

# Advanced Mathematics: Vector Algebra and Spatial Geometry

日期: 2025 年 2 月 28 日

*Wuhan University*

Lai Wei

## 目录

<b>1</b>	<b>向量积、混合积</b>	<b>1</b>
1.1	向量积 . . . . .	1
1.1.1	定义 . . . . .	1
1.1.2	性质 . . . . .	1
1.1.3	运算规律 . . . . .	1
1.1.4	向量积的坐标表示 . . . . .	2
1.2	混合积 . . . . .	2
1.2.1	定义 . . . . .	2
1.2.2	坐标表示 . . . . .	2
1.2.3	几何意义 . . . . .	2
1.2.4	运算规律 . . . . .	3
1.2.5	例题 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>平面及其方程</b>	<b>4</b>
2.1	曲面方程与空间曲线方程的概念 . . . . .	4
2.1.1	曲面方程 . . . . .	4
2.1.2	空间曲线方程 . . . . .	4
2.2	平面的点法式方程 . . . . .	5
2.3	平面的一般方程 . . . . .	5
2.4	平面的截距式方程 . . . . .	5
2.5	两平面的夹角 . . . . .	6
2.5.1	定义 . . . . .	6
2.5.2	结论 . . . . .	6
2.6	点到平面的距离 . . . . .	6
<b>3</b>	<b>空间直线及其方程</b>	<b>6</b>
3.1	空间直线的一般方程 . . . . .	6
3.2	空间直线的对称式方程 . . . . .	7
3.3	空间直线的参数方程 . . . . .	7
3.4	空间直线的两点式方程 . . . . .	8
3.5	两直线的夹角 . . . . .	8
3.5.1	定义 . . . . .	8
3.5.2	夹角的余弦公式 . . . . .	8
3.6	直线与平面的夹角 . . . . .	8
3.6.1	定义 . . . . .	8
3.6.2	夹角的正弦公式 . . . . .	8
3.7	平面束方程 . . . . .	9
3.8	例题 . . . . .	9
3.8.1	Problem 1 . . . . .	9
3.8.2	Problem 2 . . . . .	10

3.8.3	Problem 3 . . . . .	10
-------	---------------------	----

# 1 向量积、混合积

## 1.1 向量积

### 1.1.1 定义

设有向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，其夹角为 $\theta$ 。定义新向量，记作 $\vec{a} \times \vec{b}$ ，如下：

- 大小：

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \quad (1.1)$$

- 方向： $\vec{a} \times \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 都垂直，其指向按右手螺旋定则，由 $\vec{a}$ 沿着不大于 $\pi$ 的角度转向 $\vec{b}$ 确定。

### 1.1.2 性质

1.  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

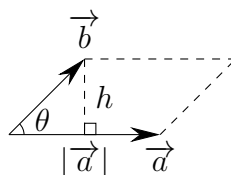
2. 重要结论：

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\text{对非零向量 } \vec{a}, \vec{b}, \text{ 有 } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

3. 几何意义（向量积的模）：

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \\ &= S_{\square} \end{aligned} \quad (1.2)$$



即 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 表示：以 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

### 1.1.3 运算规律

1. 反交换律：

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.3)$$

2. 分配律：

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (1.4)$$

3. 结合律：

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad (1.5)$$

### 1.1.4 向量积的坐标表示

设有向量  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则有

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \cdot \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{k} \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

同理，

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

## 1.2 混合积

### 1.2.1 定义

设有向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ ，称数  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  为向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  的混合积，记作  $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ ，即

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{1.7}$$

### 1.2.2 坐标表示

设有向量  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 、 $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ ，则有

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

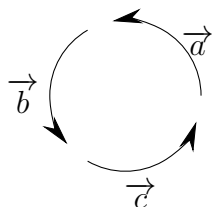
### 1.2.3 几何意义

$|[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$  表示以  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  为相邻三条棱的平行六面体的体积。因此， $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  共线  $\Leftrightarrow [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$ 。

### 1.2.4 运算规律

$$\begin{aligned}
 [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] &= [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] \\
 &= -[\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b}] = -[\vec{c} \ \vec{b} \ \vec{a}] = -[\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}]
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

