University Physics: Mechanical Wave

Date: April 7, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

振动与波动的关系：振动是激发波动的波源；波动是振动的传播过程。

1 机械波的产生和传播

1.1 机械波的基本概念

1.1.1 产生条件

波是振动状态再空间的传播过程。
机械波是机械振动在弹性介质中的传播过程。
电磁波是交变电场在空间的传播过程。
弹性介质(elastic medium)：由无穷多个质元通过弹性力结合再一起形成的连续介质。
要产生机械波，必须满足两个条件：

1. 要有波源（即振动源）；
2. 要有能够传播机械振动的弹性介质。

机械波与电磁波的共同特征：

1. 具有一定的传播速度；
2. 能够产生干涉、衍射现象；
3. 伴随着能量的传播；
4. 具有相似的数学表达式。

1.1.2 横波和纵波

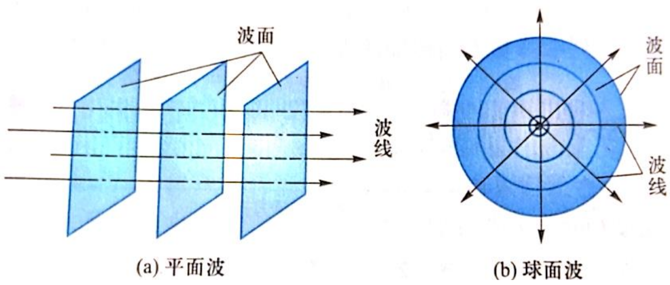
横波：质点的振动方向与波的传播方向垂直。横波中凸起的位置称为波峰,下凹的位置称为波谷。

纵波（又称为疏密波）：质点的振动方向与波的传播方向平行。

在机械波中，横波只能在固体中出现；纵波可在气体、液体和固体中出现。空气中的声波是纵波。液体表面的波动情况较复杂，不是单纯的纵波或横波。

1.1.3 波的几何描述

波阵面(波面, wave surface)：相位相同的点连成的面；
波线(波射线, wave ray)：波的传播方向。



1.2 描述机械波的物理量

1.2.1 波速

单位时间内振动状态在介质中传播的距离称为波的传播速度，简称波速。在弹性介质中，机械波的传播速度取决于介质的惯性和弹性，也就是取决于介质的密度和弹性模量，与波源在介质中的运动速度无关。

在拉紧的弹性绳索中，横波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{F}{\lambda}} \tag{1.1}$$

式中F为绳中的张力，λ是绳的质量线密度。

在固体中，既可以传播横波，也可以传播纵波，它们的传播速度分别为

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad （横波） \tag{1.2}$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (（纵波）) \tag{1.3}$$

式中ρ是固体的密度，G和E分别是固体的切变模量(shear modulus)和杨氏模量(Young's modulus)，它们是反应材料形变和内应力关系的物理量，其单位都是$\mathrm{N \cdot m^{-2}}$。

在液体和液体中，纵波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{1.4}$$

式中K为介质的体积模量，ρ是气体或液体的密度。

对于理想气体，根据分子动理论和热力学理论，可以证明理想气体中声波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{1.5}$$

式中M是气体分子的摩尔质量，是气体的摩尔定压热容与摩尔定容热容之比，简称摩尔热容比，p是气体的压强，T是热力学温度，R是摩尔气体常量。式1.5表明，气体中声波的传播速度不仅与气体的性质有关，还与温度有关。

1.2.2 波长、周期和频率

波长(wave length)：波的传播方向上相邻两振动状态完全相同的质点间的距离（一完整波的长度），用λ表示。

周期：波传播一个波长的距离所用的时间，用T表示。

波速u、波长λ和周期T三者之间有如下关系：

$$u = \frac{\lambda}{T} \tag{1.6}$$

频率：单位时间内波向前传播的完整波的数目，是周期的倒数，用ν表示。于是式1.6可改写为

$$u = \nu\lambda \tag{1.7}$$

当波源和弹性介质没有相对运动（仅仅在介质中做振动）时，波源每做一次完全振动，波就会向前传播一个波长的距离，这表明波源的振动周期和振动频率在数值上与波的周期和波的频率是相等的，即两组物理量可以通用。如果波源与介质有相对运动，则两组物理量有差异，不可通用。

2 平面简谐波的波动表达式

2.1 平面简谐波的波动表达式

波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播。

设波源在t时刻的振动方程：

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

求波线x轴上平衡位置位于P点的质点的振动表达式。设P点与O点的距离为x，因为波动从O传到P点处所需的时间为$\frac{x}{u}$，所以P点处的质点在t时刻的位移与O点处的质点在$t-\frac{x}{u}$时刻的位移相同，即

$$y_P(t) = y_O\left(t - \frac{x}{u}\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

质点的振动表达式（即位移随时间的变化规律），忽略下标P，上式可写为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \tag{2.1}$$

这就是沿x轴正方向传播的平面简谐波的波动表达式，也称为波函数。

当然，我们也可以用相位的超前与落后关系求出波函数。由于沿波的传播方向，波线上各点的振动相位依次落后，每隔一个波长的距离，后者比前者的相位落后2π。因此，如果已知波长λ，则当波从O点传到P点时，P点的振动相位比O点落后$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda}$，即

$$\varphi_P = \varphi_0 - \Delta\varphi = \varphi_0 - 2\pi\frac{x}{\lambda} \tag{2.2}$$

所以P点的振动表达式，即此波的波函数为

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_P\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \tag{2.3}$$

考虑到$u = \frac{\lambda}{T}$，$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$，$\frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$，所以式2.1和式2.3两种形式的波动表达式实际上是等价的。同理可得波动表达式的其他形式，如

