Advanced Mathematics: Vector Algebra and Spatial Geometry

Wuhan University

Lai Wei

March 2, 2025

目录

1 向量积、混合积

1.1 向量积

1.1.1 定义

设有向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，其夹角为θ。定义新向量，记作$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，如下：

- 大小：

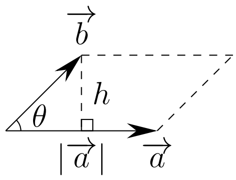
$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta \tag{1.1}$$

- 方向：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$与$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 都垂直，其指向按右手螺旋定则，由$\overrightarrow{a}$沿着不大于π 的角度转向$\overrightarrow{b}$确定。

1.1.2 性质

1. $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$， $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$
2. 重要结论：
   $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$
   对非零向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，有$\overrightarrow{a}\mathrel{/\!/}\overrightarrow{b}\leftrightarrow\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$
3. 几何意义（向量积的模）：

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| &= |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta \\ &= S_{\square}\end{aligned} \tag{1.2}$$



即$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$表示：以$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积。

1.1.3 运算规律

1. 反交换律：

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a} \tag{1.3}$$

2. 分配律：

$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c} \tag{1.4}$$

3. 结合律：

$$(\lambda\overrightarrow{a})=\lambda\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\times\left(\lambda\overrightarrow{b}\right) \tag{1.5}$$

1.1.4 向量积的坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=\left(x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}+z_1\overrightarrow{k}\right)\times\left(x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+z_2\overrightarrow{k}\right)\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\cdot\overrightarrow{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot\overrightarrow{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\cdot\overrightarrow{k}\\&=(y_1z_2-z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2\ x_1y_2-y_1x_2)\\&=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{1.6}$$

同理，

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}$$

1.2 混合积

1.2.1 定义

设有向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，称数$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}$为向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$的混合积，记作$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]$，即

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\tag{1.7}$$

1.2.2 坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$、$\overrightarrow{c}=(x_3,y_3,z_3)$，则有

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\tag{1.8}$$

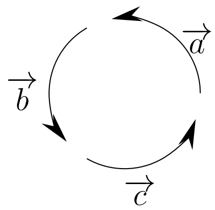
1.2.3 几何意义

$\left|\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]\right|$表示以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$为相邻三条棱的平行六面体的体积。因此，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$共线$\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=0$。

1.2.4 运算规律

$$\begin{aligned}\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] &= \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}\right] \\ &= -\left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}\right] = -\left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}\right]\end{aligned} \tag{1.9}$$

即按照下图沿同一方向（顺时针或逆时针）旋转的混合积组合的值是相等的。



1.2.5 例题

已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，求$\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$。

Solution

$$\begin{aligned}&\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \\ =&\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})\end{aligned}$$

由$\vec{b}\times\vec{b}=0$，故

$$\begin{aligned}&\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \\ =&\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \\ =&\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{c}]+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}\right]+[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}]+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]\end{aligned}$$

显然，当混合积中只有不同的两个向量时（可认为这三个向量共面），该混合积值为0。于是

$$\begin{aligned}&\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\times(\vec{c}+\vec{a}) \\ =&\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]+\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]\end{aligned}$$

由于

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

而

$$\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]$$

于是

$$\left[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})\right] \times (\vec{c} + \vec{a}) = 2\ \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

2 平面及其方程

2.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

2.1.1 曲面方程

设有曲面$S : F\left(x, y, z\right) = 0$，满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.1.2 空间曲线方程

设有曲面$S_1 : F_1\left(x, y, z\right) = 0$和设有曲面$S_2 : F_2\left(x, y, z\right) = 0$，联立两方程：

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, z\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z\right) = 0. \end{cases}$$

满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.2 平面的点法式方程

设平面Π上有一点$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，其法向量为$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$。（注意：平面的法向量不唯一。）

设$M\left(x,y,z\right)$，则$\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{n}$，则$\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{n}=0$，而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$。于是

