



University Physics

Notes

Lai Wei



武汉大学
WUHAN UNIVERSITY

Dedicated to 我自己和初音ミク.



目录

I

大学物理A1

1	质点运动学	9
1.1	质点力学	9
1.1.1	参考系、质点	9
1.1.2	位置矢量、运动方程	9
1.1.3	位移、路程	10
1.1.4	速度	11
1.1.5	加速度	12
1.2	质点运动	14
1.2.1	一般曲线运动与圆周运动的定义	14
1.2.2	圆周运动	14
1.2.3	一般曲线运动	17
1.3	相对运动	17
1.3.1	时间与空间	17
1.3.2	相对运动公式	17
1.3.3	伽利略速度变换	18
1.4	例题	18
2	牛顿运动定律	21
2.1	牛顿定律	21
2.1.1	牛顿第一定律	21

2.1.2 牛顿第二定律	21
2.1.3 牛顿第三定律	23
2.1.4 总结	23
2.2 非惯性系、惯性力	23
2.2.1 惯性系、非惯性系	23
2.2.2 惯性力	24
2.2.3 平动加速参考系、平动惯性力	24
2.2.4 匀速转动参考系、惯性离心力	24
2.3 例题	25
2.3.1 Problem 3	27
3 运动的守恒定律	29
3.1 质点和质点系的动量定理	29
3.1.1 冲量、质点的动量定理	29
3.1.2 质点系的动量定理	30
3.2 动量守恒定律、动能定理	31
3.2.1 动量守恒定律	31
3.2.2 功	31
3.2.3 功率	32
3.2.4 动能定理	33
3.3 保守力、势能、成对力的功	34
3.3.1 保守力	34
3.3.2 成对的力的功	36
3.4 功能原理、机械能守恒定律	37
3.4.1 质点系功能原理	37
3.4.2 机械能守恒定律	38
3.4.3 能量守恒定律	38
3.4.4 动量与能量的比较	38
3.5 碰撞、碰撞定律、质心运动定律	38
3.5.1 碰撞	38
3.5.2 碰撞定律	39
3.5.3 碰撞的分类	39
3.5.4 质心	40
3.5.5 质心运动定律	41
3.6 例题	41

大学物理A1

1	质点运动学	9
1.1	质点力学	9
1.2	质点运动	14
1.3	相对运动	17
1.4	例题	18
2	牛顿运动定律	21
2.1	牛顿定律	21
2.2	非惯性系、惯性力	23
2.3	例题	25
3	运动的守恒定律	29
3.1	质点和质点系的动量定理	29
3.2	动量守恒定律、动能定理	31
3.3	保守力、势能、成对力的功	34
3.4	功能原理、机械能守恒定律	37
3.5	碰撞、碰撞定律、质心运动定律	38
3.6	例题	41



1. 质点运动学

1.1 质点力学

1.1.1 参考系、质点

Definition 1.1 — 参考系. 为描述物体运动而选的标准物。

质点

物体能否视为质点视具体情况而定。

Definition 1.2 — 坐标系. 定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

1. 直角坐标系(x, y, z)
2. 球坐标系(r, θ, φ): 二维极坐标
3. 柱坐标系(ρ, φ, z)
4. 自然坐标系 s

1.1.2 位置矢量、运动方程

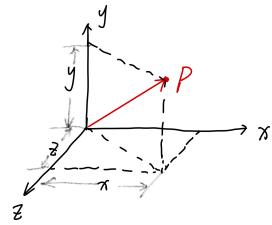
位置矢量

Definition 1.3 — 位置矢量.

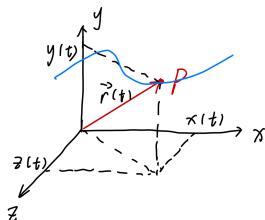
$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.1)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

\vec{r} 的方向可以用一组方向角，即 \vec{r} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴之间的夹角 (α, β, γ) 来表示。 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 、 $\cos \beta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \gamma = \frac{z}{r}$ ，有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。



运动方程



Definition 1.4 — 运动方程. 直角坐标系下

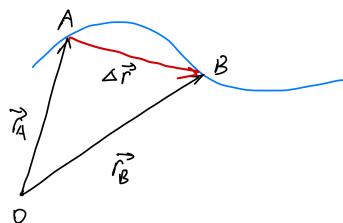
$$\vec{r}(t) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.3)$$

分量式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的轨迹方程。

1.1.3 位移、路程



Definition 1.5 — 位移 $\Delta \vec{r}$ (位置矢量的改变量) .

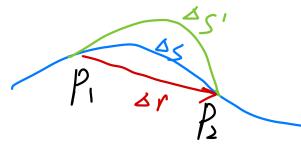
$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}, \text{ (} t_A \text{ 时)} \\ \vec{r}_B &= x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}, \text{ (} t_B \text{ 时)} \end{aligned}$$

于是其位移

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \quad (1.4)$$

方向由A指向B。

Definition 1.6 — 路程 Δs (实际轨迹) . 从 P_1 到 P_2 , 路程记为 $\Delta s = P_1 \hat{P}_2$ 。



位移与路程的区别:

1. 位移是适量, 路程是标量;
2. 两点之间位移是唯一的, 路程不是唯一的;
3. 一般情况下, $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$

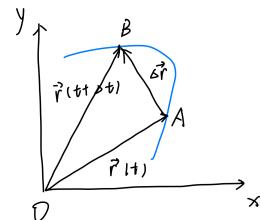
在方向不变的圆周运动中, $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|d\vec{r}| = ds$ (元位移 $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$)。

