University Physics: The Law of Conservation of Motion

Date: March 12, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

守恒量：对于物体系统内发生的各种过程，如果某物理量始终保持不变，该物理量就叫做守恒量。

守恒定律：由宏观现象总结出来的最深刻、最简洁的自然规律。（动量守恒定律、机械能守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律等）

1 质点和质点系的动量定理

力的**累积**效应：

1. $\overrightarrow{F}(t)$对t累计$\rightarrow$ $\overrightarrow{I}$, $\Delta\overrightarrow{p}$
2. $\overrightarrow{F}$对$\overrightarrow{t}$累计$\rightarrow$ W, ΔE

1.1 冲量、质点的动量定理

1.1.1 动量

定义动量

$$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v} \tag{1.1}$$

故

$$\overrightarrow{F}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(m\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

即

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})$$

两边同时积分：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\overrightarrow{p}_2-\overrightarrow{p}_1=m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1$$

1.1.2 冲量

定义冲量

$$\overrightarrow{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

1.1.3 动量定理

在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量
微分形式：

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\overrightarrow{p} = \mathrm{d}(m\overrightarrow{v}) \tag{1.4}$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t = m\overrightarrow{v}_2 - m\overrightarrow{v}_1 \tag{1.5}$$

分量形式：

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\,\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\,\mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases} \tag{1.6}$$

可知，某方向受到冲量，该方向上的动量就增加。

1.2 质点系的动量定理

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{v}_{i0} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}_0 \tag{1.7}$$

或

$$\overrightarrow{I} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_0}$$

1. 若$\overrightarrow{F}$为恒力，则$\overrightarrow{I} = \overrightarrow{F}\Delta t$
2. 若$\overrightarrow{F}$为变力，则$\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t = \overline{\overrightarrow{F}}(t_2 - t_1)$

动量定理常应用于碰撞问题。

$$\overline{\overrightarrow{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\overrightarrow{v}_2 - m\overrightarrow{v}_1}{t_2 - t_1}$$

2 动量守恒定律、动能定理

2.1 动量守恒定律

由质点系动量定理：

$$\overrightarrow{I}=\int_{t_0}^{t}\sum_i \overrightarrow{F}_i^{\rm ex}\,{\rm d}t=\sum_i \overrightarrow{p}_i-\sum_i \overrightarrow{p}_{i0}$$

若质点系所受的合外力$\overrightarrow{F}^{\rm ex}=\overrightarrow{F}_i^{\rm ex}=0$
则系统的总动量不变。——动量守恒定律

1. 系统的总动量不变，但系统内任意物体的动量是可以变的；
2. 守恒条件：合外力为零。
   $\overrightarrow{F}^{\rm ex}=\sum_i \overrightarrow{F}_i^{\rm ex}=0$
   当$\overrightarrow{F}^{\rm ex}\ll\overrightarrow{F}^{\rm in}$，可近似地认为系统总动量守恒。
3. 若$\overrightarrow{F}^{\rm ex}=\sum_i \overrightarrow{F}_i^{\rm ex}\neq 0$，但满足$F_x^{\rm ex}=0$，则有$p_x=\sum_i m_i v_{ix}=C_x$ 即

$$\begin{cases}F_x^{\rm ex}=0, & p_x=\sum_i m_i v_{ix}=C_x\\ F_y^{\rm ex}=0, & p_y=\sum_i^i m_i v_{iy}=C_y\\ F_z^{\rm ex}=0, & p_z=\sum_i m_i v_{iz}=C_z\end{cases}\tag{2.1}$$

4. 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。

2.2 功

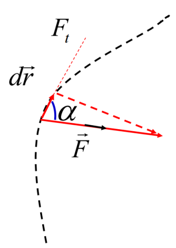
物体在力$\overrightarrow{F}$的作用下移动$\Delta\overrightarrow{r}$ →做功W

2.2.1 恒力作用下的功

$$\begin{aligned}W&=F\cos\alpha\cdot|\Delta\overrightarrow{r}|\\&=\overrightarrow{F}\cdot\Delta\overrightarrow{r}\end{aligned}\tag{2.2}$$

2.2.2 变力作用下的功

元位移 ${\rm d}\overrightarrow{r}$、元路程 ${\rm d}s$
则元功 ${\rm d}W=\overrightarrow{F}\cdot{\rm d}\overrightarrow{r}=F\cos\alpha\,{\rm d}s$
积分：

