

Theoretical Mechanics: Planar Force System

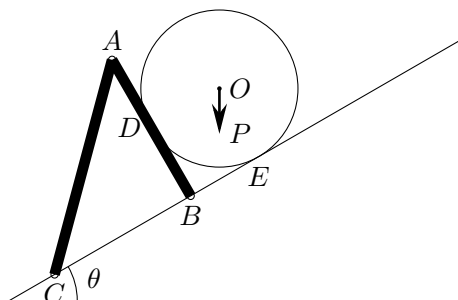
Date: 2025 年 2 月 17 日

Wuhan University

Lai Wei

Problem 1

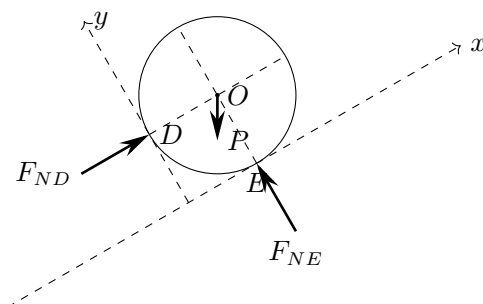
一重为50kN的圆柱搁置在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的光滑斜面上，并用撑架支承如图所示。假设A、B、C处均为光滑铰链，接触处的摩擦不计，接触点D刚好在构件AB的中央，求撑件AC的受力及铰链B的约束力（不计撑架构件自重）。



Solution

Part One

取圆柱为分离体，D，E处为光滑接触，圆柱受主动力 P ，约束力 F_{ND} 及 F_{NE} 作用，汇交于圆柱中心O点，受力图：



取如图所示坐标轴，由平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，即

$$F_{ND} - P \sin \theta = 0$$

解得

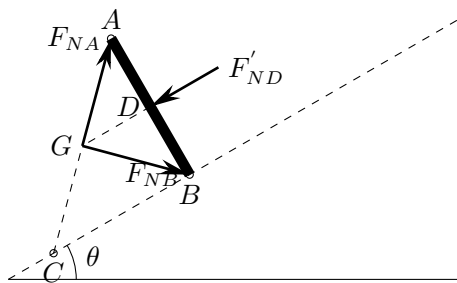
$$F_{ND} = 25\text{kN}$$

Part Two

AC为二力构件，受力图：

**Part Three**

取构件 AB 为分离体, F'_{ND} 与 F_{NA} 的作用线交于 G 点, 由三力平衡汇交, B 铰约束力一定过 G 点, 受力图:



由 $\sum F_y = 0$, 即

$$F_{NA} \sin 45^\circ - F_{NB} \sin 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB}$$

由 $\sum F_x = 0$, 即

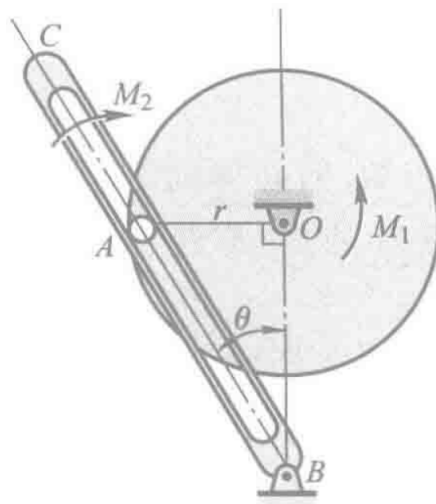
$$F_{NA} \cos 45^\circ + F_{NB} \cos 45^\circ - F'_{ND} = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}} F'_{ND} = 17.68 \text{ kN}$$

Problem 2

如图所示机构自重不计，圆轮上的销子A放置在摇杆BC上的光滑导槽内。圆轮上作用有一力偶 M_1 ，其力偶矩为 $2\text{kN} \cdot \text{m}$ ， $OA = r = 0.5\text{m}$ ，图示位置时 OA 与 OB 垂直， $\theta = 30^\circ$ ，且系统平衡。求作用在摇杆上的力偶矩 M_2 及铰链O，B处的约束力。



