Theoretical Mechanics: Planar Force System

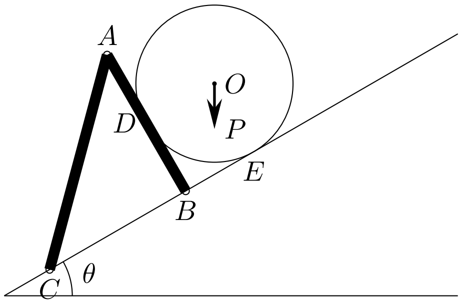
Date： 2025 年 2 月 23 日

Wuhan University

Lai Wei

Problem 1

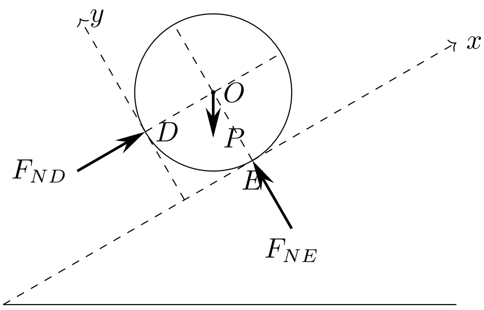
一重为50kN的圆柱搁置在倾角$\theta = 30°$的光滑斜面上，并用撑架支承如图所示。假设A、B、C处均为光滑铰链，接触处的摩擦不计，接触点D刚好在构件AB的中央，求撑件AC的受力及铰链B的约束力（不计撑架构件自重）。



Solution

Part One

取圆柱为分离体，D，E处为光滑接触，圆柱受主动力P，约束力F_ND及F_NE作用，汇交于圆柱中心O点，受力图：



取如图所示坐标轴，由平衡条件$\sum F_x = 0$，即

$$F_{ND} - P\sin\theta = 0$$

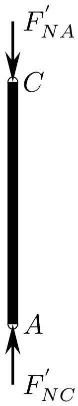
解得

$$F_{ND} = 25\text{kN}$$

Part Two

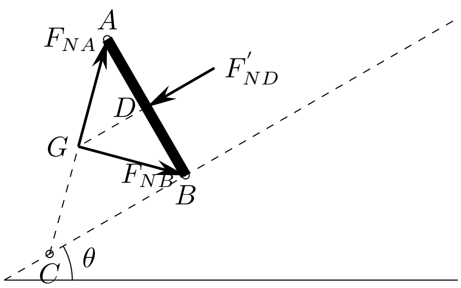
AC为二力构件，受力图：

Problem 1 continued on next page. . .



Part Three

取构件AB为分离体，$F_{ND}^{'}$与F_{NA}的作用线交于G点，由**三力平衡汇交**， B铰约束力一定过G点，受力图：



由$\sum F_y = 0$，即

$$F_{NA}\sin 45^\circ - F_{NB}\sin 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB}$$

由$\sum F_x = 0$，即

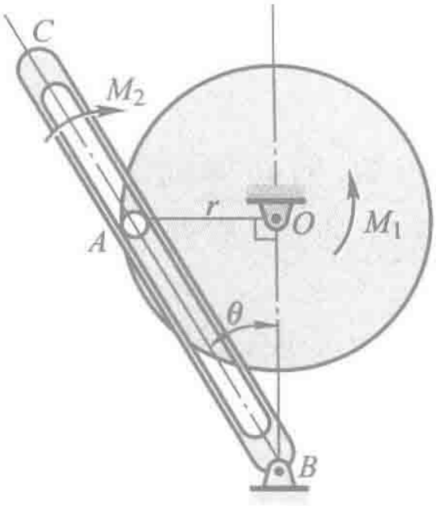
$$F_{NA}\cos 45^\circ + F_{NB}\cos 45^\circ - F_{ND}^{'} = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{ND}^{'} = 17.68\text{kN}$$

