University Physics

Notes

Lai Wei

武漢大學

WUHAN UNIVERSITY

Dedicated to 我自己.

目录

I 大学物理A1

大学物理A1

1. 质点运动学

1.1 质点力学

1.1.1 参考系、质点

参考系

为描述物体运动而选的标准物。

参考系

物体能否视为质点视具体情况而定。

坐标系

定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

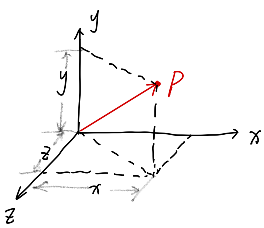
1. 直角坐标系(x,y,z)
2. 球坐标系(r,θ,φ)：二维极坐标
3. 柱坐标系(ρ,φ,z)
4. 自然坐标系s

1.1.2 位置矢量、运动方程、路程、位移

位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.2}$$

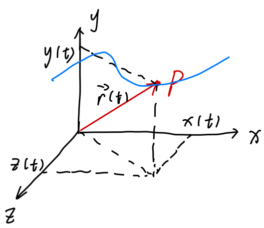


$\vec{r}$的方向可以用一组方向角，即$\vec{r}$与x轴、y轴、z轴

之间的夹角(α,β,γ)来表示。$\cos\alpha=\frac{x}{r}$、$\cos\beta=\frac{y}{r}$、$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，有$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$。

运动方程（直角坐标系下）

$$\vec{r}(t)=x\vec{i}(t)+y\vec{j}(t)+z\vec{k}(t) \tag{1.3}$$



分量式

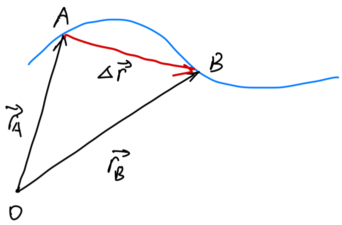
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的**轨迹方程**。

1.1.3 位移、路程

位移$\Delta\vec{r}$（位置矢量的改变量）

$$\vec{r_A}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k},\ (t_A\text{时})$$
$$\vec{r_B}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k},\ (t_B\text{时})$$



于是其位移

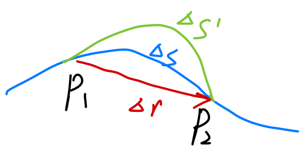
$$\Delta\vec{r}=\vec{r_B}-\vec{r_A}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k} \tag{1.4}$$

方向由A指向B。

路程Δs实际轨迹

从P_1到P_2，路程记为$\Delta s=P_1\hat{P}_2$。

位移与路程的区别：



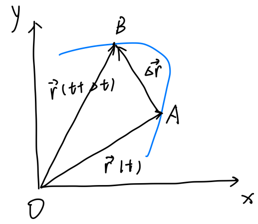
1. 位移是适量，路程是标量；
2. 两点之间位移是唯一的，路程不是唯一的；
3. 一般情况下，$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$

   在方向不变的圆周运动中，$|\Delta\vec{r}|=\Delta s$ 当$\Delta t\to 0$时，$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$（元位移$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$）。

1.1.4 速度

平均速度

在Δt内，质点位移（二维）为



$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\\ &= \Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}\end{aligned}$$

定义

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta y}\vec{j} \tag{1.5}$$

瞬时速度

当$\Delta t\to 0$时，

$$\begin{aligned}\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\\ &= v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\end{aligned} \tag{1.6}$$

即有，

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.7}$$

方向角

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\ \cos\beta=\frac{v_y}{v},\ \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

习惯上，二维情况下，用$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}$表示方向。
同理，速率$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而因为$t\to 0$时，有$|\vec{r}|=s$，则

$$v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即有，速度的大小等于速率。

速度在自然坐标系下的表示

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e_t} = v\vec{e_t} \tag{1.8}$$

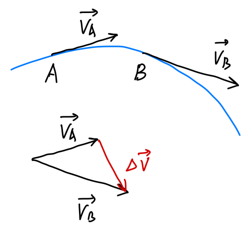
其中，$\vec{e_t} = 1$，表示方向，v表示速度大小。

1.1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

平均加速度

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.9}$$



$\vec{a}$与$\Delta\vec{v}$的方向相同。

瞬时加速度

特点：

1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性"（相对于某一参考系）

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned} \tag{1.10}$$

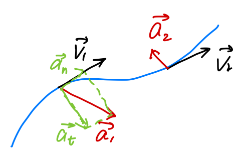
方向角α、β和γ满足

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$。

加速度的方向：

- 直线运动：$\vec{a} \,//\, \vec{v}$。
- 曲线运动：指向轨迹凹测。自然坐标系下，$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$。