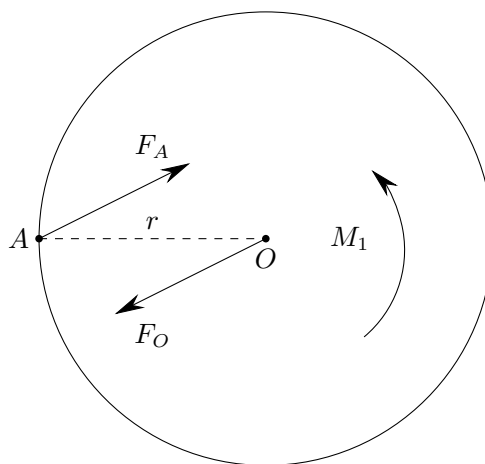
Solution

Part One

取圆轮为研究对象。

注意到圆轮受到A点的光滑接触约束，因此约束力 F_A 是垂直于摇杆的。

已知圆轮受到力偶 M_1 和力 F_A 、 F_O 的作用。因为力偶只能由力偶来平衡，所以力 F_A 和 F_O 大小相等、方向相反。



由平衡条件 $\sum M_i = 0$:

$$M_1 - F_A r \sin \theta = 0$$

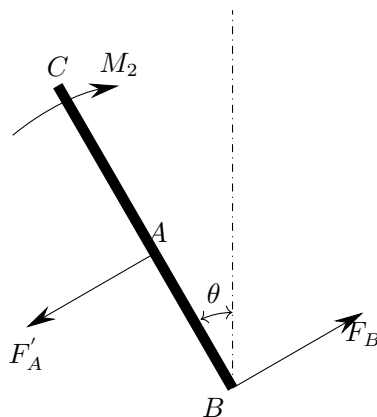
解得:

$$F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ} = 8\text{kN}$$

Part Two

取摇杆为研究对象，分析受力。

B 点是光滑铰链约束，因为力偶只能由力偶来平衡，所以力 F_B 和 F'_A 大小相等、方向相反。



由平衡条件 $\sum M_i = 0$:

$$-M_2 + F'_A \frac{r}{\sin \theta} = 0$$

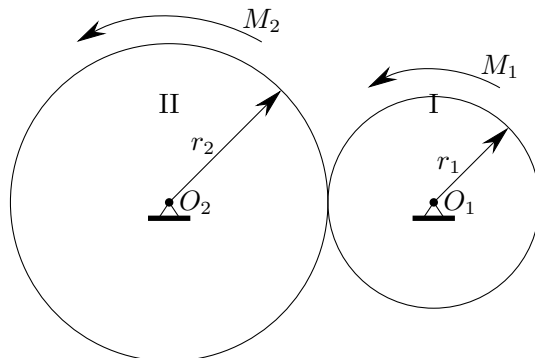
解得:

$$M_2 = 8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_O = F_B = F_A = 8\text{kN}$$

Problem 3

两齿轮的节圆半径分别为 r_1 、 r_2 ，作用于轮I上的主动力偶的力偶矩为 M_1 ，齿轮压力角为 θ ，不计两齿轮的重量。求两齿轮维持匀速转动时齿轮II 的阻力偶之矩 M_2 与轴承 O_1 、 O_2 的约束力大小和方向。