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \tag{2.1}$$

即为平面Π的点法式方程。

2.3 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2.2}$$

即为平面的一般方程。

任一三元一次方程的图形总是一个平面，方程2.2中x、y、z的系数就是该平面的一个法向量$\overrightarrow{n}$的坐标，即$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$。

特殊情况：

1. $D=0\Leftrightarrow$平面通过原点；
2. $A=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）x轴；
   $B=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）y轴；
   $C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）z轴；
3. $A=B=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）xOy平面；
   $B=C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）yOz平面；
   $A=C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）xOz平面；
4. $A=D=0\Leftrightarrow$平面包含x轴；
   $B=D=0\Leftrightarrow$平面包含y轴；
   $C=D=0\Leftrightarrow$平面包含z轴；
5. $A=B=D=0\Leftrightarrow z=0$（$xOy$平面）；
   $B=C=D=0\Leftrightarrow x=0$（$yOz$平面）；
   $A=C=D=0\Leftrightarrow y=0$（$xOz$平面）；

2.4 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{2.3}$$

即为平面的截距式方程。方程2.3中a，b，c即分别为平面在x，y，z 轴上的截距。

2.5 两平面的夹角

2.5.1 定义

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角或直角）称为两平面的夹角。因此$\cos\theta = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)\right|$。

设平面Π_1和Π_2的法线向量依次为$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$， $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$。按两向量夹角的余弦的坐标表示式平面$\Pi_1$ 和Π_2的夹角θ可由

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{2.4}$$

来确定。

2.5.2 结论

1. Π_1和Π_2相互垂直相当于$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
2. Π_1和Π_2相互平行相当于$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

2.6 点到平面的距离

设点$P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外一点，则$P_0$到该平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.5}$$

设有两平行平面$\Pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$和$\Pi_1 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$，则两平面间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.6}$$

3 空间直线及其方程

3.1 空间直线的一般方程

$$L : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

注意：空间直线的方程是不唯一的。

3.2 空间直线的对称式方程

L上有一点$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$，非零方向向量$\overrightarrow{s}=(m, n, p)$，设$L$上任一点$M_0\left(x, y, z\right)$，则$\overrightarrow{M_0 M} \parallel \overrightarrow{s}$，而$\overrightarrow{M_0 M}=\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right)$，所以

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{3.2}$$

即为直线的对称式方程（或称点向式方程）

注意

1. 非零向量$\overrightarrow{s}=(m, n, p)$称为$L$的方向向量（不唯一）;
2. 直线上任一方向向量$\overrightarrow{s}$的坐标m, n, p称为一组方向数;
3. $\overrightarrow{s}$的方向余弦叫做L的方向余弦;
4. 当$m=0$时，
$$\left\{\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{array}\right. \tag{3.3}$$
5. 当$m=n=0$时，
$$\left\{\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{array}\right. \tag{3.4}$$
此时，直线与z轴平行。

3.3 空间直线的参数方程

令$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+m t \\ y=y_0+n t \\ z=z_0+p t \end{array}\right. \tag{3.5}$$

注意：

1. t取定每一个值，对应x, y, z为L上一点的坐标;
2. 参数式方程一般用来求直线与平面的交点。

3.4 空间直线的两点式方程

过$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$两点的直线方程，则方向向量$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$。

所以方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{3.6}$$

即为直线的两点式方程。

3.5 两直线的夹角

3.5.1 定义

两直线的方向向量的夹角（通常指锐角或直角）。

3.5.2 夹角的余弦公式

设直线的方向向量为$\overrightarrow{s} = (m, n, p)$，平面的法线向量为 $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$，则直线和平面的夹角$\varphi$ 可由

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \tag{3.7}$$

来确定。

于是可知：

1. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
2. $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

3.6 直线与平面的夹角

3.6.1 定义

直线L与其在平面上投影直线所形成的夹角。

3.6.2 夹角的正弦公式

设直线L_1和L_2的方向向量依次为$\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$和 $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$，则直线$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$ 可由

