

Advanced Mathematics: Multiple Integral

Wuhan University

Lai Wei

April 26, 2025

目录

1	二重积分的概念与性质	1
1.1	二重积分的概念	1
1.1.1	定义	1
1.1.2	二重积分的几何意义	1
1.2	二重积分的性质	1
1.2.1	性质1	1
1.2.2	性质2	2
1.2.3	性质3	2
1.2.4	性质4	2
1.2.5	性质5	2
1.2.6	性质6	3
2	二重积分的计算法	3
2.1	利用直角坐标计算二次积分	3
2.1.1	X型区域	3
2.1.2	Y型区域	4
2.1.3	既是X型区域, 又是Y型区域	4
2.1.4	既不是X型区域, 又不是Y型区域	4
2.1.5	例题	4
2.2	利用极坐标计算二重积分	6
2.2.1	二重积分的极坐标形式	6
2.2.2	极坐标系下的二重积分化为二次积分	7
2.2.3	例题	8
3	三重积分	10
3.1	三重积分的概念	10
3.2	三重积分的计算	11
3.2.1	利用直角坐标计算三重积分	11
3.2.2	利用柱面坐标计算三重积分	12
3.2.3	利用球面坐标计算三重积分	13
3.2.4	例题	13
4	重积分的应用	16
4.1	曲面的面积	16
4.2	质心	17
4.2.1	平面薄片的质心	17
4.2.2	空间物体的质心	18
4.3	转动惯量	18
4.3.1	平面薄片的转动惯量	18
4.3.2	空间物体的转动惯量	18

4.4	引力	19
4.5	例题	19

1 二重积分的概念与性质

1.1 二重积分的概念

1.1.1 定义

设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数。将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积。在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) ，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 。如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时，这的和的极限总存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ ，即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (1.1)$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数， $f(x, y) d\sigma$ 叫做被积表达式， $d\sigma$ 叫做面积元素， x 与 y 叫做积分变量， D 叫做积分区域， $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

在二重积分的定义中对闭区域 D 的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D ，那么除了包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k ，则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot \Delta y_k$ 。因此在直角坐标系中，有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx dy$ ，而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中 $dx dy$ 叫做直角坐标系中的面积元素。

1.1.2 二重积分的几何意义

一般地，如果 $f(x, y) \geq 0$ ，被积函数 $f(x, y)$ 可以解释为曲顶柱体的顶在点 (x, y) 处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积。如果 $f(x, y)$ 是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的。如果 $f(x, y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么， $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分就等于 xOy 面上方的柱体体积减去 xOy 面下方的柱体体积所得之差。

1.2 二重积分的性质

1.2.1 性质1

设 α 和 β 为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$$

1.2.2 性质2

如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分何区域，那么在 D 的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和。

例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2 ，则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性。

1.2.3 性质3

如果在 D 上， $f(x, y) = 1$ ， σ 为 D 的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的，因为高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。

1.2.4 性质4

如果在 D 上， $f(x, y) \leq g(x, y)$ ，那么有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特殊地，由于

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

又有

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

1.2.5 性质5

设 M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值， σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式。因为 $m \leq f(x, y) \leq M$ ，所以由性质4有

$$\iint_D m \, d\sigma \leq \iint_D f(x, y) \, d\sigma \leq \iint_D M \, d\sigma$$

再应用性质1和性质3，便得此估值不等式。

1.2.6 性质6

（二重积分的中值定理）设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续， σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) ，使得

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma$$

2 二重积分的计算法

2.1 利用直角坐标计算二次积分

二重积分化二次积分：

2.1.1 X型区域

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

来表示（称为X型区域），其中函数 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续。则

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx \quad (2.1)$$

上式右端的积分叫做先对 y 、后对 x 的二次积分。就是说，先把 x 看做常数，把 $f(x, y)$ 只看做 y 的函数，并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分；然后把算得的结果（是 x 的函数）再对 x 计算在区间 $[a, b]$ 上的定积分。这个先对 y ，后对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