1.1.4 速度

平均速度

在 Δt 内, 质点位移(二维)为

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}\end{aligned}$$



Definition 1.7 — 平均速度.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} \quad (1.5)$$

瞬时速度

Definition 1.8 — 瞬时速度.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\end{aligned}\quad (1.6)$$

即有，

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

所以

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.7)$$

方向角

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

习惯上，二维情况下，用 $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$ 表示方向。

同理，速率 $v = \frac{ds}{dt}$ ，而因为 $t \rightarrow 0$ 时，有 $|\vec{r}| = s$ ，则

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right| = \frac{|d \vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

即有，速度的大小等于速率。

速度在自然坐标系下的表示

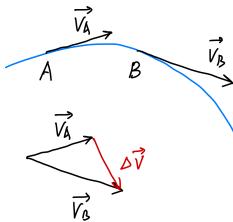
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = v \vec{e}_t \quad (1.8)$$

其中， $\vec{e}_t = 1$ ，表示方向， v 表示速度大小。

1.1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

平均加速度



Definition 1.9 — 平均加速度.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.9)$$

\bar{a} 与 $\Delta \vec{v}$ 的方向相同。

瞬时加速度

特点：

1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性" (相对于某一参考系)

Definition 1.10 — 瞬时加速度.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \\ &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.10)$$

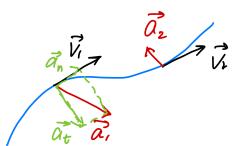
方向角 α 、 β 和 γ 满足

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \cos \gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为 $\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$ 。

加速度的方向：

- 直线运动： $\vec{a} \parallel \vec{v}$ 。
- 曲线运动：指向轨迹凹测。自然坐标系下， $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ 。



在变速曲线运动中，加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与 \vec{v} 呈锐角时，运动变快；与 \vec{v} 呈钝角时，运动变慢。（因为 $\Delta \vec{v}$ 必定指向曲线凹的一侧。）

1.2 质点运动

1.2.1 一般曲线运动与圆周运动的定义

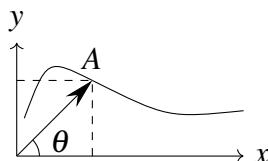
Definition 1.11 — 一般曲线运动. 曲率半径随时间变化，不是定值。描述曲线运动一般选自然坐标系。

Definition 1.12 — 圆周运动. 圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，是研究一般曲线运动的基础。

1.2.2 圆周运动

位置量的描述

Definition 1.13 — 矢径.

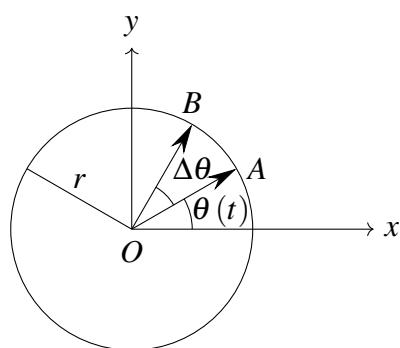


$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

于是

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

圆周运动的角量



角坐标 $\theta(t)$, 角位移 $\Delta\theta = \theta(t) - \theta(t_0)$ 。

平均角速度

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.11)$$

Definition 1.14 — 角速度.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.12)$$

ω 是赝矢量，方向与 $d\theta$ 一致，由右手螺旋定则确定，且总是垂直于圆平面，沿着圆周的轴线方向。

平均角加速度

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.13)$$

Definition 1.15 — 角加速度.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.14)$$

角量与线量的关系

路程与角距离的关系

$$\Delta s = r\Delta\theta \quad (1.15)$$

速率与角速度的关系

$$b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

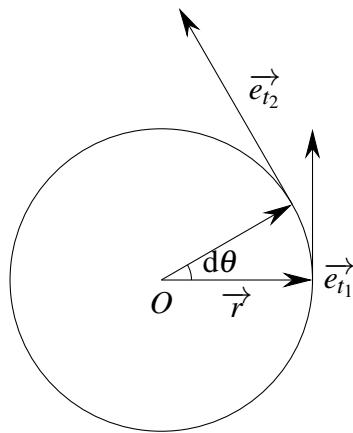
故

$$v(t) = r\omega(t) \quad (1.16)$$

速度

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{ds}{dt} \vec{e}_t \\ &= v \vec{e}_t \\ &= r\omega \vec{e}_t \end{aligned} \quad (1.17)$$

圆周运动的切向加速度和法向加速度



质点做变速圆周运动时

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad (1.18)$$

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (1.19)$$

因为 $|e_{t_1}| = |e_{t_2}| = 1$ ，所以 $|d\vec{e}_t| = |\vec{e}_{t_1}| \cdot d\theta = d\theta$ 。

当 $d\theta \rightarrow 0$ 时， $d\vec{e}_t \perp \vec{e}_{t_1}$ ，故 $d\vec{e}_t$ 的方向与 \vec{e}_n 方向相同，即

$$d\vec{e}_t = d\theta \vec{e}_n \quad (1.20)$$

所以

$$v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = v\omega$$

于是

$$\alpha_n = \omega v \quad (1.21)$$

$$= \frac{v^2}{r} \quad (1.22)$$

综上所述，切向加速度 $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t$ ， $\alpha_t = \frac{dv}{dt}$ ；法向加速度 $\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{e}_n$ ， $\alpha_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v$ 。