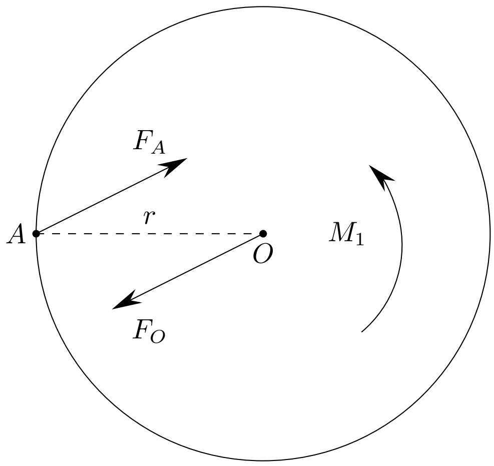
Problem 2

如图所示机构自重不计，圆轮上的销子A放置在摇杆BC上的光滑导槽内。圆轮上作用有一力偶M_1，其力偶矩为$2\text{kN}\cdot\text{m}$，$OA=r=0.5\text{m}$，图示位置时OA与OB垂直，$\theta=30°$，且系统平衡。求作用在摇杆上的力偶矩 M_2及铰链O，B处的约束力。



Solution

Part One
取圆轮为研究对象。
注意到圆轮受到A点的光滑接触约束，因此约束力F_A是垂直于摇杆的。
已知圆轮受到力偶M_1和力F_A、F_O的作用。因为**力偶只能由力偶来平衡**，所以力F_A和F_O大小相等、方向相反。



由平衡条件$\sum M_i=0$：

$$M_1-F_A r\sin\theta=0$$

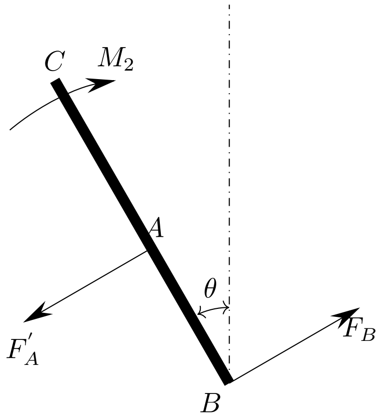
解得：

$$F_A=\frac{M_1}{r\sin 30°}=8\text{kN}$$

Part Two

取摇杆为研究对象，分析受力。

B点是光滑铰链约束，因为**力偶只能由力偶来平衡**，所以力F_B和$F_A^{'}$大小相等、方向相反。



由平衡条件$\sum M_i = 0$：

$$-M_2 + F_A^{'} \frac{r}{\sin\theta} = 0$$

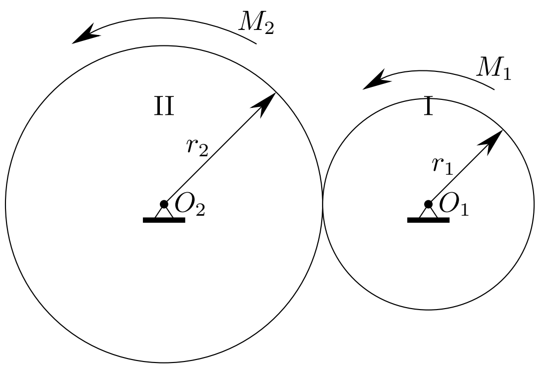
解得：

$$M_2 = 8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_O = F_B = F_A = 8\text{kN}$$

Problem 3

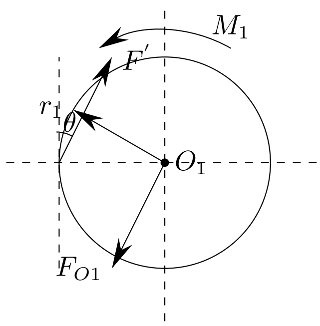
两齿轮的节圆半径分别为r_1、r_2，作用于轮I上的主动力偶的力偶矩为M_1，齿轮压力角为θ，不计两齿轮的重量。求是两齿轮维持匀速转动时齿轮II 的阻力偶之矩M_2与轴承O_1，O_2的约束力大小和方向。