因此，等式2.1也写成

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \quad (2.2)$$

这就是把二重积分化为先对 y ，后对 x 的二次积分的公式。

2.1.2 Y型区域

类似地, 如果积分区域 D 可以用不等式

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

来表示 (称为Y型区域), 其中函数 $\psi_1(y)$ 、 $\psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续, 那么就有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (2.3)$$

上式右端的积分叫做先对 x , 后对 y 的二次积分, 这个积分也常记作

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

因此, 等式2.3也写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.4)$$

这就是把二重积分化为先对 x , 后对 y 的二次积分的公式。

2.1.3 既是X型区域, 又是Y型区域

如果积分区域 D 既是X型的, 可用不等式 $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$ 表示, 又是Y型的, 可用不等式 $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d$ 表示, 那么由公式2.2及2.4就得

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.5)$$

上式表明, 这两个不同次序的二次积分相等, 因为它们都等于同一个二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

2.1.4 既不是X型区域, 又不是Y型区域

可以把区域 D 分成几部分, 使每个部分是X型区域或是Y型区域。

2.1.5 例题

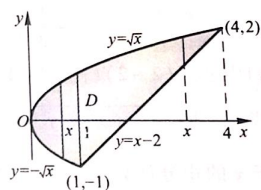
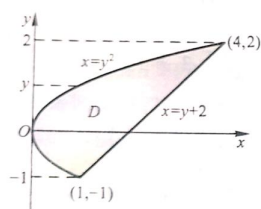
Problem 1

计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域。

Solution

画出积分区域 D 如图所示。 D 既X型的，又是Y型的。若利用公式2.3，则得

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, d\sigma &= \int_{-1}^2 \left[\int_{y^2}^{y+2} xy \, dx \right] dy \\
 &= \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{45}{8}
 \end{aligned}$$



若利用公式2.1来计算，则由于在区间 $[0, 1]$ 及 $[1, 4]$ 上表示 $\varphi_1(x)$ 的式子不同，所以要用经过交点 $(1, -1)$ 且平行于 y 轴的直线 $x = 1$ 把区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分（如图），其中

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\} \\
 D_2 &= \{(x, y) \mid x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4\}
 \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, d\sigma &= \iint_{D_1} xy \, d\sigma + \iint_{D_2} xy \, d\sigma \\
 &= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx + \int_1^4 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx
 \end{aligned}$$

Problem 2

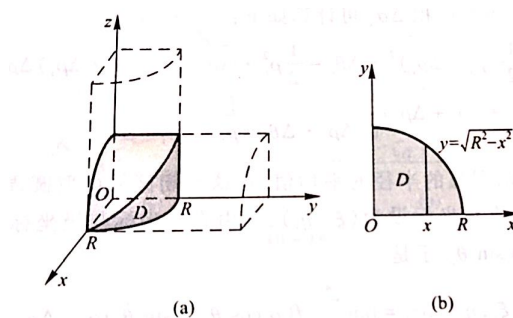
求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的立体的体积。

Solution

设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ 及 } x^2 + z^2 = R^2$$

利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分（图(a)）的体积 V_1 再乘以8就行了。



所求立体在第一卦限部分可以看成是一个曲顶柱体，它的底为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R\}$$

如图(b)所示。它的顶是柱面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 。于是

$$V_1 = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} \, d\sigma$$

所以

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} \, d\sigma \\ &= \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} \, dy \right] dx \\ &= \int_0^R \left[\sqrt{R^2 - x^2} y \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3} R^3$$

2.2 利用极坐标计算二重积分

2.2.1 二重积分的极坐标形式

$$\iint_D f(x, y) \, d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

把极坐标上点 (ρ, θ) 看作是在同一平面上的点 (x, y) 的极坐标表示，所以上式右端的积分区域仍然记作 D 。因为在直角坐标系中 $\iint_D f(x, y) \, d\sigma$ 也常记作 $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ ，所以上式又可写成

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \quad (2.6)$$

2.2.2 极坐标系下的二重积分化为二次积分

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示, 其中函数 $\varphi_1(\theta)$ 、 $\varphi_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续。

