规范正交基:

$$\frac{\sqrt{14}}{14}(-1,2,3,0,0),\ \frac{\sqrt{238}}{238}(-12,3,-6,7,0),\ \frac{\sqrt{1938}}{1938}(-10,-23,12,3,34).$$

12. 证明: 在欧几里得空间 V 中, 基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基的充分必要条件是: 对 V 的任意向量 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$, 总有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=a_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明: ($\Rightarrow$) 如 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基, 则对任意的 $\alpha=\sum a_i\varepsilon_i$, 有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=\left(\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j,\varepsilon_i\right)=\sum_{j=1}^n a_j(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_i.$$

($\Leftarrow$) 如对任意的 $\alpha=\sum a_i\varepsilon_i$, 有

$$(\alpha,\varepsilon_i)=a_i,$$

则 $\varepsilon_j=\sum\limits_{k=1}^n a_k\varepsilon_k$, 其中 $a_k=\delta_{kj}$. 因此

$$(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_i=\delta_{ij}.$$

从而 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是规范正交基.

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是欧几里得空间 V 的 m 个向量, 称矩阵

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$$

为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的格拉姆 (Gram) 矩阵.

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)| \neq 0$.

证明: 设有线性关系式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0.$$

把这个等式分别与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 作内积, 可以得到变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的一个齐次线性方程组:

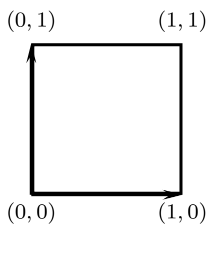
$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_1)x_1 + (\alpha_1, \alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha_1, \alpha_m)x_m = 0 \\ (\alpha_2, \alpha_1)x_1 + (\alpha_2, \alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha_2, \alpha_m)x_m = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_m, \alpha_1)x_1 + (\alpha_m, \alpha_2)x_2 + \cdots + (\alpha_m, \alpha_m)x_m = 0 \end{cases}$$

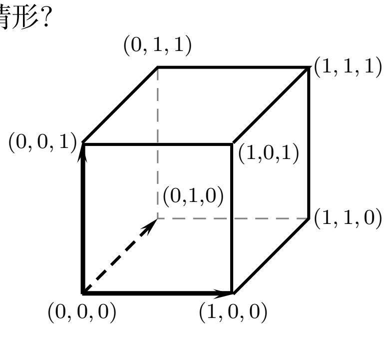
其系数矩阵就是格拉姆矩阵 $G(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 再利用齐次线性方程组有非零解的充分必要条件可得:

$$|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)| \neq 0 \iff \text{齐次线性方程组只有零解} x_1 = \cdots = x_m = 0$$

$$\iff \alpha_1, \cdots, \alpha_m \text{线性无关}.$$

14. 通过对图中平面内正方形以及几何空间内立方体的观察, 归纳出它们的顶点坐标的特征, 从而推导出 n 维空间的立方体的顶点个数公式. 再计算 4 维空间中的立方体有多少个 3 维的侧面, 多少个 2 维的侧面与 1 维的棱? 这个 4 维立方体有多少种不同长度的对角线? 试求它们的长度以及与棱的夹角. 你能否把这些结果推广到 n 维空间的情形?





第 14 题图

解: n 维空间的立方体中, m 维子立方体有 $2^{n-m}\mathrm{C}_n^m$ 个.
当 $m=0$ 时为顶点个数 $=2^n$;
当 $m=1$ 时为棱数 $=2^{n-1}n$;
当 $m=2$ 时为面数 $=2^{n-3}n(n-1)$; ...
其不同长度的对角线有 $n-1$ 种, 长度分别为 $\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}$.
长度为 $\sqrt{k}$ 的对角线与棱的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

§4 欧几里得空间中的正交补空间与正交投影

1. 在标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求向量 β 在由向量 α_1, α_2, α_3 生成的子空间 W 上的正交投影. 设

(1) $\alpha_1=(2,2,-3,1)$, $\alpha_2=(-2,1,-2,3)$, $\alpha_3=(1,2,-3,2)$, $\beta=(1,1,-2,1)$;

(2) $\alpha_1=(-1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,-1,1,0)$, $\alpha_3=(0,1,-1,2)$, $\beta=(1,2,-1,0)$.

解: (1) 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\beta_2$, 其中 $\beta_2=\beta-x_1\alpha_1-x_2\alpha_2-x_3\alpha_3\in W^{\perp}$. 由等式 $(\beta_2,\alpha_i)=0$, $i=1,2,3$, 可以导出以下齐次线性方程组:

$$\begin{cases}18x_1+7x_2+17x_3=11\\7x_1+18x_2+12x_3=6\\17x_1+12x_2+18x_3=11\end{cases}$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{12}\right)$, 因此 β 在 W 上的正交投影为:

$$\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{12}\alpha_2+\frac{1}{12}\alpha_3=\left(\frac{11}{12},\frac{5}{4},-\frac{23}{12},\frac{11}{12}\right).$$

(2) $\left(\dfrac{1}{2},2,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $B\in\mathbb{R}^n$. 证明: 实系数线性方程组 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 B 与方程组 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间正交.

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $AX=B$ 有解, 则有 $C=(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $B=AC$. 于是对 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的任意解 $D=(d_1\ d_2\ \cdots\ d_n)^{\mathrm{T}}$, 有

$$D^{\mathrm{T}}B=D^{\mathrm{T}}AC=(A^{\mathrm{T}}D)^{\mathrm{T}}C=0,$$

所以 B 与 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间正交.

($\Leftarrow$) 设 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 的解空间为 W_1, A 的列向量组张成的子空间为 W_2. 则 $W_1\perp W_2$. 又因 $\dim W_1=n-\operatorname{rank}A=n-\dim W_2$, 所以 $V=W_1\oplus W_2$. 从而 $W_2=W_1^{\perp}$. 已知 $B\perp W_1$, 可得 $B\in W_2$, 即 B 可由 A 的列向量组线性表示, 于是存在 $C\in\mathbb{R}^n$ 使得 $B=AC$.

3. 设 V_1, V_2 是欧几里得空间 V 的两个子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数. 证明: V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中所有向量.

证明: 由命题 6.2, $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$, $\dim V_1^{\perp}=n-\dim V_1$.

$$\begin{aligned}\dim(V_2\cap V_1^{\perp})&=\dim V_2+\dim V_1^{\perp}-\dim(V_2+V_1^{\perp})\\&\geq n-\dim V_1+\dim V_2-n\\&=\dim V_2-\dim V_1\geq 1.\end{aligned}$$

所以 $V_2\cap V_1^{\perp}\neq 0$, 存在非零向量 $\alpha\in V_2\cap V_1^{\perp}$, 即 $\alpha\in V_2$, $\alpha\perp V_1$.

4. 设 U 为 n 维欧几里得空间 V 的子空间. 证明: $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$.

证明: 因为 U 的向量都与 $U^{\perp}$ 正交, 因此 $U\subseteq(U^{\perp})^{\perp}$. 又因

$$\dim(U^{\perp})^{\perp}=n-\dim U^{\perp}=n-(n-\dim U)=\dim U,$$

因此 $U=(U^{\perp})^{\perp}$.

5. 设 V_1, V_2 为 n 维欧几里得空间 V 的两个子空间, 证明:

(1) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;

(2) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明: (1) 若 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$, 则 $\alpha\perp V_1$ 且 $\alpha\perp V_2$, 从而 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 所以 $(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

如果 $\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$, 则 $\alpha\perp V_1$ 且 $\alpha\perp V_2$, $\alpha\perp V_1+V_2$, 所以 $\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 这说明 $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$.

综上即有 $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

(2) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=\left[(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}\right]^{\perp}=\left[\left(V_1^{\perp}+V_2^{\perp}\right)^{\perp}\right]^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

***6.** 设 W 为欧几里得空间 V 的子空间, α 是 V 的一个向量. 定义 α 到 W 的距离

$$\mathrm{d}(\alpha,W)=|\alpha-\alpha'|,$$

其中, α' 为 α 在 W 上的正交投影.

证明: 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 W 的基, 则

$$\mathrm{d}(\alpha,W)=\sqrt{\frac{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|}}.$$

这里的 $G(\cdots)$ 是向量组的格拉姆矩阵 (见习题 6–3.13).

证明: 设 $\alpha' = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i\alpha_i$. 从

$$(\alpha-\alpha',\alpha_j) = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i, \alpha_j\right) = 0, \quad j = 1,\cdots,m,$$

可得

$$\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix} = G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 所以 $G = G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 可逆 (参见练习 5–3.10). 因此

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

$$\alpha' = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\alpha,W)^2 = (\alpha-\alpha',\alpha-\alpha') \\
&= \left(\alpha - (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}, \alpha - (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m)G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}\right) \\
&= (\alpha,\alpha) - 2((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix} \\
&+ ((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-\mathrm{T}}GG^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix} \\
&= (\alpha,\alpha) - ((\alpha,\alpha_1) \ \cdots \ (\alpha,\alpha_m))G^{-1}\begin{pmatrix} (\alpha,\alpha_1) \\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|G|}\left[(\alpha,\alpha)|G| - ((\alpha,\alpha_1)\ \cdots\ (\alpha,\alpha_m))G^*\begin{pmatrix}(\alpha,\alpha_1)\\ \vdots \\ (\alpha,\alpha_m)\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{|G|}\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) & (\alpha_1,\alpha)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) & (\alpha_2,\alpha)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ (\alpha,\alpha_1) & \cdots & (\alpha,\alpha_m) & (\alpha,\alpha)\end{vmatrix}$$

$$= \frac{|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G|}.$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}(\alpha, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha)|}{|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|}}.$$

7. 设 V_1, V_2 为欧几里得空间 V 的两个子空间, $x, y \in V$. 线性流形$L_1 = x + V_1$, $L_2 = y + V_2$ 之间的距离定义为

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \min|\alpha - \beta|,\quad \forall\alpha \in L_1,\ \beta \in L_2.$$

证明: $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(x - y, V_1 + V_2)$.

证明: 由 $V = (V_1 + V_2) \oplus (V_1 + V_2)^\perp$, 可得 $x - y = \beta_1 - \alpha_1 + \delta$, 其中 $\alpha_1 \in V_1$, $\beta_1 \in V_2$, $\delta \in (V_1 + V_2)^\perp$. 于是

$$\mathrm{d}(x - y, V_1 + V_2) = |\delta| = |(x + \alpha_1) - (y + \beta_1)| \geq \mathrm{d}(L_1, L_2).$$

反之, 对任意的 $\alpha = x + \alpha_1 \in L_1$, $\beta = y + \beta_1 \in L_2$, 令

$$\alpha - \beta = (x - y) + (\alpha_1 - \beta_1) = \gamma + \delta,$$

其中 $\gamma \in V_1 + V_2$, $\delta \in (V_1 + V_2)^\perp$. 则

$$x - y = (\gamma - \alpha_1 + \beta_1) + \delta.$$

于是

$$|\alpha - \beta|^2 = |\gamma + \delta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 \geq |\delta|^2 = \mathrm{d}(x - y, V_1 + V_2)^2.$$

(其中 $|\gamma + \delta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2$ 是因为 $\gamma \perp \delta$.) 所以

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \min|\alpha - \beta| \geq \mathrm{d}(x - y, V_1 + V_2).$$

最终可得 $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(x - y, V_1 + V_2)$.

8. 求两个平面 $L_1 = x + L(\alpha_1, \alpha_2)$ 与 $L_2 = y + L(\beta_1, \beta_2)$ 之间的距离, 其中

$$\alpha_1 = (1, -2, 0, -3), \quad \alpha_2 = (2, -2, 1, 2), \quad x = (4, 5, 3, 2);$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \beta_2 = (1, -2, 0, -1), \quad y = (1, -2, 1, -3).$$

解: $W = L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$. 所以

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(x - y, W) = \sqrt{\frac{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, (x - y))|}{|G(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)|}} = \sqrt{\frac{324}{36}} = 3.$$

9. 求下列方程的最小二乘解:

$$\begin{cases} 3.4x - 1.6y = 1 \\ 3.3x - 1.7y = 1 \\ 3.2x - 1.5y = 1 \\ 2.6x - 1.1y = 1. \end{cases}$$

解: $A = \begin{pmatrix} 3.4 & -1.6 \\ 3.3 & -1.7 \\ 3.2 & -1.5 \\ 2.6 & -1.1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

则最小二乘解 (x, y) 为线性方程 $A^{\mathrm{T}}AX = A^{\mathrm{T}}B$ 的解. 解这个方程, 得

$$\begin{cases} x \approx 0.69 \\ y \approx 0.78 \end{cases}$$

§5　正交变换与正交矩阵

1. 在几何空间中取直角标架 $[O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$. $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 分别表示空间按右手系绕 x、y、z 轴旋转 45° 的正交变换.

(1) 以坐标的形式写出 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 的表达式;

(2) 求 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}\mathscr{B}$, $\mathscr{B}\mathscr{A}$, $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$, $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{A}^4\mathscr{B}^4$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵;

(4) 证明: $\mathscr{A}^8 = \mathscr{B}^8 = \mathscr{C}^8 = \mathscr{E}$, 这里 $\mathscr{E}$ 表示恒同映射.

解: (1) $\mathscr{A}(x, y, z) = \left(x, \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z, \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z\right)$,

$$\mathscr{B}(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z\right),$$

$$\mathscr{C}(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y, z\right).$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) $AB=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $ABC=$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$,

$A^4B^4=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4) 略.

2. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 为正交矩阵, 且 $|A|=1$.

证明: $a_{ij}=A_{ij}$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明: 因为 $|A|=1$, 所以 $AA^*=E$, 从而

$$A^*=A^{-1}=A^{\mathrm{T}},$$

两边比较后可得

$$a_{ij}=A_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,n.$$

3. 设 $\mathscr{A}$ 是欧几里得空间 V 的一个变换.

证明: 如果 $\mathscr{A}$ 保持内积不变, 即对所有的 $\alpha,\beta\in V$, $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta)$, 那么它一定是线性的, 因而是正交变换.

证明: 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(\alpha+\beta)-\mathscr{A}\alpha-\mathscr{A}\beta,\mathscr{A}(\alpha+\beta)-\mathscr{A}\alpha-\mathscr{A}\beta)\\&=(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}(\alpha+\beta))-2(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}\alpha)-2(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}\beta)\\&+(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\alpha)+2(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)+(\mathscr{A}\beta,\mathscr{A}\beta)\\&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&=((\alpha+\beta)-\alpha-\beta,(\alpha+\beta)-\alpha-\beta)=0.\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta$.

类似地,

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(k\alpha)-k\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}(k\alpha)-k\mathscr{A}\alpha)\\&=(\mathscr{A}(k\alpha),\mathscr{A}(k\alpha))-2k(\mathscr{A}(k\alpha),\mathscr{A}\alpha)+k^2(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\alpha)\\&=(k\alpha,k\alpha)-2k(k\alpha,\alpha)+k^2(\alpha,\alpha)=0.\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}\alpha$.

因此 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧几里得空间的两个规范正交基. 证明: 存在正交变换 $\mathscr{A}$, 使

$$\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明: 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间的基, 因此满足题设条件的线性变换 $\mathscr{A}$ 一定存在. 对于任意的两个向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n a_i\varepsilon_i$, $\beta=\sum\limits_{i=1}^n b_i\varepsilon_i$, 有 $\mathscr{A}(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i$, $\mathscr{A}(\beta)=\sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i$, 因此

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=\left(\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i,\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^n a_ib_i=(\alpha,\beta).$$

所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

5. 求下列正交方阵的欧拉角:

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\theta = 0$, $\phi + \psi = \frac{5\pi}{3}$;

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$;

(3) 由 $r_{33} = \cos\theta = 0$, $\theta \in [0, \pi]$, 可得 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 再由 $r_{31} = \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 以及 $r_{32} = \cos\psi = -\frac{1}{2}$ 可得 $\psi = \frac{2\pi}{3}$. 最后由 $r_{13} = \sin\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及 $r_{23} = -\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

*__6.__ 设点 P 的坐标为 $(1,1,0)$, 求绕轴 $\overrightarrow{OP}$ 按右手方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 的正交变换.

解: 参看例 7.5. 旋转轴的单位向量是 $\xi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. 令 $\eta = \xi - \overrightarrow{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$. 沿 η 方向的镜射记为 $\mathscr{S}$, 由于

$$\begin{cases} \mathscr{S}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2\dfrac{(\overrightarrow{i}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} \\ \mathscr{S}(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j} - 2\dfrac{(\overrightarrow{j}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} \\ \mathscr{S}(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k} - 2\dfrac{(\overrightarrow{k}, \eta)}{(\eta, \eta)}\eta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j} \end{cases}$$

因此 $\mathscr{S}$ 在基 $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ 下的矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面旋转 $\mathscr{R}_{\overrightarrow{k},-\frac{\pi}{6}}$ 的矩阵是

$$R=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

最后得到所求正交变换的矩阵为

$$SRS=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

*__7.__ 求正交变换

$$\mathscr{A}(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}X$$

的旋转轴与旋转角.

解: 求旋转轴相当于求 $AX=X$ 的解向量 $X\in\mathbb{R}^3$. 解得旋转轴的方向向量是 $\xi=(\sqrt{2}+1,1,\sqrt{2}-1)$. 为求旋转角, 取一个与 ξ 正交的向量 $\alpha=(1,-2,-1)$, 则旋转角 $\theta=\langle\alpha,\mathscr{A}(\alpha)\rangle$.

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\mathscr{A}(\alpha))}{|\alpha|^2}=-\frac{3}{4}.$$

又因混合积

$$(\xi,\alpha,\mathscr{A}(\alpha))=-\frac{21}{2}<0,$$

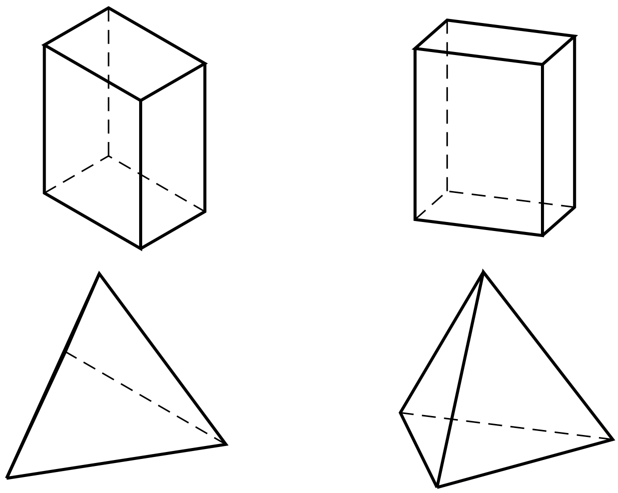
所以旋转角 $\theta=\pi+\arccos\dfrac{3}{4}$.

第七章　几何空间的常见曲面

§1　立体图与投影

1. 试分别用正等测投影及正二等测投影画出边长等于 2, 3, 4 的长方体以及正四面体.

解:



§2　空间曲面与曲线的方程

1. 分别就下列条件求球面方程:

(1) 一直径的两端点为 $A(2,-3,5)$ 和 $B(4,1,-3)$;

(2) 球心在直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ 上, 且过点 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$;

(3) 过点 $(-1,2,5)$, 且与 3 个坐标平面相切;

(4) 过点 $(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$, 且包含圆: $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0.\end{cases}$

解: (1) 球心坐标 $C\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{-3+1}{2},\dfrac{5-3}{2}\right)=(3,-1,1)$, 半径

$$R=\sqrt{(3-2)^2+(-1+3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{21},$$

所以球面方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$.

(2) 因球心在已知直线上, 故它的坐标应为 $(4+2t,-8-4t,2+t)$. 又因点 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$ 在球面上, 所以它们到球心的距离相等, 即

$$(4+2t-2)^2+(-8-4t+3)^2+(2+t-6)^2=(4+2t-6)^2+(-8-4t-3)^2+(2+t+2)^2,$$

解得 $t=-2$, 从而球心坐标是 $(0,0,0)$, 且半径等于 7. 球面方程为 $x^2+y^2+z^2=49$.

(3) 球心与点 $(-1,2,5)$ 在同一卦限内, 因此可设它的坐标为 $(-a,a,a)$, 则球面方程为

$$(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2.$$

将 $(-1,2,5)$ 的坐标代入, 得 $a^2-8a+15=0$, 解得 $a=5$ 或 3. 即球面方程为

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25\quad\text{以及}\quad(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9.$$

(4) 已知圆位于坐标平面 xOy 上, 圆心是原点, 因此球心一定在 z 轴上. 设球心坐标为 $(0,0,t)$, 则 $4+t^2=2+2+(2-t)^2$, 解得 $t=1$. 所以球面方程为 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$.

2. 求下列圆的圆心及半径:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x+y+z-3=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5,\\x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-7=0.\end{cases}$

解: (1) 所给的圆可以看成是第一个方程所确定的球面与第二个方程确定的平面的交线, 而球心是原点, 所以圆心应在原点向这个平面所作的垂线的垂足上. 此垂线的方向向量是 $(1,1,1)$, 故垂线方程为 $\begin{cases}x=t,\\y=t,\\z=t.\end{cases}$ 垂线与平面的交点是 $(1,1,1)$, 此即球心. 根据勾股定理, 球的半径为 $\sqrt{4-3}=1$.

(2) 第二个方程减去第一个方程后可得 $x+2y+3z-2=0$. 利用与 (1) 类似的方法, 可知圆心就是此方程所确定的平面与直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=2t, \\ z=3t \end{cases}$ 的交点. 解得圆心坐标为 $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7}\right)$. 半径 $\sqrt{5-\dfrac{2}{7}}=\dfrac{\sqrt{231}}{7}$.

3. 求证:

$$\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t, \\ z=a\sqrt{2}\sin t\cos t, \end{cases} \qquad 0\le t<\pi\ (a>0)$$

表示一圆. 求此圆的圆心和半径.

解: 此曲线上的任意一点 (x,y,z) 满足方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 以及 $x+y-a=0$. 故曲线是球面与平面的交线 (圆):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y-a=0, \end{cases}$$

或其一部分. 为证此曲线确是圆, 设 (x,y,z) 是圆上任意一点, 于是 $y=a-x$, $x^2+(a-x)^2+z^2=a^2$. 后式可化为 $2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$. 因此存在 $0\le\theta<2\pi$ 使得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta=a\cos^2\dfrac{\theta}{2}, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sin\theta=\sqrt{2}a\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}, \end{cases}$$

从而 $y=a-x=a\sin^2\dfrac{\theta}{2}$. 令 $t=\dfrac{\theta}{2}$, 就能得到题设的参数方程, 说明满足圆方程的点都是题设曲线上的点, 因此已知曲线确是圆.

其圆心应是直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=0 \end{cases}$ 与平面 $x+y-a=0$ 的交点, 即 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$, 半径则为 $\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

4. 求证: 两个球面

$$S_i:\ x^2+y^2+z^2+A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \quad (i=1,2),$$

交线圆所在平面为

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + (D_1 - D_2) = 0.$$

证明: 任取两个球面的交线圆上的 3 个不同点 $M_j(a_j, b_j, c_j)$ $(j = 1, 2, 3)$. 则

$$\begin{cases} a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 + A_1 a_j + B_1 b_j + C_1 c_j + D_1 = 0, \\ a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 + A_2 a_j + B_2 b_j + C_2 c_j + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

将两式相减得

$$(A_1 - A_2)a_j + (B_1 - B_2)b_j + (C_1 - C_2)c_j + (D_1 - D_2) = 0, \quad (j = 1, 2, 3).$$

这说明圆上的 3 个点 M_1, M_2, M_3 都在平面

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + (D_1 - D_2) = 0$$

上, 因此整个圆也在此平面上.

*__5.__ 已知两球面:

$$S_i:\ x^2 + y^2 + z^2 + 2U_i x + 2V_i y + 2W_i z + d_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

求证这两球面正交 (在交点处的切平面垂直) 的条件是:

$$2(U_1U_2 + V_1V_2 + W_1W_2) = d_1 + d_2.$$

证明: 设点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为两个球面的任意一个交点, 则过 M 点的切平面的法向量就是过这个点的球半径. 用配方法不难看出这两个球面的球心是 $(-U_i, -V_i, -W_i)$ $(i = 1, 2)$. 因此球半径的方向向量是 $(x_0+U_i, y_0+V_i, z_0+W_i)$ $(i = 1, 2)$. 这两个球面正交等价于这两个球半径正交, 即

$$(x_0 + U_1)(x_0 + U_2) + (y_0 + V_1)(y_0 + V_2) + (z_0 + W_1)(z_0 + W_2) = 0,$$

展开得

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+(U_1+U_2)x_0+(V_1+V_2)y_0+(W_1+W_2)z_0+U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2 = 0.$$

由于 M 在球面的交线上, 因此它的坐标同时满足两个球面的方程, 将此两个方程相加后除以 2 可得

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + (U_1 + U_2)x_0 + (V_1 + V_2)y_0 + (W_1 + W_2)z_0 + \frac{d_1 + d_2}{2} = 0.$$

代入前面等式后即得

$$2(U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2)=d_1+d_2.$$

这个条件是充分且必要的.

***6.** 求证两圆

$$S_1:\ \begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}\qquad \text{与} S_2:\ \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0,\\ x+y+z=1\end{cases}$$

在同一球面上.

证明: 通过 S_1 的球面的球心一定在 z 轴上 (参见习题 1(4)), 因此其坐标为 $(0,0,a)$. 再求 S_2 的圆心. 它是直线 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1+t,\\ z=t\end{cases}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交点 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. 而球心与圆心的连线应该与平面 $x+y+z=1$ 的法向量平行, 即 $\dfrac{2}{3}:\dfrac{2}{3}:\left(-\dfrac{1}{3}-a\right)=1:1:1$, 所以 $a=-1$, 即球心为 $(0,0,-1)$. 又因 $(2,0,0)$ 在 S_1 上, 从而在球面上, 求得球半径等于 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 因此 S_1 在球面

$$x^2+y^2+(z+1)^2=5$$

上. 此方程减去方程 $x+y+z=1$ 的 2 倍后得到

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0,$$

说明此球面与平面 $x+y+z=1$ 的交线就是 S_2. 因此 S_1 与 S_2 在同一个球面上.

***7.** 证明: 过圆:

$$\begin{cases}S=x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0, & (u^2+v^2+w^2-d>0),\\ E=Ax+By+Cz+D=0, & (A^2+B^2+C^2\neq 0)\end{cases}$$

的球面族方程可表示为: $S+2\lambda E=0$ (λ 为参数).

证明: 对于参数 λ, 若方程 $S+2\lambda E=0$ 确实表示一个球面, 则圆 $\begin{cases}S=0,\\ E=0\end{cases}$ 一定在此球面上.

对任意一个过圆 $\begin{cases} S=0, \\ E=0 \end{cases}$ 的球面

$$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2tz+r=0,$$

已知圆应在两个球的交线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0, \\ x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2tz+r=0 \end{cases}$$

上. 由第 4 题知, 此圆应在平面

$$(p-u)x+(q-v)y+(t-w)z+\frac{r-d}{2}=0$$

上. 但 $E=0$ 也过此圆, 因此两个平面重合, 即存在实数 λ 使得

$$p-u=\lambda A, \quad q-v=\lambda B, \quad t-w=\lambda C, \quad \frac{r-d}{2}=\lambda D.$$

解出 p,q,t,r, 代入球面方程即得

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d+2\lambda(Ax+By+Cz+D)=0.$$

§ 3　旋转曲面

1. 求下列旋转曲面的方程:

(1) 直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转;

(2) 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转;

(3) 抛物线 $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ 绕它的准线旋转;

(4) 曲线 $\begin{cases} x^2=y, \\ x+z=0 \end{cases}$ 绕直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 旋转.

解: (1) 显然原点 O 在旋转轴上, 且轴的方向向量是 $\xi=(1,1,1)$. 参照 (3.1), 可以得到方程组

$$\begin{cases} (x-x')+(y-y')+(z-z')=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \\ \dfrac{x'}{2}=\dfrac{y'}{1}=\dfrac{z'-1}{0}, \end{cases}$$

在方程组中消去参数 x', y', z' 后可得

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2,$$

因此所求旋转曲面的方程为

$$2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz+yz)+5(x+y+z)-7=0.$$

(2) 显然原点 O 在旋转轴上, 且轴的方向向量是 $\xi=(0,0,1)$. 同上题, 可以得到方程组

$$\begin{cases} z-z'=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \\ \dfrac{x'-1}{1}=\dfrac{y'}{-3}=\dfrac{z'}{3}, \end{cases}$$

因此 $z'=z$, $y'=-z$, $x'=1+\dfrac{z}{3}$, 代入方程组消去参数 x', y', z' 后可得

$$x^2+y^2+z^2=\left(1+\frac{z}{3}\right)^2+z^2+z^2,$$

因此所求旋转曲面的方程为

$$9x^2+9y^2-10z^2-6z-9=0.$$

(3) 抛物线的准线的一般方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{p}{2}, \\ z=0, \end{cases}$ 则其标准方程为

$$\frac{x+\dfrac{p}{2}}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}.$$

取轴上的一点 $(x_0,y_0,z_0)=\left(-\dfrac{p}{2},0,0\right)$, 就可导出以下方程组

$$\begin{cases} y-y'=0, \\ \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(x'+\dfrac{p}{2}\right)^2+y'^2+z'^2, \\ y'^2=2px', \\ z'=0. \end{cases}$$

从方程组消去参数 x', y', z', 就能得到旋转曲面的方程

$$y^4-4p^2x^2+2p^2y^2-4p^2z^2-4p^3x=0.$$

(4) 显然原点 O 在旋转轴上, 因此可得方程组:

$$\begin{cases}(x-x')+2(y-y')+(z-z')=0,\\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,\\ x'^2=y',\\ x'+z'=0.\end{cases}$$

从方程组消去参数 x', y', z', 就能得到旋转曲面的方程

$$3x^2+3z^2-4xy-2xz-4yz-4x-8y-4z=0.$$

2. 根据 k, l 的不同取值 (零或非零) 讨论直线

$$L:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{k}=\frac{z-l}{0}$$

绕 x 轴旋转所成曲面 S 是何种曲面.

解: 分以下几种情形讨论.

(i) $k=l=0$ 时, L 的方程成为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}$, L 就是 x 轴, 因此绕 x 轴旋转仍然是 x 轴本身;

(ii) $k=0,\ l\neq 0$ 时, L 的方程为 $\begin{cases}z=l,\\ y=0,\end{cases}$ L 是坐标平面 xOz 上的曲线, 根据例 3.1 的讨论, xOz 坐标平面上的曲线绕 x 轴旋转得到的旋转曲面的方程可以用 $\sqrt{y^2+z^2}$ 代换方程中的 z 而得到, 因此旋转曲线的方程为 $y^2+z^2=l^2$, 是一个圆柱面;

(iii) $k\neq 0,\ l=0$ 时, L 的方程是 $\begin{cases}y=kx,\\ z=0,\end{cases}$ L 是坐标平面 xOy 上的曲线, 同理, 旋转曲面的方程可以用 $\sqrt{y^2+z^2}$ 代换方程中的 y 而得到, 即为 $y^2+z^2=k^2x^2$, 这是圆锥面;

(iv) $k\neq 0,\ l\neq 0$ 时, 因原点在旋转轴上, 可得以下方程组

$$\begin{cases}x-x'=0,\\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,\\ \dfrac{x'}{1}=\dfrac{y'}{k}=\dfrac{z'-l}{0},\end{cases}$$

消去参数后得到曲面方程

$$\frac{y^2+z^2}{l^2}-\frac{k^2x^2}{l^2}=1,$$

这是单叶双曲面.

3. 证明: 到定直线及定直线上一定点的距离平方和是常数的动点轨迹是一旋转曲面.

证明: 设定直线为 z 轴, 定点为原点 O. 设 $P(x,y,z)$ 是满足条件的点, 则 P 的坐标满足以下方程:

$$(x^2+y^2)+(x^2+y^2+z^2)=k^2,$$

显然这是曲线

$$\begin{cases} 2x^2+z^2-k^2=0, \\ y=0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转而得的旋转曲面方程.

4. 求证:

$$\begin{cases} x=a(\cos u+\cos v), \\ y=a(\sin u+\sin v), \\ z=b(u-v) \end{cases}$$

是旋转曲面, 这里 $a,b\neq 0$ 且 a,b 是常数.

证明: 因为

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2+2a^2(\cos u\cos v+\sin u\sin v)=a^2+2a^2\cos(u-v) \\ &=a^2+2a^2\cos\frac{z}{b}, \end{aligned}$$

显然它是曲线

$$\begin{cases} x^2=a^2+2a^2\cos\dfrac{z}{b}, \\ y=0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转而得.

5. 求曲线 $\begin{cases} x=z^2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=2t, \\ y=0, \\ z=3t \end{cases}$ 旋转生成的旋转曲面的方程.

解: 旋转轴通过原点 O, 因此可得方程组

$$\begin{cases}2(x-x')+3(z-z')=0,\\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,\\ x'=z'^2,\\ x'^2+y'^2=1.\end{cases}$$

消去参数后可得旋转曲面方程

$$2x+3z+2-2x^2-2y^2-2z^2=\pm 3\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}.$$

6. 证明曲面 $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-16(x^2+z^2)=0$ 是一个旋转曲面.

证明: 这是曲线

$$\begin{cases}(x^2+y^2)^2-16x^2=0,\\ z=0\end{cases}$$

绕 y 轴旋转而得到的曲面.

*__7.__ 求证: $yz+zx+xy=a^2$ 是旋转曲面, 且求旋转轴.

证明: 因为

$$(x^2+y^2+z^2)+2(yz+zx+xy)-(x^2+y^2+z^2)=2a^2,$$

可得

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2a^2.$$

对任意实数 p ($|p|>\sqrt{2}|a|$), 曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=p^2-2a^2,\\ x+y+z-p=0\end{cases}$$

是一个圆, 圆心在直线 $x=y=z$ 上, 因此这是一个旋转曲面, 旋转轴是 $x=y=z$.

也可以使曲线

$$\begin{cases}yz+zx+xy=a^2,\\ 2x-y-z=0\end{cases}$$

绕直线 $x=y=z$ 旋转而得到曲面 $yz+zx+xy=a^2$.

§4　柱面与柱面坐标

1. 已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+(y-3)^2+z^2=4, \end{cases}$$

母线方向为 $1:1:(-1)$, 试求其方程.

解: 任取点 $M(x',y',z')$ 在准线上, $P(x,y,z)$ 为柱面过 M 的母线上的点, 则有

$$\begin{cases} x=x'+u, \\ y=y'+u, \\ z=z'-u, \\ x'^2+y'^2+z'^2=4, \\ x'^2+(y'-3)^2+z'^2=4, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x'=x-y+y', \\ z'=z+y-y', \\ y'=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

推出柱面方程

$$(2x-2y+3)^2+(2z+2y-3)^2=7.$$

2. 已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} y=x^2+z^2, \\ y=2z, \end{cases}$$

母线垂直于准线所在平面, 试求此柱面方程.

解: 因为母线垂直于准线所在平面 $y-2z=0$, 所以母线方向为 $(0,1,-2)$. 与上题类似, 可得方程组

$$\begin{cases} x=x', \\ y=y'+u, \\ z=z'-2u, \\ y'=x'^2+z'^2, \\ y'=2z', \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{2}{5}(2y+z), \\ z' = \dfrac{1}{5}(2y+z), \end{cases}$$

推出柱面方程

$$\frac{2}{5}(2y+z) = x^2 + \frac{1}{25}(2y+z)^2,$$

展开后得

$$25x^2 + 4y^2 + z^2 + 4yz - 20y - 10z = 0.$$

3. 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = y \end{cases}$$

对 xOy 平面的射影柱面方程.

解: 母线的方向向量是 $(0,0,1)$. 可得方程组

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z = z' + u, \\ x'^2 + 2y'^2 + z'^2 = 1, \\ x'^2 + z'^2 = y', \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ 2y'^2 + y' - 1 = 0, \end{cases}$$

由于 $y=-1$ 不合题意, 因此柱面方程为

$$y = \frac{1}{2}, \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

另解: 将曲线方程组的第一个方程减去第二个方程, 可得 $2y^2 - y - 1 = 0$. 这是母线与 z 轴平行的柱面, 而且通过已知曲线, 即为所求的射影柱面.

4. 试说明下列方程所表示的曲面是柱面:

(1) $(x+y)(y+z) = a^2$;　　(2) $(x+y)(y+z) = x + 2y + z$;

(3) $y^2+2yz+z^2=1-x^2$;　　(4) $(x+y+z)^2=(x-y-z)^2$.

解: (1) 因为直线 $\begin{cases} x+y=a, \\ y+z=a \end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向为 $1:(-1):1$. 且点 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ 在此直线上. 而平面 $x-y+z-\dfrac{a}{2}=0$ 与曲面 $(x+y)(y+z)=a^2$ 的交线为

$$\begin{cases} (x+y)(y+z)=a^2, \\ x-y+z=\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

我们以这条曲线为准线, 以 $1:(-1):1$ 为母线方向, 可求得方程组

$$\begin{cases} x=x'+u, \\ y=y'-u, \\ z=z'+u, \\ (x'+y')(y'+z')=a^2, \\ x'-y'+z'=\dfrac{a}{2}, \end{cases}$$

消去参数后, 得到柱面方程 $(x+y)(y+z)=a^2$, 所以原来的曲面是柱面.

(注: 以下几个小题我们将先确定母线方向, 然后证明通过曲面上任意一点的与母线方向平行的直线都在曲面上, 用这样的方法来证明曲面是柱面.)

(2) 因为 $(x+y)(y+z)=(x+y)+(y+z)$, 所以直线 $\begin{cases} x+y=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 在此曲面上, 其方向向量是 $(1,-1,1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{1}=\frac{y-y'}{-1}=\frac{z-z'}{1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases} x+y=x'+y', \\ y+z=y'+z', \end{cases}$$

因此

$$(x+y)(y+z)=(x'+y')(y'+z')=x'+2y'+z')=(x+y)+(y+z)=x+2y+z,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

(3) 方程 $y^2+2yz+z^2=1-x^2$ 可以化为 $x^2+(y+z)^2=1$, 所以直线 $\begin{cases}x=1,\\ y+z=0\end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向向量是 $(0,-1,1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{0}=\frac{y-y'}{-1}=\frac{z-z'}{1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases}x=x',\\ y+z=y'+z',\end{cases}$$

因此

$$x^2+(y+z)^2=x'^2+(y'+z')^2=1,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

(4) 显然直线 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$ 在此曲面上, 它的方向向量是 $(0,1,-1)$.

设 $M(x',y',z')$ 是曲面上的任意点, $P(x,y,z)$ 是过 M 的直线

$$\frac{x-x'}{0}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{-1}$$

上的一点, 我们要验证 P 在曲面上. 为此, 解得

$$\begin{cases}x=x',\\ y+z=y'+z',\end{cases}$$

因此

$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2=(x'+y'+z')^2-(x'-y'-z')^2=0,$$

即 P 点的坐标满足曲面方程, 说明整条直线都在曲面上, 因此曲面是柱面.

5. 已知圆柱面的轴方程为:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2},$$

点 $(1,-2,1)$ 在此圆柱面上, 求此圆柱面的方程.

解: 因为点 $(1,-2,1)$ 到轴 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$ 的距离即为纬圆的半径, 所以此半径为

$$r=\frac{|(1,-3,2)\times(1,-2,-2)|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{117}}{3}.$$

任取此圆柱面上的一点 $P(x,y,z)$, P 到轴的距离也为 r, 因此有

$$\frac{|(x,y-1,z+1)\times(1,-2,-2)|}{3}=\frac{\sqrt{117}}{3},$$

整理后可得圆柱面方程

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

(注: 此题也可用过 $(1,-2,1)$ 点的直母线绕轴旋转而得到此曲面方程, 也可以用求出一个纬圆作准线来求出此柱面方程.)

6. 设柱面的准线为 $\begin{cases}x=y^2+z^2,\\ x=2z,\end{cases}$ 母线垂直于准线所在的平面, 求这柱面的方程.

解: 因为准线在平面 $x=2z$ 上, 所以母线的方向向量是 $(1,0,-2)$. 由此可得方程组

$$\begin{cases}x=x'+u,\\ y=y',\\ z=z'-2u,\\ x'=y'^2+z'^2,\\ x'=2z',\end{cases}$$

消去参数后可得柱面方程:

$$4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0.$$

7. 求半径为 4, 轴线方程是 $x=2y=-z$ 的圆柱面方程.

解: 所求圆柱面就是到轴线的距离等于 4 的点的轨迹. 因此圆柱面上的点 $P(x,y,z)$ 满足以下方程

$$\frac{\left|(x,y,z)\times\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)\right|}{\sqrt{2+\dfrac{1}{4}}}=4,$$

化简后得

$$5x^2+8y^2+5z^2+8xz+4yz-4xy=144.$$

8. 求与 x 轴及平面 $y=k$ 等距离的点的轨迹方程.

解: 设动点为 $P(x,y,z)$, 则由条件知

$$y^2+z^2=(y-k)^2,$$

即为

$$z^2+2ky-k^2=0.$$

§ 5 锥面

1. 求锥面方程:

(1) 准线: $\begin{cases} ax^2+by^2=1, \\ z=0, \end{cases}$ 顶点 (x_0,y_0,z_0);

(2) 准线: $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=k\ (\neq 0), \end{cases}$ 顶点 $(0,0,0)$;

(3) 准线: $\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9, \\ y=2, \end{cases}$ 顶点 $(0,0,0)$.

解: (1) 对于准线上的点 $M(x',y',z')$, 设 $P(x,y,z)$ 是过 M 的直母线上的点, 则有以下方程组

$$\begin{cases} x'=x_0+(x-x_0)u, \\ y'=y_0+(y-y_0)u, \\ z'=z_0+(z-z_0)u, \\ ax'^2+by'^2=1, \\ z'=0, \end{cases}$$

消去参数 x',y',z',u 后可得锥面方程:

$$a(z_0x-x_0z)^2+b(z_0y-y_0z)^2-(z-z_0)^2=0.$$

(2) 类似地有以下方程组

$$\begin{cases} x' = xu, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ f(x', y') = 0, \\ z' = k, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$f\left(k\frac{x}{z}, k\frac{y}{z}\right) = 0.$$

(3) 有以下方程组

$$\begin{cases} x' = xu, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ x'^2 + y'^2 + (z'-5)^2 = 0, \\ y' = 2, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 - 5yz = 0.$$

2. 求以点 $P(5,0,0)$ 为顶点, 以曲线 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.

解: 有以下方程组

$$\begin{cases} x' = 5 + (x-5)u, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ x'^2 + 2y'^2 = 1, \\ x' + 2y' - z' = 0, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2 - 146y^2 - 24z^2 + 4xy - 2xz + 96yz - 10x - 20y + 10z + 25 = 0.$$

3. 求以原点为顶点, 以 $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 为准线的锥面方程.

解: 有以下方程组

$$\begin{cases} x' = xu, \\ y' = yu, \\ z' = zu, \\ x'^2 - 2z' + 1 = 0, \\ y' - z' + 1 = 0, \end{cases}$$

消去参数后可得锥面方程:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

4. 已知圆锥面的顶点为 $(1, 2, 3)$, 轴垂直于平面 $2x + 2y - z + 1 = 0$, 母线与轴的夹角为 $30°$, 求该圆锥面的方程.

解: 设 $P(x, y, z)$ 是锥面上的一个点, 那么过 P 点的母线的方向向量是

$$\xi = (x - 1, y - 2, z - 3).$$

而圆锥的轴的方向向量就是平面的法向量

$$\nu = (2, 2, -1).$$

根据题意有

$$\frac{(\xi, \nu)}{|\xi||\nu|} = \pm \cos 30°,$$

即

$$\frac{2(x-1) + 2(y-2) - (z-3)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}\sqrt{4+4+1}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

化简整理后即得所求圆锥面的方程为

$$\begin{aligned} 11(x-1)^2 + 11(y-2)^2 + 23(z-3)^2 - 32(x-1)(y-2) + 16(x-1)(z-3) \\ + 16(y-2)(z-3) = 0, \end{aligned}$$

或

$$11x^2 + 11y^2 + 23z^2 - 32xy + 16xz + 16yz - 6x - 60y - 186z + 342 = 0.$$

5. 过 x 轴和 y 轴分别作动平面, 使它们保持定交角 α. 试求它们的交线产生的曲面方程, 并指出是什么曲面.

解: 设过 x 轴的动平面为 $A_1y+B_1z=0$, 过 y 轴的动平面为 $A_2x+B_2z=0$. 它们保持定角 α, 则

$$\frac{B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\cos\alpha.$$

它们的交线过原点 O, 而且交线的方向向量

$$\xi=(0,A_1,B_1)\times(A_2,0,B_2)=(A_1B_2,A_2B_1,-A_1A_2),$$

因此交线上的点 $P(x,y,z)$ 满足

$$\begin{cases}x=tA_1B_2,\\ y=tA_2B_1,\\ z=-tA_1A_2,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A_1^2+B_1^2=\dfrac{1}{t^2A_2^2}y^2+z^2,\\ A_2^2+B_2^2=\dfrac{1}{t^2A_1^2}x^2+z^2,\\ (B_1B_2)^2=\dfrac{x^2y^2}{t^2z^2}.\end{cases}$$

由 $\cos^2\alpha(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)=(B_1B_2)^2$ 可推出曲面方程$\cos^2\alpha(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^4)=x^2y^2$, 是一个锥面.

