University Physics: Rigid Body Mechanics

Date: March 28, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 刚体的定轴转动

1.1 刚体

1.1.1 定义

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组。）

1. 刚体是理想模型；
2. 刚体模型是为简化研究问题而引进的。

1.1.2 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。（各点的状态一样）

刚体上任意一点的运动可以代表整个刚体的运动。（刚体平动的运动规律和与质点的运动规律相同）

1.2 转动

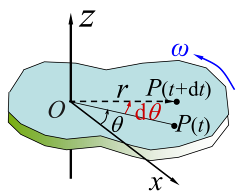
分为**定轴转动**和**非定轴转动**。

刚体的一般运动可以看作“随质心的平动”和“绕质心的转动”的合成。

1.2.1 刚体转动的角速度和角加速度

角坐标$\theta = \theta(t)$，沿逆时针方向转动为$\theta > 0$，角位移$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$。角速度矢量

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$



方向按右手螺旋法则确定。

1.2.2 刚体定轴转动

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正、负来表示。

角加速度

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

定轴转动的特点：

1. 每一质点均做圆周运动，与轴垂直的圆面为转动平面；
2. 任意质点运动$\Delta\theta$, ω, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$相同，但$\vec{v}$, $\vec{a}$不相同；

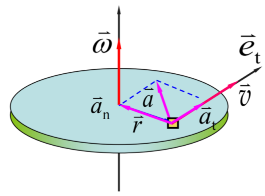
3. 运动描述仅需一个坐标。

匀变速转动公式：

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$

角量与线量的关系：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



$$\overrightarrow{v_i} = r_i \omega \overrightarrow{e}_t$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{\perp} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2 t}$$

于是

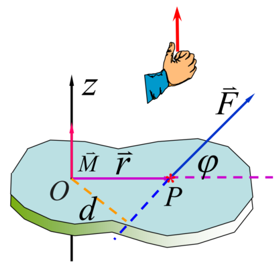
$$\overrightarrow{a} = r\alpha \overrightarrow{e}_{\mathrm{t}} + r\omega^2 \overrightarrow{e}_{\mathrm{n}} \tag{1.2}$$

1.3 力矩

1.3.1 定义

用来描述力对刚体的转动的作用的物理量。

刚体绕Oz轴旋转，力作用在刚体上点P，且在转动平面内，为由点O到力的作用点P的径矢。$\overrightarrow{F}$对转轴z的力矩的定义：



$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{1.3}$$

$$M = Fr\sin\theta = Fd \quad (d\text{为力臂})$$

1.3.2 讨论

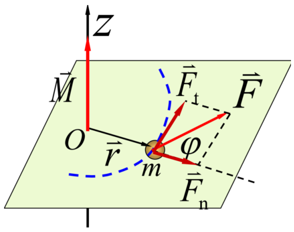
1. 若力$\overrightarrow{F}$不在转动平面内，可将力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量；
2. 合力矩等于各分力矩的矢量和；
3. 刚体内作用力和反作用力的力矩相互抵消；
4. 力矩的单位只能用牛顿 · 米，而不能用焦耳。

2 转动定律、转动惯量

2.1 质点的转动惯量

单个质点m与转轴刚性连接

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha$$



则

$$F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}} = mr\alpha \tag{2.1}$$

定义

$$I = mr^2 \tag{2.2}$$

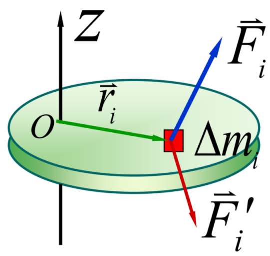
为质点m对O点的“转动惯量”。
于是

$$M = I\alpha \tag{2.3}$$

2.2 刚体的转动惯量

2.2.1 定义

质量元受外力$\vec{F}_{\mathrm{ej}}$，内力$\vec{F}_{\mathrm{ij}}$
则



$$M_{\mathrm{ej}} + M_{\mathrm{ij}} = \Delta m_j r_j^2 \alpha$$

因为$M_{ij} = -M_{ji}$，所以

$$\sum_j M_{ij} = 0$$

于是

$$\sum_j M_{\mathrm{ej}} = \left(\sum \Delta m_j r_j^2\right)\alpha \tag{2.4}$$

于是**定义**

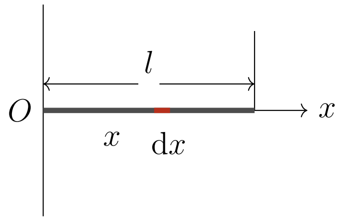
$$I = \sum_j \Delta m_j r_j^2 \tag{2.5}$$

