University Physics

Notes

Lai Wei

武漢大學
WUHAN UNIVERSITY

Dedicated to 我自己.

目录

I 大学物理A1

大学物理A1

1. 质点运动学

1.1 质点力学

1.1.1 参考系、质点

参考系

为描述物体运动而选的标准物。

参考系

物体能否视为质点视具体情况而定。

坐标系

定量描述物体运动。坐标系的原点一般固定在参照系上。

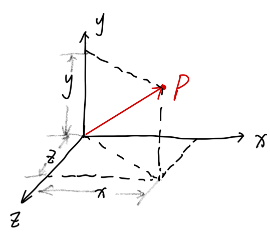
1. 直角坐标系(x, y, z)
2. 球坐标系(r, θ, φ)：二维极坐标
3. 柱坐标系(ρ, φ, z)
4. 自然坐标系s

1.1.2 位置矢量、运动方程、路程、位移

位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

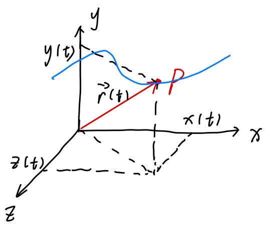
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.2}$$



$\vec{r}$的方向可以用一组方向角，即$\vec{r}$与x轴、y轴、z轴

之间的夹角(α,β,γ)来表示。$\cos\alpha=\frac{x}{r}$、$\cos\beta=\frac{y}{r}$、$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，有$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$。

运动方程（直角坐标系下）



$$\vec{r}\,(t)=x\,\vec{i}\,(t)+y\,\vec{j}\,(t)+z\,\vec{k}\,(t) \tag{1.3}$$

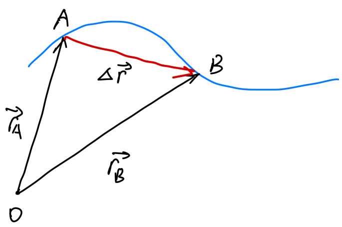
分量式

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

从上式中消去参数得质点的**轨迹方程**。

1.1.3 位移、路程

位移$\Delta\vec{r}$（位置矢量的改变量）



$$\vec{r_A}=x_A\,\vec{i}+y_A\,\vec{j}+z_A\,\vec{k},\ (t_A\text{时})$$
$$\vec{r_B}=x_B\,\vec{i}+y_B\,\vec{j}+z_B\,\vec{k},\ (t_B\text{时})$$

于是其位移

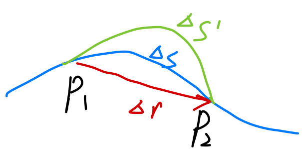
$$\Delta\vec{r}=\vec{r_B}-\vec{r_A}=(x_B-x_A)\,\vec{i}+(y_B-y_A)\,\vec{j}+(z_B-z_A)\,\vec{k} \tag{1.4}$$

方向由A指向B。

路程Δs实际轨迹

从P_1到P_2，路程记为$\Delta s=P_1\hat{P}_2$。

位移与路程的区别：



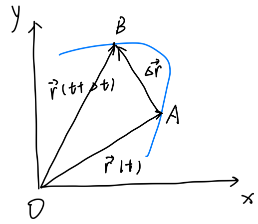
1. 位移是适量，路程是标量；
2. 两点之间位移是唯一的，路程不是唯一的；
3. 一般情况下，$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$

   在方向不变的圆周运动中，$|\Delta\vec{r}|=\Delta s$ 当$\Delta t\to 0$时，$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$（元位移$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\,\vec{i}+\mathrm{d}y\,\vec{j}+\mathrm{d}z\,\vec{k}$）。

1.1.4 速度

平均速度

在Δt内，质点位移（二维）为



$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t) \\
&= \Delta x\,\vec{i}+\Delta y\,\vec{j}
\end{aligned}
$$

定义

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta y}\vec{j} \tag{1.5}$$

瞬时速度

当$\Delta t\to 0$时，

$$
\begin{aligned}
\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\
&= v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

即有，

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.7}$$

方向角

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\ \cos\beta=\frac{v_y}{v},\ \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

习惯上，二维情况下，用$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}$表示方向。
同理，速率$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而因为$t\to 0$时，有$|\vec{r}|=s$，则

$$v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即有，速度的大小等于速率。

速度在自然坐标系下的表示

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e_t} = v\vec{e_t} \tag{1.8}$$

