

University Physics: Rigid Body Mechanics

Date: March 27, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1	刚体的定轴转动	1
1.1	刚体	1
1.1.1	定义	1
1.1.2	平动	1
1.2	转动	1
1.2.1	刚体转动的角速度和角加速度	1
1.2.2	刚体定轴转动	1
1.3	力矩	2
1.3.1	定义	2
1.3.2	讨论	2
2	转动定律、转动惯量	3
2.1	质点的转动惯量	3
2.2	刚体的转动惯量	3
2.2.1	定义	3
2.2.2	几种常见刚体的转动惯量	4
2.3	转动定律	7
2.3.1	定律	7
2.3.2	讨论	7
2.3.3	平行轴定理	7
2.3.4	垂直轴定理（正交轴定理）	7
2.4	例题	8
2.4.1	problem 1	8
3	刚体定轴转动的功能关系	9
3.1	力矩做功	9
3.2	转动动能	9
3.3	刚体定轴转动的动能定理	9
4	刚体的角动量、角动量定理、角动量守恒定律	10
4.1	刚体定轴转动的角动量	10
4.1.1	质点的角动量	10
4.1.2	刚体的角动量	10
4.2	刚体定轴转动的角动量定理	10
4.2.1	质点的角动量定理	10
4.2.2	质点的角动量守恒定律	11
4.2.3	刚体定轴转动的角动量定理	11
4.3	刚体定轴转动的角动量守恒定律	12
4.4	共轴系统定轴转动的角动量定理	12

1 刚体的定轴转动

1.1 刚体

1.1.1 定义

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组。）

1. 刚体是理想模型；
2. 刚体模型是为简化研究问题而引进的。

1.1.2 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。（各点的状态一样）

刚体上任意一点的运动可以代表整个刚体的运动。（刚体平动的运动规律和与质点的运动规律相同）

1.2 转动

分为定轴转动和非定轴转动。

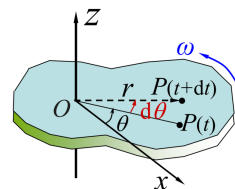
刚体的一般运动可以看作“随质心的平动”和“绕质心的转动”的合成。

1.2.1 刚体转动的角速度和角加速度

角坐标 $\theta = \theta(t)$ ，沿逆时针方向转动为 $\theta > 0$ ，角位移 $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$ 。角速度矢量

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.1)$$

方向按右手螺旋法则确定。



1.2.2 刚体定轴转动

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正、负来表示。

角加速度

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

定轴转动的特点：

1. 每一质点均做圆周运动，与轴垂直的圆面为转动平面；
2. 任意质点运动 $\Delta\theta$, ω , $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ 相同，但 \vec{v} , \vec{a} 不相同；

3. 运动描述仅需一个坐标。

匀变速转动公式：

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

角量与线量的关系：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

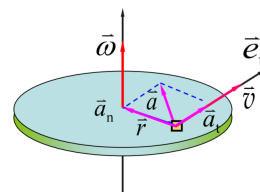
$$\vec{v}_i = r_i \omega \vec{e}_t$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

于是

$$\vec{a} = r\alpha \vec{e}_t + r\omega^2 \vec{e}_n \quad (1.2)$$



1.3 力矩

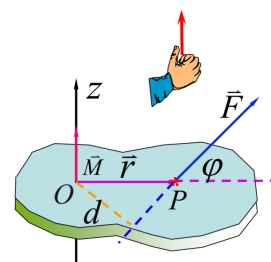
1.3.1 定义

用来描述力对刚体的转动的作用的物理量。

刚体绕 Oz 轴旋转，力作用在刚体上点 P ，且在转动平面内，为由点 O 到力的作用点 P 的径矢。 \vec{F} 对转轴 z 的力矩的定义：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.3)$$

$$M = Fr \sin \theta = Fd \quad (d \text{ 为力臂})$$



1.3.2 讨论

1. 若力 \vec{F} 不在转动平面内，可将力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量；
2. 合力矩等于各分力矩的矢量和；
3. 刚体内作用力和反作用力的力矩相互抵消；
4. 力矩的单位只能用牛顿·米，而不能用焦耳。

