

# Theoretical Mechanics: Planar Force System

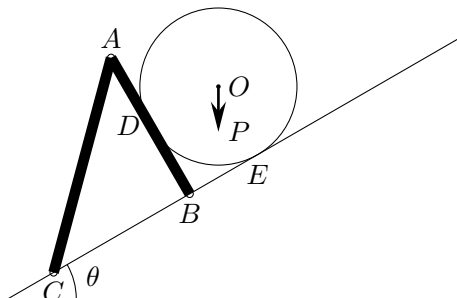
Date: 2025 年 2 月 11 日

*WHU*

Lai Wei

## Problem 1

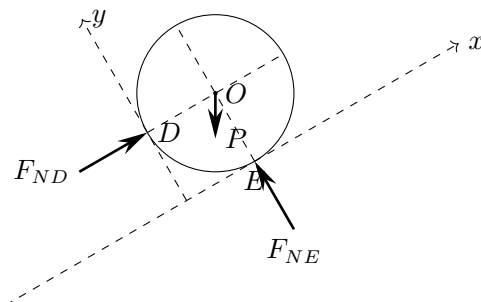
一重为50kN的圆柱搁置在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的光滑斜面上，并用撑架支承如图所示。假设A、B、C处均为光滑铰链，接触处的摩擦不计，接触点D刚好在构件AB的中央，求撑件AC的受力及铰链B的约束力（不计撑架构件自重）。



### Solution

#### Part One

取圆柱为分离体，D，E处为光滑接触，圆柱受主动力 $P$ ，约束力 $F_{ND}$ 及 $F_{NE}$ 作用，汇交于圆柱中心O点，受力图：



取如图所示坐标轴，由平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，即

$$F_{ND} - P \sin \theta = 0$$

解得

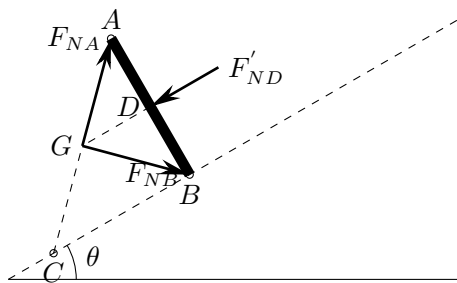
$$F_{ND} = 25\text{kN}$$

#### Part Two

AC为二力构件，受力图：

**Part Three**

取构件AB为分离体,  $F'_{ND}$ 与 $F_{NA}$ 的作用线交于G点, 由三力平衡汇交, B铰约束力一定过G点, 受力图:



由 $\sum F_y = 0$ , 即

$$F_{NA} \sin 45^\circ - F_{NB} \sin 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB}$$

由 $\sum F_x = 0$ , 即

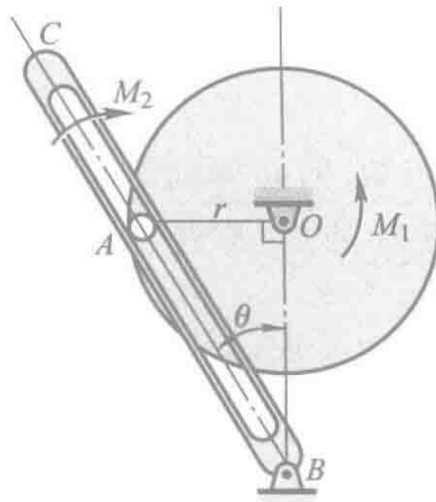
$$F_{NA} \cos 45^\circ + F_{NB} \cos 45^\circ - F'_{ND} = 0$$

解得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}} F'_{ND} = 17.68 \text{ kN}$$

## Problem 2

如图所示机构自重不计，圆轮上的销子A放置在摇杆BC上的光滑导槽内。圆轮上作用有一力偶 $M_1$ ，其力偶矩为 $2\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $OA = r = 0.5\text{m}$ ，图示位置时 $OA$ 与 $OB$ 垂直， $\theta = 30^\circ$ ，且系统平衡。求作用在摇杆上的力偶矩 $M_2$ 及铰链O，B处的约束力。



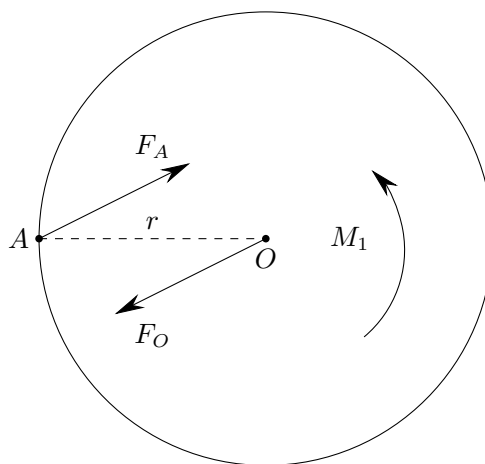
### Solution

#### Part One

取圆轮为研究对象。

注意到圆轮受到A点的光滑接触约束，因此约束力 $F_A$ 是垂直于摇杆的。

已知圆轮受到力偶 $M_1$ 和力 $F_A$ 、 $F_O$ 的作用。因为力偶只能由力偶来平衡，所以力 $F_A$ 和 $F_O$ 大小相等、方向相反。



由平衡条件 $\sum M_i = 0$ :