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{3.8}$$

来确定。

于是可知

1. $L \parallel \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow Amn + Bn + Cp = 0$
2. $L \perp \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \parallel \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

3.7 平面束方程

设直线L由方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (3.9) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (3.10) \end{cases}$$

给出，其中A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例，则

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \tag{3.11}$$

能表示通过直线L的所有平面（除平面3.10外）。则称之为直线L的平面束方程。

3.8 例题

3.8.1 Problem 1

将一般方程$L : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 化为对称式、参数式并求L与平面$\Pi : x + y = 0$的交点。

Solution

取$y = 0$，代入方程中，得$x = 1,\ z = -2$，则点$M_0\,(1, 0, -2)$为L上一点；取$z = 0$，代入方程中，得$x = -\frac{5}{3},\ y = \frac{2}{3}$，则点$M_0\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$为$L$上一点。
则$\overrightarrow{M_0M_1} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$，取$\overrightarrow{s} = (4, 1, 3)$，则$L$的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{3}$$

则L的参数式方程为

$$\begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

将参数式方程代入平面$\Pi : x + y = 0$中，则有$(1 - 4t) + t = 0$，所以 $t = \frac{1}{3}$。
所以L与平面$\Pi : x + y = 0$的交点为$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$。

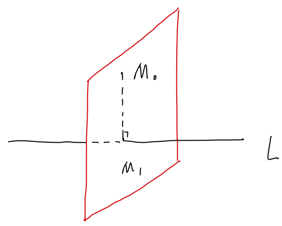
3.8.2 Problem 2

求过点$(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程。

Solution

Part One

要求过点$M_0\,(2,1,3)$且与直线L垂直相交的直线，关键在于求垂足M_1。可以作过点M_0且垂直于直线L的平面。



则该平面的对称式方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

即

$$3x+2y-z-5=0$$

Part Two

再求直线与垂直平面的交点：

令$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}=t$

得

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$$

解得$t=\dfrac{3}{7}$

代入得交点坐标为$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$

Part Three

所以所求直线的一个方向向量为

$$\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4)$$

所以所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

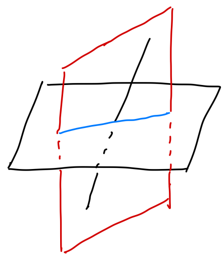
3.8.3 Problem 3

求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上投影直线的方程。

Solution

过直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$



整理得

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

由于此平面与平面$x+y+z=0$垂直，则两平面法向量也相互垂直。即

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

解得$\lambda=-1$。
代入平面束方程中，知投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

4 曲面及其方程

4.1 曲面研究的基本问题

4.1.1 曲面的方程

若曲面S和三元方程$F(x,y,z)=0$满足：

1. S上的点皆满足三元方程；
2. 不在S上的点皆不满足三元方程；

则称$F(x,y,z)=0$为S的方程，S称为方程$F(x,y,z)=0$的图形。

4.1.2 两类基本问题

1. 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；
2. 已知坐标x、y和z间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状。

要求：掌握常见的曲面及其方程。
球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{4.1}$$

一般地，设有三元一次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

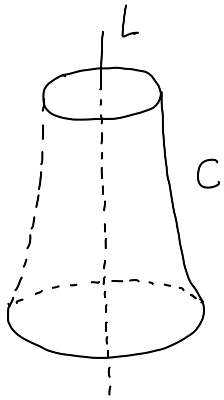
方程中缺少xy,yz,zx各项，且平方项系数相同，只要经过配方可以化成方程4.1的形式，则它的图形就是一个球面。

