Advanced Mathematics: Multiple Integral

Wuhan University

Lai Wei

April 22, 2025

目录

1 二重积分的概念与性质

1.1 二重积分的概念

1.1.1 定义

设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数。将闭区域D任意分成n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积。在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots n)$，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区域$D$的分法及点$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关，那么称此极限为函数$f(x,y)$ 在闭区域D上的二重积分，记作$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{1.1}$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$叫做被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$叫做面积元素， x与y叫做积分变量，D叫做积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

在二重积分的定义中对闭区域D的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分D，那么除了包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$的边长为Δx_j；和Δy_k，则$\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$.因此在直角坐标系中，有时也把面积元素$\mathrm{d}\sigma$记作$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，而把二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$叫做直角坐标系中的面积元素。

1.1.2 二重积分的几何意义

一般地，如果$f(x,y)\geq 0$，被积函数$f(x,y)$可以解释为曲顶柱体的顶在点(x,y)处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积。如果$f(x,y)$是负的，柱体就在xOy面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的。如果$f(x,y)$在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么，$f(x,y)$在D上的二重积分就等于xOy面上方的柱体体积减去xOy面下方的柱体体积所得之差。

1.2 二重积分的性质

1.2.1 性质1

设α和β为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

1.2.2 性质2

如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分何区域，那么在D的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和。

例如D分为两个闭区域D_1与D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有**可加性**。

1.2.3 性质3

如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1\cdot\ \mathrm{d}\sigma = \iint_D\ \mathrm{d}\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的，因为高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。

1.2.4 性质4

如果在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$ ，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|,$$

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

1.2.5 性质5

设M和m分别是$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式。因为$m\le f(x,y)\le M$，所以由性质4有

$$\iint_D m \,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D M \,\mathrm{d}\sigma$$

再应用性质1和性质3，便得此估值不等式。

1.2.6 性质6

（二重积分的中值定理）设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

2 二重积分的计算法

2.1 利用直角坐标计算二次积分

二重积分化二次积分：

2.1.1 X型区域

设积分区域D可以用不等式

$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$$

来表示（称为X型区域），其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续。

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

上式右端的积分叫做先对y、后对x的二次积分。就是说，先把x看做常数，把$f(x,y)$只看做y的函数，并对y计算从$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$的定积分；然后把算得的结果（是x的函数）再对x计算在区间$[a,b]$上的定积分。这个先对y，后对x的二次积分也常记作

$$\int_0^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

因此，等式??也写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{2.2}$$

这就是把二重积分化为先对y，后对x的二次积分的公式。

2.1.2 Y型区域

类似地，如果积分区域D可以用不等式

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \quad c \le y \le d$$

来表示（称为Y型区域），其中函数$\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$在区间$[c,d]$上连续，那么就有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{2.3}$$

上式右端的积分叫做先对x，后对y的二次积分，这个积分也常记作

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

因此，等式**??**也写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

这就是把二重积分化为先对x，后对y的二次积分的公式。

2.1.3 既是X型区域，又是Y型区域

如果积分区域D既是X型的，可用不等式$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b$表示，又是Y型的，可用不等式 $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$表示，那么由公式**??**及**??**就得

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

上式表明，这两个不同次序的二次积分相等，因为它们都等于同一个二正积分

$$\iint_b f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

2.1.4 既不是X型区域，又不是Y型区域

可以把区域D分成几部分，使每个部分是X型区域或是Y型区域。

2.1.5 例题

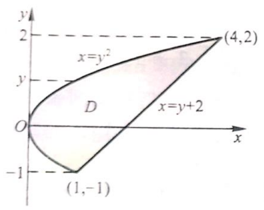
Problem 1

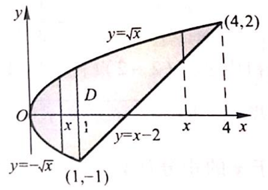
计算$\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由抛物线$y^2 = x$及直线$y = x - 2$所围成的闭区域。

Solution

画出积分区域D如图所示。D既X型的，又是Y型的。若利用公式??，则得

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left[y(y+2)^2 - y^5\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{45}{8}
\end{aligned}
$$





若利用公式??来计算，则由于在区间$[0,1]$及$[1,4]$上表示$\varphi_1(x)$的式子不同，所以要用经过交点$(1,-1)$且平行于y轴的直线$x=1$把区域D分成D_1和D_2两部分（如图），其中

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y)\mid -\sqrt{x}\le y\le \sqrt{x}, 0\le x\le 1\right\} \\
D_2 &= \left\{(x,y)\mid x-2\le y\le \sqrt{x}, 1\le x\le 4\right\}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Problem 2

