

# University Physics: The Law of Conservation of Motion

Date: March 25, 2025

*Wuhan University*

Lai Wei

## 目录

**守恒量：**对于物体系统内发生的各种过程，如果某物理量始终保持不变，该物理量就叫做守恒量。

**守恒定律：**由宏观现象总结出来的最深刻、最简洁的自然规律。（动量守恒定律、机械能守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律等）

## 1 质点和质点系的动量定理

力的累积效应：

1.  $\vec{F}(t)$ 对 $t$ 累计 $\rightarrow \vec{I}, \Delta \vec{p}$

2.  $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 累计 $\rightarrow W, \Delta E$

### 1.1 冲量、质点的动量定理

#### 1.1.1 动量

定义动量

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (1.1)$$

故

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.2)$$

即

$$\vec{F} dt = d\vec{p} = d(m\vec{v})$$

两边同时积分：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

#### 1.1.2 冲量

定义冲量

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (1.3)$$

### 1.1.3 动量定理

在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量  
微分形式：

$$\vec{F} dt = d\vec{p} = d(m\vec{v}) \quad (1.4)$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (1.5)$$

分量形式：

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases} \quad (1.6)$$

可知，某方向受到冲量，该方向上的动量就增加。

## 1.2 质点系的动量定理

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i0} = \vec{p} - \vec{p}_0 \quad (1.7)$$

或

$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

1. 若  $\vec{F}$  为恒力，则  $\vec{I} = \vec{F} \Delta t$
2. 若  $\vec{F}$  为变力，则  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \overline{\vec{F}} (t_2 - t_1)$

动量定理常应用于碰撞问题。

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

## 2 动量守恒定律、动能定理

### 2.1 动量守恒定律

由质点系动量定理：

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} dt = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$$

若质点系所受的合外力  $\vec{F}^{\text{ex}} = \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$

则系统的总动量不变。——动量守恒定律

1. 系统的总动量不变，但系统内任意物体的动量是可以变的；

2. 守恒条件：合外力为零。

$$\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$$

当  $\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$ ，可近似地认为系统总动量守恒。

3. 若  $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} \neq 0$ ，但满足  $F_x^{\text{ex}} = 0$ ，则有  $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x$  即

$$\begin{cases} F_x^{\text{ex}} = 0, & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, & p_y = \sum_i m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = C_z \end{cases} \quad (2.1)$$

4. 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。

## 2.2 功

物体在力  $\vec{F}$  的作用下移动  $\Delta \vec{r} \rightarrow$  做功  $W$

### 2.2.1 恒力作用下的功

$$\begin{aligned} W &= F \cos \alpha \cdot |\Delta \vec{r}| \\ &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

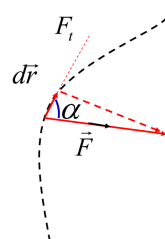
### 2.2.2 变力作用下的功

元位移  $d\vec{r}$ 、元路程  $ds$

则元功  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha ds$

积分：

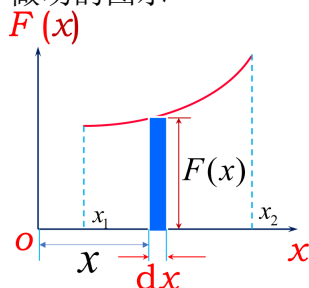
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cos \alpha ds \quad (2.3)$$



1. 功的正负

$$\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, & dW > 0 \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ, & dW < 0 \\ \alpha = 90^\circ, \text{即 } \vec{F} \perp d\vec{r}, & dW = 0 \end{cases}$$

## 2. 做功的图示



3. 功是一个过程量，与路径有关。

4. 合力的功，等于各分力的功的代数和

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ d\vec{r} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}\end{aligned}$$

则

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

又有  $W_x = \int_{x_1}^{x_B} F_x dx$ 、 $W_y = \int_{y_1}^{y_B} F_y dy$ 、 $W_z = \int_{z_1}^{z_B} F_z dz$ 。  
于是

$$W = W_x + W_y + W_z$$

## 2.3 功率

平均功率  $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

瞬时功率

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.4)$$

即

$$P = Fv \cos \alpha \quad (2.5)$$

## 2.4 动能定理

### 2.4.1 质点的动能定理

$$\begin{aligned}
 W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int F_t |d\vec{r}| = \int F_t ds
 \end{aligned}$$