Solution

压力角是指不计算摩擦力的情况下，受力方向和运动方向所夹的锐角。

Part One
对轮I 进行受力分析：



由平衡条件$\sum M_i = 0$：

$$M_1 - F_{O1} r_1 \cos\theta = 0$$

解得

$$F_{O1} = \frac{M_1}{r_1 \cos\theta}$$

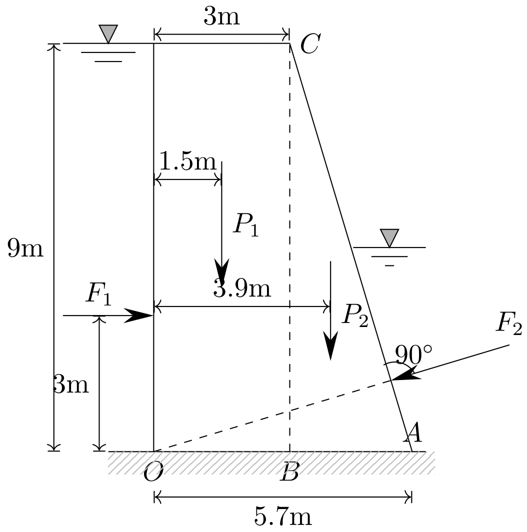
（方向如图）
Part Two
同理可得轴承O_2约束力

$$F_{O2} = \frac{M_2}{r_2 \cos\theta}$$

$$M_2 = \frac{r_2}{r_1} M_1$$

Problem 4

如图所示，梯形的水坝可以看作由左边的矩形部分和右边的三角形部分组合而成。左边部分的重力$P_1 = 450\text{kN}$，右边部分的重力$P_2 = 200\text{kN}$，上游水库给水坝的压力$F_1 = 300\text{kN}$，下游河流给水坝的压力$F_2 = 70\text{kN}$。各力的作用方向、位置如图所示。

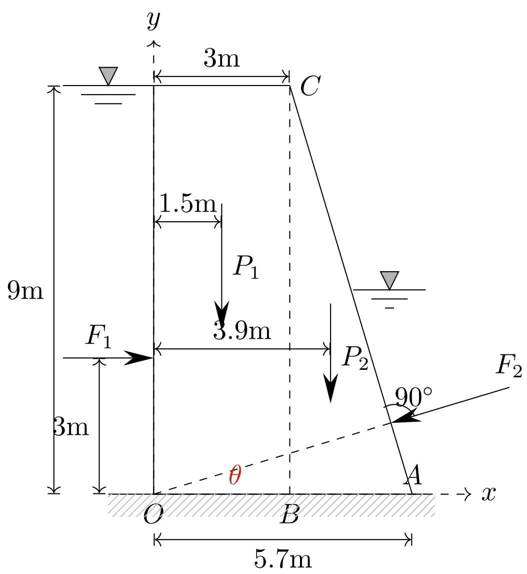


求

1. 力系的合力F_R
2. 合力与OA的交点到点O的距离x
3. 合力的作用线方程

Solution

Part One
建立如图所示的坐标系，向O点简化，求主矢和主矩。



先计算主矢。注意到只有力F_2的方向较为特殊，记F_2与水平方向夹角为θ，则

$$\theta = \angle ACB = \arctan \frac{AB}{BC} = \arctan 0.3 \approx 16.7^\circ$$

于是

$$F_{Rx}^{'} = \sum F_{ix} = F_1 - F_2 \cos\theta \approx 232.9\text{kN}$$

$$F_{Ry}^{'} = \sum F_{iy} = -P_1 - P_2 - F_2 \sin\theta \approx -670.1\text{kN}$$

所以

$$F_R^{'} = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2} \approx 709.1\text{kN}$$

于是$F_R^{'}$的方向余弦

$$\cos\left(\vec{F_R^{'}}, \vec{i}\right) = \frac{\sum F_{ix}}{F_R^{'}} \approx 0.3283$$

$$\cos\left(\vec{F_R^{'}}, \vec{j}\right) = \frac{\sum F_{iy}}{F_R^{'}} \approx -0.9446$$

