University Physics: The Kinematics of Mass Points

日期：2025 年 2 月 25 日

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 质点力学

1.1 参考系、质点

1.1.1 参考系

为描述物体运动而选的标准物。

1.1.2 参考系

物体能否视为质点视具体情况而定。

1.1.3 坐标系

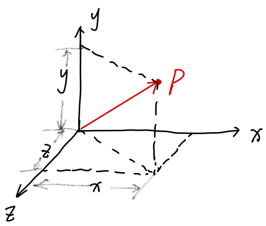
定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

1. 直角坐标系(x, y, z)
2. 球坐标系(r, θ, φ)：二维极坐标
3. 柱坐标系(ρ, φ, z)
4. 自然坐标系s

1.2 位置矢量、运动方程、路程、位移

1.2.1 位置矢量

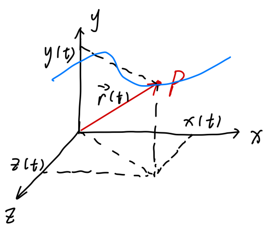
$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$
$$r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$\overrightarrow{r}$的方向可以用一组方向角，即$\overrightarrow{r}$与x轴、y轴、z轴之间的夹角(α, β, γ)来表示。$\cos\alpha = \frac{x}{r}$、$\cos\beta = \frac{y}{r}$、$\cos\gamma = \frac{z}{r}$，有$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$。

1.2.2 运动方程（直角坐标系下）

$$\overrightarrow{r}(t) = x\overrightarrow{i}(t) + y\overrightarrow{j}(t) + z\overrightarrow{k}(t)$$



分量式

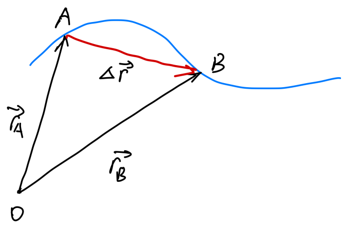
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的**轨迹方程**。

1.3 位移、路程

1.3.1 位移$\Delta\vec{r}$（位置矢量的改变量）

$$\vec{r_A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}, \ (t_A\text{时})$$
$$\vec{r_B} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}, \ (t_B\text{时})$$



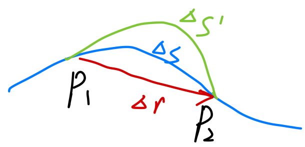
于是其位移

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

方向由A指向B。

1.3.2 路程Δs实际轨迹

从P_1到P_2，路程记为$\Delta s = \widehat{P_1P_2}$。
位移与路程的区别：



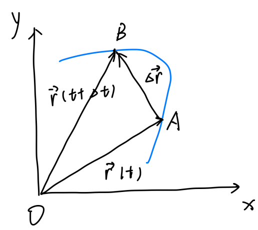
1. 位移是适量，路程是标量；
2. 两点之间位移是唯一的，路程不是唯一的；
3. 一般情况下，$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$
   在方向不变的圆周运动中，$|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ 当$\Delta t \to 0$时，$|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$ （元位移$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$）。

1.4 速度

1.4.1 平均速度

在Δt内，质点位移（二维）为

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\\ &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}\end{aligned}$$



定义

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta y}\vec{j}$$

1.4.2 瞬时速度

当$\Delta t \to 0$时，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{k} \\ &= v_x\overrightarrow{i} + v_y\overrightarrow{j} + v_z\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

即有，

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

方向角

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v},\ \cos\beta = \frac{v_y}{v},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

习惯上，二维情况下，用$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$表示方向。
同理，速率$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而因为$t \to 0$时，有$|\overrightarrow{r}| = s$，则

$$v = |\overrightarrow{v}| = |\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}|\frac{|\mathrm{d}\overrightarrow{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即有，速度的大小等于速率。

1.4.3 速度在自然坐标系下的表示

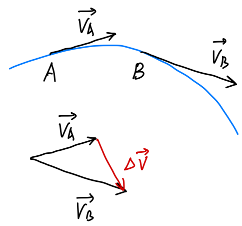
$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t} = v\overrightarrow{e_t}$$

其中，$\overrightarrow{e_t} = 1$，表示方向，v表示速度大小。

1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

1.5.1 平均加速度



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{a}$与$\Delta\vec{v}$的方向相同。

1.5.2 瞬时加速度

特点：

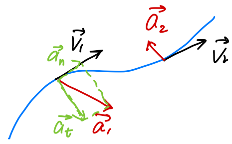
1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性"（相对于某一参考系）

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned}$$

方向角α、β和γ满足

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$。
加速度的方向：

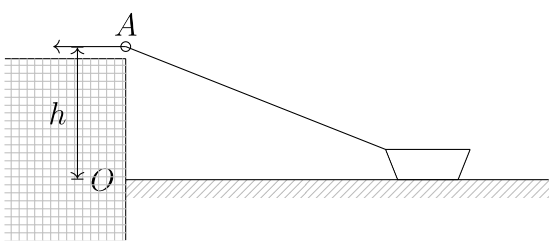


- 直线运动：$\vec{a}\ //\ \vec{v}$。
- 曲线运动：指向轨迹凹测。自然坐标系下，$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$。

在变速曲线运动中，加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与$\vec{v}$呈锐角时，运动变快；与$\vec{v}$呈钝角时，运动变快。(因为$\Delta\vec{v}$必定指向曲线凹的一侧。)

1.6 例题

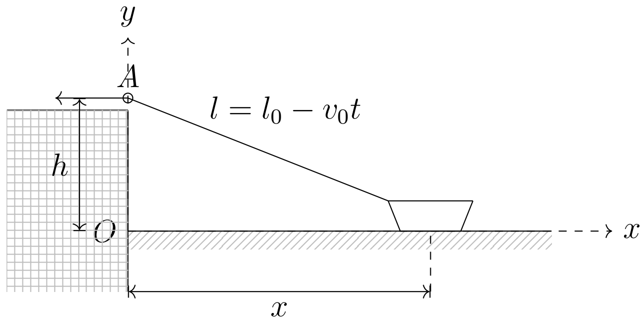
在离水面高为h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图所示。设人以匀速率v_0收绳，试求：当船距岸边x_0时，船的速度和加速度的大小各是多少？



Solution

Part One

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为l_0。在任意时刻船离岸边的距离为x，绳长为l_0。船在运动过程中，l和x均是时间t的函数。

由题意，$l = l_0 - v_0 t$，所以

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对t求导，可得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v_0$$

Part Two

再将速度对时间t求导，即可得到船的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} - l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3}$$

Part Three

令$x = x_0$，得船在离岸边为x_0时的速度和加速度分别为

$$v = \frac{\sqrt{x_0^2 + h^2}}{x_0} v_0,\ a = -\frac{v_0^2 h^2}{x_0^3}$$