Advanced Mathematics: Vector Algebra and Spatial Geometry

日期： 2025 年 2 月 28 日

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 向量积、混合积

1.1 向量积

1.1.1 定义

设有向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，其夹角为θ。定义新向量，记作$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$，如下：

- 大小：

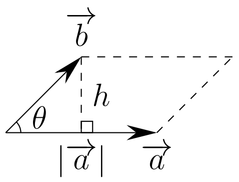
$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\theta \tag{1.1}$$

- 方向：$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$与$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 都垂直，其指向按右手螺旋定则，由$\overrightarrow{a}$沿着不大于π 的角度转向$\overrightarrow{b}$确定。

1.1.2 性质

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$， $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$
2. 重要结论：
   $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
   对非零向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，有$\overrightarrow{a} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{b} \leftrightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$
3. 几何意义（向量积的模）：

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| &= |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\theta \\ &= S_{\square} \end{aligned} \tag{1.2}$$



即$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$表示：以$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积。

1.1.3 运算规律

1. 反交换律：

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} \tag{1.3}$$

2. 分配律：

$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \tag{1.4}$$

3. 结合律：

$$(\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda \overrightarrow{b}\right) \tag{1.5}$$

1.1.4 向量积的坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} &= \left(x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}+z_1\overrightarrow{k}\right)\times\left(x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+z_2\overrightarrow{k}\right)\\
&=(y_1z_2-z_1y_2)\cdot\overrightarrow{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot\overrightarrow{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\cdot\overrightarrow{k}\\
&=(y_1z_2-z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2\ x_1y_2-y_1x_2)\\
&=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

同理，

$$
\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}
$$

1.2 混合积

1.2.1 定义

设有向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，称数$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}$为向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$的混合积，记作$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]$，即

$$
\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}
\tag{1.7}
$$

1.2.2 坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$、$\overrightarrow{c}=(x_3,y_3,z_3)$，则有

$$
\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}
\tag{1.8}
$$

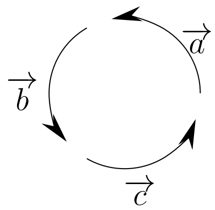
1.2.3 几何意义

$\left|\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]\right|$表示以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$为相邻三条棱的平行六面体的体积。因此，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$共线$\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=0$。

1.2.4 运算规律

$$
\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right] &= \left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right] = \left[\overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\right] \\
&= -\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{c}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\right] = -\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\right]
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

即按照下图沿同一方向（顺时针或逆时针）旋转的混合积组合的值是相等的。



1.2.5 例题

已知$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 2$，求$\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})$。

Solution

$$
\begin{aligned}
&\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) \\
= &\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})
\end{aligned}
$$

由$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} = 0$，故

$$
\begin{aligned}
&\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) \\
= &\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) \\
= &\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right] + [\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}] + \left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}\right] + \left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\right] + [\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}] + \left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]
\end{aligned}
$$

显然，当混合积中只有不同的两个向量时（可认为这三个向量共面），该混合积值为0。于是

$$
\begin{aligned}
&\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right] \times (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) \\
= &\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right] + \left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]
\end{aligned}
$$

由于

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

而

$$\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right]$$

于是

$$\left[(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})\right] \times (\vec{c} + \vec{a}) = 2\ \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$

2 平面及其方程

2.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

2.1.1 曲面方程

设有曲面$S : F\left(x, y, z\right) = 0$，满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.1.2 空间曲线方程

设有曲面$S_1 : F_1\left(x, y, z\right) = 0$和设有曲面$S_2 : F_2\left(x, y, z\right) = 0$，联立两方程：

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, z\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z\right) = 0. \end{cases}$$

满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.2 平面的点法式方程

设平面$\mathit{\Pi}$上有一点$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$，其法向量为$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$。（注意：平面的法向量不唯一。）

设$M\left(x, y, z\right)$，则$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$，则 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$，而$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$。于是

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0 \tag{2.1}$$

即为平面$\mathit{\Pi}$的点法式方程。

2.3 平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.2}$$

即为平面的一般方程。

任一三元一次方程的图形总是一个平面，方程2.2中x、y、z的系数就是该平面的一个法向量$\overrightarrow{n}$的坐标，即$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$。

特殊情况：

1. $D = 0 \Leftrightarrow$平面通过原点；
2. $A = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或包含）x轴；
   $B = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或包含）y轴；
   $C = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或包含）z轴；
3. $A = B = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）$xOy$平面；
   $B = C = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）$yOz$平面；
   $A = C = 0 \Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）$xOz$平面；
4. $A = D = 0 \Leftrightarrow$平面包含$x$轴；
   $B = D = 0 \Leftrightarrow$平面包含$y$轴；
   $C = D = 0 \Leftrightarrow$平面包含$z$轴；
5. $A = B = D = 0 \Leftrightarrow z = 0$（$xOy$平面）；
   $B = C = D = 0 \Leftrightarrow x = 0$（$yOz$平面）；
   $A = C = D = 0 \Leftrightarrow y = 0$（$xOz$平面）；

2.4 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{2.3}$$

即为平面的截距式方程。方程2.3中a，b，c即分别为平面在x，y，z 轴上的截距。

2.5 两平面的夹角

2.5.1 定义

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角或直角）称为两平面的夹角。因此$\cos\theta=\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}}\right)\right|$。

设平面$\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$的法线向量依次为$\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$， $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$。按两向量夹角的余弦的坐标表示式平面$\mathit{\Pi_1}$ 和$\mathit{\Pi_2}$的夹角θ可由