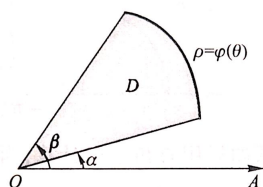
极坐标中二重积分化为二次积分的公式为

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta \quad (2.7)$$

上式也写成

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \quad (2.8)$$

如果积分区域 D 是如图所示的曲边扇形, 那么可以把它看作当 $\varphi_1(\theta) \equiv 0, \varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ 时的特例, 这时闭区域 D 可以用不等式

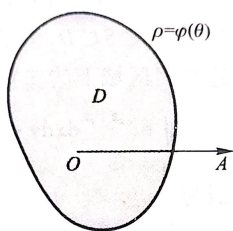


$$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示, 而公式2.8成为

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

如果积分区域 D 如图所示, 极点在 D 的内部, 那么可以把它看作当 $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ 时的特例, 这时闭区域 D 可以用不等式



$$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示, 而公式2.8成为

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

注意:

1. $\sigma = \iint_D d\sigma$ 表示闭区域 D 的面积;
2. $\sigma = \iint_D dx dy$ 表示直角坐标系中闭区域 D 的面积;
3. $\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta$ 表示极坐标系中闭区域 D 的面积;

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示, 其中函数 $\varphi_1(\theta)$ 、 $\varphi_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则有

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$$

如果积分区域 D 是曲边扇形, 那么可以把它看作当 $\varphi_1(\theta) \equiv 0, \varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ 时的特例, 这时有

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) d\theta$$

2.2.3 例题

Problem 1

计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 是由圆心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域。

Solution

在极坐标系中, 闭区域 D 可表示为

$$0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \pi (1 - e^{-a^2})
 \end{aligned}$$

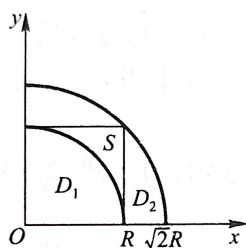
利用上面的结果计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$:

设

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$



显然 $D_1 \subset S \subset D_2$ 。由于 $e^{-x^2-y^2} > 0$ ，从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

因为

$$\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

于是上面的不等式可以写成

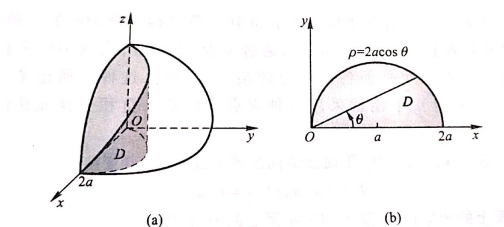
$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$, 从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Problem 2

求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$, ($a > 0$) 所截得的 (含在圆柱面内的部分) 立体的体积。



Solution

由对称性

$$V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

其中 D 为半圆周 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 及 x 轴所围成的闭区域。在极坐标系中, 闭区域 D 可用不等式

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

来表示。于是

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{32}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

3 三重积分

3.1 三重积分的概念

设 $f(x, y, z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数。将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域,也表示它的体积。在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) ,作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i (i = 1, 2, \dots, n)$,并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 。如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时,这极限总存在,且与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关,那么称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分,记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$,即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i \quad (3.1)$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, dv 叫做体积元素, Ω 叫做积分区域。

在直角坐标系中,有时也把体积元素 dv 记作 $dx dy dz$,而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

其中 $dx dy dz$ 叫做直角坐标系中的体积元素。

如果 $f(x, y, z)$ 表示某物体在点 (x, y, z) 处的密度, Ω 是该物体所占有的空间闭区域,

$f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续,那么 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 是该物体的质量 m 的近似值,这个和当 $\lambda \rightarrow 0$ 时的极限就是该物体的质量 m ,所以

$$m = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

若 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上连续,则 $m = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 存在。

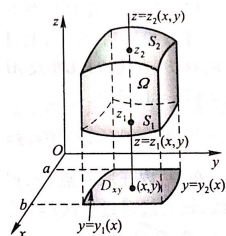
性质:与二重积分类似。

3.2 三重积分的计算

3.2.1 利用直角坐标计算三重积分

若积分区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$



先将 x, y 看作定值,将 $f(x, y, z)$ 只看作 z 的函数,在区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对 z 积分。积分的结果是 x, y 的函数,即为 $F(x, y)$,即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

