Advanced Mathematics: The Method of Differentiation of Multivariate Functions and Its Applications

Wuhan University

Lai Wei

March 9, 2025

目录

1 多元函数的基本概念

1.1 平面点集

1.1.1 坐标平面

建立了坐标系的平面。二元有序实数组(x, y) 的全体，即$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$就表示坐标平面。

1.1.2 平面点集

坐标平面上具有某种性质P的点的几何，称作平面点集，记作

$$E = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ 具有某种性质} P\}$$

1.1.3 邻域

设$P_0(x_0, y_0)$是xOy平面上一点，δ是某一正数，与点$P_0(x_0, y_0)$ 距离小于δ的点$P(x, y)$的全体，称为 P_0的δ邻域，记作$U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid |PP_0| < \delta\}$$

或

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

1.1.4 注意

1. 点P_0的去心邻域，记作$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$$

2. 若不强调δ，也可记作$U(P_0)$， $\overset{\circ}{U}(P_0)$

1.1.5 利用点与点集的关系

若有一点$P \in \mathbf{R}^2$，任意点集$E \subset \mathbf{R}^2$

1. 内点：$\exists U(P)$，使$U(P) \subset E$，则P为E的内点。
2. 外点：$\exists U(P)$，使$U(P) \cap E = \phi$，则P为E的内点。
3. 边界点：$\forall U(P)$，若$U(P)$ 即有属于E的点，又有不属于E的点，则P为E的边界点。
4. E的边界：E的边界点的全体，记作∂E

1.1.6 聚点

如果对于任意给定的$\delta > 0$，点P的去心邻域$\overset{\circ}{U}(P, \delta)$内总有$E$ 中的点，那么称P是E的聚点。

例如，若$E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$。则$x^2 + y^2 = 1$ 和$x^2 + y^2 = 2$都是E的聚点。

1.1.7 由点集所属类的特征分类

1. 开集：若点集E中的所有点都是E的内点，则称E为开集；
2. 闭集：若点集E的边界$\partial E \in E$，则称E为闭集。

例如，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$为开集，$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$为闭集，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$