6. 求顶点为 $(5,0,0)$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 相切的圆锥面方程.

解: 由相切的性质可知此圆锥面的半顶角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, x 轴是圆锥面的轴, 因此轴的方向向量是 $(1,0,0)$. 所以此圆锥面的方程为

$$\frac{|(x-5,y,z)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}}=\frac{4}{5},$$

化简为

$$9(x-5)^2-16(y^2+z^2)=0.$$

7. 证明: 过原点且切于球面

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\qquad (0<d<a^2+b^2+c^2)$$

的直线所生成的圆锥面方程为

$$d(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

证明: 已知球面的球心为 $(-a,-b,-c)$, 所以圆锥面的轴的方向向量是 (a,b,c). 从球心到原点的距离是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 球半径等于$\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$, 因此过原点的切线之长等于 $\sqrt{d}$, 由此可得 $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{d}{a^2+b^2+c^2}}$, 其中 θ 是圆锥面的半顶角. 所以所求圆锥面的方程为

$$\frac{|ax+by+cz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{d}{a^2+b^2+c^2}},$$

化简后得

$$d(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

*$\mathbf{8.}$ 证明 $ayz+bzx+cxy=0$ 表示锥面. 若平面 $x+y+z=0$ 与该锥面交于一对直线, 设其交角为 θ, 且 $a+b+c=0$, 则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

证明: 因为曲面 $ayz+bzx+cxy=0$ 是关于 x,y,z 的二次齐次方程, 所以是以原点 O 为顶点的锥面. 而平面 $x+y+z=0$ 也过原点, 所以两交线均落在曲面 $ayz+b(-y-z)z+c(-y-z)y=0$ 和 $a(-x-z)z+bxz+c(-x-z)x=0$ 上, 且过原点.

由第一个方程化简得

$$cy^2-(a-b-c)yz+bz^2=0 \tag{$*$}$$

由第二个方程化简得

$$cx^2-(b-a-c)xz+az^2=0 \tag{$**$}$$

分别在两相交直线上各取一点 (x',y',z') 和 (x'',y'',z''), 则此两点的坐标当然也满足 (*) 和 (**). 从它们满足 (*) 可得:

$$cy'^2-(a-b-c)y'z'+bz'^2=0 \quad 与 \quad cy''^2-(a-b-c)y''z''+bz''^2=0$$

利用根与系数关系, 可得 $y'y''=\dfrac{b}{c}z'z''$. 同理, 由于它们也满足 (**), 可得 $x'x''=\dfrac{a}{c}z'z''$.

因此两直线的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}$$

$$= \frac{a+b+c}{c\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}} = 0,$$

即 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

*9. 证明: $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=0$ 表示一个半顶角 θ 为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 的圆锥面.

证明: 原方程的变量取值范围应满足 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. 原方程经 2 次平方后成为

$$2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=0,$$

显然是个锥面, 而且它与原方程在 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 这一区域内是同解的. 因此原曲面是锥面 (当然以原点为顶点, 且只有一个方向).

考虑过原点的 2 条直线:

$$L:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}, \qquad L':\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{s},$$

直线 L' 绕直线 L 旋转得到圆锥面的方程为

$$\begin{cases} x'=mt, \\ y'=nt, \\ z'=st, \\ (x-x')+(y-y')+(z-z')=0, \\ x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2, \end{cases}$$

消去参数 x', y', z', t 后得到

$$x^2+y^2+z^2=\frac{m^2+n^2+s^2}{(m+n+s)^2}(x+y+z)^2.$$

当 $\dfrac{m^2+n^2+s^2}{(m+n+s)^2}=\dfrac{1}{2}$ 时, 这个圆锥面的方程与已知锥面的方程同解. 而圆锥面的半顶角 θ 就是 L' 与 L 的夹角, 即

$$\cos\theta=\frac{(1,1,1)\cdot(m,n,s)}{\sqrt{m^2+n^2+s^2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

§6 二次曲面

1. 已知椭球面的对称轴与坐标轴重合, 且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

和点 $A(1,2,-\sqrt{11})$, 求椭球面方程.

解: 显然此椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

以点 A 的坐标代入, 解得 $c=6$, 所以椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1.$$

2. 已知顶点为原点, 对称面为 xOy 面和 zOx 面, 且过点 $A\left(\dfrac{1}{2},-1,2\right)$ 和 $B\left(\dfrac{5}{2},3,-2\right)$. 求椭圆抛物面的方程.

解: 此椭圆抛物面的方程应为

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x,$$

再以 A,B 点的坐标代入, 解得 $b=\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{2}$, 因此所求椭圆抛物面的方程为

$$\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{8}=2x.$$

3. 求一个二次曲面的方程, 使这个二次曲面通过两条抛物线

$$\begin{cases} x^2-6y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z^2+4y=0 \\ x=0. \end{cases}$$

解: 这个二次曲面可能是椭圆抛物面或双曲抛物面, 根据已知条件, 它的方程具有以下形式:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{b}=2y,$$

以 $z=0$ 代入, 求得 $a=3$, 以 $x=0$ 代入, 求得 $b=-2$, 因此这是双曲抛曲面, 其方程为

$$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{2}=2y.$$

4. 当 k 取各种实数值时, 方程

$$(k-3)x^2+y^2=(k+3)z$$

表示什么曲面?

解: 当 $k<-3$ 或 $-3<x<3$ 时, 方程表示双曲抛物面; 当 $k=-3$ 时, 方程表示两个相交平面; 当 $k=3$ 时, 方程表示抛物柱面; 当 $k>3$ 时, 方程表示椭圆抛物面.

5. 已知椭圆抛物面 $Ax^2+By^2=2z$ 通过圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2x+2z, \\ x=z, \end{cases}$$

试求其方程.

解: 圆方程可以同解变形为

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=4z, \\ x=z, \end{cases}$$

而原曲面被平面 $x=z$ 截得的曲线是

$$\begin{cases} Ax^2+By^2=2z, \\ x=z. \end{cases}$$

比较后即得 $A=1$, $B=\dfrac{1}{2}$, 因此椭圆抛物面的方程为

$$x^2+\frac{y^2}{2}=2z.$$

6. 已知椭圆抛物面 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=2z$ 和平面 $x=kz$ 的交线是一个圆. 试求此圆的半径.

解: 此交线也可表示为

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{1}{k^2}, \\ x=kz. \end{cases}$$

这里第一个方程是交线到 xOy 平面的投影柱面, 它是一个椭圆柱面, 其对称轴是直线 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{k}, \\ y=0. \end{cases}$ 这条直线与平面 $x=kz$ 的交点 $\left(\dfrac{1}{k},0,\dfrac{1}{k^2}\right)$ 就是交线圆的圆心. 现在我们又可将交线的方程同解变形为

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2+y^2+k^2\left(z-\dfrac{1}{k^2}\right)^2=\dfrac{2}{k^2}, \\ x=kz. \end{cases}$$

从这个方程组可以看出, 要使交线成为一个以 $\left(\dfrac{1}{k}, 0, \dfrac{1}{k^2}\right)$ 为圆心的圆, 必须且只须 $k^2 = 1$, 这时圆的半径等于 $\sqrt{2}$.

7. 试验证椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程可分别写为

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = 2uv, \end{cases} \quad (u, v \text{ 为参数}).$$

证明: 椭圆抛物面的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$, 作变量替换

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \end{cases}$$

不难看出这个变换是可逆的, 代入方程后可得 $z = u^2 + v^2$. 由于曲面上的点被 x, y 的值唯一确定, 因此也被 u, v 唯一确定. 说明这确是曲面的参数方程. 类似地可以得到双曲抛物面的参数方程.

8. 已知一抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 平行移动, 且顶点在抛物线 $\begin{cases} y^2 = -4z, \\ x = 0 \end{cases}$ 上, 试求其轨迹方程.

解: 因为抛物线 $\begin{cases} y^2 = -4z, \\ x = 0 \end{cases}$ 在 yOz 平面上, 设抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 平行移动之后扫出的曲面为 S. 任取其上一点 (X, Y, Z), 则平面 $y = Y$ 与曲面 S 的截口应与抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 相似, 只是顶点在 $\left(0, Y, -\dfrac{Y^2}{4}\right)$ 处. 因此点 (X, Y, Z) 应该满足方程

$$X^2 = 2\left(Z - \left(-\frac{Y^2}{4}\right)\right),$$

即 $X^2 - \dfrac{Y^2}{2} = 2Z$, 所以轨迹方程为 $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 2z$, 是双曲抛物面.

9. 证明椭圆抛物面上无直线存在.

证明: 设有直线

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

它要落在椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 上当且仅当

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}=2(z_0+nt) \tag{$*$}$$

对任意的 t 成立, 但上式是关于 t 的二次方程, 且 t^2 的系数是 $\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}$, 若它不等于 0, 则 (*) 式不可能对任意的 t 成立, 故只有 $l=m=0$, 这时 t 的一次项系数为 n, 也只能是 0, 不可能.

§7　直纹面

1. 求双曲抛物面 $x^2-y^2=z$ 上过点 $(1,-1,0)$ 的两条直母线方程以及它们的交角 α.

解: 设其两族直母线为

$$\begin{cases}x+y=\mu,\\ \mu x-\mu y=z\end{cases}\qquad \text{和}\qquad \begin{cases}x-y=\nu,\\ \nu x+\nu y=z,\end{cases}$$

它们通过点 $(1,-1,0)$, 所以 $\mu=0$, $\nu=2$, 推得直母线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}\quad \text{和}\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4},$$

交角满足 $\cos\alpha=0$, 即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 证明: 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ $(a\neq b)$ 上的互相正交的直母线的交点的轨迹是一条双曲线.

证明: 由于同族的任意两条直母线总是异面直线, 没有交点, 因此只需考虑异族的直母线. 不妨设

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\mu,\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}\qquad \text{与}\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\nu,\\ \nu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}$$

相互垂直, 两直线的方向向量分别为 $\left(-\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a},-\dfrac{2\mu}{ab}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a},\dfrac{2\nu}{ab}\right)$, 因它们垂直, 所以 $4\mu\nu=a^2-b^2$.

当 $\mu\neq\nu$ 时, 容易解得交点满足

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=4\mu\nu=a^2-b^2,\\ z=2\mu\nu=\dfrac{a^2-b^2}{2},\end{cases}$$

当 $\mu=\nu$ 时, 交点满足

$$\begin{cases}x=2a\mu,\\ z=2\mu^2,\\ y=0.\end{cases}$$

不论哪一种情形, 都说明交点在双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=a^2-b^2,\\ z=\dfrac{a^2-b^2}{2},\end{cases}\qquad 与\qquad \begin{cases}x^2=2a^2z,\\ z=0,\end{cases}$$

上.

3. 试证:

$$2x^2+y^2-z^2+3xy+xz-6z=0$$

是直纹面, 并求出其上过点 $M(1,1,1)$ 的直母线方程.

解: 原方程可化为

$$(x+y+z)(2x+y-z)=6z,$$

则其直母线方程为

$$\begin{cases}\lambda(x+y+z)=6z,\\ 2x+y-z=\lambda\end{cases}\qquad 或\qquad \begin{cases}\mu(2x+y-z)=6z,\\ x+y+z=\mu,\end{cases}$$

其中 λ,μ 为参数. 又因不论 λ,μ 取何值, 总有

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \lambda-6\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=2,\qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}2\mu & \mu & 6-\mu\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2,$$

说明它们确实表示两个直线族. 所以曲面是直纹面.

考虑过点 $(1,1,1)$ 的直母线. 将坐标代入母线方程, 可得 $\lambda=2$, $\mu=3$. 因此两条直母线为

$$\begin{cases}x+y-2z=0,\\ 2x+y-z-2=0\end{cases}\qquad 和\qquad \begin{cases}2x+y-3z=0,\\ x+y+z-3=0.\end{cases}$$

4. 求与三直线

$$L_1:\begin{cases}y-1=0,\\ x+2z=0,\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}y-z=0,\\ x-2=0,\end{cases}\qquad L_3:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$$

相交的动直线产生的曲面方程.

解: 设动直线与 L_1, L_3 的交点为 $(-2u, 1, u)$ 与 $(2v, -1, v)$ (其中 u, v 为参数), 所以动直线的方程为

$$\frac{x+2u}{2(u+v)} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-u}{v-u}. \tag{$*$}$$

它应与直线 L_2 相交. 由于点 $(2,0,0)$ 在 L_2 上, 且 L_2 的方向向量为 $(0,1,1)$, 因此根据直线相交的条件, 必须

$$\begin{vmatrix} 0 & 2(u+v) & -2(1+u) \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & v-u & u \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $uv=-1$. 而从 (*) 式可以得到

$$\begin{cases} u = \dfrac{2z-x}{2(1+y)}, \\ v = \dfrac{-x-2z}{2(y-1)}. \end{cases}$$

因此动直线所扫过的曲面方程为

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1.$$

5. 证明命题 7.3.

证明: 设单叶双曲面的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 它的两条异族直母线为

$$\begin{cases} \mu_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right)=0, \\ \mu_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0 \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} \mu_1\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1-\dfrac{y}{b}\right)=0, \\ \mu_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0. \end{cases}$$

改写成一般方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_0}{a}x+\dfrac{\nu_0}{b}y+\dfrac{\mu_0}{c}z+\nu_0=0, \\ \dfrac{\nu_0}{a}x-\dfrac{\mu_0}{b}y-\dfrac{\nu_0}{c}z+\mu_0=0 \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{a}x-\dfrac{\nu_1}{b}y+\dfrac{\mu_1}{c}z+\nu_1=0, \\ \dfrac{\nu_1}{a}x+\dfrac{\mu_1}{b}y-\dfrac{\nu_1}{c}z+\mu_1=0. \end{cases}$$

利用第四章 §3 末尾关于用一般方程表示的两条直线的相关位置的结论, 由于上述联立线性方程组的增广矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mu_0}{a} & \dfrac{\nu_0}{b} & \dfrac{\mu_0}{c} & -\nu_0 \\ \dfrac{\nu_0}{a} & -\dfrac{\mu_0}{b} & -\dfrac{\nu_0}{c} & -\mu_0 \\ \dfrac{\mu_1}{a} & -\dfrac{\nu_1}{b} & \dfrac{\mu_1}{c} & -\nu_1 \\ \dfrac{\nu_1}{a} & \dfrac{\mu_1}{b} & -\dfrac{\nu_1}{c} & -\mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

说明增广矩阵的秩 < 4, 因此这两条直母线一定共面.

设双曲抛物面的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$. 它的两条异族直母线为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) + 2\mu = 0, \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) + z = 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \nu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) + z = 0, \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) + 2\nu = 0. \end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵为

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & 0 & -2\mu \\ \dfrac{\mu}{a} & -\dfrac{\mu}{b} & 1 & 0 \\ \dfrac{\nu}{a} & \dfrac{\nu}{b} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{b} & 0 & -2\nu \end{pmatrix},$$

计算得 $|\tilde{A}| = 0$, 说明 $\operatorname{rank} \tilde{A} < 4$. 另一方面不难看出 $\operatorname{rank} A = 3 = \operatorname{rank} \tilde{A}$, 说明这两条直母线相交.

6. 证明命题 7.4.

证明: 设单叶双曲面的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. 它的两条同族直母线为

$$\begin{cases} \mu_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) + \nu_0\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) = 0, \\ \mu_0\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) + \nu_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \mu_1\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) + \nu_1\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) = 0, \\ \mu_1\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) + \nu_1\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0. \end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mu_0}{a} & \dfrac{\nu_0}{b} & \dfrac{\mu_0}{c} & -\nu_0 \\ \dfrac{\nu_0}{a} & -\dfrac{\mu_0}{b} & -\dfrac{\nu_0}{c} & -\mu_0 \\ \dfrac{\mu_1}{a} & \dfrac{\nu_1}{b} & \dfrac{\mu_1}{c} & -\nu_1 \\ \dfrac{\nu_1}{a} & -\dfrac{\mu_1}{b} & -\dfrac{\nu_1}{c} & -\mu_1 \end{vmatrix} = \frac{4(\mu_0\nu_1 - \nu_0\mu_1)^2}{abc}.$$

当这两条直母线不重合时, 一定有 $\mu_0 : \nu_0 \neq \mu_1 : \nu_1$, 因此增广矩阵的秩等于 4, 这两条直线异面.

设双曲抛物面的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$. 它的两条同族直母线为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) + 2\mu_0 = 0, \\ \mu_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) + z = 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) + 2\mu_1 = 0, \\ \mu_1\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) + z = 0, \end{cases}$$

由上述 4 个方程联立得到的线性方程组的增广矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2\mu_0 \\ \frac{\mu_0}{a} & -\frac{\mu_0}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2\mu_1 \\ \frac{\mu_1}{a} & -\frac{\mu_1}{b} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4(\mu_0-\mu_1)^2}{ab}.$$

当 $\mu_0 \neq \mu_1$ 时, 增广矩阵的行列式不等于 , 因此它的秩等于 4. 说明这两条直母线异面.

对于双曲抛物面的一族直母线

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\mu=0, \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+z=0, \end{cases}$$

它的方向向量为 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},0\right)\times\left(\frac{\mu}{a},-\frac{\mu}{b},1\right)=\left(\frac{1}{b},-\frac{1}{a},-\frac{2\mu}{ab}\right)$, 所以这族直线都平行于平面 $bx+ay=0$.

同理可知, 另一族直母线

$$\begin{cases} \nu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+z=0, \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+2\nu=0 \end{cases}$$

都平行于平面 $bx-ay=0$.

*$\mathbf{7.}$ 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(c^2<a^2+b^2)$ 上的互相垂直的直母线的交点轨迹.

解: 显然, 相互垂直的直母线必不同族. 设为

$$\begin{cases} \omega\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\omega\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \theta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\theta\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

其中, ω,μ 不同时为零, θ,ν 也不同时为零. 这两条直线的方向分别为 $\left(\frac{\mu^2-\omega^2}{bc},\frac{2\mu\omega}{ac},\frac{\mu^2+\omega^2}{ab}\right)$ 和 $\left(\frac{\theta^2-\nu^2}{bc},\frac{2\nu\theta}{ac},-\frac{\nu^2+\theta^2}{ab}\right)$. 因它们垂直, 就有

$$\frac{(\mu^2-\omega^2)(\theta^2-\nu^2)}{b^2c^2}+\frac{4\mu\omega\nu\theta}{a^2c^2}-\frac{(\mu^2+\omega^2)(\nu^2+\theta^2)}{a^2b^2}=0.$$

化简后得

$$a^2(\omega\theta+\mu\nu)^2+b^2(\mu\theta-\omega\nu)^2+c^2(\mu\nu-\omega\theta)^2=(a^2+b^2-c^2)(\mu\theta+\omega\nu)^2.$$

再从方程组解得交点为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\mu\nu+\omega\theta}{\mu\theta+\omega\nu}a, \\ y=\dfrac{\omega\nu-\mu\theta}{\mu\theta+\omega\nu}b, \\ z=\dfrac{\mu\nu-\omega\theta}{\mu\theta+\omega\nu}c. \end{cases}$$

可知 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$. 故交点轨迹为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2. \end{cases}$$

§ 8　曲面的交线与曲面围成的区域

1. 写出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与

(1) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ $(R>a>0)$;

(2) 锥面 $x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ $(0<\theta<\pi)$

交线的参数方程.

解: (1) $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=\sqrt{R^2-a^2}, \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$ 和 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=-\sqrt{R^2-a^2}, \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$;

(2) $\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=R\cos\theta, \end{cases}$ $(0\le\varphi<2\pi)$ 和 $\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=-R\cos\theta, \end{cases}$ $(0\le\varphi<2\pi)$.

2. 试确定 m 为何值时平面 $x+mz-1=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 相交成: (1) 椭圆; (2) 双曲线.

解: 当 $m=0$ 时交线是一对相交直线

$$\begin{cases} y^2-z^2=0, \\ x=1. \end{cases}$$

因此设 $m \neq 0$, 此时交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{1}{m^2}(1-x)^2 = 1, \\ x + mz = 1, \end{cases}$$

可化简为

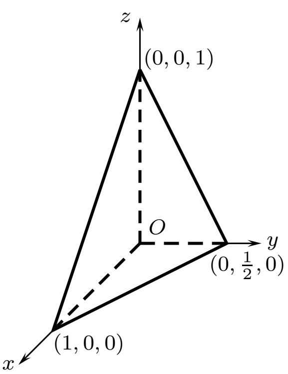
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{m^4}{(m^2-1)^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{m^2}{m^2-1}} = 1, \\ x + mz = 1. \end{cases}$$

因此, 当 $|m| > 1$ 时, 交线是椭圆; 当 $|m| < 1$ 且 $m \neq 0$ 时, 交线是双曲线.

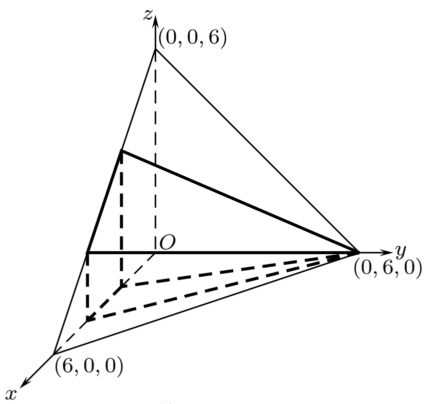
3. 画出下列曲面所围成的空间体的图形:

(1) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + z = 1$;

解: 这是一个四面体.



第 3 题 (1)



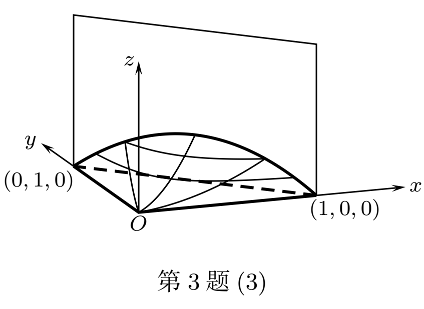
第 3 题 (2)

(2) $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$;

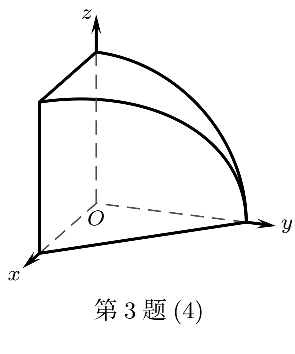
解: 四面体被一个柱面截得的立体.

(3) $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$;

解: 三棱柱被双曲抛物面截得的立体.



第 3 题 (3)



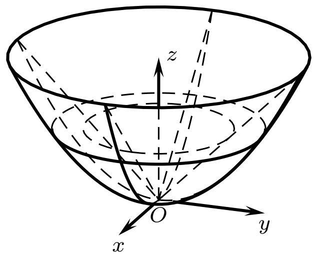
第 3 题 (4)

(4) $x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ y^2+z^2=1$;

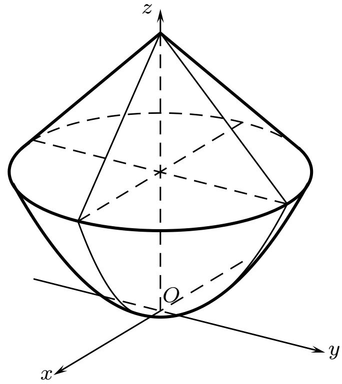
解: 三棱柱被圆柱横截而得的立体.

(5) $z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解: 旋转抛物面被圆锥截得的空间体.



第 3 题 (5)



第 3 题 (6)

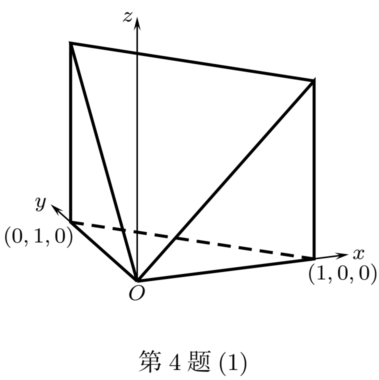
(6) $x^2+y^2=az,\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$.

解: 下面半个是旋转抛物面, 上面半个是圆锥面.

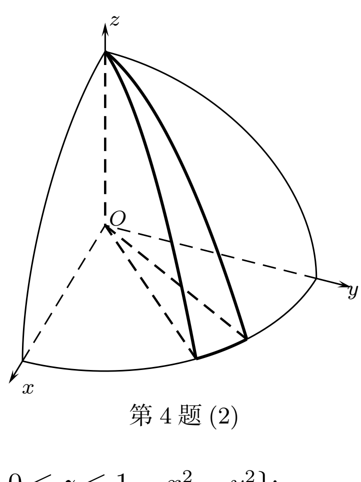
4. 画出下列空间体的图形:

(1) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le x+y\}$;

解: 以原点为顶点的一个四棱锥.



第 4 题 (1)



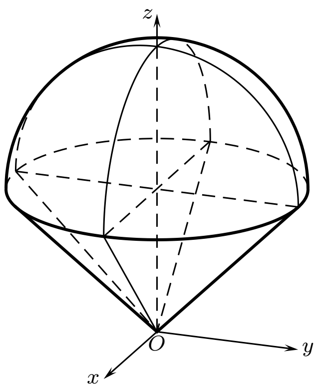
第 4 题 (2)

(2) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le y\le \sqrt{3}x, 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$;

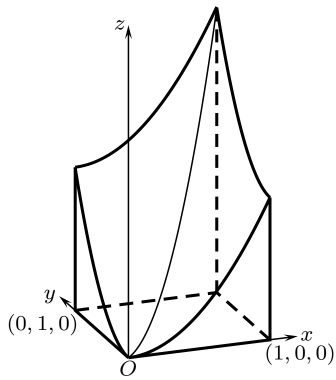
解: 旋转抛物面在第一卦限内被两个相交平面截出的立体.

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2, x^2+y^2\le z^2\}$;

解: 下面半个是圆锥面, 上面半个是球面.



第 4 题 (3)



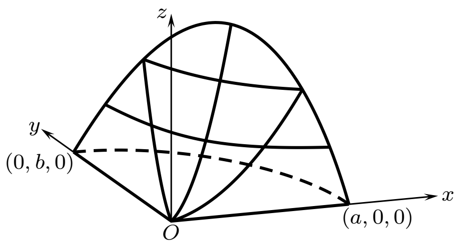
第 4 题 (4)

(4) $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;

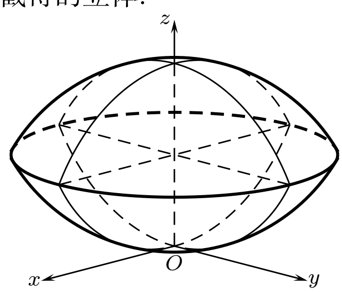
解: 四棱柱被双曲抛物面截得的立体.

(5) $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$;

解: 椭圆柱面在第一卦限内被双曲抛物面截得的立体.



第 4 题 (5)



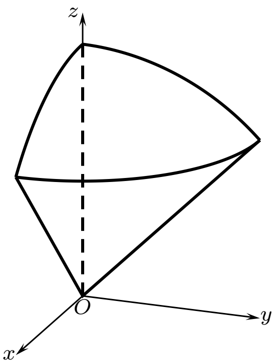
第 4 题 (6)

(6) $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz\}$;

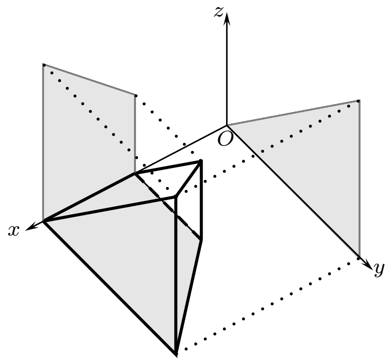
解: 两个有相同半径的球面相截而得的立体.

(7) $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$;

解: 四分之一圆锥被球面截得的立体.



第 4 题 (7)



第 5 题 (1)

5. 求下列各空间体在 3 个坐标平面上的投影边界的方程:

(1) Ω 由 $x=1$, $x=2$, $z=0$, $y=x$ 及 $z=y$ 所围成;

解: Ω 是以原点为顶点的三棱台. Ω 在 xOy 平面上的投影边界由 4 条线段构成:

$$\begin{cases} x=1 \\ z=0, \end{cases} (0\le y\le 1), \quad \begin{cases} x=2 \\ z=0, \end{cases} (0\le y\le 2),$$

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases} (1\le x\le 2), \quad \begin{cases} x=y \\ z=0, \end{cases} (1\le x\le 2).$$

Ω 在 xOz 平面上的投影边界由 4 条线段构成:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0, \end{cases} (0\le z\le 1), \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0, \end{cases} (0\le z\le 2),$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0, \end{cases} (1\le x\le 2), \quad \begin{cases} x=z \\ y=0, \end{cases} (1\le x\le 2).$$

Ω 在 yOz 平面上的投影边界由 3 条线段构成:

$$\begin{cases} z=0 \\ x=0, \end{cases} (0\le y\le 2), \quad \begin{cases} y=2 \\ x=0, \end{cases} (0\le z\le 2), \quad \begin{cases} z=y \\ x=0, \end{cases} (1\le z\le 2).$$

(2) Ω 由 $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成;

解: Ω 是抛物柱面被三棱柱横截而得. Ω 在 xOy 平面上的投影边界由 2 条直线段和一条抛物线段构成:

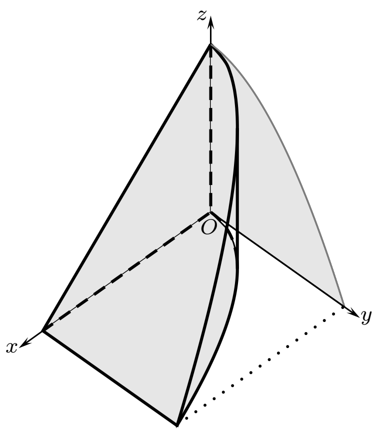
$$\begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=y^2 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le y\le \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{matrix}$$

Ω 在 xOz 平面上的投影边界由 3 条线段构成:

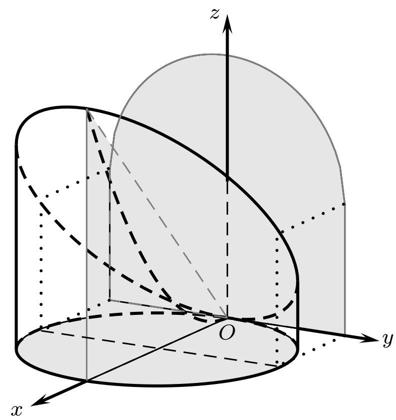
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=\dfrac{\pi}{2} \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le z\le \dfrac{\pi}{2}. \end{matrix}$$

Ω 在 yOz 平面上的投影边界由 2 条直线段和一条抛物线段构成:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}-z} \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le z\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le y\le \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}. \end{matrix}$$



第 5 题 (2)



第 5 题 (3)

(3) Ω 由 $x^2+y^2-2z=0$, $x^2+y^2-2x=0$ 和 $z=0$ 所围成;

解: Ω 是由旋转抛物面、圆柱面以及坐标平面 $z=0$ 所围成的.

Ω 在 xOy 平面上的投影边界是一个圆:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Ω 在 xOz 平面上的投影边界由 3 条直线段构成:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le x\le 2, \\ 0\le z\le 2. \end{matrix}$$

Ω 在 yOz 平面上的投影边界由 3 条直线段和一个半圆构成:

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0, \end{cases} (0\le z\le 1), \quad \begin{cases} y=1 \\ x=0, \end{cases} (0\le z\le 1),$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x=0, \end{cases} (-1\le y\le 1), \quad \begin{cases} z=1+\sqrt{1-y^2} \\ x=0, \end{cases} (-1\le y\le 1).$$

(4) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 4xy\}$;

解: Ω 是三棱柱被双曲抛物面相截而得. Ω 在 xOy 平面上的投影边界由 3 条直线段构成:

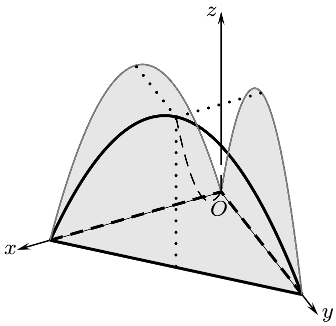
$$\begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le 1. \end{matrix}$$

Ω 在 xOz 平面上的投影边界由 1 条直线段一条抛物线段构成:

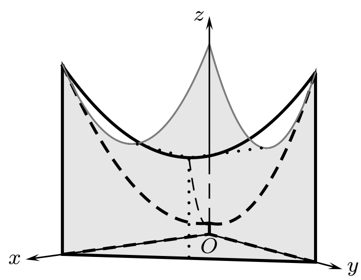
$$\begin{cases} z=0 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=4x(1-x) \\ y=0, \end{cases} \quad 0\le x\le 1.$$

Ω 在 yOz 平面上的投影边界也由 1 条直线段一条抛物线段构成:

$$\begin{cases} z=0 \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=4y(1-y) \\ x=0, \end{cases} \quad 0\le y\le 1.$$



第 5 题 (4)



第 5 题 (5)

(5) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 4, 0\le y\le 4-x, 0\le z\le \frac{1}{4}(x^2+y^2+1)\}$;

解: Ω 是三棱柱被双曲抛物面相截而得. Ω 在 xOy 平面上的投影边界由 3 条直线段构成:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le x\le 4, \\ 0\le y\le 4. \end{matrix}$$

Ω 在 xOz 平面上的投影边界由 3 条直线段一条抛物线段构成:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \left(0\le z\le \frac{17}{4}\right), \quad \begin{cases} x=4 \\ y=0, \end{cases} \left(0\le z\le \frac{17}{4}\right),$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0, \end{cases} (0 \le x \le 4), \quad \begin{cases} 4z = 2x^2 - 8x + 17 \\ y = 0, \end{cases} (0 \le x \le 4).$$

Ω 在 yOz 平面上的投影边界由 3 条直线段一条抛物线段构成:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \end{cases} \left(0 \le z \le \frac{17}{4}\right), \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 0, \end{cases} \left(0 \le z \le \frac{17}{4}\right),$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0, \end{cases} (0 \le y \le 4), \quad \begin{cases} 4z = 2y^2 - 8y + 17 \\ x = 0, \end{cases} (0 \le y \le 4).$$

第八章　线性变换

§1　线性空间的基变换与坐标变换

1. 设 V 为 n 维线性空间, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为 V 的一个基.

$\alpha_1=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$, $\alpha_2=\eta_2+\cdots+\eta_n$, $\cdots$, $\alpha_n=\eta_n$

(1) 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一个基;

(2) 求由基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵;

(3) 设 α 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 求 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标.

解: (1), (2) 因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

设

$$T=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基, 且由基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为 T.

(3) 设

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

则

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},$$

所以 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1})$.

2. 在 K^4 中, 求由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 α 在指定基下的坐标.

(1) $\xi_1=(1,0,0,0),\xi_2=(0,1,0,0),\xi_3=(0,0,1,0),\xi_4=(0,0,0,1)$;
$\eta_1=(2,1,-1,1),\eta_2=(0,-1,1,0),\eta_3=(-1,-1,2,1),\eta_4=(2,1,1,3)$;
$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标;

(2) $\xi_1=(1,2,-1,0),\xi_2=(1,-1,1,1),\xi_3=(-1,2,1,1),\xi_4=(-1,-1,0,1)$;
$\eta_1=(2,1,0,1),\eta_2=(0,1,2,2),\eta_3=(-3,-1,-1,1),\ \eta_4=(1,3,1,2)$;
$\alpha=(1,0,0,0)$ 在 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标;

(3) $\xi_1=(1,1,1,1),\xi_2=(1,1,-1,-1),\xi_3=(1,-1,1,-1),\xi_4=(1,-1,-1,1)$;
$\eta_1=(1,1,0,1),\eta_2=(2,1,2,1),\eta_3=(1,1,1,0),\eta_4=(0,1,-1,-1)$;
$\alpha=(1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

解: (1) $T=\begin{pmatrix}2&0&-1&2\\1&-1&-1&1\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-5&-5&4\\2&0&2&-2\\-2&-4&-4&4\\1&3&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-x_1-5x_2-5x_3+4x_4\\2x_1+2x_3-2x_4\\-2x_1-4x_2-4x_3+4x_4\\x_1+3x_2+3x_3-2x_4\end{pmatrix}.$$

(2) $T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}$, α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标为$\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\5\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

(3) $T=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&6&3&-1\\1&0&1&3\\-1&2&1&-1\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}$, ξ在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\3\end{pmatrix}$.

3. 继上题 (2), 求一向量, 它在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 下的坐标是在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标的 2 倍.

解: $(0,4,2,6)$.

4. 设 $K[x]_n$ 表示系数在数域 K 中次数小于 n 的多项式组成的线性空间.

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $a_i\in K$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为互不相同的数.

(1) 证明: $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 组成 $K[x]_n$ 的一个基;

(2) 取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为全体 n 次单位根 $1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$, 求由基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的过渡矩阵.

解: (1) 只要证 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关即可. 设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0,$$

分别以 $x=a_i$ 代入上式, 得

$$k_if_i(a_i)=0.$$

因为 $f_i(a_i)\neq 0$, 所以 $k_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 故 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关. 又因 $\dim K[x]_n=n$, 可知 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的基.

(2) 设全部 n 次单位根是 $1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$. 则

$$f_i(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_i}=\frac{x^n-\varepsilon_i^n}{x-\varepsilon_i}=x^{n-1}+\varepsilon_ix^{n-2}+\varepsilon_i^2x^{n-3}+\cdots+\varepsilon_i^{n-1},$$

故所求过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&\varepsilon_1^{n-1}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\1&\varepsilon_1^{n-2}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

5. 定义整系数多项式

$$\langle x\rangle^0=1,\langle x\rangle=x,\langle x\rangle^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),\quad k>1$$

(1) 求 $K[x]_5$ 中由基 $1,\langle x\rangle,\langle x\rangle^2,\langle x\rangle^3,\langle x\rangle^4$ 到基 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $K[x]_5$ 中多项式 $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$在基 $1,\langle x\rangle,\langle x\rangle^2,\langle x\rangle^3,\langle x\rangle^4$ 下的坐标;

*(3) 证明: $\sum\limits_{x=0}^{n}\langle x\rangle^k=\dfrac{1}{k+1}\langle n+1\rangle^{k+1}$;

*(4) 由此导出数列 $D_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k^4$ 的通项公式.

解: (1) $1=1$

$$
\begin{aligned}
x&=\langle x\rangle\\
x^2&=0+x+x(x-1)=0+\langle x\rangle+\langle x\rangle^2\\
x^3&=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=\langle x\rangle+3\langle x\rangle^2+\langle x\rangle^3\\
x^4&=\langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4
\end{aligned}
$$

故所求过渡矩阵为

$$
T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&3&7\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.
$$

(2) $(1,4,11,7,1)$.

(3) 易知 $\langle x+1\rangle^{k+1}-\langle x\rangle^{k+1}=(k+1)\langle x\rangle^k$. 所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n}\langle x\rangle^k&=\frac{1}{k+1}\sum_{x=0}^{n}[\langle x+1\rangle^{k+1}-\langle x\rangle^{k+1}]\\
&=\frac{1}{k+1}\left[\sum_{x=1}^{n+1}\langle x\rangle^{k+1}-\sum_{x=0}^{n}\langle x\rangle^{k+1}\right]\\
&=\frac{1}{k+1}(\langle n+1\rangle^{k+1}-\langle 0\rangle^{k+1})\\
&=\frac{1}{k+1}\langle n+1\rangle^{k+1}.
\end{aligned}
$$

(4) 因为 $x^4=\langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4$, 所以

$$
\begin{aligned}
D_n&=\sum_{x=0}^{n}x^4=\sum_{x=0}^{n}\left(\langle x\rangle+7\langle x\rangle^2+6\langle x\rangle^3+\langle x\rangle^4\right)\\
&=\frac{1}{2}\langle n+1\rangle^2+\frac{7}{3}\langle n+1\rangle^3+\frac{6}{4}\langle n+1\rangle^4+\frac{1}{5}\langle n+1\rangle^5\\
&=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).
\end{aligned}
$$

§ 2 基变换对线性变换矩阵的影响

1. 给定 K^3 的两个基:

$$\begin{aligned}
&\xi_1=(1,1,-1), \quad &\eta_1=(1,-1,2),\\
&\xi_2=(1,0,-1), \quad &\eta_2=(2,-1,2),\\
&\xi_3=(1,1,1), \quad &\eta_3=(-2,1,1).
\end{aligned}$$

设 $\mathscr{A}$ 为 K^3 的线性变换, 使:

$$\mathscr{A}\xi_i=\eta_i \quad i=1,2,3.$$

(1) 求由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵;
(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的矩阵;
(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵;
(4) 设 $\alpha=(2,-1,3)$, 分别求 $\mathscr{A}\alpha$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与基 η_1,η_2,η_3 下的坐标.

解: 设 K^3 标准基为 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, 令

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&-1&1\\2&2&1\end{pmatrix},$$

则有

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B, \qquad (\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C.$$

(1) 由于 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)B^{-1}C$, 故由基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$T=B^{-1}C=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&-3&\frac{3}{2}\\2&3&-3\\\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $(\mathscr{A}(\xi_1),\mathscr{A}(\xi_2),\mathscr{A}(\xi_3))=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)B^{-1}C$, 故 $\mathscr{A}$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的矩阵为

$$A=B^{-1}C=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&-3&\frac{3}{2}\\2&3&-3\\\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(3) 设 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 A', 则

$$A'=T^{-1}AT=(B^{-1}C)^{-1}(B^{-1}C)(B^{-1}C)=B^{-1}C=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与基 η_1,η_2,η_3 下的坐标分别为

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ 与 } C^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

因此 $\mathscr{A}\alpha$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的坐标为

$$AB^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\mathscr{A}\alpha$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标为

$$A'C^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A\sim C$, $B\sim D$, 证明:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证明: 存在可逆矩阵 T_1,T_2, 使得

$$T_1^{-1}AT_1=C, \qquad T_2^{-1}BT_2=D,$$

因此 $T=\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$T^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} T_1^{-1}AT_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}BT_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 可逆, 证明: AB 与 BA 相似.

证明: 由于 $A^{-1}(AB)A = BA$, 故 $AB \sim BA$.

4. 设 A 可逆, 且 $A \sim B$, 证明: B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

证明: 由于 T, A 皆可逆, 所以 B 可逆, 且

$$B^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1}T,$$

故 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

5. 设 $A \sim B$, 证明: $A^{\mathrm{T}} \sim B^{\mathrm{T}}$.

证明: 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$. 故 $B^{\mathrm{T}} = (T^{-1}AT)^{\mathrm{T}} = T^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}T^{-\mathrm{T}}$.

6. 设 $A \sim B$, $f(x) \in K[x]$, 证明: $f(A) \sim f(B)$.

证明: 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT = B$. 故

$$T^{-1}(f(A))T = f(T^{-1}AT) = f(B).$$

7. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

其中 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列.

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基. $\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathscr{A}\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_i,$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列, 因此 $\varepsilon_{i_1}, \cdots, \varepsilon_{i_n}$ 仍为 V 的基, 而

$$\mathscr{A}\varepsilon_{i_j} = \lambda_{i_j}\varepsilon_{i_j}, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

从而 $A\sim B$.

8. 设 $x,y,z\in K$, 令

$$A=\begin{pmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}z & x & y\\ x & y & z\\ y & z & x\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}y & z & x\\ z & x & y\\ x & y & z\end{pmatrix}.$$

证明: A,B,C 彼此相似.

证明: 取置换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

则 P,Q 皆可逆, 且

$$P^{-1}AP=C,\qquad Q^{-1}AQ=B,$$

所以 $A\sim B$, $A\sim C$. 由相似关系的传递性, 可得 $B\sim C$.

***9.** 证明:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_n\sim\begin{pmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基. $\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathscr{A}\varepsilon_i=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

则 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_n.$$

又易知

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \alpha_n = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$$

仍为 V 的基, 且 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $A \sim B$.

§ 3 线性变换的特征值与特征向量

1. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量, 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵是:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (6) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

(7) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

解: 数字表示特征值, 紧接在后的向量就是相应的一个特征向量.

(1) 7, $(1,1)$; -2, $(5,-4)$.

(2) $a\mathrm{i}$, $(1,\mathrm{i})$; $-a\mathrm{i}$, $(\mathrm{i},1)$.

(3) 2, $k(1,1,0,0) + l(1,0,1,0) + m(1,0,0,1)$; -2, $(-1,1,1,1)$.

(4) 2, $(-2,1,0)$; $1+\sqrt{3}$, $(-3,1,-2+\sqrt{3})$; $1-\sqrt{3}$, $(-3,1,-2-\sqrt{3})$.

(5) 1, $k(1,0,1) + l(0,1,0)$; -1, $(-1,0,1)$.

(6) -3, $(1,1,1)$; 2, $(1,1,-4)$.

(7) 2, $(0,0,1)$; 1, $(-1,1,8)$.

2. 证明: 欧几里得空间的正交变换的特征值 (如有的话) 只能是 ±1.