在变速曲线运动中，加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与$\vec{v}$呈锐角时，运动变快；与$\vec{v}$呈钝角时，运动变快。（因为$\Delta\vec{v}$必定指向曲线凹的一侧。）

1.2 质点运动

1.2.1 一般曲线运动与圆周运动的定义

一般曲线运动

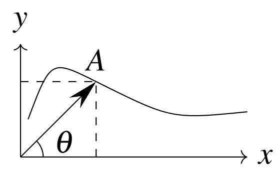
特点：曲率半径随时间变化，不是定值。描述曲线运动一般选自然坐标系。

圆周运动

圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，是研究一般曲线运动的基础

1.2.2 圆周运动

位置量的描述

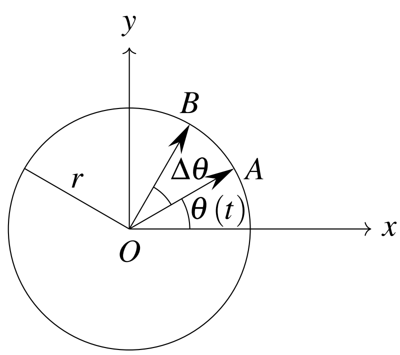


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

于是

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$$

圆周运动的角量



角坐标$\theta(t)$，角位移$\Delta\theta=\theta(t)-\theta(t_0)$。

平均角速度

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.11}$$

角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

ω是**赝矢量**，方向与$\mathrm{d}\theta$一致，由右手螺旋定则确定，且总是垂直于圆平面，沿着圆周的轴线方向。

平均角加速度

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.13}$$

角加速度

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.14}$$

角量与线量的关系

路程与角距离的关系

$$\Delta s=r\Delta\theta \tag{1.15}$$

速率与角速度的关系

$$b=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

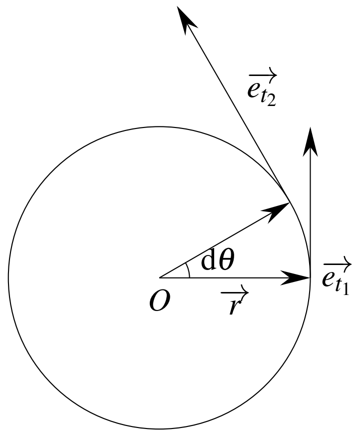
故

$$v(t)=r\omega(t) \tag{1.16}$$

速度

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}&=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}\\&=v\overrightarrow{e_t}\\&=r\omega\overrightarrow{e_t}\end{aligned} \tag{1.17}$$

圆周运动的切向加速度和法向加速度



质点做变速圆周运动时

$$\overrightarrow{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\overrightarrow{e}_t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_t+\overrightarrow{v}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e}_t}{\mathrm{d}t} \tag{1.18}$$

$$\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha \tag{1.19}$$

因为$|e_{t_1}|=|e_{t_2}|=1$，所以$|\mathrm{d}\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{e_{t_1}}|\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$。
当$\mathrm{d}\theta\to 0$时，$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}\perp\overrightarrow{e_{t_1}}$，故$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}$的方向与$\overrightarrow{e_n}$方向相同，即

$$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}=\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_n} \tag{1.20}$$

所以

$$v\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_n}=v\omega$$

于是

$$\alpha_n=\omega v \tag{1.21}$$

$$=\frac{v^2}{r} \tag{1.22}$$

综上所述，切向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}$，$\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；法向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n}$，$\alpha_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2r=\omega v$。

1.2.3 一般曲线运动

同圆周运动理知，

$$\alpha_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho} \quad （\rho\text{是曲率半径}） \tag{1.24}$$

而$\vec{\alpha} = \vec{\alpha_t} + \vec{\alpha_n}$，所以

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} \tag{1.25}$$

自然坐标系下的加速度表达式：

$$\vec{\alpha_t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e_t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_t} \tag{1.26}$$

$$\vec{\alpha_n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{e_n} \tag{1.27}$$

1.3 相对运动

1.3.1 时间与空间

在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关。

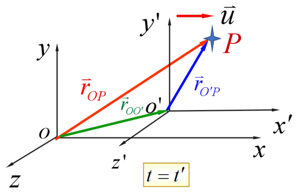
时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

1.3.2 相对运动公式

如右图，$\overrightarrow{r_{OP}} = \overrightarrow{r_{OO'}} + \overrightarrow{r_{O'P}}$，

