

# 天球振幅科研笔记

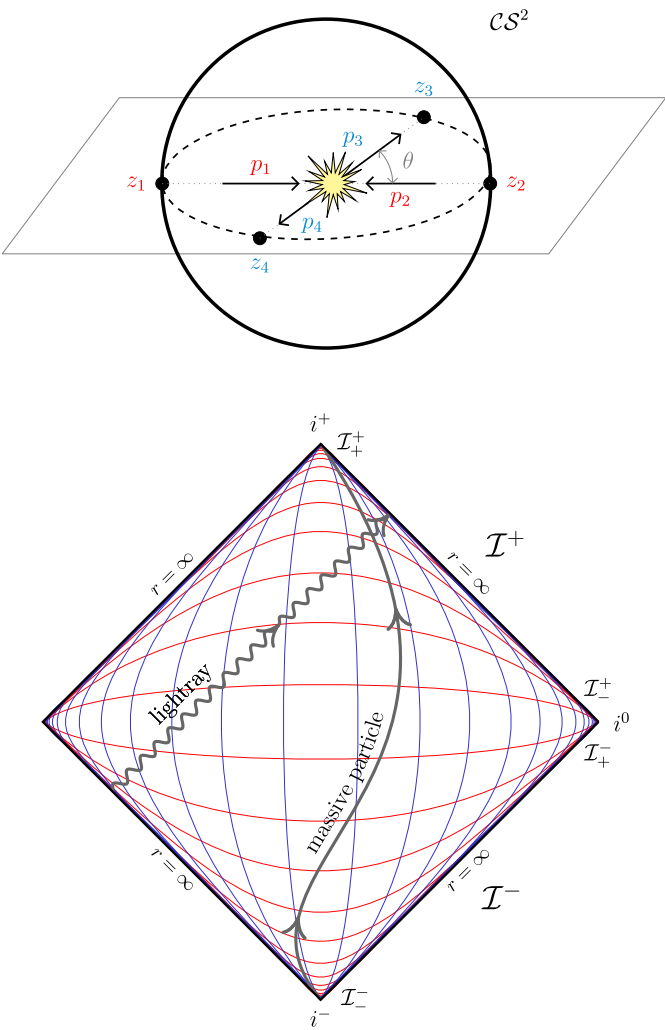
CELESTIAL AMPLITUDES

BUFAN ZHENG

Undergraduate Student at the Wuhan University

[GitHub](#)

[whuzbf@qq.com](mailto:whuzbf@qq.com)



---

## 目录

|      |  |    |
|------|--|----|
| 第一部分 | A quick review on SR & GR                              | 1  |
| 1    | Basics conceptions in SR                               | 1  |
| 2    | Poincaré group and Lorentz group                       | 1  |
| 2.1  | Poincaré algebra                                       | 2  |
| 3    | Boost and Rapidity                                     | 2  |
| 4    | Connected components of Lorentz group                  | 3  |
| 5    | Poincaré group and particles                           | 4  |
| 第二部分 | Lorentz group & special linear groups                  | 5  |
| 6    | $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$                       | 5  |
| 7    | $SO(2,1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ | 6  |
| 8    | $SO(3,1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ | 7  |
| 9    | Higher dimensions                                      | 8  |
| 第三部分 | Conformal transformations                              | 11 |
| 10   | Pull back, push forward & Lie derivative               | 11 |
| 11   | Killing & Conformal Killing vector field               | 12 |
| 12   | Conformal transformations in $d > 2$                   | 13 |
| 13   | Conformal transformations in $d = 2$                   | 16 |
| 14   | Conformal transformations on the Riemann sphere        | 17 |
| 第四部分 | Celestial Sphere & Asymptotic Flat Spacetime           | 19 |
| 15   | Carter-Penrose diagram                                 | 19 |

|  |        |
|--|--------|
| 16 Celestial Sphere                                | 21     |
| 17 Asymptotic flat spacetime: basic concepts       | 23     |
| 18 Asymptotic flat spacetime: BMS group            | 26     |
| 19 Asymptotic flat spacetime: charges              | 28     |
| 19.1 Noether theorem                               | 28     |
| <br>第五部分 Soft Theorem                              | <br>29 |
| 20 Review on the quantization of gravity           | 29     |
| 21 Soft theorem from feynman diagrams              | 31     |
| 22 Subleading and subsubleading order soft theorem | 33     |
| 23 Massless QED                                    | 34     |
| 24 Ward identity = Soft theorem                    | 37     |
| <br>第六部分 Appendix:<br>Geometric Approaches         | <br>38 |
| <br>参考文献   | <br>39 |

---

# A quick review on SR & GR

## SECTION 1

### Basics conceptions in SR

我们生活的空间是一个四维局部平坦的 **Lorentz 流形**，也就是一个四维微分流形配备一个非正定、非退化的度规  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ ，这是一个  $(0, 2)$  张量。局部平坦意思是说任何一点处都可以选取一个坐标系<sup>1</sup>使得  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ， $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ 。而 Lorentz 体现在  $\eta$  有一个指标是负数，而且根据惯性定理，无论你选取什么坐标系将度规对角化，最终负数的个数都是一样的，这样一来我们便可以严格的区分时间和空间<sup>3</sup>。

参数化流形后，时空上的每一点（事件）都将对应一个坐标  $x^\mu$ ，时空中的曲线（世界线）可以参数化为  $x^\mu(\tau)$ ，其可以看作是由矢量场  $X = X^\mu \partial_\mu = \frac{x^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu$  诱导的。考虑世界线上相邻的两点，我们可以定义线长为

$$dl = \sqrt{|g(X, X)|} = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{x^\nu}{d\tau}}$$

很多时候也把线长记为  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  但是在微分几何的严格意义下， $dx^\mu$  是对偶矢量，并不是初等微积分中的微分，所以这个式子只能理解为  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ ，也就是说  $ds^2$  只是张量  $g$  的另一个叫法而已！后面我们为了方便可能牺牲严谨性，使用  $ds^2$  表示世界线长。

GR 中最重要的基本假设便是在坐标变换下物理定律是不变的，这说明作用量必须是标量，几乎唯一确定了真空引力场作用量为：

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1.1)$$

由于度规是张量，所以其在坐标变换下分量变换为：<sup>4</sup>

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

在 SR 中我们仅研究平直的时空，或者说只研究惯性系之间的变换，这些惯性系中的变换满足  $\tilde{\eta} = \eta$ ，可以一般的记为：

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

那么  $\Lambda$  满足：

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.2)$$

本笔记主要考虑 SR 时空。

## SECTION 2

### Poincaré group and Lorentz group

显然所有的  $\Lambda$  构成了一个群，称之为 **Lorentz 群**：

$$L \equiv O(3, 1) \equiv \{\Lambda \in M(4, \mathbb{R}) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> 这个坐标系称为**局部惯性系**，由于可以从指数映射结合测地线来构造这个惯性系，所以也称为**自由下落参考系**