2 转动定律、转动惯量

2.1 质点的转动惯量

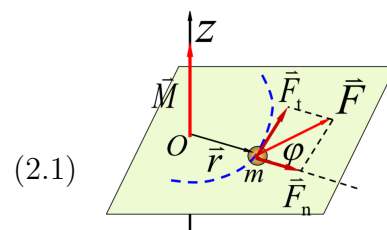
单个质点 m 与转轴刚性连接

$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

则

$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

定义



(2.1)

$$I = mr^2 \quad (2.2)$$

为质点 m 对 O 点的“转动惯量”。
于是

$$M = I\alpha \quad (2.3)$$

2.2 刚体的转动惯量

2.2.1 定义

质量元受外力 \vec{F}_{ej} ，内力 \vec{F}_{ij}
则

$$M_{ej} + M_{ij} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

因为 $M_{ij} = -M_{ji}$ ，所以

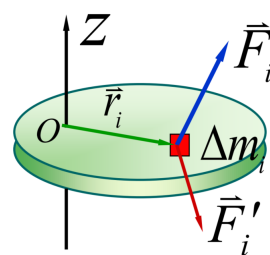
$$\sum_j M_{ij} = 0$$

于是

$$\sum_j M_{ej} = \left(\sum \Delta m_j r_j^2 \right) \alpha \quad (2.4)$$

于是定义

$$I = \sum_j \Delta m_j r_j^2 \quad (2.5)$$



为刚体对 O 点的“转动惯量”。
积分形式即为

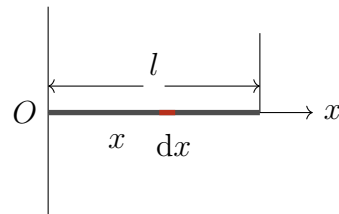
$$I = \int r^2 dm \quad (2.6)$$

2.2.2 几种常见刚体的转动惯量

例1 均匀杆 m 对 O 轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：

运用微积分的思想和方法，

$$I_O = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 dx \lambda = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2$$

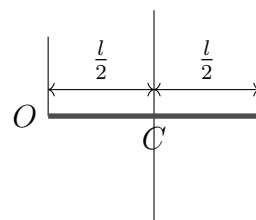


例2 均匀杆 m 对 C 轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2$$

证（方法1）

$$\begin{aligned} I_C &= \int x^2 dm \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx \lambda \\ &= \frac{1}{12} \lambda l^3 \\ &= \frac{1}{12} ml^2 \end{aligned}$$



证（方法2：平行轴定理）
由平行轴定理，

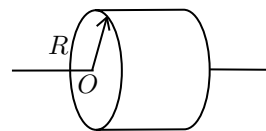
$$I_O = I_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

于是

$$\begin{aligned} I_C &= I_O - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} ml^2 - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} ml^2 \end{aligned}$$

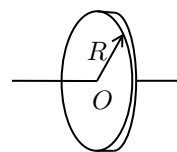
例3 均匀圆柱 m 对转轴（圆柱体的轴线）的转动惯量：

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

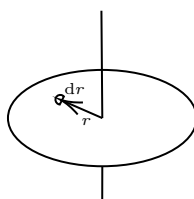


例4 均匀圆盘 m 对转轴（通过盘心垂直于盘面）的转动惯量：

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$



证（方法1）



设圆盘的面密度为 σ ，则 $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

如图，取微元 dm ：



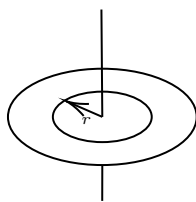
则

$$dm = \sigma r \, d\theta \, dr$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 \, dm \\ &= \int r^2 \sigma r \, d\theta \, dr \\ &= \iint \sigma r^3 \, dr \, d\theta \\ &= \sigma \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \sigma \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

