University Physics: The Law of Conservation of Motion

Date: March 11, 2025

Wuhan University

Lai Wei

目录

守恒量：对于物体系统内发生的各种过程，如果某物理量始终保持不变，该物理量就叫做守恒量。

守恒定律：由宏观现象总结出来的最深刻、最简洁的自然规律。（动量守恒定律、机械能守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律等）

1 质点和质点系的动量定理

力的**累积**效应：

1. $\overrightarrow{F}(t)$对t累计$\rightarrow$ $\overrightarrow{I}$, $\Delta\overrightarrow{p}$
2. $\overrightarrow{F}$对$\overrightarrow{t}$累计$\rightarrow$ W, ΔE

1.1 冲量、质点的动量定理

1.1.1 动量

定义动量

$$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v} \tag{1.1}$$

故

$$\overrightarrow{F}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(m\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

即

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})$$

两边同时积分：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\overrightarrow{p}_2-\overrightarrow{p}_1=m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1$$

1.1.2 冲量

定义冲量

$$\overrightarrow{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

1.1.3 动量定理

在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量
微分形式：

$$\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\mathrm{d}(m\overrightarrow{v}) \tag{1.4}$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1 \tag{1.5}$$

分量形式：

$$\begin{cases} I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\,\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x} \\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\,\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y} \\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\,\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z} \end{cases} \tag{1.6}$$

可知，某方向受到冲量，该方向上的动量就增加。

1.2 质点系的动量定理

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{v}_{i0}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p}_0 \tag{1.7}$$

或

$$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}$$

1. 若$\overrightarrow{F}$为恒力，则$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{F}\Delta t$
2. 若$\overrightarrow{F}$为变力，则$\overrightarrow{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t=\overline{\overrightarrow{F}}(t_2-t_1)$

动量定理常应用于碰撞问题。

$$\overline{\overrightarrow{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\overrightarrow{v}_2-m\overrightarrow{v}_1}{t_2-t_1}$$

2 动量守恒定律、动能定理

2.1 动量守恒定律

由质点系动量定理：

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}\, \mathrm{d}t = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$$

若质点系所受的合外力$\vec{F}^{\text{ex}} = \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$
则系统的总动量不变。——动量守恒定律

1. 系统的总动量不变，但系统内任意物体的动量是可以变的；
2. 守恒条件：合外力为零。
   $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$
   当$\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$，可近似地认为系统总动量守恒。
3. 若$\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} \neq 0$，但满足$F_x^{\text{ex}} = 0$，则有$p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x$ 即

$$\begin{cases} F_x^{\text{ex}} = 0, & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, & p_y = \sum_i^i m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = C_z \end{cases} \tag{2.1}$$

4. 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。

2.2 功

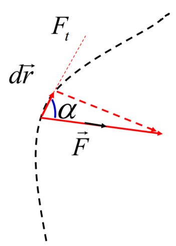
物体在力$\vec{F}$的作用下移动$\Delta\vec{r} \rightarrow$做功$W$

2.2.1 恒力作用下的功

$$\begin{aligned} W &= F\cos\theta \cdot |\Delta\vec{r}| \\ &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 变力作用下的功

元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$、元路程 $\mathrm{d}s$
则元功 $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\, \mathrm{d}s$
积分：

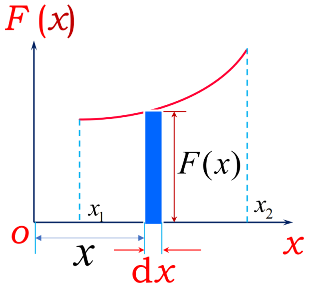


$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\alpha\, \mathrm{d}s \tag{2.3}$$

1. 功的正负

$$\begin{cases} 0° < \alpha < 90°, & \mathrm{d}W > 0 \\ 90° < \alpha < 180°, & \mathrm{d}W < 0 \\ \alpha = 90°, \text{即} \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}, & \mathrm{d}W = 0 \end{cases}$$

2. 做功的图示



3. 功是一个过程量，与路径有关。

4. 合力的功，等于各分力的功的**代数和**

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k}$$

则

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z)$$

又有$W_x = \int_{x_1}^{x_B} F_x\,\mathrm{d}x$、$W_y = \int_{y_1}^{y_B} F_y\,\mathrm{d}y$、 $W_z = \int_{z_1}^{z_B} F_z\,\mathrm{d}z$。
于是

$$W = W_x + W_y + W_z$$

2.3 功率

平均功率$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
瞬时功率

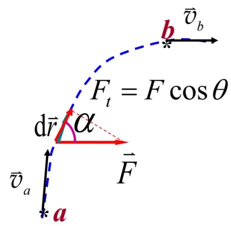
$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{2.4}$$

即

$$P = Fv\cos\alpha \tag{2.5}$$

2.4 动能定理

2.4.1 质点的动能定理



$$
\begin{aligned}
W &= \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} \\
&= \int F_{\mathrm{t}} |\,\mathrm{d}\vec{r}| = \int F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

而

$$F_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2
\end{aligned}
$$

即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}} \tag{2.6}$$

合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。——质点的动能定理

1. 功是**过程量**，动能是**状态量**；
2. 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同。

2.4.2 质点系的动能定理

质点系：由有限个或无限个质点组成的系统。(可以是固体也可以是液体，它概括了力学中最普遍的研究对象）

内力和外力：质点系以外的物体作用于质点系内各质点的力称为外力，质点系内各质点之间的相互作用力称为内力，外力和内力的区分完全洪定于质点系（研究对象）的选取。

质点系内力的功：一切内力矢量和恒等于零。但一般情烷下，所有内力作功的总和并不为零。例如，两个彼此相互吸引的物体，移动一段位移，都作正功。

质点系的动能定理

由质点动能定理$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

得

$$W_e + W_i = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2\right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \tag{2.7}$$

意义：合外力所做的功等于系统动能的增量。