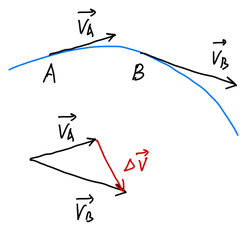
其中，$\vec{e_t} = 1$，表示方向，v表示速度大小。

1.1.5 加速度

反应速度大小和方向随时间变化快慢。

平均加速度

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.9}$$



$\vec{a}$与$\Delta\vec{v}$的方向相同。

瞬时加速度

特点：

1. "矢量性"
2. "瞬时性"
3. "相对性"（相对于某一参考系）

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned} \tag{1.10}$$

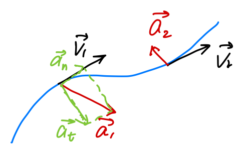
方向角α、β和γ满足

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

习惯上，二维时方向表示为$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$。

加速度的方向：

- 直线运动：$\vec{a} \mathbin{//} \vec{v}$。
- 曲线运动：指向轨迹凹测。自然坐标系下，$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$。



在变速曲线运动中，加速度的方向总是指向轨迹凹的一侧。与$\vec{v}$呈锐角时，运动变快；与$\vec{v}$呈钝角时，运动变快。（因为$\Delta\vec{v}$必定指向曲线凹的一侧。）

1.2 质点运动

1.2.1 一般曲线运动与圆周运动的定义

一般曲线运动

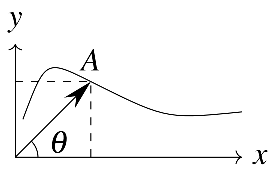
特点：曲率半径随时间变化，不是定值。描述曲线运动一般选自然坐标系。

圆周运动

圆周运动是一种常见的、简单而基本的曲线运动，是研究一般曲线运动的基础

1.2.2 圆周运动

位置量的描述

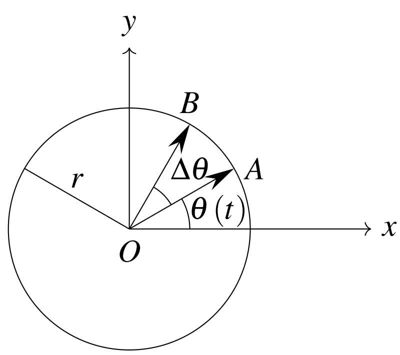


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

于是

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$$

圆周运动的角量



角坐标$\theta(t)$，角位移$\Delta\theta=\theta(t)-\theta(t_0)$。

平均角速度

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.11}$$

角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

ω是**赝矢量**，方向与$\mathrm{d}\theta$一致，由右手螺旋定则确定，且总是垂直于圆平面，沿着圆周的轴线方向。

平均角加速度

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.13}$$

角加速度

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.14}$$

角量与线量的关系

路程与角距离的关系

$$\Delta s=r\Delta\theta \tag{1.15}$$

速率与角速度的关系

$$b=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

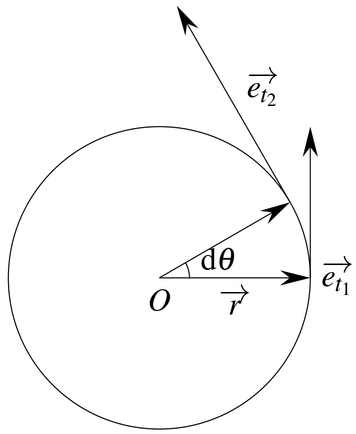
故

$$v(t)=r\omega(t) \tag{1.16}$$

速度

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}&=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}\\&=v\overrightarrow{e_t}\\&=r\omega\overrightarrow{e_t}\end{aligned} \tag{1.17}$$

圆周运动的切向加速度和法向加速度



质点做变速圆周运动时

$$\overrightarrow{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\overrightarrow{e}_t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_t+\overrightarrow{v}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e}_t}{\mathrm{d}t} \tag{1.18}$$

$$\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\alpha \tag{1.19}$$

因为$|e_{t_1}|=|e_{t_2}|=1$，所以$|\mathrm{d}\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{e_{t_1}}|\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$。
当$\mathrm{d}\theta\to 0$时，$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}\perp\overrightarrow{e_{t_1}}$，故$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}$的方向与$\overrightarrow{e_n}$方向相同，即

$$\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}=\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_n} \tag{1.20}$$

所以

$$v\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_t}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_n}=v\omega$$

于是

$$\alpha_n=\omega v \tag{1.21}$$

$$=\frac{v^2}{r} \tag{1.22}$$

综上所述，切向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t}$, $\alpha_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；法向加速度$\overrightarrow{\alpha_t}=\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_n}$, $\alpha_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2r=\omega v$。