计算 $F(x, y)$ 在闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma$$

假如闭区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

把这个二重积分化为二次积分，于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (3.2)$$

公式3.2把三重积分化为先对 z 、次对 y 、最后对 x 的三次积分。

我们计算一个三重积分也可以化为先计算一个二重积分、再计算一个定积分，即有下述计算公式。

设空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, c_1 \leq c_2\}$$

其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域，则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \quad (3.3)$$

3.2.2 利用柱面坐标计算三重积分

直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (3.4)$$

柱面坐标系中，有

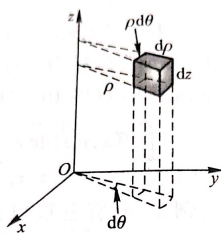
$$dv = \rho d\rho d\theta dz$$

所以

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \quad (3.5)$$

适用：

形状为曲顶曲线柱体，投影区域适合用极坐标表示。



3.2.3 利用球面坐标计算三重积分

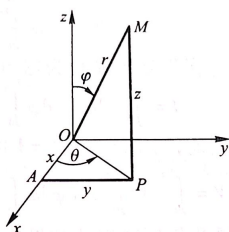
r 、 φ 、 θ 叫做球面坐标，变化范围为

$$0 \leq r < +\infty$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

直角坐标与球面坐标的关系为



$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (3.6)$$

柱面坐标系中，有

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

所以

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (3.7)$$

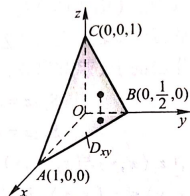
3.2.4 例题

Problem 1

计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ ，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。

Solution

作闭区域 Ω 如图所示。



Ω 在 xOy 面投影得 D_{xy} ，由 x 轴、 y 轴及 $x+2y=1$ 围成。

所以

$$D_{xy} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x \, dz \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx \\ &= \frac{1}{48} \end{aligned}$$

Problem 2

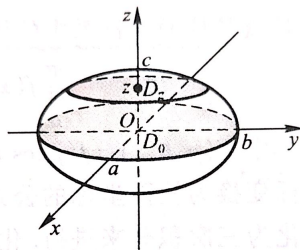
计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ，其中 Ω 是由球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的闭区域。

Solution

空间闭区域 Ω 可表示为

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}, -c \leq z \leq c \right\}$$

如图所示。



由公式3.3得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-c}^c z^2 \, dz \iint_{D_z} dx \, dy \\ &= \pi ab \int_{-r}^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 \, dz \\ &= \frac{4}{15} \pi abc^3\end{aligned}$$

思考:

1. $\iiint_{\Omega} y^2 \, dx \, dy \, dz$: 截面垂直于 y 轴 (最后对 y 积分);
2. $\iiint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy \, dz$: 截面垂直于 x 轴 (最后对 x 积分)。

Problem 3

利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

Solution

把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上, 得半径为2的圆形闭区域

$$D_{xy} = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

在 D_{xy} 内任取一点 ρ, θ , 过此点作平行于 z 轴的直线, 此直线通过曲面 $z = x^2 + y^2$ 穿入 Ω 内, 然后通过平面 $z = 4$ 穿出 Ω 外。因此闭区域 Ω 可用不等式

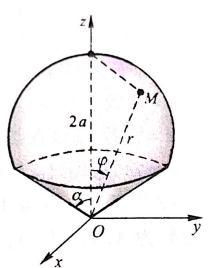
$$\rho^2 \leq z \leq 4, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示, 于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega} z \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^4 z \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho (16 - \rho^4) \, d\rho \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[8\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3} \pi\end{aligned}$$

Problem 3

求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面的顶点在原点所围成的立体（如图）的体积。



Solution

设球面通过原点 O ，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O ，其轴与 z 轴重合，则球面方程为 $r = 2a \cos \varphi$ ，锥面方程为 $\varphi = \alpha$ 。因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示，所以