1.2.3 一般曲线运动

同圆周运动理知,

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} \quad (1.23)$$

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\rho \text{是曲率半径}) \quad (1.24)$$

而 $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_t + \vec{\alpha}_n$, 所以

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} \quad (1.25)$$

自然坐标系下的加速度表达式:

$$\vec{\alpha}_t = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{e}_t \quad (1.26)$$

$$\vec{\alpha}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad (1.27)$$

1.3 相对运动

1.3.1 时间与空间

在两个相对作直线运动的参考系中, 时间的测量是绝对的, 空间的测量也是绝对的, 与参考系无关。

时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

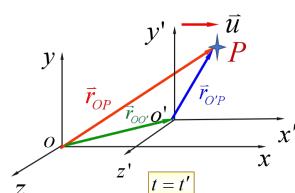
在两个相对作直线运动的参考系中, 时间的测量是绝对的, 空间的测量也是绝对的, 与参考系无关, 时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

1.3.2 相对运动公式

如右图, $\vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_{O'P}$,

对方程两边对时间求导数, 得

$$\frac{d\vec{r}_{OP}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'P}}{dt}$$



即

$$\overrightarrow{v_{P \rightarrow O}} = \overrightarrow{v_{P \rightarrow O'}} + \overrightarrow{v_{O' \rightarrow O}} \quad (1.28)$$

(绝对速度 = 相对速度 + 牵连速度)

方程两边对时间求导数, 得

$$\overrightarrow{a_{P \rightarrow O}} = \overrightarrow{a_{P \rightarrow O'}} + \overrightarrow{a_{O' \rightarrow O}} \quad (1.29)$$

(绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度)

如果 \vec{u} 是恒矢量, 则 $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, $\overrightarrow{a_{PO}} = \overrightarrow{a_{PO'}}$, $\overrightarrow{a_{O'P}} = 0$ 。

注意:

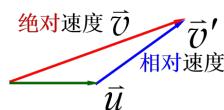
1. 当 \vec{u} 接近光速时, 速度变换、加速度变换不成立;
2. 仅仅讨论 $\vec{u} = u_x \vec{i}$ 的情况 (u_x 为常数), 即水平方向有变换, 其他方向上没有变换。

1.3.3 伽利略速度变换

Definition 1.16 — 角加速度.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u} \quad (1.30)$$

绝对速度 $\overrightarrow{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, 相对速度 $\overrightarrow{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, 牵连速度 \overrightarrow{u} 。



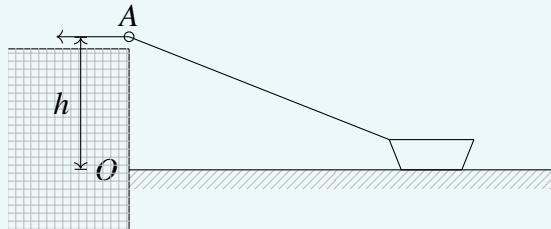
加速度关系:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (1.31)$$

若 $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, 则 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}'$

1.4 例题

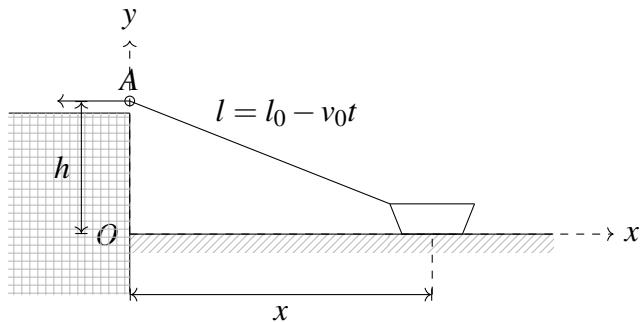
Exercise 1.1 在离水面高为 h 的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图所示。设人以匀速率 v_0 收绳，试求：当船距岸边 x_0 时，船的速度和加速度的大小各是多少？



Solution

Part One

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为 l_0 。在任意时刻船离岸边的距离为 x ，绳长为 l_0 。船在运动过程中， l 和 x 均是时间 t 的函数。

由题意， $l = l_0 - v_0 t$ ，所以

$$v_0 = -\frac{dl}{dt}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对 t 求导，可得

$$2l \frac{dl}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

则船的运动速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \frac{dl}{dt} = -\frac{l}{x} v_0$$

Part Two

再将速度对时间 t 求导，即可得到船的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{x^2} \left(x \frac{dl}{dt} - l \frac{dx}{dt} \right) = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3}$$

Part Three

令 $x = x_0$ ，得船在离岸边为 x_0 时的速度和加速度分别为

$$v = \frac{\sqrt{x_0^2 + h^2}}{x_0} v_0, \quad a = -\frac{v_0^2 h^2}{x_0^3}$$



2. 牛顿运动定律

2.1 牛顿定律

2.1.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律，又称惯性定律(law of inertia) 可表述如下：任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态，直至其他物体的作用强迫它改变这种状态时为止。

即当 $\vec{F} = 0$ 时， \vec{v} 为恒矢量。

牛顿第一定律指出了两个重要概念惯性和力。

2.1.2 牛顿第二定律

表述

动量为 \vec{p} 的物体，在合外力 $\vec{F} \left(= \sum \vec{F}_i\right)$ 的作用下，其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力，即

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (2.1)$$

(当 $v \ll c$ 时， m 为常量)

