

University Physics: Mechanical Vibration

Date: April 2, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1	简谐振动	1
1.1	简谐振动的动力学特征	1
1.1.1	弹簧振子的振动	1
1.1.2	弹簧振子的运动方程	1
1.1.3	谐振动的速度和加速度	2
1.1.4	描述简谐振动的物理量	3
1.2	简谐振动的能量问题	4
1.2.1	解析法描述简谐运动	4
1.2.2	参考圆表示法	5
1.2.3	旋转矢量表示法简谐振动	5
2	单摆和复摆	6
3	单摆	6
3.1	复摆（刚体的转动）	7
3.2	例题	8
3.3	讨论	8

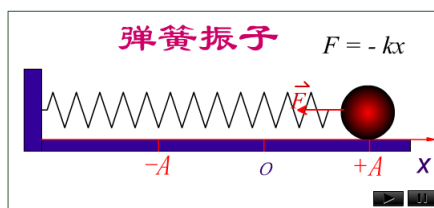
机械振动：物体围绕一固定位置往复运动。

1 简谐振动

1.1 简谐振动的动力学特征

1.1.1 弹簧振子的振动

模型：谐振子轻弹簧（不计质量）与物体（看成质点）
 弹簧振子的无阻尼自由振动：



振动的成因：

1. 回复力；
2. 惯性。

1.1.2 弹簧振子的运动方程

$$F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.1)$$

令

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

即 $a = -\omega^2 x$

具有加速度 a 与位移的大小 x 成正比，而方向相反特征的振动称为简谐运动。
 简谐运动的微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1.2)$$

解得

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.3)$$

或

$$x = A \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.4)$$

用复指数表示

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1.5)$$

公式之间的相互推导关系

$$\begin{array}{c}
 F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 F(x) \longrightarrow a \longleftarrow v(t) \longleftarrow x(t)
 \end{array}$$

1.1.3 谐振动的速度和加速度

由

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

运动方程对时间求导

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -v_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

运动方程对时间求二阶导

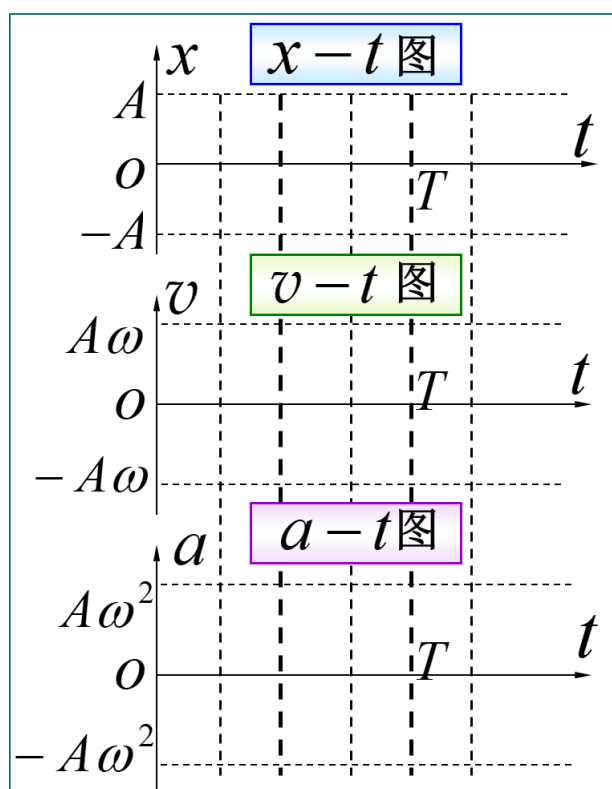
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -a_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.7)$$

其中,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

(此结果一般有两个值, 最后要舍去一个, 根据速度的方向。)



1.1.4 描述简谐振动的物理量

振幅 (amplitude):

$$x_m = A \quad (1.8)$$

周期 (period):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.9)$$

简谐运动中, ω 被称为角频率或圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.10)$$

频率 (frequency):

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (1.11)$$

相位 (phase):

$$(\omega t + \varphi) \quad (1.12)$$

初相位（初相，initial phase）

$$\varphi \quad (1.13)$$

相位差：

设有两个同方向、同频率的简谐振动，它们的振动表达式分别为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

它们在任意时刻的相位差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) \quad (1.14)$$

不同简谐振动在同一时刻，两者的相位之差值可以判断它们的步调：超前、落后。

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \begin{cases} 2k\pi, & \text{同相} \\ 2(k+1)\pi, & \text{反相} \\ > 0, & x_2 \text{ 比 } x_1 \text{ 超前 (或 } x_1 \text{ 比 } x_2 \text{ 落后)} \\ < 0, & x_2 \text{ 比 } x_1 \text{ 落后 (或 } x_1 \text{ 比 } x_2 \text{ 超前)} \end{cases}$$