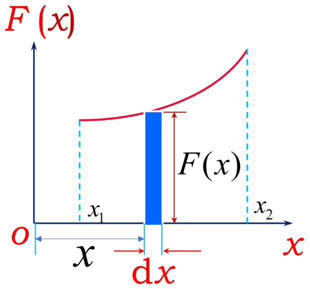


$$W=\int_A^B\overrightarrow{F}\cdot{\rm d}\overrightarrow{r}=\int_A^B F\cos\alpha\,{\rm d}s\tag{2.3}$$

1. 功的正负

$$\begin{cases}0^\circ<\alpha<90^\circ, & {\rm d}W>0\\ 90^\circ<\alpha<180^\circ, & {\rm d}W<0\\ \alpha=90^\circ,\text{即}\overrightarrow{F}\perp{\rm d}\overrightarrow{r}, & {\rm d}W=0\end{cases}$$

2. 做功的图示



3. 功是一个过程量，与路径有关。

4. 合力的功，等于各分力的功的**代数和**

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k}$$

则

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B (F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y + F_z \,\mathrm{d}z)$$

又有$W_x = \int_{x_1}^{x_B} F_x \,\mathrm{d}x$、$W_y = \int_{y_1}^{y_B} F_y \,\mathrm{d}y$、 $W_z = \int_{z_1}^{z_B} F_z \,\mathrm{d}z$。
于是

$$W = W_x + W_y + W_z$$

2.3 功率

平均功率$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
瞬时功率

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{2.4}$$

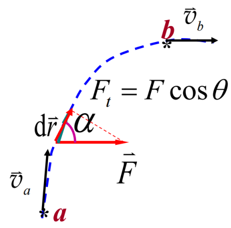
即

$$P = Fv \cos \alpha \tag{2.5}$$

2.4 动能定理

2.4.1 质点的动能定理

$$
\begin{aligned}
W &= \int \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} \\
&= \int F_{\mathrm{t}} |\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}| = \int F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$



而

$$F_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2
\end{aligned}
$$

即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}} \tag{2.6}$$

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。——质点的动能定理

1. 功是**过程量**，动能是**状态量**；
2. 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同。

2.4.2 质点系的动能定理

质点系：由有限个或无限个质点组成的系统。(可以是固体也可以是液体，它概括了力学中最普遍的研究对象)

内力和外力：质点系以外的物体作用于质点系内各质点的力称为外力，质点系内各质点之间的相互作用力称为内力，外力和内力的区分完全洪定于质点系（研究对象）的选取。

质点系内力的功：一切内力矢量和恒等于零。但一般情烷下，所有内力作功的总和并不为零。例如，两个彼此相互吸引的物体，移动一段位移，都作正功。

质点系的动能定理

由质点动能定理$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

得

$$W_e + W_i = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2\right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \tag{2.7}$$

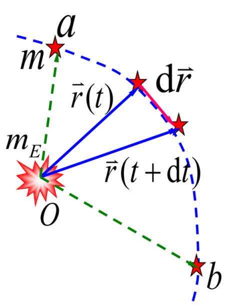
意义：合外力所做的功等于系统动能的增量。

3 保守力、势能、成对力的功

3.1 保守力

3.1.1 万有引力

m_E对m的万有引力为



$$\overrightarrow{F} = -G\frac{m_E m}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

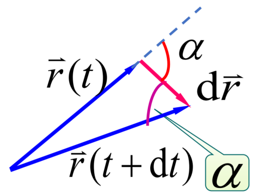
m移动 $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$时，$\overrightarrow{F}$做元功为

$$\mathrm{d}W = \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = -G\frac{m_E m}{r^2}\overrightarrow{e}_r\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

m从A到B时，$\overrightarrow{F}$做功为

$$W = \int \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_A^B -G\frac{m_E m}{r^2}\overrightarrow{e}_r\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