于是有

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

即可叙述如下：物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同。

牛顿运动定律的矢量性

由

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

得

$$\vec{F} = m \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + m \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + m \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (2.3)$$

即

$$\vec{F} = ma_x \vec{i} + ma_y \vec{j} + ma_z \vec{k} \quad (2.4)$$

所以

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \quad (2.5)$$

自然坐标系中

$$\vec{F} = m \vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n) = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + m \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad (2.6)$$

也可写作

$$\begin{cases} F_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{ds^2}{dt^2} \\ F_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad (2.7)$$

(ρ 为A处曲线的曲率半径)

力的叠加原理

Theorem 2.1 — 力的叠加原理. 当一个物体同时受到几个力的作用时，则这些力的合力产生的加速度等于每个力单独作用时产生的矢量和，这一结论称为力的独立性原理或力的叠加原理。

即

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i \\ &= m \vec{a}_1 + m \vec{a}_2 + \cdots + m \vec{a}_n = m \sum \vec{a}_i = m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.3 牛顿第三定律

两个物体之间作用力 \vec{F} 和反作用力 \vec{F}' , 沿同一直线, 大小相等, 方向相反, 分别作用在两个物体上。

作用力和反作用力的特点:

1. 作用力与反作用力总是同时存在、相互依存的。
2. 作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上, 虽然它们大小相等、方向相反, 但不能互相抵消。
3. 作用力与反作用力一定属于同一性质的力。

2.1.4 总结

1. 凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系;
2. 对于不同惯性系, 牛顿力学的规律都具有相同的形式, 与惯性系的运动无关。(伽利略相对性原理或称力学相对性原理)

2.2 非惯性系、惯性力

2.2.1 惯性系、非惯性系

Definition 2.1 — 惯性系. 牛顿运动定律在其中成立的参考系称为惯性参考系, 简称惯性系(inertial system)。

“一个远离其他一切物体, 而且没有自转的物体是惯性参照系, 一切相对于该物体做匀速直线运动的参照系也是惯性参照系。牛顿定律就是在这样的参照系中成立。”——王燕生教授《大学物理问题讨论集》

举例:

1. 地面参考系;
2. 地心参考系;
3. 日心参考系;
4. FK4参考系: 以选定的1535颗恒星的平均静止的位形作为基准的参考系, 是比以上三个参考系都严格的惯性系。

Definition 2.2 — 非惯性系. 牛顿运动定律不成立的参考系称为非惯性系(non-inertial system)。

2.2.2 惯性力

2.2.3 平动加速参考系、平动惯性力

假设非惯性系K'相对于惯性系K以加速度 \vec{a}_0 做平动，则由相对运动规律可知，质点相对于K'系和K系的加速度 \vec{a}_0 和 \vec{a} 满足：

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' \quad (2.9)$$

惯性系中K，牛顿运动定律成立，即

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_0 + \vec{a}') \quad (2.10)$$

移项，得

$$\vec{F} - m\vec{a}' = m\vec{a}_0 \quad (2.11)$$

Definition 2.3 — 平动惯性力.

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0 \quad (2.12)$$

将 $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0$ 看作非惯性参考系中受到的“合外力”，则在非惯性系K'中，牛顿第二定律在形式上成立：

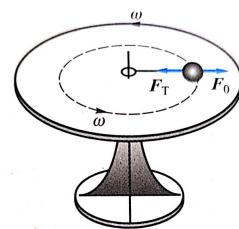
$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}' \quad (2.13)$$

性质

不是真实的力，无施力物体，无反作用力是非惯性系加速度的反映。

2.2.4 匀速转动参考系、惯性离心力

匀速转动参考系也是一种常见的非惯性系。如右图所示，水平转盘以匀角速度 ω 绕通过圆心的垂直轴转动，质量为 m 的小球用长度为 R 的绳子与转轴相连静止在圆盘上，并随圆盘一起转动。站在地面上的观察者看来，小球 m 以匀角速度 ω 随圆盘一起转动，绳子施于小球的拉力 \vec{F}_r 提供了小球做匀速圆周运动时所需的向心力，即



$$\vec{F}_T = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r = -m\omega^2 R \vec{e}_r \quad (2.14)$$

这表明在地面参考系中，小球的运动符合牛顿运动定律。

但是，从圆盘这个转动参考系中来看，小球受到合外力 \vec{F}_T 的作用，但是静止不动。

Definition 2.4 — 平动惯性力. 为了在转动参考系中，仍然能够用牛顿运动定律解释该现象，需要引入一个虚拟的惯性力 \vec{F}_0 ，该力与绳子的拉力 \vec{F}_T 大小相等、方向相反，即

$$\vec{F}_0 = -\vec{F}_T = m\omega^2 R \vec{e}_r = -m\vec{a}_n \quad (2.15)$$

(\vec{e}_r 表示径向单位矢量)

称为惯性离心力(inertial centrifugal force)。

于是引入惯性离心力后，在转动参考系中，牛顿运动定律在形式上成立。物体受到“合外力”为

$$\vec{F}_T + \vec{F}_0 = \vec{0}$$

2.3 例题

解题思路

牛顿定律主要处理两类问题：

1. 质点；
2. 质点系，尤其是连续分布的质点系。

解题的基本思路：

1. 确定研究对象进行受力分析（隔离物体，画受力图）；
2. 取坐标系；
3. 列方程（一般用分量式）；
4. 利用其它的约束条件列补充方程；
5. 先用文字符号求解，后带入数据计算结果。

