University Physics: The Law of Conservation of Motion

Date: March 12, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 质点和质点系的动量定理 **1**
1.1 冲量、质点的动量定理 . . . 1
1.1.1 动量 . . . 1
1.1.2 冲量 . . . 1
1.1.3 动量定理 . . . 2
1.2 质点系的动量定理 . . . 2

2 动量守恒定律、动能定理 **2**
2.1 动量守恒定律 . . . 2
2.2 功 . . . 3
2.2.1 恒力作用下的功 . . . 3
2.2.2 变力作用下的功 . . . 3
2.3 功率 . . . 4
2.4 动能定理 . . . 4
2.4.1 质点的动能定理 . . . 4
2.4.2 质点系的动能定理 . . . 5

3 保守力、势能、成对力的功 **6**
3.1 保守力 . . . 6
3.1.1 万有引力 . . . 6
3.1.2 弹性力做功 . . . 6
3.1.3 保守力与非保守力的定义 . . . 6
3.2 势能 . . . 7
3.2.1 定义 . . . 7
3.2.2 保守力做功 . . . 7
3.2.3 保守力做功势能的计算 . . . 7
3.2.4 势能曲线 . . . 7
3.2.5 由势能求表达式 . . . 8
3.3 成对的力的功 . . . 8

4 功能原理、机械能守恒定律 **9**
4.1 质点系功能原理 . . . 9
4.2 机械能守恒定律 . . . 9
4.3 能量守恒定律 . . . 10
4.4 动量与能量的比较 . . . 10

5 碰撞、碰撞定律、质心运动定律 **10**
5.1 碰撞 . . . 10
5.2 碰撞定律 . . . 10
5.3 碰撞的分类 . . . 11
5.3.1 完全弹性碰撞 . . . 11

5.3.2 完全非弹性碰撞 11
5.3.3 非完全弹性碰撞 12
5.3.4 斜碰撞 12
5.4 质心 12
5.4.1 定义 12
5.4.2 质心位置 12
5.4.3 质心速度 13
5.4.4 质心加速度 13
5.5 质心运动定律 13

6 例题 **13**
6.1 Problem 1 13
6.2 Problem 2 14

守恒量：对于物体系统内发生的各种过程，如果某物理量始终保持不变，该物理量就叫做守恒量。

守恒定律：由宏观现象总结出来的最深刻、最简洁的自然规律。（动量守恒定律、机械能守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律等）

1 质点和质点系的动量定理

力的**累积**效应：

1. $\overrightarrow{F}(t)$对t累计→ $\overrightarrow{I}$, $\Delta\overrightarrow{p}$
2. $\overrightarrow{F}$对$\overrightarrow{t}$累计→ W, ΔE

1.1 冲量、质点的动量定理

1.1.1 动量

定义动量

$$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v} \tag{1.1}$$

故

$$\overrightarrow{F}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(m\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

即

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})$$

两边同时积分：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\overrightarrow{p}_2-\overrightarrow{p}_1=m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1$$

1.1.2 冲量

定义冲量

$$\overrightarrow{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

1.1.3 动量定理

在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量
微分形式：

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}(m\overrightarrow{v}) \tag{1.4}$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1 \tag{1.5}$$

分量形式：

$$\begin{cases} I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\,\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x} \\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\,\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y} \\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\,\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z} \end{cases} \tag{1.6}$$

可知，某方向受到冲量，该方向上的动量就增加。

1.2 质点系的动量定理

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{v}_{i0}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p}_0 \tag{1.7}$$

或

$$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}$$

1. 若$\overrightarrow{F}$为恒力，则$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{F}\Delta t$
2. 若$\overrightarrow{F}$为变力，则$\overrightarrow{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\overline{\overrightarrow{F}}(t_2-t_1)$

动量定理常应用于碰撞问题。

$$\overline{\overrightarrow{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1}{t_2-t_1}$$

2 动量守恒定律、动能定理

2.1 动量守恒定律

由质点系动量定理：

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} \, \mathrm{d}t = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$$

若质点系所受的合外力$\vec{F}^{\text{ex}} = \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$
则系统的总动量不变。——动量守恒定律