4.2 旋转曲面

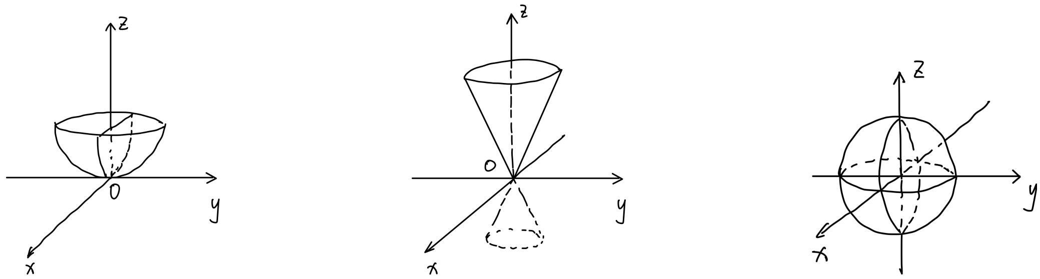
4.2.1 定义

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴。

例如：



其中，C为旋转曲面的母线，L为旋转曲面的轴。



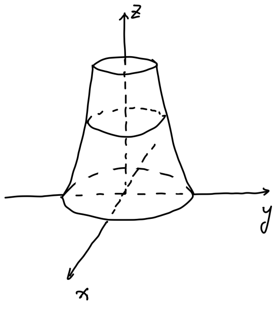
(a) (b) (c)

则图(a)中母线：$z = ay^2$，轴：z轴；图(b)中母线：$z = by$，轴：z轴；图(c)中母线：$y^2 + z^2 = R^2$，轴：z轴。

4.2.2 旋转曲面的方程

设在yOz平面坐标面上有一已知曲线$C : f(y, z) = 0$，则其以z轴为轴的旋转曲面的方程如下

$$S : f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0 \tag{4.2}$$



推导：

$\forall M(x, y, z) \in S$，设其由$M_1 \in C$转到某位置而得到。设$M(x_1, y_1, z_1)$，则

$$f\left(y_1, z_1\right) = 0 \tag{4.3}$$

又M、M_1满足

$$\begin{cases} z_1 = z \cdot \\ \left|y_1\right| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

代入式，得

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0$$

即为S上任一点$M\left(x, y, z\right)$满足的方程。
总之，母线$f\left(y, z\right) = 0$

$$\begin{cases} \text{绕}z\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0 \\ \text{绕}y\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(y,\ \pm\sqrt{z^2+x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

若母线$f\left(z, x\right) = 0$

$$\begin{cases} \text{绕}z\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(z,\ \pm\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0 \\ \text{绕}x\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(\pm\sqrt{y^2+z^2},\ x\right) = 0 \end{cases}$$

若母线$f\left(x, y\right) = 0$

$$\begin{cases} \text{绕}x\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right) = 0 \\ \text{绕}y\text{轴旋转} \rightarrow S : f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y\right) = 0 \end{cases}$$

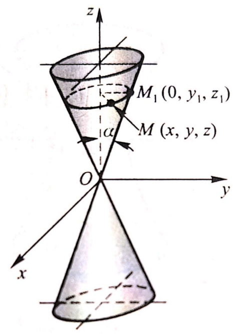
4.2.3 圆锥面

直线L与另一条与L相交的直线旋转一周，所得曲面叫做圆锥面。两直线的交点称为顶点，两直线的夹角α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$叫做圆锥面的半顶角。

则顶点在原点，轴为z轴，则半顶角为α的圆锥面的方程为

$$z^2 = \cot^2\alpha\left(x^2+y^2\right) \tag{4.4}$$

令$a = \cot\alpha$则圆锥面的方程为



$$z^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{4.5}$$

当$a > 0$时，有$z = a\sqrt{x^2 + y^2}$（上半锥面），$z = -a\sqrt{x^2 + y^2}$（下半锥面）。

常见锥面

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$（$a = 1$）：半顶角为$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$上半锥面；
2. $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$（$a = 1$）：半顶角为$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$下半锥面；
3. $z = \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}$（$a = \sqrt{3}$）：半顶角为$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$上半锥面；
4. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$（$a = \sqrt{3}$）：顶点为$(0, 1)$、开口向下、半顶角为$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$的上半锥面；
5. $z = \sqrt{x^2 + z^2}$（$a = \sqrt{3}$）：半顶角为$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$，以y轴为轴的锥面。