对方程两边对时间求导数，得



$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{OP}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{OO'}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{O'P}}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\overrightarrow{v_{P\to O}} = \overrightarrow{v_{P\to O'}} + \overrightarrow{v_{O'\to O}} \tag{1.28}$$

（绝对速度 = 相对速度 + 牵连速度）

方程两边对时间求导数，得

$$\overrightarrow{a_{P\to O}} = \overrightarrow{a_{P\to O'}} + \overrightarrow{a_{O'\to O}} \tag{1.29}$$

（绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度）

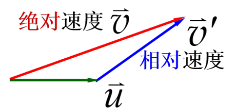
如果$\vec{u}$是恒矢量，则$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$，$\overrightarrow{a_{PO}} = \overrightarrow{a_{PO'}}$，$\overrightarrow{a_{O'O}} = 0$。

注意：

1. 当$\vec{u}$接近光速时，速度变换、加速度变换不成立；
2. 仅仅讨论$\vec{u} = u_x\vec{i}$的情况（u_x为常数），即水平方向有变换，其他方向上没有变换。

1.3.3 伽利略速度变换

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \tag{1.30}$$



绝对速度$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，相对速度$\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$，牵连速度$\vec{u}$。

加速度关系：

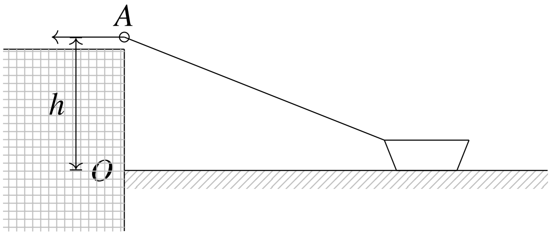
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \tag{1.31}$$

若$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$，则$\vec{a} = \vec{a}'$

1.4 例题

1.4.1 Problem 1

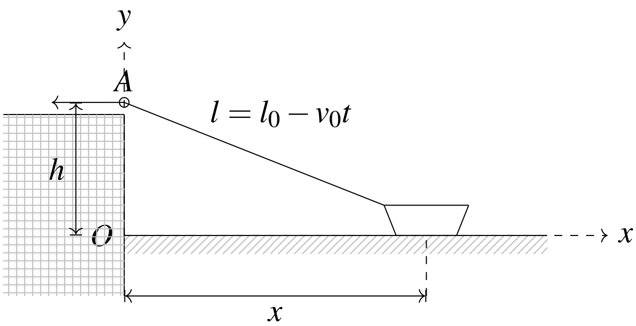
在离水面高为h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图所示。设人以匀速率v_0收绳，试求：当船距岸边x_0时，船的速度和加速度的大小各是多少？



Solution

Part One

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为l_0。在任意时刻船离岸边的距离为x，绳长为l_0。船在运动过程中，l和x均是时间t的函数。

由题意，$l = l_0 - v_0 t$，所以

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对t求导，可得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0$$

Part Two

再将速度对时间t求导，即可得到船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

Part Three

令$x=x_0$，得船在离岸边为x_0时的速度和加速度分别为

$$v=\frac{\sqrt{x_0^2+h^2}}{x_0}v_0,\ a=-\frac{v_0^2h^2}{x_0^3}$$

2. 牛顿运动定律

2.1 牛顿定律

2.1.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律，又称惯性定律(law of inertia) 可表述如下：任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态，直至其他物体的作用强迫它改变这种状态时为止。

即当$\vec{F}=0$时，$\vec{v}$为恒矢量。

牛顿第一定律指出了两个重要概念**惯性**和**力**。

2.1.2 牛顿第二定律

2.1.2.1 表述

动量为$\vec{p}$的物体, 在合外力$\vec{F}$ $\left(=\sum\vec{F_i}\right)$ 的作用下，其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力，即

$$\vec{F}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

（当$v\ll c$时，m为常量）

于是有

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a} \tag{2.2}$$

即可叙述如下：物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同。

2.1.2.2 牛顿运动定律的矢量性

由

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

得

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \tag{2.3}$$

即

$$\vec{F}=ma_x\vec{i}+ma_y\vec{j}+ma_z\vec{k} \tag{2.4}$$

所以

$$\begin{cases} F_x=ma_x \\ F_y=ma_y \\ F_z=ma_z \end{cases} \tag{2.5}$$

2.1.2.3 自然坐标系中

$$\vec{F}=m\vec{a}=m(\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}})=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+m\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}} \tag{2.6}$$

