Advanced Mathematics: The Method of Differentiation of Multivariate Functions and Its Applications

Wuhan University

Lai Wei

March 13, 2025

目录

1 多元函数的基本概念

1.1 平面点集

1.1.1 坐标平面

建立了坐标系的平面。二元有序实数组(x,y) 的全体，即$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$就表示坐标平面。

1.1.2 平面点集

坐标平面上具有某种性质P的点的几何，称作平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 具有某种性质}P\}$$

1.1.3 邻域

设$P_0\left(x_0,y_0\right)$是xOy平面上一点，δ是某一正数，与点$P_0\left(x_0,y_0\right)$ 距离小于δ的点$P\left(x,y\right)$的全体，称为 P_0的δ邻域，记作$U\left(P_0,\delta\right)$，即

$$U\left(P_0,\delta\right)=\{(x,y)\mid |PP_0|<\delta\}$$

或

$$U\left(P_0,\delta\right)=\left\{(x,y)\mid \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta\right\}$$

注意

1. 点P_0的去心邻域，记作$\overset{\circ}{U}\left(P_0,\delta\right)$，即

$$\overset{\circ}{U}\left(P_0,\delta\right)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$$

2. 若不强调δ，也可记作$U\left(P_0\right)$，$\overset{\circ}{U}\left(P_0\right)$

利用点与点集的关系，可知
若有一点$P\in\mathbf{R}^2$，任意点集$E\subset\mathbf{R}^2$

1. 内点：$\exists U\left(P\right)$，使$U\left(P\right)\subset E$，则P为E的内点。
2. 外点：$\exists U\left(P\right)$，使$U\left(P\right)\cap E=\phi$，则$P$为$E$的内点。
3. 边界点：$\forall U\left(P\right)$，若$U\left(P\right)$ 即有属于E的点，又有不属于E的点，则P为E的边界点。
4. E的边界：E的边界点的全体，记作∂E

1.1.4 聚点

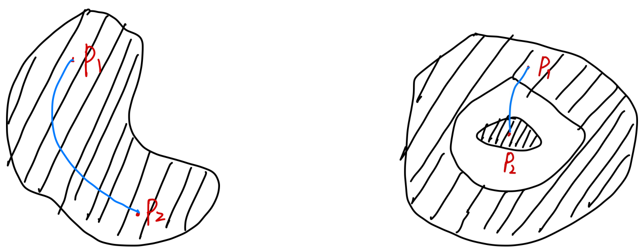
如果对于任意给定的$\delta > 0$，点P的去心邻域$\overset{\circ}{U}(P, \delta)$内总有$E$中的点，那么称$P$是$E$的聚点。

例如，若$E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$。则$x^2 + y^2 = 1$和$x^2 + y^2 = 2$都是$E$的聚点。

1.1.5 由点集所属类的特征分类

1. 开集：若点集E中的所有点都是E的内点，则称E为开集；
2. 闭集：若点集E的边界$\partial E \in E$，则称E为闭集。

例如，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$为开集，$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$为闭集，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$



(a) (b)

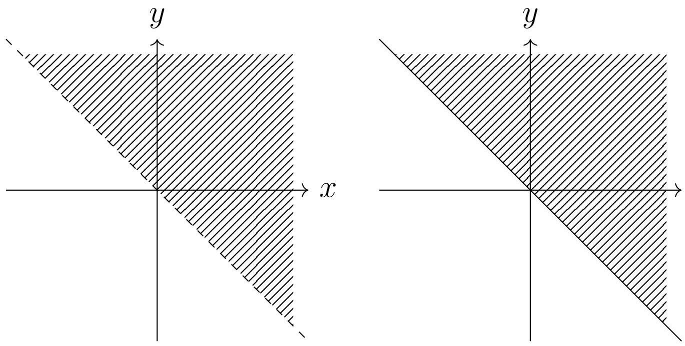
1. 连通集：如上图(a)；
2. 非连通集：如上图(b)。

1. 开区域（也简称区域）：连通的开集；
2. 闭区域：开区域连同其边界一起构成的点集。

如$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$为(开)区域；$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$为闭区域。

1. 有界集：对于集合E，若$\exists r > 0$，使$E \subset U(0, r)$，则称E是有界的。（就是说能找到一个“圆”把集合E包裹起来）
2. 无界集：若一个集合不是有界集，则称其为无界集。

例如，$\{(x, y) \mid x + y > 0\}$为无界开区域；$\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$为无界闭区域。



1.2 多元函数的概念

1.2.1 二元函数

设D是$\mathbf{R}^2$的一个非空子集，称映射$f : D \to \mathbf{R}$为定义在D上的二元函数，通常记为

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in D \tag{1.1}$$

或

$$z = f(P), \ P \in D \tag{1.2}$$

1.2.2 值域

上述定义中，与自变量x和y的一对值（即二元有序实数组）(x, y) 相对应的因变量z的值，也称为f在点(x, y)处的函数值，记作$f(x, y)$，即$z = f(x, y)$ 函数值$f(x, y)$的全体所构成的集合为函数f的值域，记作$f(D)$，即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x, y), \ (x, y) \in D\} \tag{1.3}$$