Exercise 2.1 一质量 m ，半径 r 的球体在水中静止释放沉入水底。已知阻力 $F_r = -6\pi r \eta v$ ， η 为粘滞系数，求 $v(t)$ 。

Solution

取坐标如图 (\vec{F}_B 为浮力), 则

$$mg - F_B - 6\pi\eta rv = ma$$

令 $F_0 = mg - F_B$, $b = 6\pi\eta r$, 于是

$$F_0 - bv = m \frac{dv}{dt}$$

即

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \left(v - \frac{F_0}{b} \right)$$

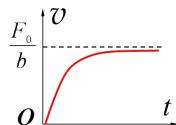
两边同时积分:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \left(\frac{F_0}{b} \right)} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

得

$$v = \frac{F_0}{b} \left[1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right]$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v_L \rightarrow \frac{F_0}{b}$ (极限速度), 当 $t = 3\frac{b}{m}$ 时, $v = v_L(1 - 0.05) = 0.95v_L$ 。
一般认为 $t \leq 3\frac{b}{m}$ 时, $v = v_L$



Exercise 2.2 质量为 m 的物体, 由地面以初速度 v_0 竖直向上发射, 物体受到空气阻力大小 $F_r = kv$ 。试求:

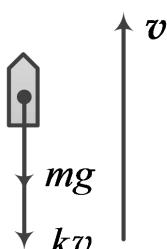
1. 物体发射到最大高度所需要的时间;
2. 物体能到达的最大高度。

Solution

Part One

物体在向上发射的过程中, 受到重力和阻力作用, 方向均与速度方向相反。以竖直向上作为正方向, 由牛顿运动定律可得

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (2.16)$$



对上式分离变量并取定积分，同时注意到物体到达最大高度时 $v = 0$ ，即

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^0 -\frac{m}{mg + kv} dv$$

积分得物体达到最大高度所需的时间为

$$t = \frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv_0}{mg}$$

Part Two

利用 $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dy}$ 代入2.16式，可得

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量并取定积分，即

$$\int_0^y dy = \int_{v_0}^0 -\frac{mv}{mg + kv} dv$$

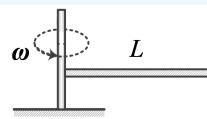
所以物体可达到的最大高度为

$$y = \frac{m}{k} \left(v_0 - \frac{mg}{k} \ln \frac{mg + kv_0}{mg} \right)$$

2.3.1 Problem 3

Exercise 2.3 一条质量均匀分布的绳子，总质量为 M 、长度为 L ，一端拴在竖直转轴 OO'

上，并以恒定的角速度 ω 在水平面上旋转。设转动过程中绳子始终伸直不打弯，且忽略重力的影响，求距离转轴为 r 处绳中的张力 $T(r)$ 。

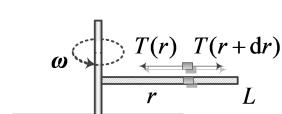


Solution

在距离转轴为 r 处，取一个长为 dr 的一小段绳子，其质量为 $\frac{M}{L}dr$ ，其两端受力如图所示，由于该段绳子作圆周运动，所以由牛顿第二定律得

$$T(r) - T(r + dr) = dm \cdot a_n = \frac{M}{L} dr$$

令



$$T(r) - T(r + dr) = dm \cdot a_n = \frac{M}{L} dr$$

得

$$dT = -\frac{M\omega^2}{L} r dr$$

式中 dT 就是该小段绳子所受的合外力，“-”号表示该段绳子受到的合外力的方向与矢径 r 相反，指向圆心。根据力的叠加原理，离轴 r 处绳中的张力就是 r 以外所有小段绳子所受的合力的绝对值之和，即

$$T(r) = \int |dT| = \int_r^L \frac{M\omega^2}{L} r dr = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2)$$



3. 运动的守恒定律

守恒量: 对于物体系统内发生的各种过程, 如果某物理量始终保持不变, 该物理量就叫做守恒量。

守恒定律: 由宏观现象总结出来的最深刻、最简洁的自然规律。(动量守恒定律、机械能守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律等)

3.1 质点和质点系的动量定理

力的累积效应:

1. $\vec{F}(t)$ 对 t 累计 $\rightarrow \vec{I}, \Delta \vec{p}$
2. \vec{F} 对 \vec{t} 累计 $\rightarrow W, \Delta E$

3.1.1 冲量、质点的动量定理

动量

Definition 3.1 — 动量.

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (3.1)$$

故

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (3.2)$$

即

$$\vec{F} dt = d\vec{p} = d(m\vec{v})$$

两边同时积分:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

冲量

Definition 3.2 — 冲量.

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (3.3)$$

Theorem 3.1 — 动量定理. 在给定的时间间隔内，外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量

微分形式：

$$\vec{F} dt = d\vec{p} = d(m \vec{v}) \quad (3.4)$$

积分形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 \quad (3.5)$$

分量形式：

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases} \quad (3.6)$$

可知，某方向受到冲量，该方向上的动量就增加。

3.1.2 质点系的动量定理

Theorem 3.2 — 质点系的动量定理. 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i0} = \vec{p} - \vec{p}_0 \quad (3.7)$$

或

$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

1. 若 \vec{F} 为恒力，则 $\vec{I} = \vec{F} \Delta t$
2. 若 \vec{F} 为变力，则 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F} (t_2 - t_1)$