注意：超前、落后以 $|\Delta\varphi| < \pi$ 的相位角来判断。

1.2 简谐振动的能量问题

1.2.1 解析法描述简谐运动

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

以水平的弹簧振子为例，

简谐振动的动能：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1.15)$$

简谐振动的势能：

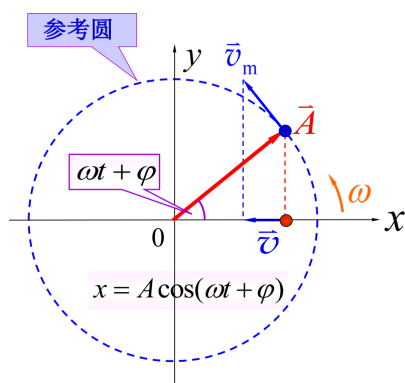
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (1.16)$$

简谐振动的总机械能量：

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (1.17)$$

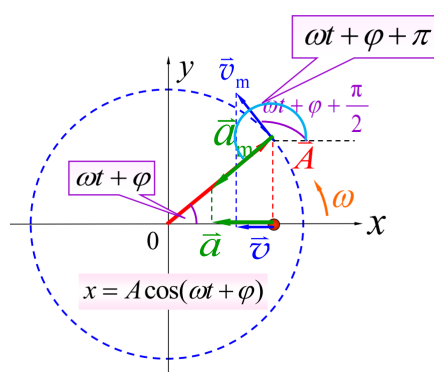
即简谐振动总机械能不随时间变化。

1.2.2 参考圆表示法

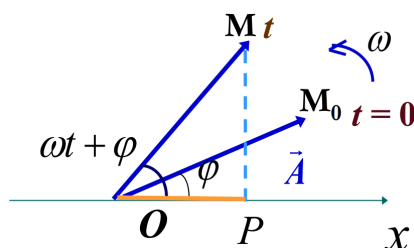


一个动点在参考圆上匀速转动，以该动点在参考圆的一根直径上的投影点的运动可代表简谐振动。

1.2.3 旋转矢量表示法简谐振动



旋转矢量法：矢量 \vec{A} 的端点在 x 轴上投影点的运动规律。使相位表示更加直观。

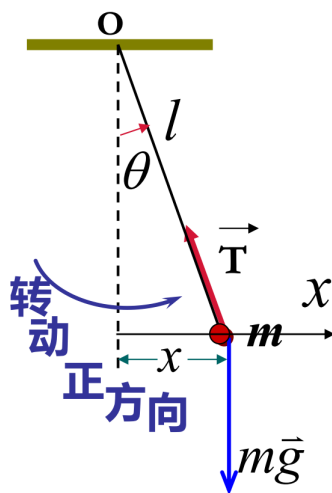


1. 在平面图上作一 Ox 轴；
2. 振幅矢量 \vec{A} 从初相位置开始绕 Ox 轴上 O 点以匀角速度 ω 逆时针旋转，转一圈所用的时间 T ；
3. 矢量 \vec{A} 的端点 M 在 x 轴上投影点 P 的运动规律：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

2 单摆和复摆

3 单摆



由转动定律,

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.1)$$

$$-mgl \sin \theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.2)$$

当 $\theta < 5^\circ$ 时, $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (3.3)$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad (3.4)$$

方程3.4与简谐运动的微分方程式1.2在数学形式上完全相同。

在角位移很小的时候, 单摆的振动是简谐振动。

角频率、振动的周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.5)$$

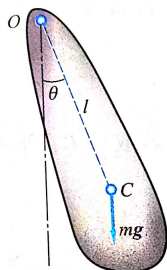
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.6)$$

简谐振动表达式为

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.7)$$

3.1 复摆（刚体的转动）

一个可绕固定轴 O 在竖直平面内摆动的刚体称为复摆 (compound pendulum)。



1. 任意形状;
2. 小角度;
3. 无摩擦;
4. 自由摆动。

复摆受重力矩

$$M = -mgl \sin \theta$$

（负号表示重力矩 M 的方向与角位移 θ 的方向相反）

当 $\theta < 5^\circ$ 时, $\sin \theta \approx \theta$

$$M = -mgl\theta$$

由转动定律 $M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \quad (3.8)$$

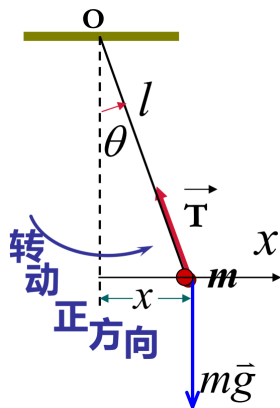
在摆角很小时，复摆的运动也是简谐运动，其角频率、振动的周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (3.9)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (3.10)$$

3.2 例题

长度为 $3a$ 的轻质细杆的两端各有质量为 m 的小球，该杆可绕水平光滑轴 O 摆动，若摆角很小，求细杆的振动周期。



Solution

由转动定律可得

$$-mg \cdot 2a \sin \theta + mg \cdot a \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$I = ma^2 + m(2a)^2 = 5ma^2$$

当 θ 很小时， $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{5a} \theta = 0$$

故 $\omega = \frac{g}{5a}$ ，所以

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5a}{g}}$$

3.3 讨论

1. 振动系统受弹性回复力之外还受恒力作用时，系统仍作简谐振动。
2. 质点是绕平衡位置 O' 作简谐振动的，选平衡位置为坐标原点更方便。