

Advanced Mathematics: Vector Algebra and Spatial Geometry

日期: 2025 年 2 月 28 日

Wuhan University

Lai Wei

目录

1	向量积、混合积	1
1.1	向量积	1
1.1.1	定义	1
1.1.2	性质	1
1.1.3	运算规律	1
1.1.4	向量积的坐标表示	2
1.2	混合积	2
1.2.1	定义	2
1.2.2	坐标表示	2
1.2.3	几何意义	2
1.2.4	运算规律	3
1.2.5	例题	3
2	平面及其方程	4
2.1	曲面方程与空间曲线方程的概念	4
2.1.1	曲面方程	4
2.1.2	空间曲线方程	4
2.2	平面的点法式方程	5
2.3	平面的一般方程	5
2.4	平面的截距式方程	5
2.5	两平面的夹角	6
2.5.1	定义	6
2.5.2	结论	6
2.6	点到平面的距离	6

1 向量积、混合积

1.1 向量积

1.1.1 定义

设有向量 \vec{a} 、 \vec{b} ，其夹角为 θ 。定义新向量，记作 $\vec{a} \times \vec{b}$ ，如下：

- 大小：

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \quad (1.1)$$

- 方向： $\vec{a} \times \vec{b}$ 与 \vec{a} 、 \vec{b} 都垂直，其指向按右手螺旋定则，由 \vec{a} 沿着不大于 π 的角度转向 \vec{b} 确定。

1.1.2 性质

1. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

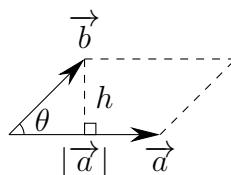
2. 重要结论：

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\text{对非零向量 } \vec{a}, \vec{b}, \text{ 有 } \vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

3. 几何意义（向量积的模）：

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \\ &= S_{\square} \end{aligned} \quad (1.2)$$



即 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 表示：以 \vec{a} 、 \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积。

1.1.3 运算规律

1. 反交换律：

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.3)$$

2. 分配律：

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (1.4)$$

3. 结合律：

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad (1.5)$$

1.1.4 向量积的坐标表示

设有向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则有

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \cdot \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{k} \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

同理，

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

1.2 混合积

1.2.1 定义

设有向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} ，称数 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 为向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 的混合积，记作 $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ ，即

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{1.7}$$

1.2.2 坐标表示

设有向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 、 $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ ，则有

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

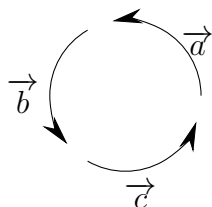
1.2.3 几何意义

$|[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]|$ 表示以 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 为相邻三条棱的平行六面体的体积。因此， \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 共线 $\Leftrightarrow [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$ 。

1.2.4 运算规律

$$\begin{aligned}
 [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] &= [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] \\
 &= -[\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b}] = -[\vec{c} \ \vec{b} \ \vec{a}] = -[\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}]
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

即按照下图沿同一方向（顺时针或逆时针）旋转的混合积组合的值是相等的。



1.2.5 例题

已知 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$, 求 $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a})$ 。

Solution

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a})
 \end{aligned}$$

由 $\vec{b} \times \vec{b} = 0$, 故

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{c}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{a}] + [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{a}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]
 \end{aligned}$$

显然，当混合积中只有不同的两个向量时（可认为这三个向量共面），该混合积值为0。
于是

$$\begin{aligned}
 &[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \times (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \end{bmatrix}$$

于是

$$\left[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) \right] \times (\vec{c} + \vec{a}) = 2 \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$$

2 平面及其方程

2.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

2.1.1 曲面方程

设有曲面 $S : F(x, y, z) = 0$, 满足

1. 曲面 S 上任一点都满足方程;
2. 不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程。

2.1.2 空间曲线方程

设有曲面 $S_1 : F_1(x, y, z) = 0$ 和设有曲面 $S_2 : F_2(x, y, z) = 0$, 联立两方程:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

满足

1. 曲面 S 上任一点都满足方程;
2. 不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程。

2.2 平面的点法式方程

设平面 Π 上有一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 其法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。(注意: 平面的法向量不唯一。)

设 $M(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, 则 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, 而 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 。于是

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2.1)$$

即为平面 Π 的点法式方程。

2.3 平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.2)$$

即为平面的一般方程。

任一三元一次方程的图形总是一个平面, 方程2.2中 x 、 y 、 z 的系数就是该平面的一个法向量 \vec{n} 的坐标, 即 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

特殊情况:

1. $D = 0 \Leftrightarrow$ 平面通过原点;
2. $A = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) x 轴;
 $B = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) y 轴;
 $C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或包含) z 轴;
3. $A = B = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) xOy 平面;
 $B = C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) yOz 平面;
 $A = C = 0 \Leftrightarrow$ 平面平行于(或重合于) xOz 平面;
4. $A = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 x 轴;
 $B = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 y 轴;
 $C = D = 0 \Leftrightarrow$ 平面包含 z 轴;
5. $A = B = D = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (xOy 平面);
 $B = C = D = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (yOz 平面);
 $A = C = D = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (xOz 平面);

2.4 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2.3)$$

即为平面的截距式方程。方程2.3中 a , b , c 即分别为平面在 x , y , z 轴上的截距。

2.5 两平面的夹角

2.5.1 定义

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角或直角）称为两平面的夹角。因此 $\cos \theta = \left| \cos \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) \right|$ 。

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 。按两向量夹角的余弦的坐标表示式平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 可由

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (2.4)$$

来确定。

2.5.2 结论

1. Π_1 和 Π_2 相互垂直相当于 $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
2. Π_1 和 Π_2 相互平行相当于 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

2.6 点到平面的距离

设点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点，则 P_0 到该平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.5)$$

设有两平行平面 $\Pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 和 $\Pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ，则两平面间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.6)$$