1. 系统的总动量不变，但系统内任意物体的动量是可以变的；
2. 守恒条件：合外力为零。
   $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$
   当$\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$，可近似地认为系统总动量守恒。
3. 若$\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} \neq 0$，但满足$F_x^{\text{ex}} = 0$，则有$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x$ 即

$$\begin{cases} F_x^{\text{ex}} = 0, & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, & p_y = \sum_i^i m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = C_z \end{cases} \tag{2.1}$$

4. 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。

2.2 功

物体在力$\vec{F}$的作用下移动$\Delta\vec{r}$ →做功W

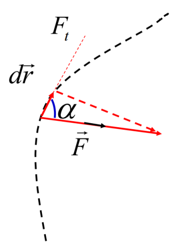
2.2.1 恒力作用下的功

$$\begin{aligned} W &= F\cos\alpha \cdot |\Delta\vec{r}| \\ &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 变力作用下的功

元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$、元路程 $\mathrm{d}s$
则元功 $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$
积分：

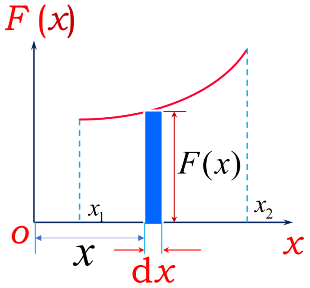
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\alpha\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$



1. 功的正负

$$\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, & \mathrm{d}W > 0 \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ, & \mathrm{d}W < 0 \\ \alpha = 90^\circ, \text{即} \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}, & \mathrm{d}W = 0 \end{cases}$$

2. 做功的图示



3. 功是一个过程量，与路径有关。

4. 合力的功，等于各分力的功的**代数和**

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k}$$

则

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z)$$

又有$W_x = \int_{x_1}^{x_B} F_x\,\mathrm{d}x$、$W_y = \int_{y_1}^{y_B} F_y\,\mathrm{d}y$、 $W_z = \int_{z_1}^{z_B} F_z\,\mathrm{d}z$。
于是

$$W = W_x + W_y + W_z$$

2.3 功率

平均功率$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
瞬时功率

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{2.4}$$

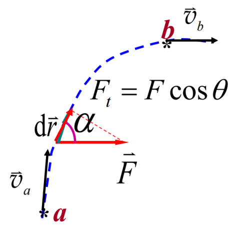
即

$$P = Fv\cos\alpha \tag{2.5}$$

2.4 动能定理

2.4.1 质点的动能定理

$$W = \int \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$
$$= \int F_{\mathrm{t}} |\, \mathrm{d}\overrightarrow{r}| = \int F_{\mathrm{t}}\, \mathrm{d}s$$



而

$$F_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mv\, \mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1} \tag{2.6}$$

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。——质点的动能定理

1. 功是**过程量**，动能是**状态量**；

2. 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同。

2.4.2 质点系的动能定理

质点系：由有限个或无限个质点组成的系统。（可以是固体也可以是液体，它概括了力学中最普遍的研究对象）

内力和外力：质点系以外的物体作用于质点系内各质点的力称为外力，质点系内各质点之间的相互作用力称为内力，外力和内力的区分完全洪定于质点系（研究对象）的选取。

质点系内力的功：一切内力矢量和恒等于零。但一般情烷下，所有内力作功的总和并不为零。例如，两个彼此相互吸引的物体，移动一段位移，都作正功。

质点系的动能定理

由质点动能定理$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

得

$$W_e + W_i = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2\right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \tag{2.7}$$

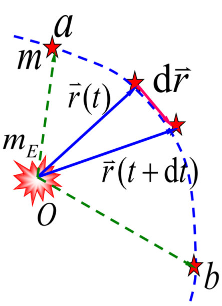
意义：合外力所做的功等于系统动能的增量。

3 保守力、势能、成对力的功

3.1 保守力

3.1.1 万有引力

m_E对m的万有引力为



$$\vec{F} = -G\frac{m_E m}{r^2}\vec{e}_r$$

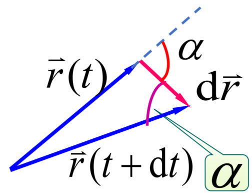
m移动 $\mathrm{d}\vec{r}$时，$\vec{F}$做元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{m_E m}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

m从A到B时，$\vec{F}$做功为

$$W = \int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -G\frac{m_E m}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