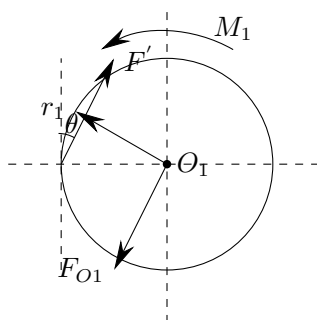


Solution

压力角是指不计算摩擦力的情况下，受力方向和运动方向所夹的锐角。

Part One

对轮I 进行受力分析：



由平衡条件 $\sum M_i = 0$ ：

$$M_1 - F_{O1} r_1 \cos \theta = 0$$

解得

$$F_{O1} = \frac{M_1}{r_1 \cos \theta}$$

（方向如图）

Part Two

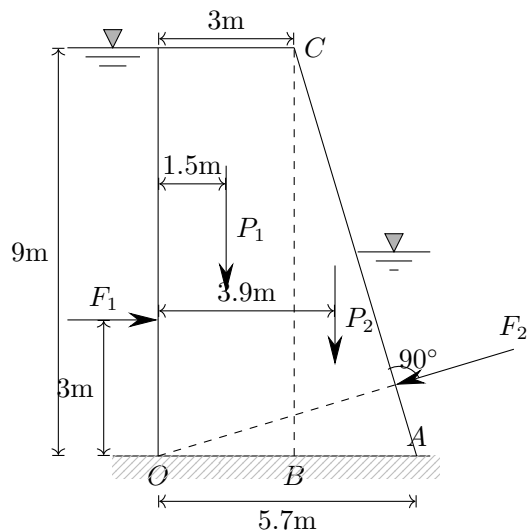
同理可得轴承 O_2 约束力

$$F_{O2} = \frac{M_2}{r_2 \cos \theta}$$

$$M_2 = \frac{r_2}{r_1} M_1$$

Problem 4

如图所示，梯形的水坝可以看作由左边的矩形部分和右边的三角形部分组合而成。左边部分的重力 $P_1 = 450\text{kN}$ ，右边部分的重力 $P_2 = 200\text{kN}$ ，上游水库给水坝的压力 $F_1 = 300\text{kN}$ ，下游河流给水坝的压力 $F_2 = 70\text{kN}$ 。各力的作用方向、位置如图所示。



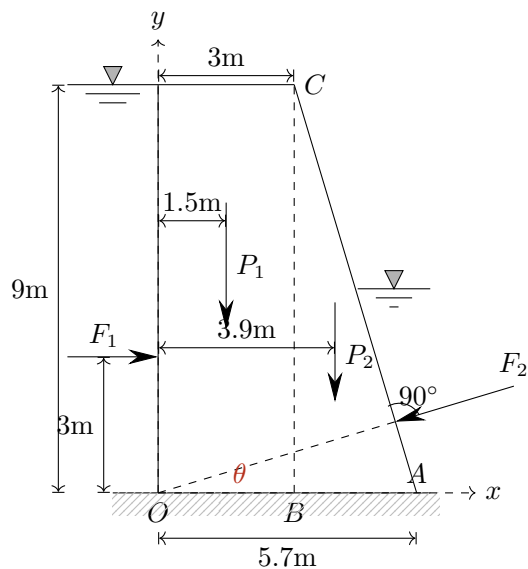
求

1. 力系的合力 F_R
2. 合力与 OA 的交点到点 O 的距离 x
3. 合力的作用线方程

Solution

Part One

建立如图所示的坐标系，向 O 点简化，求主矢和主矩。



先计算主矢。注意到只有力 F_2 的方向较为特殊，记 F_2 与水平方向夹角为 θ ，则

$$\theta = \angle ACB = \arctan \frac{AB}{BC} = \arctan 0.3 \approx 16.7^\circ$$

于是

$$F'_{Rx} = \sum F_{ix} = F_1 - F_2 \cos \theta \approx 232.9 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_{iy} = -P_1 - P_2 - F_2 \sin \theta \approx -670.1 \text{ kN}$$

所以

$$F'_R = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2} \approx 709.1 \text{ kN}$$

