

$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$$

$$\frac{1}{3}t = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{-3} + 2 = \frac{6}{3}$$

武汉大学 2024-2025 学年第二学期

高等数学 A2 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 13 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在考试答题纸上的对应题号区域内, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 已知向量 a, b 的夹角为 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 且 $|a| = 1, |b| = 2$. 求以 $2a + 3b$ 和 $a - b$ 为邻边的平行四边形的面积.

2. 设当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, 且 $f(0, 0) = 0$. 讨论 $f''_{xy}(0, 0)$ 是否存在.

3. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使曲面在该点的法线垂直于平面 $4x + 3y + z = 1$, 并写出此法线方程.

4. 求函数 $u = z^4 - 3xz + x^2 + y^2$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处沿着方向 $l = \frac{1}{\sqrt{14}}(i + 2j + 2k)$ 的方向导数.

5. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, 记号 $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) [1 + x^2 + y^2] dx dy.$$

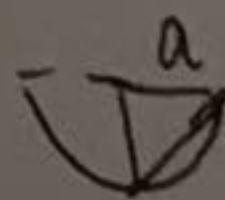
6. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} x^2 dV$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a, b, c > 0$).

7. 计算曲面积分

$$I = \oiint_S y dy dz + x dz dx + 3z^2 dx dy, \quad \iiint_{\Omega} 6z dV$$

其中 S 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与曲面 $z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 所围区域的外侧表面, 常数 $a > 0$.

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$



8. 求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n}$ 的和函数. $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^n}{n}$

9. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

$\tan \frac{1-x+2x}{1-x} = \arctan' = \frac{1}{1 + (\frac{1+x}{1-x})^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2}$

10. 设 $f(x) = 2 + x$ ($0 \leq x \leq 1$), 将 $f(x)$ 展开成余弦级数, 并由此求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

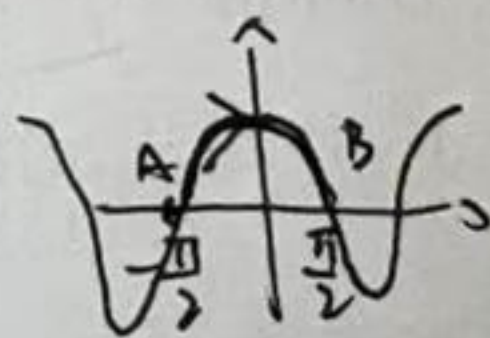
$\frac{(1-x)^2}{2+2x^2}$

二、解答下列各题 (本题满分 30 分, 每小题 10 分)

11. 设 Σ 为平面 $3x + \sqrt{6}y + z = 1$ 含在椭圆柱面 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 内的区域, 求 Σ 的面积.

12. 设 L 为从点 $A(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 沿曲线 $y = \cos x$ 到点 $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ 的有向弧, 计算第二类曲线积分

$$I = \int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$$



13. 某公司通过电视和网站做某种商品的销售广告. 根据统计资料, 销售收入 S (万元) 与电视广告费用 x (万元) 及网站广告费用 y (万元) 之间有经验关系:

$$S = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2.$$

(1) 在广告费不限的情况下, 如何安排广告费能有最佳销售收入?

(2) 若提供的广告费为 1.5 万元, 如何安排广告费能有最佳销售收入?