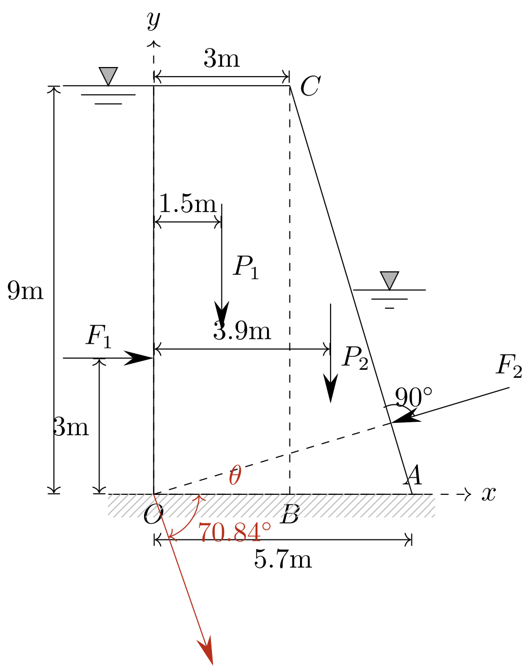
所以主矢与x轴正向夹角

$$\alpha \approx 70.84^\circ$$

主矢与y轴负向夹角

$$\beta \approx 19.16^\circ$$

在图中表示：

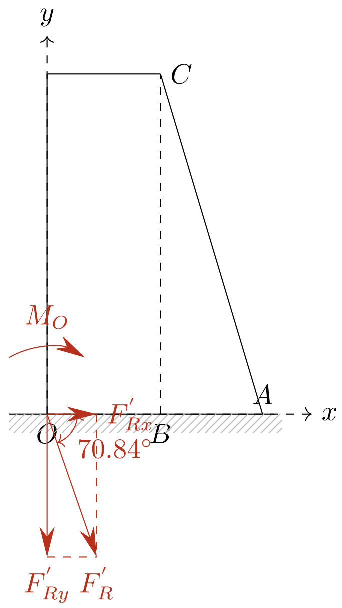


再计算主矩：

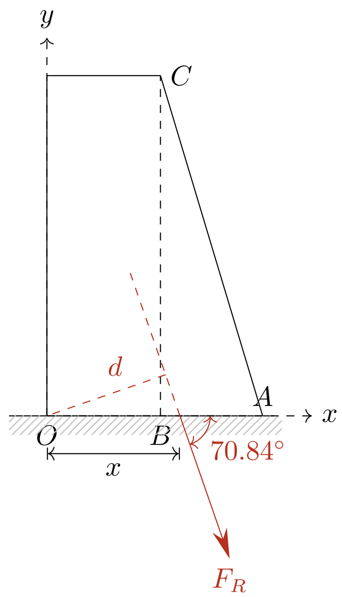
$$M_O = \sum M_O\left(\vec{F}\right) = -3\text{m} \cdot F_1 - 1.5\text{m} \cdot P_1 - 3.9\text{m} \cdot P_2 = -2355\text{kN} \cdot \text{m}$$