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \, dr = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha) \end{aligned}$$

4 重积分的应用

我们已经掌握

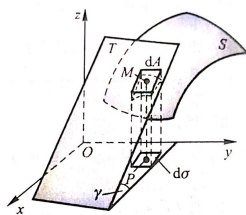
1. 平面区域的面积： $A = \iint_D d\sigma$
2. 平面薄片的质量： $M = \iint_D \mu(x, y) \, d\sigma$
3. 空间区域的体积： $V = \iiint_{\Omega} dv$
4. 空间物体的质量： $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dv$

4.1 曲面的面积

设曲面 S 由方程

$$z = f(x, y)$$

给出， D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x, y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 。要计算曲面 S 的面积 A 。



如图,

$$dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$$

因为

$$\cos \gamma = \left| \cos \left((0, 0, 1), \widehat{(z_x, z_y, -1)} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

所以

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

这就是曲面 S 的面积元素, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

上式也写成

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

其他形式:

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2} dy dz$$

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dz dx$$

4.2 质心

4.2.1 平面薄片的质心

设有一平面薄片, 占有 xOy 面上的闭区域 D , 在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$, 假定 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续。现要找该薄片质心的坐标。

静矩

$$M_y = \iint_D x\mu(x, y)d\sigma, \quad M_x = \iint_D y\mu(x, y)d\sigma$$

又该薄片的质量

$$M = \iint_D \mu(x, y)d\sigma$$

所以薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}$$

当薄片均匀时（密度为常数），公式成为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma$$

4.2.2 空间物体的质心

占有空间有界闭区域 Ω 、在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$ （假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续）的物体的质心坐标是

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dv$$

其中 $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv$ 。

当薄片均匀时（密度为常数），公式成为

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv$$

4.3 转动惯量

4.3.1 平面薄片的转动惯量

设有一平面薄片，占有 xOy 面上的闭区域 D ，在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$ ，假定 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续。现要找该薄片的转动惯量。

对 x 轴、 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y)d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2\mu(x, y)d\sigma.$$

4.3.2 空间物体的转动惯量

占有空间有界闭区域 Ω 、在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$ （假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续）的物体对 x 轴、 y 轴、 z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv$$

4.4 引力

设物体占有空间有界闭区域 Ω 、它在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$ ，并假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续。该物体对物体外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 所受引力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, \right. \\ &\quad \left. \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right) \end{aligned}$$

4.5 例题

Problem 1

求半径为 a 的球的表面积。

Solution

取上半球面方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ，则它在 xOy 面上的投影区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 。

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ，得

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

得半球面的面积

$$A_1 = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

利用极坐标，得

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \\
 &= 2\pi a \int_0^b \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right)
 \end{aligned}$$

于是

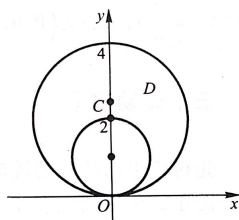
$$\lim_{b \rightarrow a} A_1 = \lim_{b \rightarrow a} 2\pi a \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right) = 2\pi a^2.$$

这就是半个球面的面积，因此整个球面的面积为

$$A = 4\pi a^2$$

Problem 2

设 D 由 $x^2 + y^2 = 2y$ 与 $x^2 + y^2 = 4y$ 所围成，求质心。



Solution

设形心为 (\bar{x}, \bar{y}) ，由对称性知

$$\bar{x} = 0$$

按公式，

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y \, d\sigma$$

又

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, d\sigma &= \iint_D \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} \rho^2 \, d\rho \\
 &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta \, d\theta = 7\pi.
 \end{aligned}$$

因此 $\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$ ，所求质心是 $C \left(0, \frac{7}{3} \right)$ 。

Problem 3

求半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常量 μ ）对于其直径边的转动惯量。

设薄片所占闭区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$$

而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x 。

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 \, d\sigma = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2 \theta \, d\rho \, d\theta = \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta \, d\rho \\ &= \mu \cdot \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \mu a^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} M a^2 \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu$ 为半圆薄片的质量。