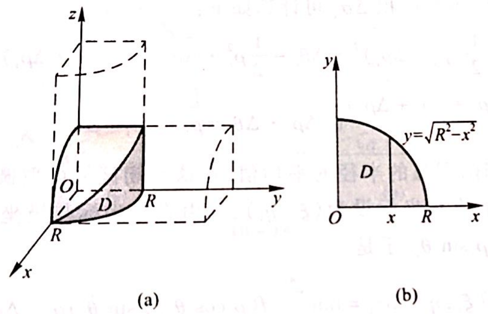
求两个底圆半径都等于R的直交圆柱面所围成的立体的体积。

Solution

设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2\text{及 } x^2+z^2=R^2$$

利用立体关于坐标平面的对称性，只要算出它在第一卦限部分（图(a)）的体积V_1再乘以8就行了。



(a) (b)

所求立体在第一卦限部分可以看成一个曲顶柱体，它的底为

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R\right\}$$

如图(b)所示。它的顶是柱面$z=\sqrt{R^2-x^2}$。于是

$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

所以

$$\begin{aligned}V_1&=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}y\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}R^3\end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3$$

2.2 利用极坐标计算二重积分

2.2.1 二重积分的极坐标形式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

把极坐标上点(ρ,θ)看作是在同一平面上的点(x,y)的极坐标表示，所以上式右端的积分区域仍然记作D。因为在直角坐标系中$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 也常记作$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以上式又可写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \tag{2.6}$$

2.2.2 极坐标系下的二重积分化为二次积分

设积分区域D可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

来表示，其中函数$\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续。

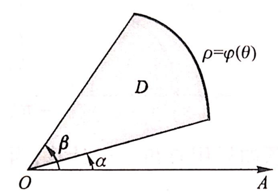
极坐标中二重积分化为二次积分的公式为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta \tag{2.7}$$

上式也写成

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho \tag{2.8}$$

如果积分区城D是如图所示的曲边扇形，那么可以把它看作当$\varphi_1(\theta)\equiv 0, \varphi_2(\theta)=\varphi(\theta)$时的特例，这时闭区域$D$可以用不等式

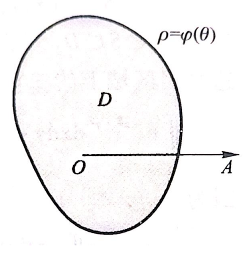


$$0 \le \rho \le \varphi(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$$

来表示，而公式**??**成为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_a^\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

如果积分区城D如图所示，极点在D的内部，那么可以把它看作当$\alpha=0, \beta=2\pi$ 时的特例，这时闭区域D可以用不等式



$$0 \le \rho \le \varphi(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

来表示，而公式??成为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho$$

注意：

1. $\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$表示闭区域$D$的面积；
2. $\sigma = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$表示直角坐标系中闭区域$D$的面积；
3. $\sigma = \iint_D \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$表示极坐标系中闭区域$D$的面积；

设积分区域D可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

来表示，其中函数$\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$在区间$[\alpha, \beta]$上连续，则有

$$\sigma = \iint_D \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)\right] \mathrm{d}\theta$$

如果积分区城D是曲边扇形，那么可以把它看作当$\varphi_1(\theta) \equiv 0, \varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ 时的特例，这时有

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

2.2.3 例题

Problem 1

计算$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由圆心在原点、半径为$a$的圆周所围成的闭区域。

Solution

在极坐标系中，闭区域D可表示为

$$0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi$$

于是有

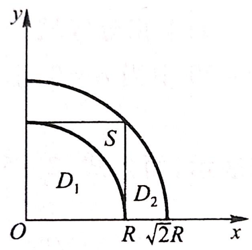
$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right]_0^a \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\end{aligned}$$

利用上面的结果计算反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$：
设

$$D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le R, 0\le y\le R\}$$



显然$D_1\subset S\subset D_2$。由于$e^{-x^2-y^2}>0$，从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\iint_S \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因为

$$\iint_S \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^R \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right)$$

$$\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2R^2}\right)$$

于是上面的不等式可以写成

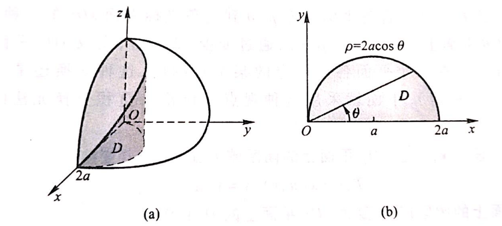
$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2R^2}\right)$$

令$R \to +\infty$，上式两端趋于同一极限$\frac{\pi}{4}$，从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Problem 2

求球体$x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$, $(a>0)$所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积。



Solution

由对称性

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中D为半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$及x轴所围成的闭区域。在极坐标系中，闭区域D可用不等式

$$0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

来表示。于是

$$\begin{aligned} V &= 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

3 三重积分

3.1 三重积分的概念

设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数。将Ω任意分成n个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中Δv_i表示第i个小闭区域，也表示它的体积。在每个Δv_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda \to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区域$\Omega$的分法及点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x, y, z)$在闭区域Ω上的三重积分，记作$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i \tag{3.1}$$

其中$f(x, y, z)$叫做被积函数，$\mathrm{d}v$叫做体积元素，Ω叫做积分区域。

在直角坐标系中，有时也把体积元素$\mathrm{d}v$记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$叫做直角坐标系中的体积元素。