其中，$\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r} = |\vec{e}_r|\cdot|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha = \mathrm{d}r$
即



$$W = \int_{r_A}^{r_B}\left(-G\frac{m_E m}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

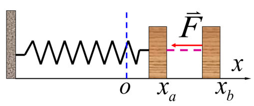
于是

$$W = Gm_E m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{3.1}$$

做功特点：做功大小只与物体的始末位置有关，与路径无关。

3.1.2 弹性力做功

弹性力$\vec{F} = -kx\vec{i}$，则元功



$$\mathrm{d}W = -kx\,\mathrm{d}x$$

于是

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \tag{3.2}$$

做功特点：做功大小只与物体的始末位置有关，与路径无关。

3.1.3 保守力与非保守力的定义

保守力：作功与路径无关，仅决定于始、末位置的力。
质点沿任意闭合路径运动一周时，保守力对它作功为零。
非保守力：所作的功与路径有关的力。（如摩擦力）

3.2 势能

3.2.1 定义

因相对位置而具有的作功本领称为势能或位能（因有速度而具有的作功本领称为动能）。势能与质点的位置有关。

如引力势能

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{m_E m}{r}$$

如弹性势能

$$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2$$

3.2.2 保守力做功

保守力做的功等于势能的减少，即

$$W=-\left(E_{\mathrm{p}2}-E_{\mathrm{p}1}\right)=-\Delta E_\mathrm{p} \tag{3.3}$$

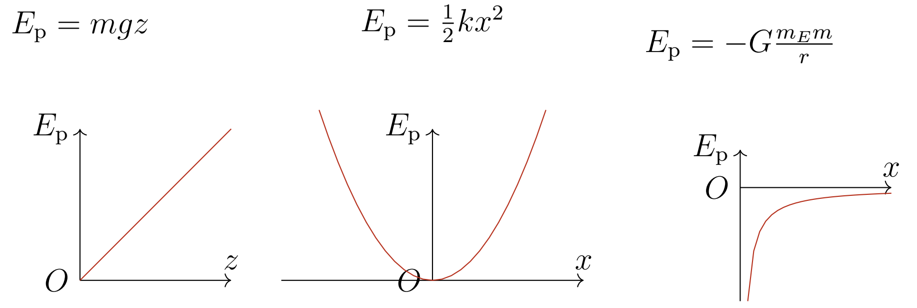
3.2.3 保守力做功势能的计算

令$E_{\mathrm{p}0}=0$，则

$$E_\mathrm{p}(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p}0}=0}\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} \tag{3.4}$$

1. 势能是**状态的函数**，$E_\mathrm{p}=E_\mathrm{p}(x,y,z)$；
2. 势能具有**相对性**，势能大小与势能零点的选取有关；
3. 势能是**属于系统**的；
4. **势能差**与势能零点的选取无关。

3.2.4 势能曲线



把势能和相对位置的关系绘成曲线，便得到势能曲线。

通过势能曲线，可以显示出系统总机械能，动能和势能间的关系 $E = E_k + E_p$，由 $E_\mathrm{k} \geq 0$ ，可以根据曲线的形状讨论物体的运动。

3.2.5 由势能求表达式

可以根据势能$E_\mathrm{p}\left(x,y,z\right)$的情况，判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向：

$$\mathrm{d}W = F_x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}E_p$$

则

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \tag{3.5}$$

如果势能是位置(x,y,z)的多元函数，则

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \tag{3.6}$$

3.3 成对的力的功

力总是成对的，无论是保守力还是非保守力。

设质量为m_1和m_2的两个物体分别受到 F_1 和 F_2 的力，且 $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2$在 $\mathrm{d}t$时间内位移为 $\mathrm{d}r_1$ 和 $\mathrm{d}r_2$ ，质点 2 相对于质点 1 的相对位移 $\mathrm{d}\overrightarrow{r}'$有 $\mathrm{d}\overrightarrow{r}_2 = d\overrightarrow{r}_1 + \mathrm{d}r'$ 则元功为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_1 &= \overrightarrow{F}_1\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_1\\ \mathrm{d}W_2 &= \overrightarrow{F}_2\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_2\end{aligned}$$