于是 F'_R 的方向余弦

$$\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F'_R} \approx 0.3283$$

$$\cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F'_R} \approx -0.9446$$

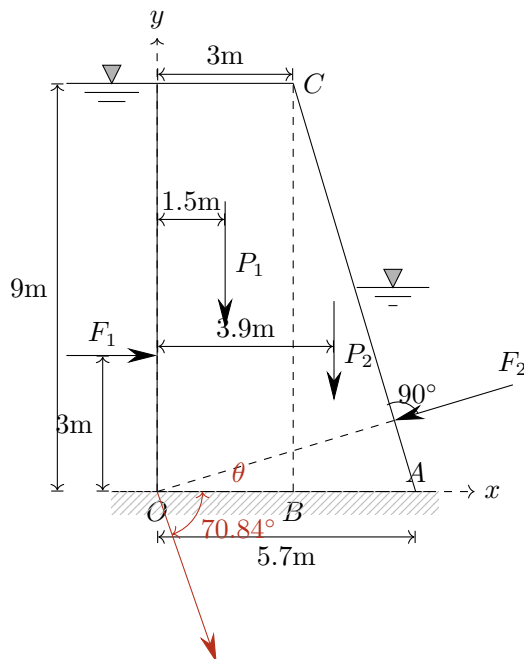
所以主矢与 x 轴正向夹角

$$\alpha \approx 70.84^\circ$$

主矢与 y 轴负向夹角

$$\beta \approx 19.16^\circ$$

在图中表示：

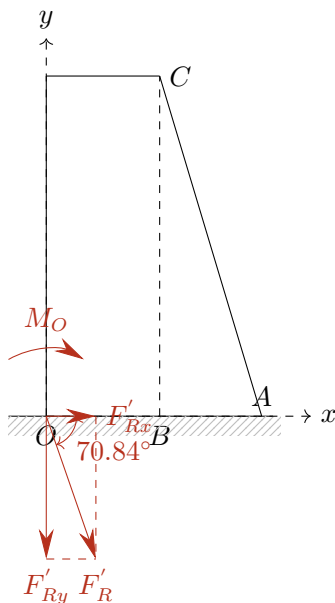


再计算主矩：

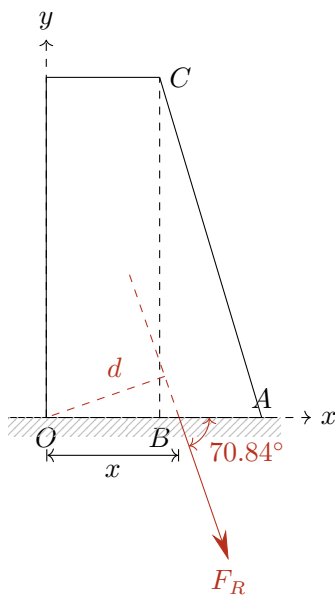
$$M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3\text{m} \cdot F_1 - 1.5\text{m} \cdot P_1 - 3.9\text{m} \cdot P_2 = -2355\text{kN} \cdot \text{m}$$

Part Two

向O点简化的主矢和主矩如图：



求合力及其作用线位置。合力 F_R 的大小和方向与主矢 F'_R 相同，其作用线位置 x 值依据合力矩定理求得：



由

$$M_O = F_R \cdot d$$

得

$$d \approx 2.3197\text{m}$$

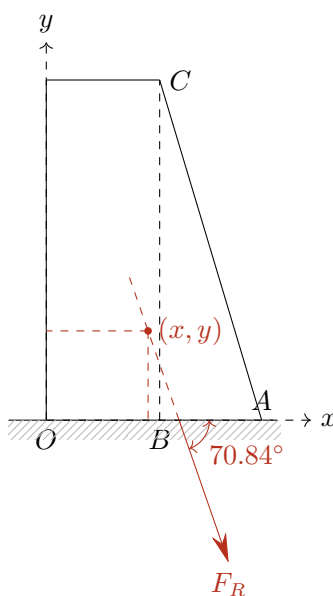
所以

$$x = \frac{d}{\sin 70.84^\circ} \approx 3.514\text{m}$$

Part Three

由于合力可以沿其作用线移动，设合力作用线上任意一点的坐标为 (x, y) ，将合力作用于此点，则合力对坐标原点的力矩的解析表达式为

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_R) = x \cdot F'_{Ry} - y \cdot F'_{Rx}$$

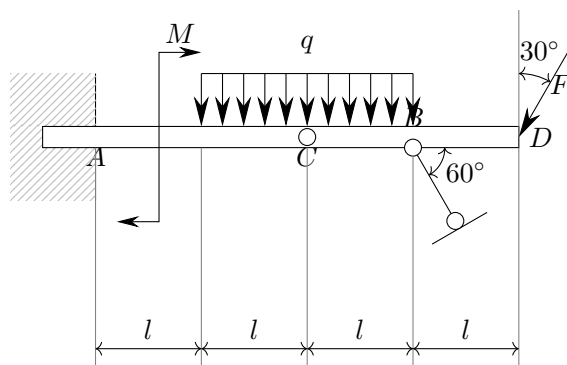


代入数据化简可得合力作用线方程为

$$670.1x + 232.9y - 2355 = 0$$

Problem 5

如图所示不计重力的组合梁，由AC和CD在C处铰接而成。已知 $F = 20\text{kN}$ ，均布载荷 $q = 10\text{kN/m}$ ， $M = 20\text{kN} \cdot \text{m}$ ， $l = 1\text{m}$ ，求固定端A与滚动支架B的约束力。