为刚体对O点的“转动惯量”。
积分形式即为

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m \tag{2.6}$$

2.2.2 几种常见刚体的转动惯量

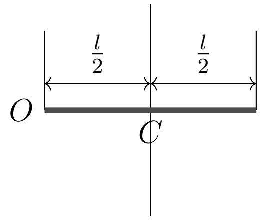
例1 均匀杆m对O轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：



运用微积分的思想和方法，

$$I_O = \int x^2 \, \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \, \mathrm{d}x\lambda = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3}ml^2$$

例2 均匀杆m对C轴（通过杆的端点与杆垂直）的转动惯量：



$$I_C = \frac{1}{12}ml^2$$

证（方法1）

$$\begin{aligned} I_C &= \int x^2 \, \mathrm{d}m \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx\lambda \\ &= \frac{1}{12}\lambda l^3 \\ &= \frac{1}{12}ml^2 \end{aligned}$$

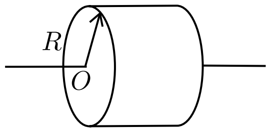
证（方法2：平行轴定理）
由平行轴定理，

$$I_O = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

于是

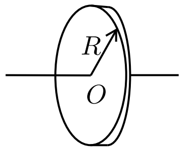
$$\begin{aligned} I_C &= I_O - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}ml^2 \end{aligned}$$

例3 均匀圆柱m对转轴（圆柱体的轴线）的转动惯量：



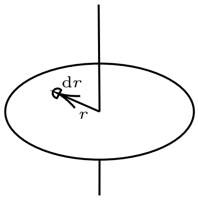
$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

例4 均匀圆盘m对转轴（通过盘心垂直于盘面）的转动惯量：

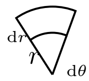


$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

证（方法1）



设圆盘的面密度为σ，则$\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$
如图，取微元 dm：



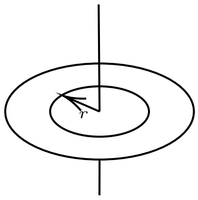
则

$$\mathrm{d}m = \sigma r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 \,\mathrm{d}m \\ &= \int r^2 \sigma r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}r \\ &= \iint \sigma r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sigma \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sigma \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$

证（方法2）



同样，设圆盘的面密度为$\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$。取距离圆心$r$的某一圆环（宽 $\mathrm{d}r$）为 $\mathrm{d}m$，则

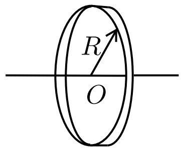
$$\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r \,\mathrm{d}r$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 \,\mathrm{d}m \\ &= \int_0^R r^2 \cdot \sigma 2\pi r \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

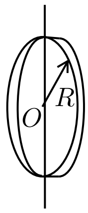
例5　均匀圆环m对转轴（通过环心垂直于盘面）的转动惯量：

$$I = mR^2$$



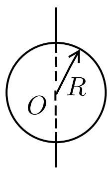
例6　均匀圆环m对转轴（沿圆环直径）的转动惯量：

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



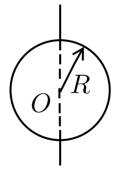
例7　薄球壳m对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{3} mR^2$$



例8　均匀实心球体m对转轴（沿直径）的转动惯量：

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$



2.3 转动定律

2.3.1 定律

$$M = I\alpha \tag{2.7}$$

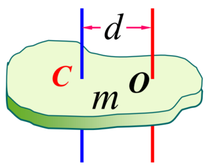
2.3.2 讨论

1. 若$M=0$，则$\alpha=0$，即ω不变；
2. α与$\frac{M}{I}$成反比；
3. $M = I\alpha = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$；
4. 转动惯量的单位为$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$；
5. 转动惯量的是对某一转轴而言的；
6. 转动惯量是转动惯性的量度；
7. 转动惯量具有可叠加性；
8. 转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置有关。

2.3.3 平行轴定理

质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为I_C，则对任一与该轴平行，相对d的转轴的转动惯量

$$I = I_C + md^2 \tag{2.8}$$



2.3.4 垂直轴定理（正交轴定理）

对**薄板状**刚体：对板面内相互垂直的两个定轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的定轴的转动惯量。

$$I_z = I_x + I_y \tag{2.9}$$

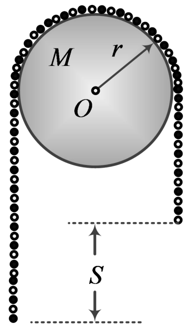
证明：

$$\begin{aligned} I_z &= \sum \Delta m_i r_i^2 \\ &= \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \\ &= I_x + I_y \end{aligned}$$