Part Two

向O点简化的主矢和主矩如图：



求合力及其作用线位置。合力F_R的大小和方向与主矢F'_R相同，其作用线位置x值依据合力矩定理求得：



由

$$M_O = F_R \cdot d$$

得

$$d \approx 2.3197\text{m}$$

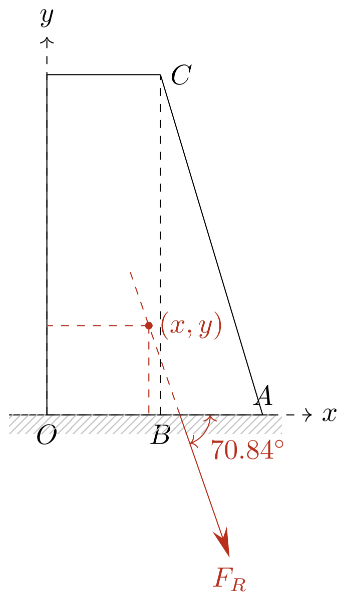
所以

$$x = \frac{d}{\sin 70.84°} \approx 3.514\text{m}$$

Part Three

由于**合力可以沿其作用线移动**，设合力作用线上任意一点的坐标为(x, y)，将合力作用于此点，则合力对坐标原点的力矩的解析表达式为

$$M_O = \sum M_O\left(\vec{F_R}\right) = x \cdot F'_{Ry} - y \cdot F'_{Rx}$$

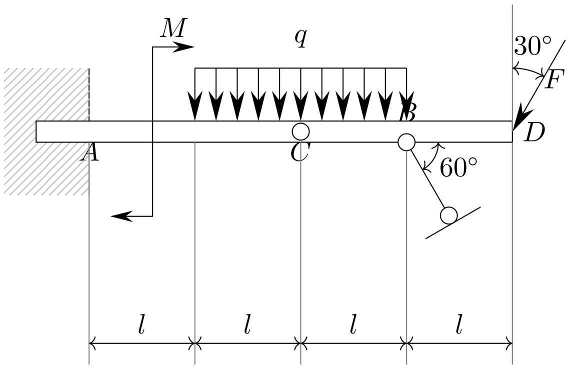


代入数据化简可得合力作用线方程为

$$670.1x + 232.9y - 2355 = 0$$

Problem 5

如图所示不计重力的组合梁，由AC和CD在C处铰接而成。已知$F = 20\text{kN}$，均布载荷$q = 10\text{kN/m}$，$M = 20\text{kN}\cdot\text{m}$，$l = 1\text{m}$，求固定端$A$与滚动支架$B$的约束力。

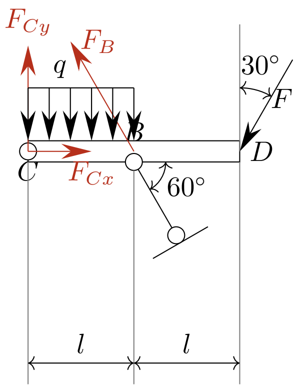


Solution

先画出系统所受约束力。平面任意力系，4个未知量，无法求解？C点铰链这个因素（条件）没有考虑。把这个因素考虑进去再分析，会发现这实质上仍是一个**静定**问题。

Part One

以CD为研究对象，画受力图。



由$\sum M_C = 0$得

$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F\cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

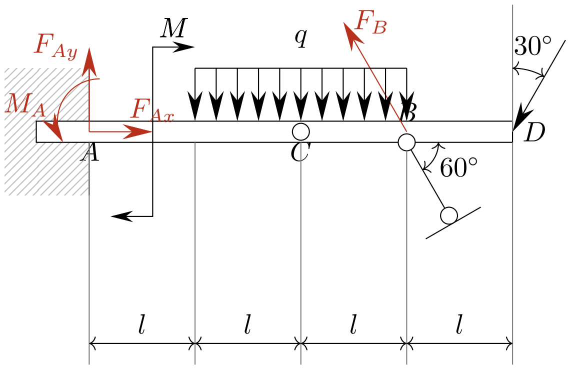
解得

$$F_B = 455.77\text{kN}$$

Part Two

取整体为研究对象，画受力图：

Problem 5 continued on next page. . .



由$\sum F_x = 0$，

$$F_{Ax} - F_B \cos 60° - F \sin 30° = 0$$

由$\sum F_y = 0$，

$$F_{Ay} + F_B \sin 60° - 2ql - F \cos 30° = 0$$

由$\sum M_A = 0$，

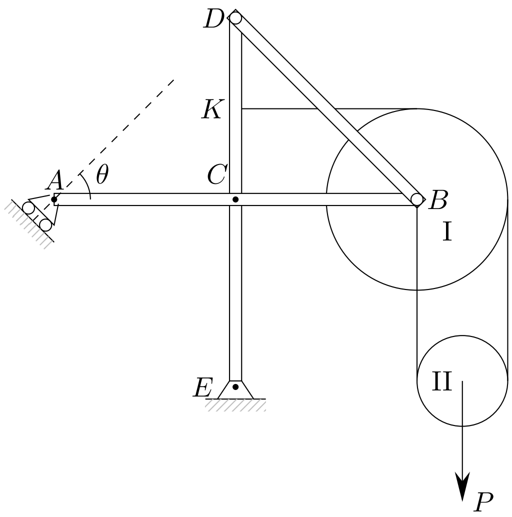
$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60° \cdot 3l - F \cos 30° \cdot 4l = 0$$