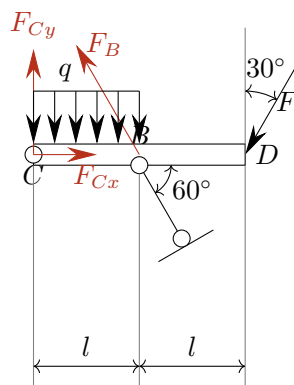


Solution

先画出系统所受约束力。平面任意力系，4个未知量，无法求解？C点铰链这个因素（条件）没有考虑。把这个因素考虑进去再分析，会发现这实质上仍是一个静定问题。

Part One

以CD为研究对象，画受力图。



由 $\sum M_C = 0$ 得

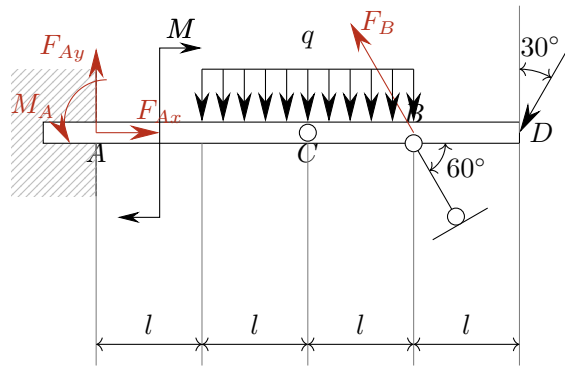
$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

解得

$$F_B = 455.77\text{kN}$$

Part Two

取整体为研究对象，画受力图：



由 $\sum F_x = 0$,

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

由 $\sum F_y = 0$,

$$F_{Ay} + F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

由 $\sum M_A = 0$,

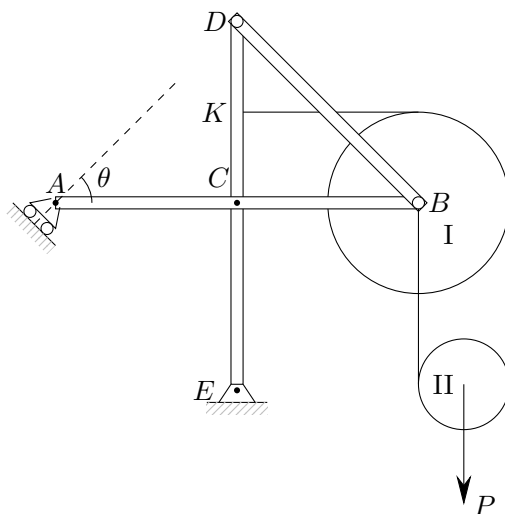
$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

分别解得

$$M_A = 10.37 \text{ kN} \cdot \text{m}, F_{Ax} = 32.89 \text{ kN}, F_{Ay} = -2.32 \text{ kN}$$

Problem 6

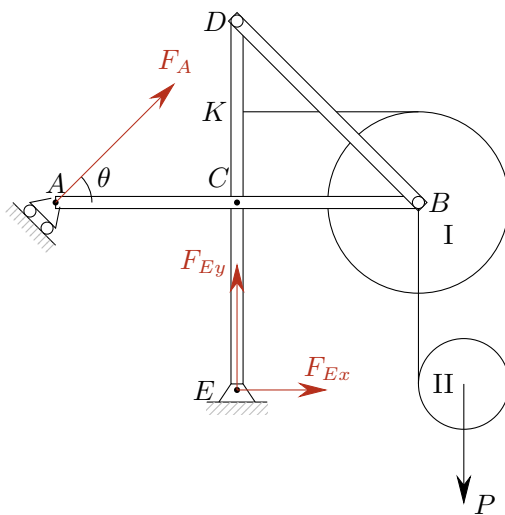
图示结构中，已知重物重力为 P ， $DC = CE = AC = CB = 2l$ ，定滑轮半径为 R ，动滑轮半径为 r ，且 $R = 2r = l$ ， $\theta = 45^\circ$ 。试求 A 、 E 支座的约束力以及 BD 杆所受到的力。



