

University Physics: The Kinematics of Mass Points

Date: March 4, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1	质点力学	1
1.1	参考系、质点	1
1.1.1	参考系	1
1.1.2	参考系	1
1.1.3	坐标系	1
1.2	位置矢量、运动方程、路程、位移	1
1.2.1	位置矢量	1
1.2.2	运动方程（直角坐标系下）	1
1.3	位移、路程	2
1.3.1	位移 $\Delta \vec{r}$ （位置矢量的改变量）	2
1.3.2	路程 Δs 实际轨迹	2
1.4	速度	2
1.4.1	平均速度	2
1.4.2	瞬时速度	3
1.4.3	速度在自然坐标系下的表示	3
1.5	加速度	3
1.5.1	平均加速度	3
1.5.2	瞬时加速度	4
2	质点运动	4
2.1	一般曲线运动与圆周运动的定义	4
2.1.1	一般曲线运动	4
2.1.2	圆周运动	5
2.2	圆周运动	5
2.2.1	位置量的描述	5
2.2.2	圆周运动的角量	5
2.2.3	角量与线量的关系	6
2.2.4	圆周运动的切向加速度和法向加速度	7
2.3	一般曲线运动	7
3	相对运动	8
3.1	时间与空间	8
3.2	相对运动公式	8
3.3	伽利略速度变换	9
4	例题	9
4.1	Problem 1	9

1 质点力学

1.1 参考系、质点

1.1.1 参考系

为描述物体运动而选的标准物。

1.1.2 参考系

物体能否视为质点视具体情况而定。

1.1.3 坐标系

定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

1. 直角坐标系 (x, y, z)
2. 球坐标系 (r, θ, φ) : 二维极坐标
3. 柱坐标系 (ρ, φ, z)
4. 自然坐标系 s

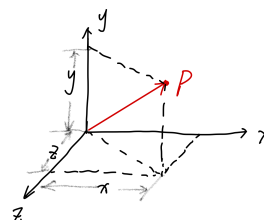
1.2 位置矢量、运动方程、路程、位移

1.2.1 位置矢量

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.1)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

\vec{r} 的方向可以用一组方向角, 即 \vec{r} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴之间的夹角 (α, β, γ) 来表示。 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 、 $\cos \beta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \gamma = \frac{z}{r}$, 有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。



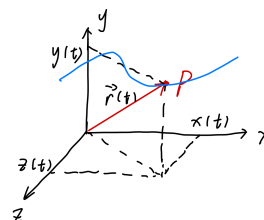
1.2.2 运动方程（直角坐标系下）

$$\vec{r}(t) = x \vec{i}(t) + y \vec{j}(t) + z \vec{k}(t) \quad (1.3)$$

分量式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的轨迹方程。



1.3 位移、路程

1.3.1 位移 $\Delta \vec{r}$ (位置矢量的改变量)

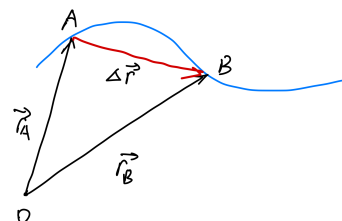
$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}, (t_A \text{时})$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}, (t_B \text{时})$$

于是其位移

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \quad (1.4)$$

方向由A指向B。



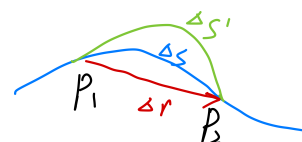
1.3.2 路程 Δs 实际轨迹

从 P_1 到 P_2 , 路程记为 $\Delta s = P_1 P_2$ 。

位移与路程的区别:

1. 位移是矢量，路程是标量；
2. 两点之间位移是唯一的，路程不是唯一的；
3. 一般情况下， $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$

在方向不变的圆周运动中， $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$ (元位移 $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k}$)。



1.4 速度

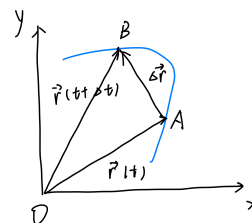
1.4.1 平均速度

在 Δt 内，质点位移 (二维) 为

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} \end{aligned}$$

定义

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} \quad (1.5)$$



1.4.2 瞬时速度

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\end{aligned}\quad (1.6)$$

即有,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

所以

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.7)$$

方向角

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

习惯上, 二维情况下, 用 $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$ 表示方向。

同理, 速率 $v = \frac{ds}{dt}$, 而因为 $t \rightarrow 0$ 时, 有 $|\vec{r}| = s$, 则

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

即有, 速度的大小等于速率。

1.4.3 速度在自然坐标系下的表示

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = v \vec{e}_t \quad (1.8)$$

其中, $\vec{e}_t = 1$, 表示方向, v 表示速度大小。

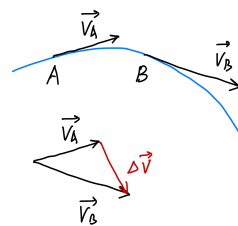
1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