其中，$\overrightarrow{e}_r\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = |\overrightarrow{e}_r|\cdot|\mathrm{d}\overrightarrow{r}|\cos\alpha = \mathrm{d}r$
即



$$W = \int_{r_A}^{r_B}\left(-G\frac{m_E m}{r^2}\right)\,\mathrm{d}r$$

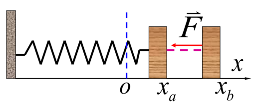
于是

$$W = Gm_E m\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \tag{3.1}$$

做功特点：做功大小只与物体的始末位置有关，与路径无关。

3.1.2 弹性力做功

弹性力$\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{i}$，则元功



$$\mathrm{d}W = -kx\,\mathrm{d}x$$

于是

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \tag{3.2}$$

做功特点：做功大小只与物体的始末位置有关，与路径无关。

3.1.3 保守力与非保守力的定义

保守力：作功与路径无关，仅决定于始、末位置的力。
质点沿任意闭合路径运动一周时，保守力对它作功为零。
非保守力：所作的功与路径有关的力。（如摩擦力）

3.2 势能

3.2.1 定义

因相对位置而具有的作功本领称为势能或位能（因有速度而具有的作功本领称为动能）。势能与质点的位置有关。

如引力势能

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{m_E m}{r}$$

如弹性势能

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$$

3.2.2 保守力做功

保守力做的功等于势能的减少，即

$$W=-\left(E_{\mathrm{p}2}-E_{\mathrm{p}1}\right)=-\Delta E_{\mathrm{p}} \tag{3.3}$$

3.2.3 保守力做功势能的计算

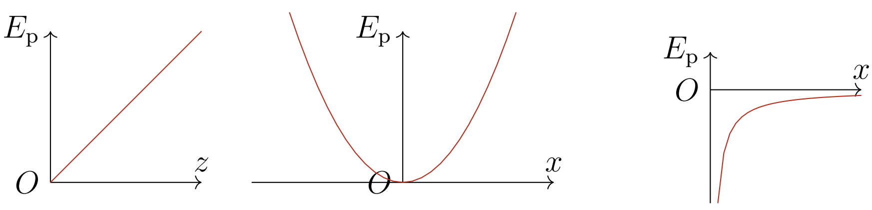
令$E_{\mathrm{p}0}=0$，则

$$E_{\mathrm{p}}(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p}0}=0}\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} \tag{3.4}$$

1. 势能是**状态的函数**，$E_{\mathrm{p}}=E_{\mathrm{p}}(x,y,z)$；
2. 势能具有**相对性**，势能大小与势能零点的选取有关；
3. 势能是**属于系统**的；
4. **势能差**与势能零点的选取无关。

3.2.4 势能曲线

$E_{\mathrm{p}}=mgz$ $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$ $E_{\mathrm{p}}=-G\frac{m_E m}{r}$



把势能和相对位置的关系绘成曲线，便得到势能曲线。

通过势能曲线，可以显示出系统总机械能，动能和势能间的关系 $E = E_k + E_p$，由 $E_{\mathrm{k}} \geq 0$ ，可以根据曲线的形状讨论物体的运动。

3.2.5 由势能求表达式

可以根据势能$E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$的情况，判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向：

$$\mathrm{d}W = F_x \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}E_p$$

则

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \tag{3.5}$$

如果势能是位置(x, y, z)的多元函数，则

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \tag{3.6}$$

3.3 成对的力的功

力总是成对的，无论是保守力还是非保守力。

设质量为m_1和m_2的两个物体分别受到 F_1 和 F_2 的力，且 $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2$在 $\mathrm{d}t$时间内位移为 $\mathrm{d}r_1$ 和 $\mathrm{d}r_2$ ，质点 2 相对于质点 1 的相对位移 $\mathrm{d}\overrightarrow{r}'$有 $\mathrm{d}\overrightarrow{r}_2 = d\overrightarrow{r}_1 + \mathrm{d}r'$ 则元功为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W_1 &= \overrightarrow{F}_1 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 \\
\mathrm{d}W_2 &= \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_2
\end{aligned}$$

这一对力所作元功之和为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= \overrightarrow{F}_1 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{F}_1 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2 \cdot (d\overrightarrow{r}_1 + d\overrightarrow{r}') \\
&= \left(-\overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_2\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}' \\
&= \overrightarrow{F}_2 \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}'
\end{aligned}$$

1. 成对力的功只与作用力和相对位移有关；
2. 成对力的总功具有与参考系选择无关的不变性质。
   为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，再计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。
3. 在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。