Solution

Part One

取整体为研究对象，画出其受力图：



只有三个未知量，能够求解。

由 $\sum M_E(F) = 0$,

$$-2 \left(F_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l \right) - P \frac{5}{2}l = 0$$

由 $\sum F_x = 0$,

$$F_A \cos 45^\circ + F_{Ex} = 0$$

由 $\sum F_y = 0$,

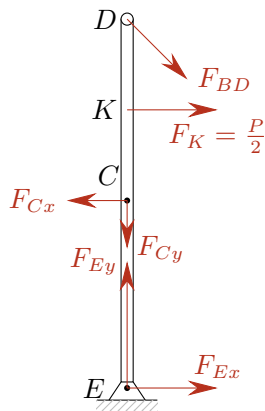
$$F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - P = 0$$

分别解得

$$F_A = -\frac{5\sqrt{2}}{8}P, F_{Ex} = \frac{5}{8}P, F_{Ey} = \frac{13}{8}P$$

Part Two

取 DE 杆为研究对象，画出其受力图：



注意到只求 F_{BD} ，因此由 $\sum M_C (F) = 0$ 列平衡方程

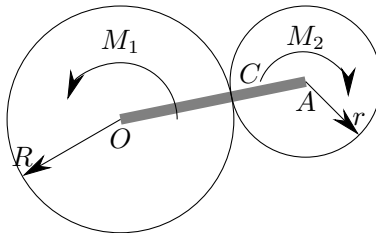
$$0 - F_{BD} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l - F_K \cdot l + F_{Ex} \cdot 2l = 0$$

解得

$$F_{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{8}P$$

Problem 7

半径为 r 的齿轮由曲柄 OA 带动, 沿半径为 R 的固定齿轮滚动。已知曲柄 OA 上作用一力偶矩为 M_1 的力偶, 在齿轮 A 上作用一力偶矩为 M_2 的力偶, 其转向如图所示。齿轮的压力角为 θ , 若不计构件的自重和摩擦, 求机构平衡时 M_1 和 M_2 的关系。



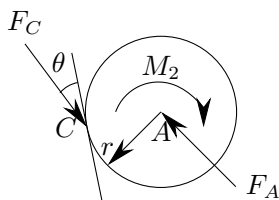
Solution

如果选整体为研究对象, 则由于支承处的约束力和齿轮啮合面 C 处的约束力未知, 无法直接求出 M_1 与 M_2 之间的关系。又考虑到主动力系是平面力偶系, 故用平面力偶系的平衡条件可方便地求得结果。

易错点: 题目所说力偶 M_1 作用在曲柄 OA 上, 而非齿轮上。因此, 后需要对曲柄 OA 进行分析。

Part One

先取齿轮 A 为研究对象。由于齿轮 A 平衡, 所以啮合力 F 与约束力 F 必组成力偶, 其受力图下:



列平衡方程

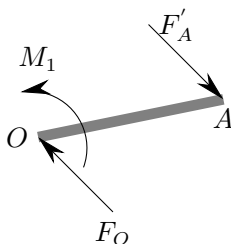
$$\sum M = 0, F_A r \cos \theta - M_2 = 0 \quad (1)$$

得

$$F_A = \frac{M_2}{r \cos \theta}$$

Part Two

再取曲柄 OA 为研究对象。 A , O 处的约束力 F'_A , F_O 组成力偶, 受力图如下:



列平衡方程如下:

$$\sum M = 0, -F'_A (r + R) \cos \theta + M_1 = 0 \quad (2)$$

得

$$F'_A = \frac{M_1}{(r + R) \cos \theta}$$

由公式(1), (2), 可知

$$\frac{M_2}{r \cos \theta} = \frac{M_1}{(r + R) \cos \theta}$$

则

$$M_2 = \frac{r}{R + r} M_1$$