4.2.4 旋转抛物面

yOz平面上曲线$z = ay^2$ $(a > 0)$绕z轴旋转一周而得的旋转体的方程为

$$z = a\left(x^2 + y^2\right) \tag{4.6}$$

该曲面称为旋转抛物面。

4.2.5 旋转单叶/双叶双曲面

平面xOz平面上双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
绕z轴旋转一周，称为旋转单叶双曲面，其方程为：

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.7}$$

绕x轴旋转一周，称为旋转双叶双曲面，其方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \tag{4.8}$$

4.3 柱面

4.3.1 分类讨论

1. 一般地、只含x、y而缺z的方程$F(x,y) = 0$在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线是xOy面上的曲线$C: F(x,y) = 0$；
2. 一般地、只含y、z而缺x的方程$F(y,z) = 0$在空间直角坐标系中表示母线平行于x轴的柱面，其准线是xOy面上的曲线$C: F(y,z) = 0$；
3. 一般地、只含z、x而缺y的方程$F(z,x) = 0$在空间直角坐标系中表示母线平行于y轴的柱面，其准线是xOy面上的曲线$C: F(z,x) = 0$；

4.4 二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似,我们把三元二次方程$F(x,y,z) = 0$ 所表示的曲面称为二次曲面，把平面称为一次曲面。

4.4.1 研究曲面的两种方法

截痕法

以平面$z = t$（或$x = t$，$y = t$）去截曲面S得截痕，研究截痕随t变化规律，从而了解曲面的形状。

伸缩变形法

若原曲线方程为$C: F(x,y,z) = 0$，将其沿着z轴伸缩λ倍，得方程为

$$S^{'}: F\left(x, y, \frac{z}{\lambda}\right) = 0 \tag{4.9}$$

4.5 九种二次曲面

4.5.1 椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

圆锥面方程：

$$z^2 = x^2 + y^2$$

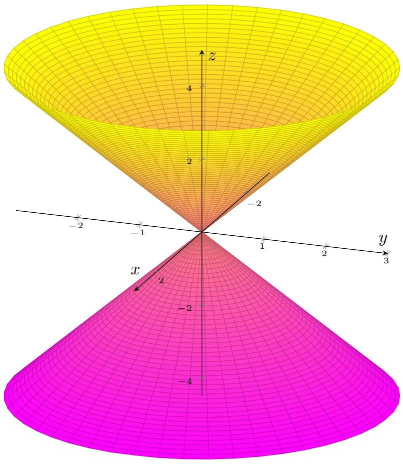
沿x轴伸缩a倍：

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + y^2$$

沿y轴伸缩b倍：

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{4.10}$$

用平面$z = t$去截曲面得截痕为椭圆



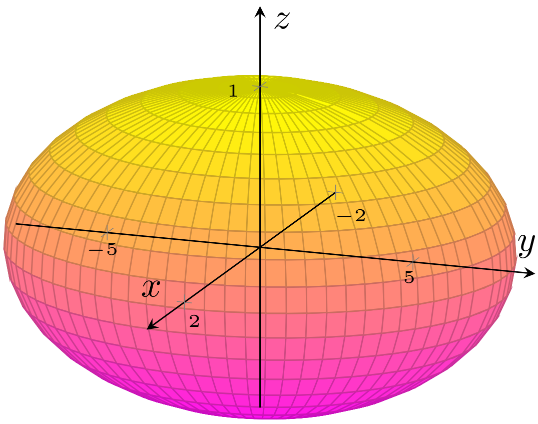
4.5.2 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

球面方程：

$$x^2+y^2+z^2=1$$

分别沿x、y、z轴伸缩a、b、c倍得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.11}$$



4.5.3 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

旋转单叶双曲面方程：

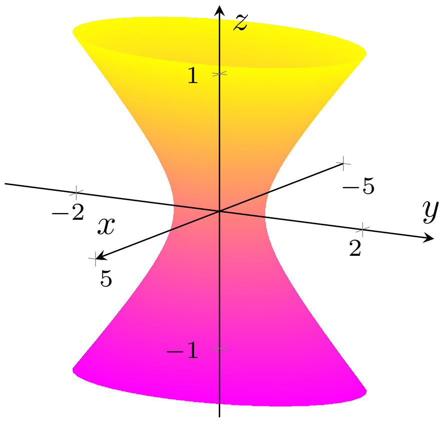
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

