University Physics: Rigid Body Mechanics

Date: March 14, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 刚体的定轴转动

1.1 刚体

1.1.1 定义

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组。）

1. 刚体是理想模型；
2. 刚体模型是为简化研究问题而引进的。

1.1.2 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。（各点的状态一样）

刚体上任意一点的运动可以代表整个刚体的运动。（刚体平动的运动规律和与质点的运动规律相同）

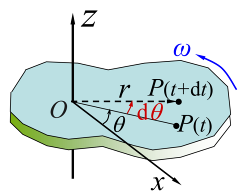
1.2 转动

分为**定轴转动**和**非定轴转动**。

刚体的一般运动可以看作"随质心的平动"和"绕质心的转动"的合成。

1.2.1 刚体转动的角速度和角加速度

角坐标$\theta = \theta(t)$，沿逆时针方向转动为$\theta > 0$，角位移$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$。角速度矢量



$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

方向按右手螺旋法则确定。

1.2.2 刚体定轴转动

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正、负来表示。

角加速度

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

定轴转动的特点：

1. 每一质点均做圆周运动，与轴垂直的圆面为转动平面；
2. 任意质点运动$\Delta\theta$, ω, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$相同，但$\vec{v}$, $\vec{a}$不相同；

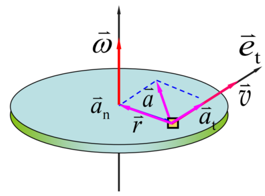
3. 运动描述仅需一个坐标。

匀变速转动公式：

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

角量与线量的关系：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



$$\overrightarrow{v_i} = r_i\omega\overrightarrow{e}_t$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_\perp = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2 t}$$

于是

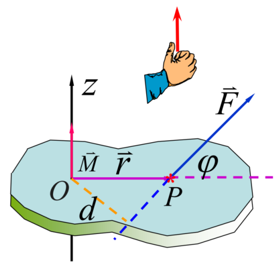
$$\overrightarrow{a} = r\alpha\overrightarrow{e}_\mathrm{t} + r\omega^2\overrightarrow{e}_\mathrm{n} \tag{1.2}$$

1.3 力矩

1.3.1 定义

用来描述力对刚体的转动的作用的物理量。

刚体绕Oz轴旋转，力作用在刚体上点P，且在转动平面内，为由点O到力的作用点P的径矢。$\overrightarrow{F}$对转轴z的力矩的定义：



$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{1.3}$$

$$M = Fr\sin\theta = Fd \quad (d\text{为力臂})$$

1.3.2 讨论

1. 若力$\overrightarrow{F}$不在转动平面内，可将力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量；
2. 合力矩等于各分力矩的矢量和；
3. 刚体内作用力和反作用力的力矩相互抵消；
4. 力矩的单位只能用牛顿 · 米，而不能用焦耳。

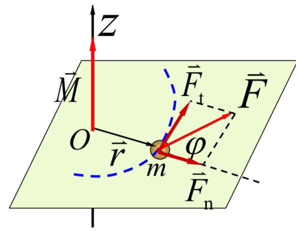
2 转动定律、转动惯量

2.1 质点的转动惯量

单个质点m与转轴刚性连接

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$

则



$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha \tag{2.1}$$

定义

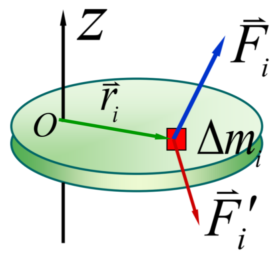
$$J = mr^2 \tag{2.2}$$

为质点m对O点的“转动惯量”。
于是

$$M = J\alpha \tag{2.3}$$

2.2 刚体的转动惯量

质量元受外力$\vec{F}_{\mathrm{e}j}$，内力$\vec{F}_{\mathrm{i}j}$
则



$$M_{\mathrm{e}j} + M_{\mathrm{i}j} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

因为$M_{ij} = -M_{ji}$，所以

$$\sum_j M_{ij} = 0$$

于是

$$\sum_j M_{\mathrm{e}j} = \left(\sum \Delta m_j r_j^2\right)\alpha \tag{2.4}$$

定义

$$J = \sum_j \Delta m_j r_j^2 \tag{2.5}$$

为刚体对O点的“转动惯量”。
积分形式即为

$$J = \int r^2 \,\mathrm{d}m \tag{2.6}$$

2.3 转动定律

$$M = J\alpha \tag{2.7}$$

2.3.1 讨论

1. 若$M = 0$，则$\alpha = 0$，即ω不变；
2. α与$\frac{M}{J}$成反比；
3. $M = J\alpha = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$；
4. 转动惯量的单位为$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$；
5. 转动惯量的是对某一转轴而言的；
6. 转动惯量是转动惯性的量度；
7. 转动惯量具有可叠加性；
8. 转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置有关。