<sup>2</sup> 这里符号约定为  $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$

<sup>3</sup> 如果这里把  $\eta$  中的  $-1$  变成  $+1$ ，我们称为 **Riemann 流形**

$\Lambda$  是宇宙学常数

$g \equiv \det g_{\mu\nu}$

$R$  是 Ricci 标量

取自然单位制  $c = \hbar = 1$

<sup>4</sup> 注意两边对应的自变量，因为张量都是关于流形上点的场，所以这里坐标变换后流形上某点对应的坐标也变了。

而所有的保度规变换还要加入  $a^m u$ , 构成 **Poincaré 群**:  $O(3,1) \ltimes \mathbb{R}$ , 群乘法为:

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') = (\Lambda \cdot \Lambda', a + \Lambda \cdot a') \quad (2.2)$$

利用 Poincaré 群的不等价不可约表示可以对基本粒子进行分类, 见本部分末尾。后面我们将主要关注 Lorentz 群。不难验证  $\det \Lambda = \pm 1$ , 它将 Lorentz 群分成两个分支, 其中  $\det \Lambda = 1$  的部分含有单位元, 构成子群**正规 Lorentz 群**。记为  $SO(3,1)$  或  $L_+$

另外  $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$  也将 Lorentz 群分成两个分支, 其中  $\Lambda^0_0 \geq 1$  的部分含有单位元, 构成子群**正时 Lorentz 群**。记为  $O(3,1)^\uparrow$  或  $L_+^\uparrow$ 。

最后  $L_+^\uparrow \equiv L^\uparrow \cap L_+$  也构成了  $L$  的一个子群。这些子群之间可以用时间反演和空间反演算符相联系:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

显然  $L_+ = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}\}$ ,  $L^\uparrow = \{L_+^\uparrow, \mathcal{P}\}$ ,  $L = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}, \mathcal{P}\}$

#### SUBSECTION 2.1

### Poincaré algebra

现在考虑群的局部性质, 考虑无穷小坐标变换  $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$ , 保度规条件为:

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \eta_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2.4)$$

$\xi^\mu$  可以用  $\omega^\mu_{\nu}$  和  $b^\mu$  两个无穷小参数标记:

$$\xi^\mu = \omega^\mu_{\nu} x^\nu + b^\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

平移生成元为:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \Rightarrow T(b) = \exp(-ib^\mu P_\mu)$$

boost 和转动生成元为:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Rightarrow \Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)$$

生成共同构成 Poincaré 代数:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

#### SECTION 3

### Boost and Rapidity

我们把 Lorentz 群记为  $O(3,1)$  强烈暗示了其  $O(n)$  群的类似性, 其实 Lorentz 变换完全可以看作是四维时空中的旋转。三维空间旋转有三个自由度, 分别是绕着  $x, y, z$  轴的旋转, 这些轴都是由另外两个轴张成的平面所确定的, 总数为  $C_3^2 = 3$ 。那么对于高维空间旋转, 比如四维空间可以推广为共  $C_4^2 = 6$  个自由度。其中有 3 个是单纯的  $\mathbb{R}^3$  中的旋转, 还有三个是混合了时间轴的旋转, 也就是初等 SR 介绍中的两个相对速度为  $v$  的惯性系之间的变换, 称为 **boost**。比如  $x$  方向上的 boost 就可以显式表达出来为:

$$\begin{cases} \gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta(v)^2} \\ \beta(v) = v/c \end{cases}$$

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\beta(v) & 0 & 0 \\ -\gamma(v)\beta(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$\Lambda(v)$  是一个 boost, 或者说四维转动, 类比三维转动  $R_x(\theta)R_x(\phi)R_x(\theta+\phi)$ , 很容易想到  $\Lambda(v)\Lambda(w) \stackrel{?}{=} \Lambda(v+w)$ , 即绕着某个轴的转动是一个单参数 Abel 子群。但实际上以  $v$  为参数并不能看出这一点。可以定义<sup>5</sup>:

$$\chi(v) \equiv \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right) \quad (3.2)$$

称为 **rapidity** 这样便有  $\Lambda(\chi_2)\Lambda(\chi_1) = \Lambda(\chi_2 + \chi_1)$ 。

rapidity 其实有非常明显的物理含义, 回忆一下速度的定义:

$$\text{velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}}$$

由于右边的分式分子分母都是依赖于参考系的, 所以如果 B 相对于 A 运动<sup>6</sup>, 实际上可以对于 B 定义三种不同的速度。

<sup>5</sup>  $\chi \in (-\infty, +\infty)$ , 所以是非紧致的 Lie 群

<sup>6</sup> 方便起见假设沿  $x$  轴作直线运动, 但不要求匀速

**Definition 1**  $v = \frac{dx}{dt}$ , 这里  $x, t$  都是在 A 的参考系下测得的。

**Definition 2**  $u = \frac{dx}{d\tau}$ , 这里  $x$  是在 A 的参考系下测的,  $\tau$  是 B 的固有时。

这个定义是关于参考系协变的, 也就是通常的 4-速度的定义。

**Definition 3**  $\tilde{v} = \frac{dx_B}{d\tau}$ , 分子分母都是 B 自己测得的。

但是这个定义有个很大的问题, B 自己测量时间没问题, 但是 B 自己测量自己的位移始终是 0, 所以上面这个定义必须重新审视。首先我们看如何对应 B 的加速度, 假设 B 在固有时  $\tau$  的时刻相对于地面系的速度<sup>7</sup>为  $v$ , 这个时候考虑一个与 B 速度相同的瞬时惯性系, 也就是说过一段时间  $d\tau$  之后 B 相对于这个瞬时惯性系会有个速度  $d\tilde{v}$ , 加速度也便定义为  $d\tilde{v}/d\tau$ 。假设这段时间内, 相对于地面系 B 速度增加了  $dv$ , 那么根据速度叠加法则:

$$\frac{v + d\tilde{v}}{1 + v d\tilde{v}/c^2} = v + dv \Rightarrow d\tilde{v} (1 + v^2/c^2) dv \quad (3.3)$$

现在对加速度进行积分:

$$I(\tau) = \int_0^\tau d\tau \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \int_0^{\tilde{v}} d\tilde{v} = \int_0^v \frac{dv}{1 + v^2/c^2} = c \cdot \operatorname{arctanh} \frac{v(\tau)}{c} = c \cdot \chi(v(\tau)) \quad (3.4)$$

所以在这个速度的定义下, 自然导出了 rapidity, 如果取自然单位制  $c = 1$ , 那么两者完全一致。

<sup>7</sup> 第一个定义

#### SECTION 4

### Connected components of Lorentz group

对于任何正规且正时的 Lorentz 群中的元素都可以做标准分解:

**Theorem 1**  $\forall \Lambda \in L_+^\uparrow, \exists R_1, R_2 \in SO(3)$ , 使得

$$\Lambda = R_1 L_x(\chi) R_2 \quad (4.1)$$

而 Lorentz 群只需要再加上  $\mathcal{T}$  和  $\mathcal{P}$  即可, 而且这种分解对于  $d > 2$  维时空都是适用的。从物理上很好理解, 一般的 Lorentz 变换无非就是绕着任意轴的 boost, 我们都可以先进行转动, 将 boost 方向转为  $x$  轴, 进行 boost 之后再转回原来的方向。

任何一个 Lie 群实际上都是一个微分流形, 而连通性这个概念正是建立在此之上从拓扑观点来看的。作为一个流形,  $G$  不一定是连通的, 可以有很多个连通分支, 其中只有含有  $e$  的连通分支才能构成子群, 我们记为  $G_e$ , 有下面的定理成立:

**Theorem 2**  $G_e \triangleleft G$  且所有连通分支构成商群  $G/G_e$ 。

这里不做严格证明, 下面我们将此定理用于 Lorentz 群。根据 4.1, 由于其中的每个因子都与  $e$  道路连通, 所以  $L_+^\uparrow \subseteq L_e$ , 而  $L$  中的其它群元为了与  $e$  相连, 必须通过离散变换  $\mathcal{T}, \mathcal{P}$ , 所以实际上  $L_+^\uparrow = L_e$ , 那么连通分支构成商群  $L/L_+^\uparrow \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , 这里同构成立是因为商群实际上由  $\{\mathcal{T}, \mathcal{P}\}$  生成。

可见 Lorentz 群确实包含了 4 个连通分支, 可以根据  $\Lambda_0^0$  以及  $\det \Lambda$  的符号进行分类。

后面我们都用  $\cong$  表示同构,  $\simeq$  表示同态

## SECTION 5

# Poincaré group and particles

这一部分是最为精妙的部分, 我们将会利用 Poincaré 群的不可约表示对场和粒子进行分类, 本节论述主要参考 Weinberg[1] 和董无极 [2]

to be continue...

# Lorentz group & special linear groups

本部分我们的目的是建立一系列同构关系，基本思路就是先找到一个同态，然后利用同态核定理构造同构

**Theorem 1** | (同态核定理) 如果  $f: G \rightarrow H$  是一个群同态，那么有  $\ker(f) \triangleleft G$  且  $G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$

而且本部分会充分利用李群是微分流形这一拓扑性质进行说明，很多证明没有数学上的严谨，重在直观的感性认知。

## SECTION 6

### $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

$SU(2)$  是所有行列式为 1 的酉矩阵构成的群，其群元素可以一般的写为：

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

这意味着描述一个群元需要四个实参，且满足  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ ，显然这意味着  $SU(2)$  的拓扑结构为  $\mathcal{S}^3$ 。另外一个需要用到的概念是**群中心**，也就是与所有群元都对易的群元<sup>1</sup>。不难看出  $SU(2)$  的群中心构成子群  $\mathbb{Z}^2$ ：

<sup>1</sup> 注意与 Casimir 算符的区别

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Theorem 2** |  $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

**PROOF** | 首先考虑  $2 \times 2$  无迹厄米矩阵构成的线性空间  $\mathbb{V}$ ，显然其中任意一个元素都可以写为  $X = x^i \sigma_i$ ，其中  $\sigma_i$  是三个 Pauli 矩阵，这实际上建立起了同构  $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^3$ 。 $\mathfrak{su}(2)$  李代数作为线性空间显然是与  $\mathbb{V}$  同构的，而  $SU(2)$  在李代数<sup>a</sup>上诱导出一个所谓伴随表示：

$$\mathcal{U}(U)X = UXU^\dagger = Ux^i \sigma_i U^\dagger \equiv f(U)_j^i x^j \sigma_i$$

容易验证这个表示是保范数  $\|x\|$  的，那么  $f(U) \in O(3)$ ，也就是说我们建立了一个同态：

$$f: SU(2) \rightarrow O(3), U \mapsto f(U)$$

为了利用同态核定理，首先计算  $\text{Im}(f)$ 。由于  $f$  是个连续映射，而且  $SU(2)$  单连通<sup>b</sup>，所以  $f(U)$  也应当包含在  $O(3)$  的单连通子群中，即  $\text{Im}(f) \subseteq SO(3)$ 。反过来  $SO(3) \subseteq \text{Im}(f)$  也成立，可以看作是 Euler 角和 Cayley-Klein 参数之间的对应，所以  $\text{Im}(f) = SO(3)$

现在来计算  $\ker(f)$ ， $f(U) = \mathbb{I}_{3 \times 3}$  说明  $\forall X \in \mathbb{V}$ ，都有  $UXU^\dagger = X$ ，也就是说要找的  $U$  与任意  $X$  对易，那么其也与任意的  $e^{iX}$  对易，然而 Lie Group = e<sup>Lie Algebra</sup>，所以  $U$  就是群中心的元素，所以  $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_2$ ，根据同态核定理便有  $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 。□

<sup>a</sup> 所谓代数，就是线性空间赋予一个封闭的乘法结构

<sup>b</sup>  $\mathcal{S}^n$  的基本群在  $n = 1$  时为自由群  $\mathbb{Z}$ ，其它时候都为平凡群



**Remark** 这其实说明了  $SU(2)$  是  $SO(3)$  群的双覆盖,  $SO(3)$  群对应流形是对径认同实心球  $\mathbb{RP}^2 \times [0, \pi]$ , 从流形上也能感受一下。最后我们显式给出这个同态:

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & f \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \operatorname{Im}(a\bar{d} - b\bar{c}) & \operatorname{Re}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \operatorname{Im}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \operatorname{Re}(a\bar{d} - b\bar{c}) & \operatorname{Im}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \operatorname{Re}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix}$$

上式直接从  $U, -U$  对应同一个  $SO(3)$  中元素也可看出双覆盖性。

## SECTION 7

$$SO(2, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$$

**Lemma 1** (QR 分解) 任意复矩阵都可以分解为一个酉矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$  的乘积, 且  $R$  主对角元全为正数。如果这个矩阵是实矩阵, 那么  $Q$  为正交矩阵。如矩阵可逆, 则分解唯一。

**Lemma 2**  $SL(2, \mathbb{R})$  的拓扑结构为  $\mathcal{S}$ , 基本群为  $\mathbb{Z}$

**PROOF** 根据 QR 分解, 以及  $\det S = 1 \neq 0$ , 任意  $SL(2, \mathbb{R})$  中的矩阵都可以唯一的分解为  $S = QR$ , 而且要求  $|Q| \cdot |R| = 1$ , 而  $R$  主对角元全为正数以及  $|Q| = \pm 1$  实际上给出  $Q \in SO(3)$  且  $R$  的对角线上元素有  $a \cdot b = 1$  且为正数的限制, 而另一个元素不做限制。这其实就是在对  $SL(2, \mathbb{R})$  做直积分解, 由于  $SO(2)$  对应的流形为  $\mathcal{S}^1$ , 所以  $SL(2, \mathbb{R})$  对应的流形为  $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , 后两者基本群平凡, 所以  $SL(2, \mathbb{R})$  对应的基本群为  $\mathbb{Z}$ 。<sup>a</sup>  $\square$

<sup>a</sup>这里用了乘积空间基本群为各自基本群的直积。

了解了  $SL(2)$  的拓扑性质后就可以开始证明本节的核心结论。

**Theorem 3**  $SO(2, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

**PROOF** 与上一节同样, 我们先构造  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  李代数, 其由二维实无迹矩阵构成, 生成元为:

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张成的线性空间中任一元素可以表达为  $X = x^\mu t_\mu$ , 显然  $\det X = -\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x^2$ , 同样我们对  $S \in SL(2, \mathbb{C})$  构造伴随表示  $X \mapsto SX S^{-1}$ , 其保事件间隔不变, 所以诱导了一个同态:

$$f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow O(2, 1), S \mapsto f(S)$$