$$M_1 - F_A r \sin \theta = 0$$

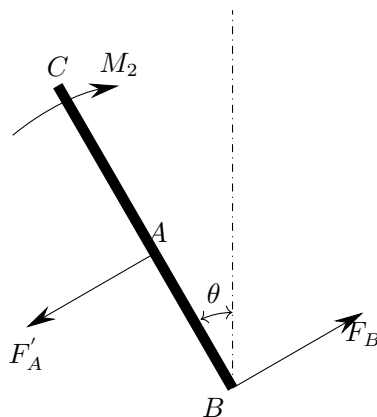
解得:

$$F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ} = 8\text{kN}$$

**Part Two**

取摇杆为研究对象，分析受力。

$B$ 点是光滑铰链约束，因为力偶只能由力偶来平衡，所以力 $F_B$ 和 $F'_A$ 大小相等、方向相反。



由平衡条件 $\sum M_i = 0$ :

$$-M_2 + F'_A \frac{r}{\sin \theta} = 0$$

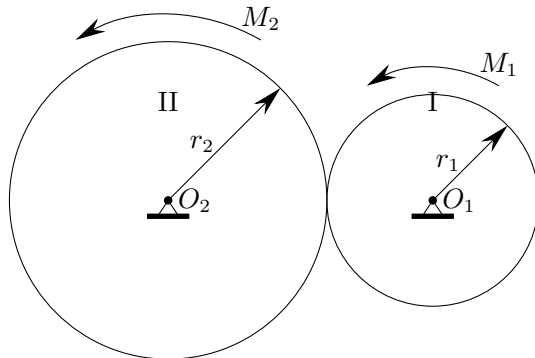
解得:

$$M_2 = 8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_O = F_B = F_A = 8\text{kN}$$

### Problem 3

两齿轮的节圆半径分别为 $r_1$ 、 $r_2$ ，作用于轮I上的主动力偶的力偶矩为 $M_1$ ，齿轮压力角为 $\theta$ ，不计两齿轮的重量。求两齿轮维持匀速转动时齿轮II 的阻力偶之矩 $M_2$ 与轴承 $O_1$ 、 $O_2$ 的约束力大小和方向。

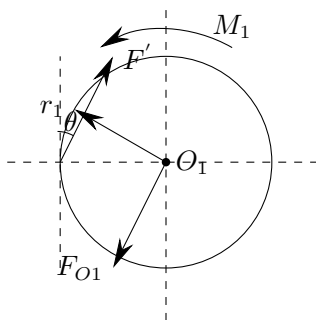


#### Solution

**压力角**是指不计算摩擦力的情况下，受力方向和运动方向所夹的锐角。

#### Part One

对轮I 进行受力分析：



由平衡条件 $\sum M_i = 0$ ：

$$M_1 - F_{O1} r_1 \cos \theta = 0$$

解得

$$F_{O1} = \frac{M_1}{r_1 \cos \theta}$$

(方向如图)

#### Part Two

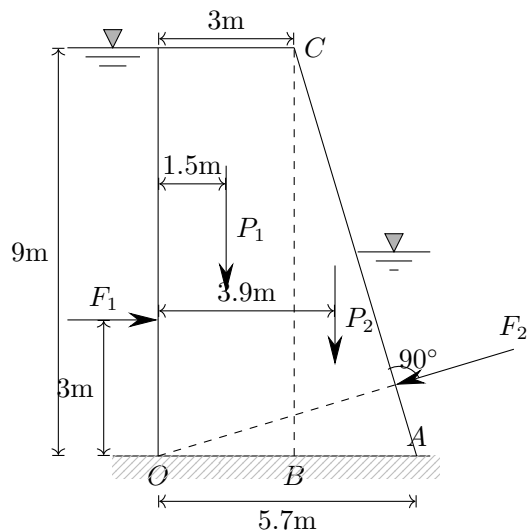
同理可得轴承 $O_2$ 约束力

$$F_{O2} = \frac{M_2}{r_2 \cos \theta}$$

$$M_2 = \frac{r_2}{r_1} M_1$$

## Problem 4

如图所示，梯形的水坝可以看作由左边的矩形部分和右边的三角形部分组合而成。左边部分的重力 $P_1 = 450\text{kN}$ ，右边部分的重力 $P_2 = 200\text{kN}$ ，上游水库给水坝的压力 $F_1 = 300\text{kN}$ ，下游河流给水坝的压力 $F_2 = 70\text{kN}$ 。各力的作用方向、位置如图所示。