证明: 设 α 是属于正交变换 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$0 \neq (\alpha,\alpha) = (\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = \lambda_0^2(\alpha,\alpha),$$

因此 $\lambda_0^2 = 1$, $\lambda_0 = \pm1$.

3. 证明: 幂零矩阵 (某个方幂等于零的矩阵) 的特征值全为零.

证明: 设 α 是属于幂零矩阵 A 的特征值 λ_0 的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$. 由于

$$0 = A^k\alpha = \lambda_0^k\alpha,$$

可得 $\lambda_0^k = 0$, $\lambda_0 = 0$.

4. 设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (a_i 不全为零), 求矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值与特征向量.

解: 设 $a_i \neq 0$. 特征值 0 对应的特征向量是

$$\alpha_j = (0,\cdots,0,\underset{j}{a_i},\cdots,\underset{i}{-a_j},0,\cdots,0),\ (j{=}1,\cdots,i{-}1,i{+}1,\cdots,n)$$

的线性组合. 特征值$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$的特征向量是$(a_1,\cdots,a_n)$.

5. 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 存在 K 上的一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$.

证明: 因为 $M_n(K)$ 是 K 上 n^2 维线性空间, 故 $E, A, A^2, \cdots, A^{n^2-1}, A^{n^2}$ 线性相关. 于是存在不全为零的 $a_i \in K$, $i = 1, \cdots, n^2$ 使得

$$a_0E + a_1A + \cdots + a_{n^2-1}A^{n^2-1} + a_{n^2}A^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = a_{n^2}x^{n^2} + a_{n^2-1}x^{n^2-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

则 $f(A) = 0$.

***6.** 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, 子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}, \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n),$$

称为 A 的一个 k 阶主子式. 令特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda + (-1)^n a_n.$$

证明: a_k 等于 A 的全部 k 阶主子式之和.

证明: 把 $|\lambda E - A|$ 的每列

$$\begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ \lambda - a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

都拆成两列:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

则行列式 $|\lambda E - A|$ 可分解为 2^n 个 n 阶行列式之和, 其中每个行列式的列都是上述两种形式之一.

设 A_k 为任一含有 k 个 λ 的子行列式, 其 λ 处于 $j_1, \cdots, j_k$ 列, 将 A_k 按这 k 列展开, 得

$$A_k = \lambda^k \cdot (-1)^{n-k} D_{n-k},$$

其中 D_{n-k} 为在 A 中划去第 $j_1, \cdots, j_k$ 列、第 $j_1, \cdots, j_k$ 行而得到的 $n-k$ 阶主子式. 当这 k 个 λ 取遍 n 阶行列式中所有可能的 k 个位置, 则 D_{n-k} 就取遍所有 C_n^k 个主子式. 从而 $\chi_A(\lambda)$ 中 λ^{n-k} 的系数等于 $(-1)^k$ 乘以 A 的所有 k 阶主子式之和. 因此 a_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和.

*__7.__ 证明: AB 与 BA 有相同的特征值.

证明: 根据习题 5–8 的第 4 题, 当 $|A| \neq 0$, $AC = CA$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

因此

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

又因

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix},$$

两边取行列式, 即得

$$\begin{vmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{vmatrix} = |\lambda E - BA| = \begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

因此 AB 与 BA 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

*__8.__ 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: 存在可逆矩阵 $T \in GL(n, \mathbb{C})$, 使 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵.

证明: 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时结论自然成立. 现设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立.

设 λ_1 是 A 的一个特征值, 相应的特征向量是 $\alpha_1 \in \mathbb{C}^n$. 把 α_1 扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 令 $T_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 则 T_1 可逆, 且

$$AT_1 = T_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad 即 \quad T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. 由归纳假设, 存在可逆矩阵 $T_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, 使得

$$T_2^{-1}A_1T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令 $T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, 则 T 可逆, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*__9.__ 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(x)$ 为一复系数多项式. 证明: 如果 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

证明: 由习题 8, 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 从而

$$\begin{aligned} T^{-1}f(A)T = f(T^{-1}AT) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 为 $f(A)$ 的全部特征值.

§ 4 可对角化线性变换

1. 习题 8–3 第一题中的矩阵, 哪些是可以对角化的? 在可对角化的情况下, 求出相应的过渡矩阵和对角矩阵.

解: (1) $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(7, -2)$.

(2) $T = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(a\mathrm{i}, -a\mathrm{i})$.

(3) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-2, 2, 2, 2)$.

(4) $T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$.

(5) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-1,1,1)$.

(6), (7) 不可对角化.

2. 在 $K[x]_n$ 中, 求微分变换 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}(f(x)) = f'(x)$$

的特征多项式, 并证明: $\mathscr{D}$ 在任何一个基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解: 取 $K[x]_n$ 的基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$. 则 $\mathscr{D}$ 在这个基下的矩阵是

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $\mathscr{D}$ 的特征多项式为 $\chi_D(\lambda) = \lambda^n$. 如果 $\mathscr{D}$ 可对角化, 则存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = 0$, 即 $D = 0$, 而 $\mathscr{D}$ 不是零变换, 矛盾.

3. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$. 求 $\mathscr{A}$ 的特征值, 并证明 $\mathscr{A}$ 可对角化.

证明: 设

$$V_1 = \{\mathscr{A}\alpha \mid \alpha \in V\}, \qquad V_2 = \{\alpha - \mathscr{A}\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

则对任意的 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = \mathscr{A}\alpha + (\alpha - \mathscr{A}\alpha)$, 因此

$$V = V_1 + V_2.$$

若 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则

$$\alpha = \mathscr{A}\beta = \gamma - \mathscr{A}\gamma, \qquad \beta, \gamma \in V.$$

于是

$$\mathscr{A}\alpha = \mathscr{A}^2\beta = \mathscr{A}\beta = \alpha, \tag{$*$}$$

$$\mathscr{A}\alpha = \mathscr{A}\gamma - \mathscr{A}^2\gamma = \mathscr{A}\gamma - \mathscr{A}\gamma = 0. \tag{$**$}$$

所以 $\alpha = \mathscr{A}\alpha = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$. 这样就证明了

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

对于 V_1 中的向量 α, 有 (*) 式成立, 说明 V_1 是属于特征值 1 的特征子空间. 类似地由 (**) 式可得 V_2 是属于特征值 0 的特征子空间. 根据推论 4.5, $\mathscr{A}$ 可对角化. $\mathscr{A}$ 的特征值为 0, 1.

(注: 也可利用习题 9 的方法加以证明)

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 先将矩阵 A 对角化, 再求 A^n;

*(2) 利用上述结果, 求斐波那契数列 (参见第六章练习 6–1.8) 的通项公式.

解: (1) A 的特征值为 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} A^n &= T \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 令

$$\alpha_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix},$$

其中 a_i 是第 i 个斐波那契数. 则

$$\alpha_n=A^n\alpha_0.$$

所以

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A^n\alpha_0=\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^n-\beta^n\\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

算得

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

5. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶上三角矩阵. 证明:

(1) 若 $a_{ii}\neq a_{jj}$ $(i\neq j)$, 则 A 可对角化;

(2) 若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{ij}\neq 0$ $(i\neq j)$, 则 A 不可对角化.

证明: (1) 由于 A 是上三角矩阵, 故 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为 A 的 n 个特征值. 若当 $i\neq j$ 时 $a_{ii}\neq a_{jj}$, 则 A 有 n 个不同的特征值, 从而 A 可对角化.

(2) (反证) 已知 A 的特征值为 $\lambda_0=a_{11}=\cdots=a_{nn}$, 如 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=\operatorname{diag}(\lambda_0,\cdots,\lambda_0).$$

于是

$$A=T\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0\end{pmatrix}.$$

即 A 为纯量阵, 与假设矛盾.

6. 设有分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_s\end{pmatrix}.$$

证明: A 可对角化的充分必要条件是每个 A_i 皆可对角化.

证明: 充分性是显然的. 下证必要性.

设 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$AT=T\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

令

$$T=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_s\end{pmatrix},$$

其中 T_i 的行数等于 A_i 的阶数 r_i. 则

$$A_iT_i=T_i\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

这说明 T_i 的非零列向量都是 A_i 的特征向量. 又因 T 可逆, 故 T 的行向量线性无关, 因而 T_i 的行向量也线性无关. 于是 $\operatorname{rank}T_i=A_i$ 的阶数, T_i 的列秩也等于 A_i 的阶数. 因此 A_i 有 r_i 个线性无关的特征向量, 说明 A_i 皆可对角化.

7. 设 λ_1, λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同的特征值, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

证明: (反证) 如果 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于某个特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

又 $\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\mathscr{A}\varepsilon_1+\mathscr{A}\varepsilon_2=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$, 所以

$$(\lambda_1-\lambda_0)\varepsilon_1+(\lambda_2-\lambda_0)\varepsilon_2=0.$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关, 因此

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0, \qquad \lambda_2 - \lambda_0 = 0,$$

得到 $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda_2$, 矛盾.

8. 证明: 如果线性变换 $\mathscr{A}$ 以每个非零向量作为它的特征向量, 则 $\mathscr{A}$ 为标量乘积变换.

证明: 设对某个非零向量 α 有 $\mathscr{A}\alpha = k\alpha$, 对另一个非零向量 β, 有 $\mathscr{A}\beta = m\beta$. 如果 $k \neq m$, 则根据习题 7 的结论, $\alpha + \beta$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 如果 $\alpha + \beta = 0$, 则有 $\mathscr{A}\beta = -\mathscr{A}\alpha = -k\alpha = k\beta$, 与 $k \neq m$ 矛盾. 因此 $\alpha + \beta$ 是非零向量, 与题设矛盾.

*__9.__ 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$, 则 A 可对角化.

证明: 由习题 5–8.13 知, $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$ 的充分必要条件是 $A^2 = A$. 即对 A 的任一列向量 α 有 $A\alpha = \alpha$. 又 $A(A - E) = 0$, 故对 $A - E$ 的任一列向量 β 有 $A\beta = 0$.

设 A 的列向量组的极大无关组为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, $A - E$ 的极大无关列向量组为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ (因为 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(A - E) = n$). 下证 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

设有

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j \beta_j = 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^{r} k_i A\alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j A\beta_j = \sum_{i=1}^{r} k_i A\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = 0.$$

于是 $k_1 = \cdots = k_r = 0$, 进而 $m_1 = \cdots = m_{n-r} = 0$. 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

令 $T = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r})$, 则 T 可逆, 且

$$AT = A(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$AT = T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*__10.__ 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\mathrm{rank}(A+E)+\mathrm{rank}(A-E)=n$, 则 A 可对角化.

证明: 与上题类似, 略.

*__11.__ 设 $A, B \in M_n(K)$, 且 $AB=BA$. 证明: 如果 A, B 都可对角化, 则存在可逆矩阵 $T \in M_n(K)$, 使 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 同为对角矩阵.

证明: 设 A 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其中 λ_i 的重数为 r_i. 由于 A 可对角化, 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}.$$

令 $B_1 = T^{-1}BT$, 则 $A_1B_1 = B_1A_1$.

令 $B_1 = (B_{ij})$, 其分块方式与 A_1 相同, 则由 $A_1B_1 = B_1A_1$ 得

$$\lambda_i B_{ij} = B_{ij}\lambda_j$$

于是当 $i \neq j$ 时有 $B_{ij}=0$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

又因 B 可对角化, B_1 也可对角化, 从而由上题知每个 B_{ii} 都可对角化. 即存在可逆矩阵 $S_i \in M_{r_i}(K)$ 使

$$S_i^{-1}B_{ii}S_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{i_{r_i}} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s \end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 且

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} S_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s}\end{pmatrix},$$
$$T^{-1}BT=\begin{pmatrix} S_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} S_1^{-1}B_{11}S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1}B_{ss}S_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_{1r_1} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_{s1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{sr_s}\end{pmatrix}$$

同为对角形.

§5 线性变换的不变子空间

1. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, 已知 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间.

解: 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零不变子空间. 首先证明: W 必包含某个基向量 η_i.

设

$$0 \neq \alpha = a_k\eta_k + \cdots + a_n\eta_n \in W, \qquad a_k \neq 0.$$

则 $\mathscr{A}^{k-1}\alpha = a_k\eta_1 \in W$, $\eta_1 \in W$.

再设 η_k 是包含于 W 中的下标最大的基向量, 则

$$\eta_{k-1} = \mathscr{A}\eta_k, \eta_{k-2} = \mathscr{A}^2\eta_k, \cdots, \eta_1 = \mathscr{A}^{k-1}\eta_k \in W.$$

下面证

$$W = L(\eta_1, \cdots, \eta_k).$$

用反证法. 如有 $\alpha \in W$, 但 $\alpha \notin L(\eta_1, \cdots, \eta_k)$, 则

$$\alpha = a_1\eta_1 + \cdots + a_m\eta_m, \qquad 其中 a_m \neq 0, m > k.$$

于是

$$a_{m-k}\eta_1 + \cdots + a_{m-1}\eta_k + a_m\eta_{k+1} = \mathscr{A}^{m-k-1}\alpha \in W.$$

又因 $a_{m-k}\eta_1 + \cdots + a_{m-1}\eta_k \in W$, $a_m \neq 0$, 可得 $\eta_{k+1} \in W$, 矛盾. 因此 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间为零子空间以及 $L(\eta_1, \cdots, \eta_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

2. 设 $\mathscr{A}$ 为欧几里得空间的正交变换, 证明: $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明: 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathscr{A}(W) \subseteq W$. 由于正交变换必可逆, 因此 $\mathscr{A}(W) = W$.

对于任意的 $\beta \in W^{\perp}$, $\alpha \in W$, 必存在 $\gamma \in W$ 使 $\alpha = \mathscr{A}\gamma$. 于是

$$(\mathscr{A}\beta, \alpha) = (\mathscr{A}\beta, \mathscr{A}\gamma) = (\beta, \gamma) = 0.$$

这说明 $\beta \in W^{\perp}$, 故 $W^{\perp}$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换, W 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 证明: $\mathscr{A}(W)$ 还是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明: 由于 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, $\mathscr{A}(W) \subseteq W$, 因此 $\mathscr{A}(\mathscr{A}(W)) \subseteq \mathscr{A}(W)$, 说明 $\mathscr{A}(W)$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

4. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明:

(1) 如果 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 那么, V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

(2) $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

证明: (1) 对任意的 $\alpha \in V_\lambda$,

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}\alpha) = \mathscr{B}(\mathscr{A}\alpha) = \mathscr{B}(\lambda\alpha) = \lambda\mathscr{B}\alpha.$$

因此 $\mathscr{B}\alpha \in V_\lambda$, 说明 V_λ 也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

(2) 由上知, V_λ 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间, 从而 $\mathscr{B}|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 上的线性变换. 于是 $\mathscr{B}|_{V_\lambda}$ 有特征值 μ 以及相应的特征向量 $\beta \in V_\lambda$, 使

$$\mathscr{B}\beta = \mathscr{B}|_{V_\lambda}(\beta) = \mu\beta.$$

又因 $\beta \in V_\lambda$, $\mathscr{A}\beta = \lambda\beta$. 所以 β 是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的公共特征向量.

第九章　线性空间上的函数

§ 1　线性函数与双线性函数

1. 设 V 是区间 $[-1,1]$ 上全体连续实函数所组成的线性空间. 证明:

$$\begin{aligned}\psi:\quad V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f(x) &\longmapsto \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

是 V 上的一个线性函数.

证明: 显然 ψ 是 V 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 且对任意的 $f(x), g(x) \in V$, $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\psi(f(x)+g(x)) &= \int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x\\ &= \psi(f(x)) + \psi(g(x)),\end{aligned}$$

$$\psi(kf(x)) = \int_{-1}^{1} kf(x)\mathrm{d}x = k\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = k\psi(f(x)).$$

所以 ψ 是 V 上的一个线性函数.

2. 设 V 是数域 K 上的一个 3 维线性空间, η_1, η_2, η_3 是它的一个基, f 是 V 上的一个线性函数, 且

$$f(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) = 2,\ f(\eta_1 + \eta_3) = 2,\ f(-\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = -1.$$

求 $f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3)$.

解: 令

$$\begin{cases}\alpha_1 = \eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3\\ \alpha_2 = \eta_1 + \eta_3\\ \alpha_3 = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\end{cases}$$

则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}$, 所以

$$f(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) = (f(\eta_1), f(\eta_2), f(\eta_3)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3))A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (2, 2, -1) \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3.$$

3. V 及 η_1, η_2, η_3 同上题. 试求一线性函数 g, 使

$$g(3\eta_1 + \eta_2) = 2,\ g(\eta_2 - \eta_3) = 1,\ g(2\eta_1 + \eta_3) = 2.$$

解: 设

$$g(\eta_1) = a, \quad g(\eta_2) = b, \quad g(\eta_3) = c,$$

则由已知得

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ b - c = 1 \\ 2a + c = 2. \end{cases}$$

解得 $a = -1$, $b = 5$, $c = 4$. 从而所求的线性函数为

$$g(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) = -x_1 + 5x_2 + 4x_3.$$

4. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是它的一个基, $a_1, \cdots,$ a_n 是 K 中任意 n 个数. 证明: 存在 V 上唯一的线性函数 f, 使

$$f(\eta_i) = a_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

证明: (存在性) 设 $\alpha = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_n\eta_n \in V$. 令

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow K \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

容易证明 f 是 V 上线性函数, 且满足所需条件.

(唯一性) 设 g 为 V 的线性函数, 使

$$g(\eta_i) = a_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

则对任意的 $\alpha = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_n\eta_n \in V$ 有

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = f(\alpha).$$

这就证明了唯一性.

5. 设 $V = K^3$, $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$, 判断下列二元函数 f 是否为 V 上的双线性函数:

(1) $f(\alpha, \beta) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$;

(2) $f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2y_1$;

(3) $f(\alpha, \beta) = c, \quad c \in K$;

(4) $f(\alpha, \beta) = (2x_1 + x_2 - 3x_3)(y_1 - y_2 + y_3)$.

解: (1) 是.

(2) 否.

(3) 当 $c \neq 0$ 时, 否; 当 $c = 0$ 时, 是.

(4) 是.

6. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 令

$$W_1 = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in V\},$$
$$W_2 = \{\alpha \in V \mid f(\beta, \alpha) = 0, \forall \beta \in V\}.$$

证明: W_1 与 W_2 都是 V 的线性子空间, 且 $\dim W_1 = \dim W_2$.

证明: (1) 由于对任意的 $\beta \in V$ 有 $f(0, \beta) = 0$, 因此 $0 \in W_1$, W_1 非空. 又对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1$, $k \in K$ 以及任意的 $\beta \in V$ 有

$$f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0,$$

$$f(k\alpha_1, \beta) = kf(\alpha_1, \beta) = 0,$$

因此

$$\alpha_1+\alpha_2\in W_1,\qquad k\alpha_1\in W_1.$$

所以 W_1 是 V 的线性子空间. 同理可证 W_2 也是 V 的线性子空间.

(2) 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的基, f 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为 B. 则对任意的向量

$$\alpha=(x_1\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\qquad \beta=(y_1\ \cdots\ y_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

$$f(\alpha,\beta)=(x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

从而

$$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\eta_i\in W_1 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=0\quad \forall(y_1,\cdots,y_n)\in$$

$K^n \iff (x_1\ \cdots\ x_n)B=0 \iff (x_1\ \cdots\ x_n)$ 为齐次线性方程组 $XB=0$ 的解.

所以 $\dim W_1=$ 齐次线性方程组 $XB=0$ 的解空间的维数 $=n-\operatorname{rank}B$.

同理可证 $\dim W_2=n-\operatorname{rank}B$, 所以 $\dim W_1=\dim W_2$.

7. 设 f 为 K^n 上的一个二元函数, 证明: f 为 K^n 上的双线性函数的充分必要条件是存在矩阵 $A\in M_n(K)$, 使

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\quad X,Y\in K^n.$$

证明: ($\Rightarrow$) 设 f 为 K^n 上双线性函数, 取 f 的度量矩阵 A, 则 $A\in M_n(K)$, 且

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n.$$

($\Leftarrow$) 如二元函数满足

$$f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY,\qquad \forall X,Y\in K^n,$$

则 f 显然是 K^n 上双线性函数.

8. 对于第 5 题中的双线性函数, 试求相应的度量矩阵.

解: (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 当 $c=0$ 时, 度量矩阵 $=0$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

9. 设 $V=K^4$, 如下定义 V 的二元函数 f:

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4,$$

其中

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad \beta=(y_1,y_2,y_3,y_4).$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(0,2,1,0),$$
$$\eta_3=(1,1,-2,1),\quad \eta_4=(0,0,1,2)$$

下的度量矩阵;

(3) 找出一个满足 $f(\alpha,\alpha)=0$的向量 $\alpha\neq 0$.

解: (1) 代入验证即可. 证略.

(2) 我们有

$$(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

而 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

因此 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(3) 取 $\alpha=(1,1,1,1)$, 显然有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

10. 设 $V=K^4$, $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,

$$f(\alpha,\beta)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3.$$

(1) 求 f 在基

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\quad \eta_2=(1,2,1,-1),$$
$$\eta_3=(-1,1,2,1),\quad \eta_4=(1,-1,1,2)$$

下的度量矩阵;

(2) 另取 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)T,$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 f 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵.

解: (1) 把 f 在自然基下的度量矩阵记为 B, 把由自然基到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵记为 A, 则

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

于是 f 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵为

$$C=A^{\mathrm{T}}BA=\begin{pmatrix}-1&4&2&-17\\-20&-1&22&-7\\-7&-17&-4&-2\\22&2&-17&-4\end{pmatrix}.$$

(2) f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的度量矩阵为

$$D=T^{\mathrm{T}}CT=\begin{pmatrix}-45&9&39&-27\\9&-45&9&-117\\-39&-9&5&3\\27&117&3&45\end{pmatrix}.$$

11. 设 f 是 n 维线性空间 V 上的双线性函数, 证明: f 非退化的充分必要条件是: 从

$$f(\alpha,\beta)=0,\quad 对所有的\alpha\in V,$$

可以推出 $\beta=0$.

证明: $(\Rightarrow)$ 令

$$W_1=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\},$$

$$W_2=\{\alpha\in V\mid f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in V\}.$$

如 f 非退化, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 $W_1=0$, 从而由习题 6 得 $W_2=0$. 因此由 $f(\alpha,\beta)=0\forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$.

$(\Leftarrow)$ 如 $f(\alpha,\beta)=0\ \ \forall\alpha\in V$ 可以推出 $\alpha=0$, 则 $W_2=0$, 同理可得 $W_1=0$, 则由定义 1.3 及 W_1 的定义知 f 非退化.

12. 设 $A\in M_m(K)$, $V=M_{m,n}(K)$. 定义 V 上的二元函数 f 如下:

$$f(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}AY),\quad X,Y\in V.$$

(1) 证明: f 是 V 上的一个双线性函数;

(2) 求 f 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵;

(3) 在什么条件下, f 是非退化的.

解: (1) 设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, $Y=(y_{ij})_{m\times n}$, $A=(a_{ij})_m$, 则

$$f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}x_{li}a_{lk}y_{ki},$$

从而知 f 是双线性的.

(2) 由于 $f(E_{st},E_{uv})=\delta_{tv}a_{su}$, 因此 f 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}E & \cdots & a_{1m}E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}E & \cdots & a_{mm}E \end{pmatrix},$$

其中 E 是 n 阶单位方阵.

(3) 由于 $|B|=|A|^n$, 所以 f 非退化 $\iff |B|\neq 0 \iff |A|\neq 0$. 即 f 非退化的充分必要条件是 A 是可逆矩阵.

13. 证明: $M_n(K)$ 上的双线性函数

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}\,AB,\quad A,B\in M_n(K)$$

是非退化的.

证明: 设 $A=(a_{ij})\in M_n(K)$. 如果

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}\,AB=0\qquad \forall B\in M_n(K)$$

则 $f(A,E_{ij})=0\ \forall i,j=1,\cdots,n$. 而

$$f(A,E_{ij})=\mathrm{Tr}\,AE_{ij}=a_{ji},$$

所以 $a_{ji}=0$ 对 $i,j=1,\cdots,n$, 即 $A=0$. 因此 f 非退化.

另证: 因为

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}\,AB=\mathrm{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{Tr}((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}EB),$$

由习题 12(3) 可知 f 非退化.

§2 对称双线性函数

1. 设 f 是线性空间 V 上的双线性函数, W 是 V 的真子空间.

证明: 对 $\xi\notin W$, 必有非零向量 $\eta\in W+L(\xi)$, 使对所有的 $\alpha\in W$, 都有 $f(\eta,\alpha)=0$.

证明: 如 $W=0$, 则结论显然成立. 现设 $W\neq 0$. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 则因 $\xi\notin W$, $\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 考察线性方程组

$$\begin{cases}x_0f(\xi,\alpha_1)+x_1f(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_1)=0\\ x_0f(\xi,\alpha_2)+x_1f(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_2)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_0f(\xi,\alpha_s)+x_1f(\alpha_1,\alpha_s)+\cdots+x_sf(\alpha_s,\alpha_s)=0\end{cases}\tag{$*$}$$

此齐次线性方程组的方程个数 s 小于未知量个数 $s+1$, 故 (*) 有非零解 $(a_0,a_1,\cdots,a_s)$. 令

$$\eta=a_0\xi+a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s,$$

则 $\eta\in W+L(\xi)$, 且 $\eta\neq 0$ (因 $\xi,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 且 $a_0,a_1,\cdots,a_s$ 不全为零). 且由 (*) 知

$$f(\eta,\alpha_i)=0,\qquad i=1,2,\cdots,s.$$

又因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W 的基, 故对任意的 $\alpha\in W$ 都有 $f(\eta,\alpha)=0$.

2. V 与 f 同上题, W 是 V 的线性子空间, 令

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W\}.$$

证明: (1) $W^{\perp}$ 是 V 的线性子空间;

(2) 如果 $W\cap W^{\perp}=\{0\}$, 则 $V=W\oplus W^{\perp}$.

证明: (1) 由 $f(0,\beta)=0\ \forall\beta\in W$, 可得 $0\in W^{\perp}$, 因此 $W^{\perp}$ 非空.

对任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in W^{\perp}$, $k\in K$, 则 $\forall\beta\in W$, 有

$$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=0,$$

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0,$$

因此 $\alpha_1+\alpha_2\in W^{\perp}$, $k\alpha_1\in W^{\perp}$, 故 $W^{\perp}$ 是 V 的线性子空间.

(2) 对任意的 $\xi\notin W$, 由上题所证, 存在 $\eta\neq 0\in W+L(\xi)$, 使得 $f(\eta,\alpha)=0\ \ \forall\alpha\in W$, 即 $\eta\in W^{\perp}$. 记 $\eta=\alpha+a\xi$, 则因 $W\cap W^{\perp}=0$, 必有 $a\neq 0$. 所以

$$\xi=a^{-1}\eta-a^{-1}\alpha\in W^{\perp}+W.$$

证得 $V\subseteq W^{\perp}+W$.

3. 求可逆矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形. 其中 A 为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

解: (1) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(4) 取 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相合, 其中 $i_1, \cdots, i_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的一个排列.

证明: 考察 n 维线性空间 V. 设 f 为 V 上的对称双线性函数, 它在基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

易知 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 仍是 V 的基, 且 f 在 $\eta_{i_1},\cdots,\eta_{i_n}$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

因此这两个矩阵相合.

5. 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表为 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明: 设 A 是秩为 r 的对称矩阵, 则存在可逆矩阵 T, 使得

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i \neq 0.$$

令

$$A_i = T^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_i & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

则 A_i 也是对称矩阵, $\operatorname{rank} A_i = 1$ 且 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$.

6. 设 A 为实矩阵, 证明: $A^{\mathrm{T}}A$ 与 A 的秩相等.

证明: 易知, $A^{\mathrm{T}}A$ 是实对称矩阵. 考察实数域上的齐次线性方程组

$$A^{\mathrm{T}}AX = 0 \tag{1}$$

与

$$AX = 0. \tag{2}$$

显然 (2) 的解都是 (1) 的解.

设 $X \in \mathbb{R}^n$ 为 (1) 的一个解. 令

$$Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则

$$Y^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX = 0,$$

从而

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0.$$

由于 y_i 均为实数, 因此 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, $Y = 0$, 即

$$AX = 0.$$

从而 (1) 的解也都是 (2) 的解. (1) 与 (2) 同解. 由齐次线性方程组解的性质知

$$\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}}A = \operatorname{rank} A.$$

7. 设 A 为正定矩阵, 证明: A^{-1} 与 A^* 都是正定矩阵.

证明: 易知 A^{-1} 与 A^* 都是实对称矩阵. 且 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$. 因 A 正定, 存在可逆实矩阵 C 使 $C^{\mathrm{T}}C = A$. 从而 $A^{-1} = C^{-\mathrm{T}}C^{-1}$ 也正定. 由 $|A| > 0$ 可知 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$ 也正定.

8. 证明任意一个方阵都可唯一表为一个对称矩阵和一个反称矩阵之和.

证明: 设 A 是一个方阵, 则 $B = \dfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ 是一个对称矩阵, $C = \dfrac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$ 是一个反称矩阵, 而且 $A = B + C$. 这就证明了分解的存在性. 再证唯一性. 如果还有分解 $A = B_1 + C_1$, 其中 B_1 是对称矩阵, C_1 是反称矩阵. 与前式相减后可得 $B - B_1 = C_1 - C$. 等式左边是对称矩阵, 右边是反称矩阵, 因而是零矩阵, 即 $B = B_1$, $C = C_1$.

9. 证明: 任意一个双线性函数都可唯一表为一个对称双线性函数和一个反称双线性函数之和.

证明: (1) 设 $f(\alpha, \beta)$ 是一个双线性函数, 易知

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$$

是对称双线性函数,

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)]$$

为反称双线性函数, 且

$$f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta)+h(\alpha,\beta).$$

(2) 又设

$$f(\alpha,\beta)=g'(\alpha,\beta)+h'(\alpha,\beta),$$

其中 $g'(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数, $h'(\alpha,\beta)$ 是反称双线性函数, 则

$$f(\beta,\alpha)=g'(\beta,\alpha)+h'(\beta,\alpha)=g'(\alpha,\beta)-h'(\alpha,\beta).$$

从而

$$g'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)]=g(\alpha,\beta),$$

$$h'(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha)]=h(\alpha,\beta).$$

10. 设 A 为实对称矩阵, 证明:

(1) 当实数 λ 充分大之后, $\lambda E+A$ 是正定的;

(2) A 半正定当且仅当对任何的 $\lambda>0$, $\lambda E+A$ 都正定.

证明: (1) 考察 $A(\lambda)=\lambda E+A$, 它的 r 阶顺序主子式

$$D_r(\lambda)=|\lambda E_r+A_r|=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r.$$

所以当 λ 充分大时, 有 $D_r(\lambda)>0$, $r=1,\cdots,n$. 从而当 λ 充分大时, $\lambda E+A$ 正定.

(2) ($\Rightarrow$) 若 A 半正定, 则对任意的 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, $X^{\mathrm{T}}AX\geq 0$. 从而对任意的 $\lambda>0$ 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0.$$

故 $\lambda E+A$ 正定.

($\Leftarrow$) 对任意的 $\lambda>0$ 及 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$, 有

$$X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}AX>0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}AX\geq 0$. 故 A 半正定.

*__11.__ 证明: 双线性函数 f 具有正交对称性的充分必要条件是 f 为对称或反称双线性函数.

证明: 充分性是显然的. 下面证必要性.

(1) 如对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则对任意的 $\alpha,\beta\in V$,

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)+f(\beta,\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha).$$

因此 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, f 是反称双线性函数.

(2) 如果存在 $\gamma\in V$ 使 $f(\gamma,\gamma)\neq 0$. 则对任意的 $\alpha\in V$, 由于

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\gamma\right)=f(\alpha,\gamma)-f(\alpha,\gamma)=0,$$

所以 $f\left(\gamma,\alpha-\frac{f(\alpha,\gamma)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=0$. 因此

$$f(\alpha,\gamma)=f(\gamma,\alpha). \tag{$*$}$$

对于任意的 $\alpha,\beta\in V$, 以下再分两种情况讨论:

(a) 如果 $f(\alpha,\gamma)\neq 0$, 则

$$f\left(\alpha,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)-f(\alpha,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}\gamma,\alpha\right)=0$, 从而

$$\begin{aligned}0&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\gamma,\alpha)\\&=f(\beta,\alpha)-\frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}f(\alpha,\gamma)\quad \text{由 (*)}\\&=f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

即 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

(b) 如果 $f(\alpha,\gamma)=0$, 则

$$f\left(\alpha+\gamma,\beta-\frac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma\right)=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0,$$

因此 $f\left(\beta-\frac{f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)}{f(\gamma,\gamma)}\gamma,\alpha+\gamma\right)=0$. 从而

$$f(\beta,\alpha)+f(\beta,\gamma)-f(\alpha,\beta)-f(\gamma,\beta)=0.$$

由 (*) 知 $f(\beta,\gamma)=f(\gamma,\beta)$, 因此 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$.

由 (a) 和 (b) 可得 f 为对称双线性函数.

*__12.__ 设 V 是复数域上的线性空间, 其维数 $n\geqslant 2$, f 是 V 上的一个对称双线性函数. 证明:

(1) V 中有非零向量 ξ, 使 $f(\xi,\xi)=0$;

(2) 当 f 是非退化时, 必有线性无关的向量 ξ,η, 满足:

$$\begin{aligned}&f(\xi,\eta)=1,\\&f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.\end{aligned}$$

证明: (1) 由于 $\dim V\geq 2$. 任取 V 的两个线性无关的向量 α,β. 如果 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则 $\xi=\alpha$ 即为所求. 现设 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$. 则 2 次方程

$$t^2f(\alpha,\alpha)+2tf(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0 \tag{$*$}$$

在复数范围内有解. 设 $t_0\in\mathbb{C}$ 是 t 的一个解. 令

$$\xi=t_0\alpha+\beta,$$

则 $\xi\neq 0$ (因 α,β 线性无关), 且

$$f(\xi,\xi)=t_0^2f(\alpha,\alpha)+2t_0f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=0.$$

从而 $\xi=t_0\alpha+\beta$ 即为所求.

(2) 由 (1) 所证, 存在 $\xi\neq 0\in V$ 使 $f(\xi,\xi)=0$. 又因 f 非退化, 故存在 $\alpha\in V$ 使 $f(\xi,\alpha)\neq 0$.

(a) 如 $f(\alpha,\alpha)=0$, 则令 $\eta=\dfrac{1}{f(\xi,\alpha)}\alpha$, 即有

$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0,\qquad f(\xi,\eta)=1.$$

(b) 如 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$, 则取

$$\eta=\frac{1}{f(\alpha,\xi)}\alpha-\frac{f(\alpha,\alpha)}{2(f(\alpha,\xi))^2}\xi,$$

直接验证可知 $f(\eta,\eta)=0$, $f(\xi,\eta)=1$, 而 ξ,η 的线性无关性是显然的. 故 ξ,η 即为所求.

*__13.__ 证明: 如果线性空间 V 上的对称双线性函数 f 能分解为两个线性函数之积:

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V,$$

则存在非零数 λ 及线性函数 g, 使

$$f(\alpha,\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

证明: 如果 $f=0$, 则结论当然成立. 现设 $f\neq 0$. 因此存在 $\alpha_0,\beta_0\in V$, 使得 $f(\alpha_0,\beta_0)\neq 0$. 定义

$$\begin{aligned} g: V &\longrightarrow K\\ \gamma &\longmapsto f(\alpha_0,\gamma)\end{aligned}$$

则 g 为 V 上线性函数, 且 $g\neq 0$. 对任意的 $\beta\in V$,

$$\begin{aligned} g(\beta)&=f(\alpha_0,\beta)=f_1(\alpha_0)f_2(\beta)\\ g(\beta)&=f(\alpha_0,\beta)=f(\beta,\alpha_0)=f_1(\beta)f_2(\alpha_0)\end{aligned}$$

显然 $f_1(\alpha_0)\neq 0$, $f_2(\alpha_0)\neq 0$ (否则 $g\neq 0$). 由此知,

$$\left.\begin{aligned} f_1(\beta)&=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\beta)\\ f_2(\beta)&=\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta)\end{aligned}\right.\qquad \forall\beta\in V.$$

令 $\lambda=\dfrac{1}{f_1(\alpha_0)f_2(\alpha_0)}$, 则

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)=\frac{1}{f_2(\alpha_0)}g(\alpha)\cdot\frac{1}{f_1(\alpha_0)}g(\beta)=\lambda g(\alpha)g(\beta).$$

***14.** 设 A 为半正定矩阵, 证明: A^* 也是半正定矩阵.

证明: 如果 $\operatorname{rank}A=n$, 则 A 是正定矩阵, 习题 7 已证明了 A^* 正定. 如果 $\operatorname{rank}A\leq n-2$, 则 $A^*=0$, 从而 A^* 半正定. 最后考虑 $\operatorname{rank}A=n-1$ 的情形. 此时 $\operatorname{rank}A^*=1$, 从而 A^* 的阶数 ≥ 2 的主子式都是 0, 而 A^* 的 1 阶主子式 $=A_{ii}$ $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的代数余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 a_{ii} 的余子式 $(i=1,\cdots,n)=A$ 的 $n-1$ 阶主子式 ≥ 0 (因 A 半正定). 所以 A^* 半正定.

***15.** 证明定理 2.12.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 半正定, 则存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm T}AT=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix},\qquad a_i\neq 0.$$

由于 A 半正定, $T^{\mathrm{T}}AT$ 也半正定, 故 $a_i > 0$. 所以 A 的正惯性指数 $p = r = \operatorname{rank} A$;

(2) ⇒ (3) 由假设, 存在可逆实矩阵 T_1, 使

$$T_1^{\mathrm{T}}AT_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i > 0.$$

令

$$T_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{A_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{A_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = T_1T_2,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) ⇒ (4) 由假设, 存在可逆实矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$S = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T,$$

则

$$A = S^{\mathrm{T}}S.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) 对任意的 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 令 $Y = SX$, 则 $Y \in \mathbb{R}^n$. 所以

$$X^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}SX = Y^{\mathrm{T}}Y \geq 0,$$

A 半正定.

(1) $\Rightarrow$ (5) 设 $B_k = A(i_1, \cdots, i_k; i_1, \cdots, i_k)$ 是 A 的一个主子式. 则对任意的

$$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

可以作一个列向量 $X \in \mathbb{R}^n$, 使得它的第 i_j 列的元素等于 x_j, 而其余元素均等于 0. 则

$$0 \leq X^{\mathrm{T}}AX = X_k^{\mathrm{T}}B_kX_k,$$

因此 B_r 是半正定的. 根据 (4), 可得半正定矩阵的行列式非负, 即 $|B_k| \geq 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1) 对于任意的正实数 $\lambda > 0$, 考察 $\lambda E + A$ 的 k 阶主子阵 $\lambda E_k + A_k$. 这个子矩阵的行列式为

$$f_k(\lambda) = |\lambda E_k + A_k| = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k.$$

则根据习题 7–3.8, $(-1)^i a_i$ 等于 $-A_k$ 的全部 i 阶主子式之和. 而 $-A_k$ 的每个 i 阶主子式等于 A_k 的相应 i 阶主子式的 $(-1)^i$ 倍. 因此 a_i 等于 A_k 的所有 i 阶主子式之和, 由假设, $a_i \geq 0$. 从而

$$f_k(\lambda) > 0 \qquad \forall \lambda > 0,\ i = 1, \cdots, k.$$

根据定理 2.11, $\lambda E + A$ $(\lambda > 0)$ 是正定矩阵.

任取 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 据正定性, λ 的一次式

$$g(\lambda) = X^{\mathrm{T}}(\lambda E + A)X = \lambda X^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}AX > 0, \qquad \forall \lambda > 0.$$

因此 $X^{\mathrm{T}}AX \geq 0$ (否则当 λ 充分小时会有 $g(\lambda) < 0$), 从而 A 半正定.

***16.** 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵称为幂幺上三角形矩阵.

(1) 设 A 是一个对称矩阵, T 为幂幺上三角形矩阵, 证明: $T^{\mathrm{T}}AT$ 与 A 的对应顺序主子式有相同的值;

(2) 如果对称矩阵的顺序主子式全不为零, 则存在一幂幺上三角形矩阵 T, 使 $T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形.

证明: (1) 设 A_r 为 A 的 r 阶顺序主子式 $(1 \leq r \leq n)$,

$$A = \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

设 T 为幂幺上三角形矩阵,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{其中} T_{11} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_r,$$

则

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & T_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & * \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}}A_rT_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

从而 $T^{\mathrm{T}}AT$ 的 r 阶顺序主子式等于 (注意到 $|T_{11}| = 1$)

$$|T_{11}^{\mathrm{T}}AT_{11}| = |T_{11}^{\mathrm{T}}||A||T_{11}| = |A_r|.$$

(2) 对 A 的阶数用归纳法. 取

$$T_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{n-1} = A(1, \cdots, n-1; 1, \cdots, n-1),$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

这是幂幺上三角形矩阵. 则

$$\begin{aligned} T_1^{\mathrm{T}}AT_1 &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ -B^{\mathrm{T}}A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B \\ B^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A_{n-1}^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $b_n = a_{nn} - B^{\mathrm{T}}A_{n-1}B$. 由于 A 的顺序主子式全不为 0, 故 A_{n-1} 的顺序主子式全不为 0, 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶幂幺上三角形矩阵 T_2 使

$$T_2^{\mathrm{T}}A_{n-1}T_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 为幂幺上三角形矩阵, 且

$$T^{\mathrm{T}} A T = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}.$$

§3　二次型

1. 用非退化线性替换化下列二次型为平方和:

(1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

(3) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(4) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

(5) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$;

(6) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_4$.

解: (1) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{5}{6}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{6}y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(2) 原式 $= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 + \left(\dfrac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = \dfrac{x_2 - x_3}{2} \\ y_3 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(3) 令

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2-y_3 \\ x_2=y_1+y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

有

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2.$$

(4) 原式 $=2(x_1-3x_2+2x_3)^2+\left(\dfrac{3x_2-x_3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3x_2+x_3}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1=x_1-3x_2+2x_3 \\ y_2=\dfrac{3x_2-x_3}{2} \\ y_3=\dfrac{3x_2+x_3}{2} \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1=y_1+3y_2-y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{3}y_2+\dfrac{1}{3}y_3 \\ x_3=-y_2+y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(5) 令

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_3-y_4 \\ x_2=\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4 \\ x_3=\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{3}{2}y_4 \\ x_4=y_4 \end{cases}$$

则有

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(6) 原式 $=x_1^2+\left(\dfrac{x_2+x_1+x_4}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x_2-x_1-x_4}{2}\right)^2$. 令

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=\dfrac{x_2+x_1+x_4}{2} \\ y_3=\dfrac{x_2-x_1-x_4}{2} \\ y_4=x_3 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_4 \\ x_4=-y_1+y_2-y_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

2. λ 取何值时, 下列二次型是正定的:

(1) $5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

(2) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$;

(3) $2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$.

解: (1) $A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&\lambda\end{pmatrix}$, 它的顺序主子式 $D_1=5>0$, $D_2=1>0$, $D_3=\lambda-2$. 所以当 $\lambda>2$ 时原二次型正定.

(2) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1=2>0$, $D_2=2-\lambda^2$, $D_3=5-3\lambda^2$.

由 $D_2>0$, 得 $|\lambda|<\sqrt{2}$;

由 $D_3>0$, 得 $|\lambda|<\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

所以当 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<\lambda<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 时原二次型正定.

(3) 二次型矩阵的顺序主子式 $D_1=2$, $D_2=4-\lambda^2$, $D_3=-\lambda^2+6\lambda-16=-(\lambda-3)^2-7<0$, 故不论 λ 取何实数都不能使此二次型正定.

3. 下列二次型是否正定或半正定:

(1) $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;　　(2) $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$;

(3) $n\sum\limits_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2$.

解: (1) 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{pmatrix}$, 它的顺序主子式

$$D_r=|A_r|=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}_r=\frac{1}{2^r}(r+1)>0,\qquad r=1,\cdots,n.$$

故原二次型正定.

(2) 原式 $f=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)^2+\frac{1}{2}x_n^2\geq 0$. 因此 $f=0 \iff x_1=0, x_1+x_2=0, x_2+x_3=0,\cdots,x_{n-1}+x_n=0, x_n=0 \iff x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. 故原二次型正定.

(3) 原式 $=(-1)\sum\limits_{i=1}^n x_i^2-2\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}x_ix_j=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}(x_i-x_j)^2\geq 0$. 取 $x_1=x_2=\cdots=x_n\neq 0$ 可使此二次型取零值. 因此原二次型半正定.

4. 设 A, B, C 为三角形的三个内角, 证明: 对任意实数 x, y, z 有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2xz\cos B+2yz\cos C.$$

证明: 考察二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2xz\cos B-2yz\cos C$.

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)\\
&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\cos A\cos B-2yz\cos C\\
&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+y^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B-2yz\sin A\sin B\\
&=(x-y\cos A-z\cos B)^2+(y\sin A-z\sin B)^2.
\end{aligned}$$

从而 f 半正定, 由此知结论成立.

5. 证明: 若 $\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型, 则

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

是负定二次型.