证（方法2）



同样，设圆盘的面密度为 $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ 。取距离圆心 r 的某一圆环（宽 dr ）为 dm ，则

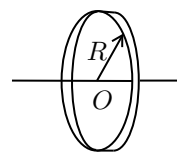
$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int_0^R r^2 \cdot \sigma 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

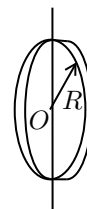
例5 均匀圆环 m 对转轴（通过环心垂直于盘面）的转动惯量：

$$I = mR^2$$



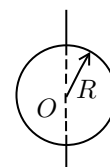
例6 均匀圆环 m 对转轴（沿圆环直径）的转动惯量：

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$



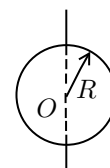
例7 薄球壳 m 对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{3} m R^2$$



例8 均匀实心球体 m 对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$



2.3 转动定律

2.3.1 定律

$$M = I\alpha \quad (2.7)$$

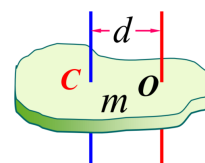
2.3.2 讨论

1. 若 $M = 0$, 则 $\alpha = 0$, 即 ω 不变;
2. α 与 $\frac{M}{I}$ 成反比;
3. $M = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$;
4. 转动惯量的单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$;
5. 转动惯量的是对某一转轴而言的;
6. 转动惯量是转动惯性的量度;
7. 转动惯量具有可叠加性;
8. 转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置有关。

2.3.3 平行轴定理

质量为 m 的刚体, 如果对其质心轴的转动惯量为 I_C , 则对任一与该轴平行, 相对 d 的转轴的转动惯量

$$I = I_C + md^2 \quad (2.8)$$



2.3.4 垂直轴定理 (正交轴定理)

对薄板状刚体: 对板面内相互垂直的两个定轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的定轴的转动惯量。

$$I_z = I_x + I_y \quad (2.9)$$

证明:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum \Delta m_i r_i^2 \\ &= \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= I_x + I_y \end{aligned}$$

2.4 例题

2.4.1 problem 1

质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘中心并垂直于盘面的固定光滑轴转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}Mr^2$ 。一根长为 l ，质量为 m 的匀质柔软绳索挂在圆盘上，如图所示。设绳与圆盘间无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为 S 时，绳的加速度的大小。

Solution

设某一时刻圆盘两侧的绳长分别为 x_1 、 x_2 ($x_1 > x_2$)，如图所示。可将绳分为三段，即长度分别为 x_1 、 x_2 的两段绳和绕在盘上的一段，由于绕在盘上的一段随盘一起转动，所以可将它和盘作为一个整体来讨论。假设在 1、2 两点处绳中的张力分别为 T_1 、 T_2 ，则由牛顿定律和转动定律可得

$$x_2 \rho g - T_2 = x_2 \rho a$$

$$T_1 - x_1 \rho g = x_1 \rho a$$

$$T_2 r - T_1 r = I \alpha$$

且

$$a = r \alpha$$

式中，

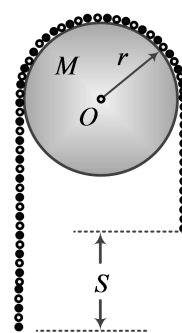
$$\rho = \frac{m}{l}$$

是绳的线密度，

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + \pi r \rho \cdot r^2$$

是绕在盘上的绳与盘作为整体的转动惯量。

联立以上方程，并取 $x_2 - x_1 = S$ ，可得绳的加速度为



$$a = \frac{2mgS}{(2m+M)l}$$

3 刚体定轴转动的功能关系

3.1 力矩做功

\vec{F} 在转动平面内,

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau ds = F_\tau r d\theta$$

上式也可写成

$$dA = M d\theta \quad (3.1)$$

于是力矩 M 对刚体所做的总功为

$$A = \int dA = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta \quad (3.2)$$

由式3.1还可得出力矩做功的瞬时功率为

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega \quad (3.3)$$

当 \vec{M} 与 $\vec{\omega}$ 同向, W 、 P 为正; 当 \vec{M} 与 $\vec{\omega}$ 反向, W 、 P 为负。