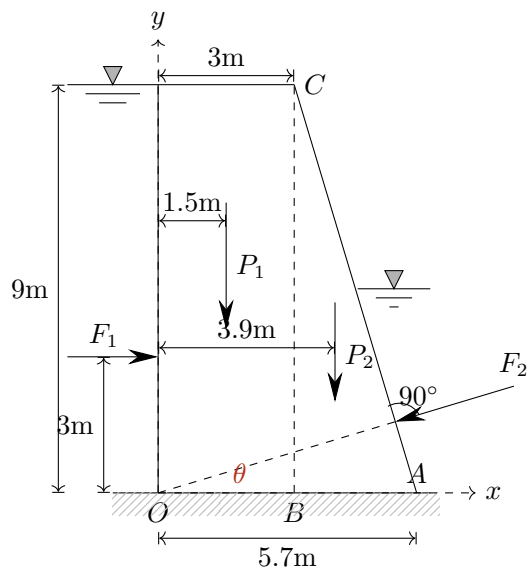
求

1. 力系的合力 $F_R$
2. 合力与OA的交点到点O的距离 $x$
3. 合力的作用线方程

### Solution

#### Part One

建立如图所示的坐标系，向O点简化，求主矢和主矩。





先计算主矢。注意到只有力 $F_2$ 的方向较为特殊，记 $F_2$ 与水平方向夹角为 $\theta$ ，则

$$\theta = \angle ACB = \arctan \frac{AB}{BC} = \arctan 0.3 \approx 16.7^\circ$$

于是

$$F'_{Rx} = \sum F_{ix} = F_1 - F_2 \cos \theta \approx 232.9 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_{iy} = -P_1 - P_2 - F_2 \sin \theta \approx -670.1 \text{ kN}$$

所以

$$F'_R = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2} \approx 709.1 \text{ kN}$$

于是 $F'_R$ 的方向余弦

$$\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F'_R} \approx 0.3283$$

$$\cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F'_R} \approx -0.9446$$

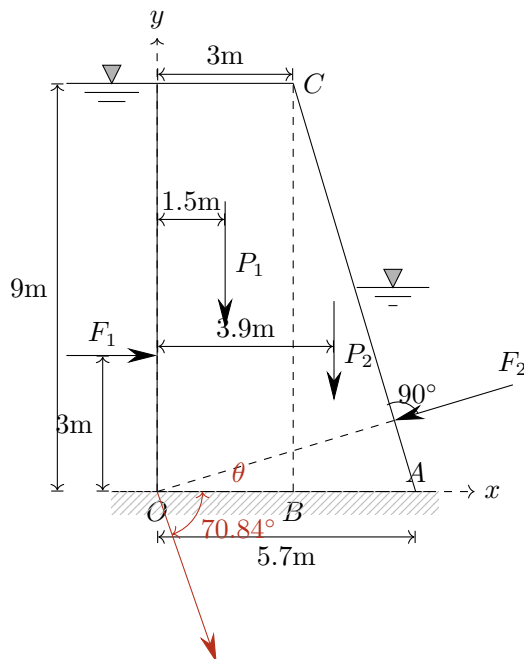
所以主矢与 $x$ 轴正向夹角

$$\alpha \approx 70.84^\circ$$

主矢与 $y$ 轴负向夹角

$$\beta \approx 19.16^\circ$$

在图中表示：

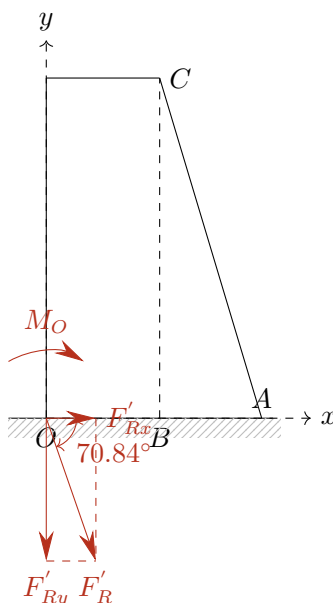


再计算主矩：

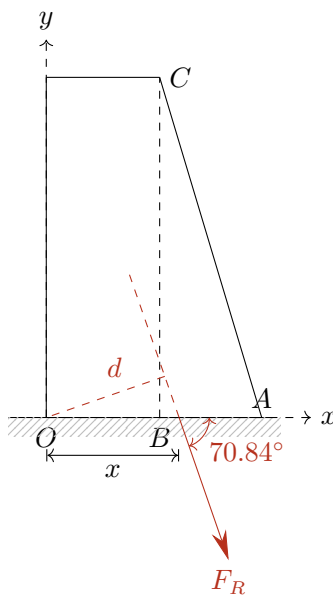
$$M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3\text{m} \cdot F_1 - 1.5\text{m} \cdot P_1 - 3.9\text{m} \cdot P_2 = -2355\text{kN} \cdot \text{m}$$