沿y轴伸缩$\frac{b}{a}$倍：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{a}{b}y\right)^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

即：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.12}$$



4.5.4 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

旋转单叶双曲面方程：

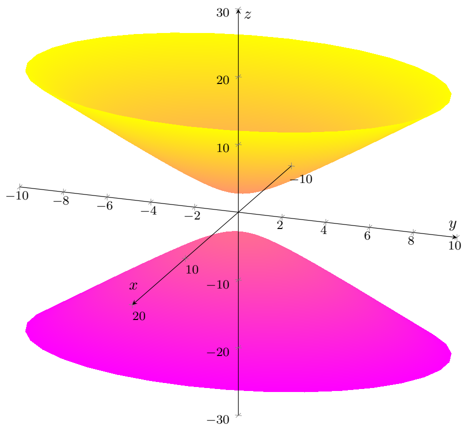
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

沿 z 轴伸缩 $\frac{c}{b}$ 倍：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{b}{c}z\right)^2}{b^2}=1$$

即：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.13}$$



4.5.5 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

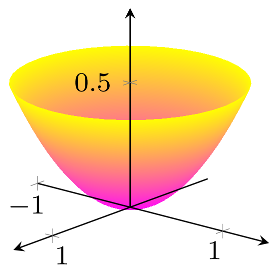
参考旋转抛物面方程：

$$z=\frac{x^2+y^2}{a^2}$$

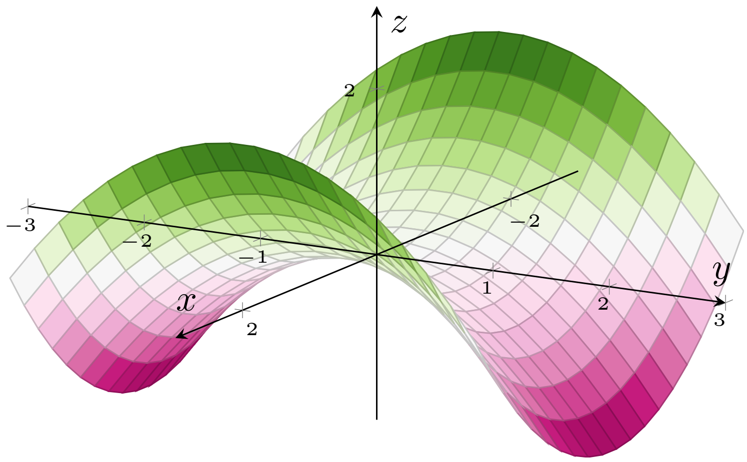
伸缩可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \tag{4.14}$$

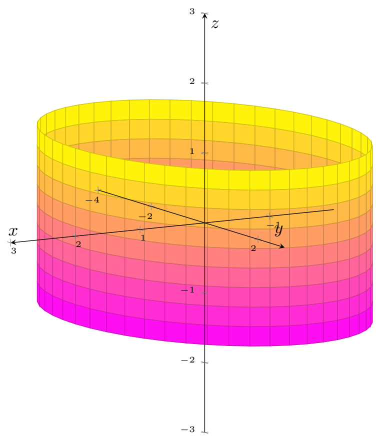
$$x^2+y^2$$



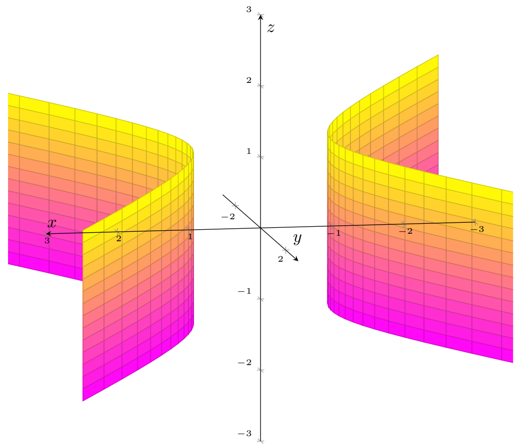
4.5.6 双曲抛物面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$



