Advanced Mathematics: Vector Algebra and Spatial Geometry

日期： 2025 年 2 月 26 日

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 向量积、混合积

1.1 向量积

1.1.1 定义

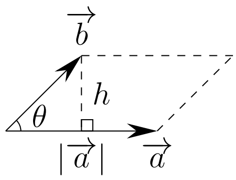
设有向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，其夹角为θ。定义新向量，记作$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，如下：

- 大小：$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta$；
- 方向：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$与$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 都垂直，其指向按右手螺旋定则，由$\overrightarrow{a}$沿着不大于π 的角度转向$\overrightarrow{b}$确定。

1.1.2 性质

1. $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$， $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$
2. 重要结论：
   $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$
   对非零向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，有$\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}\leftrightarrow\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$
3. 几何意义（向量积的模）：

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|&=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta\\&=S_{\square}\end{aligned}$$



即$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$表示：以$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积。

1.1.3 运算规律

1. 反交换律：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$
2. 分配律：$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$
3. 结合律：$(\lambda\overrightarrow{a})=\lambda\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\times\left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$

1.1.4 向量积的坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=\left(x_1\overrightarrow{i}+y_1\overrightarrow{j}+z_1\overrightarrow{k}\right)\times\left(x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}+z_2\overrightarrow{k}\right)\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\cdot\overrightarrow{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot\overrightarrow{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\cdot\overrightarrow{k}\\&=(y_1z_2-z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2\ x_1y_2-y_1x_2)\\&=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

同理，

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}$$

1.2 混合积

1.2.1 定义

设有向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，称数$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}$为向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$的混合积，记作$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]$，即

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}$$

1.2.2 坐标表示

设有向量$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2,z_2)$、$\overrightarrow{c}=(x_3,y_3,z_3)$，则有

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$$

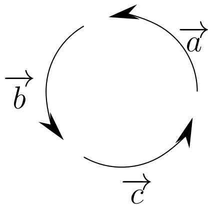
1.2.3 几何意义

$\left|\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]\right|$表示以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$为相邻三条棱的平行六面体的体积。因此，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$共线$\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=0$。

1.2.4 运算规律

$$\begin{aligned}&\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]=\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]=\left[\overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\right]\\&=-\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{b}\right]=-\left[\overrightarrow{c}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\right]=-\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\right]\end{aligned}$$

即按照下图沿同一方向（顺时针或逆时针）旋转的混合积组合的值是相等的。



1.2.5 例题

已知$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=2$，求$\left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})$。

Solution

$$\begin{aligned}&\left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\\&=\left[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\end{aligned}$$

由$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{b}=0$，故

$$\begin{aligned}&\left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\\&=\left[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\\&=\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]+[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}]+\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{c}\right]+\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a}\right]+[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}]+\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]\end{aligned}$$

显然，当混合积中只有不同的两个向量时（可认为这三个向量共面），该混合积值为0。于是

$$\begin{aligned}&\left[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\right]\times(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})\\&=\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]+\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]\end{aligned}$$

由于

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

而

$$\left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right] = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

所以

$$\left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\ \overrightarrow{a}\right]$$

于是

$$\left[(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right] \times (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) = 2\ \left[\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\right]$$

2 平面及其方程

2.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

2.1.1 曲面方程

设有曲面$S : F\left(x, y, z\right) = 0$，满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.1.2 空间曲线方程

设有曲面$S_1 : F_1\left(x, y, z\right) = 0$和设有曲面$S_2 : F_2\left(x, y, z\right) = 0$，联立两方程：

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, z\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z\right) = 0. \end{cases}$$

满足

1. 曲面S上任一点都满足方程；
2. 不在曲面S上的点的坐标不满足方程。

2.2 平面的点法式方程

设平面Π上有一点$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，其法向量为$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$。（注意：平面的法向量不唯一。）

设$M\left(x,y,z\right)$，则$\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{n}$，则$\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{n}=0$，而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$。于是

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \tag{2.1}$$

即为平面Π的点法式方程。

2.3 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2.2}$$

即为平面的一般方程。

任一三元一次方程的图形总是一个平面，方程2.2中x、y、z的系数就是该平面的一个法向量$\overrightarrow{n}$的坐标，即$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$。

特殊情况：

1. $D=0\Leftrightarrow$平面通过原点；
2. $A=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）x轴；
   $B=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）y轴；
   $C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或包含）z轴；
3. $A=B=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）xOy平面；
   $B=C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）yOz平面；
   $A=C=0\Leftrightarrow$平面平行于（或重合于）xOz平面；
4. $A=D=0\Leftrightarrow$平面包含x轴；
   $B=D=0\Leftrightarrow$平面包含y轴；
   $C=D=0\Leftrightarrow$平面包含z轴；
5. $A=B=D=0\Leftrightarrow z=0$（$xOy$平面）；
   $B=C=D=0\Leftrightarrow x=0$（$yOz$平面）；
   $A=C=D=0\Leftrightarrow y=0$（$xOz$平面）；

2.4 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{2.3}$$

即为平面的截距式方程。方程2.3中a，b，c即分别为平面在x，y，z 轴上的截距。

2.5 两平面的夹角

2.5.1 定义

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角或直角）称为两平面的夹角。因此$\cos\theta = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)\right|$。

设平面$\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$的法线向量依次为$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$， $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$。按两向量夹角的余弦的坐标表示式平面$\mathit{\Pi_1}$ 和$\mathit{\Pi_2}$的夹角θ可由

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{2.4}$$

来确定。

2.5.2 结论

1. $\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$相互垂直相当于$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
2. $\mathit{\Pi_1}$和$\mathit{\Pi_2}$相互平行相当于$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

2.6 点到平面的距离

设点$P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外一点，则$P_0$到该平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.5}$$

设有两平行平面$\mathit{\Pi_1} : Ax + By + Cz + D_1 = 0$和$\mathit{\Pi_1} : Ax + By + Cz + D_2 = 0$，则两平面间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.6}$$