即按照下图沿同一方向（顺时针或逆时针）旋转的混合积组合的值是相等的。



### 1.2.5 例题

已知  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$ , 求  $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a})$ 。

**Solution**

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a})
 \end{aligned}$$

由  $\vec{b} \times \vec{b} = 0$ , 故

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{c}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{a}] + [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{a}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]
 \end{aligned}$$

显然，当混合积中只有不同的两个向量时（可认为这三个向量共面），该混合积值为0。  
于是

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \times (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \end{bmatrix}$$

于是

$$\left[ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] \times (\vec{c} + \vec{a}) = 2 \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$$

## 2 平面及其方程

### 2.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

#### 2.1.1 曲面方程

设有曲面  $S : F(x, y, z) = 0$ , 满足

1. 曲面  $S$  上任一点都满足方程;
2. 不在曲面  $S$  上的点的坐标不满足方程。

#### 2.1.2 空间曲线方程

设有曲面  $S_1 : F_1(x, y, z) = 0$  和设有曲面  $S_2 : F_2(x, y, z) = 0$ , 联立两方程:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

满足

1. 曲面  $S$  上任一点都满足方程;
2. 不在曲面  $S$  上的点的坐标不满足方程。

## 2.2 平面的点法式方程

设平面 $\Pi$ 上有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 其法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。(注意: 平面的法向量不唯一。)

设 $M(x, y, z)$ , 则 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ , 则 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ , 而 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 。于是

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2.1)$$

即为平面 $\Pi$ 的点法式方程。

## 2.3 平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.2)$$

即为平面的一般方程。

任一三元一次方程的图形总是一个平面, 方程2.2中 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的系数就是该平面的一个法向量 $\vec{n}$ 的坐标, 即 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

特殊情况:

1.  $D = 0 \Leftrightarrow$ 平面通过原点;
2.  $A = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) $x$ 轴;  
 $B = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) $y$ 轴;  
 $C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) $z$ 轴;
3.  $A = B = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) $xOy$ 平面;  
 $B = C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) $yOz$ 平面;  
 $A = C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) $xOz$ 平面;
4.  $A = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 $x$ 轴;  
 $B = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 $y$ 轴;  
 $C = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 $z$ 轴;
5.  $A = B = D = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ( $xOy$ 平面);  
 $B = C = D = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ( $yOz$ 平面);  
 $A = C = D = 0 \Leftrightarrow y = 0$  ( $xOz$ 平面);

## 2.4 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2.3)$$

即为平面的截距式方程。方程2.3中 $a$ ,  $b$ ,  $c$ 即分别为平面在 $x$ ,  $y$ ,  $z$ 轴上的截距。



## 2.5 两平面的夹角

### 2.5.1 定义

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角或直角）称为两平面的夹角。因此  $\cos \theta = \left| \cos \left( \vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) \right|$ 。

设平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的法线向量依次为  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 。按两向量夹角的余弦的坐标表示式平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  的夹角  $\theta$  可由

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (2.4)$$

来确定。

### 2.5.2 结论

1.  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  相互垂直相当于  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
2.  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  相互平行相当于  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

## 2.6 点到平面的距离

设点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  外一点，则  $P_0$  到该平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.5)$$

设有两平行平面  $\Pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$  和  $\Pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ，则两平面间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.6)$$

## 3 空间直线及其方程

### 3.1 空间直线的一般方程

$$L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

注意：空间直线的方程是不唯一的。

### 3.2 空间直线的对称式方程

$L$ 上有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 非零方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$ , 设 $L$ 上任一点 $M(x, y, z)$ , 则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ , 而 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 所以

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3.2)$$

即为直线的对称式方程 (或称点向式方程)

注意

1. 非零向量 $\vec{s} = (m, n, p)$ 称为 $L$ 的方向向量 (不唯一);
2. 直线上任一方向向量 $\vec{s}$ 的坐标 $m, n, p$ 称为一组方向数;
3.  $\vec{s}$ 的方向余弦叫做 $L$ 的方向余弦;
4. 当 $m = 0$ 时,