其中

$$S t_\mu x^\mu S^{-1} = t_\nu f(S)^\mu_\nu x^\nu, \forall x^\mu \in \mathbb{R}^3 \iff S t_\mu S^{-1} = t_\nu f(S)^\nu_\mu$$

根据  $f$  连续, 从拓扑上得知  $\operatorname{Im} f \in SO(2, 1)^\uparrow$ , 反过来, 要论证任何  $\Lambda \in SO(2, 1)^\uparrow$  都可以用  $f(S)$  表示, 根据  $\Lambda = R_1 L(\chi) R_2$ , 我们只需要找到  $S_1, S_2, S(\chi)$  使得

$$f(S_1) = R_1, f(S_1) = R_2, f(S(\chi)) = L(\chi)$$

不难验证前两个等式只需要选取

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2) \subseteq SL(2, \mathbb{R})$$

并合适选取  $\theta$  参数即可，而后面一个只需选取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

最后证明  $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$  的方法就和上一节一样了。

□

**Remark** 下面显式给出同态：

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & -ab - cd \\ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & \frac{1}{2} (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) & -ab + cd \\ -ac - bd & bd - ac & ad + bc \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

## SECTION 8

### $SO(3, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

这一节的证明与上一节非常类似，证明细节会适当省略。还是首先关注一下  $SL(2, \mathbb{C})SL(2, \mathbb{C})$  的拓扑性质。

**Lemma 3**  $SL(2, \mathbb{C})$  单连通

**PROOF** 证明依旧是使用 QR 分解，现在  $R$  需要一个正实数和一个复数来描述，所以对应流形为  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ ，基本群平凡。而  $Q \in SU(2)$  对应流形为  $S^3$ ，基本群也平凡，所以  $SL(2, \mathbb{C})$  基本群平凡，即单连通。

□

下面证明本节核心定理：

**Theorem 4**  $SO(3, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

**PROOF** 证明完全仿造上一节，只是  $t \rightarrow \tau$ ， $\tau_0 = \mathbb{I}_{2 \times 2}$ ， $\tau_1 = -\sigma_1^a$ ， $\tau_2 = \sigma_2$ ， $\tau_3 = \sigma_3$ 。后面的证明也是用伴随表示诱导同态后计算  $\text{Im } f$ ，这里根据  $SL(2, \mathbb{C}) \supseteq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$  可以得到  $f(S) = R$ ，剩下的一个只用取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & \sinh \frac{\chi}{2} \\ \sinh \frac{\chi}{2} & \cosh \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

最后计算  $\ker f$  也是同样的思路说明  $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$

□

<sup>a</sup>这里符号约定上比一般定义多了个负号，是为了后文处理天球符号更自洽。

**Remark** 下面显式给出同态：

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) & -\text{Re}(a\bar{b} + c\bar{d}) & \text{Im}(a\bar{b} + c\bar{d}) & \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2) \\ -\text{Re}(\bar{a}c + \bar{b}d) & \text{Re}(\bar{a}d + \bar{b}c) & -\text{Im}(\bar{a}d - \bar{b}c) & -\text{Re}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \text{Im}(\bar{a}c + \bar{b}d) & -\text{Im}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \text{Re}(\bar{a}d - \bar{b}c) & \text{Im}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) & -\text{Re}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \text{Im}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

下面给出两个例子：

Example

 $z$  轴旋转

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

 $z$  方向 boost

$$\begin{pmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & \sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

## SECTION 9

## Higher dimensions

Definition 1

(赋范可除代数) 首先考虑  $\mathbb{R}$  或者  $\mathbb{C}$  上的线性空间我们可以赋予乘法结构将其提升为代数, 如果除了 0 元其它元素都有逆元, 我们称为可除代数, 进一步我们可以赋予范数, 而且要求范数满足:

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|, \forall x, y \in V$$

即赋范可除代数。

Theorem 5

(Hurwitz) 任何赋范可除代数都同构于  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  中的一种。其中  $\mathbb{H}$  是四元数,  $\mathbb{O}$  是八元数。

这是一个非常漂亮的结论, 告诉我们为什么历史上发现复数之后寻找三元数必然是失败的, 而哈密顿的四元数会成功。

不难猜测, 对于更高维时空的 Lorentz 群, 会对应四元数和八元数, 实际上有:

$$SO(5, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{H})/\mathbb{Z}_2 \quad SO(9, 1)^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{O})/\mathbb{Z}_2 \quad (9.1)$$

另外, 八元数实际上构成的不是一个结合代数, 所以  $SL(2, \mathbb{O})$  的存在并非显然的, 这里并不深入讨论。但是实际上这些同构关系式蕴含着很深刻的物理, 暗示着最小超对称理论只能构建在 3, 4, 6, 10 维时空中。更有意思的是, 可除代数与超弦理论之间有着非常深刻的联系。[3, 4]

## Interlude: Project representation

下面对 Lorentz 群表示的本身做更加细致的考量, 主要是为了引进一些必要的数学概念, 最终结论主要就是将一些讨论更加数学严格化, 不用过分在意。本节讨论主要参照 Weinberg[1]。

对于一个对称群  $G$ , 在考虑量子力学关于这个群的对称性时我们其实是在考虑其表示对 Hilbert 空间的作用。群表示自然是个同态, 所以我们想到去考虑:

$$U(T)U(\bar{T}) = U(T \cdot \bar{T}) \quad (9.2)$$

但是量子力学的希尔伯特空间实际上是一个射影空间, 两个相差全局相位的量子态视作等价, 所以我们实际上应该去考虑群的射影表示:

$$U(T)U(\bar{T}) = e^{i\phi(T, \bar{T})} U(T \cdot \bar{T}) \quad (9.3)$$

这里利用线性可以证明  $\phi(T, \bar{T})$  与所作用的量子态本身无关，但前提条件是这两个量子态是可加的。比如具有半整数自旋和整数自旋的量子态就是不可加的，最多只能制备出这俩态的直积态。

但是射影表示用起来很麻烦，如果相位具有下面的特殊结构：

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})$$

那我们可以对群表示后的算符重定义：

$$\tilde{U}(T) = U(T) \exp(i\alpha(T)) \quad (9.4)$$

这样我们就可以继续考虑普通的表示而不是射影表示了。现在我们必须严格考虑一个群是否存在不能通过重定义消去的射影表示，我们称为**内禀射影表示**。

既然考虑的是李群，那我们可以把群元用  $\theta^a$  参数化，并定义：

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta))$$

根据  $f(0, \theta) = f(\theta, 0) = \theta$ ，我们得到单位元附近群元表示的展开：

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \mathcal{O}(\theta^3) \quad (9.5)$$

这里  $t_a$  就是常说的生成元，在这个符号约定下是厄米的， $t_{ab}$  关于指标对称，表示更高阶的项。另外  $f$  有展开：

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \theta^a + f^a_{bc} \bar{\theta}^b \theta^c + \mathcal{O}(\theta^3) \quad (9.6)$$

类似地，因为  $\phi(T, 1) = \phi(1, T) = 0$ ，我们有展开：

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab} \theta^a \bar{\theta}^b \quad (9.7)$$

结合 9.5, 9.6 和 9.7 我们得到：

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a_{bc} t_a - i f_{bc} \quad (9.8)$$