2.4 例题

2.4.1 problem 1

质量为M的匀质圆盘，可绕通过盘中心并垂直于盘面的固定光滑轴转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}Mr^2$。一根长为l，质量为m的匀质柔软绳索挂在圆盘上，如图所示。设绳与圆盘间无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为S时，绳的加速度的大小。



Solution

设某一时刻圆盘两侧的绳长分别为x_1、x_2（$x_1 > x_2$），如图所示。可将绳分为三段，即长度分别为$x1$、$x2$的两段绳和绕在盘上的一段，由于绕在盘上的一段谁盘一起转动，所以可将它和盘作为一个整体来讨论。假设在 1、2 两点处绳中的张力分别为T_1、T_2，则由牛顿定律和转动定律可得

$$x_2\rho g - T_2 = x_2\rho a$$

$$T_1 - x_1\rho g = x_1\rho a$$

$$T_2 r - T_1 r = I\alpha$$

且

$$a = r\alpha$$

式中，

$$\rho = \frac{m}{l}$$

是绳的线密度，

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + \pi r\rho \cdot r^2$$

是绕在盘上的绳与盘作为整体的转动惯量。

联立以上方程，并取$x_2 - x_1 = S$，可得绳的加速度为

$$a = \frac{2mgS}{(2m+M)l}$$

3 刚体定轴转动的功能关系

3.1 力矩做功

$\vec{F}$在转动平面内，

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_\tau \mathrm{d}s = F_\tau r \, \mathrm{d}\theta$$

上式也可写成

$$\mathrm{d}A = M \, \mathrm{d}\theta \tag{3.1}$$

于是力矩M对刚体所做的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{\theta_0}^{\theta} M \, \mathrm{d}\theta \tag{3.2}$$

由式3.1还可得出力矩做功的瞬时功率为

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{M \, \mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega \tag{3.3}$$

当$\vec{M}$与$\vec{\omega}$同向，W、P为正；当$\vec{M}$与$\vec{\omega}$反向，W、P为负。

3.2 转动动能

整个刚体的动能就是所有质元的动能之和：

$$E_\mathrm{k} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \tag{3.4}$$

即

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{3.5}$$

3.3 刚体定轴转动的动能定理

由

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, \mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \, \mathrm{d}\omega$$

有

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, \mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{3.6}$$

即：合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。——刚体绕定轴转动的动能定理

4 刚体的角动量、角动量定理、角动量守恒定律

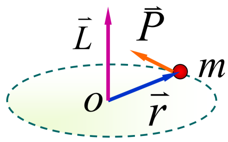
力的时间累积效应：冲量、动量、动量定理。
力矩的时间累积效应：冲量矩、角动量、角动量定理。

4.1 刚体定轴转动的角动量

4.1.1 质点的角动量

质量为m的质点以速度$\vec{v}$在空间运动，某时刻对O的位矢为 $\vec{r}$，则质点对O的角动量定义为

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{4.1}$$



当质点以角速度ω作半径为r的圆运动时，相对圆心的角动量：

$$L = rmv = r^2 m\omega \tag{4.2}$$

（方向按右手螺旋法则确定）

4.1.2 刚体的角动量

对于绕z轴转动的刚体（质点系，每个质点做圆周运动）：

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \omega = \left(\sum_i r_i^2 \Delta m_i\right)\omega = I_z\omega \tag{4.3}$$

4.2 刚体定轴转动的角动量定理

4.2.1 质点的角动量定理

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{4.4}$$

作用于质点的合外力对参考点0的力矩，等于质点对该点O的角动量随时间的变化率。
微分形式：

$$\overrightarrow{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}L \tag{4.5}$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M}\,\mathrm{d}t = \overrightarrow{L}_2 - \overrightarrow{L}_1 \tag{4.6}$$

定义**冲量矩**：

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M}\,\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

质点的角动量定理另一表述：对同一参考点O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

4.2.2 质点的角动量守恒定律

由质点的角动量定理：
如果$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$，则

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} = \text{恒矢量} \tag{4.8}$$

若质点所受外力对某给定点O的力矩为零，则质点对O点的角动量保持不变。

4.2.3 刚体定轴转动的角动量定理

刚体也是质点系，刚体定轴转动的角动量定理的微分形式应为

$$M\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,(I\omega) \tag{4.9}$$

注意：这两式对非刚体（转动惯量会发生变化）也成立。
而刚体绕定轴的转动定律：

$$M = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

（I是常数，仅对刚体成立）
刚体（非刚体）定轴转动的角动量定理的积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} M\,\mathrm{d}t = \int_{(I\omega)_1}^{(I\omega)_2} \mathrm{d}\,(I\omega) = I_2\omega_2 - I_1\omega_1 \tag{4.11}$$