证明: 已知 $\begin{pmatrix} E & 0\\ -Y^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & Y\\ 0 & -Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y\end{pmatrix}$. 所以

$$\begin{aligned}
f(y_1,\cdots,y_n)&=\begin{vmatrix} A & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & Y\\ 0 & -Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y\end{vmatrix}\\
&=|A|(-Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y.
\end{aligned}$$

由 A 正定可得 A^* 正定, 于是 $-A^*$ 负定. 因此 $f(y_1,\cdots,y_n)=Y^{\mathrm{T}}(-A^*)Y$ 是负定二次型.

*6. 设有实系数二次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}2b_ix_i+c,\qquad a_{ij}=a_{ji}.$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & c\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 当 A 负定时, f 有最大值, 且 $f_{\max}=\dfrac{|D|}{|A|}$;

(2) 设 A 负定, 试确定当 $x_1,\cdots,x_n$ 为何值时, f 取得最大值.

解: (1) 取

$$T=\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

令

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix},\tag{$*$}$$

易知 $y_{n+1}=1$. 则

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_n)&=(x_1\ \cdots\ x_n\ 1)D\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}\\ &=(y_1\ \cdots\ y_n\ 1)T^{\mathrm{T}}DT\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= (y_1 \ \cdots \ y_n \ 1)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= Y^{\mathrm{T}}AY + d.$$

由于 A 负定, 故对任意的 $Y \in \mathbb{R}^n$ 有 $Y^{\mathrm{T}}AY \leq 0$, 所以 $f \leq d$. 可见 f 有极大值 d, 且当 $Y = 0$ 时 f 取极大值. 这里

$$d = \frac{|A|d}{|A|} = \frac{|T^{\mathrm{T}}DT|}{|A|} = \frac{|D|}{|A|}.$$

(2) 由 (*),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $X = Y - A^{-1}B$. 当 $Y = 0$ 时 $X = -A^{-1}B$, 即当

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

时, f 取最大值.

7. 某工厂生产 A 种产品 x (百) 个和 B 种产品 y (百) 个的总成本函数为:

$$C(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 100\,(\text{万元}).$$

甲乙两种产品的需求函数为:

$$x = 26 - p_A, \quad y = 10 - \frac{1}{4}p_B,$$

其中 p_A, p_B 为产品相应的售价 (万元/百个). 求利润最大时产品的数量和利润.

解: 据题意, 利润函数为

$$\begin{aligned} p(x, y) &= xp_a + yp_b - C(x, y) \\ &= x(26 - x) + y(40 - 4y) - C(x, y) \end{aligned}$$

$$= -2x^2 - 2xy - 5y^2 + 26x + 40y - 100.$$

本题就是求二次函数的最大值. 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 13 \\ -1 & -5 & 20 \\ 13 & 20 & -100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

这里 A 是负定矩阵. 根据习题 7, 当

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -A^{-1}B = -A^{-1}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

时, 利润最大, 且最大利润为

$$p_{\max} = \frac{|D|}{|A|} = 25 \text{ 万元}.$$

故当两种产品分别售出 500 个与 300 个时, 可获最大利润 25 万元.

§4 对称变换及其典范形

1. 求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角形, 设 A 为下列矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&-2\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

(3) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

(4) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$.

(5) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$.

(6) $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 设 A 为一个 n 阶实矩阵, 且 $|A|\neq 0$. 证明: A 可分解成

$$A=QT,$$

其中 Q 是正交矩阵, T 是上三角形矩阵.

证明: 取 n 维欧几里得空间 V, 设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是它的一个规范正交基. 令

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A \tag{$*$}$$

由于 $|A|\neq 0$, A 可逆, 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基. 应用格拉姆–施密特正交化方法, 可得 V 的一个规范正交基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. 令

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T,$$

由第六章定理 3.4 的证明可知, T 为上三角形矩阵. 令

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q,$$

则 Q 为正交矩阵. 且

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T=(\eta_1,\cdots,\eta_n)QT,$$

与 (*) 比较, 得 $A=QT$.

3. 设 A 为一个 n 阶正定矩阵, 证明: 存在上三角形矩阵 T, 使

$$A=T^{\mathrm{T}}T.$$

证明: 由 A 正定可知存在可逆实矩阵 B 使得 $A=B^{\mathrm{T}}B$. 由上题, 存在正交矩阵 Q 与上三角形矩阵 T, 使得

$$B=QT.$$

从而

$$A=B^{\mathrm{T}}B=T^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QT=T^{\mathrm{T}}T.$$

4. 设 A 为实对称矩阵, 证明: A 正定 (半正定) 的充分必要条件是 A 的特征值全大于 (大于等于) 零.

证明: 存在正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 于是 A 正定 (半正定) $\iff$ $T^{\mathrm{T}}AT$ 正定 (半正定) $\iff$ $\lambda_i>0$ $(\lambda_i\geq 0)$, $i=1,\cdots,n$.

5. 证明: 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式.

证明: 必要性显然. 下证充分性. 设实对称矩阵 A,B 有相同的特征多项式, 从而它们有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 于是存在正交矩阵 T 与 Q, 使得

$$T^{-1}AT=T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}BQ=Q^{\mathrm{T}}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

显然 A 与 B 相似.

6. 设 A 为 n 阶实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为三角形矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是实数.

证明: $(\Rightarrow)$ 设有正交矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 恰为 A 的 n 个特征值. 由于 A,T 均为实矩阵, $T^{-1}AT$ 也是实矩阵, 故特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是实数.

$(\Leftarrow)$ 对 n 用归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 现在假设结论对 $n-1$ 阶满足条件的实矩阵成立. 考察 n 阶实矩阵 A.

设 V 为 n 维欧几里得空间, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的规范正交基. 令 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$, 使得

$$(\mathscr{A}\eta_1,\cdots,\mathscr{A}\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A.$$

设 $\lambda_1\in\mathbb{R}$ 为 $\mathscr{A}$ 的任意特征值, 则 λ_1 也是 $\mathscr{A}$ 的特征值. 令 α_1 为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量, 则 α_1 可扩充为 V 的规范正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 令

$$(\mathscr{A}\alpha_1,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & \\ \vdots & A_1\\ 0 & \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)T_1,$$

则 T_1 为正交矩阵, 且

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}=T_1^{-1}AT_1.$$

易知 A_1 为 $n-1$ 阶实矩阵, 且其特征值全是 A 的特征值, 从而也都是实数. 由归纳假设, 存在正交矩阵 T_2, 使

$$T_2^{-1}A_1T_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则 T 为正交矩阵, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由归纳法原理知结论成立.

7. 证明: 特征值全是实数的正交阵必是对称矩阵.

证明: 设 A 为特征值全是实数的正交阵, 由上题, 存在正交矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT = T^{-1}AT = D$$

为上三角形阵. 又因为 D 是正交阵, 故 $D^{-1} = D^{\mathrm{T}}$ 也是上三角形矩阵, 但它又是下三角形阵, 故 D 是对角阵. 从而 D 为对称矩阵. 故

$$A = TDT^{\mathrm{T}}$$

也为对称矩阵.

***8.** 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且 B 正定, 证明: 存在可逆矩阵 T, 使

$$T^{\mathrm{T}}AT \text{ 与} T^{\mathrm{T}}BT$$

同时为对角形.

证明: 由于 B 正定, 因此存在可逆矩阵 S 使得

$$S^{\mathrm{T}}BS = E.$$

而 $S^{\mathrm{T}}AS$ 仍为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q 使 $D = Q^{\mathrm{T}}(S^{\mathrm{T}}AS)Q$ 为对角阵. 令 $T = SQ$, 则 T 可逆, 且

$$T^{\mathrm{T}}AT = D, \qquad T^{\mathrm{T}}BT = E,$$

均为对角阵.

***9.** 设 A 为正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵 B, 使 $B^2 = A$.

证明: 存在正交阵 T, 使

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T.$$

因为 A 正定, 故 $\lambda_i > 0$. 令

$$B = T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} T,$$

则 B 正定, 且

$$B^2 = A.$$

*10. 设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 都是 n 阶正定 (半正定) 矩阵, 令 $C = (a_{ij}b_{ij})$, 证明: C 也是正定 (半正定) 矩阵.

证明: 存在实矩阵 P, 使

$$P^{\mathrm{T}}P = B.$$

记 $P = (p_{ij})$, 则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}.$$

于是对任意的 $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}CX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\right)x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)\right). \end{aligned}$$

由于 A 正定 (半正定), 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j) \geq 0,$$

从而 $X^{\mathrm{T}}CX \geq 0$, 故 C 半正定. 又若 A 与 B 皆正定, 则 P 可逆. 令 $X^{\mathrm{T}}CX \geq 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j) = 0,$$

而 A 正定, 故

$$p_{k1}x_1 = p_{k2}x_2 = \cdots = p_{kn}x_n = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

又因 P 可逆, P 的任何一列上的元素不可能全为零. 若

$$p_{i_j j} \neq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $x_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 故由 $X^{\mathrm{T}}CX = 0$ 可推出 $X = 0$, 从而 C 正定.

*§5　反称双线性函数

1. 证明: 实反称矩阵的特征值全是零或纯虚数.

证明: 设 A 为实反称矩阵, λ 是 A 的一个特征值. 易知 $-\lambda^2$ 是 $-A^2$ 的一个特征值. 而 $-A^2 = A^{\mathrm{T}}A$, 故 $-A^2$ 半正定, 可知 $-\lambda^2 \leq 0$ (习题 9–4.4), 从而 λ 为零或纯虚数.

2. 证明: 如果 A 是一个实反称矩阵, 则 $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ 是一个正交矩阵.

证明: 由上题知, $E + A$ 可逆, 从而

$$\begin{aligned}
B^{\mathrm{T}}B &= [(E-A)(E+A)^{-1}]^{\mathrm{T}}[(E-A)(E+A)^{-1}] \\
&= (E-A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1} \\
&= (E-A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1} = E,
\end{aligned}$$

故 B 是正交矩阵.

***3.** 设 f 是 n 维欧几里得空间 V 的非零反称双线性函数. 证明: 存在非零向量 $\alpha, \beta \in V$ 及 $a > 0$, 使得对任意的 $\xi \in V$ 有

$$f(\alpha, \xi) = a(\beta, \xi), \quad f(\beta, \xi) = -a(\alpha, \xi).$$

证明: 设 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 V 的一个规范正交基, f 在此基下的度量矩阵为 A, 则 A 为实反称矩阵, 且对任意的 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\eta_i$, $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\eta_i$, 有

$$f(\xi, \eta) = X^{\mathrm{T}}AY.$$

因 A 是实反称矩阵, 故 $A^{\mathrm{T}}A$ 为半正定矩阵. 而 $f \neq 0$, 故 $A \neq 0$, 从而 $A^{\mathrm{T}}A \neq 0$, 所以 $A^{\mathrm{T}}A$ 有非零特征值. 任取 $A^{\mathrm{T}}A$ 的一个非零特征值 λ, 则 $\lambda > 0$. 令 $a = \sqrt{\lambda}$. 设

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 设

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\eta_i,$$

则 $\alpha \neq 0$.下证 α, β, a 满足要求.

对任意的 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\eta_i$, 有

$$\begin{aligned} f(\alpha,\xi) &= (a_1\ \cdots\ a_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\left[A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= a(b_1\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a(\beta,\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\beta,\xi) &= (b_1\ \cdots\ b_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(a_1\ \cdots\ a_n)A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{a}\left[A^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -a(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= -a(\alpha,\xi), \end{aligned}$$

又 $f(\beta,\alpha)=-a(\alpha,\alpha)\neq 0$, 所以 $\beta\neq 0$.

*4. 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的反称双线性函数.

证明: 存在规范正交基$\eta_1,\xi_1,\eta_2,\xi_2,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$, 使 f 关于这个基的度量矩阵具有如下分块矩阵的形式:

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right),\quad a_i>0.$$

证明: 对 V 的维数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $f=0$, 结论显然成立. 现假设结论对 $m<n$ 都成立, 证明当 $\dim V=n$ 也成立.

如 $f=0$, 结论显然成立. 如 $f\neq 0$, 由习题 3, 存在非零向量 η_1,ξ_1 及数 $a_1>0$, 使对任意的 $\xi\in V$ 有

$$f(\eta_1,\xi)=a_1(\xi_1,\xi),\qquad f(\xi_1,\xi)=-a_1(\eta_1,\xi).$$

由于 η_1,ξ_1 的任一倍数 $k\eta_1,k\xi_1$ 也满足上述等式, 故可设 η_1,ξ_1 都是 V 中单位向量.

又, $0=f(\xi_1,\xi_1)=-a(\eta_1,\xi_1)$, 故 η_1,ξ_1 正交, 从而 η_1,ξ_1 为 V 的规范正交向量组.

令

$$L=L(\eta_1,\xi_1),\qquad W=L^{\perp},$$

则 $V=L\perp W$, $\dim L=2$, $\dim W=n-2$. f 可看作是 W 上的反称双线性函数. 由归纳假设, 存在 W 的规范正交基

$$\eta_2,\xi_2,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$$

及 $a_i>0$, $i=2,\cdots,r$, 使 $f|_W$ 关于这个基的度量矩阵为分块对角阵:

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_2\\ -a_2 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right).$$

易知 $\eta_1,\xi_1,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$ 构成 V 的规范正交基. 由于当 $i\geq 2$ 时有

$$f(\eta_1,\xi_i)=a(\xi_1,\xi_i)=0,\qquad f(\eta_1,\eta_i)=a(\xi_1,\eta_i)=0,$$

$$f(\xi_1,\xi_i)=-a(\eta_1,\xi_i)=0,\qquad f(\xi_1,\eta_i)=-a(\eta_1,\eta_i)=0,$$

因而 f 在基 $\eta_1,\xi_1,\cdots,\eta_r,\xi_r,\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-2r}$ 下的度量矩阵为

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & a_1\\ -a_1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & a_r\\ -a_r & 0\end{pmatrix},0,\cdots,0\right).$$

从而由数学归纳法原理知结论成立.

*§ 6　酉空间

1. 设酉矩阵

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4+3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & -6-2\mathrm{i}\\ -4\mathrm{i} & 4-3\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i}\\ 6+2\mathrm{i} & -2-6\mathrm{i} & 1\end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B=U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\mathrm{i}$, $\lambda_3=-\mathrm{i}$. 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\alpha_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\alpha_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

令

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B=U^{-1}AU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

2. 设埃尔米特矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

求对角矩阵 B 及酉矩阵 U, 使

$$B = U^{-1}AU.$$

解: A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. 属于特征值 2 的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

属于特征值 4 的特征向量为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

它们互相正交. 单位化后得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 证明: 上三角形的酉矩阵必为对角矩阵, 而且对角元的模为 1.

证明: 设 A 是上三角形的酉矩阵, 则有 $A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$. 而上三角形矩阵的逆矩阵仍是上三角形矩阵, 但它的转置矩阵则是下三角形矩阵. 因此 A 必须是对角矩阵. 设 $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$, 由 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = \mathrm{diag}(|a_1|^2, \cdots, |a_n|^2) = E$ 可得 $|a_i| = 1$, $i = 1, \cdots, n$.

4. 证明: 酉矩阵的特征值的模为 1.

证明: 设 λ_0 为酉矩阵 A 任一特征值,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

为 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量. 则

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha.$$

从而

$$\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}(\overline{A}^{\mathrm{T}}A)\alpha = (\overline{A\alpha})^{\mathrm{T}}(A\alpha) = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_0\alpha = \overline{\lambda_0}\lambda_0\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha,$$

由于 $\alpha \neq 0$, $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha > 0$, 故 $\overline{\lambda_0}\lambda_0 = 1$.

5. 设 A 为一个可逆复矩阵, 证明: A 可分解为

$$A = UT,$$

其中, U 是酉矩阵, T 是一个对角线上元素全为正实数的上三角形矩阵. 并证明这个分解是唯一的.

证明: (a) 首先用归纳法证明:

如 B 为一 $n \times r$ 列满秩矩阵, 则存在对角线上元素全为正的 r 阶上三角形阵 T, 使 $C = BT$ 的列向量组为 $\mathbb{C}^n$ 中单位正交向量组.

对 r 用归纳法. 当 $r = 1$ 时结论显然成立. 现假定结论对列数 $< r$ 的列满秩矩阵成立. 考察 $n \times r$ 列满秩矩阵.

设 B 的列为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关. 令 $a_1 = \dfrac{1}{|\alpha_1|}$, $a_{1i} = -\dfrac{(\alpha_i, \alpha_1)}{|\alpha_1|}$, $i = 2, \cdots, r$,

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = BT_1 = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r),$$

则 C_1 仍为列满秩, 且

$$|\beta_1| = 1, \qquad (\beta_1, \beta_i) = 0, \quad i = 2, \cdots, r.$$

令

$$B_1 = (\beta_2, \cdots, \beta_r).$$

则 B_1 为 $n \times (r-1)$ 的列满秩矩阵, 由归纳法假设, 存在 $r-1$ 阶上三角形矩阵

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix}, \qquad a_i > 0, \quad i \geq 2,$$

使 B_1T_2 的列向量为单位正交向量组. 令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

则

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

为上三角形的, 且 $a_i > 0$. 令 $C = BT = (\beta_1 \mid B_1T_1)$, 则 C 的各列都是单位向量, 又因 β_1 与 B_1 的各列正交, 而 B_1T 的各列为 B_1 的线性组合, 故 C 的列向量组为单位正交向量组.

(b) 设 A 为 n 阶可逆复矩阵, 则由 (a) 知, 存在对角线上元素全为正的上三角形矩阵 S, 使 AS 的列向量组为单位正交向量组. 从而

$$U = AS$$

为酉矩阵. 令 $T = S^{-1}$, 则 T 为上三角形矩阵, 又因 S 的对角线上元素全正, 故 T 的对角线上元素全正, 且

$$A = UT.$$

(c) 设另有酉矩阵 U_1 及对角线上元素全正的上三角形矩阵 T_1, 使 $A = U_1T_1$. 则

$$UT = U_1T_1,$$

从而

$$TT_1^{-1} = U^{-1}U_1.$$

上式左边是上三角形阵, 右边为正交阵, 从而 $U^{-1}U_1$ 为对角阵. 又因此矩阵的对角线上元素全正, 故 $U^{-1}U_1=E$. 于是

$$U=U_1,\qquad T=T_1.$$

唯一性得证.

6. 证明: 对任一复矩阵 A, 必存在酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为上三角形矩阵.

证明: 对 A 的阶数 n 用归纳法. $n=1$ 时结论显然成立. 现假定结论对阶数小于 n 的矩阵成立. 考察 n 阶矩阵 A.

设 λ_1 为 A 的任一特征值, $\alpha_1\in\mathbb{C}^n$ 为 A 的属于特征值 λ_1 的单位特征向量. 将 α_1 扩充为酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 令

$$U_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

则 U_1 为酉矩阵, 且

$$AU_1=U_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

则

$$U_1^{-1}AU_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶酉矩阵 U_2, 使

$$U_2^{-1}A_1U_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令

$$U=U_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix},$$

则 U 为酉矩阵, 且

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

7. 证明: 对任一酉矩阵 A, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角阵.

证明: 由上题, 存在酉矩阵 U 使

$$U^{-1}AU = B$$

为上三角形矩阵. 因上式左边为酉矩阵, 故 B 为酉矩阵. 于是 B 既是酉矩阵又是上三角形矩阵, 必为对角阵.

8. 证明: 埃尔米特矩阵的特征值全是实数, 且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证明: (a) 设 λ 为埃尔米特矩阵 H 的一个特征值, $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 为 H 的属于特征值 λ 的特征向量. 则

$$\lambda\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}A\alpha = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha = \overline{\lambda}\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha.$$

由于 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha > 0$, 所以 $\lambda = \overline{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) 设 α, β 分别为 H 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则

$$\lambda_2\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}A\beta = \overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}\beta = \overline{A\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = \lambda_1\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta.$$

(注意: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$) 于是 $(\lambda_1 - \lambda_2)\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = 0$. 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\overline{\alpha}^{\mathrm{T}}\beta = 0$, 即 $\alpha \perp \beta$.

9. 证明: 对任一埃尔米特矩阵 H, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}HU$ 为对角形.

证明: 由习题 6, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}HU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\overline{T}^{\mathrm{T}} = \overline{(U^{-1}HU)}^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}}HU}^{\mathrm{T}} = \overline{U}^{\mathrm{T}}HU = U^{-1}HU = T.$$

因此 T 是对角阵.

***10.** 设 A 为复矩阵, 如果 $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = A\overline{A}^{\mathrm{T}}$, 则称 A 为规范方阵. 证明: 对任一规范方阵, 必有酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU$ 为对角形.

证明: 由习题 6, 存在酉矩阵 U, 使 $T = U^{-1}AU$ 是上三角形矩阵. 又

$$\begin{aligned}\overline{T}^{\mathrm{T}}T &= \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} \cdot U^{-1}AU = \overline{\overline{U}^{\mathrm{T}}AU}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{U}^{\mathrm{T}}AU \\ &= \overline{U}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}AU = \overline{U}^{\mathrm{T}}A\overline{A}^{\mathrm{T}}U \\ &= U^{-1}AU \cdot \overline{(U^{-1}AU)}^{\mathrm{T}} = T\overline{T}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

因此 T 也是规范方阵. 由矩阵的乘法容易证明: 上三角形的规范方阵必为对角阵, 因此结论成立.

*§7 对偶空间

1. 在 K^3 中, 求基 $(1,0,2)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ 的对偶基.

解: 设 K^3 的自然基为 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$, f_1,f_2,f_3 为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的对偶基, g_1,g_2,g_3 为 $\alpha_1=(1,0,2)$, $\alpha_2=(1,2,1)$, $\alpha_3=(0,2,1)$ 的对偶基, 令 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

由命题 7.1 知,

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)A^{-\mathrm{T}},$$

这里

$$A^{-\mathrm{T}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&-4\\-1&1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}.$$

因此对任意的 $\alpha=(x,y,z)\in K^3$, 有

$$\begin{aligned}g_1(x,y,z)&=\frac{1}{4}(-f_2+2f_3)(x,y,z)=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z,\\g_2(x,y,z)&=\frac{1}{4}(4f_1+f_2-2f_3)(x,y,z)=x+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z,\\g_3(x,y,z)&=\frac{1}{4}(-4f_1+f_2+2f_3)(x,y,z)=-x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z.\end{aligned}$$

2. 设 η_1,η_2,η_3 是线性空间 V 的一个基, f_1,f_2,f_3 是它的对偶基,

$$\alpha_1=\eta_1+2\eta_2+3\eta_2,\ \alpha_2=\eta_1+\eta_2-\eta_3,\ \alpha_3=\eta_1+\eta_2.$$

试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个基并求其对偶基 (用 f_1,f_2,f_3 表出).

解: 设

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A,$$

则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&-1&0\end{pmatrix}.$$

易知 A 可逆, 且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&3&-1\\5&-4&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一个基. 设 f_1', f_2', f_3' 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的对偶基, 令

$$(f_1', f_2', f_3') = (f_1, f_2, f_3)S,$$

则由命题 7.1 得

$$S = A^{-\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f_1', f_2', f_3') = (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1, \cdots, f_s$ 是 V 的 s 个线性函数. 集合

$$W = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0, i = 1, \cdots, s\}.$$

证明: (1) W 是 V 的一个线性子空间 (称为线性函数 $f_1, \cdots, f_s$ 的零化子空间);

(2) V 的任意线性子空间都是某些线性函数的零化子空间.

证明: (1) 由 $f_i(0) = 0$, $i = 1, \cdots, s$, 得 $0 \in W$, W 非空. 设 $\alpha, \beta \in W$, $k \in K$, 则对 $i = 1, \cdots, s$,

$$f_i(\alpha + \beta) = f_i(\alpha) + f_i(\beta) = 0,$$

$$f_i(k\alpha) = kf_i(\alpha) = 0,$$

所以 $\alpha + \beta \in W$, $k\alpha \in W$, W 是 V 的线性子空间.

(2) 设 W 为 V 的一个线性子空间. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的基, 将它扩充为 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 对任意的

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + x_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + x_n\alpha_n,$$

定义

$$f_1(\alpha) = x_{r+1}, f_2(\alpha) = x_{r+2}, \cdots f_{n-r}(\alpha) = x_{r+n},$$

则易知 $f_1, \cdots, f_{n-r}$ 都是 V 的线性函数. 显然对任意的 $\alpha \in W$ 有 $f_i(\alpha) = 0$, $i = 1, \cdots, n-r$. 又若 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$ 满足

$$f_i(\alpha) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n-r,$$

则有 $x_{r+1}=\cdots=x_n=0$, 从而

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r\in W.$$

因此 W 是 $f_1,\cdots,f_{n-r}$ 的零化子空间.

4. 设 f 为 n 维线性空间 V 上的非零线性函数, 证明: 存在 V 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$, 使

$$\forall\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\eta_i,\ \text{都有} f(\alpha)=x_1.$$

证明: 由于 f 非零, 故存在 $\gamma\in V$ 使得

$$f(\gamma)=c\neq 0\in K.$$

令 $\alpha=\dfrac{\gamma}{c}$, 则 $\alpha\neq 0$, 且 $f(\alpha)=1$. 将 α 扩充为 V 的基 $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 令

$\eta_1=\alpha_1,\eta_2=\alpha_2-f(\alpha_2)\alpha_1,\cdots,\eta_i=\alpha_i-f(\alpha_i)\alpha_1,\cdots,\eta_n=\alpha_n-f(\alpha_n)\alpha_1,$

则 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的基, 且

$$f(\eta_1)=1,\quad f(\eta_i)=0,\quad i=2,\cdots,n.$$

从而对任意的 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\eta_i$, 有

$$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}x_if(\eta_i)=x_1.$$

5. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 V 的基. $f_1,\cdots,f_n$ 为 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的对偶基.

(1) 证明: 对 V 的任一线性函数 f, $f\mathscr{A}$ 仍是 V 的线性函数;

(2) 定义 V^* 到自身的映射 $\mathscr{A}^*$ 为:

$$\mathscr{A}^*:f\longmapsto f\mathscr{A}$$

证明: $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换;

(3) 如 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是 A, 试求 $\mathscr{A}^*$ 在基 $f_1,\cdots,f_n$ 下的矩阵.

证明: (1) 显然 $f\mathscr{A}$ 是 V 到 K 的映射. 对任意的 $\alpha,\beta\in V$, $k\in K$, 有

$$(f\mathscr{A})(\alpha+\beta)=f(\mathscr{A}(\alpha+\beta))=f(\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta)=f(\mathscr{A}\alpha)+f(\mathscr{A}\beta)$$

$$= (f\mathscr{A})(\alpha) + (f\mathscr{A})(\beta),$$

$$(f\mathscr{A})(k\alpha) = f(\mathscr{A}(k\alpha)) = f(k\mathscr{A}\alpha) = kf(\mathscr{A}\alpha) = k(f\mathscr{A})(\alpha),$$

所以 $f\mathscr{A}$ 是 V 上的线性函数.

(2) 由 (1) 知, $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的一个变换. 对任意的 $f, g \in V^*$, $k \in K$, $\alpha \in V$, 有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*(f+g))(\alpha) &= (f+g)(\mathscr{A}\alpha) = f(\mathscr{A}\alpha) + g(\mathscr{A}\alpha) \\ &= (f\mathscr{A})(\alpha) + (g\mathscr{A})(\alpha) = (\mathscr{A}^*f)(\alpha) + (\mathscr{A}^*g)(\alpha),\end{aligned}$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(f+g) = \mathscr{A}^*f + \mathscr{A}^*g.$$

又由

$$(\mathscr{A}^*(kf))(\alpha) = (kf)(\mathscr{A}\alpha) = k(f\mathscr{A})(\alpha) = k(\mathscr{A}^*f)(\alpha),$$

由 α 的任意性可得

$$\mathscr{A}^*(kf) = k\mathscr{A}^*f.$$

因此 $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 的线性变换.

(3) 由已知,

$$(\mathscr{A}\eta_1, \cdots, \mathscr{A}\eta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)A,$$

设

$$(\mathscr{A}^*f_1, \cdots, \mathscr{A}^*f_n) = (f_1, \cdots, f_n)S,$$

则

$$\mathscr{A}^*f_j = \sum_{k=1}^n s_{kj}f_k, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

从而

$$(\mathscr{A}^*f_j)(\eta_i) = \sum_{k=1}^n s_{kj}f_k(\eta_i) = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*f_j)(\eta_i) &= f_j(\mathscr{A}\eta_i) = f_j\left(\sum_{l=1}^n a_{lj}\eta_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{lj}f_j(\eta_l) = a_{ji}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.\end{aligned}$$

于是

$$a_{ji} = s_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

由此得

$$S = A^{\mathrm{T}}.$$

6. 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, $f_1, \cdots, f_s$ 是 V 的 s 个非零线性函数, 证明: 存在向量 $\alpha \in V$, 使

$$f_i(\alpha) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 设

$$W_i = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

则 W_i 是 V 的子空间, 又因为 $f_i \neq 0$, $W_i \neq V$. 令

$$W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s,$$

则 W 不是 V 的线性子空间 (第三章习题 3–4.5). 因此 $W \neq V$. 又 $W \subset V$, 必有 $\alpha \in V$, $\alpha \notin W$, 于是对所有的 $i = 1, \cdots, s$ 有 $\alpha \notin W_i$, 即 $f_i(\alpha) \neq 0$.

7. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性空间 V 中的 s 个非零向量, 证明: 存在 V 上的线性函数 f, 使

$$f(\alpha_i) \neq 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 考察对偶空间 V^*, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可看作 V^* 上的 s 个线性函数, 故由上题, 存在 $f \in V^*$, 使

$$\alpha_i^*(f) = f(\alpha_i) \neq 0, \qquad i = 1, \cdots, s.$$

第十章　坐标变换与点变换

§1　平面坐标变换

1. 两直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 与 $[O;\eta_1',\eta_2']$ 有公共原点. 在原坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 下, 新坐标系的基向量为:

$$\eta_1'=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \eta_2'=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

(1) 写出坐标变换公式;

(2) 写出原坐标系中的基向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在新坐标系下的坐标分量;

(3) 已知向量 $\vec{v}$ 在 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 的分量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, 求它在新坐标系 $[O;\eta_1',\eta_2']$ 下的分量.

解: (1) 因为 $(\eta_1',\eta_2')=(\eta_1,\eta_2)T$, 其中 $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 所以坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

(2) 由 (1) 知: $(\eta_1,\eta_2)=(\eta_1',\eta_2')T^{-1}$, 其中 $T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 所

以$\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1'-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_2'$, $\eta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1'+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_2'$, 即: $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

(3) 从$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$可推知$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. 现在 $\overrightarrow{v}=\eta_1-\eta_2$, 所以

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

这就是 $\overrightarrow{v}$ 在新坐标系下的分量.

2. 在平面直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中, 已知新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 的原点 O' 的坐标为 $(3,2)$, 点 $M(5,3)$ 在新坐标系的 x' 轴上, 且点 M 的新坐标 $x'>0$. 试用矩阵形式写出从 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 到 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 的坐标变换公式.

解: 因为 $X_0=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, 且由题意知 $\overrightarrow{O'M}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 故 $\overrightarrow{O'M}$ 的单位向量是 $\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 即 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 $T=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$. 因此变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{5}}{5}&3\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{5}&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

3. 设二次曲线 C 在直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中的方程是:

$$x^2-xy+y^2+2x-4y+1=0.$$

(1) 取新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$, 使 O' 在旧坐标系下的坐标为 $(0,2)$, 且有

$$\begin{cases}\eta_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_2\\ \eta_2' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_2,\end{cases}$$

试用矩阵形式写出坐标变换公式;

(2) 求曲线 C 在新坐标系下的方程.

解: (1) 据题设, $X_0 = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 且行列式 $|T| = 1$. 所以坐标变换公式为:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

(2) C 的方程为 $\dfrac{x'^2}{6} + \dfrac{y'^2}{2} = 1$.

4. 设有平面直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$, 若新的直角坐标系 $[O';\eta_1',\eta_2']$ 满足: x' 轴和 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x-2y+2=0$ 和 $2x+y+4=0$.

(1) 求从旧坐标系到新坐标系的变换公式;

(2) 求直线 $x-y+2=0$ 在新坐标系中的方程;

(3) 求直线 $3x'+y'+1=0$ 在旧坐标系中的方程.

解: (1) 因 O' 点的坐标 (x_0,y_0) 是方程组 $\begin{cases}x-2y+2=0\\2x+y+4=0\end{cases}$ 的解, 即 $X_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

显然 $x-2y+2=0$ 的方向系数为 $2:1$, $2x+y+4=0$ 的方向系数为 $-1:2$. 所以 $\eta_1' = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\eta_1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\eta_2$, $\eta_2' = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\eta_1 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\eta_2$, 即$(\eta_1',\eta_2') = (\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$. 由于 $\begin{vmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{vmatrix} = 1$, η_1',η_2' 构成右手系. 所以坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{\sqrt{5}}{5} & -2 \\ \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $x-y+2=0$ 在新坐标系中的方程为:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-\frac{\sqrt{5}}{5}y'-2\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x'+\frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)+2=0,$$

即 $x'-3y'=0$.

(3) 由 (1) 的坐标变换公式可以得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 $3x'+y'+1=0$ 在旧坐标系下的方程为:

$$3\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}y+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+1=0,$$

即 $5x+5y+10+\sqrt{5}=0$.

§2　二次曲线方程的化简

1. 化简二次曲线的方程

$$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+12=0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=7>0$, $I_2=|A|=6>0$, $I_3=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -12 \\ 2 & 2 & -6 \\ -12 & -6 & 12 \end{vmatrix}=-108<0$. 此曲线是椭圆. A 的特征值是方程 $\lambda^2-7\lambda+6=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$. 故简化后的方程为 $6x'^2+y'^2-\dfrac{108}{6}=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{3}+\dfrac{y'^2}{18}=1$.

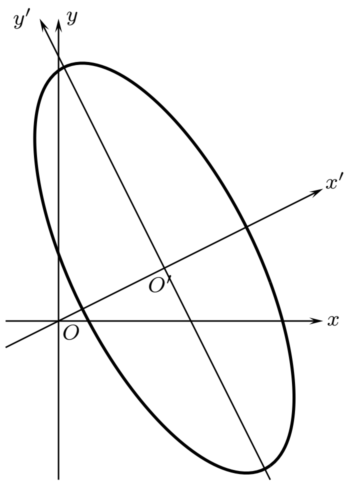
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 6 与 1 的单位特征向量分别是 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以 $T = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, 且 $|T| = 1$. 再求曲线的中心 (即新坐标系的原点) $O'(x_0, y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 - 12 = 0 \\ 2x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

得 $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 2 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x - 2y = 0$ (即 $y' = 0$) 与 $2x + y - 5 = 0$ (即 $x' = 0$).



第 1 题图

2. 化简二次曲线方程

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=-1<0$, $I_2=|A|=-6<0$, $I_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & -2 & 2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}=6>0$. 此曲线是双曲线. A 的特征值是方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. 故简化后的方程为 $2x'^2-3y'^2-1=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{y'^2}{\frac{1}{3}}=1$.

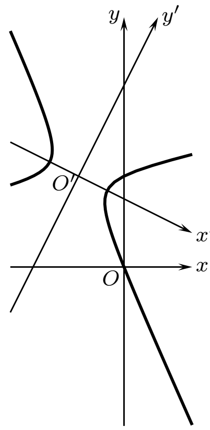
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 2 与 -3 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$. 再求曲线的中心 (即新坐标系的原点) $O'(x_0,y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases}x_0-2y_0+5=0\\ -2x_0-2y_0+2=0\end{cases}$$

得 $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & -1\\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x+2y-3=0$ 与 $2x-y+4=0$.



第 2 题图

3. 化简二次曲线方程

$$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0,$$

并作出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -5\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=2>0$, $I_2=|A|=-\dfrac{5}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{3}{2} & 5\\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -5\\ 5 & -5 & 21\end{vmatrix}=-\dfrac{5}{4}<0$. 此曲线是双曲线. A 的特征值是方程 $\lambda^2-2\lambda-\dfrac{5}{4}=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=\dfrac{5}{2}$, $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. 故简化后的方程为 $\dfrac{5}{2}x'^2-\dfrac{1}{2}y'^2+1=0$, 即 $\dfrac{y'^2}{2}-\dfrac{x'^2}{\dfrac{2}{5}}=1$.

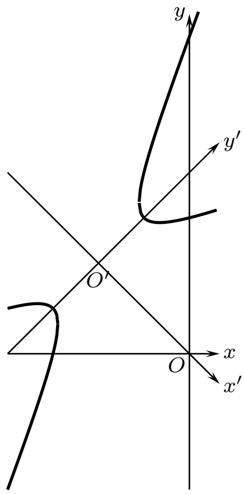
为画出其大致图形, 需要求出坐标变换公式. 对应于特征根 $\dfrac{5}{2}$ 与 $-\dfrac{1}{2}$ 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$. 再求曲线的中心 (即新坐标系的原点) $O'(x_0,y_0)$, 解线性方程组

$$\begin{cases}x_0-\dfrac{3}{2}y_0+5=0\\ -\dfrac{3}{2}x_0+y_0-5=0\end{cases}$$

得 $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 因此坐标变换公式是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求出新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $x + y = 0$ 与 $x - y + 4 = 0$.



第 3 题图

4. 化简二次曲线方程

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 8y + 3 = 0,$$

并画出它的图形以及新的坐标轴.

解: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, 因此 $I_1 = \mathrm{Tr}(A) = 5 > 0$, $I_2 = |A| = 0$, $I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -25 < 0$. 此曲线是抛物线. A 的特征值是方程 $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ 的根, 解得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. 对应于特征根 0 与 5 的单位特征向量分别是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以 $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$,

且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

即 $b_1'=-\sqrt{5}$, $b_2'=-2\sqrt{5}$. 取

$$X_0=\begin{pmatrix} \dfrac{b_2'^2-\lambda_2 c}{2b_1'\lambda_2} \\ -\dfrac{b_2'}{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

用 X_0 作平移坐标变换

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix},$$

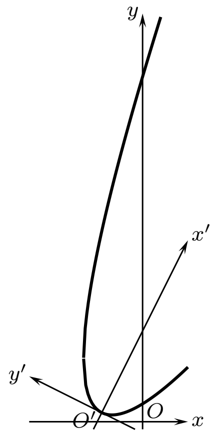
可得

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即方程化简为$5y''^2-2\sqrt{5}x''=0$. 其简化方程为$y''^2=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x''$. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & TX_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{9}{10} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这条抛物线的顶点坐标是 $TX_0=\left(-\dfrac{9}{10},\dfrac{1}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. 新坐标系中 x' 轴与 y' 轴在旧坐标系中的方程分别是 $2x-y+2=0$ 与 $2x+4y+1=0$.



第 4 题图

5. 化简下列二次曲线的方程, 并指出它们是什么曲线:

(1) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$;

(2) $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$.

解: (1) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=5>0$, $I_2=|A|=0$, $I_3=\begin{vmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&0\end{vmatrix}=0$. 为确定曲线的类型需要进一步计算. A 的特征值是方程 $\lambda^2-5\lambda=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$. 对应于特征根 0 与 5 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{\sqrt5}{5},\dfrac{2\sqrt5}{5}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{2\sqrt5}{5},\dfrac{\sqrt5}{5}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt5}{5}&-\dfrac{2\sqrt5}{5}\\\dfrac{2\sqrt5}{5}&\dfrac{\sqrt5}{5}\end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm T}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B^{\mathrm T}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&-\sqrt5\\0&-\sqrt5&0\end{pmatrix}.$$

即 $b_1'=0$, $b_2'=-\sqrt5$. 取 $X_0=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{b_2'}{\lambda_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\dfrac{\sqrt5}{5}\end{pmatrix}$, 用 X_0 作平移坐标变

换, 可得

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即方程化简为$5y''^2-1=0$, 即 $y''=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 这是一对平行直线. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & TX_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} & \dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 因此 $I_1=\mathrm{Tr}(A)=2>0$, $I_2=|A|=0$, $I_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$. 为确定曲线的类型需要进一步计算. A 的特征值是方程 $\lambda^2-2\lambda=0$ 的根, 解得 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. 对应于特征根 0 与 2 的单位特征向量分别是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $T=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 且 $|T|=1$.

先用 T 作旋转坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

即 $b_1'=0$, $b_2'=-\sqrt{2}$. 取$X_0=\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{b_2'}{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 用 X_0 作平移坐标变换, 可得

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

方程化简为$2y''^2-4=0$, 即 $y''=\pm\sqrt{2}$, 这是一对平行直线. 总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & TX_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. 求下列二次曲线的渐近线:

(1) $6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$;

(2) $2xy-4x-2y+3=0$.

解: (1) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 因此 $I_2=|A|=-\frac{25}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}=\frac{25}{4}>0$. 此曲线是双曲线. 曲线的中心 (x_0,y_0)满足线性方程组

$$\begin{cases} 6x_0-\frac{1}{2}y_0+\frac{3}{2}=0 \\ -\frac{1}{2}x_0-y_0+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

得 $X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. 渐近线方程为

$$6\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{3}{5}\right)-\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=0.$$

上式可分解为

$$\left(3\left(x+\frac{1}{5}\right)+\left(y-\frac{3}{5}\right)\right)\left(2\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(y-\frac{3}{5}\right)\right)=0,$$

所以渐近线方程为 $3x+y=0$ 和 $2x-y+1=0$.

(2) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 因此 $I_2=|A|=-1<0$, $I_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=1>0$. 此曲线是双曲线. 曲线的中心 (x_0,y_0)满足线

性方程组

$$\begin{cases} y_0 - 2 = 0 \\ x_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 渐近线方程为 $2(x-1)(y-2)=0$, 即 $x=1$ 和 $y=2$.

7. 就 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$$

所表示的曲线形状.

解: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 $I_1 = \mathrm{Tr}(A) = 2\lambda$, $I_2 = |A| = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $I_3 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (5\lambda+3)(\lambda-1)$. 分几种情况来讨论.

(i) 当 $\lambda \neq \pm 1$ 时, $I_2 \neq 0$. 又可分为两种情况. (a) $\lambda > 1$ 或 $\lambda < -1$, 此时 $I_2 > 0$. 当 $\lambda > 1$ 时, I_1 与 I_3 同号, 曲线是虚椭圆; 当 $\lambda < -1$ 时, I_1 与 I_3 异号, 曲线是椭圆. (b) $-1 < \lambda < 1$, 此时 $I_2 < 0$. 当 $\lambda = -\dfrac{3}{5}$ 时, $I_3 = 0$, 曲线为一对相交直线; 而当 $\lambda \neq -\dfrac{3}{5}$ 时, 曲线总是双曲线.

(ii) 当 $\lambda = -1$ 时, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$, 曲线是抛物线.

(iii) 当 $\lambda = 1$ 时, $I_2 = I_3 = 0$, 利用半不变量 $K_1 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10\lambda - 2 = 8 > 0$, 可知曲线是一对虚平行直线.

8. 就 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2x - 2\lambda y + \lambda = 0$$

所表示曲线的形状.

解: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$, 因此 $I_1 = \mathrm{Tr}(A) = 1 + \lambda$, $I_2 = |A| = \lambda(1-\lambda)$, $I_3 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(2\lambda+1)$. 分几种情

况来讨论.

(i) 当 $\lambda \neq 1, 0$ 时, $I_2 \neq 0$. 又可分为两种情况. (a) $0 < \lambda < 1$, 此时 $I_2 > 0$, $I_1 > 0$, $I_3 < 0$, 曲线是椭圆; (b) $\lambda < 0$ 或 $\lambda > 1$, 此时 $I_2 < 0$. 仅当 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ 时, $I_3 = 0$, 曲线为一对相交直线; 而当 $\lambda \neq -\dfrac{1}{2}$ 时, 曲线总是双曲线.

(ii) 当 $\lambda = 0$ 时, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$, 曲线是抛物线.

(iii) 当 $\lambda = 1$ 时, $I_2 = I_3 = 0$, 利用半不变量 $K_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 可知曲线是一对重合直线.

9. 已知方程 $(A_1x + B_1y + C_1)^2 + 2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, 其中 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

(1) 证明此方程表示一条抛物线;

(2) 求出对称轴的方程.

解: (1) 设此曲线方程是关于直角坐标系 $[O; \eta_1, \eta_2]$ 的. 由于 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, 因此直线 $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与直线 $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 互相正交. 不妨设 $A_1B_2 - A_2B_1 > 0$, 令 $\Delta_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$, 则 L_1, L_2 的单位方向向量 $\eta_1' = \left(\dfrac{A_1}{\Delta_1}, \dfrac{B_1}{\Delta_1}\right)$ 与 $\eta_2' = \left(\dfrac{A_2}{\Delta_2}, \dfrac{B_2}{\Delta_2}\right)$ 构成一个规范正交组. 令 $T = \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{\Delta_1} & \dfrac{A_2}{\Delta_2} \\ \dfrac{B_1}{\Delta_1} & \dfrac{B_2}{\Delta_2} \end{pmatrix}$, 则有 $(\eta_1', \eta_2') = (\eta_1, \eta_2)T$, T 是一个正交矩阵, 且 $|T| = 1$. 因此 η_1', η_2' 构成一个右手系.