1.2.3 推广

三元函数：$u = f(x, y, z), \ (x, y, z) \in D$；
n元函数：$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D$

1.2.4 自然定义域

使算式有意义的点的集合。

例如$z = \ln(x + y)$的自然定义域为 $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$。$z = \arcsin(x + y)$ 的自然定义域为$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$。

1.2.5 二元函数的图形

设函数$z = f\left(x, y\right)$的定义域为D。对于任意取定的点$P(x,y) \in D$，对应的函数值为$z = f\left(x, y\right)$。这样，以x为横坐标，y为纵坐标和 $z = f\left(x, y\right)$为竖坐标在空间就确定一点$M\left(x, y, z\right)$。当x, y遍取D上的一切点时，得到一个空间点集

$$\left\{(x, y, z) \mid z = f\left(x, y\right),\ (x, y) \in D\right\} \tag{1.4}$$

这个点集称为二元函数$z = f\left(x, y\right)$的图形，通常我们也说二元函数的图形是一张曲面。

例如，由空间解析几何知道，线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面，而函数$z = x^2 + y^2$的图形是旋转抛物面。

1.3 多元函数的极限

如果在$P\left(x, y\right) \to P_0\left(x_0, y_0\right)$（即$|PP_0| = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} \to 0$）过程中，对应的函数值无限接近于一个确定的常数$A$，那么就说$A$是函数$f\left(x, y\right)$当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$时的极限。

定义：“$\varepsilon - \delta$”语言

设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0\left(x_0, y_0\right)$ 是D的聚点。如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当点$P(x, y) \in D \cap \ddot{U}\left(P_0, \delta\right)$ 时，都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{1.5}$$

成立，那么就称常数A为函数$f\left(x, y\right)$当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 的极限，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \tag{1.6}$$

或

$$f(P) \to A\left(P \to P_0\right) \tag{1.7}$$

注意：

1. P_0是D的聚点；
2. 证明过程中，核心在于寻找$\delta = \delta\left(\varepsilon\right)$；
3. 与一元函数不同，$P \to P_0$是指P以任何方式趋近P_0;
4. 若P以不同方式趋近于P_0，$f\left(p\right)$趋近于不同值，则可以断定$f\left(p\right)$当$P \to P_0$时的极限不存在。

1.4 多元函数的连续性

1.4.1 连续性的定义

设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$ 为D的聚点，且$P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \tag{1.8}$$

那么称$f(P)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续。
注意：若$f(x,y)$在D的每一个点都是连续的，则称$f(x,y)$在上D为连续的。

1.4.2 间断点的定义

设二元函数$f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$ 为D的聚点，如果函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点不连续，那么就称$P_0(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$的间断点。

1.4.3 连续函数的运算

一元函数中关于极限的运算法划，对于多元函数仍然适用。根据多元函数的极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积仍为连续函，连续函数的商在分母不为零出仍连续；多元连续函数的复合函数仍然是连续函数。

1.4.4 多元初等函数

与一元初等函数相类似，多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的。例如$\frac{x+x^2+y^2}{1+y^2}$、 $\sin(x+y)$、$e^{x^2+y^2+z^2}$等都是多元初等函数。

1.4.5 有界闭区域上多元函数连续函数的性质

1. （**有界性与最大值最小值定理**）有界闭区域D上连续的多元函数，必定在D上有上界，且能取得它的最大值和最小值。
   也就是说，若P在有界闭区域D上连续，则必定存在常数$M>0$，使得对一切$P\in D$有$|f(D)|\le M$；且存在$P_1,P_2\in D$，使得
   $$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},\ f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}$$

2. （**介值定理**）在有界闭区域D上连续的多元函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值。

3. （**一致连续性定理**）在有界闭区域D上连续的多元函数必定在D上一致连续。
   也就是说，若$f(P)$在有界闭区域D上连续，则对任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于D上任意两点P_1、P_2，只要当$|P_1P_2|<\varepsilon$ 时，都有
   $$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$
   成立。

1.5 例题

1.5.1 Problem 1

设$f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=0$$

Solution

$f\left(x,y\right)$的定义域为$D=\mathbf{R}^2\backslash\left\{(0,0)\right\}$，点$O\left(0,0\right)$为$D$的聚点。

而$|f(x,y)-0|=|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{y+x^2}\right|\le x^2+y^2$

对$\forall\varepsilon>0$要使$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\varepsilon$ 成立，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$。

于是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)=0$$

1.5.2 Problem 2

求证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限不存在。

Solution

显然，当$P\left(x,y\right)$沿x轴趋近于点$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{x,y\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

当$P\left(x,y\right)$沿直线$y=kx$趋近于点$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着k的值的不同而改变的。

所以原函数当$(x,y)\to(0,0)$时的极限不存在。

1.5.3 Problem 3

求

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \\
&= \lim_{xy\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y\to 2} y \\
&= 1 \times 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$