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \tag{2.4}$$

如果波动沿x轴的负方向传播，那么P点处质点的振动要比O点处的质点早开始$\frac{x}{u}$时间，即P点处的质点在t时刻的位移与O点处的质点在$t+\frac{x}{u}$的位移相同；从相位的角度来看，P点处质点的振动相位要比O点的相位超前$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x}{\lambda} = \frac{\omega}{u}x$，即

$$\varphi_P = \varphi_O + \Delta\varphi = \varphi_O + 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

所以P点处质点的振动表达式为

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] \tag{2.5}$$

或

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \tag{2.6}$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \tag{2.7}$$

2.2 波动表达式的物理意义

当x一定时，如$x = x_0$：

$$y(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x_0}{u}\right) + \varphi_O\right] \tag{2.8}$$

是$x = x_0$处质点的振动表达式。

将波动表达式分别对时间求一阶和二阶偏导数，可得波线上任一质元P振动速度和加速度分别为

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-A\omega\sin\left[\omega\left(t\pm\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right] \tag{2.9}$$

$$a(x,t)=\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega\left(t\pm\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right] \tag{2.10}$$

当t一定时，如$t=t_0$：

$$y(x)=A\cos\left[\omega\left(t_0-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right] \tag{2.11}$$

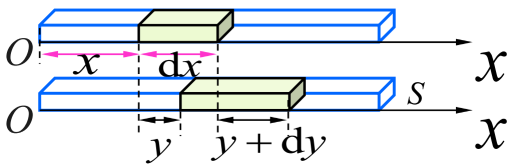
表示t_0时刻x轴上各质点的位移。

3 平面简谐波的能量

3.1 波的能量

当波动在介质中传播时，各质元中的动能和势能总是同步变化的。在波峰、波谷处，动能势能同时为零；在平衡位置处，两者同时到达最大值。进一步的定量分析还表明，任一质元中的动能和势能不仅同步变化，而且大小总是相等的。这就是波动的能量特点。

以固体棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播：



如图所示，假设匀质细棒的横截面积为S，棒的密度为ρ，杨氏模量为E，在棒中取一段长度为 $\mathrm{d}x$的棒元，其体积为 $\mathrm{d}V=S\,\mathrm{d}x$，质量为 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V=\rho S\,\mathrm{d}x$。当波动传播到这里时，这段棒元由于振动而具有动能 $\mathrm{d}E_k$。由于形变而具有弹性势能 $\mathrm{d}E_p$。不失一般性，设细棒中平面简谐波的波函数为

$$y(x,t)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \tag{3.1}$$

则该棒元振动速度为

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \tag{3.2}$$

所以该棒元的振动动能为

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\cdot v^2=\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V\cdot A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \tag{3.3}$$

设这段横截面积为S、长为 $\mathrm{d}x$的棒元在拉力F的作用下，其长度的伸长量为 $\mathrm{d}y$，则

$$E=\frac{F/S}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} \tag{3.4}$$

不难看出：E的物理意义就是其单位横伐面上的拉力F/S（称为应力），与单位长度上的伸长量 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$（称为应变）之比。将上式改写为

$$F = \frac{ES}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}y \tag{3.5}$$

将上式与胡克定律比较，的这段棒元的劲度系数为$k = \dfrac{ES}{\mathrm{d}x}$，所以该棒元的弹性势能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{\mathrm{d}x}(\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{2}E\,\mathrm{d}V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{3.6}$$

又因为固体中纵波的传播速度为$u = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，所以$E = \rho u^2$，再由波动表达式3.1，可得应变为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -A\frac{\omega}{u}\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{3.7}$$

将上式代入式3.6，整理后可得该棒元的弹性势能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\,\mathrm{d}V\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{3.8}$$

比较可得

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\,\mathrm{d}V\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

即在波动传播到的任意位置，任意体积元 $\mathrm{d}V$内的动能和势能总是相等的，且同步变化。所以体积元 $\mathrm{d}V$中波动的总能量为

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} + \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \rho A^2\omega^2\,\mathrm{d}V\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{3.9}$$

讨论：

1. 每一体积元的动能和势能值相同，且同相位；
2. 小体积元的机械能随时间作周期性变化。

3.2 波的能量密度

人们将介质中单位体积内具有的波动能量称为波的能量密度(energy density of wave)，记为w，由式3.9可得

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \tag{3.10}$$

上式说明，波的能量密度同样是时间t和空间坐标x的二元函数，且沿波的传播方向（x轴）以速度u传播。通常把能量密度在一个时间周期T内的平均值，称为平均能量密度，并用$\overline{w}$表示，即

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} w \, \mathrm{d}t \tag{3.11}$$

正弦函数：

$$\begin{aligned}\overline{w} &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} w \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\end{aligned}$$

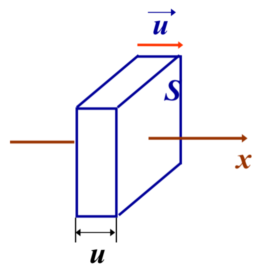
即

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \tag{3.12}$$

3.3 能流、平均能流密度

3.3.1 能流

单位时间内通过某面积的能量——通过该面积的能流(energy flux, P)。
对垂直于波的传播方向的面积S而言：



能流

$$P = wuS = \rho A^2\omega^2 uS\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \tag{3.13}$$

平均能流(average energy flux)

$$\overline{P} = \overline{w}uS \tag{3.14}$$

3.3.2 波的能流密度

能流密度:与波传播方向垂直的单位面积上通过的能流。

平均能流密度(average energy flux density)：与波传播方向垂直的单位面积上通过的平均能流，也称为波的强度(波强，intensity of wave)，用I表示，即

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2 \tag{3.15}$$

由此可以证明，平面简谐波在无吸收的介质中传播时振动保持不变，球面波的波强与离开波源的距离的平方成反比。