如果令

$$\begin{cases} x' = \dfrac{A_1}{\Delta_1}x + \dfrac{B_1}{\Delta_1}y + \dfrac{C_1}{\Delta_1} \\ y' = \dfrac{A_2}{\Delta_2}x + \dfrac{B_2}{\Delta_2}y + \dfrac{C_2}{\Delta_2}, \end{cases}$$

就有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{\Delta_1} & \dfrac{B_1}{\Delta_1} & \dfrac{C_1}{\Delta_1} \\ \dfrac{A_2}{\Delta_2} & \dfrac{B_2}{\Delta_2} & \dfrac{C_2}{\Delta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

这是一个直角坐标变换公式. 在新的坐标系 $[O'; \eta_1', \eta_2']$ 中, 曲线的方程化简为 $\Delta_1^2 x'^2 + 2\Delta_2 Y' = 0$. 显然 $\Delta_1 \neq 0$, 因此 $x'^2 + \dfrac{2\Delta_2}{\Delta_1^2}y' = 0$, 这是一条抛物线.

(2) 此抛物线的对称轴是 y' 轴, 方程为 $x' = 0$, 即 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

10. 设二次曲线方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

证明:

(1) 二次曲线为一条等轴双曲线或两条相互垂直的直线的充分必要条件是 $I_1=0$;

(2) 二次曲线为圆的充分必要条件是 $I_1^2=4I_2$, $I_1I_3<0$;

(3) 二次曲线若表示一个椭圆, 试求该椭圆面积.

证明: (1) 若此二次曲线为等轴双曲线, 则由于 I_1 是正交不变量, 从等轴双曲线的标准方程易知 $I_1=0$; 若是两条互相垂直的直线, 则其标准方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=0$, 且 $\lambda_1\lambda_2<0$, 即 $y'=\pm\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}x'$ 表示两条互相垂直的直线, 因此 $\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\right)=-1$, 推得 $\dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2}=1$, 即 $I_1=0$.

反之, 若 $I_1=0$, 则因 $I_1=\lambda_1+\lambda_2=0$, 可知 $\lambda_2=-\lambda_1(\neq 0)$, 并且 $I_2=-\lambda_1^2<0$. 由简化方程 $\lambda_1(x'^2-y'^2)+\dfrac{I_3}{I_2}=0$ 可知, 当 $I_3\neq 0$ 时曲线是等轴双曲线; 当 $I_3=0$ 时曲线是两条互相垂直的直线.

(2) 若此二次曲线是圆, 则必有 $I_2>0$, $I_1\cdot I_3<0$ (椭圆型), 经过适当选择直角坐标系知简化方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{I_3}{I_2}=0$. 因为是圆, 所以 $\lambda_1=\lambda_2$, 于是 $I_1=2\lambda_1$, $I_2=\lambda_1^2$, 所以 $I_1^2=4I_2$.

反之, 若 $I_1\cdot I_3<0$, $I_1^2=4I_2$, 可知 $I_2>0$, 曲线是椭圆. 又因 $I_1=\lambda_1+\lambda_2$, $I_2=\lambda_1\lambda_2$, 由 $I_1^2=4I_2$ 可得 $\lambda_1=\lambda_2$, 故此曲线是圆.

(3) 在标准椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 中, 椭圆的面积 $S=\pi ab$. 若曲线表示一个椭圆, 则适当选择坐标系之后可得它的简化方程为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{I_3}{I_2}=0$, 即 $\dfrac{x'^2}{\dfrac{-I_3}{I_2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_1}}+\dfrac{y'^2}{\dfrac{-I_3}{I_2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_2}}=1$. 所以面积 $S=\pi\sqrt{\dfrac{I_3^2}{I_2^2}\cdot\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}}=\dfrac{\pi|I_3|\sqrt{I_2}}{I_2^2}$.

11. 已知椭圆长轴和短轴分别在直线 $x+y-1=0$ 和 $x-y+1=0$ 上, 且长短轴长分别为 4 与 2. 求此椭圆的方程.

解: 不妨设长轴在 x' 轴 (即 $y'=0$) 上, 短轴在 y' 轴 (即 $x'=0$) 上, 作变

换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

其左上角的子矩阵 $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 是行列式等于 1 的正交矩阵, 因此这是右手直角坐标系间的坐标变换. 在新的坐标系里曲线的方程应为 $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$. 利用坐标变换公式, 可得在旧坐标系下的方程: $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$, 即为 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$.

§ 3　平面的点变换

1. 判别下列对应法则是否为实数域 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 并指出哪些是单射? 满射?

(1) $x \mapsto x^2$;　　(2) $x \mapsto x^3$;　　(3) $x \mapsto |x|$;

(4) $x \mapsto 2^x$;　　(5) $x \mapsto \sin(x^2)$;　　(6) $x \mapsto \tan x$.

解: (1)–(5) 都是 $\mathbb{R}$ 到自身的映射, 其中 (2), (4) 是单射, (2) 是满射, (6) 不是映射.

2. 设 S 表示平面上所有点组成的集合. L 是一条直线, 把平面上每个点 $P(x,y)$ 对应到它关于 L 的对称点 $P'(x',y')$, 这是 S 到自身的一个变换, 称为关于直线 L 的反射, 称 L 是反射轴.

(1) 求出平面关于直线 $y = x$ 的反射公式;

(2) 设反射轴为 $Ax + By + C = 0$. 求出这时的反射公式;

(3) 设 $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ 是关于平面上两条平行直线 L_1, L_2 的反射. 证明 $\mathscr{S}_2\mathscr{S}_1$ 是一个平移.

解: (1) 已知 $P(x,y)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(x',y')$. 则

$$\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=\dfrac{y+y'}{2}\\ \dfrac{y-y'}{x-x'}=-1,\end{cases}$$

解得反射公式为

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=x.\end{cases}$$

(2) 点 $P(x,y)$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点为 $P'(x'y')$. 则

$$\begin{cases}A\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)+B\left(\dfrac{y+y'}{2}\right)+C=0\\ A(y-y')=B(x-x'),\end{cases}$$

解得反射公式为

$$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{A^2+B^2}\left((B^2-A^2)x-2ABy-2AC\right)\\ y'=\dfrac{1}{A^2+B^2}\left(-2ABx+(A^2-B^2)y-2BC\right).\end{cases}$$

(3) 以 L_1 作为 x 轴建立坐标系, 则 L_1,L_2 的方程分别为 $y=0$ 与 $y+C=0$, 其中 $C\neq 0$. 记 $\mathscr{S}_1(P)=P'(x',y')$, $\mathscr{S}_2(P')=P''(x'',y'')$. 由 (2) 知,

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y,\end{cases}\qquad\begin{cases}x''=x'\\ y''=-y'-2C.\end{cases}$$

代入后算得

$$\begin{cases}x''=x\\ y''=y-2C.\end{cases}$$

可见 $\mathscr{S}_2\mathscr{S}_1$ 是一个平移.

3. 设 $\mathscr{M}$ 是变换 $(x,y)\mapsto(x',y')$:

$$\begin{cases}x'=2x+3y+2\\ y'=-x+2y-3\end{cases}$$

问:

(1) 点 $(-1,1)$ 被变成了什么点?

(2) 直线 $y=2$ 被变成了什么图形?

(3) 点 $(9,-3)$ 是由哪个点变过来的?

解: (1) 点 $(-1,1)$ 被变为 $(3,0)$.

(2) 直线 $y=2$ 上的点是 $(t,2)$ $(t\in\mathbb{R})$. 而 $\mathscr{M}((t,2))=(2t+8,-t+1)$, 因此变换后的点成一条直线, 其参数方程为 $\begin{cases}x=8+2t\\ y=1-t,\end{cases}$, 或 $x+2y-10=0$.

(3) 解方程组 $\begin{cases}2x+3y+2=9\\ -x+2y-3=-3\end{cases}$ 得 $x=2$, $y=1$. 故 $\mathscr{M}((2,1))=(9,-3)$.

4. 在直角坐标系 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 中, 求出平面绕点 $M_0(x_0,y_0)$ 旋转 θ_0 角的变换公式.

解: 以 $M_0(x_0,y_0)$ 为原点建立新直角坐标系 $[M_0;\eta_1,\eta_2]$, 则绕点 M_0 旋转 θ_0 角的变换在新坐标下的变换公式为

$$\begin{cases}\tilde{x}'=\cos\theta_0\tilde{x}-\sin\theta_0\tilde{y}\\ \tilde{y}'=\sin\theta_0\tilde{x}+\cos\theta_0\tilde{y}.\end{cases}$$

设点 $P(x,y)$ 经旋转变为 $P'(x',y')$, 根据平移坐标变换的公式, P,P' 点的新坐标应为 $(x-x_0,y-y_0)$, $(x'-x_0,y'-y_0)$. 代入上面的公式即得

$$\begin{cases}x'=\cos\theta_0(x-x_0)-\sin\theta_0(y-y_0)+x_0\\ y'=\sin\theta_0(x-x_0)+\cos\theta_0(y-y_0)+y_0.\end{cases}$$

5. 若把曲线 $2xy=a^2$ 绕原点旋转 $\dfrac{\pi}{4}$, 求新的曲线方程.

解: 若 $P(x,y)$ 点旋转到了 $P'(x',y')$ 点, 则 P 点可由 P' 点经旋转 $-\dfrac{\pi}{4}$ 得到. 因此

$$\begin{cases}x=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)x'-\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\\ y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)x'+\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y'),\end{cases}$$

代入原方程 $2xy=a^2$ 即得 $y'^2-x'^2=a^2$.

6. 平面的等距变换 $\mathscr{M}$ 若有两个不动点 A,B. 则直线 AB 上每个点都是不动点.

解: 设 C 点在直线 AB 上, 则根据 C 是否位于线段 AB 上, 有 $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$ 或 $|d(C,A)-d(C,B)|=d(A,B)$. 令 $\mathscr{M}(C)=C'$, 则

因 A, B 是 $\mathscr{M}$ 的不动点, 有 $d(A, C') + d(C', B) = d(A, B)$ 或 $|d(C', A) - d(C', B)| = d(A, B)$. 如果 A, B, C' 不共线, 则它们构成一个三角形, 而三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 与上述等式矛盾.

7. 求下述仿射变换的不动点:

$$\begin{cases} x' = 3x - y - 5 \\ y' = 2x + y + 1. \end{cases}$$

解: 解方程组 $\begin{cases} x = 3x - y - 5 \\ y = 2x + y + 1, \end{cases}$ 得 $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = -6$, 即不动点仅有 $\left(-\dfrac{1}{2}, -6\right)$ 一个.

8. 若在仿射变换 $\mathscr{A}$ 下一条直线的象与其自身重合, 则称这条直线为 $\mathscr{A}$ 的不变直线. 求下述仿射变换的不变直线:

$$\begin{cases} x' = 7x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y + 4. \end{cases}$$

解: 仿射变换把直线变成直线. 设不变直线为 $L : Ax + By + C = 0$. 若 $P(x, y) \in L$, 则 $P'(x', y') = \mathscr{A}(P) \in L$, 即 $Ax' + By' + C = 0$. 代入化简后得

$$(7A + 4B)x + (2B - A)y + (A + 4B + C) = 0.$$

因为 L 上的任意点都满足此方程, 说明这个方程也是 L 的方程. 因此有

$$\frac{7A + 4B}{A} = \frac{2B - A}{B} = \frac{A + 4B + C}{C} = k.$$

解得 $k = 6$ 或 $k = 3$. 所以

$$\begin{cases} A = -4B \\ C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -B \\ C = \dfrac{3}{2}B, \end{cases}$$

故不变直线有两条: $-4x + y = 0$ 和 $-2x + 2y + 3 = 0$.

9. 设在平面上给出了两个三角形 ABC 和 DEF. 问有几个仿射变换把 $\triangle ABC$ 变成 $\triangle DEF$?

解: 由命题 3.3(9) 可知有 $3! = 6$ 个不同的仿射变换.

10. 证明: 平面上任给两个直角标架 (I) 和 (II), 总存在唯一的等距变换把 (I) 变成 (II).

证明: 命题 3.2(6) 已经蕴含了满足条件的等距变换的唯一性. 设有直角标架 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 与 $[O';\eta_1',\eta_2']$, 则规范正交基 η_1,η_2 与 η_1',η_2' 可以确定唯一的正交变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}(\eta_i)=\eta_i'$, $i=1,2$. 设向量 $\delta=\overrightarrow{OO'}$, 又可定义一个平移变换 $\mathscr{T}_\delta$. 于是复合变换 $\mathscr{T}_\delta\mathscr{A}$ 是一个等距变换, 它把直角标架 $[O;\eta_1,\eta_2]$ 映到 $[O';\eta_1',\eta_2']$. 存在性获证.

§ 4 变换群与几何学

1. 证明: 平面上绕一个固定点转 90°、180°、270° 的三个旋转 $\mathscr{R}_1$、$\mathscr{R}_2$、$\mathscr{R}_3$ 和恒同变换 $\mathscr{E}$ 组成一个变换群.

证明: 记 $\mathscr{R}_0=E$, 则因 $\mathscr{R}_i\mathscr{R}_j=\begin{cases}\mathscr{R}_{i+j} & \text{若 } i+j\le 3,\\ \mathscr{R}_{i+j-4} & \text{若 } i+j\ge 4,\end{cases}$ 群的性质 (1) 被满足; 性质 (2) 则是显然的; 又因 $\mathscr{R}_i^{-1}=\mathscr{R}_{4-i}$, 性质 (3) 也被满足, 所以这是一个群.

2. 当 a,b 取为任意的不全为零的数时. 下列所有的仿射变换组成的集合是否为一个群?

$$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=bx+ay.\end{cases}$$

解: 这个仿射变换对应的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$. 设 $A_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$, 则 $A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2\\ a_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2+b_1b_2\end{pmatrix}$ 也是这个集合的元素, 因此性质 (1) 被满足; 当 $a=1$, $b=0$ 时就是恒同变换, 因此 (2) 也满足; $A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a^2-b^2} & -\dfrac{b}{a^2-b^2}\\ -\dfrac{b}{a^2-b^2} & \dfrac{a}{a^2-b^2}\end{pmatrix}$ 也是集合的元素, 因此 (3) 也满足. 这个集合确实是群.

§ 5 二次曲线的正交分类与仿射分类

1. 求二次曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点 $(8,0)$ 的直径方程, 并求出其共轭直径的方程.

解: 该二次曲线方程可写成

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{21}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}}=1,$$

是椭圆.

作变换

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{42}}{21}(x-2)\\ y'=\frac{2\sqrt{21}}{21}\left(y-\frac{1}{2}\right),\end{cases}\qquad \text{即:}\ \begin{cases}x=\frac{\sqrt{42}}{2}x'+2\\ y=\frac{\sqrt{21}}{2}y'+\frac{1}{2}.\end{cases}$$

则此变换将圆 $x'^2+y'^2=1$ 变为椭圆

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{21}{2}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}}=1,$$

且将点 $\left(\frac{2\sqrt{42}}{7},-\frac{\sqrt{21}}{21}\right)$ 变成 $(8,0)$. 所以此变换将圆的直径 $y'=-\frac{\sqrt{2}}{12}x'$ 变为椭圆的过点 $(8,0)$ 的直径: $x+12y-8=0$.

与圆直径 $y'=-\frac{\sqrt{2}}{12}x'$ 垂直的直径 $y'=6\sqrt{2}x'$ 被此变换变成与椭圆的直径 $x+12y-8=0$ 共轭的直径 $12x-2y-23=0$.

2. 设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

试求直径 $y=\frac{kb}{a}x$ $(|k|<1)$ 的共轭直径 (所给直径的平行弦的中点连线).

解: 根据对称性, 双曲线的中心是所有通过它的弦的中点, 因此所有的直径一定通过它的中心. 为确定共轭直径, 只需再找一个点. 作一条平行弦 $y=\frac{kb}{a}x+t$, 它与双曲线的交点满足 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{kb}{a}x+t\right)^2}{b^2}=1$, 化简为 $b^2(1-k^2)x^2-2abktx-a^2(b^2+t^2)$. 因此平行弦的中点的横坐标是 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{akt}{b(1-k^2)}$. 纵坐标为 $\frac{kb}{a}\cdot\frac{akt}{b(1-k^2)}+t=\frac{t}{1-k^2}$. 得到共轭直径的

斜率为 $\dfrac{t}{1-k^2}\cdot\dfrac{b(1-k^2)}{akt}=\dfrac{b}{ak}$, 共轭直径的方程为 $y=\dfrac{b}{ak}x$. 可见双曲线的直径与共轭直径的斜率的乘积等于常数 $\dfrac{b^2}{a^2}$.

3. 已知曲线 $xy-y^2-2x+3y-1=0$ 的直径与 y 轴平行, 求它的方程, 并求出这直径的共轭直径.

解: 因为 $I_2=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{4}<0$, $I_3=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\\ -1 & \frac{3}{2} & -1\end{vmatrix}\neq 0$, 所以该曲线是双曲线. 为求它的中心, 解以下方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y_0-1=0\\ \dfrac{1}{2}x_0-y_0+\dfrac{3}{2}=0,\end{cases}$$

得 $x_0=1$, $y_0=2$. 由于已给直径与 y 轴平行, 它的方程是 $x=1$.

作一条平行弦 $x=t$, 它与双曲线的交点坐标应满足 $ty-y^2-2t+3y-1=0$, 因此交点的中点的纵坐标等于 $\dfrac{t+3}{2}$, 而横坐标为 t. 故共轭直径的方程为 $y=\dfrac{\dfrac{3+t}{2}-2}{t-1}(x-1)+2$, 即 $x-2y+3=0$.

4. 试证明: 抛物线的所有直径构成与对称轴平行的直线束.

证明: 设此抛物线的标准方程是 $y^2=2px$ $(p>0)$. 设抛物线的直径是由平行于 $y=kx$ 的平行弦的中点构成的. 设平行弦的方程是 $y=kx+t$, 则它与抛物线交点的横坐标满足方程 $(kx+t)^2=2px$, 即 $k^2x^2+2(kt-p)x+t^2=0$. 由此可得中点的横坐标为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{p-kt}{k^2}$, 纵坐标为 $k\cdot\dfrac{p-kt}{k^2}+t=\dfrac{p}{k}$, 是一个常数. 即直径平行于 x 轴.

§6　二次超曲面方程的化简

1. 已知 3 个平面:

$$\begin{aligned}&\Pi_1: x+2y-2z+3=0,\\ &\Pi_2: 2x+y+2z-1=0,\\ &\Pi_3: 2x-2y-z-3=0,\end{aligned}$$

分别取为 $O'x'y', O'y'z', O'x'z'$ 平面. 求直角坐标变换公式, 并写出新原点的旧坐标与旧原点的新坐标.

解: 设 $P(x,y,z)$ 在新坐标系下的坐标是 (x',y',z'), 则 P 到 3 个坐标平面的距离等于这 3 个坐标的绝对值, 即

$$\begin{cases} |x'| = \dfrac{|2x+y+2z-1|}{3} \\ |y'| = \dfrac{|2x-2y-z-3|}{3} \\ |z'| = \dfrac{|x+2y-2z+3|}{3}. \end{cases}$$

设 $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 由于 T是正交矩阵且 $|T|=1$, 我们可以把坐标变换公式取为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这是右手系之间的直角坐标变换. 显然旧坐标原点 O 的新坐标是 $\left(-\dfrac{1}{3},-1,1\right)$.

旧坐标用新坐标表示的公式为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{11}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此新坐标原点 O' 的旧坐标是 $\left(\dfrac{5}{9},-\dfrac{11}{9},\dfrac{5}{9}\right)$.

2. 化简二次曲面的方程:

$$x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+10=0,$$

并指出这是什么曲面.

解: 由题设,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

矩阵 A 的特征多项式是 $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36$, A 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. 与这 3 个特征值对应的单位特征向量 (因特征值不同, 它们互相正交) 分别是 $\xi_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\xi_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\xi_3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

以这 3 个特征向量的坐标作为列向量构造矩阵

$$T = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

则 T 一定是正交矩阵, 又因 $|T| = 1$, T 满足我们的要求. 即有 $T^{\mathrm{T}}AT = \mathrm{diag}(6, 3, -2)$.

再求 $AX + B = 0$ 的解 Δ, 相当于解线性方程组

$$\begin{cases} x - 3y - z = 3 \\ -3x + y + z = -3 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$$

得 $\Delta = (1\ \ -1\ 1)^{\mathrm{T}}$. 因此作直角坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

可使原方程化简为:

$$6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 + 1 = 0.$$

这是一个双叶双曲面.

3. 化简二次曲面的方程:

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0,$$

并指出这是什么曲面.

解: 由题设,

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix},$$

矩阵 A 的特征多项式是 $\chi_A(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda$, A 的特征值为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=0$. 与这 3 个特征值对应的单位特征向量 (因特征值不同, 它们互相正交) 分别是 $\xi_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\xi_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\xi_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

以这 3 个特征向量的坐标作为列向量构造矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{pmatrix},$$

则 T 一定是正交矩阵, 可是 $|T|=-1$, 因此必须使其中某一列变号, 重取

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\end{pmatrix},$$

T 满足我们的要求. 即有 $T^{\mathrm{T}}AT=\mathrm{diag}(5,2,0)$.

由于 A 退化, 并且 $2=\mathrm{rank}\,A<\mathrm{rank}(A\ B)=3$, 我们先作旋转坐标变换 $\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\1\end{pmatrix}$ 得到:

$$\begin{pmatrix}T^{\mathrm{T}}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&2&0&\frac{\sqrt{6}}{2}\\0&0&0&\frac{5\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{6}}{2}&\frac{5\sqrt{2}}{2}&3\end{pmatrix}.$$

即 $5x'^2+2y'^2+\sqrt{6}y'+5\sqrt{2}z'+3=0$. 配方为 $5x'^2+2\left(y'+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+5\sqrt{2}\left(z'+\dfrac{9\sqrt{2}}{40}\right)=0$. 因此再作平移坐标变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{9\sqrt{2}}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

可把方程化简为

$$5x''^2+2y''^2+5\sqrt{2}z''=0.$$

这是一个椭圆抛物面.

相应的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{1}{40} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{19}{40} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第十一章　一元多项式的因式分解

§1　一元多项式

1. 计算 $(x^2+ax-b)(x^2-1)+(x^2-ax+b)(x^2+1)$.

解: $2x^4-2ax+2b$.

2. 计算多项式 x^3+2x^2+3x-1 与 $3x^2+2x+4$ 的乘积.

解: $3x^5+8x^4+17x^3+11x^2+10x-4$.

3. 设

$$\begin{aligned} f(x)&=3x^2-5x+3,\\ g(x)&=ax(x-1)+b(x+2)(x-1)+cx(x+2), \end{aligned}$$

试确定 a,b,c, 使 $f(x)=g(x)$.

解: 取 $x=-2$, 得 $a=\dfrac{25}{6}$; 取 $x=0$, 得 $b=-\dfrac{3}{2}$, 取 $x=1$, 得 $c=\dfrac{1}{3}$.

4. 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式, 证明: 如果

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x),$$

那么

$$f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

证明: 如 $f(x)\neq 0$, 则左式的次数为偶数, 而右式的次数为奇数, 矛盾, 故 $f(x)=0$. 从而

$$g^2(x)+h^2(x)=0.$$

又, $g(x),h(x)$ 皆为实系数多项式, 从而 $g^2(x),h^2(x)$ 的首项系数都是非负数, 而这两个数之和为零, 故 $g(x),h(x)$ 的首项系数都是零, 从而 $g(x)=h(x)=0$.

§2　整除的概念

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$, 求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

(1) $f(x)=x^4+4x^2-x+6$, $g(x)=x^2+x+1$;

(2) $f(x)=x^3+3x^2-x-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$.

解: (1) $q(x)=x^2-x+4$, $r(x)=-4x+2$.

(2) $q(x)=\dfrac{1}{9}(3x+11)$, $r(x)=\dfrac{10}{9}(x-2)$.

2. m, p, q 适合什么条件时, 有

(1) $x^2+mx+1 \mid x^3+px+q$;

(2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$.

解: (1) $p=1-m^2$, $q=-m$.

(2) $\begin{cases} m=0 \\ p=1+q \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p=-m^2+2 \\ q=1 \end{cases}$

3. 用综合除法求商 $q(x)$ 及余式 $r(x)$:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$, $g(x)=x-2$;

(2) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$, $g(x)=x+2$.

解: (1) $q(x)=x^3+4x+2$, $r(x)=12$.

(2) $q(x)=2x^4-4x^3+3x^2-6x+4$, $r(x)=-8$.

4. 用综合除法表 $f(x)$ 为 $x-x_0$ 的方幂:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$, $x_0=2$;

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$, $x_0=-2$;

(3) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+1-2\mathrm{i}$, $x_0=-\mathrm{i}$.

解: (1) $f(x)=(x-2)^4+6(x-2)^3+15(x-2)^2+18(x-2)+9$.

(2) $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$.

(3) $f(x)=(x+\mathrm{i})^4-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-5(x+\mathrm{i})+(1+2\mathrm{i})$.

5. 记 $\langle x\rangle^0=1$, $\langle x\rangle^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$, $(k>1)$. 试将 $f(x)$ 表为

$$c_0+c_1\langle x\rangle+c_2\langle x\rangle^2+\cdots$$

的形式:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-1$;

(2) $f(x)=x^5$.

解: (1)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \underline{-1} \\
 & & 1 & -1 & 0 & \\
\hline
2 & 1 & -1 & 0 & \underline{0} & \\
 & & 2 & 2 & & \\
\hline
3 & 1 & 1 & \underline{2} & & \\
 & & 3 & & & \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{4} & & &
\end{array}$$

因此$f(x) = -1 + 2\langle x\rangle^2 + 4\langle x\rangle^3 + \langle x\rangle^4$.

(2) $f(x) = \langle x\rangle + 15\langle x\rangle^2 + 25\langle x\rangle^3 + 10\langle x\rangle^4 + \langle x\rangle^5$.

6. k 是正整数, 证明: $x \mid f^k(x)$ 当且仅当 $x \mid f(x)$;

证明: 设 $f(x)$ 的常数项为 a, 则 $f^k(x)$ 的常数项为 a^k. 因此 $x \mid f^k(x) \iff a^k = 0 \iff a = 0 \iff x \mid f(x)$.

7. 设a, b 为两个不相等的常数, 证明: 多项式 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)$ 除所得余式为

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

证明: 设 $f(x) = (x-a)(x-b)q(x) + Ax + B$, 则

$$f(a) = aA + B, \qquad f(b) = bA + B,$$

由此得

$$A = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \qquad B = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

因此结论成立.

8. 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都是数域 K 上的多项式, 其中 $f_1(x) \neq 0$. 证明: 如果 $g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x) \mid g_1(x)$, 则 $g_2(x) \mid f_2(x)$.

证明: 设 $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)q_1(x)$, $g_1(x)=f_1(x)q_2(x)$. 则$f_1(x)f_2(x) = f_1(x)q_2(x)g_2(x)q_1(x)$, 由于 $f_1(x) \neq 0$, 可得 $f_2(x) = g_2(x)q_2(x)q_1(x)$, 即 $g_2(x) \mid f_2(x)$.

***9.** 证明: $x^d - 1 \mid x^n - 1$ 当且仅当 $d \mid n$.

证明: ($\Rightarrow$) 若 $n = dq$, 则

$$x^n - 1 = (x^d - 1)(x^{d(q-1)} + x^{d(q-2)} + \cdots + x^d + 1).$$

因此 $x^d - 1 \mid x^n - 1$.

($\Leftarrow$) 设 $n = dq + r$, $0 \leq r < d$. 由上证, $x^{dq} - 1 \equiv 0 \pmod{x^d - 1}$. 即

$$x^{dq} \equiv 1 \pmod{x^d - 1},$$

$$x^n \equiv x^{dq+r} \equiv x^{dq} \cdot x^r \equiv x^r \pmod{x^d - 1},$$

$$x^n - 1 \equiv x^r - 1 \pmod{x^d - 1}.$$

而 $x^d - 1 \mid x^r - 1 \Leftrightarrow r = 0$, 因此 $x^d - 1 \mid x^n - 1 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow d \mid n$.

§ 3　最大公因式

1. 求最大公因式 $(f(x), g(x))$:

(1) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;

(2) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2$;

(3) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$.

解: (1) $x + 1$.

(2) 1.

(3) 1.

2. 求 $u(x)$, $v(x)$, 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$:

(1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

(2) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;

(3) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.

解: (1) $u(x) = -x - 1$, $v(x) = x + 2$, $d(x) = x^2 - 2$.

(2) $u(x) = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$, $v(x) = \dfrac{1}{3}(2x^2 - 2x - 3)$, $d(x) = x - 1$.

(3) $u(x) = -\dfrac{1}{6}(2x^2 + 3x)$, $v(x) = \dfrac{1}{6}(2x^3 + 5x^2 - 6)$, $d(x) = 1$.

3. 证明: 如果 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$, 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

证明: 设 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 则对任意的 $h(x) \in K[x]$, 如 $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$, 则 $h(x) \mid d(x)$.

又, $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式, 故 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

4. 证明: 如果 $h(x)$ 为首一多项式, 则

$$(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x).$$

证明: 设 $d(x) = (f(x), g(x)) \neq 0$, 则存在 $u(x), v(x)$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

所以

$$d(x)h(x) = u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x).$$

又因 $d(x)h(x) \mid f(x)h(x)$, $d(x)h(x) \mid g(x)h(x)$, 所以 $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式. 又因 $d(x), h(x)$ 都是首一多项式, 故 $d(x)h(x)$ 也是首一多项式, 从而

$$(f(x)h(x), g(x)h(x)) = d(x)h(x) = (f(x), g(x))h(x).$$

又如 $d(x) = 0$, 则 $f(x) = g(x) = 0$, 原等式仍然成立.

5. 证明: 如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零, 则

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right) = 1.$$

证明: 因 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零, 故 $(f(x), g(x)) \neq 0$. 所以

$$\begin{aligned}(f(x), g(x)) &= \left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}(f(x), g(x)), \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}(f(x), g(x))\right) \\ &= \left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)(f(x), g(x))\end{aligned}$$

(由习题 4) 两边消去 $(f(x), g(x))$, 得

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right) = 1.$$

6. 证明: 如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零, 且

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

则 $(u(x), v(x)) = 1$.

证明: 因 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零, 故 $(f(x), g(x)) \neq 0$, 因此

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + v(x)\frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1,$$

$$(u(x), v(x)) = 1.$$

7. 证明: 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 那么

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1.$$

证明: 存在 $u(x), v(x), s(x), t(x)$, 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1,$$

$$s(x)f(x)+t(x)h(x)=1,$$

所以

$$f(x)(u(x)s(x)f(x)+u(x)t(x)h(x)+s(x)v(x)g(x))+v(x)t(x)g(x)h(x)=1,$$

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

8. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$, $g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 都是多项式, 且 $(f_i(x),g_j(x))=1$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$, 证明:

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

证明: 由 $(f_i(x),g_j(x))=1$, 可得 $(f_i(x),g_1(x)g_2(x))=1$, $\ldots$, $(f_i(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$. 从而 $(f_1(x)f_2(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1$, $(f_1(x)f_2(x)f_3(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1$, $\ldots$, $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1$.

9. 证明: 如果 $(f(x),g(x))=1$, 那么 $(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

证明: 由于 $(f(x),g(x))=1$, 所以

$$(f(x)+g(x),g(x))=(f(x),g(x))=1,$$

$$(f(x)+g(x),f(x))=(g(x),f(x))=1,$$

因此

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1.$$

10. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$, 且 $ad-bc\neq 0$, 证明:

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

证明: 由题设可得 $(f(x),g(x))\mid(f_1(x),g_1(x))$. 又

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x),$$

$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x),$$

所以

$$(f_1(x),g_1(x))\mid(f(x),g(x)).$$

又因 $(f_1(x),g_1(x))$ 与 $(f(x),g(x))$ 的首项系数相同, 故

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

11. 证明: 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ 也互素.

证明: 由题设, 存在多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

所以

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1.$$

故 $(f(x^m), g(x^m))=1$.

12. 证明: 对任意的正整数 n, 都有

$$(f(x), g(x))^n=(f^n(x), g^n(x)).$$

证明: 设 $(f(x), g(x))=d(x)$, $f(x)=d(x)f_1(x)$, $g(x)=d(x)g_1(x)$, 则 $(f_1(x), g_1(x))=1$.

由习题 8 可得

$$(f_1^n(x), g_1^n(x))=1.$$

于是

$$\begin{aligned}(f^n(x), g^n(x))&=(d^n(x)f_1^n(x), d^n(x)g_1^n(x))\\&=d^n(x)(f_1^n(x), g_1^n(x))=d^n(x)\\&=(f(x), g(x))^n.\end{aligned}$$

***13.** 试求 x^m-1 与 x^n-1 的最大公因式.

解: 令 $d=(m, n)$, 则根据习题 10–2.9, $x^d-1 \mid x^m-1$, $x^d-1 \mid x^n-1$.

设 $h(x)$ 是 x^m-1 与 x^n-1 的公因式, 则有

$$x^m-1\equiv 0 \pmod{h(x)}, x^n-1\equiv 0 \pmod{h(x)}$$

$$\Longrightarrow\ x^m\equiv 1 \pmod{h(x)}, x^n\equiv 1 \pmod{h(x)}.$$

由于 $d=(m, n)$, 因此存在 $u, v\in\mathbb{Z}$ 使得 $d=um+vn$.

$$x^d=x^{um+vn}\equiv 1 \pmod{h(x)} \implies x^d-1\equiv 0 \pmod{h(x)}.$$

又设 $d=ms-nt$, $s, t\geq 0$, 则 $d+nt=ms$. 于是

$$x^{ms}-1=x^{d+nr}-1=(x^d-1)x^{nr}+x^{nr}-1.$$

若 $f(x)\in K[x]$ 满足 $f(x)\mid x^m-1$, $f(x)\mid x^n-1$, 则 $(f(x), x)=1$, 且 $f(x)\mid x^{ms}-1$, $f(x)\mid x^{nt}-1$, 于是 $f(x)\mid (x^d-1)x^{nr}$. 由 $f(x)$ 与 x 互素可得 $f(x)\mid x^d-1$. 因此 $(x^m-1, x^n-1)=x^d-1$, 其中 $d=(m, n)$.

*14. 证明: 只要 $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$, $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零, 就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使

$$\deg u(x)<\deg\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\ \deg v(x)<\deg\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

证明: 存在多项式 $s(x),t(x)\in K[x]$ 使

$$s(x)f(x)+t(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

则

$$s(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+t(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1. \tag{$*$}$$

令

$$s(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q(x)+u(x),$$

其中 $u(x)=0$ 或 $\deg u(x)<\deg\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$. 记 $v(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}q(x)+t(x)$, 则由 (*) 知,

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1. \tag{$**$}$$

由假设, $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零, 所以 $u(x),v(x)$ 都不是零多项式. 于是

$$\deg u(x)<\deg\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

由 (**) 知

$$\deg\left(u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)=\deg\left(v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),$$

从而

$$\deg v(x)<\deg\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}.$$

§4 不定方程与同余式

1. 设 $(f(x), m(x)) = 1$, 证明: 对任何的多项式 $g(x)$, 都存在多项式 $h(x)$, 使

$$h(x)f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}.$$

证明: 由假设, 存在 $u(x), v(x) \in K[x]$, 使

$$u(x)f(x) + v(x)m(x) = 1.$$

所以

$$g(x)u(x)f(x) + g(x)v(x)m(x) = g(x).$$

于是

$$g(x)u(x)f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}.$$

令 $h(x) = g(x)u(x)$, 则

$$h(x)f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}.$$

***2.** 设 $m_1(x), \cdots, m_s(x)$ 为一组两两互素的多项式, 证明: 对任何的多项式 $f_1(x), \cdots, f_s(x)$, 都存在多项式 $F(x)$, 使

$$F(x) \equiv f_i(x) \pmod{m_i(x)}, \quad i = 1, \cdots, s.$$

证明: 令 $M(x) = m_1(x)m_2(x)\cdots m_s(x)$, $R_i(x) = \dfrac{M(x)}{m_i(x)}$.
则 $(R_i(x), m_i(x)) = 1$, $m_j(x) \mid R_i(x)$, $i \neq j$. 存在 $h_i(x)$ 使 (习题 1)

$$h_i(x)R_i(x) \equiv f_i(x) \pmod{m_i(x)}$$

令

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} h_i(x)R_i(x),$$

则

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \sum_{i=1}^{s} h_i(x)R_i(x) \pmod{m_k(x)} \\ &\equiv h_k(x)R_k(x) \pmod{m_k(x)} \\ &\equiv f_k(x) \pmod{m_k(x)}. \end{aligned}$$

*3. 设 $m(x)$ 为复系数多项式, 且 $m(0) \neq 0$. 证明: 存在复系数多项式 $f(x)$, 使

$$f^2(x) \equiv x \pmod{m(x)}.$$

证明: (a) 首先证明对任意的 $a \neq 0$, 同余式

$$f^2(x) \equiv x \pmod{(x-a)^m}$$

有解. 设 $\sqrt{a}$ 是 a 的任意一个平方根, 则

$$\begin{aligned}(x-a)^m &= ((\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a}))^m = (\sqrt{x}-\sqrt{a})^m(\sqrt{x}+\sqrt{a})^m \\ &= (h(x)\sqrt{x}-g(x))(h(x)\sqrt{x}+g(x)) = h^2(x)x - g^2(x).\end{aligned}$$

于是

$$g^2(x) \equiv h^2(x)x \pmod{(x-a)^m}$$

而 $h(a)\sqrt{a}+g(a) = (\sqrt{a}+\sqrt{a})^m \neq 0$, 而 $h(a)\sqrt{a}-g(a) = (\sqrt{a}-\sqrt{a})^m = 0$, 因此 $g(a)h(a) \neq 0$, 从而 $(h(x),(x-a)^m) = 1$, 存在 $h_1(x) \in K[x]$ 使 $h_1(x)h(x) \equiv 1 \pmod{(x-a)^m}$. 于是

$$(h_1(x)g(x))^2 \equiv x \pmod{(x-a)^m}$$

取 $f(x) = h_1(x)g(x)$, 则有

$$f^2(x) \equiv x \pmod{(x-a)^m}.$$

(b) 设 $m(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_s)^{m_s}$, $a_i \neq a_j$ 对 $i \neq j$. 则 $(x-a_1)^{m_1},\cdots,(x-a_s)^{m_s}$ 两两互素. 由 (a), 存在 $f_i(x) \in K[x]$, 使

$$f_i^2(x) \equiv x \pmod{(x-a_i)^{m_i}}.$$

由习题 2, 存在 $f(x)$ 使

$$f(x) \equiv f_i(x) \pmod{(x-a_i)^{m_i}}$$

于是

$$f^2(x) \equiv x \pmod{(x-a_i)^{m_i}}$$

由 $(x-a_1)^{m_1},\cdots,(x-a_s)^{m_s}$ 两两互素可得

$$f^2(x) \equiv x \pmod{m(x)}.$$

§5 因式分解定理

1. 证明: $g^m(x) \mid f^m(x) \iff g(x) \mid f(x)$.

证明: 设

$$f(x) = ap_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

$$g(x) = bp_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),$$

其中 $a, b \in K$, $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ 是两两互素的不可约多项式, 且 $l_i, k_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, s$. 则

$$\begin{aligned} g(x) \mid f(x) &\iff k_i \leq l_i, \qquad i = 1, \cdots, s \\ &\iff mk_i \leq ml_i, \qquad i = 1, \cdots, s \\ &\iff g^m(x) \mid f^m(x). \end{aligned}$$

2. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且有分解式

$$\begin{aligned} f(x) &= ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x), \quad r_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, s; \\ g(x) &= bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x), \quad t_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, s, \end{aligned}$$

其中 $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ 是不同的首一不可约多项式. 证明:

$$[f(x), g(x)] = p_1^{\max(r_1,t_1)}(x)p_2^{\max(r_2,t_2)}(x)\cdots p_s^{\max(r_s,t_s)}(x).$$

证明: 令 $m_i = \max(r_i, t_i)$, $i = 1, \cdots, s$.

$$m(x) = p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x),$$

则因 $r_i \leq m_i$, $t_i \leq m_i$, 因此

$$f(x) \mid m(x), \quad g(x) \mid m(x) \implies [f(x), g(x)] \mid m(x).$$

设 $s(x) \in K[x]$ 是 $f(x), g(x)$ 的公倍式, 则有

$$s(x) = p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)h(x),$$

$$l_i \leq r_i,\ l_i \leq t_i,\ (h(x), p_i(x)) = 1,\ i = 1, \cdots, s.$$

于是

$$l_i \geq \max(r_i, t_i), \quad i = 1, \cdots, s, \implies m(x) \mid s(x).$$

因此

$$[f(x), g(x)] = p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x).$$

3. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 都是首一多项式, 证明:

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}.$$

证明: 设

$$f(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x), \quad r_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, s;$$
$$g(x) = p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x), \quad t_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, s,$$

其中 $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ 是不同的首一不可约多项式. 令

$$m_i = \max(r_i, t_i), \qquad l_i = \min(r_i, t_i), \qquad i = 1, \cdots, s.$$

则

$$f(x)g(x) = p_1^{r_1+t_1}(x)p_2^{r_2+t_2}(x)\cdots p_s^{r_s+t_s}(x),$$
$$(f(x), g(x)) = p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

由于 $r_i + t_i - l_i = m_i$, $i = 1, \cdots, s$. 因此

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))} = p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x) = [f(x), g(x)].$$

4. 求下列多项式的最小公倍式:

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

(2) $f(x) = x^4 - x - 1 + \mathrm{i}$. $g(x) = x^2 + 1$.

解: (1) 由于 $(f(x), g(x)) = 1$, $[f(x), g(x)] = f(x)g(x) = x^7 - 7x^6 + 12x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 1$.

(2) 由于 $(f(x), g(x)) = x - \mathrm{i}$, $[f(x), g(x)] = f(x)(x + \mathrm{i}) = x^5 + \mathrm{i}x^4 - x^2 - x - (1 + \mathrm{i})$.

5. 设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式. 证明: 如果对于任何多项式 $f(x), g(x)$, 由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$, 则 $p(x)$ 是不可约多项式.

证明: 若 $p(x)$ 可约, 则存在次数小于 $p(x)$ 的非常数多项式 $f(x), g(x)$ 使 $p(x) = f(x)g(x)$. 从而 $p(x) \mid f(x)g(x)$. 但因

$$\deg f(x) < \deg p(x), \qquad \deg g(x) < \deg p(x),$$

$p(x) \nmid f(x)$, $p(x) \nmid g(x)$, 与假设矛盾, 因此 $p(x)$ 不可约.

***6.** 证明: 次数大于 0 的首一多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是, 对任意的多项式 $g(x)$ 或者有 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者对某一正整数 m, $f(x) \mid g^m(x)$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $f(x) = p^m(x)$, 其中 $p(x)$ 不可约, 则若 $g(x) \in K[x]$ 满足 $p(x) \mid g(x)$, 有

$$f(x) = p^m(x) \mid g^m(x).$$

如 $p(x) \nmid g(x)$, 则 $(p(x), g(x)) = 1$, 从而 $(p^m(x), g(x)) = 1$, 即 $(f(x), g(x)) = 1$.

$(\Leftarrow)$ 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个首一不可约因子, 则 $(p(x), f(x)) = p(x)$, 从而存在某个正整数 m, 使 $f(x) \mid p^m(x)$, 这说明 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的唯一不可约因子. 所以 $f(x) = cp^r(x)$. 又因 $f(x), p(x)$ 的首项系数都是 1, 故 $c = 1$. 从而 $f(x) = p^r(x)$.

***7.** 证明: 次数大于 0 的首一多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是, 对任意的多项式 $g(x), h(x)$, 由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x) \mid g(x)$, 或者对某一正整数 m, $f(x) \mid h^m(x)$.

证明: $(\Rightarrow)$ 设 $f(x) = p^m(x)$, 其中 $p(x)$ 是首一不可约多项式, 则由 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 可得 $p(x) \mid g(x)h(x)$, 从而 $p(x) \mid g(x)$ 或 $p(x) \mid h(x)$. 于是 $f(x) = p^m(x) \mid g^m(x)$ 或 $f(x) = p^m(x) \mid h^m(x)$.

$(\Leftarrow)$ 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个首一不可约因子, 则 $f(x) = p(x)f_1(x)$. 从而 $f(x) \mid p(x)f_1(x)$. 而 $f(x) \nmid f_1(x)$, 从而存在某个正整数 m, 使 $f(x) \mid p^m(x)$, 这说明 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的唯一不可约因子. 所以 $f(x) = cp^r(x)$. 又因 $f(x), p(x)$ 的首项系数都是 1, 故 $c = 1$. 从而 $f(x) = p^r(x)$.

§6 重因式

1. 判别下列有理系数多项式有无重因式, 若有, 则求出重因式:

(1) $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;

(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$;

(3) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;

(4) $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$.

解: (1) $x + 1$, 4 重.

(2) $x - 2$, 3 重.

(3) $x^2 - 2x + 2$, 2 重.

(4) $x+3$, 2 重, $x-1$, 3 重.

2. a,b 应满足什么条件, 下列多项式有重因式?