1.5.1 平均加速度

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.9)$$

\vec{a} 与 $\Delta \vec{v}$ 的方向相同。



1.5.2 瞬时加速度

特点：

1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性" (相对于某一参考系)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \\ &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.10)$$

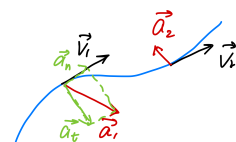
方向角 α 、 β 和 γ 满足

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为 $\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$ 。

加速度的方向：

- 直线运动： $\vec{a} \parallel \vec{v}$ 。
- 曲线运动：指向轨迹凹侧。自然坐标系下， $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ 。



在变速曲线运动中，加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与 \vec{v} 呈锐角时，运动变快；与 \vec{v} 呈钝角时，运动变慢。（因为 $\Delta \vec{v}$ 必定指向曲线凹的一侧。）

2 质点运动

2.1 一般曲线运动与圆周运动的定义

2.1.1 一般曲线运动

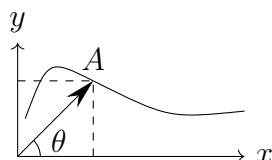
特点：曲率半径随时间变化，不是定值。描述曲线运动一般选自然坐标系。

2.1.2 圆周运动

圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，是研究一般曲线运动的基础

2.2 圆周运动

2.2.1 位置量的描述

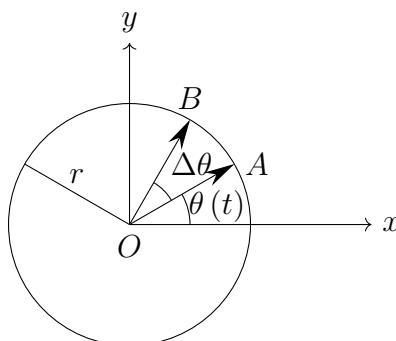


$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

于是

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

2.2.2 圆周运动的角量



角坐标 $\theta(t)$ ，角位移 $\Delta\theta = \theta(t) - \theta(t_0)$ 。

平均角速度

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.1)$$

角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2)$$

ω 是赧矢量，方向与 $d\theta$ 一致，由右手螺旋定则确定，且总是垂直于圆平面，沿着圆周的轴线方向。

平均角加速度

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.3)$$

角加速度

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.4)$$

2.2.3 角量与线量的关系

路程与角距离的关系

$$\Delta s = r\Delta\theta \quad (2.5)$$

速率与角速度的关系

$$b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

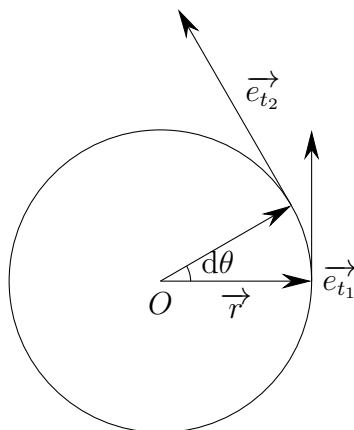
故

$$v(t) = r\omega(t) \quad (2.6)$$

速度

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{ds}{dt} \vec{e}_t \\ &= v \vec{e}_t \\ &= r\omega \vec{e}_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2.4 圆周运动的切向加速度和法向加速度



质点做变速圆周运动时

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad (2.8)$$

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (2.9)$$

因为 $|e_{t1}| = |e_{t2}| = 1$, 所以 $|d\vec{e}_t| = |\vec{e}_{t1}| \cdot d\theta = d\theta$ 。

当 $d\theta \rightarrow 0$ 时, $d\vec{e}_t \perp \vec{e}_{t1}$, 故 $d\vec{e}_t$ 的方向与 \vec{e}_n 方向相同, 即

$$d\vec{e}_t = d\theta\vec{e}_n \quad (2.10)$$

所以

$$v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = v\omega\vec{e}_n$$

于是

$$\alpha_n = \omega v \quad (2.11)$$

$$= \frac{v^2}{r} \quad (2.12)$$

综上所述, 切向加速度 $\vec{\alpha}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t$, $\alpha_t = \frac{dv}{dt}$; 法向加速度 $\vec{\alpha}_n = \frac{v^2}{r}\vec{e}_n$, $\alpha_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v$ 。

2.3 一般曲线运动

同圆周运动理知,

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} \quad (2.13)$$

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho \text{ 是曲率半径}) \quad (2.14)$$