而

$$F_t = m \frac{dv}{dt}$$

于是

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\
 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2
 \end{aligned}$$

即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1} \quad (2.6)$$

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。——质点的动能定理

1. 功是过程量，动能是状态量；
2. 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同。

### 2.4.2 质点系的动能定理

**质点系：**由有限个或无限个质点组成的系统。（可以是固体也可以是液体，它概括了力学中最普遍的研究对象）

**内力和外力：**质点系以外的物体作用于质点系内各质点的力称为外力，质点系内各质点之间的相互作用力称为内力，外力和内力的区分完全取决于质点系（研究对象）的选取。

**质点系内力的功：**一切内力矢量和恒等于零。但一般情况下，所有内力做功的总和并不为零。例如，两个彼此相互吸引的物体，移动一段位移，都作正功。

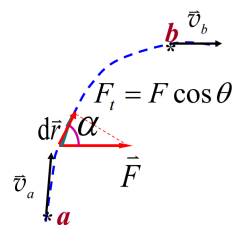
**质点系的动能定理**

由质点动能定理  $W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

得

$$W_e + W_i = \sum_i \left( \frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2 \right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \quad (2.7)$$

意义：合外力所做的功等于系统动能的增量。



### 3 保守力、势能、成对力的功

#### 3.1 保守力

##### 3.1.1 万有引力

$m_E$ 对 $m$ 的万有引力为

$$\vec{F} = -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r$$

$m$ 移动  $d\vec{r}$  时,  $\vec{F}$  做元功为

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$m$ 从 $A$ 到 $B$ 时,  $\vec{F}$ 做功为

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

其中,  $\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = |\vec{e}_r| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha = dr$

即

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \left( -G \frac{m_E m}{r^2} \right) dr$$

于是

$$W = Gm_E m \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (3.1)$$

做功特点: 做功大小只与物体的始末位置有关, 与路径无关。

##### 3.1.2 弹性力做功

弹性力  $\vec{F} = -kx \vec{i}$ , 则元功

$$dW = -kx dx$$

于是

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F dx = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = - \left( \frac{1}{2} kx_b^2 - \frac{1}{2} kx_a^2 \right) \quad (3.2)$$

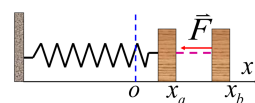
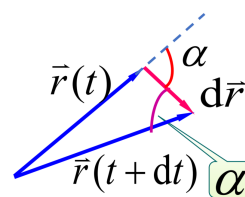
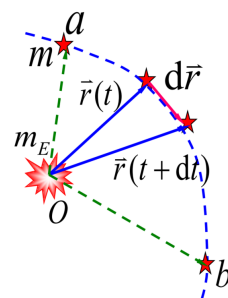
做功特点: 做功大小只与物体的始末位置有关, 与路径无关。

##### 3.1.3 保守力与非保守力的定义

**保守力:** 做功与路径无关, 仅决定于始、末位置的力。

质点沿任意闭合路径运动一周时, 保守力对它做功为零。

**非保守力:** 所作的功与路径有关的力。(如摩擦力)





## 3.2 势能

### 3.2.1 定义

因相对位置而具有的做功本领称为势能或位能（因有速度而具有的做功本领称为动能）。势能与质点的位置有关。

如引力势能

$$E_p = -G \frac{m_E m}{r}$$

如弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

### 3.2.2 保守力做功

保守力做的功等于势能的减少，即

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p \quad (3.3)$$

### 3.2.3 保守力做功势能的计算

令  $E_{p0} = 0$ ，则

$$E_p(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{p0}=0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.4)$$

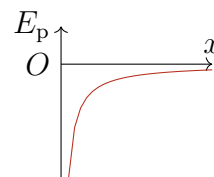
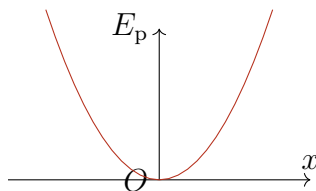
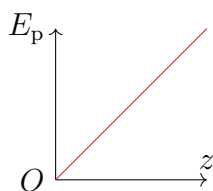
1. 势能是状态的函数， $E_p = E_p(x, y, z)$ ；
2. 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关；
3. 势能是属于系统的；
4. 势能差与势能零点的选取无关。