(1) $f(x)=x^3+3ax+b$; (2) $f(x)=x^4+4ax+b$.

解: (1) 当 $a=b=0$ 有 3 重因式 x, 当 $4a^3=-b^2$ 且 $a\neq 0$, 有 2 重因式 $2ax+b$.

(2) 当 $a=b=0$ 有 4 重因式 x, 当 $27a^4=b^3$ 且 $a\neq 0$, 有 2 重因式 $3ax+b$.

3. 设 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k 重因式, 能否说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式, 为什么?

解: 不能. 因为又可能 $f'(x)$ 任一重因式都不是 $f(x)$ 的因式. 例如 $f(x)=x^4-1$, $f'(x)=4x^3$.

4. 证明: 如果 $(f'(x),f''(x))=1$, 那么, $f(x)$ 的重因式都是 $f(x)$ 的二重因式.

证明: 由于 $(f'(x),f''(x))=1$, $f'(x)$ 的任一因式都不是 $f''(x)$ 的因式. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式, 则 $p(x)\mid f'(x)$, 于是 $p(x)\nmid f''(x)$, 说明 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的单因式, 故 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的二重因式.

5. 证明: $K[x]$ 中不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)\in K[x]$ 的 k $(k\geqslant 1)$ 重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

证明: $(\Rightarrow)$ 对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时结论显然成立. 现设结论对 $k-1$ 成立. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 则 $f(x)=p^k(x)g(x)$, 其中 $(p(x),g(x))=1$. 则

$$f'(x)=kp^{k-1}(x)g(x)+p^k(x)g'(x)=p^{k-1}(x)(kg(x)+p(x)g'(x)).$$

由 $(p(x),g(x))=1$ 可得 $(p(x),kg(x)+p(x)g'(x))=1$, 因此 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 根据归纳假设, $p(x)$ 是 $f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式. 而 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式是已知的.

$(\Leftarrow)$ 如 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式, 则 $p(x)$ 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的一重因式, 进而, $p(x)$ 是 $f^{(k-2)}(x)$ 的二重因式, 依次类推, 可知 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

6. 试求多项式 $x^{1999}+1$ 除以 $(x-1)^2$ 所得余式.

解: 设 $x^{1999}+1=(x-1)^2q(x)+ax+b$, 则两边求导后得

$$1999x^{1998}=2(x-1)q(x)+(x-1)^2q(x)+a.$$

以 $x=1$ 代入上两式, 得

$$a=1999, \qquad b=-1997.$$

故所求余式为 $1999x-1997$.

§7 多项式的根

1. 求下列多项式的公共根:

(1) $f(x)=x^4+2x^2+9$, $g(x)=x^4-4x^3+4x^2-9$;

(2) $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$, $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$.

解: (1) $1+\sqrt{2}\mathrm{i}$, $1-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

(2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

2. 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$, 求 A, B.

解: $A=1$, $B=-2$.

3. 已知 $x^4-3x^3+6x^2+ax+b$ 能被 x^2-1 整除, 求 a, b.

解: $a=3$, $b=-7$.

4. 证明: 如果 $f(x) \mid f(x^n)$, 那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

证明: 设 a 是 $f(x)$ 的一个根, 则 $f(a)=0$, 于是 $f(a^n)=0$, 又可得到 $f((a^n)^n)=f(a^{n^2})=0$, $\ldots$, $f(a^{n^n})=0$. 因而 $a, a^n, a^{n^2}, \cdots, a^{n^n}$ 都是 $f(x)$ 的根. 但 $f(x)$ 的不同根仅有有限多个, 故必有 $k<l$ 使 $a^{n^k}=a^{n^l}$, 即

$$a^{n^k}(a^{n^l-n^k}-1)=0.$$

于是 $a=0$ 或 $a^{n^l-n^k}=1$, 故 a 为 0 或单位根.

5. 证明: $\sin x$ 不是多项式.

证明: $\sin x$ 有无限多个不同的根 $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 而多项式只有有限多个根. 因此 $\sin x$ 不是多项式.

6. 已知多项式 $f(x)=x^5-10x^2+15x-6$ 有重根, 试求它的所有根并确定根的重数.

解: $\dfrac{-3+\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$, $\dfrac{-3-\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$, 1,1,1.

7. 求 t 的值, 使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

解: $t=3$ 时, 1 为 3 重根; $t=-\dfrac{15}{4}$ 时, $-\dfrac{1}{2}$ 为 2 重根.

8. 求多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有重根的条件.

解: $4p^3+27q^2=0$.

9. 证明: 下列多项式没有重根:

(1) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$;

*(2) $f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n$.

证明: (1)

$$\begin{aligned}(f(x),f'(x))&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\&=\left(\frac{x^n}{n!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)=1.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 无重根.

(2) 设

$$g(x)=(1-x)^2(1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n)=1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2},$$

$$g'(x)=(n+2)(n+1)x^{n+1}-(n+2)(n+1)x^n,$$

$$(g(x),g'(x))=x-1.$$

所以 $g(x)$ 仅有的重根是 $x=1$. 又 $f(x)$ 的重根显然都是 $g(x)$ 的重根, 而 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的根, 故 $f(x)$ 无重根.

10. 证明: $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b\ (n>2,n>m>0)$ 不能有非零的重数大于 2 的根.

证明: $f'(x)=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$.

(a) 当 $a\neq 0$ 时, $nx^m+(n-m)a$ 的根都是单根, 所以 $f(x)$ 的重数大于 2 的根只可能是 $x=0$.

(b) 当 $a=0$ 时, $f'(x)$ 的仅有的重根为 $x=0$, 故 $f(x)$ 的重数大于 2 的根只可能是 $x=0$.

11. 如果 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根, 证明: a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

证明:

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a),\\g'(x)&=\frac{1}{2}[f'(a)-f'(x)]+\frac{x-a}{2}f''(x),\\g''(x)&=\frac{x-a}{2}f'''(x),\end{aligned}$$

显然 a 是 $g(x),g'(x),g''(x)$ 的根, 又 a 是 $f'''(x)$ 的 k 重根, 因此 a 是 $g''(x)$ 的 $k+1$ 重根, 是 $g(x)$ 的 $k+3$ 重根.

12. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ 而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根 $\Longleftrightarrow$ $x-x_0$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式

$\Longleftrightarrow$ $x-x_0$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式

$\Longleftrightarrow$ $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x)=0, f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

13. 证明: 如果 $f'(x)\mid f(x)$, 则 $f(x)$ 有 n 重根, 其中 $n=\deg f(x)$.

证明: 由假设, $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=c(x-a)$. 从而 $x-a$ 为 $f(x)$ 仅有的不可约因式 (推论 6.4), 所以 $f(x)=c(x-a)^n$, $f(x)$ 有 n 重根.

14. 试按下表所给的数值, 求次数最低的多项式:

x	1	2	3	4
y	2	1	4	3

解: $f(x)=-\dfrac{4}{3}x^3+10x^2-\dfrac{65}{3}x+15$.

15. 若 n 次多项式 $f(x)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 而数 c 不是 $f(x)$ 的根, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

证明: 考察多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 则

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i},\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

***16.** 应用克拉默法则导出拉格朗日插值公式.

证明: 设所求多项式为

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1},$$

其中 c_i 待定. 将 a_i, b_i 代入上式两边, 得 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 a_n + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

此线性方程组的系数矩阵 A 是范德蒙德矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$|A| = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

由于 a_i 互不相同, 故 $|A| \neq 0$, 所以线性方程组有唯一解.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

故所求的唯一次数不超过 $n-1$ 的多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= (1\ x\ \cdots\ x^{n-1}) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (1\ x\ \cdots\ x^{n-1}) A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} (1\ x\ \cdots\ x^{n-1}) A^{*} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}b_k \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_{k+1} & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & \cdots & a_{k-1}^2 & a_{k+1}^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{k-1}^{n-1} & a_{k+1}^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}b_k \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(x-a_i)\prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ i,j\neq k}}(a_j-a_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\frac{b_kF(x)}{(x-a_k)(a_n-a_k)\cdots(a_{k+1}-a_k)(a_k-a_{k-1})\cdots(a_k-a_1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{b_kF(x)}{(x-a_k)F'(a_k)}.$$

这里 $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

*__17.__ 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的数, $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. 证明: 任何多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

证明: 考察

$$\frac{1}{F(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

两边同乘以 $x-a_i$, 再令 $x=a_i$, 可得

$$A_i=\frac{1}{F'(a_i)}.$$

因此可得恒等式

$$\frac{1}{F(x)}=\frac{1}{(x-a_1)F'(a_1)}+\frac{1}{(x-a_2)F'(a_2)}+\cdots+\frac{1}{(x-a_n)F'(a_n)}.$$

从而

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

令

$$f(x)=(x-a_i)f_i(x)+f(a_i),$$

则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{n}[(x-a_i)f_i(x)+f(a_i)]\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)F(x)}{F'(a_i)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} \\
&= F(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{F'(a_i)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.
\end{aligned}
$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}\in K[x]$, 且 $\deg\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}\leq n-1$, 所以用 $F(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$.

***18.** 已知 $a_1,\cdots,a_n$; $b_1,\cdots,b_n$ 为互不相同的数, 求解下列方程组:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{b_1-a_1}x_1+\dfrac{1}{b_1-a_2}x_2+\cdots+\dfrac{1}{b_1-a_n}x_n=-1, \\
\dfrac{1}{b_2-a_1}x_1+\dfrac{1}{b_2-a_2}x_2+\cdots+\dfrac{1}{b_2-a_n}x_n=-1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1}{b_n-a_1}x_1+\dfrac{1}{b_n-a_2}x_2+\cdots+\dfrac{1}{b_n-a_n}x_n=-1.
\end{cases}
$$

解: 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是此方程组的任一解, 考察有理分式

$$
F(x)=1+\frac{x_1}{x-a_1}+\frac{x_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{x_n}{x-a_n}, \tag{$*$}
$$

则 $F(b_i)=0$, $i=1,\cdots,n$.

令 $F(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$, 则 $\deg g(x)=n$, 且 $g(x)$ 的首项为 x^n. 由于 $F(b_i)=0$, 故 $g(b_i)=0$, $i=1,\cdots,n$, 所以

$$
g(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).
$$

$$
F(x)=\frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}.
$$

令

$$
f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).
$$

考察 $h(x)=g(x)-f(x)$, 则 $\deg h(x)\leq n-1$.

由于 $h(a_i)=g(a_i)$, 由拉格朗日公式,

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(a_i)f(x)}{(x-a_i)f'(a_i)},$$

$$g(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{g(a_i)f(x)}{(x-a_i)f'(a_i)},$$

$$F(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-a_i)}\cdot\frac{g(a_i)}{f'(a_i)},$$

与 (*) 比较, 即得

$$x_1=\frac{g(a_1)}{f'(a_1)},x_2=\frac{g(a_2)}{f'(a_2)},\cdots,x_n=\frac{g(a_n)}{f'(a_n)}.$$

§8　复系数与实系数多项式

1. 分别求多项式 $f(x)=x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1$ 在复数域和实数域上的标准分解式.

解: $f(x)=(x^2+1)(x-1)^3=(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x-1)^3$.

2. 分别求多项式 $f(x)=x^n-1$ 在复数域和实数域上的标准分解式.

解: 在复数域上的分解式:

$$f(x)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right);$$

在实数域上的分解式:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\dfrac{2k\pi}{n}x+1\right), & n\text{ 为奇数};\\ (x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\dfrac{2k\pi}{n}x+1\right), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

3. 已知 m,n,p 为非负整数, 证明: $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 能被 x^2+x+1 整除.

证明: 因为

$$\begin{aligned}x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}&=x^{3m}-1+x^{3n+1}-x+x^{3p+2}-x^2+x^2+x+1\\&=(x^{3m}-1)+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+x^2+x+1.\end{aligned}$$

由于 $x^3-1\mid x^{3m}-1$, $x^3-1\mid x^{3n}-1$, $x^3-1\mid x^{3p}-1$, 所以 $x^2+x+1\mid x^{3m}-1+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+(x^2+x+1)$.

另证: 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为 x^2+x+1 的根, 则 $\varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1$. 所以 $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1^{3m}+\varepsilon_1^{3n+1}+\varepsilon_1^{3p+2}=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2=0$. 同理 $f(\varepsilon_2)=0$. 所以 $x^2+x+1\mid(x)$.

4. 证明: 如果 $x^2+x+1\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 那么 $f_1(1)=f_2(1)=0$.

证明: 设 $\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\varepsilon,\overline{\varepsilon}$ 都是 x^2+x+1 的根. 由于 $x^2+x+1\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 所以

$$f_1(1)+\varepsilon f_2(1)=0,\qquad f_1(1)+\overline{\varepsilon}f_2(1)=0.$$

由此得 $f_1(1)=f_2(1)=0$.

5. 证明: 如果 $x-1\mid f(x^n)$, 那么 $x^n-1\mid f(x^n)$.

证明: 由于 $x-1\mid f(x^n)$, 所以 $f(1)=0$. 从而对任意的 n 次单位根 ε,

$$f(\varepsilon^n)=f(1)=0,$$

所以 $x^n-1\mid f(x^n)$.

6. 已知多项式 $f(x)=x^3+\mathrm{i}x^2+(1-\mathrm{i})x-10-2\mathrm{i}$ 有实根, 试求 $f(x)$ 的全部根.

解: 2, $-1+\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\mathrm{i}$, $-1+\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\mathrm{i}$.

***7.** 证明: 实系数多项式 $f(x)$ 可表为两个实系数多项式的平方和的充分必要条件是对任何的实数 a, 都有 $f(a)\geqslant 0$.

证明: 必要性显然. 下证充分性.

设

$$f(x)=c(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\cdots(x-a_t)^{l_t}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{k_s},$$

这里 $a_1<a_2<\cdots<a_t$, $p_i^2-4q_i<0$, $l_i>0$, $k_i>0$. 由条件知, $c>0$. 任取 b,c 使 $a_{r-1}<b<a_r$, $a_r<c<a_{r+1}$, 则 $f(b)$ 的符号为 $(-1)^{l_r+\cdots+l_t}$, $f(c)$ 的符号为 $(-1)^{l_{r+1}+\cdots+l_t}$. 又因 $f(b)>0$, $f(c)>0$, 故 $(-1)^{l_r}>0$, l_r 是偶数, $r=1,\cdots,t$. 从而

$$f(x)=g^2(x)(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}.$$

设

$$x^2+p_ix+q_i=(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i}),\qquad \alpha_i\in\mathbb{C},$$

则

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)=u(x)+\mathrm{i}v(x),\qquad u(x),v(x)\in\mathbb{R}[x],$$

$$(x-\overline{\alpha_1})(x-\overline{\alpha_2})\cdots(x-\overline{\alpha_s})=u(x)-\mathrm{i}v(x).$$

从而

$$(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}=u^2(x)+v^2(x).$$

$$f(x)=g^2(x)(u^2(x)+v^2(x))=(g(x)u(x))^2+(g(x)v(x))^2.$$

*__8.__ 试用施图姆定理隔离下列多项式的实根:

(1) x^3-3x-1; (2) x^3+x^2-2x-1;

(3) x^4+x-1; (4) $x^4+4x^3-12x+9$.

解: (1) 施图姆列为: x^3-3x-1, $^2-1$, $2+1$, 1. 变号数如下表:

	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f_0(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f_1(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f_2(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_3(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$V(x)$	3	3	2	1	1	0	0

由此知, $f(x)$ 有 3 个实根, 实根范围是 $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$.

(2) 施图姆列为: x^3+x^2-2x-1, $3x^2+2x-2$, $2x+1$, 1.

实根数为 3, 实根范围是 $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$.

(3) 施图姆列为: x^4+x-1, $4x^3+1$, $-3x-4$, -1.

实根数为 2, 实根范围是 $(-2,-1)$, $(0,1)$.

(4) 施图姆列为: $x^4+4x^3-12x+9$, x^3+3x^2-3, x^2+3x-4, $-4x-3$, 1. 无实根.

§9 有理系数多项式

1. 试求下列多项式的有理根:

(1) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$; (2) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;

(3) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-15$;

(4) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

解: (1) 3, -2.

(2) -3, $\dfrac{1}{2}$.

(3) $-\dfrac{1}{2}$.

(4) 2, 2, 2.

2. 证明下列多项式在有理数域上不可约:

(1) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;　　(2) $x^5-12x^3+36x-12$;

(3) x^4-x^3+2x+1;　　(4) $x^4+4kx+1$,　k 为整数

(5) x^p+px+1,　p 为奇素数;　　(6) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$.

证明: (1) 取 $p=2$, 由艾森斯坦因判别法知, $f(x)$ 不可约.

(2) 取 $p=3$, 由艾森斯坦因判别法知, $f(x)$ 不可约.

(3) $f(y+1)=y^4+3y^3+3y^2+3y+3$, 取 $p=3$, 由艾森斯坦因判别法知, $f(y+1)$ 不可约, 故 $f(x)$ 不可约.

(4) $f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+4(k+1)y+2(2k+1)$, 取 $p=2$, 由艾森斯坦因判别法知, $f(y+1)$ 不可约, 故 $f(x)$ 不可约.

(5)

$$\begin{aligned}f(y-1)=(y-1)^p+p(y-1)+1&=\sum_{k=0}^{p}C_p^k(-1)^k y^{p-k}+p(y-1)+1\\&=\sum_{k=0}^{p-1}C_p^k(-1)^k y^{p-k}+py-p\\&=y^p-py^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}y^{p-2}+\cdots+\frac{p(p-1)}{2}y^2+2py-p.\end{aligned}$$

由艾森斯坦因判别法知, $f(y-1)$ 不可约, 故 $f(x)$ 不可约.

(6) 因为 $f(x)$ 无有理根, 故若 $f(x)$ 可约, 则必有

$$f(x)=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)\quad 或\quad f(x)=(x^2+ax-1)(x^2+bx-1).$$

对于左式, 计算其 3 次项及 1 次项系数, 得 $a+b=5$, $a+b=-5$, 不可能.

对右式, 令 $x=1$, 得 $ab=-1$, 又 $a+b=5$, 也不可能.

故 $f(x)$ 不可约.

3. 试将下列分式的分母有理化:

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$;　　(2) $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$;

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

(4) $\dfrac{a^2-3a-1}{a^2+2a+1}$, 其中, a 为方程 $x^3+x^2+3x+4=0$ 的根.

解: (1) 考察 $f(x)=2x^2+x+1$ 及 $g(x)=x^3-2$. 易知 $(f(x),g(x))=1$. 经计算知

$$(2x^2+x+1)\frac{x^2+7x-3}{23}-(x^3-2)\frac{-2x+13}{23}=1.$$

所以

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{23}(-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}).$$

(2) $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{7}(1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8})$.

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

(4) $\dfrac{a^2-3a-1}{a^2+2a+1}=17a^2-3a+55$.

4. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式. 证明: 如果 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都是奇数, 则 $f(x)$ 无整数根.

证明: 反证. 如 $f(x)$ 有整数根 a, 则 $f(x)=(x-a)g(x)$, 其中 $g(x)$ 为整系数多项式. 则 $0-a$ 与 $1-a$ 中至少有一个是偶数, 从而 $f(0), f(1)$ 中至少有一个为偶数, 矛盾.

5. 设 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 是一个整系数多项式. 证明: 如果 $bd+cd$ 为奇数, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明: 由题设, d 与 $b+c$ 都是奇数, 从而 $f(0)=d$ 以及 $f(1)=1+b+c+d$ 均为奇数, 故 $f(x)$ 无整数根. 又因 $f(x)$ 的首项系数为 1, 且 $\deg f(x)=3$, 所以 $f(x)$ 不可约.

6. 已知整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 无有理根. 证明: 如果有素数 p, 使

(1) $p\nmid a_0$;

(2) $p\mid a_i, i=2,3,\cdots,n$;

(3) $p^2\nmid a_n$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明: 如 $p\mid a_1$, 则由艾森斯坦因判别法知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

以下设 $p\nmid a_1$. 设 $f(x)=g(x)h(x)$, $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 由于 $f(x)$ 无有理根, 因此 $2\le\deg g(x)\le n-2$, $2\le\deg h(x)\le n-2$. 设

$$g(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k,\qquad k\ge 2, m\ge 2,$$

$$h(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_m,\qquad k+m=n.$$

由于 $b_kc_m=a_n$, $p\mid a_n$, $p^2\nmid a_n$, 可设 $p\mid b_k$, $p\nmid c_m$. 又因 $p\nmid b_0$, 设 b_l 是从末尾起最先一个不能被 p 整除的系数, 则

$$p\nmid a_{m+l}=c_mb_l+c_{m-1}b_{l+1}+\cdots$$

但因 $m+l\ge 2$, $p\mid a_{m+l}$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

*7. 试确定所有的整数 m, 使 x^5+mx-1 在有理数域上可约.

证明: (a) 如 $m=0$, 则 x^5-1 显然可约.

(b) 如 $f(x)$ 有一次因式, 则 $1+m-1=0$ 或 $-1-m-1=0$, 从而 $m=0$ 或 -2.

(c) 若 $f(x)$ 不含一次因式, 但可约, 则可设

$$x^5+mx-1=(x^2+ax\pm 1)(x^3+bx^2+cx\mp 1).$$

比较两边系数, 得

$$a+b=0,\quad ab+c\pm 1=0,\quad ac\pm b\mp 1=0,\quad \mp(a-c)=m.$$

故 $b=-a$,

$$\begin{cases}-a^2+c=\mp 1\\ ac\mp a=\pm 1\\ m=\mp(a-c)\end{cases}$$

在第一种情形下, $c=0$, $a=-1$, $m=1$; 在第二种情形下, $c=2$, $a(c+2)=-1$, 不可能. 所以 m 的可能取值为 0, 1, -2. 在此 3 种情况下 x^5+mx-1 都可约.

*8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的整数, 证明: 多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明: 设

$$f(x)=g(x)h(x),\quad g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x],\quad \deg g(x),\deg h(x)<\deg f(x).$$

则 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=-1$, 故 $g(a_i)=-h(a_i)=\pm 1$. 从而 $g(a_i)+h(a_i)=0$. 于是多项式

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

有 n 个不同的根, 但 $\deg F(x)<n$, 只能 $F(x)=0$, $g(x)=-h(x)$, $f(x)=-g^2(x)$. 而当 x 充分大时, 有 $f(x)>0$, $-g^2(x)\le 0$, 矛盾. 因此

*9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的整数, 证明: 多项式

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$$

在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明: 设 $f(x)=g(x)h(x)$, $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 且

$$0<\deg g(x)<2n,\qquad 0<\deg h(x)<2n.$$

又因 $\deg g(x)+\deg h(x)=2n$, 故 $g(x),h(x)$ 中至少有一个的次数 $\leq n$, 不妨设 $\deg h(x)\leq n$. 又设 $g(x),h(x)$ 均为首一多项式.

由于 $f(x)$ 在实数上始终取正值, 因此 $f(x)$ 无实根, $g(x),h(x)$ 亦无实根. 于是 $g(x),h(x)$ 在实数上始终取正值. 又因 $f(a_i)=1$, 故 $h(a_i)=g(a_i)=1$. $h(x)-1$ 有 n 个不同的根 $a_1,\cdots,a_n$, 所以

$$h(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1.$$

从而 $\deg g(x)=n$, 进而

$$g(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1.$$

于是

$$\begin{aligned}g(x)h(x)&=[(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1]^2\\&=(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2+2(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1\neq f(x),\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $f(x)$ 不可约.

***10.** 设本原多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约. 证明: $f(x^2)$ 在有理数域上可约的充分必要条件是存在整数 $c\neq 0$ 及整系数多项式 $g(x),h(x)$, 使

$$cf(x)=g^2(x)-xh^2(x).$$

证明: 充分性显然, 以下证必要性.

设 $g(x)$ 为 $f(x^2)$ 的任一不可约因式, 则由 $g(x)\mid f(x^2)$ 可得 $g(-x)\mid f(x^2)$, 显然 $g(-x)$ 也不可约.

$g(x)$ 与 $g(-x)$ 的关系仅有以下 3 种可能:

(a) $g(x)=g(-x)$; (b) $g(x)=-g(-x)$; (3) $(g(x),g(-x))=1$.

(a) 如 $g(x)=g(-x)$, 则 $g(x)=h(x^2)$, 由 $h(x^2)\mid f(x^2)$ 得 $h(x)\mid f(x)$, 而 $f(x)$ 不可约, 所以 $h(x)=cf(x)$, $g(x)=cf(x^2)$, 与 $f(x^2)$ 可约矛盾. 因此 $g(x)\neq g(-x)$.

(b) 如 $g(x)=-g(-x)$, 则 $g(x)=-xh(x^2)$, $xh(x^2)\mid f(x^2)$, 故 $x\mid f(x)$, 于是 $\pm f(x)=-x=0^2-x\cdot 1^2$, 结论成立.

(c) 如 $(g(x),g(-x))=1$, 则 $g(x)g(-x)\mid f(x^2)$. 设 $g(x)=u(x^2)+xv(x^2)$, 则

$$g(x)g(-x)=u^2(x^2)-x^2v^2(x^2).$$

而 $u^2(x^2)-x^2v^2(x^2)\mid f(x^2)$, 因此

$$u^2(x)-xv^2(x)\mid f(x).$$

故存在 $c\neq 0$ 使 $cf(x)=u^2(x)-xv^2(x)$, 证毕.

*__11.__ 证明: 对所有的正整数 n, $f(x)=x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1$ 在有理数域上不可约. (提示: 对 n 用归纳法并应用习题 10)

证明: 首先要把习题 10 的结论加强为: 当 $f(x)$ 是本原多项式时, 可取 $c=1$. 为证这一结论, 考察

$$f(x^2)=c^{-1}(g^2(x^2)-x^2h^2(x^2))=c^{-1}(g(x^2)+xh(x^2))(g(x^2)-xh(x^2)),$$

注意到若 $g(x^2)+xh(x^2)=r(g_1(x^2)+xh_1(x^2))$, 其中 $g_1(x^2)+xh_1(x^2)$ 是本原多项式, 则 $g_1(x^2)-xh_1(x^2)$ 也是本原多项式, 于是

$$f(x^2)=c^{-1}r^2(g_1(x^2)+xh_1(x^2))(g_1(x^2)-xh_1(x^2))=c^{-1}r^2(g_1^2(x^2)-x^2h_1^2(x^2)),$$

根据高斯引理, $c^{-1}r^2=1$, 于是 $f(x)=g_1^2(x)-xh_1^2(x)$.

对 n 用归纳法, 并应用加强了的习题 10.

当 $n=1$ 时, 易知 x^2-x+1 在有理数域上不可约.

现设 $x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1$ 在有理数域上不可约, 而 $x^{2^{n+1}}-x^{2^n}+1$ 在有理数域上可约, 则根据加强的习题 10, 存在 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 使

$$x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1=g^2(x)-xh^2(x),$$

两边求导得

$$2^nx^{2^n-1}-2^{n-1}x^{2^{n-1}-1}=2g(x)g'(x)-h^2(x)-2xh(x)h'(x).$$

则 $2\mid h^2(x)$, $2\mid h(x)$, 所以

$$x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1=g^2(x)+4p(x).$$

令

$$g(x)=x^{2^{n-1}}-x^{2^{n-2}}+1+k(x)+2l(x),$$

其中 $k(x)$ 的各项系数都是 0 或 1. 则

$$x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1=x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1+4x^{2^{n-1}}-2x^{2^{n-2}}-2x^{3\cdot 2^{n-2}}+k^2(x)+4p_2(x).$$

因此 $2\mid k(x)$, $4\mid k^2(x)$, 进而

$$x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1=x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1-2x^{2^{n-2}}-2x^{3\cdot 2^{n-2}}+4p_3(x),$$

$$4p_3(x)=2(x^{2^{n-2}}+x^{3\cdot 2^{n-2}},$$

这不可能, 从而知 $x^{2^{n+1}}-x^{2^n}+1$ 在有理数域上不可约.

第十二章　多元多项式

§1　多元多项式

1. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是数域 K 上的 n 元齐次多项式.

证明: 如果存在数域 K 上的 n 元多项式 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $h(x_1,\cdots,x_n)$, 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n),$$

则 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $h(x_1,\cdots,x_n)$ 也都是齐次多项式.

证明: 设 $\deg f=m$, $\deg g=k$, $\deg h=l$. 令

$$g=g_p+g_{p+1}+\cdots+g_k,\qquad h=h_q+h_{q+1}\cdots+h_l,$$

其中 g_i,h_j 分别为 i,j 次齐次多项式, 且 g_p,h_q 是分解中次数最低的齐次多项式, $k+l=m$, 则

$$f=g_ph_q+\sum_{t=p+q+1}^{m}\left(\sum_{i+j=t}g_ih_j\right).$$

因此当 $p+q<m$ 时 f 不是齐次多项式. 而 $p+q=k+l=m$ 可推出 $p=k$, $q=l$, 因此 $g=g_k,h=h_l$ 都是齐次多项式.

2. 设 $f(x,y)\in K[x,y]$. 证明: 如果 $f(x,x)=0$, 则 $x-y\mid f(x,y)$.

证明: 设 $f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)y^k$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x,y)-f(x,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)(y^k-x^k)\\&=(y-x)\sum_{k=1}^{n}a_k(x)(y^{k-1}+y^{k-2}x+\cdots+yx^{k-2}+x^{k-1}).\end{aligned}$$

因此 $x-y\mid f(x,y)$.

*3. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1-a_1} & \dfrac{1}{x_1-a_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_1-a_n} \\ \dfrac{1}{x_2-a_1} & \dfrac{1}{x_2-a_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_2-a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_n-a_1} & \dfrac{1}{x_n-a_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}.$$

解: 把原行列式记为 $D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)$. 则

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{G(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)}{F(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)},$$

其中 G 与 F 都是 $x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n$ 的多项式. 易知

$$F(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\prod_{1\le i,j\le n}(x_i-a_j).$$

由于

$$D_n(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_i,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=0,$$
$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_i,\cdots,a_n)=0,$$

可得

$$\begin{aligned}&G(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)\\ &=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot G_1(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n).\end{aligned}$$

比较两边 x_i 与 a_j 的次数 (都是 $n-1$ 次), 可知 $G_1=c_n$ 是一个常数. 因此

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\cdot c_n}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i-a_j)}.$$

又因

$$\begin{aligned}&[(x_n-a_n)D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)]_{x_n=a_n}\\ &=D_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},a_1,\cdots,a_{n-1}),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\left(\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(x_i-x_j)\right)(x_1-a_n)\cdots(x_{n-1}-a_n)\left(\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\right)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})c_n}{\left(\prod\limits_{1\le i,j\le n-1}(x_i-a_j)\right)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})(x_1-a_n)\cdots(x_{n-1}-a_n)}$$

$$= \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(x_i-x_j)\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\cdot c_n}{\prod\limits_{1\le i,j\le n-1}(x_i-a_j)}$$

$$= D_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},a_1,\cdots,a_{n-1}),$$

可得 $c_n=c_{n-1}$. 依此类推, 最终可得 $c_n=c_1=1$. 因而

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)(a_j-a_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i-a_j)}.$$

§2 对称多项式

1. 用初等对称多项式表示下列对称多项式:

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

(2) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$;

(3) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

(4) $(x_1x_2+x_3)(x_1x_3+x_2)(x_2x_3+x_1)$;

(5) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

(6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

解: (1) 原式 $=x_1x_2(x_1+x_2+x_3)+x_1x_3(x_1+x_2+x_3)+x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-3x_1x_2x_3=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$.

(2)

2	2	0	0	σ_2^2
2	1	1	0	$\sigma_1\sigma_3$
1	1	1	1	σ_4

因此原式 $=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4$.

取 $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=0$, 得 $3=9+3A$, $A=-2$;

取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, 得 $B=2$;

故原式 $=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

(3) 原式 $=(\sigma_1-x_3)(\sigma_1-x_2)(\sigma_1-x_1)=\sigma_1^3-\sigma_1\sigma_1^2+\sigma_2\sigma_1-\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$.

(4) 原式 $=\dfrac{1}{\sigma_3}(\sigma_3+x_3^2)(\sigma_3+x_2^2)(\sigma_3+x_1^2)$. 由于

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2 = \sigma_3^2,$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_3^3 + (\sigma_1 - 2\sigma_2)\sigma_3^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)\sigma_3 + \sigma_3^2)\\ &= \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3.\end{aligned}$$

(5) 原式$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2)$
$= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_3^2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_2^2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_1^2)$
$= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_3^2)^3 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_3^2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - x_3^2)^2 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3)(\sigma_1^2 - 2\sigma$
$= \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$

(6) 原式$= \dfrac{1}{\sigma_3}[(\sigma_3 + \sigma_2)^3 - \sigma_2(\sigma_3 + \sigma_2)^2 + \sigma_1\sigma_3(\sigma_3 + \sigma_2) - \sigma_3^2]$
$= \dfrac{1}{\sigma_3}[\sigma_3(\sigma_3 + \sigma_2)^2 + \sigma_1\sigma_3(\sigma_3 + \sigma_2) - \sigma_3^2]$
$= \sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3^2.$

2. 用初等对称多项式表示下列 n 元对称多项式:

(1) $\sum x_1^4$; (2) $\sum x_1^2x_2^2$;

(3) $\sum x_1^2x_2x_3$; (4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

解: (1) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_4$.

(2) $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.

(3) $\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

(4) $\sigma_2\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_5 + 9\sigma_6$.

3. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $3x^3 - 5x^2 + 1$ 的三个根. 计算

$$x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3.$$

解: 原式 $= \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 = \dfrac{5}{9}$.

4. 设 $xyz \neq 0$, 且 $x + y + z = 0$, 求:

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy}.$$

解: 原式$= \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$
$= \dfrac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3}{xyz} = 3.$

5. 证明: 三次方程 $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件是

$$2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3 = 0.$$

证明: 三个根成等差数列的充分必要条件是以下 3 个数

$$x_1+x_2-2x_3,\quad x_1+x_3-2x_2,\quad x_2+x_3-2x_1,$$

中至少有一个等于 0. 故

三个根成等差数列 $\Longleftrightarrow$ $(x_1+x_2-2x_3)(x_1+x_3-2x_2)(x_2+x_3-2x_1)=0.$

而

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2-2x_3)(x_1+x_3-2x_2)(x_2+x_3-2x_1)\\&=(x_1+x_2+x_3-3x_3)(x_1+x_2+x_3-3x_2)(x_1+x_2+x_3-3x_1)\\&=(-a_1)^3-3(-a_1)(-a_1)^2+9a_2(-a_1)-27(-a_3)\\&=2a_1^3-9a_1a_2+27a_3.\end{aligned}$$

*****6.** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根, 证明: $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的对称多项式可表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

证明: 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^ka_kx^{n-k}.$$

从而

$$\begin{aligned}(x-x_2)\cdots(x-x_n)&=\frac{f(x)}{x-x_1}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\\&=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ka_kx^{n-k}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ka_kx_1^{n-k}}{x-x_1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^ka_k(x^{n-k-1}+x^{n-k-2}x_1+\cdots+x^{n-n-1}).\end{aligned}$$

由最后一式知 x 的各次项系数都是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式 $(a_0=1)$, 从而 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式, 进而由对称多项式基本定理知 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可表成是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式.

*****7.** 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n,$$
$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

(1) 证明:

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k) f(x) + g(x),$$

其中 $g(x)$ 的次数 $< n$ 或 $g(x) = 0$.

(2) 证明**牛顿 (Newton) 公式**:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0 \quad k \leqslant n,$$
$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0 \quad k > n.$$

证明: 设 $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{k+1} f(x)}{x - x_i}$, 则 $g(x) = 0$ 或 $\deg g(x) < n$. 而

$$\begin{aligned} x^{k+1} f'(x) - g(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1} f(x)}{x - x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1} f(x)}{x - x_i} = \left(\frac{x^{k+1} - x_i^{k+1}}{x - x_i} \right) f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} (x^{k-j} x_i^j f(x) = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} (x^{k-j} x_i^j \right) f(x) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} x^{k-j} s_j \right) f(x) \\ &= (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k) f(x). \end{aligned}$$

即得所证.

(2) 比较等式

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k) f(x) + g(x)$$

两边 n 次项系数, 由于 $g(x)$ 的次数 $< n$ 或 $g(x) = 0$, 所以

$x^{k+1} f'(x)$ 的n次项系数$=(s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k) f(x)$ 的n次项系数,

所以当 $k \leq n$ 时,

$$(n-k)(-1)^k \sigma_k = s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^k \sigma_k s_0,$$

即

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

当 $k > n$,

$$0 = s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n},$$

即得所证.

*8. 用初等对称多项式表示 s_2, s_3, s_4, s_5.

解: $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$,

$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$,

$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$,

$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$.

*§3 结式

1. 计算下列多项式的结式:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$;

(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x + 4$;

解: (1) $\operatorname{Res}(f,g) = (-1)^{2\cdot 3}\operatorname{Res}(2x^2 - x - 1, f) = (-1)^6 \cdot 2^3 \cdot f\left(-\dfrac{1}{2}\right) f(1) = -7$.

(2) $f(x), g(x)$ 有公共根 1, 所以结式 $\operatorname{Res}(f,g) = 0$.

2. 当 λ 取何值时, 下列多项式有公共根:

(1) $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$, $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$;

(2) $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9$, $g(x) = x^3 + \lambda x - 3$.

解: (1) $\operatorname{Res}(f,g) = -4(\lambda+1)^2(\lambda-3)$, 故当 $\lambda = -1$ 或 3 时有公共根.

(2) $\operatorname{Res}(f,g) = 9(\lambda^2+12)(\lambda^2+2)$, 故当 $\lambda = \pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时有公共根.

3. 求下列曲线的直角坐标方程:

(1) $x = t^2 + t - 1$, $y = 2t^2 + t - 1$;

(2) $x = \dfrac{t-1}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^2+t-1}{t^2+1}$.

解: (1) $4x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 3y + 1 = 0$.

(2) $5x^2 - 6xy + 2y^2 + 5x - 3y + 1 = 0$.

4. 当 λ 为何值时, 下列多项式有重根?

(1) $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$; (2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + (2-\lambda)x^2 + 2x - 2$.

解: (1) $2, -2$;

(2) $-1, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2} + \dfrac{9}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}, \dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$.

5. 求下列方程组的解:

(1) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=16, \\ 2x^2-xy+y^2-x-y=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y=-3, \\ x^2+4xy-y^2+10y=9. \end{cases}$

解: (1) $\mathrm{Res}_y(f,g)=32(y^4-y^3-3y^2+y+2)$,

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

(2) $\mathrm{Res}_x(f,g)=4(5x^4+40x^3+106x^2+104x+33)$,

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2+\dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ y=1+\dfrac{1}{5}\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2-\dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ y=1-\dfrac{1}{5}\sqrt{5} \end{cases}$$

6. 求下列圆锥曲线的交点坐标:

(1) 圆 $x^2+y^2-3x-y=0$ 与双曲线 $x^2+2xy-y^2-4y-2=0$;

(2) 双曲线 $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=0$ 与双曲线 $9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0$.

解: (1) $(1,-1), \left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right), \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$;

(2) $(0,-1),(1,2),(2,3),(-2,1)$.

7. 证明结式的下列性质: 设 $f(x), g(x)$ 分别是 n 次与 m 次多项式. 则

(1) $\mathrm{Res}(f,g)=(-1)^{mn}\,\mathrm{Res}(g,f)$;

(2) $\mathrm{Res}(af,bg)=a^m b^n\,\mathrm{Res}(f,g)$;

*(3) $\mathrm{Res}((x-a)f,g)=g(a)\,\mathrm{Res}(f,g)$.

证明: (1), (2) 显然. 今证 (3). 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, \qquad g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

则

$$(x-a)f(x)=a_0x^{n+1}+(a_1-a_0a)x^n+\cdots+(a_n-a_{n-1}a)x-a_na.$$

$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1-a_0a & a_2-a_1a & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na & & \\
 & a_0 & a_1-a_0a & a_2-a_1a & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\
 & & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\
 & & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m
\end{array}\right|\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}m+1\end{array}$$

自第一列起, 各列乘 a 加到后一列, 直至最后一列, 可得

$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\
 & & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 \\
b_0 & b_1+b_0a & b_2+b_1a+b_0a^2 & \cdots & \cdots & g(a) & \cdots & g(a)a^m \\
 & b_0 & b_1+b_0a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g(a)a^{m-1} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g(a)
\end{array}\right|\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}m+1\end{array}$$

从最后一行起, 各行乘 $(-a)$ 加到前一行, 直到第 $n+1$ 行, 再按最后一列展开, 可得

$$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=g(a)\operatorname{Res}(f,g).$$

*$\mathbf{8.}$ 设 $f(x)=a(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, $g(x)=b(x-y_1)\cdots(x-y_m)$.

证明: $\operatorname{Res}(f,g)=a^m\prod\limits_{i=1}^{n}g(x_i)=(-1)^{mn}b^n\prod\limits_{j=1}^{m}f(y_j)=a^mb^n\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(x_i-y_j)$.

证明:
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,g)&=a^m\operatorname{Res}((x-x_1)\cdots(x-x_n),g(x))\\
&=a^mg(x_1)\operatorname{Res}((x-x_2)\cdots(x-x_n),g(x))\\
&=a^mg(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\\
&=a^mb^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j)=(-1)^{mn}b^n\prod_{j=1}^{m}f(y_j).\end{aligned}$$

*$\mathbf{9.}$ 证明: $\operatorname{Res}(f(x),g_1(x)g_2(x))=\operatorname{Res}(f(x),g_1(x))\operatorname{Res}(f(x),g_2(x))$.

证明: 设

$$f(x) = a(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, g_1g_2) &= a^{\deg g_1g_2}\prod_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_2(x_i)\\ &= a^{\deg g_1}\prod_{i=1}^{n} g_1(x_i)a^{\deg g_2}\prod_{i=1}^{n} g_2(x_i)\\ &= \operatorname{Res}(f, g_1)\operatorname{Res}(f, g_2).\end{aligned}$$

*__10.__ 设 f 为首一多项式, 证明: 对任意多项式 h, $\operatorname{Res}(f, g) = \operatorname{Res}(f, g + hf)$.

证明: 设 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, g + hf) &= \prod_{i=1}^{n}(g(x_i) + h(x_i)f(x_i))\\ &= \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = \operatorname{Res}(f, g).\end{aligned}$$

*__11.__ 利用习题 7 至 10 证明的结式性质计算下列多项式的结式:

(1) $f(x) = x^n + x + 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$;

(2) $f(x) = x^n + 1$, $g(x) = (x - 1)^n$;

(3) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,
$g(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$.

(4) $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x^m - 1}{x - 1}$;

解: (1) $\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{2n}(1 + 1 + 1)(2^n + 2 + 1) = 3(2^n + 3)$.

(2) $\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^n \cdot 2^n$.

(3) 由于 $f(x) = xg(x) + a_n$, 所以

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{n(n-1)}\operatorname{Res}(g, f) = (-1)^{n(n-1)}\operatorname{Res}(g, a_n) = a_n^{n-1}.$$

(4) (a) 如 $(m, n) = d > 1$, 则 $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ 与 $\dfrac{x^m - 1}{x - 1}$ 有公共根, 因此 $\operatorname{Res}(f, g) = 0$.

(b) 如 $(m, n) = 1$, 不妨设 $n > m$, 则 $n = mq + r$, $0 \le r < m$. 显然 $(m, r) = 1$. 则

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{mq}x^r - 1}{x - 1} = \frac{(x^{mq} - 1)x^r + x^r - 1}{x - 1},$$

从而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^n-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=(-1)^{m-1)(n+r)}\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right).$$

我们证明 $(m-1)(n+r)$ 一定是偶数.

如 $m-1$ 是偶数, 则结论成立. 现设 $m-1$ 是奇数, 则 m 为偶数, 从而 n 是奇数, r 也是奇数, 于是 $n+r$ 是偶数. 从而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^n-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right).$$

再用 r 除 m, 根据辗转相除法的原理, 由 $(m,r)=1$ 可得

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\cdots=\operatorname{Res}\left(\frac{x^{r'}-1}{x-1},1\right)=1.$$

即当 $(m,n)=1$ 时 $\operatorname{Res}\left(\dfrac{x^n-1}{x-1},\dfrac{x^m-1}{x-1}\right)=1$.