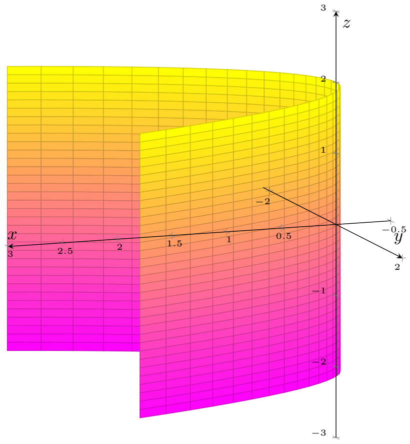
4.5.7 椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



4.5.8 双曲柱面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



4.5.9 抛物柱面$x^2 = ay$



5 空间曲线及其方程

5.1 空间曲线的一般方程

定义

设有空间曲线C，以及过C的两张曲面$S_1 : F(x, y, z)$和$S_2 : G(x, y, z)$，则称方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

为空间曲线C的一般方程。

注意：

1. C的一般方程不唯一；
2. 平面曲线$C : f(x, y) = 0$可以看作空间曲线，其一般方程为

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

5.2 空间曲线的参数方程

定义

若有方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

其中$t \in [\alpha, \beta]$，即空间曲线C，若满足

1. $\forall t \in [\alpha, \beta]$，点$(\varphi(t), \phi(t), \omega(t))$ 在曲线C上；

2. 对C上任意一点$M\left(x,y,z\right)$，存在$t_0\in[\alpha,\beta]$, 使得x= $\varphi\left(t\right)$, $y=\phi\left(t\right)$, $z=\omega\left(t\right)$。

则称方程5.2为空间曲线的参数方程。

例如，空间曲线$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ z=x^2 \end{array}\right.$ 的参数方程为$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1-t+t^2 \\ z=t^2 \end{array}\right.$ 。

5.3 空间曲线在坐标面上的投影

设有空间曲线$C:\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{array}\right.$，要求其在$xOy$面上的投影。

注意到xOy面上的都不显含z。从方程组中消去变量z得

$$H\left(x,y\right)=0 \tag{5.3}$$

研究方程5.3知：该方程表示母线平行与z轴的柱面，且该方程通过曲线C。于是**定义**曲面5.3为曲线C关于xOy面的投影柱面。

联立方程

$$\left\{\begin{array}{l} H\left(x,y\right)=0 \\ z=0 \end{array}\right. \tag{5.4}$$

即得到曲线C的投影曲线。

同理，消去方程中的变量x或变量y，再分别和$x=0$或$y=0$联立，即可得到曲线C在yOz面或xOz上的投影的曲线方程：

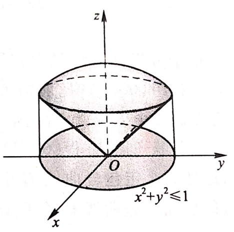
$$\left\{\begin{array}{l} R\left(y,z\right)=0 \\ x=0 \end{array}\right. \tag{5.5}$$

或

$$\left\{\begin{array}{l} T\left(x,z\right)=0 \\ y=0 \end{array}\right. \tag{5.6}$$

5.4 例题

设一个立体由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{6\left(x^2+y^2\right)}$所围成（如下图所示），求它在$xOy$面上的投影。



Solution

两曲面交线为

$$\left\{\begin{array}{l} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)} \end{array}\right.$$

从中消去z得投影柱面$x^2+y^2=1$，将其与$z=0$联立，得投影曲线

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

从而得投影区域为xOy面上的圆域

$$D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1$$