分别解得

$$M_A = 10.37\text{kN} \cdot \text{m},\ F_{Ax} = 32.89\text{kN},\ F_{Ay} = -2.32\text{kN}$$

Problem 6

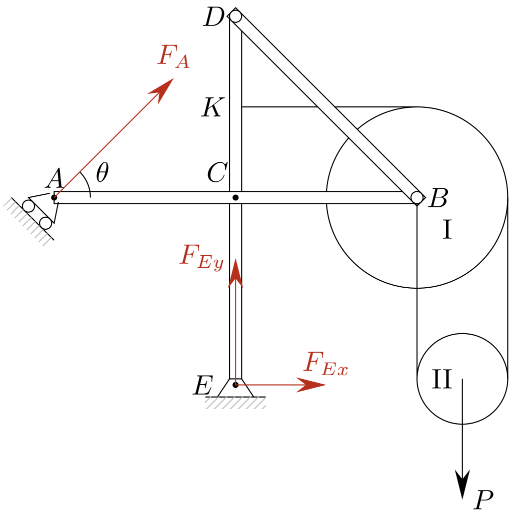
图示结构中，已知重物重力为P，$DC=CE=AC=CB=2l$，定滑轮半径为R，动滑轮半径为r，且$R=2r=l$，$\theta=45°$。试求A、E支座的约束力以及BD杆所受到的力。



Solution

Part One

取整体为研究对象，画出其受力图：



只有三个未知量，能够求解。

由$\sum M_E(F)=0$，

$$-2\left(F_A\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2l\right)-P\frac{5}{2}l=0$$

由$\sum F_x=0$，

$$F_A\cos 45°+F_{Ex}=0$$

Problem 6 continued on next page...

由$\sum F_y = 0$，

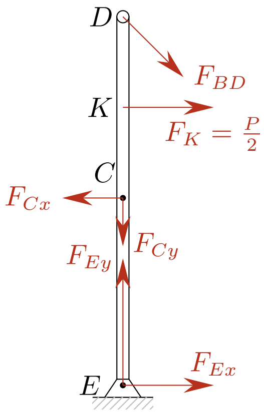
$$F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - P = 0$$

分别解得

$$F_A = -\frac{5\sqrt{2}}{8}P,\ F_{Ex} = \frac{5}{8}P,\ F_{Ey} = \frac{13}{8}P$$

Part Two

取DE杆为研究对象，画出其受力图：



注意到只求F_{BD}，因此由$\sum M_C(F) = 0$列平衡方程

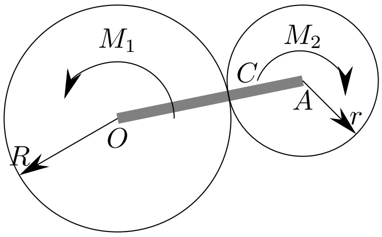
$$0 - F_{BD} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l - F_K \cdot l + F_{Ex} \cdot 2l = 0$$

解得

$$F_{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{8}P$$

Problem 7

半径为r的齿轮由曲柄OA带动，沿半径为R的固定齿轮滚动。已知曲柄OA上作用一力偶矩为M_1的力偶，在齿轮A上作用一力偶矩为M_2的力偶，其转向如图所示。齿轮的压力角为θ，若不计构件的自重和摩擦，求机构平衡时M_1和M_2的关系。



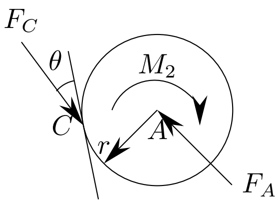
Solution

如果选整体为研究对象, 则由于支承处的约束力和齿轮啮合面C处的约束力未知，无法直接求出M_1与M_2之间的关系。又考虑到主动力系是平面力偶系，故用平面力偶系的平衡条件可方便地求得结果。

易错点：题目所说力偶M_1作用在曲柄OA上，而非齿轮上。因此，后需要对曲柄OA进行分析。

Part One

先取齿轮A为研究对象。由于齿轮A平衡, 所以啮合力F与约束力F必组成力偶，其受力图下：



列平衡方程

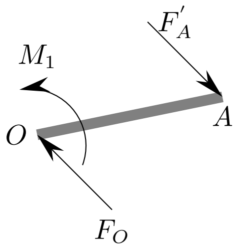
$$\sum M = 0,\ F_A r\cos\theta - M_2 = 0 \tag{1}$$

得

$$F_A = \frac{M_2}{r\cos\theta}$$

Part Two

再取曲柄OA为研究对象。A，O处的约束力F_A'，F_O组成力偶，受力图如下：



Problem 7 continued on next page. . .