这一对力所作元功之和为：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}W = \overrightarrow{F}_1\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{F}_1\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2\cdot\left(d\overrightarrow{r}_1 + d\overrightarrow{r}'\right)\\ &= \left(-\overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_2\right)\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{F}_2\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}'\\ &= \overrightarrow{F}_2\cdot\,\mathrm{d}\overrightarrow{r}'\end{aligned}$$

1. 成对力的功只与作用力和相对位移有关；
2. 成对力的总功具有与参考系选择无关的不变性质。
   为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，再计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。
3. 在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

4 功能原理、机械能守恒定律

4.1 质点系功能原理

系统的机械能：动能与势能的综合称为机械能，即

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}$$

内力的功可分为：保守内力的功和非保守内力功

$$W^\mathrm{in} = \sum_i W_i^\mathrm{in} = W_\mathrm{c}^\mathrm{in} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in}$$

由势能的定义，保守内力的功总等于系统势能的减少：

$$W_\mathrm{c}^\mathrm{in} = -\Delta E_\mathrm{p}$$

系统的功能原理
（由质点系的动能定理）

$$W^\mathrm{ex} + W^\mathrm{in} = W^\mathrm{ex} + W_\mathrm{c}^\mathrm{in} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in} = W^\mathrm{ex} - \Delta E_\mathrm{p} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in} = \Delta E_\mathrm{k}$$

于是，

$$\Delta E = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = W^\mathrm{ex} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in} \tag{4.1}$$

在选定的质点系内，在任一过程中，质点系总机械能的增量等于**所有外力**的功与**非保守内力**的功的代数和。

非保守内力的功将导致机械能与其他形式的能量转换。

4.2 机械能守恒定律

由功能原理：$\Delta E = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = W^\mathrm{ex} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in}$。
如果$W^\mathrm{ex} + W_\mathrm{nc}^\mathrm{in} = 0$，则

$$\Delta E = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = 0$$

即，如是系统内只有保守内力做功，其他内力和一切外力都不做功，或元功之和为零，则系统内各物体的动能和势能可以相互转换，但总机械能保持不变。

1. 质点系的机械能守恒的条件是：在一个过程中，既没有外力做功，也没有非保守内力（如摩擦力、爆炸力、流体的黏性阻力等耗散力）做功，或者外力和非保守内力做的总功为零。

2. 在满足守恒条件时，质点系的总机械能可以在动能和系统势能之间转化，也可以在系统内各物体之间转移，但在转化和转移过程中保特总机械能不变。

4.3 能量守恒定律

对于一个不受外界影响的封闭系统（有时也称为孤立系统），系统内各种不同形式的能量可以互相转化，也可以从系统的一部分转移到另一部分，但不论系统内发生什么过程，能量既不会消失也不会产生，系统的总能量恒定不变。这就是能量守恒定律 (law of conservation of energy)。

4.4 动量与能量的比较

物理量	**动量(momentum)**	**能量(kinetic energy)**
表达式	$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
单位	$\mathrm{kg\cdot m/s}$	J
性质	矢量	标量
关系	$\dfrac{p^2}{2m} = E_\mathrm{k}$	
变化量	Δp由力的冲量决定	ΔE_k由力的功决定

另外，Δp与惯性系的选择无关，ΔE_k随惯性系的不同而不同。

5 碰撞、碰撞定律、质心运动定律

5.1 碰撞

定义
两个或两个以上的物体相遇，相遇时物体之间的相互作用，仅持续极为短暂的时间。
特点

1. 作用时间极短；
2. 作用力变化极快；
3. 作用力峰值极大；
4. 过程中物体发生形变；
5. 可认为碰撞过程中只受内力（$\overrightarrow{F}^{\mathrm{ex}} \ll \overrightarrow{F}^{\mathrm{in}}$），故遵守动量守恒定律（$\sum_i \overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{C}$）。

5.2 碰撞定律

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \tag{5.1}$$

即

$$e=\frac{\text{分离速度}}{\text{接近速度}}$$

（e称恢复系数，由材料性质决定。）

5.3 碰撞的分类

5.3.1 完全弹性碰撞

恢复系数$e=1$，$v_2-v_1=v_{10}-v_{20}$。

碰撞后形变能完全恢复，没有机械能的损失，系统碰撞前后机械能守恒。

动量守恒，机械能守恒。

对于**完全弹性对心碰撞**：

$$\begin{cases} m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1v_{10}^2+\dfrac{1}{2}m_2v_{20}^2=\dfrac{1}{2}m_1v_1^3+\dfrac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

