Advanced Mathematics: Multiple Integral

Wuhan University

Lai Wei

April 8, 2025

目录

1 二重积分的概念与性质

1.1 二重积分的概念

1.1.1 定义

设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数。将闭区域D任意分成n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积。在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots n)$，并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区域$D$的分法及点$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关，那么称此极限为函数$f(x,y)$ 在闭区域D上的二重积分，记作$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \tag{1.1}$$

其中$f(x,y)$叫做被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$叫做被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$叫做面积元素， x与y叫做积分变量，D叫做积分区域，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

在二重积分的定义中对闭区域D的划分是任意的，如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分D，那么除了包含边界点的一些小闭区域外，其余的小闭区域都是矩形闭区域。设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$的边长为Δx_j；和Δy_k，则$\Delta\sigma_i=\Delta x_j\cdot\Delta y_k$.因此在直角坐标系中，有时也把面积元素$\mathrm{d}\sigma$记作$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，而把二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$叫做直角坐标系中的面积元素。

1.1.2 二重积分的几何意义

一般地，如果$f(x,y)\geq 0$，被积函数$f(x,y)$可以解释为曲顶柱体的顶在点(x,y)处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积。如果$f(x,y)$是负的，柱体就在xOy面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的。如果$f(x,y)$在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么，$f(x,y)$在D上的二重积分就等于xOy面上方的柱体体积减去xOy面下方的柱体体积所得之差。

1.2 二重积分的性质

1.2.1 性质1

设α和β为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

1.2.2 性质2

如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分何区域，那么在D的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和。

例如D分为两个闭区域D_1与D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有**可加性**。

1.2.3 性质3

如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1\cdot\ \mathrm{d}\sigma = \iint_D\ \mathrm{d}\sigma.$$

这性质的几何意义是很明显的，因为高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。

1.2.4 性质4

如果在D上，$f(x,y) \le g(x,y)$ ，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|,$$

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

1.2.5 性质5

设M和m分别是$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式。因为$m \le f(x,y) \le M$，所以由性质4有

$$\iint_D m \, \mathrm{d}\sigma \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D M \, \mathrm{d}\sigma$$

再应用性质1和性质3，便得此估值不等式。

1.2.6 性质6

（二重积分的中值定理）设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$