4.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

如果$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$，则

$$L = I\omega = \text{常量} \tag{4.12}$$

若物体所受的合外力矩为零，则物体的角动量保持不变。

1. 若I不变，ω不变；
2. 若I变，ω也变，但$L = I\omega$不变。

即内力矩不改变系统的角动量。
在冲击等问题中，$M^{\mathrm{in}} \gg M^{\mathrm{ex}}$，可认为$L \approx$ 常量。

4.4 共轴系统定轴转动的角动量定理

当一个系统由多个物体和质点组成时，则某段时间内对某轴的合外力矩的冲量矩等于系统绕该轴的角动量的增量：

$$\int_{t_1}^{t_2} M \, \mathrm{d}t = \left(\sum_i I_i\omega_i\right)_2 - \left(\sum I_i\omega_i\right)_1$$

（I_i、ω_i应对同一轴，ω_i应对同一惯性系。）
共轴系统的定轴转动的角动量守恒定律：
当系统对某轴的合外力矩的冲量矩等于零时，系统绕该轴的角动量守恒，即：

$$\int_{t_1}^{t_2} M \, \mathrm{d}t\text{时，} \sum_i I_i\omega_i = \text{恒矢量} \tag{4.13}$$

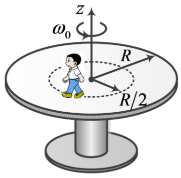
（I_i、ω_i应对同一轴，ω_i应对同一惯性系。）

4.5 例题

4.5.1 Problem 1

在半径为R、质量为M具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人静止站立在距转轴为$\frac{R}{2}$处，人的质量是圆盘质量的$\frac{1}{10}$，开始时载人圆盘对地以角速度ω_0匀速转动。现在此人相对于圆盘以速率v沿与圆盘转动的相反方向绕轴作圆周运动，如图所示。已知圆盘对中心轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$。试求：

1. 圆盘对地的角速度；
2. 欲使圆盘对地静止，人在该圆周上相对于圆盘的速度v的大小及方向。



Solution

Part One

当人以速率v沿相对圆盘转动相反的方向走动时，圆盘对地的角速度为ω，则由速度叠加原理可知，人相对于地角速度为

$$\omega' = \omega - \frac{v}{R/2} = \omega - \frac{2v}{R}$$

将人与盘视为一个共轴系统，人在盘上走动时系统受对转轴的合外力矩为零，故系统的角动量守恒，所以有

$$\left[\frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{10}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega + \frac{M}{10}\left(\frac{1}{2}R\right)^2\omega'$$

联解得

$$\omega = \omega_0 + \frac{2v}{21R}$$

Part Two

欲使盘对地静止，则$\omega = 0$必为零，即

$$\omega = \omega_0 + \frac{2v}{21R} = 0$$

由此得，人相对于圆盘的速度为

$$v = -\frac{21R\omega_0}{2}$$

式中负号表示人的走动方向与上一问中人走动的方向相反，即与盘的初始转动方向一致。

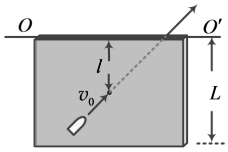
4.5.2 Problem 2

一块宽$L = 0.60\text{m}$ 、质量$M = 1.0\text{kg}$的均匀薄木板，可绕水平固定轴OO'无摩擦地自由转动。当木板静止在平衡位置时，有一质量为 $m = 10 \times 10^3\text{kg}$的子弹垂直击中木板上的$A$点，$A$离转轴$OO'$距离 $l = 0.36\text{m}$，子弹击中木板前的速度为$500m \cdot s^{-1}$，穿出木板后的速度为$200m \cdot s^{-1}$。试求

1. 子弹给予木板的冲量；

2. 木板获得的角速度。

（已知：木板绕OO'轴的转动惯量$I=\frac{1}{3}ML^2$）



Solution

Part One

子弹受到的冲量为

$$I=\int F\,\mathrm{d}t=m\left(v-v_0\right)$$

由牛顿第三定律，子弹对木块的冲量为

$$I'=\int F'\mathrm{d}t=-\int F\,\mathrm{d}t=m\left(v_0-v\right)=3.0\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Part Two

若将子弹和木板作为一个共轴系统，则该系统在碰撞过程中满足角动量守恒条件。所以有

$$mv_0l=mvl+I\omega$$

所以木板获得的角速度为

$$\omega=\frac{mv_0l-mvl}{I}=\frac{3\left(mv_0l-mvl\right)}{ML^2}=9.0\mathrm{rad}\cdot\ \mathrm{s}^{-1}$$