# University Physics: Rigid Body Mechanics

Date: March 16, 2025

*Wuhan University*

**Lai Wei**

# 目录

# 1 刚体的定轴转动

## 1.1 刚体

### 1.1.1 定义

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组。）

1. 刚体是理想模型；
2. 刚体模型是为简化研究问题而引进的。

### 1.1.2 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。（各点的状态一样）

刚体上任意一点的运动可以代表整个刚体的运动。（刚体平动的运动规律和与质点的运动规律相同）

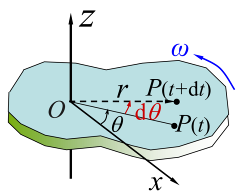
## 1.2 转动

分为**定轴转动**和**非定轴转动**。

刚体的一般运动可以看作“随质心的平动”和“绕质心的转动”的合成。

### 1.2.1 刚体转动的角速度和角加速度

角坐标$\theta = \theta(t)$，沿逆时针方向转动为$\theta > 0$，角位移$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$。角速度矢量




$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

方向按右手螺旋法则确定。

### 1.2.2 刚体定轴转动

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正、负来表示。

角加速度

$$\overrightarrow{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

定轴转动的特点：

1. 每一质点均做圆周运动，与轴垂直的圆面为转动平面；
2. 任意质点运动$\Delta\theta$, $\omega$, $\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{\alpha}$相同，但$\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$不相同；

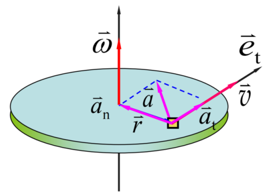
3. 运动描述仅需一个坐标。

匀变速转动公式：

| 质点匀变速直线运动 | 刚体绕定轴匀变速转动 |
|---|---|
| $v = v_0 + at$ | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ |
| $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ |
| $v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$ | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$ |

角量与线量的关系：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$




$$\overrightarrow{v_i} = r_i\omega\overrightarrow{e}_t$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_\perp = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2t}$$

于是

$$\overrightarrow{a} = r\alpha\overrightarrow{e}_{\mathrm{t}} + r\omega^2\overrightarrow{e}_{\mathrm{n}} \tag{1.2}$$

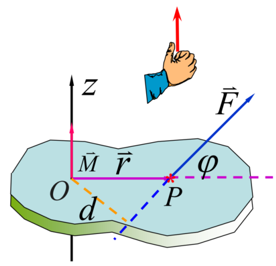
## 1.3 力矩

### 1.3.1 定义

用来描述力对刚体的转动的作用的物理量。

刚体绕$Oz$轴旋转，力作用在刚体上点$P$，且在转动平面内，为由点$O$到力的作用点$P$的径矢。$\overrightarrow{F}$对转轴$z$的力矩的定义：

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{1.3}$$




$$M = Fr\sin\theta = Fd \quad (d\text{为力臂})$$

### 1.3.2 讨论

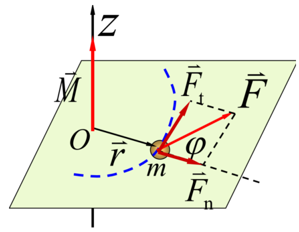
1. 若力$\overrightarrow{F}$不在转动平面内，可将力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量；
2. 合力矩等于各分力矩的矢量和；
3. 刚体内作用力和反作用力的力矩相互抵消；
4. 力矩的单位只能用牛顿 · 米，而不能用焦耳。

# 2 转动定律、转动惯量

## 2.1 质点的转动惯量

单个质点$m$与转轴刚性连接

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$




则

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha \tag{2.1}$$

定义

$$I = mr^2 \tag{2.2}$$

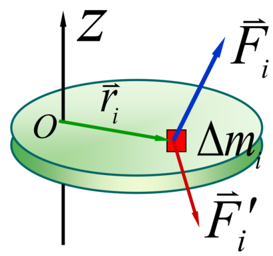
为质点$m$对$O$点的“转动惯量”。
于是

$$M = I\alpha \tag{2.3}$$

## 2.2 刚体的转动惯量

### 2.2.1 定义

质量元受外力$\vec{F}_{\mathrm{e}j}$，内力$\vec{F}_{\mathrm{i}j}$
则




$$M_{\mathrm{e}j} + M_{\mathrm{i}j} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

