University Physics: Newton's laws of motion

Date: March 6, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 牛顿定律

1.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律，又称惯性定律(law of inertia) 可表述如下：任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态，直至其他物体的作用强迫它改变这种状态时为止。

即当$\overrightarrow{F}=0$时，$\overrightarrow{v}$为恒矢量。

牛顿第一定律指出了两个重要概念**惯性**和**力**。

1.2 牛顿第二定律

1.2.1 表述

动量为$\overrightarrow{p}$的物体, 在合外力$\overrightarrow{F}\left(=\sum\overrightarrow{F_i}\right)$ 的作用下，其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力，即

$$\overrightarrow{F}(t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

（当$v\ll c$时，m为常量）

于是有

$$\overrightarrow{F}=m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=m\overrightarrow{a} \tag{1.2}$$

即可叙述如下：物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同。

1.2.2 牛顿运动定律的矢量性

由

$$\overrightarrow{F}=m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=m\overrightarrow{a}$$

得

$$\overrightarrow{F}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i}+m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j}+m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{k} \tag{1.3}$$

即

$$\overrightarrow{F}=ma_x\overrightarrow{i}+ma_y\overrightarrow{j}+ma_z\overrightarrow{k} \tag{1.4}$$

所以

$$\begin{cases} F_x=ma_x \\ F_y=ma_y \\ F_z=ma_z \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2.3 自然坐标系中

$$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}=m\left(\overrightarrow{a}_{\mathrm{t}}+\overrightarrow{a}_{\mathrm{n}}\right)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_{\mathrm{t}}+m\frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e}_{\mathrm{n}} \tag{1.6}$$

也可写作

$$\begin{cases} F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} \\ F_{\mathrm{n}}=m\frac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{1.7}$$

（ρ为A处曲线的曲率半径）

1.2.4 力的叠加原理

当一个物体同时受到几个力的作用时，则这些力的合力产生的加逃度等于每个力单独作用时产生的矢量和，这一结论称为力的**独立性原理**或**力的叠加原理**。

即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}&=\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\cdots+\overrightarrow{F}_n=\sum\overrightarrow{F}_i\\&=m\overrightarrow{a}_1+m\overrightarrow{a}_2+\cdots+m\overrightarrow{a}_n=m\sum\overrightarrow{a}_i=m\overrightarrow{a}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.3 牛顿第三定律

两个物体之间作用力$\overrightarrow{F}$反和反作用力$\overrightarrow{F}'$, 沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

作用力和反作用力的特点：

1. 作用力与反作用力总是同时存在、相互依存的。
2. 作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上，虽然它们大小相等、方向相反，但不能互相抵消。
3. 作用力与反作用力一定属于同一性质的力。

1.4 总结

1. 凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系；
2. 对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关。（**伽利略相对性原理**或称**力学相对性原理**）

2 非惯性系、惯性力

2.1 惯性系、非惯性系

2.1.1 惯性系

牛顿运动定律在其中成立的参考系称为**惯性参考系**，简称**惯性系**(inertial system)。

"一个远离其他一切物体，而且没有自转的物体是惯性参照系，一切相对于该物体做匀速直线运动的参照系也是惯性参照系。牛顿定律就是在这样的参照系中成立。"——王燕生教授《大学物理问题讨论集》

举例：

1. 地面参考系；
2. 地心参考系；
3. 日心参考系；
4. FK4参考系：以选定的1535颗恒星的平均静止的位形作为基准的参考系，是比以上三个参考系都严格的惯性系。

2.1.2 非惯性系

牛顿运动定律不成立的参考系称为**非惯性系**(non-inertial system)。

2.2 惯性力

2.3 平动加速参考系、平动惯性力

2.3.1 定义

假设非惯性系K'相对于惯性系K以加速度$\overrightarrow{a}_0$做平动，则由相对运动规律可知，质点相对于 K'系和K系的加速度$\overrightarrow{a}_0$和$\overrightarrow{a}$满足：

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}' \tag{2.1}$$

惯性系中K，牛顿运动定律成立，即

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} = m\left(\overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}'\right) \tag{2.2}$$

移项，得

$$\overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}' = m\overrightarrow{a}_0 \tag{2.3}$$

定义**平动惯性力**：

$$\overrightarrow{F}_0 = -m\overrightarrow{a}^0 \tag{2.4}$$

将$\overrightarrow{F}' = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_0 = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}_0$看作非惯性参考系中受到的“合外力”，则在非惯性系K'中，牛顿第二定律在形式上成立：

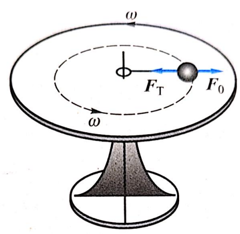
$$\overrightarrow{F}' = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_0 = m\overrightarrow{a}' \tag{2.5}$$

2.3.2 性质

不是真实的力，无施力物体，无反作用力是非惯性系加速度的反映。

2.4 匀速转动参考系、惯性离心力

匀速转动参考系也是一种常见的非惯性系。如右图所示，水平转盘以匀角速度ω绕通过圆心的垂直轴转动，质量为m的小球用长度为R的绳子与转轴相连静止在圆盘上，并随圆盘一起转动。站在地面上的观察者看来，小球m以匀角速度ω随圆盘一起转动，绳子施于小球的拉力$\overrightarrow{F}_r$ 提供了小球做匀速圆周运动时所需的向心力，即