3.2 转动动能

整个刚体的动能就是所有质元的动能之和:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (3.4)$$

即

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.5)$$

3.3 刚体定轴转动的动能定理

由

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega d\omega$$

有

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (3.6)$$

即：合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。——刚体绕定轴转动的动能定理

4 刚体的角动量、角动量定理、角动量守恒定律

力的时间累积效应：冲量、动量、动量定理。

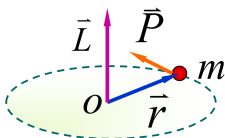
力矩的时间累积效应：冲量矩、角动量、角动量定理。

4.1 刚体定轴转动的角动量

4.1.1 质点的角动量

质量为 m 的质点以速度 \vec{v} 在空间运动，某时刻对 O 的位矢为 \vec{r} ，则质点对 O 的角动量定义为

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.1)$$



当质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动时，相对圆心的角动量：

$$L = rmv = r^2m\omega \quad (4.2)$$

（方向按右手螺旋法则确定）

4.1.2 刚体的角动量

对于绕 z 轴转动的刚体（质点系，每个质点做圆周运动）：

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \omega = \left(\sum_i r_i^2 \Delta m_i \right) \omega = I_z \omega \quad (4.3)$$

4.2 刚体定轴转动的角动量定理

4.2.1 质点的角动量定理

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (4.4)$$

作用于质点的合外力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率。
微分形式：

$$\vec{M} dt = dL \quad (4.5)$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \quad (4.6)$$

定义冲量矩：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt \quad (4.7)$$

质点的角动量定理另一表述：对同一参考点 O ，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

4.2.2 质点的角动量守恒定律

由质点的角动量定理：

如果 $\vec{M} = \vec{0}$ ，则

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{恒矢量} \quad (4.8)$$

若质点所受外力对某给定点 O 的力矩为零，则质点对 O 点的角动量保持不变。

4.2.3 刚体定轴转动的角动量定理

刚体也是质点系，刚体定轴转动的角动量定理的微分形式应为

$$M dt = d(I\omega) \quad (4.9)$$

注意：这两式对非刚体（转动惯量会发生变化）也成立。

而刚体绕定轴的转动定律：

$$M = I \frac{d\omega}{dt} \quad (4.10)$$

（ I 是常数，仅对刚体成立）

刚体（非刚体）定轴转动的角动量定理的积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{(I\omega)_1}^{(I\omega)_2} d(I\omega) = I_2\omega_2 - I_1\omega_1 \quad (4.11)$$

4.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

如果 $\vec{M} = \vec{0}$, 则

$$L = I\omega = \text{常量} \quad (4.12)$$

若物体所受的合外力矩为零, 则物体的角动量保持不变。

1. 若 I 不变, ω 不变;
2. 若 I 变, ω 也变, 但 $L = I\omega$ 不变。

即内力矩不改变系统的角动量。

在冲击等问题中, $M^{\text{in}} \gg M^{\text{ex}}$, 可认为 $L \approx \text{常量}$ 。

4.4 共轴系统定轴转动的角动量定理

当一个系统由多个物体和质点组成时, 则某段时间内对某轴的合外力矩的冲量矩等于系统绕该轴的角动量的增量:

$$\int_{t_1}^{t_2} M \, dt = \left(\sum_i I_i \omega_i \right)_2 - \left(\sum_i I_i \omega_i \right)_1$$

(I_i 、 ω_i 应对同一轴, ω_i 应对同一惯性系。)

共轴系统的定轴转动的角动量守恒定律:

当系统对某轴的合外力矩的冲量矩等于零时, 系统绕该轴的角动量守恒, 即:

$$\int_{t_1}^{t_2} M \, dt \text{ 时, } \sum_i I_i \omega_i = \text{恒矢量} \quad (4.13)$$

(I_i 、 ω_i 应对同一轴, ω_i 应对同一惯性系。)