1.2.3 一般曲线运动

同圆周运动理知，

$$\alpha_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

$$\alpha_n = \frac{v^2}{\rho} \quad （\rho\text{是曲率半径}） \tag{1.24}$$

而$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha_t} + \overrightarrow{\alpha_n}$，所以

$$\left|\overrightarrow{\alpha}\right| = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} \tag{1.25}$$

自然坐标系下的加速度表达式：

$$\overrightarrow{\alpha_t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{e_t} \tag{1.26}$$

$$\overrightarrow{\alpha_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_n} \tag{1.27}$$

1.3 相对运动

1.3.1 时间与空间

在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关。

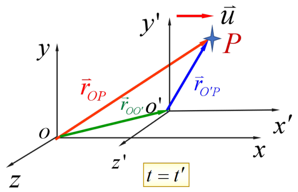
时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

1.3.2 相对运动公式

如右图，$\overrightarrow{r_{OP}} = \overrightarrow{r_{OO'}} + \overrightarrow{r_{O'P}}$，

对方程两边对时间求导数，得



$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{OP}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{OO'}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{O'P}}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\overrightarrow{v_{P\to O}} = \overrightarrow{v_{P\to O'}} + \overrightarrow{v_{O'\to O}} \tag{1.28}$$

（绝对速度 = 相对速度 + 牵连速度）

方程两边对时间求导数，得

$$\overrightarrow{a_{P\to O}} = \overrightarrow{a_{P\to O'}} + \overrightarrow{a_{O'\to O}} \tag{1.29}$$

（绝对加速度 = 相对加速度 + 牵连加速度）

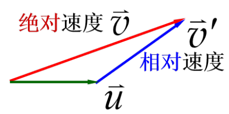
如果$\vec{u}$是恒矢量，则$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=0$，$\overrightarrow{a_{PO}}=\overrightarrow{a_{PO'}}$，$\overrightarrow{a_{O'O}}=0$。

注意：

1. 当$\vec{u}$接近光速时，速度变换、加速度变换不成立；
2. 仅仅讨论$\vec{u}=u_x\vec{i}$的情况（u_x为常数），即水平方向有变换，其他方向上没有变换。

1.3.3 伽利略速度变换

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} \tag{1.30}$$



绝对速度$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，相对速度$\vec{v}\,'=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}$，牵连速度$\vec{u}$。

加速度关系：

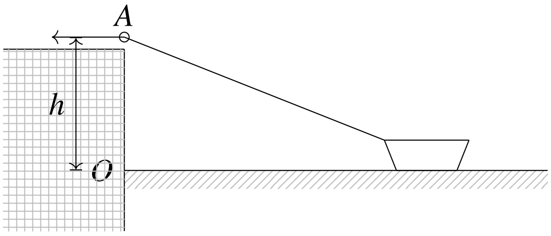
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \tag{1.31}$$

若$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=0$，则$\vec{a}=\vec{a}\,'$

1.4 例题

1.4.1 Problem 1

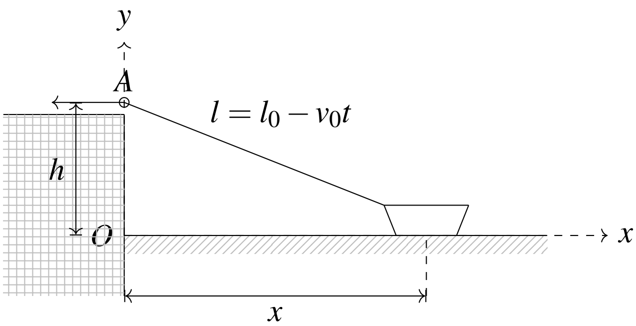
在离水面高为h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图所示。设人以匀速率v_0收绳，试求：当船距岸边x_0时，船的速度和加速度的大小各是多少？



Solution

Part One

建立如图所示的坐标系。



设初始时刻，船与岸上A点之间的绳长为l_0。在任意时刻船离岸边的距离为x，绳长为l_0。船在运动过程中，l和x均是时间t的函数。

由题意，$l = l_0 - v_0 t$，所以

$$v_0 = -\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又由几何关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

对上式两边同时对t求导，可得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0$$

Part Two

再将速度对时间t求导，即可得到船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

Part Three

令$x=x_0$，得船在离岸边为x_0时的速度和加速度分别为

$$v=\frac{\sqrt{x_0^2+h^2}}{x_0}v_0,\ a=-\frac{v_0^2h^2}{x_0^3}$$