也可写作

$$\begin{cases} F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} \\ F_{\mathrm{n}}=m\frac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{2.7}$$

（ρ为A处曲线的曲率半径）

2.1.2.4 力的叠加原理

当一个物体同时受到几个力的作用时，则这些力的合力产生的加逃度等于每个力单独作用时产生的矢量和，这一结论称为力的**独立性原理**或**力的叠加原理**。

即

$$\begin{aligned}\vec{F}&=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\sum\vec{F}_i\\&=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+\cdots+m\vec{a}_n=m\sum\vec{a}_i=m\vec{a}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1.3 牛顿第三定律

两个物体之间作用力$\vec{F}$反和反作用力$\vec{F}'$, 沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

作用力和反作用力的特点：

1. 作用力与反作用力总是同时存在、相互依存的。
2. 作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上，虽然它们大小相等、方向相反，但不能互相抵消。
3. 作用力与反作用力一定属于同一性质的力。

2.1.4 总结

1. 凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系；
2. 对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关。（**伽利略相对性原理**或称**力学相对性原理**）

2.2 非惯性系、惯性力

2.2.1 惯性系、非惯性系

2.2.1.1 惯性系

牛顿运动定律在其中成立的参考系称为**惯性参考系**，简称**惯性系**(inertial system)。

“一个远离其他一切物体，而且没有自转的物体是惯性参照系，一切相对于该物体做匀速直线运动的参照系也是惯性参照系。牛顿定律就是在这样的参照系中成立。”——王燕生教授《大学物理问题讨论集》

举例：

1. 地面参考系；
2. 地心参考系；
3. 日心参考系；
4. FK4参考系：以选定的1535颗恒星的平均静止的位形作为基准的参考系，是比以上三个参考系都严格的惯性系。

2.2.1.2 非惯性系

牛顿运动定律不成立的参考系称为**非惯性系**(non-inertial system)。

2.2.2 惯性力

2.2.3 平动加速参考系、平动惯性力

2.2.3.1 定义

假设非惯性系K'相对于惯性系K以加速度$\vec{a}_0$做平动，则由相对运动规律可知，质点相对于 K'系和K系的加速度$\vec{a}_0$和$\vec{a}$满足：

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' \tag{2.9}$$

惯性系中K，牛顿运动定律成立，即

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\vec{a}_0 + \vec{a}'\right) \tag{2.10}$$

移项，得

$$\vec{F} - m\vec{a}' = m\vec{a}_0 \tag{2.11}$$

定义**平动惯性力**：

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}^0 \tag{2.12}$$

将$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0$看作非惯性参考系中受到的“合外力”，则在非惯性系K'中，牛顿第二定律在形式上成立：

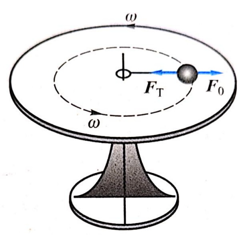
$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}' \tag{2.13}$$

2.2.3.2 性质

不是真实的力，无施力物体，无反作用力是非惯性系加速度的反映。

2.2.4 匀速转动参考系、惯性离心力

匀速转动参考系也是一种常见的非惯性系。如右图所示，水平转盘以匀角速度ω绕通过圆心的垂直轴转动，质量为m的小球用长度为R的绳子与转轴相连静止在圆盘上，并随圆盘一起转动。站在地面上的观察者看来，小球m以匀角速度ω随圆盘一起转动，绳子施于



小球的拉力$\overrightarrow{F}_r$ 提供了小球做匀速圆周运动时所需的向
心力，即

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{T}}=-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e}_r=-m\omega^2R\overrightarrow{e}_r \tag{2.14}$$

这表明在地面参考系中，小球的运动符合牛顿运动定律。

但是，从圆盘这个转动参考系中来看，小球受到合外力$\overrightarrow{F}_T$的作用，但是静止不动。为了在转动参考系中，仍然能够用牛顿运动定律解释该现象，需要引入一个虚拟的惯性力$\overrightarrow{F}_0$，该力与绳子的拉力$\overrightarrow{F}_T$大小相等、方向相反，即

$$\overrightarrow{F}_0=-\overrightarrow{F}_{\mathrm{T}}=m\omega^2R\overrightarrow{e}_r=-m\overrightarrow{a}_{\mathrm{n}} \tag{2.15}$$