动量定理常应用于碰撞问题。

$$\overline{\overrightarrow{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{m \overrightarrow{v}_2 - m \overrightarrow{v}_1}{t_2 - t_1}$$

3.2 动量守恒定律、动能定理

3.2.1 动量守恒定律

由质点系动量定理：

$$\overrightarrow{I} = \int_{t_0}^t \sum_i \overrightarrow{F}_i^{\text{ex}} dt = \sum_i \overrightarrow{p}_i - \sum_i \overrightarrow{p}_{i0}$$

若质点系所受的合外力 $\overrightarrow{F}^{\text{ex}} = \sum_i \overrightarrow{F}_i^{\text{ex}} = 0$

则系统的总动量不变。——动量守恒定律

1. 系统的总动量不变，但系统内任意物体的动量是可以变的；

2. 守恒条件：合外力为零。

$$\overrightarrow{F}^{\text{ex}} = \sum_i \overrightarrow{F}_i^{\text{ex}} = 0$$

当 $\overrightarrow{F}^{\text{ex}} \ll \overrightarrow{F}^{\text{in}}$ ，可近似地认为系统总动量守恒。

3. 若 $\overrightarrow{F}^{\text{ex}} = \sum_i \overrightarrow{F}_i^{\text{ex}} \neq 0$ ，但满足 $F_x^{\text{ex}} = 0$ ，则有 $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x$ 即

$$\begin{cases} F_x^{\text{ex}} = 0, & p_x = \sum_i m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, & p_y = \sum_i m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, & p_z = \sum_i m_i v_{iz} = C_z \end{cases} \quad (3.8)$$

4. 动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一。

3.2.2 功

物体在力 \overrightarrow{F} 的作用下移动 $\Delta \overrightarrow{r} \rightarrow$ 做功 W

恒力作用下的功

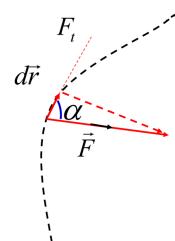
$$\begin{aligned} W &= F \cos \alpha \cdot |\Delta \overrightarrow{r}| \\ &= \overrightarrow{F} \cdot \Delta \overrightarrow{r} \end{aligned} \quad (3.9)$$

变力作用下的功

元位移 $d\overrightarrow{r}$ 、元路程 ds

则元功 $dW = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = F \cos \alpha ds$

积分：

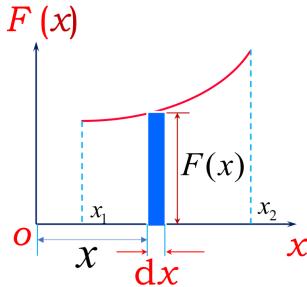


$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cos \alpha \, ds \quad (3.10)$$

1. 功的正负

$$\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, & dW > 0 \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ, & dW < 0 \\ \alpha = 90^\circ, \text{ 即 } \vec{F} \perp d\vec{r}, & dW = 0 \end{cases}$$

2. 做功的图示



3. 功是一个过程量，与路径有关。

4. 合力的功，等于各分力的功的代数和

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ d\vec{r} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{aligned}$$

则

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz)$$

又有 $W_x = \int_{x_1}^{x_B} F_x \, dx$ 、 $W_y = \int_{y_1}^{y_B} F_y \, dy$ 、 $W_z = \int_{z_1}^{z_B} F_z \, dz$ 。

于是

$$W = W_x + W_y + W_z$$

3.2.3 功率

$$\text{平均功率 } \bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Definition 3.3 — 瞬时功率.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.11)$$

即

$$P = Fv \cos \alpha \quad (3.12)$$

3.2.4 动能定理

Theorem 3.3 — 质点的动能定理.

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int F_t |d\vec{r}| = \int F_t ds \end{aligned}$$

而

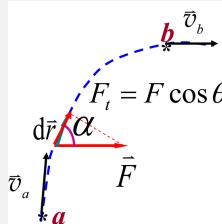
$$F_t = m \frac{dv}{dt}$$

于是

$$\begin{aligned} W &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

即

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1} \quad (3.13)$$



合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。——质点的动能定理

1. 功是过程量，动能是状态量；
2. 功和动能依赖于惯性系的选取，但对不同惯性系动能定理形式相同。

质点系的动能定理

质点系：由有限个或无限个质点组成的系统。（可以是固体也可以是液体，它概括了力学中最普遍的研究对象）

内力和外力：质点系以外的物体作用于质点系内各质点的力称为外力，质点系内各质点之间的相互作用力称为内力，外力和内力的区分完全决定于质点系

(研究对象) 的选取。

质点系内力的功: 一切内力矢量和恒等于零。但一般情况下, 所有内力作功的总和并不为零。例如, 两个彼此相互吸引的物体, 移动一段位移, 都作正功。

质点系的动能定理

由质点动能定理 $W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

得

$$W_e + W_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 \right) = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \quad (3.14)$$

意义: 合外力所做的功等于系统动能的增量。

3.3 保守力、势能、成对力的功

3.3.1 保守力

万有引力

m_E 对 m 的万有引力为

$$\vec{F} = -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r$$

m 移动 $d\vec{r}$ 时, \vec{F} 做元功为

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

m 从 A 到 B 时, \vec{F} 做功为

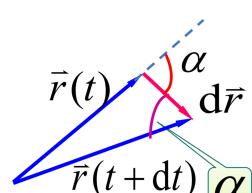
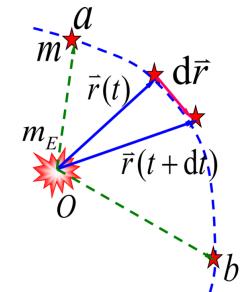
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G \frac{m_E m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

