Advanced Mathematics: Line Integrals and Surface Integrals

Wuhan University

Lai Wei

April 27, 2025

目录

1 对弧长的曲线积分

1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

1.1.1 定义

设L为xOy面内的一条光滑曲线弧，函数$f(x,y)$在L上有界。在L上任意插入一点列$M_1, M_2, \cdots M_n-1$把L分成n个小段。设第i个小段的长度为Δs_i；又(ξ_i,η_i)为第i个小段上任意取定的一点，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$（$i=1,2,\cdots,n$）并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$。如果当各小弧段的长度的最大值$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与曲线弧$L$的分法及点$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关，那么称此极限为函数$f(x,y)$在曲线弧$L$上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$，即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，L叫做积分弧段。

如果L（或Γ）是分段光滑的，我们规定函数在L（或Γ）上的曲线积分等于函数在光滑的各段上的曲线积分之和。例如,设L可分成两段光滑曲线弧L_1及L_2（记作$L=L_1+L_2$），就规定

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

1.1.2 性质

1. 设α、β为常数，则

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

2. 若积分弧段L可分成两段光滑曲线弧L_1和L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

3. 设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\le\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\le\int_L|f(x,y)|\,\mathrm{d}s$$

1.2 对弧长的曲线积分的计算法

设$f(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

若$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \neq 0$，则曲线积分$\int_i f(x,y)\mathrm{d}s$存在，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \quad (\alpha < \beta) \tag{1.1}$$

公式1.1表明，计算对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$时，只要把x、y、ds依次换为 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$，然后从$\alpha$ 到β作定积分就行了，这里必须注意，定积分的下限α一定要小于上限β。

如果曲线弧长L由方程

$$y = \psi(x) \quad (x_0 \leq x \leq X)$$

给出，那么可以把这种情形看作是特殊的参数方程

$$x = t, y = \psi(t) \quad (x_0 \leq t \leq X)$$

的情形，从而由公式1.1得出

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^X f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\mathrm{d}x \, (x_0 < X) \tag{1.2}$$

类似地，如果曲线弧长L由方程

$$x = \varphi(y) \quad (y_0 \leq y \leq Y)$$

给出，那么有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{y_0}^Y f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\mathrm{d}y \, (y_0 < Y) \tag{1.3}$$

公式1.1可推广到空间曲线弧$\mathit{\Gamma}$由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

给出的情形，这时有

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_a^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t \quad (\alpha \leq \beta) \tag{1.4}$$