再根据  $t_{bc}$  的对称性有：denoted by  $C^a_{bc}$

$$[t_b, t_c] = i (f^a_{cb} - f^a_{bc}) t_a + i (f_{cb} - f_{bc}) \cdot \mathbb{I} \quad (9.9)$$

denoted by  $C_{bc}$

在相位不为 0 时，生成元的对易关系之间多了一项  $iC_{bc} \cdots \mathbb{I}$ ，称为**中心荷**。根据 Jacobi 恒等式，中心荷要满足方程：

$$\begin{aligned} C^a_{bc} C^e_{ad} + C^a_{cd} C^e_{ab} + C^a_{db} C^e_{ac} &= 0 \\ C^a_{bc} C_{ad} + C^a_{cd} C_{ab} + C^a_{db} C_{ac} &= 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

这是与李代数具体结构无关的约束，给出一类特解：

$$C_{ab} = C^e_{ab} \phi_e, \quad \phi_e \in \mathbb{R}$$

这类解到底存不存在要看李代数具体结构，但如果说李代数恰好是这样的解，那么我们可以通过重定义生成元：

$$\tilde{t}_a = t_a + \phi_a \Rightarrow [\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = iC^a_{bc} \tilde{t}_a \quad (9.11)$$

来消除中心荷。这引出了李群是否存在内禀射影表示的定理。

**Theorem 6** | 如果李群满足下面两个条件：

- 可以类似 9.11 重定义生成元消去所有中心荷。
- 群的拓扑结构单连通。

那么我么总可以类似 9.4 一样令相位为。

证明比较复杂，我们重点看在 Poincaré 群上的应用，另外，这个定理告诉我们只有两种方式产生内禀投影表示，一种是代数的，一种是拓扑的。

**Theorem 7** | (V.Bargmann[5]) 半单 Lie 代数都可以通过重定义生成元消去中心荷

很幸运，齐次 Lorentz 群，也就是  $M_{\mu\nu}$  张成的代数是半单的，但不幸的是 Poincaré 代数不是半单的，不过更加幸运的是中心荷依旧可以被消除。

前面我们说明 Lorentz 群的拓扑结构使用了  $QR$  分解，实际上，使用另一种稍微不同的分解方式——极分解——可以证明拓扑结构其实同胚于  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^3 \times \mathbb{Z}_2$ ，Poincaré 群多出来的那一部分，也就是  $\mathbb{R}^4$  是平凡的，重点在于  $\mathcal{S}^3 \times \mathbb{Z}_2$ ，这其实是个双连通结构。也就是说基本群为  $\mathbb{Z}_2$ 。直观但不严谨的说就是初始点固定，转两圈总共回到初始点两次的“双圈”可以连续收缩到一点，但是单圈被分成两种，一种能收缩到一点，另一种必须再重复自己以此才能收缩到一点。

这么来看 Lorentz 群必须得用射影表示，我们看一下这个射影表示的特点，核心在于双圈可以收缩到单位元，所以  $1 \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow 1$  的路径走两次等于单位元：

$$[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})]^2 = 1 \Rightarrow U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}) \quad (9.12)$$

这里的正负号完全可以解释成自旋！整数自旋取正号，半整数取负号。而完整的描述应该是这个射影表示加上所谓“超选择定则”。前面我们说过相位是不依赖于态的，但前提条件是这些态是可加的，所以我们可以认为整数和半整数自旋存在超选择定则，也就是说它们不可加，那么相位就依赖于作用的态的自旋，我们实验上也确实发现了这种不可加性。这就构成了整个 Lorentz 群的表示（同样的推理也可以扩张到 Poincaré 群，毕竟它们拓扑结构一致）。

但是这样还是比较繁琐，但是从数学上看似乎引进射影表示是必然的，那我们能否从物理上把超选择定则给去掉呢？其实，我们完全可以把大自然真正的对称群取为  $SL(2, \mathbb{C})$  而不是 Lorentz 群  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}$ ，这个更大的对称群只有普通表示，射影表示里的正负号随着表示本身的不同就自然的冒出来了。就像是  $SU(2)$ ，看作是对  $SO(3)$  对称性的扩张，奇数维表示是简并表示，会出现负号，而偶数维是忠实表示，就只留下正号了。当然这一做法有代价，那就是抛弃了超选择定则<sup>2</sup>，这样不同自旋态的不可加性就不能从 Lorentz 不变性直接导出，但并不担心这一点，毕竟实验上从未制备出这样的叠加态。

所以，对于任何对称群，如果存在中心荷，可以干脆扩张这个李代数，把与一切生成元都对易的生成元包含进来，这样就不存在中心荷了<sup>3</sup>，但是同样也会丢弃超选择定则；如果李群不是单连通的，我们可以将其表示成  $C/H$ ，其中  $C$  单连通，称为  $G$  的通用覆盖群<sup>4</sup>。然后把对称群取为  $C$  而不是  $G$ ，这样扩张群之后就可以不用担心射影表示问题，也不用引入超选择定则。

<sup>2</sup> 总之除了超选择定则，其它完全一样。

<sup>3</sup> 伽利略群就存在质量  $M$  这个中心荷，我们可以进行扩张，见 A.Zee[6]

<sup>4</sup> 类似的论述可以在 [7] 对应章节找到

# Conformal transformations

## SECTION 10

### Pull back, push forward & Lie derivative

考虑光滑映射  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ，可以定义拉回映射为：

**Definition 1** (pull back)  $\phi^*: C^\infty(\mathcal{N}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $f \mapsto \phi^* f$  其中  $\phi^* f \equiv f \circ \phi$ ，也即  $(\phi^* f)|_p = f|_{\phi(p)}$ ，这个定义可以自然延拓到  $\phi^*: \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(0, l) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(0, l)$ ，其中：

$$(\phi^* T)_{a_1 \dots a_l}|_p (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} \equiv T_{a_1 \dots a_l}|_{\phi(p)} (\phi_* v_1)^{a_1} \dots (\phi_* v_l)^{a_l}$$

对于  $\forall p \in \mathcal{M}, v_1, \dots, v_l \in \mathcal{X}_p(\mathcal{M})$  恒成立。

类似的可以定义推前映射概念：

**Definition 2** (push forward)  $\phi_*: \mathcal{X}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}_{\phi(p)}(\mathcal{N})$ ,  $X^a \mapsto (\phi_* X)^a$  其中

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{at } \phi(p)} (\phi_* X)(f) = X(\phi^* f), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{N}) \\ \xleftarrow{\text{at } p} \end{array}$$

同样也可以进行延拓  $\phi_*: \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, 0) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(k, 0)$ ，其中

$$(\phi_* T)^{a_1 \dots a_k}|_q (w^1)_{a_1} \dots (w^k)_{a_l} \equiv T^{a_1 \dots a_k}|_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* w_1)_{a_1} \dots (\phi^* w_l)_{a_l}$$

对于  $\forall q \in \mathcal{N}, w_1, \dots, w_l \in \mathcal{X}_p^*(\mathcal{N})$  恒成立。

如果  $\phi$  是一个微分同胚，那可以进一步延拓到  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, 0) \leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(k, 0)$  之间的推前和拉回映射。