其中, $\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = |\vec{e}_r| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha = dr$

即

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{m_E m}{r^2} \right) dr$$

于是



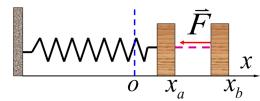
$$W = G m_E m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (3.15)$$

做功特点: 做功大小只与物体的始末位置有关, 与路径无关。

弹性力做功

弹性力 $\vec{F} = -kx \hat{i}$, 则元功

$$dW = -kx dx$$



于是

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F dx = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \quad (3.16)$$

做功特点：做功大小只与物体的始末位置有关，与路径无关。

保守力与非保守力的定义

保守力：作功与路径无关，仅决定于始、末位置的力。

质点沿任意闭合路径运动一周时，保守力对它作功为零。

非保守力：所作的功与路径有关的力。(如摩擦力)

Definition 3.4 — 势能. 因相对位置而具有的作功本领称为势能或位能(因有速度而具有的作功本领称为动能)。势能与质点的位置有关。

如引力势能

$$E_p = -G \frac{m_E m}{r}$$

如弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

保守力做功

保守力做的功等于势能的减少，即

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p \quad (3.17)$$

保守力做功势能的计算

令 $E_{p0} = 0$, 则

$$E_p(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{E_{p0}=0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.18)$$

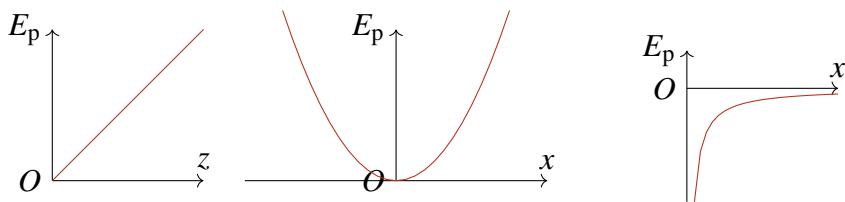
1. 势能是状态的函数, $E_p = E_p(x, y, z)$;
2. 势能具有相对性, 势能大小与势能零点的选取有关;
3. 势能是属于系统的;
4. 势能差与势能零点的选取无关。

势能曲线

$$E_p = mgz$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = -G\frac{m_E m}{r}$$



把势能和相对位置的关系绘成曲线，便得到势能曲线。

通过势能曲线，可以显示出系统总机械能，动能和势能间的关系 $E = E_k + E_p$ ，由 $E_k \geq 0$ ，可以根据曲线的形状讨论物体的运动。

由势能求表达式

可以根据势能 $E_p(x, y, z)$ 的情况，判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向：

$$dW = F_x dx = -dE_p$$

则

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad (3.19)$$

如果势能是位置 (x, y, z) 的多元函数，则

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (3.20)$$

3.3.2 成对的力的功

力总是成对的，无论是保守力还是非保守力。

设质量为 m_1 和 m_2 的两个物体分别受到 F_1 和 F_2 的力，且 $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ 在 dt 时间内位移为 dr_1 和 dr_2 ，质点 2 相对于质点 1 的相对位移 $d\vec{r}'$ 有 $d\vec{r}'_2 = d\vec{r}_1 + dr'$ 则元功为：

$$\begin{aligned} dW_1 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 \\ dW_2 &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

这一对力所作元功之和为：

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot (d\vec{r}_1 + d\vec{r}') \\ &= (-\vec{F}_2 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}' \\ &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}' \end{aligned}$$

1. 成对力的功只与作用力和相对位移有关；
2. 成对力的总功具有与参考系选择无关的不变性质。

为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，再计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。

3. 在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力的功必为零。

3.4 功能原理、机械能守恒定律

3.4.1 质点系功能原理

系统的机械能：动能与势能的综合称为机械能，即

$$E = E_k + E_p$$

内力的功可分为：保守内力的功和非保守内力功

$$W^{\text{in}} = \sum_i W_i^{\text{in}} = W_c^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

由势能的定义，保守内力的功总等于系统势能的减少：

$$W_c^{\text{in}} = -\Delta E_p$$

Theorem 3.4 — 系统的功能原理. 由质点系的动能定理：

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = W^{\text{ex}} + W_c^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = W^{\text{ex}} - \Delta E_p + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = \Delta E_k$$

于是，

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} \quad (3.21)$$

在选定的质点系内，在任一过程中，质点系总机械能的增量等于所有外力的功与非保守内力的功的代数和。

非保守内力的功将导致机械能与其他形式的能量转换。

3.4.2 机械能守恒定律

Theorem 3.5 — 机械能守恒定律. 由功能原理: $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$ 。

如果 $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$, 则

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

即, 如是系统内只有保守内力做功, 其他内力和一切外力都不做功, 或元功之和为零, 则系统内各物体的动能和势能可以相互转换, 但总机械能保持不变。

1. 质点系的机械能守恒的条件是: 在一个过程中, 既没有外力做功, 也没有非保守内力(如摩擦力、爆炸力、流体的黏性阻力等耗散力)做功, 或者外力和非保守内力做的总功为零。
2. 在满足守恒条件时, 质点系的总机械能可以在动能和系统势能之间转化, 也可以在系统内各物体之间转移, 但在转化和转移过程中保持总机械能不变。