联立方程解得

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}+\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}v_{20} \\ v_2=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}+\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{20} \end{cases} \tag{5.2}$$

5.3.2 完全非弹性碰撞

恢复系数$e=0$，$v_2=v_1=v$。

碰撞后二者没有分开，并以共同的速度一起运动。物体碰撞后已经完全不可能恢复形变。

动量守恒，机械能不守恒。

对于**完全非弹性对心碰撞**：

由

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=\left(m_1+m_2\right)v$$

解得

$$v=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2} \tag{5.3}$$

损失能量

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2-\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v^2 \tag{5.4}$$

5.3.3 非完全弹性碰撞

恢复系数$0 < e < 1$，$v_2 = v_1 = e\left(v_{10} - v_{20}\right)$。
碰撞后形变不能完全恢复，一部分机械能将被转变为其他形式的能量（如热能）。
动量守恒，机械能不守恒。

5.3.4 斜碰撞

碰撞前与碰撞后的速度不在一条直线上。

例如，一光滑球与另外静止的光滑球相碰。如果两者均为弹性球，且碰后两者的运动方向垂直，则两小球质量必然相等

5.4 质心

5.4.1 定义

在研究质点系统问题中，与质点系统质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布中心。

5.4.2 质心位置

$$\overrightarrow{r}_{\mathrm{C}} = \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \tag{5.5}$$

即

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

则质量连续分布的系统的质心位置

$$\overrightarrow{r}_C = \int \overrightarrow{r}\ \mathrm{d}m/M$$

即

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int x\ \mathrm{d}m}{M} \\ y_c = \frac{\int y\ \mathrm{d}m}{M} \\ z_c = \frac{\int z\ \mathrm{d}m}{M} \end{cases}$$

注意

1. 质心不同于重心，物体体积不太大时，两者重和；物体远离地球时 受重力，"重心"失去意义，"质心"仍在。
2. 当外力的作用线通过质心时，物体只作平动，没有转动，就好像物体的质量都集中在质心这一点上。

5.4.3 质心速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \tag{5.6}$$

5.4.4 质心加速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \tag{5.7}$$

5.5 质心运动定律

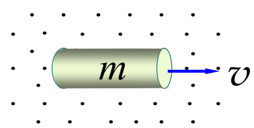
质心的加速度与质点系所受外力的矢量和成正比，与质点系的总质量成反比，质心的加速度与内力无关。

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M} \tag{5.8}$$

6 例题

6.1 Problem 1

在宇宙中有密度为ρ的尘埃,这些尘埃相对惯性参考系是静止的。有一质量为m_0的宇宙飞船以初速度v_0 穿过宇宙尘埃，由于尘埃粘贴到飞船上，致使飞船的速度发生改变。求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系。 (设想飞船的外形是截面积为S的圆柱体)



Solution

尘埃与飞船作完全非弹性碰撞，把它们作为一个系统，则动量守恒：

$$m_0 v_0 + (m - m_0) \times 0 = mv$$

解得

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所有与飞船迎面相撞的尘埃都会粘贴到飞船上。考查 $\mathrm{d}t$时间内与飞船迎面相撞的尘埃：

$$\mathrm{d}m = \rho S v \, \mathrm{d}t$$

又因为

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所以

$$\mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\,\mathrm{d}v = \rho S v\,\mathrm{d}t$$

由

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0}\int_0^t dt$$

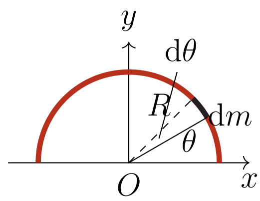
得

$$v = v_0\sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}}$$

6.2 Problem 2

已知一圆环半径为R，质量为M，求它的质心位置。

Solution



建坐标系如图，取一小段长度 $\mathrm{d}l$则其质量为 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$。
又 $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$，故 $\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R}R\,\mathrm{d}\theta$
而$x = R\cos\theta$，$y = R\sin\theta$
故

$$y_c = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta \frac{M}{\pi R}R\,\mathrm{d}\theta}{M} = \frac{2R}{\pi}$$

由对称性可知，

$$x_c = 0$$