**Definition 3** 以  $(1, 1)$  型张量的推前映射为例：

$$(\phi_* T)_b^a|_q w_a v^b \equiv T_b^a|_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* w)_a (\phi^* v)^b$$

对于任意的  $q \in \mathcal{N}, w_a \in \mathcal{X}_q^*(\mathcal{N}), v^b \in \mathcal{X}_q(\mathcal{N})$  成立，其中  $(\phi^* v)^b$  理解为  $(\phi_*^{-1} v)^b$ 。其它类型张量，以及拉回映射可类似定义，而且  $\phi^* = \phi_*^{-1}$

**Remark** 现在我们有必要澄清一下关于映射的主动和被动观点。首先注意到微分同胚  $\phi$  其实很自然地定义了一个  $\mathcal{M}$  坐标变换  $x \mapsto x'$ ，其中  $x$  是  $\mathcal{M}$  上老坐标， $y$  是  $\mathcal{N}$  上坐标，则：

$$x'(p) \equiv y(\phi(p))$$

反过来，坐标变换也可以确定一个微分同胚映射。这让我们可以用两种方法去看待这个微分同胚：

- **主动观点：** 老老实实看作是  $p \in \mathcal{M} \mapsto \phi(p) \in \mathcal{N}$ ，然后在  $\mathcal{N}$  上确定了一个新的张量场，由原先的张量场“认同”后得来，也就是  $T|_p \mapsto \phi_* T|_{\phi(p)}$ 。

$C^\infty(\mathcal{M})$  表示  $\mathcal{M}$  上的光滑标量场  
 $\mathcal{X}(\mathcal{M})$  表示  $\mathcal{M}$  上某点处的切矢空间，相应的  $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$  表示余切丛空间  
 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, l)$  表示  $\mathcal{M}$  上的  $(k, l)$  型张量场

- **被动观点**: 还是在原先的  $\mathcal{M}$ , 点和张量也没有变换, 而是现在在新的坐标系  $\{x^\mu\}$  下考虑问题。

这两种观点是等价的, 关键就在于下面的这个等式:

$$\begin{array}{c} \text{in Old coordinate } \{y^\mu\} \\ \text{Old tensor} \\ \text{New tensor} \end{array} \begin{array}{c} \text{at Old point} \\ \text{at New point} \end{array} \begin{array}{c} \text{in New coordinate } \{x'^\mu\} \end{array} \quad (10.1)$$

更多关于等价性的论述见梁灿彬 [8] 第四章相关内容, 后面会直接作为结论直接进行引述。

## SECTION 11

## Killing & Conformal Killing vector field

下面我们考虑  $\mathcal{M} = \mathcal{N}, \{x^\mu\} = \{y^\mu\}$ 。对于矢量场  $\xi^a$ , 其积分曲线诱导了一个微分同胚 (点沿着积分曲线流动), 在被动观点下看就是诱导了一个无穷小坐标变换  $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu t$ , 其中  $t \rightarrow 0$ , 在主动观点下看就是诱导了流形上点的变换和张量的变换, 但是坐标系仍然不变。首先给出对  $\xi$  方向的李导数的定义:

**Definition 4** (李导数) 李导数  $\mathcal{L}_\xi$  定义为

$$\mathcal{L}_\xi T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} - T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k})$$

可以利用下面的式子计算其在某一坐标系下分量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = & \xi^\lambda \nabla_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\lambda \dots \mu_k} \nabla_\lambda \xi^{\mu_1} - \dots - T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \lambda} \nabla_\lambda \xi^{\mu_k} \\ & + T_{\lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \nabla_{\nu_1} \xi^\lambda + \dots + T_{\nu_1 \dots \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_k} \nabla_{\nu_l} \xi^\lambda \end{aligned} \quad (11.1)$$

比如度规的李导数:<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (11.2)$$

<sup>1</sup> 这里我们用了度规平行移动的性质,  $\forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \nabla_X g = 0$

**Definition 5** (Killing) 矢量场  $\xi^a$  诱导单参数微分同胚群  $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , 如果其诱导的度规变换满足:

$$\phi_t^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (11.3)$$

其中  $\Omega^2 \in C^\infty(\mathcal{M})$  且正定。我们就称向量场为共形 **Killing 向量场**, 对应的微分同胚称为共形映射 (变换)。从李导数的观点来看就是要求:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \omega(t) g_{\mu\nu} \quad (11.4)$$

其中  $\omega(t) \in C^\infty(\mathcal{M})$ , 有关系  $\Omega^2 = 1 + \omega(t)t + \mathcal{O}(t^2)$ 。特殊的, 如果  $\Omega^2 = 1$  也即  $\omega(t) = 0$ , 那我们就称  $\xi^a$  为 **Killing 向量场**, 对应的微分同胚为等度规映射。

前面的 Lorentz 变换其实就是在找在 Minkowski 时空内由 Killing 场诱导的变换, 这要求:

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\mu \xi_\nu = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0$$

称为 **Killing 方程**。这与前面直接从坐标变换导出的式子是一致的<sup>2</sup>。实际上, 前面用坐标变换那一套就是在玩被动观点, 可以证明,  $\xi^a$  是 (共形) Killing 场的充要条件是其生成的坐标变换使得:<sup>3</sup>

<sup>2</sup> 前面的式子实际上是把无穷小因子  $t$  吸收进了  $\xi$  中

<sup>3</sup> 注意张量分量作为坐标的函数在何处取值, 以及偏导数在何处取值, 只要想清楚这些函数的自变量是什么、方程两边各自在哪个坐标系, 以及方程作为张量等式都是在流形上同一点取值即可。



$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}(x') \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}(x') g_{\sigma\rho}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (11.5)$$

在场论中我们更多使用坐标变换的被动观点来看问题。这个等式的证明关键就是使用 10.1。

根据前面的论证，对于四维闵氏时空，Killing 方程共有  $10 = \frac{4 \times (4+1)}{2}$  个独立解，也就是说存在 10 个独立的 Killing 场。实际上可以证明，对于任意  $n$  维时空，其最多具有  $\frac{n(n+1)}{2}$  个独立的 Killing 场，然而闵氏时空的 *Poincar* 变换正好取到不等式上界。由于 Killing 场诱导的是等度规映射，所以也成为时空的对称性，根据上面的分析，平直闵氏时空具有最大的对称性。

*Remark* 在 GR 的语境下提到共形变换更多的其实是指 Weyl 变换，它的定义和共形变换很像，但是不等价。Weyl 变换的定义不需要微分同胚，或者说我们直接取同胚为  $\text{id}_{\mathcal{M}}$ ，这样流形上的点、张量和坐标系都不变，但是我们直接把流形上的度规结构改变，变成：

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

还要求物理不变，这就是 Weyl invariant，定义与共形变换非常类似，但是不能混淆两者，两者之间的微妙区别会体现在弦论中共形反常的消去上。[9]

度规在流形上定义了长度  $\|v\| \equiv g(v, v)$ ，相应的可以定义角度为：

$$\cos \theta \equiv \frac{g(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

显然，共形变换是不改变两曲线交点处切矢之间角度的变换，也常被称为保角变换。

## SECTION 12

### Conformal transformations in $d > 2$

现在假设背景时空是平直时空<sup>1</sup>，利用共形 Killing 方程，共形 Killing 场满足：

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \omega(x) g_{\mu\nu} \quad (12.1)$$