3.4.3 能量守恒定律

Theorem 3.6 — 能量守恒定律. 对于一个不受外界影响的封闭系统(有时也称为孤立系统), 系统内各种不同形式的能量可以互相转化, 也可以从系统的一部分转移到另一部分, 但不论系统内发生什么过程, 能量既不会消失也不会产生, 系统的总能量恒定不变。这就是能量守恒定律(law of conservation of energy)。

3.4.4 动量与能量的比较

物理量	动量(momentum)	能量(kinetic energy)
表达式	$\vec{p} = m \vec{v}$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
单位	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$	J
性质	矢量	标量
关系		$\frac{p^2}{2m} = E_k$
变化量	Δp 由力的冲量决定	ΔE_k 由力的功决定

另外, Δp 与惯性系的选择无关, ΔE_k 随惯性系的不同而不同。

3.5 碰撞、碰撞定律、质心运动定律

3.5.1 碰撞

Definition 3.5 — 碰撞. 两个或两个以上的物体相遇，相遇时物体之间的相互作用，仅持续极为短暂的时间。

特点

1. 作用时间极短；
2. 作用力变化极快；
3. 作用力峰值极大；
4. 过程中物体发生形变；
5. 可认为碰撞过程中只受内力 ($\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$)，故遵守动量守恒定律 ($\sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$)。

3.5.2 碰撞定律

Theorem 3.7 — 碰撞定律.

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (3.22)$$

即

$$e = \frac{\text{分离速度}}{\text{接近速度}}$$

(e 称恢复系数，由材料性质决定。)

3.5.3 碰撞的分类

完全弹性碰撞

恢复系数 $e = 1$, $v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$ 。

碰撞后形变能完全恢复，没有机械能的损失，系统碰撞前后机械能守恒。

动量守恒，机械能守恒。

对于完全弹性对心碰撞：

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

联立方程解得

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20} \\ v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} \end{cases} \quad (3.23)$$

完全非弹性碰撞

恢复系数 $e = 0$, $v_2 = v_1 = v$ 。

碰撞后二者没有分开，并以共同的速度一起运动。物体碰撞后已经完全不可能恢复形变。

动量守恒，机械能不守恒。

对于完全非弹性对心碰撞：

由

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

解得

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (3.24)$$

损失能量

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (3.25)$$

非完全弹性碰撞

恢复系数 $0 < e < 1$, $v_2 = v_1 = e(v_{10} - v_{20})$ 。

碰撞后形变不能完全恢复，一部分机械能将被转变为其他形式的能量（如热能）。

动量守恒，机械能不守恒。

斜碰撞

碰撞前与碰撞后的速度不在一条直线上。

例如，一光滑球与另外静止的光滑球相碰。如果两者均为弹性球，且碰后两者的运动方向垂直，则两小球质量必然相等

3.5.4 质心

Definition 3.6 — 质心. 在研究质点系统问题中，与质点系统质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布中心。

质心位置

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \quad (3.26)$$

即

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

则质量连续分布的系统的质心位置

$$\vec{r}_C = \int \vec{r} dm / M$$

即

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int x dm}{M} \\ y_c = \frac{\int y dm}{M} \\ z_c = \frac{\int z dm}{M} \end{cases}$$

注意

1. 质心不同于重心，物体体积不太大时，两者重合；物体远离地球时 受重力，“重心”失去意义，“质心”仍在。
2. 当外力的作用线通过质心时，物体只作平动，没有转动，就好像物体的质量都集中在质心这一点上。

质心速度

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \quad (3.27)$$

质心加速度

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M} \quad (3.28)$$

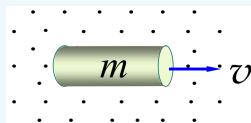
3.5.5 质心运动定律

质心的加速度与质点系所受外力的矢量和成正比，与质点系的总质量成反比，质心的加速度与内力无关。

$$\vec{a}_C = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M} \quad (3.29)$$

3.6 例题

Exercise 3.1 在宇宙中有密度为 ρ 的尘埃,这些尘埃相对惯性参考系是静止的。有一质量为 m_0 的宇宙飞船以初速度 v_0 穿过宇宙尘埃,由于尘埃粘贴到飞船上,致使飞船的速度发生改变。求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系。(设想飞船的外形是截面积为 S 的圆柱体)



Solution

尘埃与飞船作完全非弹性碰撞, 把它们作为一个系统, 则动量守恒:

$$m_0 v_0 + (m - m_0) \times 0 = m v$$

解得

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所有与飞船迎面相撞的尘埃都会粘贴到飞船上。考查 dt 时间内与飞船迎面相撞的尘埃:

$$dm = \rho S v dt$$

又因为

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

所以

$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S v dt$$

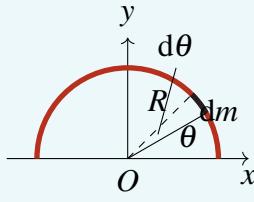
由

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0} \int_0^t dt$$

得

$$v = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}}$$

Exercise 3.2 已知一圆环半径为 R , 质量为 M , 求它的质心位置。



Solution

建坐标系如图, 取一小段长度 dL 则其质量为 $dm = \lambda dL$ 。

又 $dL = Rd\theta$, 故 $dm = \frac{M}{\pi R}Rd\theta$

而 $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$

故

$$y_c = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int_0^\pi R \sin\theta \frac{M}{\pi R}R d\theta}{M} = \frac{2R}{\pi}$$

由对称性可知,

$$x_c = 0$$