如果$f(x, y, z)$表示某物体在点(x, y, z)处的密度，Ω是该物体所占有的空间闭区域，$f(x, y, z)$在Ω上连续，那么$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$是该物体的质量$m$的近似值，这个和当$\lambda \to 0$时的极限就是该物体的质量$m$，所以

$$m = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$$

若$f(x, y, z)$在闭区域Ω上连续，则$m = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$存在。

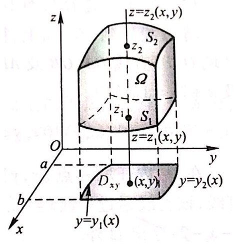
性质：与二重积分类似。

3.2 三重积分的计算

3.2.1 利用直角坐标计算三重积分

若积分区域Ω可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$



先将x、y看作定值，将$f(x, y, z)$只看作z的函数，在区间$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对z积分。积分的结果是x、y的函数，即为$F(x, y)$，即

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

计算$F(x,y)$在闭区域D_{xy}上的二重积分

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

假如闭区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\}$$

把这个二重积分化为二次积分，于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{3.2}$$

公式??把三重积分化为先对z、次对y、最后对x的三次积分。

我们计算一个三重积分也可以化为先计算一个二重积分、再计算一个定积分，即有下述计算公式。

设空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z, c_1\le c_2\}$$

其中D_z是竖坐标为z的平面截闭区域Ω所得到的一个平面闭区域，则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.3}$$

3.2.2 利用柱面坐标计算三重积分

直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \tag{3.4}$$

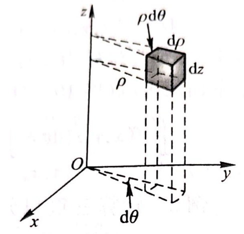
柱面坐标系中，有

$$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

所以

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{3.5}$$

适用：
形状为曲顶曲线柱体，投影区域适合用极坐标表示。

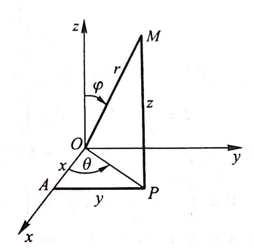


3.2.3 利用球面坐标计算三重积分

r、φ、θ叫做球面坐标，变化范围为

$$0 \le r < +\infty$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

直角坐标与球面坐标的关系为



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{3.6}$$

柱面坐标系中，有

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \tag{3.7}$$

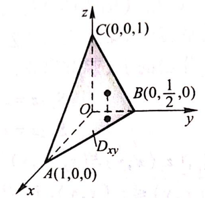
3.2.4 例题

Problem 1

计算三重积分$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成的闭区域。

Solution

作闭区域Ω如图所示。



Ω在xOy面投影得D_{xy}，由x轴、y轴及$x+2y=1$围成。
所以

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|,0\le y\le \frac{1-x}{2},0\le x\le 1\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{48}\end{aligned}$$

Problem 2

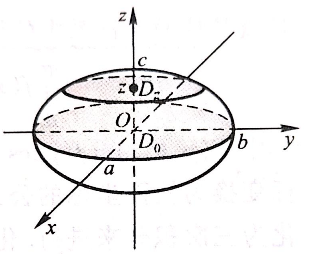
计算三重积分$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成的闭区域。

Solution

空间闭区域Ω可表示为

$$\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2},-c\le z\le c\right\}$$

如图所示。



由公式??得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pi ab \int_{-r}^{c} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) z^2\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{4}{15}\pi abc^3\end{aligned}$$

思考：

1. $\iiint_{\Omega} yx^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$：截面垂直于$y$轴（最后对$y$积分）；
2. $\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$：截面垂直于$x$轴（最后对$x$积分）。

Problem 3

利用柱面坐标计算三重积分$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的闭区域。

Solution

把闭区域Ω投影到xOy面上，得半径为2的圆形闭区域

$$D_{xy}=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

在D_{xy}内任取一点ρ,θ，过此点作平行于z轴的直线，此直线通过曲面$z=x^2+y^2$ 穿入Ω内，然后通过平面$z=4$穿出Ω外。因此闭区域Ω可用不等式

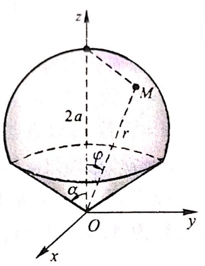
$$\rho^2\le z\le 4,\quad 0\le\rho\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

来表示，于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{\Omega} z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \rho\left(16-\rho^4\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3}\pi\end{aligned}$$

Problem 3

求半径为a的球面与半顶角为α的内接锥面的顶点在原点所围成的立体（如图）的体积。



Solution

设球面通过原点O，球心在z轴上，又内接锥面的顶点在原点O，其轴与z轴重合，则球面方程为$r = 2a\cos\varphi$，锥面方程为$\varphi = \alpha$。因为立体所占有的空间闭区域Ω可用不等式

$$0 \le r \le 2a\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

来表示，所以

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3}\left(1 - \cos^4\alpha\right) \end{aligned}$$