列平衡方程如下：

$$\sum M = 0,\ -F_A^{'}(r+R)\cos\theta + M_1 = 0 \tag{2}$$

得

$$F_A^{'} = \frac{M_1}{(r+R)\cos\theta}$$

由公式(1)，(2)，可知

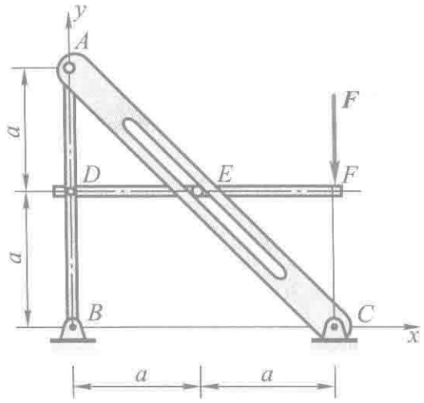
$$\frac{M_2}{r\cos\theta} = \frac{M_1}{(r+R)\cos\theta}$$

则

$$M_2 = \frac{r}{R+r}M_1$$

Problem 8

构架由不计自重的杆AB、AC和DF铰接而成，如图所示，杆DF上的销E套在杆AC的光滑槽内。在水平杆DF的一端作用一铅锤力F，求杆AB上铰链A、D和B所受的力。



Solution

Part One

以整体为研究对象。整个系统所受外力只有F、F_B和F_C，且F和F_C作用线均过点C。
对C点取矩：

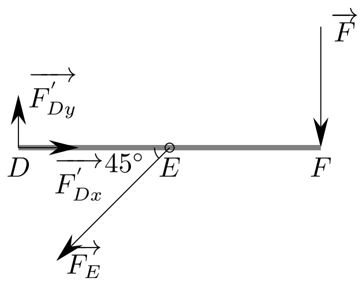
$$\sum M_C = 0,\ F_{By} \cdot 2a = 0$$

所以

$$F_{By} = 0$$

Part Two

以杆DF为研究对象。因为杆DF上的销E套在杆AC的光滑槽内，所以杆AC对杆DF的力与杆AC垂直。受力分析如图：



对D点取矩，有

$$F_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a + F \cdot 2a = 0$$

解得

Problem 8 continued on next page. . .

$$F_E = -2\sqrt{2}F$$

又由

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0$$

有

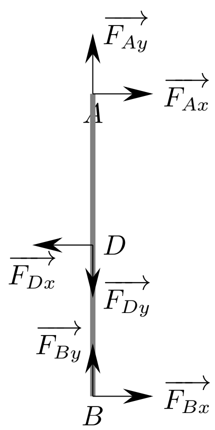
$$F'_{Dx} - F_E \sin 45^\circ = 0$$

$$F'_{Dy} - F - F_E \cos 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{Dx} = -2F,\ F_{Dy} = -F$$

Part Three
以杆AB为研究对象。受力分析如图：



对B点取矩，有

$$F_{Dx} \cdot a - F_{Ax} \cdot 2a = 0$$

解得

$$F_{Ax} = -F$$

又由

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0$$

有

$$F_{Dx} + F_{Bx} + F_{Ax} = 0$$

$$F_{Dy} - F_{By} - F_{Ay} = 0$$

解得

$$F_{Ay} = -F,\ F_{Bx} = -F$$

综上所述，

$$F_{Ax} = -F,\ F_{Ay} = -F$$

$$F_{Bx} = -F,\ F_{By} = 0$$

$$F_{Dx} = -2F,\ F_{Dy} = -F$$