***12.** 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in K[x]$,

证明: $f(x)$ 的判别式

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}\operatorname{Res}(f,f').$$

证明:

$$\begin{aligned}
D(f)&=a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-2}\prod_{i\ne j}(x_i-x_j)\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-2}\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n}f'(x_i)\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}\operatorname{Res}((x-x_1)\cdots(x-x_n),f')\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}\operatorname{Res}(f,f').
\end{aligned}$$

*§4 吴消元法

1. 仿照例 4.4 分别用分步法及一步法解多项式方程组:

$$\begin{cases}-12x_2^2+7x_1x_2-2=0,\\-2x_3+x_1^2=0,\\-x_3^2+x_1x_2+2=0.\end{cases}$$

解: 这里只列出分步法的过程, 并列出部分运算结果.

```
>read `d:/mapleuser/wsolve2`:
>P1:=-12*x2^2+7*x1*x2-2;
>P2:=-2*x3+x1^2;
>P3:=-x3^2+x1*x2+2;
>PS1:={P1,P2,P3};
>ord:=[x3,x2,x1];
>B1:=basset(PS1,ord);
```

$$B_1 := [-2x_3 + x_1^2, -12x_2^2 + 7x_1x_2 - 2]$$

```
>R1:=remseta(PS1,B1,ord);
```

$$R_1 := \{8 + 4x_1x_2 - x_1^4\}$$

```
>PS2:={op(B1)} union R1;
>B2:=basset(PS2,ord);
```

$$B_2 := [-2x_3 + x_1^2, 8 + 4x_1x_2 - x_1^4]$$

```
>R2:=remseta(PS2,B2,ord);
```

$$R_2 := \{64x_1^2 + 192 - 48x_1^4 - 7x_1^6 + 3x_1^8\}$$

```
>PS3:={op(B2)} union R2;
>B3:=basset(PS3,ord);
```

$$B_3 := [-2x_3 + x_1^2, 8 + 4x_1x_2 - x_1^4, 64x_1^2 + 192 - 48x_1^4 - 7x_1^6 + 3x_1^8]$$

```
>R3:=remseta(PS3,B3,ord);
```

$$R_3 := \{\}$$

```
>J:=Initial(B3[1],ord)*Initial(B3[2],ord)*Initial(B3[3],
ord);
```

$$J := x_1$$

```
>solveas(B3,ord,{x1});
```

这样解得 8 组解:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{12}\mathrm{i}, \\ x_3 = -\dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\mathrm{i}, \\ x_3 = -\dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{-6+6\sqrt{13}}}{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = \dfrac{2(2+\sqrt{13})}{3\sqrt{-6+6\sqrt{13}}}\mathrm{i}, \\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\sqrt{-6+6\sqrt{13}}}{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = -\dfrac{2(2+\sqrt{13})}{3\sqrt{-6+6\sqrt{13}}}\mathrm{i}, \\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{6+6\sqrt{13}}}{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = \dfrac{2(-2+\sqrt{13})}{3\sqrt{6+6\sqrt{13}}}\mathrm{i}, \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\sqrt{6+6\sqrt{13}}}{3}\mathrm{i}, \\ x_2 = -\dfrac{2(-2+\sqrt{13})}{3\sqrt{6+6\sqrt{13}}}\mathrm{i}, \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}. \end{cases}$$

2. 解多项式方程组:

$$\begin{cases} 2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ x_1x_3 - 2x_3 + x_1x_2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

解: 这里只列出分步法的过程, 并列出部分运算结果.

```
>read `d:/mapleuser/wsolve2`:
>P1:=2*x3^2-x1^2-x2^2;
>P2:=x1*x3-2*x3+x1*x2;
>P3:=x1^2-x2^2;
>PS1:={P1,P2,P3};
>ord:=[x3,x2,x1];
>B1:=basset(PS1,ord);
```

$$B_1 := [x_1x_3 - 2x_3 + x_1x_2, x_1^2 - x_2^2]$$

```
>R1:=remseta(PS1,B1,ord);
```

$$R_1 := \{x_1^2(x_1 - 1)\}$$

```
>PS2:={op(B1)} union R1;
>B2:=basset(PS2,ord);
```

$$B_2 := [x_1x_3 - 2x_3 + x_1x_2, x_1^2 - x_2^2, x_1^2(x_1 - 1)]$$

```
>R2:=remseta(PS2,B2,ord);
```

$$R_2 := \{\}$$

```
>J:=Initial(B2[1],ord)*Initial(B2[2],ord)*Initial(B2[3],
ord);
```

$$J := x_1 - 2$$

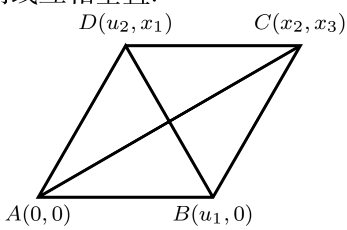
```
>solveas(B2,ord,{x1-2});
```

这样解得 4 组解:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

*§5 几何定理的机器证明

1. 证明: 菱形的对角线互相垂直.



第 1 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned} &P_1 \overset{\text{def}}{=} u_2^2 + x_1^2 - u_1^2 = 0, && (|AD| = |AB|) \\ &P_2 \overset{\text{def}}{=} (x_2 - u_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 - u_1^2 = 0, && (|DC| = |AB|) \\ &P_3 \overset{\text{def}}{=} (x_2 - u_1)^2 + x_3^2 - u_1^2 = 0. && (|BC| = |AB|) \end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

定理结论是 $AC \perp BD$, 可以归结为多项式方程

$$G \overset{\text{def}}{=} (u_2 - u_1)x_2 + x_1x_3 = 0.$$

设变量的序为 x_1, x_2, x_3, 求得两个特征列 $\mathscr{C}_i = \{C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}\}$ 分别为:

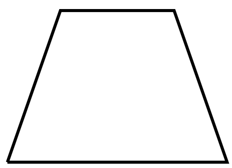
$$\begin{aligned}
C_{11} &= x_1^2 - u_1^2 + u_2^2,\\
C_{12} &= x_2,\\
C_{13} &= x_3.
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
C_{21} &= x_1^2 - u_1^2 + u_2^2,\\
C_{22} &= -x_2 + u_1 + u_2,\\
C_{33} &= x_1x_3 - u_1^2 + u_2^2.
\end{aligned}$$

从 $\mathscr{C}_1$ 导出 $x_2 = x_3 = 0$, 显然是增根. 计算 $\mathrm{Rem}(G, \mathscr{C}_2) = 0$, 可知定理成立. 而非退化条件 $J_2 = x_1$, 从几何意义看, 这是不可以的.

2. 证明: 等腰梯形底角相等.



第 2 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned}
&P_1 \overset{\text{def}}{=} x_2 - u_3 = 0, &&(AB /\!/ CD)\\
&P_2 \overset{\text{def}}{=} u_1 - x_1 - u_2 = 0. &&(\overrightarrow{AD} \text{ 与 } \overrightarrow{CB} \text{ 在 } AB \text{ 上的投影相等})
\end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2\}$.

定理结论是 $\angle BAD = \angle CBA$, 可以归结为多项式方程

$$G \overset{\text{def}}{=} -u_1^2u_3(x_1 - u_1) - u_1^2u_2x_2 = 0.$$

求得特征列 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2\}$ 就是 $\mathscr{P}$ 自己, 而且 $J = 1$, 没有非退化条件. 计算 $\mathrm{Rem}(G, \mathscr{C}) = 0$, 可知定理成立.

如果把定理的第二个条件改成

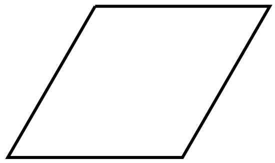
$$P_2 \overset{\text{def}}{=} u_2^2 + u_3^2 - (x_1 - u_1)^2 - x_2^2 = 0, \qquad (|AD| = |BC|)$$

计算后会得到两个特征列, 一个特征列同前, 另一个特征列是

$$C_1 = -x_1 + u_1 + u_2,$$

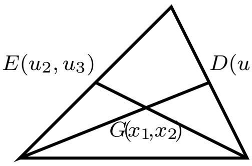
$$C_2 = x_2 - u_3.$$

G 关于这个特征列的余式等于 $u_1^2u_2u_3$, 也就是说结论不对. 从几何意义来看, $C_1 = 0$ 相当于 $u_1 = x_1 - u_2$, 即 $ABCD$ 是平行四边形 (见下图). 这是不符合题意的增根, 因此 $\angle BAD \neq \angle CBA$.



第 2 题的另一种情形

3. 证明: 三角形的两条中线的交点分顶点与对边中点成 2 : 1.



第 3 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_3x_1 - (u_1+u_2)x_2 = 0, \qquad (AGD \text{ 共线})$$
$$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (u_2 - 2u_1)x_2 - (x_1 - 2u_1)u_3 = 0, \qquad (BGE \text{ 共线})$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2\}$.

定理结论是 $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, 可以归结为多项式方程

$$G_1 \stackrel{\text{def}}{=} 3x_1 - 2(u_1+u_2) = 0,$$

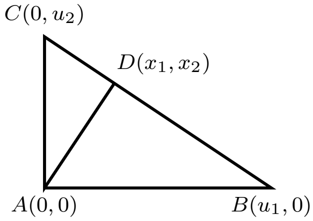
$$G_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3x_2 - 2u_3 = 0.$$

设变量的序为 x_1, x_2, 求得特征列 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2\}$ 为:

$$C_1 = 3x_1 - 2u_1 - 2u_2,$$
$$C_2 = -3x_2 + 2u_3.$$

而且 $J = 1$, 没有非退化条件. 显然 G_1, G_2 都能被 $\mathscr{C}$ 除尽.

4. 证明: 直角三角形斜边上的高是斜边上两线段的比例中项.



第 4 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned} &P_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_1x_1 - u_2x_2 = 0, &&(AD \perp BC)\\ &P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2-u_2)u_1 + u_2x_1 = 0. &&(BDC \text{ 共线}) \end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2\}$.

定理结论是 $|AD|^2 = |CD||DB|$, 可以归结为多项式方程

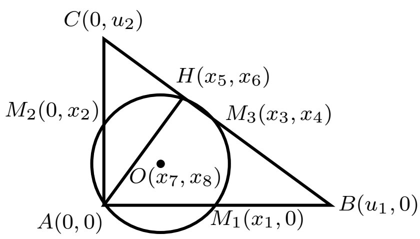
$$G \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^2+x_2^2)^2 - (x_1^2+(x_2-u_2)^2)((u_1-x_1)^2+x_2^2) = 0.$$

设变量的序为 x_1, x_2, 求得特征列 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2\}$ 为:

$$\begin{aligned} C_1 &= (u_1^2+u_2^2)x_1 - u_1u_2^2,\\ C_2 &= -(u_1^2-u_2^2)x_2 + u_1^2u_2. \end{aligned}$$

计算 $\mathrm{Rem}(G, \mathscr{C}) = 0$, 可知定理成立. 而非退化条件是 u_2 以及 $J = (u_1^2+u_2^2)^2$, 从几何意义看, 这些情形都是不允许的.

5. 如图, 设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 是直角, M_1, M_2, M_3 分别是 AB, AC, BC 边的中点. $AH \perp BC$ 并且 H 是垂足. 证明 M_1, M_2, M_3, H 四点共圆.



第 5 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned}
&P_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_1 - 2x_1 = 0, && (M_1 \text{ 是 } AB \text{ 的中点})\\
&P_2 \stackrel{\text{def}}{=} u_2 - 2x_2 = 0, && (M_2 \text{ 是 } AC \text{ 的中点})\\
&P_3 \stackrel{\text{def}}{=} u_1 - 2x_3 = 0, && (M_3 \text{ 是 } BC \text{ 的中点})\\
&P_4 \stackrel{\text{def}}{=} u_2 - 2x_4 = 0, && (M_3 \text{ 是 } BC \text{ 的中点})\\
&P_5 \stackrel{\text{def}}{=} u_1x_5 - u_2x_6 = 0, && (AH \perp BC)\\
&P_6 \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x_6 - u_2) + u_2x_5 = 0. && (BHC \text{ 共线})\\
&P_7 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 - x_7)^2 - x_7^2 = 0, && (|OM_1| = |OA|)\\
&P_8 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2 - x_8)^2 - x_8^2 = 0. && (|OM_2| = |OA|)
\end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2, \cdots, P_8\}$.

定理结论是 $|OH| = |OM_3| = |OA|$, 可以归结为多项式方程

$$G_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_5 - x_7)^2 + (x_6 - x_8)^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0,$$

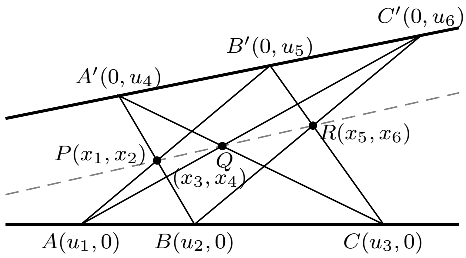
$$G_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0.$$

设变量的序为 $x_1, x_2, \cdots, x_8$, 求得特征列 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_8\}$ 为:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -2x_1 + u_1,\\
C_2 &= -2x_2 + u_2,\\
C_3 &= -2x_3 + u_1,\\
C_4 &= -2x_4 + u_2,\\
C_5 &= (u_1^2 + u_2^2)x_5 - u_1u_2^2,\\
C_6 &= -(u_1^2 + u_2^2)x_6 + u_1^2u_2,\\
C_7 &= -4x_7 + u_1,\\
C_8 &= -4x_8 + u_2.
\end{aligned}$$

计算 $\mathrm{Rem}(G_1, \mathscr{C}) = 0$, $\mathrm{Rem}(G_2, \mathscr{C}) = 0$, 可知定理成立. 而非退化条件是 u_2 以及 $J = (u_1^2 + u_2^2)^2$, 从几何意义看, 这些情形都是不允许的.

6. 如图, A, B, C 三点在一条直线上, A', B', C' 三点在另一条直线上. P, Q, R 是它们连线的交点. 证明: P, Q, R 三点共线.



第 6 题

证明: 因为这是个仿射问题, 因此可建立仿射坐标系如上图所示.

根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned}
&P_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1(-u_4) - u_2(x_2 - u_4) = 0, &&(A'PB\ \text{共线})\\
&P_2 \stackrel{\text{def}}{=} x_1(-u_5) - u_1(x_2 - u_5) = 0, &&(B'PA\ \text{共线})\\
&P_3 \stackrel{\text{def}}{=} x_3(-u_4) - u_3(x_4 - u_4) = 0, &&(A'QC\ \text{共线})\\
&P_4 \stackrel{\text{def}}{=} x_3(-u_6) - u_1(x_4 - u_6) = 0, &&(C'QA\ \text{共线})\\
&P_5 \stackrel{\text{def}}{=} x_5(-u_5) - u_3(x_6 - u_5) = 0, &&(B'RC\ \text{共线})\\
&P_6 \stackrel{\text{def}}{=} x_5(-u_6) - u_2(x_6 - u_6) = 0. &&(C'RB\ \text{共线})
\end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2, \cdots, P_6\}$.

定理结论是 PQR 共线, 可以归结为多项式方程

$$G \stackrel{\text{def}}{=} (x_3 - x_1)(x_6 - x_2) - (x_5 - x_1)(x_4 - x_2) = 0,$$

设变量的序为 $x_1, x_2, \cdots, x_6$, 求得特征列 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_6\}$ 为:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (u_1u_4 - u_2u_5)x_1 - u_1u_2(u_4 - u_5),\\
C_2 &= (u_1u_4 - u_2u_5)x_2 - (u_1 - u_2)u_4u_5,\\
C_3 &= (u_1u_4 - u_3u_6)x_3 - u_1u_3(u_4 - u_6),\\
C_4 &= (u_1u_4 - u_3u_6)x_4 - (u_1 - u_3)u_4u_6,\\
C_5 &= -(u_2u_5 - u_3u_6)x_5 + u_2u_3(u_5 - u_6),\\
C_6 &= -(u_2u_5 - u_3u_6)x_6 + (u_2 - u_3)u_5u_6.
\end{aligned}$$

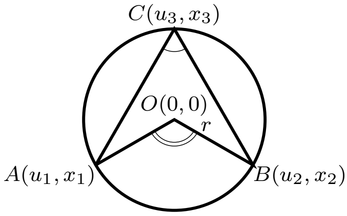
计算 $\mathrm{Rem}(G, \mathscr{C}) = 0$, 可知定理成立. 而非退化条件是 u_2, u_3 以及 $J = (u_1u_4 - u_2u_5)^2(u_1u_4 - u_3u_6)^2(u_2u_5 - u_3u_6)^2$.

对非退化条件的几何意义作分析:

(1) 若 $u_2 = 0$ 或 $u_3 = 0$, 它的几何意义是 B 或 C 与 $A'B'C'$ 共线, 从而 P, Q, R 不确定, 问题无意义.

(2) $u_1u_4-u_2u_5=0 \implies A'B//B'A$, $u_1u_4-u_3u_6=0 \implies A'C//C'A$, $u_2u_5-u_3u_6=0 \implies B'C//C'B$, 任何一种情形出现都会使 P,Q,R 中的一个点无法确定, 问题无意义.

7. 证明: 圆心角等于相应圆周角的两倍.



第 7 题

证明: 根据假设条件可以得到下列多项式方程:

$$\begin{aligned} P_1 &\stackrel{\text{def}}{=} u_1^2+x_1^2-r^2=0, \qquad (|OA|=r)\\ P_2 &\stackrel{\text{def}}{=} u_2^2+x_2^2-r^2=0, \qquad (|OB|=r)\\ P_3 &\stackrel{\text{def}}{=} u_3^2+x_3^2-r^2=0, \qquad (|OC|=r)\end{aligned}$$

这样定理假设可以归结成一个多项式组 $\mathscr{P}=\{P_1,P_2,P_3\}$.

定理结论是 $\angle AOB=2\angle ACB$, 即

$$\tan\angle AOB=\tan(2\angle ACB)=\frac{2\tan\angle ACB}{1-\tan^2\angle ACB}. \qquad (*)$$

由于

$$\angle AOB=\frac{k_{OB}-k_{OA}}{1+k_{OB}k_{OA}}=\frac{u_1x_2-u_2x_1}{u_1u_2+x_1x_2},$$

$$\angle ACB=\frac{k_{CB}-k_{CA}}{1+k_{CB}k_{CA}}=\frac{(u_1-u_3)(x_2-x_3)-(u_2-u_3)(x_1-x_3)}{(u_1-u_3)(u_2-u_3)+(x_1-x_3)(x_2-x_3)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

代入 $(*)$ 式得

$$\frac{u_1x_2-u_2x_1}{u_1u_2+x_1x_2}=\frac{2\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}=\frac{2\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}.$$

因此命题的结论可以归结为多项式方程

$$\begin{aligned} G &\stackrel{\text{def}}{=} (u_1x_2-u_2x_1)(((u_1-u_3)(u_2-u_3)+(x_1-x_3)(x_2-x_3))^2\\ &\quad-((u_1-u_3)(x_2-x_3)-(u_2-u_3)(x_1-x_3))^2)-2(u_1u_2+x_1x_2)\\ &\quad\times((u_1-u_3)(x_2-x_3)-(u_2-u_3)(x_1-x_3))((u_1-u_3)(u_2-u_3)\\ &\quad+(x_1-x_3)(x_2-x_3))=0.\end{aligned}$$

设变量的序为 x_1,x_2,x_3, 求得特征列 $\mathscr{C}$ 就是原来的多项式组 $\mathscr{P}$. 计算 $\mathrm{Rem}(G,\mathscr{C})=0$, 可知定理成立. 而且没有非退化条件.

第十三章　多项式矩阵与若尔当典范形

§1　多项式矩阵

1. 求下列多项式矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-1 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda-1)$.

(2) $\mathrm{diag}(\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2))$.

(3) $\mathrm{diag}(1, \lambda, 0)$.

(4) $\mathrm{diag}\left(1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)^2\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

(5) $\mathrm{diag}(1, 1, (\lambda+2)^3)$.

(6) $\mathrm{diag}(\lambda-1, \lambda(\lambda-1)(\lambda+1), \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1))$.

2. 判断下列多项式矩阵是否等价:

(1) $A=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-3 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ 2\lambda-2 & 2\lambda-5 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} \lambda^2-3\lambda+3 & 2\lambda-3 & \lambda-3 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 4\lambda-7 & 2\lambda-5 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & 2\lambda-4 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ (\lambda+1)^2 & \lambda^2+\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 等价; (2) 不等价.

3. 下列多项式矩阵中, 哪些是可逆的? 若可逆试求其逆.

(1) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda+3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ -1+\lambda & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 可逆, 逆矩阵为 $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda+1 \\ -\lambda-3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

(2) 可逆, 逆矩阵为 $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda^2+\lambda \\ -\lambda-2 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}$.

(3) 可逆, 逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+1 & \lambda & \lambda^2 \\ -\lambda^2+\lambda-2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) 不可逆.

4. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是对所有的复数 c, $A(c)$ 都可逆.

证明: ($\Rightarrow$) 设 $A(\lambda)$ 可逆, 则

$$|A(\lambda)| = a \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

故对任意的 $c \in \mathbb{C}$, $|A(c)| = a$, 所以 $A(c)$ 可逆.

(⇐) 考察 $f(\lambda)=|A(\lambda)|$, 则对任意的 $c\in\mathbb{C}$, $f(c)\neq 0$, 故 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中无根. 所以 $f(\lambda)=a\neq 0\in\mathbb{C}$, $|A(\lambda)|=a\neq 0\in\mathbb{C}$. 因此 $A(\lambda)$ 可逆.

5. 下列结论是否成立: (如成立, 则加以证明, 如不成立, 则举出反例.)

两个多项式矩阵等价的充分必要条件是, 对所有的 $k\in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 都等价.

解: 不成立. 如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda\end{pmatrix},\qquad B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda^2\end{pmatrix},$$

则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 不等价, 但对任意的 $k\in K$, $A(k)$ 与 $B(k)$ 等价.

§2 不变因子

1. 求下列多项式矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & -1\\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda-2\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & \lambda^2\\ 2\lambda & \lambda^2-1 & \lambda^2-\lambda\\ \lambda-1 & \lambda^2 & -\lambda\end{pmatrix}$.

解: (1) 3; (2) 2.

2. 试求下列矩阵的不变因子:

(1) $\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}-\lambda+2 & (\lambda-1)^2 & -\lambda+1\\ 1 & \lambda^2-\lambda & 0\\ \lambda^2-2 & -(\lambda-1)^2 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}\lambda+\alpha & \beta & 1 & 0\\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $1, 1, (\lambda-1)^3$.

(2) $1, \lambda-1, \lambda(\lambda-1)$.

(3) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, 1, [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2$; 如 $\beta = 0$, $1, 1, (\lambda+\alpha)^2, (\lambda+\alpha)^2$.

(4) $1, 1, 1, (\lambda-1)^4$.

(5) 如 $\beta \neq 0$, $1, 1, \cdots, 1, (\lambda-\alpha)^n$; 如 $\beta = 0$, $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha, \cdots, \lambda-\alpha$.

(6) $1, 1, \cdots, 1, \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

3. 设 $A(\lambda)$ 为一个多项式矩阵, 证明: $\operatorname{rank} A(\lambda) = \max\{\operatorname{rank} A(k) | k \in K\}$.

解: 设 $\operatorname{rank} A(\lambda) = r$, 则 $A(\lambda)$ 有一个 r 阶子式 $M_{r+1}(\lambda) = 0$. 故对所有的 $k \in K$, $M_{r+1}(k) = 0$, 这说明 $\operatorname{rank} A(k) \le r$. 又因 $M_r(\lambda) \neq 0$, 存在 $c \in K$ 使 $M_r(c) \neq 0$, 这说明 $r = \max\{\operatorname{rank} A(k) \mid k \in K\}$.

4. 设 $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \cdots, r)$ 为 $A(\lambda)$ 的行列式因子, 证明:

$$D_k^2(\lambda) \mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda), \quad k = 2, 3, \cdots, r-1.$$

证明: 设 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda),$$

则

$$D_{k-1}(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{k-1}(\lambda),$$
$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda) = D_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda),$$

$$D_{k+1}(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{k+1}(\lambda),$$

所以

$$D_k^2(\lambda)=D_{k-1}^2(\lambda)d_k^2(\lambda)\mid D_{k-1}(\lambda)D_k(\lambda)d_k(\lambda)d_{k+1}(\lambda),$$

$$D_k^2(\lambda)\mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda).$$

5. 设 $A(\lambda)$ 为 n 阶方阵, 证明: $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

证明: 存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=Q(\lambda)^{\mathrm{T}}A(\lambda)^{\mathrm{T}}P(\lambda)^{\mathrm{T}},$$

于是 $A(\lambda)$ 与 $A^{\mathrm{T}}(\lambda)$ 等价.

***6.** 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)\in K[x]$, 且 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$.

证明: 存在多项式 $f_{ij}(x)\in K[x]$ $(i=2,3,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n)$, 使

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=1.$$

证明: 考察多项式矩阵

$$A(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)),$$

由已知, $A(x)$ 的不变因子为 1, 故存在可逆矩阵 $P(x)$, 使

$$A(x)P(x)=(1,0,\cdots,0). \qquad (*)$$

设 $|P(x)| = c \neq 0$, 则存在可逆矩阵 $Q(x)$, 使

$$Q(x)P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix}. \tag{**}$$

记

$$Q(x) = (f_{ij}(x)),$$

作

$$B(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

则由 (*) 与 (**) 知

$$B(x)P(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix},$$

于是 $|B(x)||P(x)| = c$, 又因 $|P(x)| = c$, 得 $|B(x)| = 1$, 从而 $f_{ij}(x)$ 即为所求.

§3　矩阵相似的条件

1. 判断下列矩阵是否相似:

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

(3) $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

解: (1) 是; (2) 是; (3) 否.

2. 证明: 任何方阵 A 与它的转置矩阵 A^{T} 相似.

证明: 由于 $\lambda E-A^{\mathrm{T}}=(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}$ 等价于 $\lambda E-A$ (习题 12–2.5), 因此 A 与 A^{T} 相似.

***3.** 设 A 与 B 为 n 阶方阵, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$

证明: 考察等式

$$\begin{aligned}&\big[(\lambda E+A)(\lambda E+B)\big]\big[(\lambda E+A)(\lambda E+B)\big]^*\\&=|(\lambda E+A)(\lambda E+B)|E=|\lambda E+A|E\cdot|\lambda E+B|E\\&=(\lambda E+A)(\lambda E+B)(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*.\end{aligned}$$

所以

$$(\lambda E+A)(\lambda E+B)\left\{[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*\right\}=0.$$

比较上式两边的次数, 知

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*-(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*=0,$$

即

$$[(\lambda E+A)(\lambda E+B)]^*=(\lambda E+B)^*(\lambda E+A)^*.$$

令 $\lambda=0$ 就有

$$(AB)^*=B^*A^*.$$

***4.** 证明: 如果矩阵 A 与 B 相似, 则它们的伴随矩阵 A^* 与 B^* 也相似.

证明: 试 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P, 使$P^{-1}AP=B$. 于是利用习题 4 的结论,

$$B^*=(P^{-1}AP)^*=P^*A^*(P^{-1})^*=P^*A^*(P^*)^{-1}.$$

故 A^* 与 B^* 相似.

***5.** 证明: 矩阵的相似与数域的扩张无关.

证明: 设 A,B 是数域 K_1 中的矩阵, 则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的不变因子都是系数在 K_1 中的多项式. 设数域 $K_1\subset K_2$, 那么这些多项式也可以看成系数在 K_2 中的多项式, 从而不变因子组与数域的扩张无关 (最多差一个常数因子).

而矩阵 A,B 相似当且仅当 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 有相同的不变因子组. 因此矩阵的相似与数域的扩张无关.

*6. 设 A 为 n 阶方阵, λ_0 为 A 的一个特征值. 证明: 特征值 λ_0 的代数重数 $\geqslant n-\mathrm{rank}(\lambda_0 E-A)$.

证明: 设 λ_0 为 A 的 r 重特征值, 设 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 则 $\lambda-\lambda_0 \mid d_n(\lambda)$, 但 $\lambda-\lambda_0 \nmid d_{n-r}(\lambda)$, (否则, 如 $\lambda-\lambda_0 \mid d_{n-r}(\lambda)$, 则 $\lambda-\lambda_0 \mid d_{n-r+1}(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0 \mid d_n(\lambda)$, 于是 $\lambda-\lambda_0$ 的重数 $\geq r+1$) 因此存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

故

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E-A)Q(\lambda_0)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & d_{n-r+1}(\lambda_0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $d_1(\lambda_0)\neq 0,\cdots,d_{n-r}(\lambda_0)\neq 0$, 所以

$$\mathrm{rank}(\lambda_0 E-A)\geq \mathrm{rank}\,P(\lambda_0)(\lambda_0 E-A)Q(\lambda_0)\geq n-r.$$

因此

$$r\geq n-\mathrm{rank}(\lambda_0 E-A).$$

§ 4　初等因子

1. 求下列多项式矩阵的初等因子:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & \lambda^2-1 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\lambda, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+3$.

(2) $\lambda+1, \lambda-3$.

2. 已知多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子, 秩 r 与阶数 n, 求 $A(\lambda)$ 的正规形:

(1) $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2$; $r=4$, $n=5$;

(2) $\lambda-2, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^3$; $r=4$, $n=4$;

(3) $\lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2$; $r=3$, $n=5$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-1), (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2, 0)$.

(2) $\mathrm{diag}(1, \lambda-2, (\lambda-2)^2(\lambda+2), (\lambda-2)^3(\lambda+2)^3)$.

(3) $\mathrm{diag}(\lambda-1, (\lambda-1)^2(\lambda+2), (\lambda-1)^3(\lambda+2)^2, 0, 0)$.

3. 求下列矩阵的正规形:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 \\ \lambda^2-4 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}$.

解: (1) $\mathrm{diag}(1, \lambda(\lambda+1), \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1), \lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1))$.

(2) $\mathrm{diag}(1, \lambda(\lambda^2-4), \lambda(\lambda^2-4), \lambda^2(\lambda^2-4))$.

(3) $\mathrm{diag}(1, \lambda-1, (\lambda-1)(\lambda+1), 0)$.

(4) $\mathrm{diag}(1, 1, \lambda^2-4, 0)$.

4. 求下列矩阵的不变因子, 行列式因子与初等因子:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

解: (1) 不变因子: $1,1,\lambda^2(\lambda-1)$, 行列式因子: $1,1,\lambda^2(\lambda-1)$, 初等因子: $\lambda^2,\lambda-1$.

(2) 不变因子: $1,\lambda,\lambda(\lambda+1)$, 行列式因子: $1,\lambda,\lambda^2(\lambda+1)$, 初等因子: $\lambda,\lambda,\lambda+1$.

(3) 不变因子: $1,\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{n-2\text{个}},\lambda(\lambda-n)$, 行列式因子: $1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-2}$, $\lambda^{n-1}(\lambda-n)$, 初等因子: $\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{n-1\text{个}},\lambda-n$.

(4) 不变因子: $1,1,1,(\lambda+1)^4$, 行列式因子: $1,1,1,(\lambda+1)^4$, 初等因子: $(\lambda+1)^4$.

5. 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 证明: 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数等于 $n-\operatorname{rank}(\lambda_0 E-A)$.

证明: 设 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子. 如 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数为 r, 则

$$\lambda-\lambda_0 \mid d_n(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0 \mid d_{n-r+1}(\lambda),\lambda-\lambda_0 \nmid d_{n-r}(\lambda),\cdots,\lambda-\lambda_0 \nmid d_1(\lambda).$$

因此存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$ 使

$$P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda_0)(\lambda_0 E-A)Q(\lambda_0)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-r}(\lambda_0) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$n-r=\operatorname{rank}P(\lambda_0)(\lambda_0E-A)Q(\lambda_0)=\operatorname{rank}(\lambda_0E-A),$$

即

$$r=n-\operatorname{rank}(\lambda_0E-A).$$

§5 若尔当典范形

1. 求下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}13&16&14\\-6&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&4&2\\3&-6&-3\end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-3&3\\2&-2&2\end{pmatrix}$; (8) $\begin{pmatrix}5&2&6\\-2&0&3\\2&1&-2\end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\5&-4&2&9\\-3&1&2&-2\\2&-4&3&8\end{pmatrix}$; (10) $\begin{pmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$;

(11) $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$; (12) $\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&n-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$.

解: (1) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\sqrt{6} \end{pmatrix}$;

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(11) $\mathrm{diag}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1})$, $1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是 x^n-1 的 n 个根;

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 矩阵 A 可能有怎样的若尔当典范形?

(2) 试确定 A 可对角化的条件.

解: (1) A 仅有一个特征值 $\lambda_0=2$, 所以 A 的若尔当块的块数 $=A$ 的初等因子的个数 $=\mathrm{rank}(\lambda_0E-A)$ (参见习题 12–4.5) 而

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}(\lambda_0E-A)\\&=\begin{cases}2 & \text{当 } ac\neq 0,\\ 1 & \text{当 } a,c \text{ 中一个等于 } 0, \text{ 另一个不等于 } 0, \text{ 或 } a,c \text{ 都是 } 0, \text{ 但 } b\neq 0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } a=b=c=0 \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

因此当 $ac \neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 当 a, c 中一个等于 0, 另一个不等于 0, 或 a, c 都是 0, 但 $b \neq 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 当 $a = b = c = 0$ 时, A 的若尔当典范形是 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) A 可对角化 $\iff a = b = c = 0$.

3. 设矩阵 A 的特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4.$$

试求出 A 所有可能的若尔当典范形.

解: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)^2$, 因此 A 的可能的初等因子为:

(a) $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(b) $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(c) $(\lambda - 1)^3, \lambda + 2, \lambda + 2$;

(d) $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda + 2)^2$;

(e) $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1, (\lambda + 2)^2$;

(f) $(\lambda - 1)^3, (\lambda + 2)^2$.

故 A 的可能的若尔当典范形为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*4. 设矩阵 A 的秩为 1. 证明: A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix} \beta & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\qquad \text{如}\beta=\operatorname{Tr}A\neq 0,$$

或

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\qquad \text{如}\operatorname{Tr}A=0.$$

证明: 由于 A 的秩等于 1, 因此 J_A 的秩也等于 1. 故 A 的若尔当块中仅有一个的秩为 1, 其余的秩都等于 0. 而秩为 0 的若尔当块就是一阶零矩阵 (0), 秩为 1 的若尔当块可能是一阶阵 (β) 或 2 阶若尔当块 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 所以 A 的若尔当典范形只可能为

$$\begin{pmatrix} \beta & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\quad \text{或}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

又因 $\operatorname{Tr}J_A=\operatorname{Tr}A$, 即得所需结论.

*5. 利用上题的结论计算下列矩阵的行列式:

$$(1)\ \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{pmatrix},\quad \begin{array}{c} a_i\neq x, \\ x\neq 0; \end{array}\quad (2)\ \begin{pmatrix} x_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

$x_i\neq a_i$.

解: (1) $|A|=\left|\begin{pmatrix} a_1-x & & \\ & \ddots & \\ & & a_n-x \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$

$$
=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left|E+x\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1-x} & \cdots & \frac{1}{a_1-x}\\ \frac{1}{a_2-x} & \cdots & \frac{1}{a_2-x}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_n-x} & \cdots & \frac{1}{a_n-x}\end{pmatrix}\right|
$$

$$
=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left|E+x\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-x} & & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\right|
$$

$$
=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right].
$$

(2) 同样的方法可得

$$
|A|=\prod_{i=0}^{n}(x_i-a_i)\left[1+\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right].
$$

*__6.__ 设 λ_0 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值. 令

$$
n_0=\operatorname{rank}E=n, n_k=\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)^k,
$$

$$
a_k=n_{k-1}-n_k, b_k=a_k-a_{k+1},\ k=1,2,\cdots
$$

如下表所示:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
n_0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_4 & & \cdots\\
& \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & \\
& a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots & & \\
& & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & & \\
& & b_1 & & b_2 & & b_3 & \cdots & & &
\end{array}
$$

证明: (1) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的若尔当块的块数等于 a_1;

(2) 矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数等于 b_k;

证明: (1) 由习题 12–4.5 立即可得.

(2) 由于 n_i 是矩阵的相似不变量, 故所有的 a_i,b_i 也都是矩阵的相似不变量. 设 A 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块的块数为 m_k, 而其余不属于特征值 λ_0 的各若尔当块的阶数之和为 m, 则

$$
n_0=\sum_{k\geq 1}m_kk+m,
$$

$$
\begin{gathered}
n_1=\sum_{k\geq 1}m_k(k-1)+m,\\
n_2=\sum_{k\geq 2}m_k(k-2)+m,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n_r=\sum_{k\geq r}m_k(k-r)+m,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
a_1&=\left(\sum_{k\geq 1}m_k k+m\right)-\left(\sum_{k\geq 1}m_k(k-1)+m\right)=\sum_{k\geq 1}m_k,\\
a_2&=\left(\sum_{k\geq 1}m_k(k-1)+m\right)-\left(\sum_{k\geq 2}m_k(k-2)+m\right)\\
&=\left(\sum_{k\geq 2}m_k(k-1)+m\right)-\left(\sum_{k\geq 2}m_k(k-2)+m\right)=\sum_{k\geq 2}m_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_r&=\left(\sum_{k\geq r-1}m_k(k-r)+m\right)-\left(\sum_{k\geq r}m_k(k-r)+m\right)\\
&=\left(\sum_{k\geq r}m_k(k-r)+m\right)-\left(\sum_{k\geq r}m_k(k-r)+m\right)=\sum_{k\geq r}m_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$
b_r=a_r-a_{r+1}=\sum_{k\geq r}m_k-\sum_{k\geq r+1}m_k=m_r.
$$

*7. 利用上题的结论计算下列矩阵的若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{pmatrix}$.

解: (1) 易知, $\lambda_0 = 1$ 是矩阵的一个特征值. 可得下表:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & & 2 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
& 2 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & \cdots & \\
& & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & \cdots & & &
\end{array}$$

所以

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = , \qquad b_3 = 1.$$

即此矩阵有 1 阶与 3 阶的若尔当块各 1 个. 从矩阵的阶数可知它没有别的特征值. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 此矩阵仅有 1 个特征值 $\lambda_0 = 2$. 可得下表:

$$\begin{array}{ccccccc}
4 & & 2 & & 0 & & 0 \\
& 2 & & 2 & & 0 & \\
& & 0 & & 2 & &
\end{array}$$

故此矩阵有 2 个 2 阶若尔当块. 因此其若尔当典范形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

***8.** 设矩阵 A 的特征值 (在复数范围内) 全是 1. 证明: A^k 与 A 相似, 其中, k 为任一非零整数 (正的或负的).

证明: 先设 A 为若尔当块:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $k>0$, 则

$$J^k=\begin{pmatrix} 1 & k & & & * \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 J^k 的若尔当块的块数 $=r-\operatorname{rank}(E-J^k)=r-(r-1)=1$. 所以 J^k 的若尔当典范形也是 J, 从而 J^k 与 J 相似.

又因

$$J^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & * \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

同理可证 J^{-1} 与 J 相似, 于是 J^{-k} 与 J^k 相似, 从而也与 J 相似.

对于一般的情形, 设 A 的若尔当典范形为

$$J_A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

则

$$A^k\sim J_A^k\sim\begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{pmatrix}\sim J_A\sim A.$$

§ 6　矩阵的极小多项式

1. 求下列矩阵的极小多项式:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;

*(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1) $(\lambda-2)^3$.

(2) $\lambda^3-6\lambda^2-4\lambda$.

(3) λ^2.

(4) $(\lambda+1)^2$.

(5) $\lambda(\lambda-n)$.

(6) 设

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\lambda)=1+2\lambda+\cdots+n\lambda^{n-1}.$$

则

$$A=E+2P+3P^2+\cdots+nP^{n-1}=f(P).$$

由于 P 的特征值为 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$, 其中 ε 为 n 次本原单位根. 所以 A 的特征多项式为

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-f(1))(\lambda-f(\varepsilon))\cdots(\lambda-f(\varepsilon^{n-1}))=\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)g(\lambda).$$

因为

$$f(\lambda)=\frac{n\lambda^{n+1}-(n+1)\lambda^n+1}{(1-\lambda)^2},$$

所以

$$f(\varepsilon^k)=\frac{n\varepsilon-n}{(1-\varepsilon^k)^2}=-\frac{n}{1-\varepsilon^k}. \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}g(\lambda)&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda+\frac{n}{1-\varepsilon^k}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\varepsilon^k)}\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda+n-\lambda\varepsilon^k)\\&=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}-\varepsilon^k\right)=\frac{\lambda^{n-1}}{n}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n-1}{\frac{\lambda+n}{\lambda}-1}\\&=\frac{\lambda^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{\lambda+n}{\lambda}\right)^n-1\right]=\frac{1}{n^2}[(\lambda+n)^n-\lambda^n].\end{aligned}$$

所以

$$\chi_A(\lambda)=\frac{1}{n^2}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n-\lambda^n].$$

又由 $(*)$ 知, $\chi_A(\lambda)$ 无重根, 故 A 的极小多项式就是其特征多项式, 从而 A 的极小多项式为

$$\frac{1}{n^2}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)[(\lambda+n)^n-\lambda^n].$$

2. 设 A 为 n 阶方阵, $m(\lambda)$ 是它的极小多项式, $g(\lambda)$ 为任一多项式, $d(\lambda)=(m(\lambda),g(\lambda))$.

证明: (1) $\operatorname{rank} d(A)=\operatorname{rank} g(A)$;

(2) $g(A)$ 可逆的充分必要条件是 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 互素;

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g^{-1}(A)$ 一定是 A 的多项式.

证明: (1) 存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$, 使

$$m(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=d(\lambda).$$

故

$$m(A)u(A)+g(A)v(A)=d(A).$$

由 $m(A)=0$ 可得 $d(A)=g(A)v(A)$. 所以

$$\operatorname{rank} d(A)\le\operatorname{rank} g(A).$$

又因 $d(\lambda)\mid g(\lambda)$, 存在 $h(\lambda)$ 使 $d(\lambda)h(\lambda)=g(\lambda)$, 即 $d(A)h(A)=g(A)$. 于是

$$\operatorname{rank} g(A)\le\operatorname{rank} d(A).$$

最后得

$$\operatorname{rank} g(A) = \operatorname{rank} d(A).$$

(2) ($\Rightarrow$) 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 则 $g(A)$ 的全部特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$. 如 $g(A)$ 可逆, 则 $g(A)$ 的每个特征值 $g(\lambda_i) \neq 0$. 由于 $m(\lambda)$ 的根都是 A 的特征值, 因此 $g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 无公共根, 从而 $(g(\lambda), m(\lambda)) = 1$.

($\Leftarrow$) 如 $(g(\lambda), m(\lambda)) = 1$, 则由 (1) 所证, $d(\lambda) = 1$, 因此 $d(A) = E$. 故对于 (1) 中的 $v(\lambda)$, 有

$$g(A)v(A) = E,$$

$g(A)$ 可逆.

(3) 如 $g(A)$ 可逆, 在 (2) 的充分性的证明中, 已得 $g(A)v(A) = E$. 所以 $g(A)^{-1} = v(A)$ 为 A 的多项式.

3. 证明: 矩阵 A (在复数域上) 可对角化的充分必要条件是其极小多项式无重根.

证明: ($\Rightarrow$) A 可对角化, 从而此对角形就是 A 的若尔当典范形. 因此 A 的若尔当块全是一阶的, A 的初等因子全是一次的. 而 A 的极小多项式作为初等因子的最小公倍式, 一定是不同一次因子的乘积, 从而无重根.

($\Leftarrow$) 如 A 的极小多项式无重根, 则此极小多项式是不同一次因子的乘积. 于是 A 的初等因子都是一次的, 即若尔当典范形中的若尔当块都是一阶的, 是一个对角矩阵, 说明 A 可对角化.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

解: A 的特征多项式为 $\lambda(\lambda^2 - 2)$. 令

$$\lambda^{100} = \lambda(\lambda^2 - 2)g(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

分别以 $\lambda = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 代入上式, 的

$$c = 0, \qquad 2^{50} = 2a + \sqrt{2}b, \qquad 2^{50} = 2a - \sqrt{2}b.$$

解得 $b = 0$, $a = 2^{49}$. 所以

$$A^{100} = 2^{49}A^2 = 2^{49}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

***5.** 证明: 如果对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$, 则 $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.

证明: 由于矩阵的迹就是矩阵的全部特征值之和, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = s_k.$$

由 $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ 可得 $s_k = 0$. 从牛顿公式可得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的所有初等对称多项式 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0$, 于是

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n.$$

*$\mathbf{6.}$ 设 A 的特征多项式 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$, 且 $\big(h(\lambda), g(\lambda)\big) = 1$,

证明: $\operatorname{rank} h(A) = \deg g(\lambda)$, $\operatorname{rank} g(A) = \deg h(\lambda)$.

证明: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $h(A)$ 的特征值为 $h(\lambda_1), \cdots, h(\lambda_n)$, $g(A)$ 的特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$. 由于 $\chi(\lambda) = h(\lambda)g(\lambda)$ 且 $\big(h(\lambda), g(\lambda)\big) = 1$, 因此 $\{h(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg h(\lambda)$, $\{g(\lambda_i)\}$ 中 0 的个数等于 $\deg g(\lambda)$, 且 $\deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) = n$.

由习题 12–3.6 知,

$$\deg h(\lambda) \geq n - \operatorname{rank}(h(A)) \tag{1}$$

$$\deg g(\lambda) \geq n - \operatorname{rank}(g(A)) \tag{2}$$

因此

$$n = \deg h(\lambda) + \deg g(\lambda) \geq 2n - (\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A)),$$

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) \geq n.$$

又因

$$h(A)g(A) = \chi(A) = 0,$$

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) \leq n.$$

于是

$$\operatorname{rank} h(A) + \operatorname{rank} g(A) = n.$$

从而 (1), (2) 式全都取等号, 使得

$$\operatorname{rank} h(A) = n - \deg h(\lambda) = \deg g(\lambda),$$

$$\operatorname{rank} g(A) = n - \deg g(\lambda) = \deg h(\lambda).$$

第十四章　若尔当典范形的讨论与应用

§1　若尔当典范形的几何意义

1. 对下列矩阵 A, 求变换矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为若尔当典范形:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

解: (1) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda+4 & \lambda^2-2\lambda-3 \\ 0 & 3\lambda+7 & \lambda^2-\lambda-6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \lambda-1 \\ 1 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-3),(\lambda+1)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T = Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ = AT$, 从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-3),(\lambda+1)^2$. 因此 A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22}$. 其中 η'_{11} 满足的方程是

$$(A-3E)\eta'_{11}=\begin{pmatrix}-2&-3&4\\4&-10&8\\6&-7&4\end{pmatrix}\eta'_{11}=0,$$

解得 $\eta'_{11}=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$.