（$\overrightarrow{e}_r$表示径向单位矢量）

称为**惯性离心力**(inertial centrifugal force)。

于是引入惯性离心力后，在转动参考系中，牛顿运动定律在形式上成立。物体受到“合外力”为

$$\overrightarrow{F}_T+\overrightarrow{F}_0=\overrightarrow{0}$$

2.3 例题

2.3.1 解题思路

牛顿定律主要处理两类问题：

1. 质点；
2. 质点系，尤其是连续分布的质点系。

解题的基本思路：

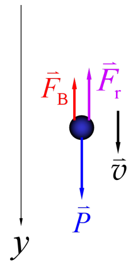
1. 确定研究对象进行受力分析（隔离物体，画受力图）；
2. 取坐标系；
3. 列方程（一般用分量式）；
4. 利用其它的约束条件列补充方程；
5. 先用文字符号求解，后带入数据计算结果。

2.3.2 Problem 1

一质量m，半径r的球体在水中静止释放沉入水底。已知阻力$F_r=-6\pi r\eta v$，η为粘滞系数，求$v(t)$。

Solution

取坐标如图（$\vec{F}_B$为浮力），则



$$mg - F_B - 6\pi\eta rv = ma$$

令$F_0 = mg - F_B$，$b = 6\pi\eta r$，于是

$$F_0 - bv = m\frac{dv}{dt}$$

即

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

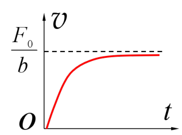
两边同时积分：

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \left(\frac{F_0}{b}\right)} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

得

$$v = \frac{F_0}{b}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right]$$

则当$t \to \infty$时，$v_L \to \frac{F_0}{b}$（极限速度），当$t = 3\frac{b}{m}$时，$v = v_L(1 - 0.05) = 0.95v_L$。一般认为$t \leq 3\frac{b}{m}$时，$v = v_L$



2.3.3 Problem 2

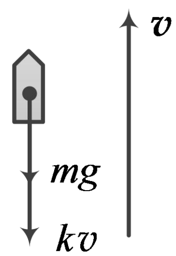
质量为m的物体，由地面以初速度v_0竖直向上发射，物体受到空气阻力大小$F_r = kv$。试求：

1. 物体发射到最大高度所需要的时间；
2. 物体能到达的最大高度。

Solution

Part One

物体在向上发射的过程中，受到重力和阻力作用，方向均与速度方向相反。以竖直向上作为正方向，由牛顿运动定律可得



$$-mg - kv = m\frac{dv}{dt} \tag{2.16}$$

对上式分离变量并取定积分，同时注意到物体到达最大高度时$v=0$，即

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^0 -\frac{m}{mg+kv}\,\mathrm{d}v$$

积分得物体达到最大高度所需的时间为

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}$$

Part Two

利用$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$代入2.16式，可得

$$-mg-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量并取定积分，即

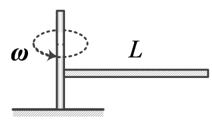
$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_{v_0}^0 -\frac{mv}{mg+kv}\,\mathrm{d}v$$

所以物体可达到的最大高度为

$$y=\frac{m}{k}\left(v_0-\frac{mg}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}\right)$$

2.3.4 Problem 3

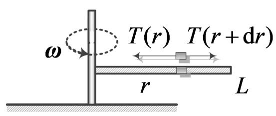
一条质量均匀分布的绳子，总质量为M、长度为L，一端拴在竖直转轴OO'上，并以恒定的角速度ω在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯，且忽略重力的影响，求距离转轴为r处绳中的张力$T(r)$。



Solution

在距离转轴为r处，取一个长为$\mathrm{d}r$的一小段绳子，其质量为$\frac{M}{L}\mathrm{d}r$，其两端受力如图所示，由于该段绳子作圆周运动，所以由牛顿第二定律得

$$T(r)-T(r+\mathrm{d}r)=\mathrm{d}m\cdot a_n=\frac{M}{L}\mathrm{d}r$$



令

$$T(r)-T(r+\mathrm{d}r)=\mathrm{d}m\cdot a_n=\frac{M}{L}\mathrm{d}r$$

得

$$\mathrm{d}T=-\frac{M\omega^2}{L}r\mathrm{d}r$$

式中dT就是该小段绳子所受的合外力，“$-$”号表示该段绳子受到的合外力的方向与矢径 r相反，指向圆心。根据力的叠加原理，离轴r处绳中的张力就是r以外所有小段绳子所受的合力的绝对值之和，即

$$T(r)=\int|\mathrm{d}T|=\int_r^L\frac{M\omega^2}{L}r\,\mathrm{d}r=\frac{M\omega^2}{2L}\left(L^2-r^2\right)$$