University Physics: The Kinematics of Mass Points

日期： 2025 年 2 月 28 日

Wuhan University

Lai Wei

目录

1 质点力学

1.1 参考系、质点

参考系

为描述物体运动而选的标准物。

参考系

物体能否视为质点视具体情况而定。

坐标系

定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

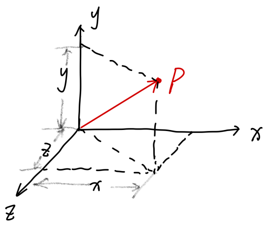
1. 直角坐标系(x, y, z)
2. 球坐标系(r, θ, φ)：二维极坐标
3. 柱坐标系(ρ, φ, z)
4. 自然坐标系s

1.2 位置矢量、运动方程、路程、位移

位置矢量

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{1.1}$$

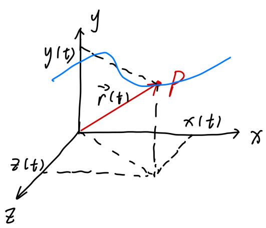
$$r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.2}$$



$\overrightarrow{r}$的方向可以用一组方向角，即$\overrightarrow{r}$与x轴、y轴、z轴之间的夹角(α, β, γ)来表示。$\cos\alpha = \frac{x}{r}$、$\cos\beta = \frac{y}{r}$、$\cos\gamma = \frac{z}{r}$，有$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$。

运动方程（直角坐标系下）

$$\overrightarrow{r}(t) = x\overrightarrow{i}(t) + y\overrightarrow{j}(t) + z\overrightarrow{k}(t) \tag{1.3}$$



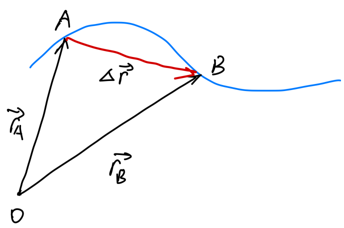
分量式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的**轨迹方程**。

1.3 位移、路程

位移$\Delta\vec{r}$（位置矢量的改变量）



$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k},\ (t_A\text{时})$$
$$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k},\ (t_B\text{时})$$

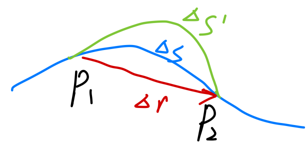
于是其位移

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \tag{1.4}$$

方向由A指向B。

路程Δs实际轨迹

从P_1到P_2，路程记为$\Delta s = P_1\hat{}P_2$。
位移与路程的区别：

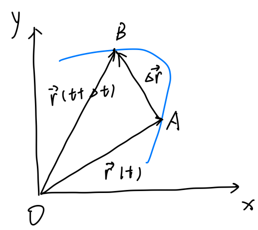


1. 位移是适量，路程是标量；
2. 两点之间位移是唯一的，路程不是唯一的；
3. 一般情况下，$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$
   在方向不变的圆周运动中，$|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ 当$\Delta t \to 0$时，$|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$ （元位移$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$）。

1.4 速度

平均速度

在Δt内，质点位移（二维）为



$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\\ &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}\end{aligned}$$

定义

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta y}\vec{j} \tag{1.5}$$

瞬时速度

当$\Delta t \to 0$时，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{k} \\ &= v_x\overrightarrow{i} + v_y\overrightarrow{j} + v_z\overrightarrow{k}\end{aligned} \tag{1.6}$$

即有，

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.7}$$

方向角

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v},\ \cos\beta = \frac{v_y}{v},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

习惯上，二维情况下，用$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$表示方向。
同理，速率$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而因为$t \to 0$时，有$|\overrightarrow{r}| = s$，则

$$v = |\overrightarrow{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{|\mathrm{d}\overrightarrow{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即有，速度的大小等于速率。

速度在自然坐标系下的表示

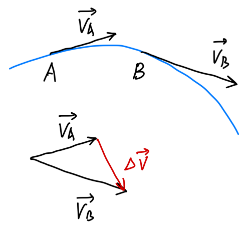
$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t} = v\overrightarrow{e_t} \tag{1.8}$$

其中，$\overrightarrow{e_t} = 1$，表示方向，v表示速度大小。

1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

平均加速度



$$\overrightarrow{\overline{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{1.9}$$

$\vec{a}$与$\Delta\vec{v}$的方向相同。

瞬时加速度

特点：

1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性"（相对于某一参考系）

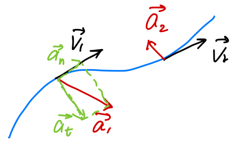
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned} \tag{1.10}$$

方向角α、β和γ满足

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$。

加速度的方向：

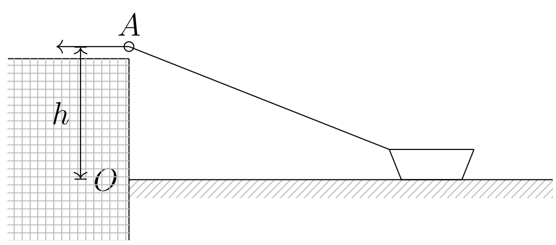


- 直线运动：$\vec{a}\ //\ \vec{v}$。
- 曲线运动：指向轨迹凹测。自然坐标系下，$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$。

在变速曲线运动中， 加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与$\vec{v}$呈锐角时， 运动变快; 与$\vec{v}$呈钝角时， 运动变快。(因为$\Delta\vec{v}$必定指向曲线凹的一侧。)