η'_{22} 应满足的条件是

$$(A+E)^2\eta'_{22}=\begin{pmatrix}16&-16&16\\32&-32&32\\32&-32&32\end{pmatrix}\eta'_{22}=0,$$

$$(A+E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}2&-3&4\\4&-6&8\\6&-7&8\end{pmatrix}\eta'_{22}\neq 0.$$

可取 $\eta'_{22}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{21}=(A+E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}2&-3&4\\4&-6&8\\6&-7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

于是

$$T=(\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22})=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

(2) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda-5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-2), (\lambda-2)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&0\\2&3&1\end{pmatrix}=Q_0=T.$$

从而

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-2),(\lambda-2)^2$, 因此 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$, A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22}$.

由于 $(A-2E)^2=0$, η'_{22} 应满足的条件是

$$(A-2E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{pmatrix}\eta'_{22}\neq 0.$$

可取 $\eta'_{22}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{21}=(A-2E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

η'_{11} 满足的方程是

$$(A-2E)\eta'_{11}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{pmatrix}\eta'_{11}=0,$$

可取一个解 $\eta'_{11}=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$, 它与 η'_{21} 线性无关.

于是

$$T=(\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22})=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&0\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

(3) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E - A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E - A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 4 & 0 & -2 \\ -4 & \lambda + 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 - 1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 2(-3\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 17) \\ 0 & 1 & -\lambda + 3 & 3\lambda^4 - 8\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\lambda + 19 \\ 1 & 0 & 4 & 4(-3\lambda^3 - \lambda^2 + 7\lambda + 5) \end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda - 1)^2, (\lambda + 1)^2$. A 的若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 2(-3\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 17) \\ 0 & 1 & -\lambda + 3 & 3\lambda^4 - 8\lambda^3 - 6\lambda^2 + 24\lambda + 19 \\ 1 & 0 & 4 & 4(-3\lambda^3 - \lambda^2 + 7\lambda + 5) \end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E-J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix}\lambda E-J\\ E\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\(\lambda-1)^2&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&(\lambda+1)^2&0\\1&0&0&0\\\lambda-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&\lambda+1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(\lambda^2-1)^2\\0&\lambda+2&0&\lambda^2+2\lambda+1\\1&\lambda^2+\lambda-2&0&\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1\\0&\lambda-2&0&\lambda^2-2\lambda+1\\0&(\lambda-2)(\lambda+1)&1&\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1\end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda)=\begin{pmatrix}0&\lambda+2&0&\lambda^2+2\lambda+1\\1&\lambda^2+\lambda-2&0&\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1\\0&\lambda-2&0&\lambda^2-2\lambda+1\\0&(\lambda-2)(\lambda+1)&1&\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1\end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix}Q_2(\lambda)\\ Q_1(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\-8\lambda+16&0\\\frac{1}{2}(3\lambda^4-5\lambda^3-5\lambda^2-11\lambda+34)&0\\\frac{1}{4}(-3\lambda^5+14\lambda^4-10\lambda^3-35\lambda^2+27\lambda+39)&0\\3\lambda^4-5\lambda^3-9\lambda^2+8\lambda+11&1\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 8\lambda+16 & 0 \\ \frac{1}{2}(-3\lambda^4-7\lambda^3+\lambda^2+19\lambda+30) & 1 \\ \frac{1}{4}(3\lambda^5-2\lambda^4-22\lambda^3+15\lambda^2+57\lambda+25) & -\lambda+3 \\ -3\lambda^4-7\lambda^3+5\lambda^2+15\lambda+6 & 4 \end{matrix}\right).$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^5 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}\lambda^4$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -7 & 0 \\ -5 & 0 & -11 & 0 \\ -10 & 0 & -14 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 2 & 0 \\ -35 & 0 & 15 & 0 \\ -36 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2$$

$$+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -32 & 0 & 32 & 0 \\ -22 & 0 & 38 & 0 \\ 27 & 0 & 57 & -4 \\ 32 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 64 & 0 & 64 & 0 \\ 68 & 0 & 60 & 8 \\ 39 & 0 & 25 & 12 \\ 44 & 4 & 24 & 16 \end{pmatrix}.$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T = Q_0 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 & 8 \\ 8 & -12 & 8 & 6 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ = AT$, 从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2$. 因此 A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11},\eta'_{12},\eta'_{21},\eta'_{22}$. 其中 η'_{12} 满足的方程是

$$(A-E)^2\eta'_{12}=\begin{pmatrix}-12&16&12&-16\\-16&20&16&-20\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\eta'_{12}=0,$$

$$(A-E)\eta'_{12}=\begin{pmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\eta'_{12}\neq 0.$$

解得 $\eta'_{12}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

$$\eta'_{11}=(A-E)\eta'_{12}=\begin{pmatrix}2&-4&0&2\\4&-6&-2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

η'_{22} 应满足的条件是

$$(A+E)^2\eta'_{22}=\begin{pmatrix}0&0&12&-8\\0&0&8&-4\\0&0&12&-8\\0&0&8&-4\end{pmatrix}\eta'_{22}=0,$$

$$(A+E)\eta'_{22}=\begin{pmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\eta'_{22}\neq 0.$$

可取 $\eta_{22}'=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta_{21}'=(A+E)\eta_{22}'=\begin{pmatrix}4&-4&0&2\\4&-4&-2&4\\0&0&4&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

于是

$$T=(\eta_{11}',\eta_{12}',\eta_{21}',\eta_{22}')=\begin{pmatrix}2&1&4&1\\2&0&4&0\\2&1&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

显然本题的解二远比解一简单.

(4) 解一 (初等变换法):

先作初等变换把特征矩阵 $\lambda E-A$ 化为对角形:

$$\begin{pmatrix}\lambda E-A\\E\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda-1&0\\0&0&0&(\lambda-1)^3\\1&-4&-\lambda+4&\lambda^2-2\lambda+4\\0&1&1&-2\lambda+3\\0&0&0&3\\0&0&1&-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

因此 A 的初等因子是 $(\lambda-1),(\lambda-1)^3$. A 的若尔当典范形是

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$Q_1(\lambda)=\begin{pmatrix}1&-4&-\lambda+4&\lambda^2-2\lambda+4\\0&1&1&-2\lambda+3\\0&0&0&3\\0&0&1&-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

再作初等变换把特征矩阵 $\lambda E-J$ 化为与上面相同的对角形:

$$\begin{pmatrix} \lambda E-J \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$Q_2(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

再求 $Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}$ (只做初等列变换),

$$\begin{pmatrix} Q_2(\lambda) \\ Q_1(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda+4 & \lambda^2-3\lambda+5 & 4\lambda-3 & -4 \\ 1 & -2\lambda+3 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda$$

$$+\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

用 J 从右边代入 λ, 即得

$$T = Q_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $TJ = AT$, 从而

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解二 (子空间求基):

先算出 A 的初等因子是 $(\lambda-1), (\lambda-1)^3$. 因此 A 的极小多项式是 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$, 若尔当典范形是

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

与此典范形对应的基向量是 $\eta'_{11}, \eta'_{21}, \eta'_{22}, \eta'_{23}$.

由于 $(A-E)^3 = 0$, η'_{23} 应满足的条件是

$$(A-E)^2\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}\eta'_{23} \neq 0.$$

可取 $\eta'_{23} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\eta'_{22} = (A-E)\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\eta'_{21} = (A-E)^2\eta'_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

η'_{11} 满足的方程是

$$(A-E)\eta'_{11}=\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&-3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\eta'_{11}=0.$$

解得 $\eta'_{11}=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 它与 η'_{21} 线性无关. 于是

$$T=(\eta'_{11},\eta'_{21},\eta'_{22},\eta'_{23})=\begin{pmatrix}0&3&0&1\\0&1&-2&0\\1&3&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}.$$

2. 证明: 每个复方阵 A 可分解为 $A=D+H$, 其中 D 为可对角化矩阵, H 为幂零阵 (即有一个正整数 m, 使得 $H^m=0$), 且 $DH=HD$.

证明: 设 $A=J_k(c)$ 是一个若尔当块, 则有分解

$$J_k(c)=cE_k+H_k=\begin{pmatrix}c&0&\cdots&0\\0&c&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

其中 cE_k 是纯量矩阵, H_k 满足 $H_k^k=0$, 是幂零矩阵, 而且 $(cE_k)H_k=H_k(cE_k)$. 因此这是满足条件的分解.

再设 $A=J=\mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1),\cdots,J_{k_s}(\lambda_s))$, 则有

$$J=D_J+H_J=\mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1},\cdots,\lambda_sE_{k_s})+\mathrm{diag}(H_{k_1},\cdots,H_{k_s}),$$

其中 $D_J=\mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1},\cdots,\lambda_sE_{k_s})$ 是对角矩阵, $H_J=\mathrm{diag}(H_{k_1},\cdots,H_{k_s})$ 满足 $H_J^{\max_i\{k_i\}}=0$. 因此 H_J 是幂零矩阵. 由于

$$\begin{aligned}D_JH_J&=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{k_1}H_{k_1}&0&\cdots&0\\0&\lambda_2E_{k_2}H_{k_2}&\cdots&0\\0&0&\cdots&\lambda_sE_{k_s}H_{k_s}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}H_{k_1}(\lambda_1E_{k_1})&0&\cdots&0\\0&H_{k_2}(\lambda_2E_{k_2})&\cdots&0\\0&0&\cdots&H_{k_s}(\lambda_sE_{k_s})\end{pmatrix}=H_JD_J,\end{aligned}$$

可见这也是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = D_J + H_J$, 令 $D = TD_JT^{-1}$, $H = TH_JT^{-1}$. 则 $A = D + H$, D 相似于对角矩阵 D_J, 因此是可对角化矩阵. 又因 $H^m = TH_J^mT^{-1}$, 因此从 H_J 是幂零矩阵可以得到 H 也是幂零矩阵. 最后由

$$\begin{aligned} DH &= (TD_JT^{-1})(TH_JT^{-1}) = TD_JH_JT^{-1} \\ &= TH_JD_JT^{-1} = (TH_JT^{-1})(TD_JT^{-1}) = HD, \end{aligned}$$

可知这是符合条件的分解.

3. 特征值全为 1 的方阵称为幂幺矩阵 (*unipotent matrix*). 证明: 每个可逆的复方阵 A 可分解为 $A = DU$, 其中 D 为可对角化矩阵, U 为幂幺阵, 且 $DU = UD$.

证明: 设 $A = J_k(c)$ 是一个若尔当块, 且 $c \neq 0$, 则有分解

$$J_k(c) = (cE_k)(U_k(c^{-1})) = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

其中 cE_k 是纯量矩阵, $U_k(c^{-1})$ 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵, 而且 (cE_k) $U_k(c^{-1}) = U_k(c^{-1})(cE_k)$. 因此这是满足条件的分解.

再设 $A = J = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \cdots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 由于 A 是可逆矩阵, 因此所有的特征值 $\lambda_i \neq 0$. 则有

$$J = D_JU_J = \mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1}, \cdots, \lambda_sE_{k_s})\,\mathrm{diag}(U_{k_1}(\lambda_1^{-1}), \cdots, U_{k_s}(\lambda_s^{-1})),$$

其中 $D_J = \mathrm{diag}(\lambda_1E_{k_1}, \cdots, \lambda_sE_{k_s})$ 是对角矩阵, $U_J = \mathrm{diag}(U_{k_1}(\lambda_1^{-1}), \cdots,$ $U_{k_s}(\lambda_s^{-1}))$ 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵. 由于

$$D_JU_J = \begin{pmatrix} \lambda_1E_{k_1}H_{k_1}(\lambda_1^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2E_{k_2}H_{k_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_sE_{k_s}H_{k_s}(\lambda_s^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H_{k_1}(\lambda_1E_{k_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{k_2}(\lambda_2E_{k_2}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & H_{k_s}(\lambda_s^{-1})(\lambda_sE_{k_s}) \end{pmatrix} = U_JD_J,$$

可见这也是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = D_J U_J$, 令 $D = TD_J T^{-1}$, $U = TU_J T^{-1}$. 则 $A = DU$, D 相似于对角矩阵 D_J, 因此是可对角化矩阵. 又因 U 的特征值都是 1, 因此是幂幺阵. 最后由

$$\begin{aligned} DU &= (TD_J T^{-1})(TU_J T^{-1}) = TD_J U_J T^{-1} \\ &= TU_J D_J T^{-1} = (TU_J T^{-1})(TD_J T^{-1}) = UD, \end{aligned}$$

可知这是符合条件的分解.

*__4.__ 证明: 每个复方阵可分解为两个复对称矩阵的乘积, 并且其中的一个是可逆的.

证明: 设 $A = J_k(c)$ 是一个若尔当块, 则有分解

$$J_k(c) = S_k(c) P_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & c \\ 0 & \cdots & 1 & c & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \iddots & 0 & 0 & 0 \\ c & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $S_k(c), P_k$ 都是对称矩阵, P_k 又是可逆的.

再设 $A = J = \operatorname{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \cdots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 则有

$$J = S_J P_J = \operatorname{diag}(S_{k_1}(\lambda_1), \cdots, S_{k_s}(\lambda_s)) \operatorname{diag}(P_{k_1}, \cdots, P_{k_s}),$$

其中 $S_J = \operatorname{diag}(S_{k_1}(\lambda_1), \cdots, S_{k_s}(\lambda_s))$ 和 $P_J = \operatorname{diag}(P_{k_1}, \cdots, P_{k_s})$ 都是对称矩阵, P_J 又是可逆的. 因此这是满足条件的分解.

最后设 $A = TJT^{-1}$, 先作上述分解 $J = S_J P_J$, 令 $S = TS_J T^{\mathrm{T}}$, $P = T^{-\mathrm{T}} P_J T^{-1}$, 则 S, T 都是对称矩阵, P 又是可逆的. 并且有满足条件的分解

$$A = TS_J P_J T^{-1} = (TS_J T^{\mathrm{T}})(T^{-\mathrm{T}} P_J T^{-1}) = SP.$$

§ 2　简单的矩阵方程

1. 设

$$A=U\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)U^{-1},\ B=V\left(\begin{array}{c|cc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)V^{-1}.$$

求解 $AX=XB$.

解: $X=U\left(\begin{array}{c|cc|ccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ \hline 0 & d & e & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)V^{-1}.$

2. 设

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

求 $C(A)$ 以及 $\dim C(A)$.

解: $C(A)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|cc|c} a & b & c & d & e & 0\\ 0 & a & b & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & f & g & h & i & 0\\ 0 & 0 & f & 0 & h & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{array}\right)\right\}$, 因此 $\dim C(A)=10$.

3. 写出矩阵方程

$$X^2-2X-3E=0,\quad X\in M_3(\mathbb{C}),$$

的解的初等因子组.

解: $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$, 因此初等因子组有4种可能: $\lambda-3,\lambda-3,\lambda-3$; $\lambda-3,\lambda-3,\lambda+1$; $\lambda-3,\lambda+1,\lambda+1$; $\lambda+1,\lambda+1,\lambda+1$.

4. 不用命题 3.1 直接证明: 若 A 与 B 有公共的特征值, 则矩阵方程 $AX=XB$ 有非零解.

证明: 设 A 与 B 有公共的特征值 λ_0, 则 B^{T} 也有特征值 λ_0. 设与 A 和 B^{T} 对应的特征向量分别是 U 和 V (看成列矩阵). 则有 $AU=\lambda_0U$, $B^{\mathrm{T}}V=\lambda_0V$. 于是 $A(UV^{\mathrm{T}})=\lambda_0UV^{\mathrm{T}}$, $(UV^{\mathrm{T}})B=U(V^{\mathrm{T}}B)=U(B^{\mathrm{T}}V)^{\mathrm{T}}=\lambda_0UV^{\mathrm{T}}=A(UV^{\mathrm{T}})$, 因此 UV^{T} 是矩阵方程 $AX=XB$ 的一个非零解.

§3 矩阵函数

1. 设 $A=T\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}T^{-1}$, 试直接利用矩阵函数的定义写出公式

$$f(A)=f(3)Z_{10}+f(2)Z_{20}+f'(2)Z_{21}$$

中的 Z_{10},Z_{20},Z_{21}.

解: 根据定义,

$$f(A)=T\begin{pmatrix}f(3)&0&0\\0&f(2)&f'(2)\\0&0&f(2)\end{pmatrix}T^{-1}=f(3)T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}$$

$$+f(2)T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^{-1}+f'(2)T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

因此

$$Z_{10}=T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1},\qquad Z_{20}=T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^{-1},$$

$$Z_{21}=T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 求 A^{100}, $\exp A$, $\sqrt[3]{A}$.

解: 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{pmatrix},$$

$m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. 所以

$$f(A)=f(-1)Z_{10}+f(1)Z_{20}+f'(1)Z_{21}.$$

分别取 $f(\lambda)=1,\lambda,\lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned}E&=Z_{10}+Z_{20}\\A&=-Z_{10}+Z_{20}+Z_{21}\\A^2&=Z_{10}+Z_{20}+2Z_{21}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}Z_{10}&=\frac{1}{4}(A^2-2A+E)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-3&0\\-1&1&0\\-2&2&0\end{pmatrix}\\Z_{20}&=\frac{1}{4}(-A^2+2A+3E)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&0\\1&3&0\\2&-2&4\end{pmatrix}\\Z_{21}&=\frac{1}{2}(A^2-E)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

当 $f(\lambda)=\lambda^{100}$ 时,

$$A^{100}=Z_{10}+Z_{20}+100Z_{21}=\begin{pmatrix}51&-50&100\\50&-49&100\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

当 $f(\lambda)=\exp(\lambda)$ 时,

$$\exp(A)=\mathrm{e}^{-1}Z_{10}+\mathrm{e}Z_{20}+\mathrm{e}Z_{21}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\mathrm{e}+3\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\\ 3\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\\ 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{-1} & -2\mathrm{e}+2\mathrm{e}^{-1} & 4\mathrm{e}\end{pmatrix}.$$

当 $f(\lambda)=\sqrt[3]{\lambda}$ 时,

$$\sqrt[3]{A}=-Z_{10}+Z_{20}+\frac{1}{3}Z_{21}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵 A 的初等因子应该具有怎样的形式才能使得 $\sin A=\cos A$?

解: 设 $f(\lambda)=\sin\lambda$, $g(\lambda)=\cos\lambda$. 则 $f(A)=g(A)$ 的充分必要条件是 $f(\Lambda_A)=g(\Lambda_A)$. 设 $(\lambda-c)^k$ 是 A 的一个初等因子. 则除了 $f(c)=\sin c=g(c)=\cos c$ 外, 当 $k>1$ 时还有 $f'(c)=\cos c=g'(c)=-\sin c$. 因此当 $k>1$ 时必有 $\sin c=\cos c=0$, 这是不可能的. 所以 $k=1$. 解 $\sin c=\cos c$ 得 $c=m\pi+\dfrac{\pi}{4}$. 因此 A 的初等因子都应该是形如 $(\lambda-\dfrac{\pi}{4}+m\pi)$ 的. A 是一个可对角化矩阵. 这个条件也是充分的.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$, 试求矩阵 B, 使 $B^2=A$.

解: 由于

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ 2 & \lambda+6 & -13\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix},$$

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 所以

$$f(A)=f(1)Z_{10}+f'(1)Z_{11}+f''(1)Z_{12}.$$

分别取 $f(\lambda)=1,\lambda,\lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned}E&=Z_{10}\\ A&=Z_{10}+Z_{11}\\ A^2&=Z_{10}+2Z_{11}+2Z_{12}\end{aligned}$$

解得

$$Z_{10}=E$$

$$Z_{11} = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, 有

$$B = \sqrt{A} = Z_{10} + \frac{1}{2}Z_{11} - \frac{1}{4}Z_{12} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -21 & 30 \\ -9 & -23 & 58 \\ -5 & -19 & 42 \end{pmatrix}.$$

B 满足 $B^2 = A$.

5. 设 n 阶实矩阵 A 的特征值全是正实数. 证明: 存在实矩阵 B, 使 $B^2 = A$.

证明: 设 A 的初等因子是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$, 其中 λ_i 都是正实数. 以 $(\lambda-\sqrt{\lambda_1})^{k_1}, \cdots, (\lambda-\sqrt{\lambda_t})^{k_t}$ 作为初等因子组构造若尔当典范形 J, 则 J 是一个实矩阵, 把命题 2.5 应用于矩阵函数 $f(\lambda) = \lambda^2$, 由于 $f'(\sqrt{\lambda_i}) = 2\sqrt{\lambda_i} \neq 0$, 因此 J^2 的初等因子组是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$, 与 A 相同, 所以 J^2 与 A 相似. 从而存在可逆实矩阵 T 使得 $A = T^{-1}J^2T = (T^{-1}JT)^2$. $B = T^{-1}JT$ 就是满足题意的实矩阵.

6. 已知矩阵 A 的初等因子组是 $\lambda^3, \left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)^3, (\lambda-\pi)^4$. 试写出 $\cos A$ 的初等因子组.

解: 设 $f(\lambda) = \cos\lambda$. 则 $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f(\pi) = -1$, $f'(\lambda) = -\sin\lambda$, $f'(0) = f'(\pi) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f''(\lambda) = -\cos\lambda$, $f''(0) = -1, f''(\pi) = 1$. 因此根据命题 2.5, $f(A) = \cos A$ 的初等因子组是 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1), \lambda^3, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^2$.

7. 设 A 的特征值全为 ±1, 证明: A 与 A^{-1} 相似.

证明: 设 $f(\lambda) = \lambda^{-1}$, 则有 $f(A) = A^{-1}$. 对于 A 的任意一个初等因子 $(\lambda-c)^k$, 由于 $f'(c) = -c^{-2} \neq 0$, 根据命题 2.5, $f(A)$ 相应的初等因子是 $(\lambda - f(c))^k$. 当 $c = \pm1$ 时, 有 $f(c) = c^{-1} = c$, 因此 A 与 $f(A)$ 有相同初等因子组, 从而相似.

8. 设 J 是特征值为 1 的 n 阶若尔当块, 试求使 $g(J)$ 相似于 J 的多项式 $g(\lambda)$ 应满足的充分必要条件.

证明: J 的初等因子只有一个 $(\lambda-1)^n$. $g(J)$ 与 J 相似的充分必要条件是 $g(J)$ 的初等因子也是 $(\lambda-1)^n$. 由命题 2.5 可知, 这等价于 $g(1)=1$, $g'(1)\neq 0$.

9. 利用矩阵函数, 求出递归数列

$$D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots, \quad D_n = 3D_{n-1} - 3D_{n-2} + D_{n-3} \quad (n>3)$$

的通项公式 $D_n = f(D_1, D_2, D_3)$.

(提示: 考察矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$)

解: 我们有

$$\begin{pmatrix} D_{n-2} \\ D_{n-1} \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-3} \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-3} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}.$$

为求 A^{n-3}, 可以利用矩阵函数.

通过计算,

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 3 & \lambda-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}.$$

因此 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. 所以

$$f(A) = f(1)Z_{10} + f'(1)Z_{11} + f''(1)Z_{12}.$$

分别取 $f(\lambda) = 1, \lambda, \lambda^2$, 可得方程组

$$\begin{aligned} E &= Z_{10} \\ A &= Z_{10} + Z_{11} \\ A^2 &= Z_{10} + 2Z_{11} + 2Z_{12} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} Z_{10} &= E \\ Z_{11} &= A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda) = \lambda^{n-3}$, 有

$$\begin{aligned} A^{n-3} &= Z_{10} + (n-3)Z_{11} + (n-3)(n-4)Z_{12} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n^2 - 9n + 20 & -2n^2 + 16n - 30 & (n-3)(n-4) \\ (n-3)(n-4) & -2n^2 + 12n - 16 & n^2 - 5n + 6 \\ (n-2)(n-3) & -2(n-1)(n-3) & (n-1)(n-2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(实际上只要计算矩阵的第 3 行就够了) 因此

$$D_n = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)D_1 - (n-1)(n-3)D_2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)D_3.$$

***10.** 试应用第十三章第 5 节练习 13–5.6 的结论证明命题 3.5 的 (2).

证明: 根据假设, 有 $f(J_k(c)) = f(c)E_k + \dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h + \cdots$, 因此 $f(c)E_k - f(J_k(c)) = -\dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h + \cdots$, 且当 $1 \le i \le q$ 时有 $(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = \left(-\dfrac{f^{(h)}(c)}{h!}H_k^h\right)^i + \cdots$. 注意到 $k = hq + r$, $0 \le r < h$, 当 $i > q$ 时有 $(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = 0$. 又因 $f^{(h)}(c) \neq 0$, 可得

$$n_i = \operatorname{rank}(f(c)E_k - f(J_k(c)))^i = \operatorname{rank} H_k^{hi} = \begin{cases} k - hi & 若\ 1 \le i \le q, \\ 0 & 若\ i \ge q+1. \end{cases}$$

并且 $n_0 = k$. 于是

$$a_i = a_{i-1} - a_i = \begin{cases} h & 若\ 1 \le i \le q, \\ k - hq = r & 若\ i = q+1, \\ 0 & 若\ i \ge q+2. \end{cases}$$

$$b_i = b_i - b_{i+1} = \begin{cases} 0 & 若\ 1 \le i \le q-1, \\ h - r & 若\ i = q, \\ r & 若\ i = q+1, \\ 0 & 若\ i \ge q+2. \end{cases}$$

也就是说非零的 b_i 只有 $b_q = h - r$, $b_{q+1} = r$. 根据练习 13–5.6 的结论 (2), $f(J_k(c))$ 的属于特征值 $f(c)$ 的 q 阶若尔当块有 $h - r$ 个, $q+1$ 阶若尔当块有 r 个. 这就是命题 2.5 的 (2) 的结论.

***11.** 设

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}, \\ m_i(\lambda) &= \frac{m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}} \\ &= (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{k_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{k_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}. \end{aligned}$$

对于满足 $1 \le i \le s$, $0 \le j \le k_i - 1$ 的 i, j, 定义

$$\varphi_{ij}(\lambda) = \frac{1}{j!}\sum_{\alpha=0}^{k_i-j-1}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(\alpha)}_{\lambda=\lambda_i}(\lambda-\lambda_i)^{j+\alpha}m_i(\lambda),$$

其中右上角的 (α) 表示关于 λ 取 α 阶导数, 右下角的 $\lambda = \lambda_i$ 表示在 λ_i 处的导数值. 验证:

$$(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_p} = \begin{cases} 1, & 若\ p = i,\ q = j, \\ 0, & 其它情形. \end{cases}$$

这样的多项式称为拉格朗日–西尔维斯特插值多项式.

证明: 当 $p \ne i$ 时, $(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$ 是 $m_i(\lambda)$ 的因子, 因此 $(\lambda-\lambda_p)^{m_p} \mid \varphi_{ij}(\lambda)$, 从而 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 在 λ_p 处的小于 m_p 阶导数都等于 0. 以下考虑 $p = i$ 的情形. 利用莱布尼兹求导公式,

$$\begin{aligned} &(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \frac{1}{j!}\sum_{l=0}^{q}\frac{q!}{l!(q-l)!}\left(\sum_{\alpha=0}^{k_i-j-1}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(\alpha)}_{\lambda=\lambda_i}(\lambda-\lambda_i)^{j+\alpha}\right)^{(l)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \frac{1}{j!}\sum_{l=j}^{q}\frac{q!}{l!(q-l)!}\cdot\frac{l!}{(l-j)!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(l-j)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i}, \end{aligned}$$

当 $q < j$ 时上式等于 0, 当 $q = j$ 时, 上式等于 1. 如果 $q > j$, 同样根据莱布尼兹求导公式, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{l=j}^{q}\frac{(q-j)!}{(l-j)!(q-l)!}\left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\right)^{(l-j)}_{\lambda=\lambda_i}(m_i(\lambda))^{(q-l)}_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \left(\frac{1}{m_i(\lambda)}\cdot m_i(\lambda)\right)^{(q-j)}_{\lambda=\lambda_i} = (1)^{(q-j)}_{\lambda=\lambda_i} = 0. \end{aligned}$$

这样就证明了当 $q \neq j$ 时有 $(\varphi_{ij}(\lambda))^{(q)}_{\lambda=\lambda_i} = 0$.

§4　矩阵的广义逆

1. 根据命题 4.1 求出矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

的所有 $\{1\}$ 逆.

解: 通过初等变换

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

就有

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的所有 $\{1\}$ 逆为

$$G = Q \begin{pmatrix} E_2 & U \\ V & W \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ v_{11} & v_{12} & w_1 \\ v_{21} & v_{22} & w_2 \\ v_{31} & v_{32} & w_3 \end{pmatrix} P.$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 证明 $G = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & X_{12} \\ X_{21} & A_2^{(1)} \end{pmatrix}$ 是 A 的 $\{1\}$ 逆的充分必要条件是 $A_1X_{12}A_2 = A_2X_{21}A_1 = 0$.

证明: 由于

$$\begin{aligned} AGA &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & X_{12} \\ X_{21} & A_2^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1A_1^{(1)}A_1 & A_1X_{12}A_2 \\ A_2X_{21}A_1 & A_2A_2^{(1)}A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1X_{12}A_2 \\ A_2X_{21}A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $AGA = A$ 当且仅当 $A_1X_{12}A_2 = A_2X_{21}A_1 = 0$.

3. 证明 $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等矩阵 (即满足 $A^2 = A$ 的矩阵). 且

$$\operatorname{rank}(AA^{(1)}) = \operatorname{rank}(A^{(1)}A) = \operatorname{rank} A.$$

证明: $(AA^{(1)})^2 = (AA^{(1)}A)A^{(1)} = AA^{(1)}$, $(A^{(1)}A)^2 = A^{(1)}(AA^{(1)}A) = A^{(1)}A$, 因此 $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等矩阵.

根据矩阵乘积的秩的不等式 $\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$, 可得

$$\operatorname{rank}(AA^{(1)}) \le \operatorname{rank} A \quad 以及 \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AA^{(1)}A) \le \operatorname{rank}(AA^{(1)}).$$

因此 $\operatorname{rank}(AA^{(1)}) = \operatorname{rank} A$. 同理可证另一个等式.

4. 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A^{(1)}$ 是 A 的一个 $\{1\}$ 逆. 如果对于 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, 方程 $AX = B$ 有解. 证明方程的所有解都能表示成以下形式

$$X = A^{(1)}B + (E_n - A^{(1)}A)Z$$

其中 $Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ 是任意的列矩阵.

(提示: 如果 X_0 是 $AX = B$ 的一个解, 可取 $Z = X_0$.)

证明: 首先验证上面定义的 X 确实是方程的解:

$$AX = A(A^{(1)}B + (E_n - A^{(1)}A)Z) = A(A^{(1)}B) + (A - AA^{(1)}A)Z = A(A^{(1)}B).$$

由于 $A^{(1)}$ 是 A 的 $\{1\}$ 逆, 因此 $A^{(1)}B$ 是方程 $AX = B$ 的解. 即 $A(A^{(1)}B) = B$. 从而 $AX = B$.

反之, 若方程 $AX = B$ 有解 X_0, 即 $AX_0 = B$, 则

$$A^{(1)}B + (E_n - A^{(1)}A)X_0 = A^{(1)}B + X_0 - A^{(1)}AX_0 = A^{(1)}B + X_0 - A^{(1)}B = X_0.$$

只要取 $Z = X_0$, X_0 就可用上述公式表示.

5. 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $G \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ 是一个列向量. 证明: 若 GB 是 $AX = B$ 的解, 且满足 $(GA)^{\mathrm{T}} = GA$, 则必有 $(E_n - GA)^{\mathrm{T}}(GB) = 0$.

证明: 由于 GB 是 $AX = B$ 的解, 因此 $AGB = B$. 从而

$$\begin{aligned}&(E_n - GA)^{\mathrm{T}}(GB) = (E_n - (GA)^{\mathrm{T}})GB = (E_n - GA)GB\\&= (GB - G(AGB)) = 0.\end{aligned}$$

6. 验证 (4.2) 式定义的 A^+ 确实是 A 的 M-P 逆.

证明: 记 $G = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}$.

(1) $AGA = (UV)(V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})(UV) = UV = A$.

(2) $GAG = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})(UV)(V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}) = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}} = G$.

(3) $(AG)^{\mathrm{T}} = (UVV^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = U((U^{\mathrm{T}}U)^{\mathrm{T}})^{-1}U^{\mathrm{T}} = U(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}} = AG$.

(4) $(GA)^{\mathrm{T}} = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}UV)^{\mathrm{T}} = (V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}V)^{\mathrm{T}} = V^{\mathrm{T}}((VV^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{-1}V = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}V = GA$.

7. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的 M-P 逆.

解: 先作满秩分解

$$A = UV = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$VV^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&A^+ = V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1}(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}\\&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&2\\2&-1&1\\4&1&5\end{pmatrix}.$$

8. 利用 M-P 逆求以下方程组的最小二乘解:

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=3\\-x_1+2x_2-3x_3+x_4=6\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

解: 取

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-1&2&-3&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}.$$

因此上述方程组可以表达为 $AX=B$. 利用广义逆可以得到一个最小二乘解

$$A^+B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&2\\2&-1&1\\4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

即 $x_1=1,x_2=1,x_3=0,x_4=3$.

9. 验证例 4.3 的结论.

(1) $AA^+A=\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^+&0&\cdots&0\\0&A_2^+&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_s^+\end{pmatrix}$

$$\times\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_1^+A_1&0&\cdots&0\\0&A_2A_2^+A_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_sA_s^+A_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}=A.$$

$$(3)\ (AA^+)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_1A_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^+ \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1A_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2A_2^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sA_s^+ \end{pmatrix} = AA^+.$$

(2) 与 (4) 可类似证明.

10. 举例说明 $(AB)^+ = B^+A^+$ 不一定正确.

解: 例如取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = (1)$, $(AB)^+ = (1)$, $A^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B^+A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

***11.** 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $G \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ 满足以下两个条件:

$$AGA = A, \qquad (GA)^{\mathrm{T}} = GA.$$

则称 G 是 A 的 $\{1,4\}$ 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, 使得方程 $AX = B$ 有解. 证明 GB 是具有最小长度的解 (这里把列矩阵看成标准欧几里得空间里的向量, 因此向量 X 的长度 $|X| = \sqrt{X^{\mathrm{T}}X}$.)

(提示: 利用练习 4, 5 的结果.)

证明: 由于 G 也是 A 的 $\{1\}$ 逆, 因此 GB 是方程 $AX = B$ 的解, 即 $A(GB) = B$. 由练习 1 知, 方程的所有解可以表成

$$X = GB + (E_n - GA)Z$$

的形式. 而根据练习 5, 有

$$((E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}GB = Z^{\mathrm{T}}(E_n - GA)^{\mathrm{T}}GB = 0,$$

$$(GB)^{\mathrm{T}}(E_n - GA)Z = ((E_n - GA)^{\mathrm{T}}GB)^{\mathrm{T}}Z = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} |X|^2 &= (GB + (E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}(GB + (E_n - GA)Z) \\ &= |GB|^2 + |(E_n - GA)Z|^2 + (GB)^{\mathrm{T}}(E_n - GA)Z + ((E_n - GA)Z)^{\mathrm{T}}GB \end{aligned}$$

$$= |GB|^2 + |(E_n - GA)Z|^2 \geq |GB|^2.$$

可见 GB 确实是长度最小的解.

*__12.__ 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A^+ 是 A 的 M-P 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. 证明方程 $AX = B$ 的所有最小二乘解都能表示成以下形式

$$X = A^+B + (E_n - A^+A)Z$$

其中 $Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ 是任意的列矩阵.

(提示: 参考练习 4 的解法.)

证明: 由于 M-P 逆当然是 $\{1\}$ 逆, 因此当 $AX = B$ 有解时结论已在练习 4 证明. 现在假设 $AX = B$ 无解, 那么 X_0 是最小二乘解的充分必要条件是 $A^{\mathrm{T}}AX_0 = A^{\mathrm{T}}B$. 因此由于 A^+B 是最小二乘解, 首先有 $A^{\mathrm{T}}AA^+B = A^{\mathrm{T}}B$. 以下验证练习给出的 X 确实是方程的最小二乘解:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}AX &= A^{\mathrm{T}}A(A^+B + (E_n - A^+A)Z) \\ &= A^{\mathrm{T}}A(A^+B) + (A^{\mathrm{T}}A - A^{\mathrm{T}}(AA^+A))Z = A^{\mathrm{T}}AA^+B = A^{\mathrm{T}}B. \end{aligned}$$

可见 X 是方程 $AX = B$ 的最小二乘解.

反之, 若 X_0 是方程 $AX = B$ 的最小二乘解, 即 $A^{\mathrm{T}}AX_0 = A^{\mathrm{T}}B$, 则

$$\begin{aligned} A^+AX_0 &= A^+AA^+AX_0 = A^+(AA^+)^{\mathrm{T}}AX_0 = A^+(A^+)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX_0 \\ &= A^+(A^+)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B = A^+(AA^+)^{\mathrm{T}}B = A^+AA^+B = A^+B. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} A^+B + (E_n - A^+A)X_0 &= A^+B + X_0 - A^+AX_0 \\ &= A^+B + X_0 - A^+B = X_0. \end{aligned}$$

也就是说只要取 $Z = X_0$, X_0 就可用上述公式表示.

*__13.__ 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A^+ 是 A 的 M-P 逆. 设 $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. 证明 A^+B 是方程 $AX = B$ 的长度最小的最小二乘解.

证明: 由于 $(A^+A)^{\mathrm{T}} = A^+A$, 因此 $E - AA^+$ 是对称矩阵. 所以

$$(E - A^+A)^{\mathrm{T}}A^+B = (E - A^+A)A^+B = A^+B - (A^+AA^+)B = 0,$$

$$(A^+B)^{\mathrm{T}}(E - A^+A) = ((E - A^+A)^{\mathrm{T}}A^+B)^{\mathrm{T}} = 0.$$

根据练习 12, $AX = B$ 的所有最小二乘解可以表成 $A^+B + (E_n - A^+A)Z$, 于是

$$|A^+B + (E_n - A^+A)Z|^2 = |A^+B|^2 + |(E_n - A^+A)Z|^2$$

$$
\begin{aligned}
&+(A^+B)^{\mathrm{T}}(E-A^+A)Z+((E-A^+A)Z)^{\mathrm{T}}A^+B\\
&=|A^+B|^2+|(E_n-A^+A)Z|^2\geq|A^+B|^2.
\end{aligned}
$$

可见 A^+B 确实是长度最小的最小二乘解.

§ 5　矩阵特征值的范围

1. 模仿例 5.1 求出以下矩阵的特征值范围:

(1) $A=\begin{pmatrix}9&-1&1\\-1&\mathrm{i}&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$;　　(2) $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&10&1\\-8&2&20\end{pmatrix}$.

解: (1) A 的 3 个盖施戈林圆为

$$
\begin{aligned}
G_1&:|z-9|\leq 2,\\
G_2&:|z-\mathrm{i}|\leq 2,\\
G_3&:|z-3|\leq 2.
\end{aligned}
$$

G_2 与 G_3 相交, G_1 是孤立的, 因此其中恰有一个特征值.

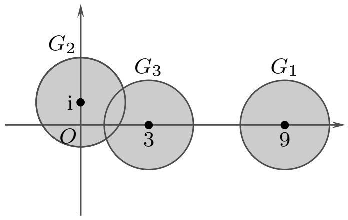
取对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(2,1,1)$, 则

$$B=DAD^{-1}=\begin{pmatrix}9&-2&2\\-0.5&\mathrm{i}&1\\-0.5&1&3\end{pmatrix}.$$

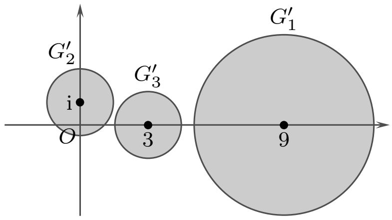
得到新的盖施戈林圆

$$
\begin{aligned}
G_1'&:|z-9|\leq 4,\\
G_2'&:|z-\mathrm{i}|\leq 1.5,\\
G_3'&:|z-3|\leq 1.5.
\end{aligned}
$$

这是 3 个孤立的圆. 每个圆中恰有 B (也是 A) 的一个特征值. 因此 A 的 3 个特征值分别位于 G_1,G_2',G_3' 中.



第 1(1) 题图 1



第 1(1) 题图 2

(2) A 的 3 个盖施戈林圆为

$$G_1: |z-2| \le 3,$$
$$G_2: |z-10| \le 2,$$
$$G_3: |z-20| \le 10.$$

G_2 与 G_3 相交, G_1 是孤立的, 因此其中恰有一个特征值, 而且是实数.

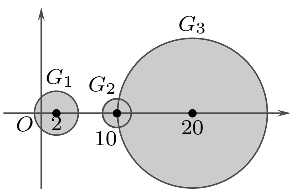
取对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(2,1,1)$, 则

$$B = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -0.5 & 10 & 1 \\ -4 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

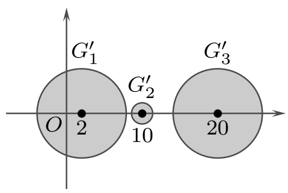
得到新的盖施戈林圆

$$G_1': |z-2| \le 6,$$
$$G_2': |z-10| \le 1.5,$$
$$G_3': |z-20| \le 6.$$

这是 3 个孤立的圆. 每个圆中恰有 B (也是 A) 的一个特征值. 因此 A 的 3 个特征值分别位于 G_1, G_2', G_3' 中, 而且都是实数.



第 1(2) 题图 1



第 1(2) 题图 2

2. 应用盖施戈林圆定理确定实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值范围, 并证明 A 至少有 2 个实特征值.

解: A 的 4 个盖施戈林圆为

$$G_1: |z-9| \le 4,$$

$$G_2 : |z-8| \le 2,$$
$$G_3 : |z-4| \le 1,$$
$$G_4 : |z-1| \le 1.$$

其中 G_4 是孤立的圆, 因此根据推论 5.5, 必有一个实特征值. 又因虚特征值是成对出现的, 所以 A 至少有 2 个实特征值.

3. 利用推论 5.5 证明以下 n 阶 $(n>1)$ 实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2^2} & \cdots & \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ \dfrac{2}{3} & 4 & \dfrac{2}{3^2} & \cdots & \dfrac{2}{3^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{n}{n+1} & \dfrac{n}{(n+1)^2} & \dfrac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

可相似于实对角矩阵.

证明: A 的第 i 个盖施戈林圆的半径是

$$r_i = \frac{i}{i+1} + \frac{i}{(i+1)^2} + \cdots + \frac{i}{(i+1)^{n-1}} = 1 - \frac{1}{(i+1)^{n-1}} < 1.$$

所以 A 的 n 个盖施戈林圆

$$G_i : |z-2i| \le r_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

都是孤立的. 根据推论 5.5, A 的特征值是 n 个不同的实数, 所以 A 相似于实对角矩阵.

4. 证明: 如果对称矩阵 $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 满足条件

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

则 A 是正定矩阵.

证明: 由于对称矩阵的特征值都是实数, 根据盖施戈林圆盘定理, 必有某个 $1 \le i \le n$ 使得

$$|\lambda_0 - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|,$$

即

$$\lambda_0 \ge a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| > 0.$$

因此 A 的所有特征值都是正实数, A 是正定矩阵.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{n^2}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & \dfrac{n^2}{2} & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n-2 & n-1 & \dfrac{n^2}{2} & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & \dfrac{n^2}{2} \end{pmatrix},$$

证明: $|\det A| \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$. 你能进一步证明 $\det A \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ 吗?

证明: 对 $i=1,2,\cdots,n$ 有

$$H_i=\frac{n^2}{2}-(1+2+\cdots+(n-1))=\frac{n^2}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n}{2},$$

根据推论 5.2 可得

$$|\det A| \geq \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

为证上述不等式中的绝对值符号可以取消, 需要证明 $\det A>0$. 为此, 设

$$A(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{n^2}{2} & t & 2t & \cdots & (n-2)t & (n-1)t \\ (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} & t & \cdots & (n-3)t & (n-2)t \\ (n-2)t & (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} & \cdots & (n-4)t & (n-3)t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t & 2t & 3t & \cdots & (n-1)t & \dfrac{n^2}{2} \end{pmatrix},$$

当 $1 \leq t \leq 1$ 时, 矩阵 $A(t)$ 满足阿达马条件, 因此 $\det A(t) \neq 0$. 而 $\det A(0)=\left(\dfrac{n^2}{2}\right)^n>0$, 由于 $\det A(t)$ 是 t 的连续实函数, 根据连续性原理, 必有 $\det A=\det A(1)>0$.