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases} \quad (3.3)$$

5. 当 $m = n = 0$ 时,

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

此时, 直线与 $z$ 轴平行。

### 3.3 空间直线的参数方程

令 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$ , 则

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (3.5)$$

注意:

1.  $t$ 取定每一个值, 对应 $x, y, z$ 为 $L$ 上一点的坐标;
2. 参数式方程一般用来求直线与平面的交点。

### 3.4 空间直线的两点式方程

过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点的直线方程, 则方向向量 $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 。  
所以方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3.6)$$

即为直线的两点式方程。

### 3.5 两直线的夹角

#### 3.5.1 定义

两直线的方向向量的夹角 (通常指锐角或直角)。

#### 3.5.2 夹角的余弦公式

设直线的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$ , 平面的法线向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ , 则直线和平面的夹角 $\varphi$  可由

$$\cos \varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (3.7)$$

来确定。

于是可知:

1.  $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
2.  $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

### 3.6 直线与平面的夹角

#### 3.6.1 定义

直线 $L$ 与其在平面上投影直线所形成的夹角。

#### 3.6.2 夹角的正弦公式

设直线 $L_1$ 和 $L_2$ 的方向向量依次为 $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ , 则直线 $L_1$ 和 $L_2$ 的夹角 $\varphi$  可由

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (3.8)$$

来确定。

于是可知

$$1. L // \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{x} \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Amn + Bn + Cp = 0$$

$$2. L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{s} // \vec{x} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

### 3.7 平面束方程

设直线 $L$ 由方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

给出, 其中 $A_1, B_1, C_1$ 与 $A_2, B_2, C_2$ 不成比例, 则

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3.11)$$

能表示通过直线 $L$ 的所有平面 (除平面3.10外)。则称之为直线 $L$ 的平面束方程。

### 3.8 例题

#### 3.8.1 Problem 1

将一般方程 $L: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 化为对称式、参数式并求 $L$ 与平面 $\Pi: x + y = 0$ 的交点。

**Solution**

取 $y = 0$ , 代入方程中, 得 $x = 1, z = -2$ , 则点 $M_0(1, 0, -2)$ 为 $L$ 上一点; 取 $z = 0$ , 代入方程中, 得 $x = -\frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}$ , 则点 $M_0(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ 为 $L$ 上一点。

则 $\overrightarrow{M_0M_1} = (-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ , 取 $\vec{s} = (4, 1, 3)$ , 则 $L$ 的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{3}$$

则 $L$ 的参数式方程为

$$\begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

将参数式方程代入平面 $\Pi: x + y = 0$ 中, 则有 $(1 - 4t) + t = 0$ , 所以 $t = \frac{1}{3}$ 。  
所以 $L$ 与平面 $\Pi: x + y = 0$ 的交点为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)$ 。

**3.8.2 Problem 2**

求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

**Solution**

**Part One**

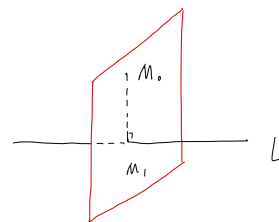
要求过点 $M_0(2, 1, 3)$ 且与直线 $L$ 垂直相交的直线，关键在于求垂足 $M_1$ 。可以作过点 $M_0$ 且垂直于直线 $L$ 的平面。

则该平面的对称式方程为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0$$

即

$$3x + 2y - z - 5 = 0$$

**Part Two**

再求直线与垂直平面的交点：

$$\text{令 } \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} = t$$

得

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$\text{解得 } t = \frac{3}{7}$$

$$\text{代入得交点坐标为 } \left( \frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7} \right)$$

**Part Three**

所以所求直线的一个方向向量为

$$\left( \frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3 \right) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

所以所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

**3.8.3 Problem 3**

求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上投影直线的方程。

**Solution**

过直线  $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  的平面束方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + z + 1) = 0$$

整理得

$$(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0$$

由于此平面与平面  $x + y + z = 0$  垂直，则两平面法向量也相互垂直。即

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0$$

解得  $\lambda = -1$ 。

代入平面束方程中，知投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