### 3.2.4 势能曲线

$$E_p = mgz$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_p = -G \frac{m_E m}{r}$$



把势能和相对位置的关系绘成曲线，便得到势能曲线。

通过势能曲线，可以显示出系统总机械能，动能和势能间的关系  $E = E_k + E_p$ ，由  $E_k \geq 0$ ，可以根据曲线的形状讨论物体的运动。

### 3.2.5 由势能求表达式

可以根据势能  $E_p(x, y, z)$  的情况，判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向：

$$dW = F_x dx = -dE_p$$

则

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad (3.5)$$

如果势能是位置  $(x, y, z)$  的多元函数，则

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (3.6)$$

## 3.3 成对的力的功

力总是成对的，无论是保守力还是非保守力。

设质量为  $m_1$  和  $m_2$  的两个物体分别受到  $F_1$  和  $F_2$  的力，且  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  在  $dt$  时间内位移为  $dr_1$  和  $dr_2$ ，质点 2 相对于质点 1 的相对位移  $d\vec{r}'$  有  $d\vec{r}_2 = d\vec{r}_1 + d\vec{r}'$  则元功为：

$$\begin{aligned} dW_1 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 \\ dW_2 &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

这一对力所作元功之和为：

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot (d\vec{r}_1 + d\vec{r}') \\ &= (-\vec{F}_2 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}' \\ &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}' \end{aligned}$$

1. 成对力的功只与作用力和相对位移有关；
2. 成对力的总功具有与参考系选择无关的不变性质。  
为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，再计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。
3. 在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

## 4 功能原理、机械能守恒定律

### 4.1 质点系功能原理

系统的机械能：动能与势能的综合称为机械能，即

$$E = E_k + E_p$$

内力的功可分为：保守内力的功和非保守内力功

$$W^{\text{in}} = \sum_i W_i^{\text{in}} = W_c^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

由势能的定义，保守内力的功总等于系统势能的减少：

$$W_c^{\text{in}} = -\Delta E_p$$

系统的功能原理

（由质点系的动能定理）

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = W^{\text{ex}} + W_c^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = W^{\text{ex}} - \Delta E_p + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = \Delta E_k$$

于是，

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} \quad (4.1)$$

在选定的质点系内，在任一过程中，质点系总机械能的增量等于所有外力的功与非保守内力的功的代数和。

非保守内力的功将导致机械能与其他形式的能量转换。

### 4.2 机械能守恒定律

由功能原理： $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$ 。

如果  $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$ ，则

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

即，如是系统内只有保守内力做功，其他内力和一切外力都不做功，或元功之和为零，则系统内各物体的动能和势能可以相互转换，但总机械能保持不变。

1. 质点系的机械能守恒的条件是：在一个过程中，既没有外力做功，也没有非保守内力（如摩擦力、爆炸力、流体的黏性阻力等耗散力）做功，或者外力和非保守内力做的总功为零。
2. 在满足守恒条件时，质点系的总机械能可以在动能和系统势能之间转化，也可以在系统内各物体之间转移，但在转化和转移过程中保持总机械能不变。

### 4.3 能量守恒定律

对于一个不受外界影响的封闭系统（有时也称为孤立系统），系统内各种不同形式的能量可以互相转化，也可以从系统的一部分转移到另一部分，但不论系统内发生什么过程，能量既不会消失也不会产生，系统的总能量恒定不变。这就是能量守恒定律 (law of conservation of energy)。

### 4.4 动量与能量的比较

物理量	动量(momentum)	能量(kinetic energy)
表达式	$\vec{p} = m \vec{v}$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
单位	kg · m/s	J
性质	矢量	标量
关系	$\frac{p^2}{2m} = E_k$	
变化量	$\Delta p$ 由力的冲量决定	$\Delta E_k$ 由力的功决定

另外， $\Delta p$ 与惯性系的选择无关， $\Delta E_k$ 随惯性系的不同而不同。

## 5 碰撞、碰撞定律、质心运动定律

### 5.1 碰撞

#### 定义

两个或两个以上的物体相遇，相遇时物体之间的相互作用，仅持续极为短暂的时间。

#### 特点

1. 作用时间极短；
2. 作用力变化极快；
3. 作用力峰值极大；
4. 过程中物体发生形变；
5. 可认为碰撞过程中只受内力 ( $\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$ )，故遵守动量守恒定律 ( $\sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$ )。

