Advanced Mathematics: The Method of Differentiation of Multivariate Functions and Its Applications

Wuhan University

Lai Wei

March 9, 2025

目录

1 多元函数的基本概念

1.1 平面点集

1.1.1 坐标平面

建立了坐标系的平面。二元有序实数组(x, y) 的全体，即$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$就表示坐标平面。

1.1.2 平面点集

坐标平面上具有某种性质P的点的几何，称作平面点集，记作

$$E = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ 具有某种性质} P\}$$

1.1.3 邻域

设$P_0(x_0, y_0)$是xOy平面上一点，δ是某一正数，与点$P_0(x_0, y_0)$ 距离小于δ的点$P(x, y)$的全体，称为 P_0的δ邻域，记作$U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid |PP_0| < \delta\}$$

或

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

注意

1. 点P_0的去心邻域，记作$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$$

2. 若不强调δ，也可记作$U(P_0)$，$\overset{\circ}{U}(P_0)$

利用点与点集的关系，可知
若有一点$P \in \mathbf{R}^2$，任意点集$E \subset \mathbf{R}^2$

1. 内点：$\exists U(P)$，使$U(P) \subset E$，则P为E的内点。
2. 外点：$\exists U(P)$，使$U(P) \cap E = \phi$，则P为E的内点。
3. 边界点：$\forall U(P)$，若$U(P)$ 即有属于E的点，又有不属于E的点，则P为E的边界点。
4. E的边界：E的边界点的全体，记作∂E

1.1.4 聚点

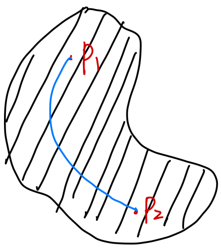
如果对于任意给定的$\delta > 0$，点P的去心邻域$\overset{\circ}{U}(P, \delta)$内总有$E$ 中的点，那么称P是E的聚点。

例如，若$E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$。则$x^2 + y^2 = 1$ 和$x^2 + y^2 = 2$都是E的聚点。

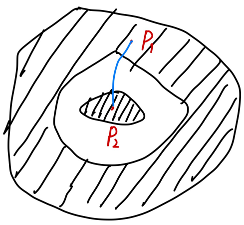
1.1.5 由点集所属类的特征分类

1. 开集：若点集E中的所有点都是E的内点，则称E为开集；
2. 闭集：若点集E的边界$\partial E \in E$，则称E为闭集。

例如，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$为开集，$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$为闭集，$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$



(a)



(b)

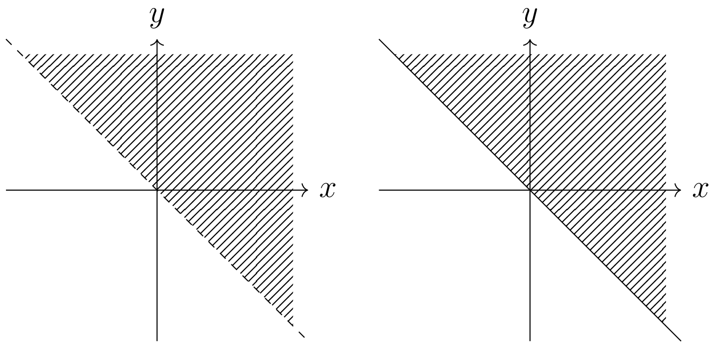
1. 连通集：如上图(a)；
2. 非连通集：如上图(b)。

1. 开区域（也简称区域）：连通的开集；
2. 闭区域：开区域连同其边界一起构成的点集。

如$\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 为(开)区域；$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 为闭区域。

1. 有界集：对于集合E，若$\exists r > 0$，使$E \subset U(0, r)$，则称E是有界的。（就是说能找到一个“圆”把集合E包裹起来）
2. 无界集：若一个集合不是有界集，则称其为无界集。

例如，$\{(x, y) \mid x + y > 0\}$为无界开区域；$\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$为无界闭区域。



1.2 多元函数的概念

1.2.1 二元函数

设D是$\mathbf{R}^2$的一个非空子集，称映射$f : D \to \mathbf{R}$为定义在D上的二元函数，通常记为

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \tag{1.1}$$

或

$$z = f(P),\ P \in D \tag{1.2}$$

1.2.2 值域

上述定义中，与自变量x和y的一对值（即二元有序实数组）(x, y) 相对应的因变量z的值，也称为f在点(x, y)处的函数值，记作$f(x, y)$，即$z = f(x, y)$ 函数值$f(x, y)$的全体所构成的集合为函数f的值域，记作$f(D)$，即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\} \tag{1.3}$$

1.2.3 推广

三元函数：$u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D$；
n元函数：$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D$

1.2.4 自然定义域

使算式有意义的点的集合。

例如$z = \ln(x + y)$的自然定义域为 $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$。$z = \arcsin(x + y)$ 的自然定义域为$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$。

1.2.5 二元函数的图形

设函数$z = f(x, y)$的定义域为D。对于任意取定的点$P(x, y) \in D$，对应的函数值为$z = f(x, y)$。这样，以x为横坐标，y为纵坐标和 $z = f(x, y)$为竖坐标在空间就确定一点$M(x, y, z)$。当x, y遍取D上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\} \tag{1.4}$$

这个点集称为二元函数$z = f(x, y)$的图形，通常我们也说二元函数的图形是一张曲面。

例如，由空间解析几何知道，线性函数$z = ax + by + c$ 的图形是一张平面，而函数$z = x^2 + y^2$的图形是旋转抛物面。

1.3 多元函数的极限

1.3.1 二元函数的极限

如果在$P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$（即$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0$）过程中，对应的函数值无限接近于一个确定的常数$A$，那么就说$A$是函数$f(x, y)$当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$时的极限。

定义：“$\varepsilon - \delta$”语言

设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是D的聚点。如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当点$P(x, y) \in D \cap \ddot{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{1.5}$$

成立，那么就称常数A为函数$f(x, y)$当$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 的极限，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \tag{1.6}$$

或

$$f(P) \to A\,(P \to P_0) \tag{1.7}$$

注意：

1. P_0是D的聚点；
2. 证明过程中，核心在于寻找$\delta = \delta(\varepsilon)$。