式子两边同时取迹得到：

$$\omega(x) = \frac{2}{d} \partial^\mu \xi_\mu \quad (12.2)$$

12.1 两边同时微分  $\partial_\rho$  得到：

$$2\partial_\rho \partial_{\{\mu} \xi_{\nu\}} = \partial_\rho \omega g_{\mu\nu} \quad (12.3)$$

上式对三个指标进行轮换，每次轮换改变符号然后相加得到：

$$-\partial_\rho \omega g_{\mu\nu} + \partial_\mu \omega g_{\nu\rho} = 2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho \quad (12.4)$$

再次与  $g^{\mu\nu}$  缩并得到：

$$\partial^\mu \partial_\mu \xi_\rho = \frac{2-d}{2} \partial_\rho \omega \quad (12.5)$$

12.1 作用上  $\partial^\rho \partial_\rho$ ，再由 12.5 得到：

$$[\partial^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu] \omega(x) \quad (12.6)$$

上式两边求迹得到：

$$(d-1)\partial^\mu \partial_\mu \omega(x) = 0 \quad (12.7)$$

<sup>1</sup>后面的推导对于 Minkowski 时空和 Euclidean 时空都适用



$d = 1$ , 上式恒成立, 也就是说任意变换都是共形变换, 这是由于一维无法定义角度导致的,  $d \geq 2$  时, 满足拉普拉斯方程:

$$\square^2 \omega(x) = 0 \quad (12.8)$$

$d > 2$  则根据 12.6 还进一步要求:

$$\partial_\mu \partial_\nu \omega(x) = 0 \quad (12.9)$$

这说明  $\omega$  形式上只能为:

$$\omega(x) = A + B_\mu x^\mu \quad (12.10)$$

代入 ref11.10 得到

$$\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \frac{1}{2} (-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}) \quad (12.11)$$

右边是常向量。因此,  $\xi_\mu$  是  $x^\mu$  的二次函数, 可展开成

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad (12.12)$$

这里,  $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$  是常数,  $c_{\mu\nu\rho}$  关于后两指标对称:  $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ 。将上式代入 12.2, 得到

$$\omega(x) = \frac{2}{d} (b^\mu{}_\mu + 2c^\mu{}_{\mu\rho} x^\rho) \quad (12.13)$$

因此,  $\omega$  的展开式 (1.30) 中的系数  $A, B$  同  $b, c$  的关系是

$$A = \frac{2}{d} b^\mu{}_\mu, \quad B_\mu = \frac{4}{d} c^\nu{}_{\nu\mu} \quad (12.14)$$

那么  $A, B$  由  $a, b, c$  确定了, (1.32) 代入 (1.31) 和 (1.18), 可进一步限制  $b, c$  的形式。事实上, 代入后得到

$$2c_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}) \quad (12.15)$$

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho}) x^\rho = (A + B_\rho x^\rho) g_{\mu\nu} \quad (12.16)$$

于是

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = A g_{\mu\nu} \quad (12.17)$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4} (-B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} + B_\rho g_{\mu\nu}) \quad (12.18)$$

由此, 知道共形因子后就可以写出共形变换。最终得到无穷小变换可分成以下几类:<sup>4</sup>

|             |  |         |
|-------------|--|---------|
| Translation | $x'^\mu = x^\mu - a^\mu$   | (12.19) |
| Rotation    | $x'^\mu = x^\mu - b^{A\mu\nu} x_\nu, \quad b^{A\mu\nu} = -b^{A\nu\mu}$ |         |
| Dilation    | $x'^\mu = x^\mu - \frac{A}{2} x^\mu$                                   |         |
| SCT         | $x'^\mu = x^\mu - \frac{1}{4} (-B^\mu x^2 + 2x^\mu B^\nu x_\nu)$       |         |

<sup>4</sup> SCT: Special Conformal Transformation

对应的无穷小变换的生成元可表示为

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ M_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ D &= -ix^\mu\partial_\mu \\ K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu) \end{aligned} \quad (12.20)$$

它们之间的对易关系为：

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \\ [D, P_\mu] &= iP_\mu \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \\ [K_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu) \\ [P_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(g_{\rho\mu}P_\nu - g_{\rho\nu}P_\mu) \end{aligned} \quad (12.21)$$

可以看到其中一部分就是 Poincaré 代数<sup>5</sup>，这也说明了等度规变换是共形变换的特殊情况。这个 Lie 代数称为  $d$  维共形代数。

重定义生成元  $J_{ab}(a, b = -1, 0, \dots, d)$ ：

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \quad (12.22)$$

$$J_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (12.23)$$

$$J_{-10} = D \quad (12.24)$$

$$J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (12.25)$$

从共形代数的对易关系，可以得到  $J_{ab}$  满足对易关系

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}) \quad (12.26)$$

当共形变换是 Euclidean 空间中的变换时， $g_{ab}$  是号差为  $(-, +, \dots, +)$  的 Minkowski 度规<sup>6</sup>。也就是说  $d$  维 (Euclidean 空间) 中的共形代数，同构于 Lorentz 代数  $\mathfrak{so}(d+1, 1)$ 。

<sup>5</sup>  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  时为 Euclidean 代数

有限共形变换可有由无穷小共形变换的叠加构成，形式为：

$$\begin{aligned} \text{Translation} \quad & x'^\mu = x^\mu - a^\mu \\ \text{Rotation(Boost)} \quad & x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ \text{Dilation} \quad & x'^\mu = \alpha x^\mu \\ \text{SCT} \quad & x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \end{aligned} \quad (12.27)$$

其中最后一个变换是由平移和反演变换的组合得到的：

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow x''^\mu = x'^\mu - b^\mu \rightarrow x'''^\mu = \frac{x''^\mu}{x'^2} \quad (12.28)$$

而反演变换是离散的，所以 SCT 并不能用无穷小变换生成。根据前面的讨论，这些变化构成  $SO(d+1, 1)$  群。

## SECTION 13

**Conformal transformations in  $d = 2$** 

上一节利用李导数看待问题，也就是所谓主动观点，现在用坐标变换的观点来进行推演。

在二维情况下，使用复数作为参数非常方便，定义复变量：<sup>7</sup>

$$z = x^1 + ix^2, \quad \partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

<sup>7</sup> 导数这样定义是为了  $\partial_z z = \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$

Euclidean 空间中度规可以写成：

$$g_z = dzd\bar{z} \quad (13.1)$$

现在考虑坐标变换  $z \mapsto z'(z, \bar{z})$ ，度规相应变为：

$$\begin{aligned} g_z \mapsto g'_z &= dz' d\bar{z}' \\ &= \left( \frac{\partial z'}{\partial z} dz + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} dz^2 + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} d\bar{z}^2 + \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} \right) dz d\bar{z} \end{aligned} \quad (13.2)$$

这导致了下面的 Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (13.3)$$

而且前面的推导只要求度规形式为  $\Omega(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ 。也就是说，变换  $z'$  为全纯<sup>8</sup>或者反全纯函数，而反全纯函数会将右手系变为左手系，后面主要考虑全纯情况，反全纯情况只需要全部取复共轭即可。