1.6 例题

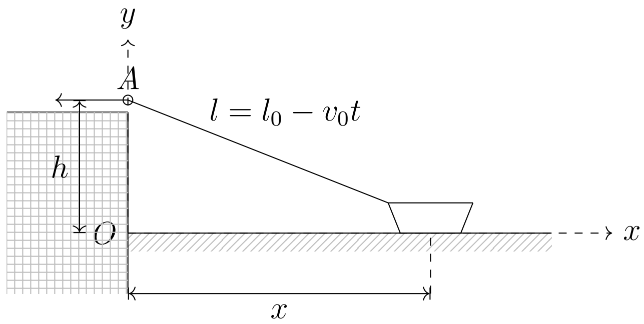
在离水面高为h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图所示。设人以匀速率v_0收绳，试求：当船距岸边x_0时，船的速度和加速度的大小各是多少？



Solution

Part One

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为l_0。在任意时刻船离岸边的距离为x，绳长为l_0。船在运动过程中，l和x均是时间t的函数。

由题意，$l = l_0 - v_0 t$，所以

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对t求导，可得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v_0$$

Part Two

再将速度对时间t求导，即可得到船的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} - l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3}$$

Part Three

令$x = x_0$，得船在离岸边为x_0时的速度和加速度分别为

$$v=\frac{\sqrt{x_0^2+h^2}}{x_0}v_0,\ a=-\frac{v_0^2h^2}{x_0^3}$$

2 质点运动

2.1 一般曲线运动与圆周运动的定义

一般曲线运动

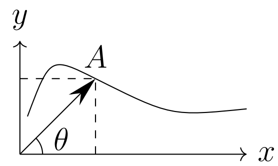
特点：曲率半径随时间变化，不是定值。描述曲线运动一般选自然坐标系。

圆周运动

圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，是研究一般曲线运动的基础

2.2 圆周运动

位置量的描述

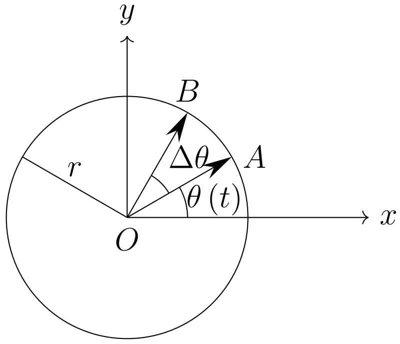


$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

于是

$$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=r\cos\theta\overrightarrow{i}+r\sin\theta\overrightarrow{j}$$

圆周运动的角量



角坐标$\theta\left(t\right)$，角位移$\Delta\theta = \theta\left(t\right) - \theta\left(t_0\right)$。

平均角速度

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.1}$$

角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

ω是**赝矢量**，方向与$\mathrm{d}\theta$一致，由右手螺旋定则确定，且总是垂直于圆平面，沿着圆周的轴线方向。

平均角加速度

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{2.3}$$

角加速度

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.4}$$

角量与线量的关系

路程与角距离的关系

$$\Delta s = r\Delta\theta \tag{2.5}$$

速率与角速度的关系

$$b = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

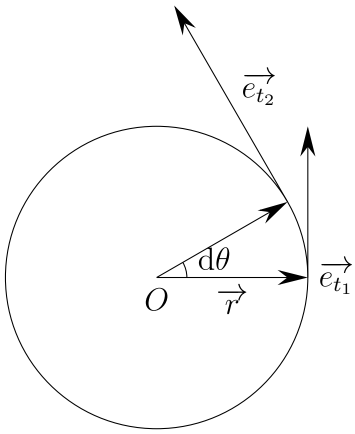
故

$$v\left(t\right) = r\omega\left(t\right) \tag{2.6}$$

速度

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}\\ &= v\overrightarrow{e_t}\\ &= r\omega\overrightarrow{e_t}\end{aligned} \tag{2.7}$$

圆周运动的切向加速度和法向加速度



质点做变速圆周运动时

$$\overrightarrow{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v\overrightarrow{e}_t\right)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_t+\overrightarrow{v}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e}_t}{\mathrm{d}t} \tag{2.8}$$

$$\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha \tag{2.9}$$

因为$|e_{t_1}|=|e_{t_2}|=1$，所以$|\mathrm{d}\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{e_{t_1}}|\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$。
当$\mathrm{d}\theta\to 0$时，$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}\perp\overrightarrow{e_{t_1}}$，故$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}$的方向与$\overrightarrow{e_n}$方向相同，即

$$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}=\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_n} \tag{2.10}$$

所以

$$v\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_n}=v\omega$$

于是

$$\alpha_n=\omega v \tag{2.11}$$

$$=\frac{v^2}{r} \tag{2.12}$$

综上所述，切向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}$，$\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；法向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n}$，$\alpha_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2r=\omega v$。

2.3 一般曲线运动

同圆周运动理知，

$$\alpha_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho} \quad （\rho\text{是曲率半径}） \tag{2.14}$$

而$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha_t} + \overrightarrow{\alpha_n}$，所以

$$|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} \tag{2.15}$$

自然坐标系下的加速度表达式：

$$\overrightarrow{\alpha_t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_t} \tag{2.16}$$

$$\overrightarrow{\alpha_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_n} \tag{2.17}$$