$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{T}} = -m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e}_r = -m\omega^2 R\overrightarrow{e}_r \tag{2.6}$$

这表明在地面参考系中，小球的运动符合牛顿运动定律。

但是，从圆盘这个转动参考系中来看，小球受到合外力$\overrightarrow{F}_T$的作用，但是静止不动。为了在转动参考系中，仍然能够用牛顿运动定律解释该现象，需要引入一个虚拟的惯性力$\overrightarrow{F}_0$，该力与绳子的拉力$\overrightarrow{F}_T$大小相等、方向相反，即

$$\overrightarrow{F}_0 = -\overrightarrow{F}_{\mathrm{T}} = m\omega^2 R\overrightarrow{e}_r = -m\overrightarrow{a}_{\mathrm{n}} \tag{2.7}$$

（$\overrightarrow{e}_r$表示径向单位矢量）

称为**惯性离心力**(inertial centrifugal force)。

于是引入惯性离心力后，在转动参考系中，牛顿运动定律在形式上成立。物体受到“合外力”为

$$\overrightarrow{F}_T + \overrightarrow{F}_0 = \overrightarrow{0}$$

3 例题

3.1 解题思路

牛顿定律主要处理两类问题：

1. 质点；
2. 质点系，尤其是连续分布的质点系。

解题的基本思路：

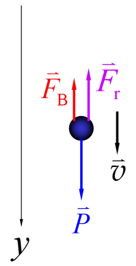
1. 确定研究对象进行受力分析（隔离物体，画受力图）；
2. 取坐标系；
3. 列方程（一般用分量式）；
4. 利用其它的约束条件列补充方程；
5. 先用文字符号求解，后带入数据计算结果。

3.2 Problem 1

一质量m，半径r的球体在水中静止释放沉入水底。已知阻力$F_r = -6\pi r\eta v$， η为粘滞系数，求$v\left(t\right)$。

Solution

取坐标如图（$\overrightarrow{F}_B$为浮力），则



$$mg - F_\mathrm{B} - 6\pi\eta r v = ma$$

令$F_0 = mg - F_B$，$b = 6\pi\eta r$，于是

$$F_0 - bv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

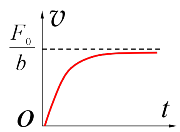
两边同时积分：

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v - \left(\frac{F_0}{b}\right)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \,\mathrm{d}t$$

得

$$v = \frac{F_0}{b}\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}\right]$$

则当$t \to \infty$时，$v_L \to \frac{F_0}{b}$（极限速度），当$t = 3\frac{b}{m}$时，$v = v_L(1-0.05) = 0.95v_L$。一般认为$t \le 3\frac{b}{m}$时，$v = v_L$



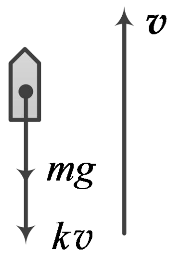
3.3 Problem 2

质量为m的物体，由地面以初速度v_0竖直向上发射，物体受到空气阻力大小$F_r = kv$。试求：

1. 物体发射到最大高度所需要的时间；
2. 物体能到达的最大高度。

Solution

Part One



物体在向上发射的过程中，受到重力和阻力作用，方向均与速度方向相反。以竖直向上作为正方向，由牛顿运动定律可得

$$-mg - kv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3.1}$$

对上式分离变量并取定积分，同时注意到物体到达最大高度时$v = 0$，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^0 -\frac{m}{mg+kv}\,\mathrm{d}v$$

积分得物体达到最大高度所需的时间为

$$t = \frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}$$

Part Two

利用$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$代入3.1式，可得

$$-mg - kv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量并取定积分，即

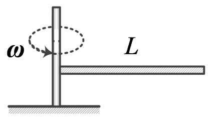
$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_{v_0}^0 -\frac{mv}{mg+kv}\,\mathrm{d}v$$

所以物体可达到的最大高度为

$$y = \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}\right)$$

3.4 Problem 3

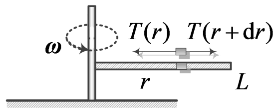
一条质量均匀分布的绳子，总质量为M、长度为L，一端拴在竖直转轴OO'上，并以恒定的角速度ω在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯，且忽略重力的影响，求距离转轴为r处绳中的张力$T(r)$。



Solution

在距离转轴为r处，取一个长为 $\mathrm{d}r$的一小段绳子，其质量为$\frac{M}{L}\,\mathrm{d}r$，其两端受力如图所示，由于该段绳子作圆周运动，所以由牛顿第二定律得

$$T(r) - T(r+\ \mathrm{d}r) =\ \mathrm{d}m \cdot a_n = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}r$$



令

$$T(r) - T(r+\ \mathrm{d}r) =\ \mathrm{d}m \cdot a_n = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}r$$

得

$$\mathrm{d}T = -\frac{M\omega^2}{L} r\,\mathrm{d}r$$

式中 $\mathrm{d}T$就是该小段绳子所受的合外力，“$-$”号表示该段绳子受到的合外力的方向与矢径 r相反，指向圆心。根据力的叠加原理，离轴r处绳中的张力就是r以外所有小段绳子所受的合力的绝对值之和，即

$$T(r) = \int |\mathrm{d}T| = \int_r^L \frac{M\omega^2}{L} r\,\mathrm{d}r = \frac{M\omega^2}{2L}\left(L^2 - r^2\right)$$