因为$M_{ij} = -M_{ji}$，所以

$$\sum_j M_{ij} = 0$$

于是

$$\sum_j M_{\mathrm{e}j} = \left(\sum \Delta m_j r_j^2\right) \alpha \tag{2.4}$$

于是定义

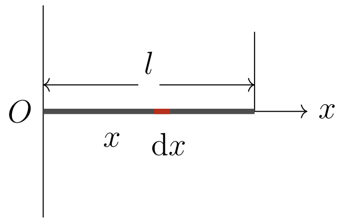
$$I = \sum_j \Delta m_j r_j^2 \tag{2.5}$$

为刚体对$O$点的“转动惯量”。
积分形式即为

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m \tag{2.6}$$

### 2.2.2 例

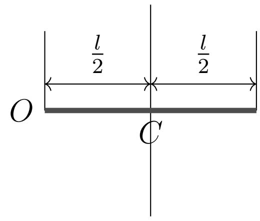
**例1** 均匀杆$m$对$O$轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：




运用微积分的思想和方法，

$$I_O = \int x^2 \, \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \, \mathrm{d}x\lambda = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3}ml^2 \tag{2.7}$$

**例2** 均匀杆$m$对$C$轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：

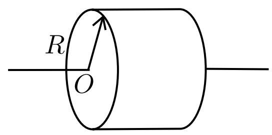



$$J_C = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx\lambda = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12}ml^2 \tag{2.8}$$

运用微积分的思想和方法，

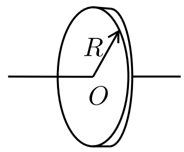
$$I_O = \int x^2 \, \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \, \mathrm{d}x\lambda = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3}ml^2$$

**例3** 均匀圆柱$m$对转轴（圆柱体的轴线）的转动惯量：



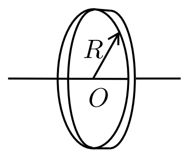

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

**例4** 均匀圆盘$m$对转轴（通过盘心垂直于盘面）的转动惯量：



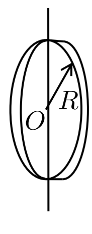

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

**例5** 均匀圆环$m$对转轴（通过环心垂直于盘面）的转动惯量：




$$I = mR^2$$

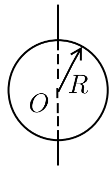
**例6** 均匀圆环$m$对转轴（沿圆环直径）的转动惯量：




$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

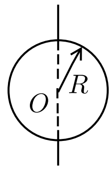
**例7** 薄球壳$m$对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$




**例8** 均匀实心球体$m$对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$




## 2.3 转动定律

### 2.3.1 定律

$$M = I\alpha \tag{2.9}$$

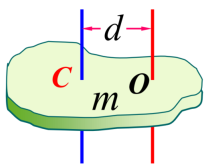
### 2.3.2 讨论

1. 若$M = 0$，则$\alpha = 0$，即$\omega$不变；
2. $\alpha$与$\frac{M}{I}$成反比；
3. $M = I\alpha = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$；
4. 转动惯量的单位为$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$；
5. 转动惯量的是对某一转轴而言的；
6. 转动惯量是转动惯性的量度；
7. 转动惯量具有可叠加性；
8. 转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置有关。

### 2.3.3 平行轴定理

质量为$m$的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为$I_C$，则对任一与该轴平行，相对$d$的转轴的转动惯量

$$I = I_C + md^2 \tag{2.10}$$



### 2.3.4 垂直轴定理（正交轴定理）

对**薄板状**刚体：对板面内相互垂直的两个定轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的定轴的转动惯量。

$$I_z = I_x + I_y \tag{2.11}$$

证明：

$$\begin{aligned}
I_z &= \sum \Delta m_i r_i^2 \\
&= \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \\
&= I_x + I_y
\end{aligned}$$