而 $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_t + \vec{\alpha}_n$, 所以

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} \quad (2.15)$$

自然坐标系下的加速度表达式:

$$\vec{\alpha}_t = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{e}_t \quad (2.16)$$

$$\vec{\alpha}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad (2.17)$$

3 相对运动

3.1 时间与空间

在两个相对作直线运动的参考系中, 时间的测量是绝对的, 空间的测量也是绝对的, 与参考系无关。

时间和长度的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

在两个相对作直线运动的参考系中, 时间的测量是绝对的, 空间的测量也是绝对的, 与参考系无关, 时间和长度的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

3.2 相对运动公式

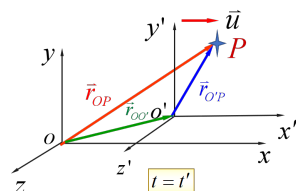
如右图, $\vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_{O'P}$,

对方程两边对时间求导数, 得

$$\frac{d\vec{r}_{OP}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'P}}{dt}$$

即

$$\vec{v}_{P \rightarrow O} = \vec{v}_{P \rightarrow O'} + \vec{v}_{O' \rightarrow O} \quad (3.1)$$



(绝对速度 = 相对速度 + 牵连速度)
 方程两边对时间求导数, 得

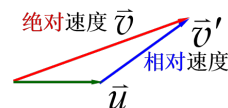
$$\overrightarrow{a_{P \rightarrow O}} = \overrightarrow{a_{P \rightarrow O'}} + \overrightarrow{a_{O' \rightarrow O}} \quad (3.2)$$

(绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度)
 如果 \vec{u} 是恒矢量, 则 $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, $\overrightarrow{a_{P \rightarrow O}} = \overrightarrow{a_{P \rightarrow O'}}$, $\overrightarrow{a_{O' \rightarrow O}} = 0$ 。
 注意:

1. 当 \vec{u} 接近光速时, 速度变换、加速度变换不成立;
2. 仅仅讨论 $\vec{u} = u_x \vec{i}$ 的情况 (u_x 为常数), 即水平方向有变换, 其他方向上没有变换。

3.3 伽利略速度变换

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (3.3)$$



绝对速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, 相对速度 $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, 牵连速度 \vec{u} 。
 加速度关系:

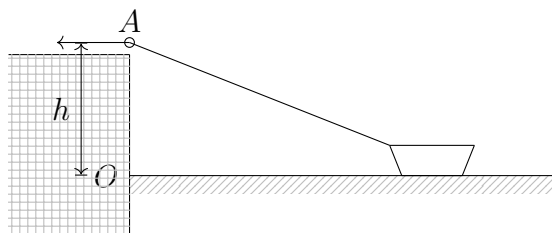
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (3.4)$$

若 $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{a}'$

4 例题

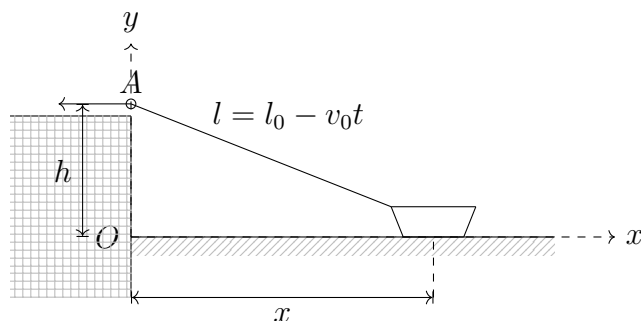
4.1 Problem 1

在离水面高为 h 的岸上, 有人用绳拉船靠岸, 如图所示。设人以匀速率 v_0 收绳, 试求: 当船距岸边 x_0 时, 船的速度和加速度的大小各是多少?



Solution**Part One**

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为 l_0 。在任意时刻船离岸边的距离为 x ，绳长为 l 。船在运动过程中， l 和 x 均是时间 t 的函数。

由题意， $l = l_0 - v_0 t$ ，所以

$$v_0 = -\frac{dl}{dt}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对 t 求导，可得

$$2l \frac{dl}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

则船的运动速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \frac{dl}{dt} = -\frac{l}{x} v_0$$

Part Two

再将速度对时间 t 求导，即可得到船的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{x^2} \left(x \frac{dl}{dt} - l \frac{dx}{dt} \right) = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3}$$

Part Three

令 $x = x_0$ ，得船在离岸边为 x_0 时的速度和加速度分别为

$$v = \frac{\sqrt{x_0^2 + h^2}}{x_0} v_0, \quad a = -\frac{v_0^2 h^2}{x_0^3}$$