Advanced Mathematics: Multiple Integral

Wuhan University

Lai Wei

April 10, 2025

目录

1 二重积分的概念与性质

1.1 二重积分的概念

1.1.1 定义

设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数。将闭区域D任意分成n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积。在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots n)$，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区域$D$的分法及点$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关，那么称此极限为函数$f(x,y)$ 在闭区域D上的二重积分，记作$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{1.1}$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$叫做被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$叫做面积元素， x与y叫做积分变量，D叫做积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

在二重积分的定义中对闭区域D的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分D，那么除了包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$的边长为Δx_j；和Δy_k，则$\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$.因此在直角坐标系中，有时也把面积元素$\mathrm{d}\sigma$记作$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，而把二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$叫做直角坐标系中的面积元素。

1.1.2 二重积分的几何意义

一般地，如果$f(x,y)\geq 0$，被积函数$f(x,y)$可以解释为曲顶柱体的顶在点(x,y)处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积。如果$f(x,y)$是负的，柱体就在xOy面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的。如果$f(x,y)$在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么，$f(x,y)$在D上的二重积分就等于xOy面上方的柱体体积减去xOy面下方的柱体体积所得之差。

1.2 二重积分的性质

1.2.1 性质1

设α和β为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

1.2.2 性质2

如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分何区域，那么在D的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和。

例如D分为两个闭区域D_1与D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有**可加性**。

1.2.3 性质3

如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1\cdot\ \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的，因为高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。

1.2.4 性质4

如果在D上，$f(x,y)\leq g(x,y)$ ，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)|\leq f(x,y)\leq |f(x,y)|,$$

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

1.2.5 性质5

设M和m分别是$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq M\sigma$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式。因为$m\leq f(x,y)\leq M$，所以由性质4有

$$\iint_D m\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D M\,\mathrm{d}\sigma$$

再应用性质1和性质3，便得此估值不等式。

1.2.6 性质6

（二重积分的中值定理）设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

2 二重积分的计算法

2.1 利用直角坐标计算二次积分

二重积分化二次积分：

2.1.1 X型区域

设积分区域D可以用不等式

$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$$

来表示（称为X型区域），其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续。

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

上式右端的积分叫做先对y、后对x的二次积分。就是说，先把x看做常数，把$f(x,y)$只看做y的函数，并对y计算从$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$的定积分；然后把算得的结果（是x的函数）再对x计算在区间$[a,b]$上的定积分。这个先对y，后对x的二次积分也常记作

$$\int_0^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

因此，等式2.1也写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{2.2}$$

这就是把二重积分化为先对y，后对x的二次积分的公式。

2.1.2 Y型区域

类似地，如果积分区域D可以用不等式

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

来表示（称为Y型区域），其中函数$\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$在区间$[c, d]$上连续，那么就有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \tag{2.3}$$

上式右端的积分叫做先对x，后对y的二次积分，这个积分也常记作

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

因此，等式2.3也写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

这就是把二重积分化为先对x，后对y的二次积分的公式。

2.1.3 既是X型区域，又是Y型区域

如果积分区域D既是X型的，可用不等式$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$表示，又是Y型的，可用不等式 $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d$表示，那么由公式2.2及2.4就得

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

上式表明，这两个不同次序的二次积分相等，因为它们都等于同一个二正积分

$$\iint_b f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

2.1.4 既不是X型区域，又不是Y型区域

可以把区域D分成几部分，使每个部分是X型区域或是Y型区域。

2.1.5 例题

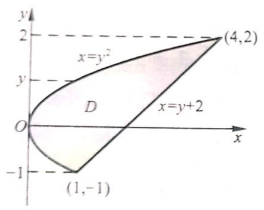
Problem 1

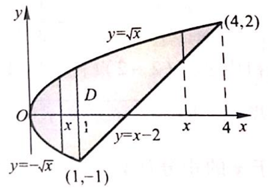
计算$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由抛物线$y^2 = x$及直线$y = x - 2$所围成的闭区域。

Solution

画出积分区域D如图所示。D既X型的，又是Y型的。若利用公式2.3，则得

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[y(y+2)^2-y^5\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{45}{8}
\end{aligned}$$





若利用公式2.1来计算，则由于在区间$[0,1]$及$[1,4]$上表示$\varphi_1(x)$的式子不同，所以要用经过交点$(1,-1)$且平行于y轴的直线$x=1$把区域D分成D_1和D_2两部分（如图），其中

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y) \mid -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le 1\right\} \\
D_2 &= \left\{(x,y) \mid x-2\le y\le\sqrt{x}, 1\le x\le 4\right\}
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Problem 2

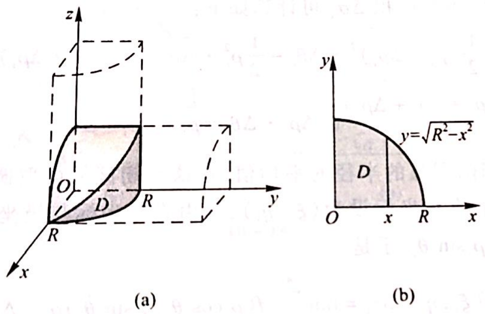
求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体的体积。

Solution

设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2\text{及 } x^2+z^2=R^2$$

利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分（图(a)）的体积V_1再乘以8就行了。



(a) (b)

所求立体在第一卦限部分可以看成一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\right\}$$

如图(b)所示。它的顶是柱面$z=\sqrt{R^2-x^2}$。于是

$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

所以

$$\begin{aligned}V_1&=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}y\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}R^3\end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3$$