### Part Two

向O点简化的主矢和主矩如图：



求合力及其作用线位置。合力 $F_R$ 的大小和方向与主矢 $F'_R$ 相同，其作用线位置 $x$ 值依据合力矩定理求得：



由

$$M_O = F_R \cdot d$$

得

$$d \approx 2.3197\text{m}$$

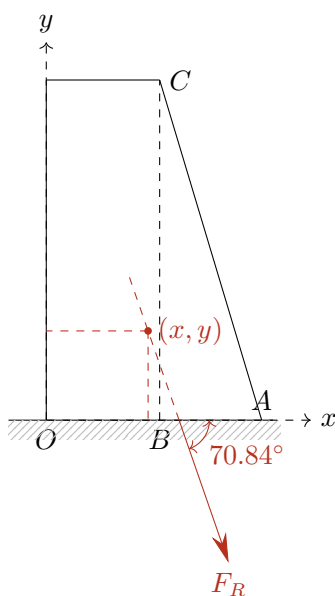
所以

$$x = \frac{d}{\sin 70.84^\circ} \approx 3.514\text{m}$$

### Part Three

由于合力可以沿其作用线移动，设合力作用线上任意一点的坐标为 $(x, y)$ ，将合力作用于此点，则合力对坐标原点的力矩的解析表达式为

$$M_O = \sum M_O (\vec{F}_R) = x \cdot F'_{Ry} - y \cdot F'_{Rx}$$

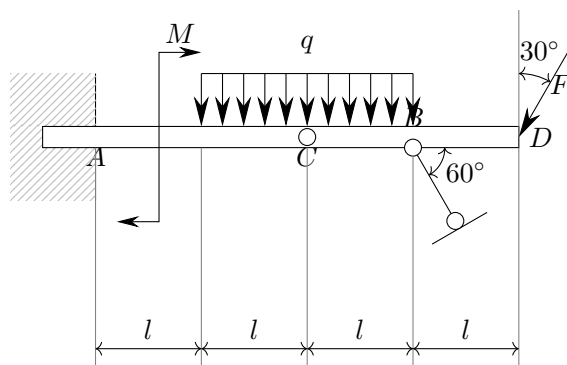


代入数据化简可得合力作用线方程为

$$670.1x + 232.9y - 2355 = 0$$

## Problem 5

如图所示不计重力的组合梁，由AC和CD在C处铰接而成。已知 $F = 20\text{kN}$ ，均布载荷 $q = 10\text{kN/m}$ ， $M = 20\text{kN} \cdot \text{m}$ ， $l = 1\text{m}$ ，求固定端A与滚动支架B的约束力。

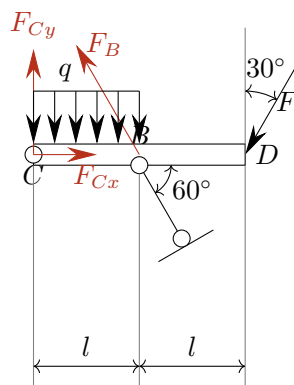


### Solution

先画出系统所受约束力。平面任意力系，4个未知量，无法求解？C点铰链这个因素（条件）没有考虑。把这个因素考虑进去再分析，会发现这实质上仍是一个静定问题。

### Part One

以CD为研究对象，画受力图。



由 $\sum M_C = 0$ 得

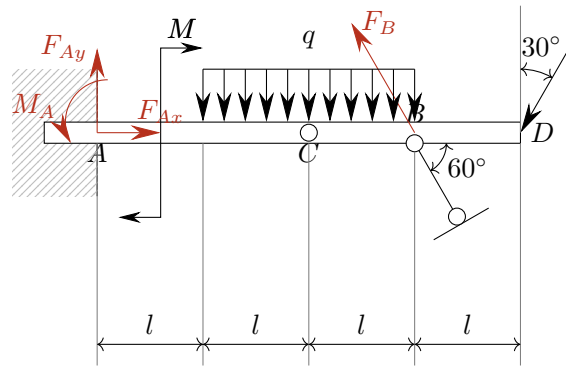
$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

解得

$$F_B = 455.77\text{kN}$$

### Part Two

取整体为研究对象，画受力图：



由  $\sum F_x = 0$ ,

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

由  $\sum F_y = 0$ ,

$$F_{Ay} + F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

由  $\sum M_A = 0$ ,

$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

分别解得

$$M_A = 10.37 \text{ kN} \cdot \text{m}, F_{Ax} = 32.89 \text{ kN}, F_{Ay} = -2.32 \text{ kN}$$