### 5.2 碰撞定律

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (5.1)$$

即

$$e = \frac{\text{分离速度}}{\text{接近速度}}$$

( $e$ 称恢复系数，由材料性质决定。)

## 5.3 碰撞的分类

### 5.3.1 完全弹性碰撞

恢复系数 $e = 1$ ， $v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$ 。

碰撞后形变能完全恢复，没有机械能的损失，系统碰撞前后机械能守恒。

动量守恒，机械能守恒。

对于完全弹性对心碰撞：

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

联立方程解得

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20} \\ v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} \end{cases} \quad (5.2)$$

### 5.3.2 完全非弹性碰撞

恢复系数 $e = 0$ ， $v_2 = v_1 = v$ 。

碰撞后二者没有分开，并以共同的速度一起运动。物体碰撞后已经完全不可能恢复形变。

动量守恒，机械能不守恒。

对于完全非弹性对心碰撞：

由

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

解得

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (5.3)$$

损失能量

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (5.4)$$

### 5.3.3 非完全弹性碰撞

恢复系数  $0 < e < 1$ ,  $v_2 = v_1 = e(v_{10} - v_{20})$ 。

碰撞后形变不能完全恢复, 一部分机械能将被转变为其他形式的能量 (如热能)。

动量守恒, 机械能不守恒。

### 5.3.4 斜碰撞

碰撞前与碰撞后的速度不在一条直线上。

例如, 一光滑球与另外静止的光滑球相碰。如果两者均为弹性球, 且碰后两者的运动方向垂直, 则两小球质量必然相等

## 5.4 质心

### 5.4.1 定义

在研究质点系统问题中, 与质点系统质量分布有关的一个代表点, 它的位置在平均意义上代表着质量分布中心。

### 5.4.2 质心位置

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (5.5)$$

即

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

则质量连续分布的系统的质心位置

$$\vec{r}_C = \int \vec{r} \, dm / M$$

即

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int x \, dm}{M} \\ y_c = \frac{\int y \, dm}{M} \\ z_c = \frac{\int z \, dm}{M} \end{cases}$$

注意

1. 质心不同于重心, 物体体积不太大时, 两者重合; 物体远离地球时 受重力, "重心"失去意义, "质心"仍在。
2. 当外力的作用线通过质心时, 物体只作平动, 没有转动, 就好像物体的质量都集中在质心这一点上。

### 5.4.3 质心速度

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \quad (5.6)$$

### 5.4.4 质心加速度

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M} \quad (5.7)$$

## 5.5 质心运动定律

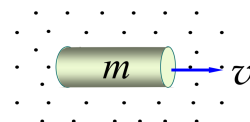
质心的加速度与质点系所受外力的矢量和成正比，与质点系的总质量成反比，质心的加速度与内力无关。

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M} \quad (5.8)$$

## 6 例题

### 6.1 Problem 1

在宇宙中有密度为 $\rho$ 的尘埃,这些尘埃相对惯性参考系是静止的。有一质量为 $m_0$ 的宇宙飞船以初速度 $v_0$  穿过宇宙尘埃, 由于尘埃粘贴到飞船上, 致使飞船的速度发生改变。求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系。(设想飞船的外形是截面积为 $S$ 的圆柱体)



#### Solution

尘埃与飞船作完全非弹性碰撞，把它们作为一个系统，则动量守恒：

$$m_0 v_0 + (m - m_0) \times 0 = mv$$

解得

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所有与飞船迎面相撞的尘埃都会粘贴到飞船上。考查  $dt$  时间内与飞船迎面相撞的尘埃：

$$dm = \rho S v dt$$

又因为

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所以

$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S v dt$$

由

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0} \int_0^t dt$$

得

$$v = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}}$$

## 6.2 Problem 2

已知一圆环半径为 $R$ ，质量为 $M$ ，求它的质心位置。

**Solution**

建坐标系如图，取一小段长度 $dl$ 则其质量为 $dm = \lambda dl$ 。

又 $dl = R d\theta$ ，故 $dm = \frac{M}{\pi R} R d\theta$

而 $x = R \cos \theta$ ， $y = R \sin \theta$

故

$$y_c = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int_0^\pi R \sin \theta \frac{M}{\pi R} R d\theta}{M} = \frac{2R}{\pi}$$

由对称性可知，

$$x_c = 0$$