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{2.4}$$

来确定。

2.5.2 结论

1. $\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$相互垂直相当于$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
2. $\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$相互平行相当于$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

2.6 点到平面的距离

设点$P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，则$P_0$到该平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2.5}$$

设有两平行平面$\mathit{\Pi_1}:Ax+By+Cz+D_1=0$和$\mathit{\Pi_1}:Ax+By+Cz+D_2=0$，则两平面间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2.6}$$

3 空间直线及其方程

3.1 空间直线的一般方程

$$L:\left\{\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z=D_2=0\end{array}\right. \tag{3.1}$$

注意：空间直线的方程是不唯一的。

3.2 空间直线的对称式方程

L上有一点$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，非零方向向量$\overrightarrow{s}=(m,n,p)$，设$L$上任一点$M_0\left(x,y,z\right)$，则$\overrightarrow{M_0M}\ //\ \overrightarrow{s}$，而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，所以

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{3.2}$$

即为直线的对称式方程（或称点向式方程）
注意

1. 非零向量$\overrightarrow{s}=(m,n,p)$称为$L$的方向向量（不唯一）；
2. 直线上任一方向向量$\overrightarrow{s}$的坐标m,n,p称为一组方向数；
3. $\overrightarrow{s}$的方向余弦叫做L的方向余弦；
4. 当$m=0$时，
$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases} \tag{3.3}$$
5. 当$m=n=0$时，
$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases} \tag{3.4}$$
此时，直线与z轴平行。

3.3 空间直线的参数方程

令$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{3.5}$$

注意：

1. t取定每一个值，对应x,y,z为L上一点的坐标；
2. 参数式方程一般用来求直线与平面的交点。

3.4 空间直线的两点式方程

过$M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$和$M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$两点的直线方程，则方向向量$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$。

所以方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3.6}$$

即为直线的两点式方程。

3.5 两直线的夹角

3.5.1 定义

两直线的方向向量的夹角（通常指锐角或直角）。

3.5.2 夹角的余弦公式

设直线的方向向量为$\overrightarrow{s}=(m, n, p)$，平面的法线向量为 $\overrightarrow{n}=(A, B, C)$，则直线和平面的夹角$\varphi$ 可由

$$\cos\varphi=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{3.7}$$

来确定。

于是可知：

1. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
2. $L_1 \,//\, L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \,//\, \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

3.6 直线与平面的夹角

3.6.1 定义

直线L与其在平面上投影直线所形成的夹角。

3.6.2 夹角的正弦公式

设直线L_1和L_2的方向向量依次为$\overrightarrow{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$和 $\overrightarrow{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$，则直线$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$ 可由

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{3.8}$$

来确定。

于是可知

1. $L \mathbin{//} \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow Amn + Bn + Cp = 0$
2. $L \perp \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{s} \mathbin{//} \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{c}{p}$.

3.7 平面束方程

设直线L由方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (3.9) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (3.10) \end{cases}$$

给出，其中A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例，则

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \tag{3.11}$$

能表示通过直线L的所有平面（除平面3.10外）。则称之为直线L的平面束方程。

3.8 例题

3.8.1 Problem 1

将一般方程$L: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 化为对称式、参数式并求L与平面$\Pi: x + y = 0$的交点。

Solution

取$y = 0$，代入方程中，得$x = 1,\ z = -2$，则点$M_0\left(1, 0, -2\right)$为L上一点；取$z = 0$，代入方程中，得$x = -\frac{5}{3},\ y = \frac{2}{3}$，则点$M_0\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$为$L$上一点。

则$\overrightarrow{M_0M_1} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$，取$\overrightarrow{s} = (4, 1, 3)$，则$L$的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{3}$$

则L的参数式方程为

$$\begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

将参数式方程代入平面$\Pi: x + y = 0$中，则有$(1 - 4t) + t = 0$，所以 $t = \frac{1}{3}$。

所以L与平面$\Pi: x + y = 0$的交点为$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$。

3.8.2 Problem 2

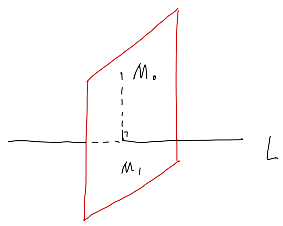
求过点$(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程。

Solution

Part One

要求过点$M_0\,(2,1,3)$且与直线L垂直相交的直线，关键在于求垂足M_1。可以作过点M_0且垂直于直线L的平面。

则该平面的对称式方程为



$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

即

$$3x+2y-z-5=0$$

Part Two

再求直线与垂直平面的交点：

令$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}=t$

得

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$$

解得$t=\dfrac{3}{7}$

代入得交点坐标为$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$

Part Three

所以所求直线的一个方向向量为

$$\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4)$$

所以所求的直线方程为

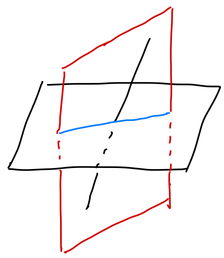
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

3.8.3 Problem 3

求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上投影直线的方程。

Solution

过直线$\left\{\begin{array}{l} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{array}\right.$ 的平面束方程为



$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

整理得

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

由于此平面与平面$x+y+z=0$垂直，则两平面法向量也相互垂直。即

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

解得$\lambda=-1$。
代入平面束方程中，知投影直线的方程为

$$\left\{\begin{array}{l} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$$