<sup>8</sup> 数学家叫法，物理人喜欢称为解析函数

考虑局部的无穷小共形变换，变换形式可以写成：

$$z \mapsto z + \xi(z), \quad \bar{z} \mapsto \bar{z} + \bar{\xi}(\bar{z})$$

其中  $\xi$  可以进行 Laurent 展开为：

$$\xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n z^{n+1}, \quad \bar{\xi}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\xi}_n \bar{z}^{n+1}$$

对应于  $\xi_n, \bar{\xi}_n$  的生成元为  $L_n, \bar{L}_n$ ，显然这些生成元的个数是无限个！生成了一个无限维李代数 Witt 代数<sup>9</sup>：

$$L_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (13.4)$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n}, \quad [L_n, \bar{L}_m] = 0 \quad (13.5)$$

二维共形场论在局域变换下具有无穷多的对称性！但是全局的共形变换要求  $z'(z)$  没有极点且只有一个非简并零点（否则变换不是单的），这限制了  $z'(z)$  的形式为：

$$z'(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad (13.6)$$

这里  $a \neq 0$  是为了让  $z \mapsto z'$  为  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  的满映射。

$d$  维共性代数与  $\mathfrak{so}(d+1, 1)$  之间的同构可以显式的构造出来 [10, 11]。首先注意到由于 Lorentz 变换保  $ds^2$ ，所以对于顶点在原点处的光锥，Lorentz 变换是在光锥上的同胚。那我们可以把光锥看作是嵌入<sup>10</sup>在  $\mathbb{R}^{d+1,1}$  中的子流形，这实际上是将  $\mathbb{R}^d$  通过下面

<sup>9</sup> 严格来说是两个 Witt 代数的直积

<sup>10</sup> Embedding formalism

的方式嵌入到  $\mathbb{R}^{d+1,1}$  中:

$$q^\mu = (1 + x^2, 2x^A, 1 - x^2), \quad x^A \in \mathbb{R}^d \quad (13.7)$$

这样, Lorentz 变换作用在光锥上可以看作是  $\mathbb{R}^d$  上的一个变换:

$$q^\mu \mapsto q'^\mu = \frac{(\Lambda q)^\mu}{(\Lambda q)^+} \quad (13.8)$$

其中分母是为了将  $q^+ \equiv \frac{1}{2}(q^0 + q^{d+1}) = 1$  归一化, 所谓嵌入到光锥的**正则部分**(**canonical section**)。而且, 可以验证这个变换是  $\mathbb{R}^d$  上的全局共形变换! 特别地, 当  $d = 2$  时, 定义  $w = x^1 + ix^2$ , 这个同构变成:

$$q^\mu(w, \bar{w}) = (1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, i(\bar{w} - w), 1 - w\bar{w}) \quad (13.9)$$

利用 8.1, 可以得到:

$$(\Lambda q)^+ = \left| \frac{\partial z'}{\partial z} \right|^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

如果并不在意归一化, 可以将类光矢量参数化为:

$$q^\mu(w, \bar{w}) = \frac{q^0}{1 + w\bar{w}} (1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, i(\bar{w} - w), 1 - w\bar{w}) \quad (13.10)$$

#### SECTION 14

### Conformal transformations on the Riemann sphere

本节的关键在于下面的式子:

$$\mathcal{S}^2 \cong \mathbb{C} \cup \{z = \infty\} \quad (14.1)$$

这实际上是在对复平面进行**一点紧化**, 导致的球面我们称为 Riemann 球面, 这个同胚可以利用球极投影显式构造出来:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x'_1, x'_2, 0) : \begin{cases} x'_1 = \frac{rx_1}{r+x_3} \\ x'_2 = \frac{rx_2}{r+x_3} \end{cases} \quad (14.2)$$

利用复坐标可以写为:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto z \equiv \frac{x'_1 + ix'_2}{r} = \frac{x_1 + ix_2}{r + x_3} \iff z = e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \quad (14.3)$$

这里我们是按照南极为极点进行投影, 投影到赤道平面, 以北极为投影点只需要把上式中的  $r + x_3$  替换为  $r - x_3$ 。更一般的, 我们还可以给出高维的球极投影:

$$\mathcal{S}^{n+1} \cong \mathbb{E}^n \cup \{\infty\} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \mapsto \frac{(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, |x|^2 - 1)}{|x|^2 + 1} \quad (14.4)$$

将  $\mathcal{S}^2$  作为  $\mathbb{R}^3$  的子流形, 不难在复坐标下写出对应度规为:

$$g_z = \frac{4r^2}{(1 + z\bar{z})^2} dz d\bar{z} \quad (14.5)$$

根据之前的分析,  $\mathcal{S}^2$  上的共形变换由全纯或反全纯函数诱导, 后者将左右手系互换。复平面一点紧化为球面之后, 全局共形变换函数必然有一个极点, 负责映射到  $\{\infty\}$ , 所以<sup>11</sup>

<sup>11</sup> 下面只对全纯进行讨论, 反全纯只需取复共轭

$$z'(z) = \frac{\text{Poly}(z)}{\text{Poly}(z)}$$

依旧根据变换的单射性质，要求分子分母都必须只能线性依赖于  $z$ ，而且由于满性，分子分母零点不能相同，所以这要求全局共形变换形式只能为：

$$z'(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = 1 \quad (14.6)$$

注意到这里对行列式进行了归一化选取。一般谈及二维共形变换我们都是在加入无穷远点后进行讨论，在数学上这种变换称为 **Möbius 变换**。由于整体相差一个负号代表的是同一个变换，所以变换群为  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ，将反全纯部分一并考虑进来后扩充为  $SL(2, \mathbb{C})$ 。

Witt 代数中  $n = \{-1, 0, 1\}$  的部分张成了  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  子代数<sup>12</sup>，也就是那些全局共形变换的生成元。它们实际上与 Lorentz 群生成元可以直接由下式联系：

<sup>12</sup> 非常巧，整数域的非平凡子域也就是它

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}(J_3 - iK_3), & L_{-1} &= \frac{1}{2}(-J_1 + iJ_2 + iK_1 + K_2), & L_1 &= \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2 - iK_1 + K_2), \\ L_0 &= \frac{1}{2}(-J_3 - iK_3), & L_{-1} &= \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2 + iK_1 - K_2), & L_1 &= \frac{1}{2}(-J_1 + iJ_2 - iK_1 - K_2). \end{aligned} \quad (14.7)$$

其中

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}, \quad K_i = M_{i0}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

# Celestial Sphere & Asymptotic Flat Spacetime

## SECTION 15

## Carter-Penrose diagram

Minkowski 时空的度规在球坐标系下可以写为：

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \overset{d\Omega_2^2}{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} \quad (15.1)$$

定义 retarded 和 advanced 坐标为：

$$u \equiv t - r, \quad v \equiv t + r \quad (15.2)$$

这个坐标系下度规重写为：

$$ds^2 = -dudv + \frac{(u-v)^2}{4} d\Omega_2^2, \quad -\infty < u \leq v < +\infty \quad (15.3)$$

由于时空具有球对称性，所以考虑忽视角向，只考虑径向，那么时空图  $t$ - $r$  上每一个点代表一个球面，径向光线意味着  $u$  或  $v$  是常数。时空的无限远有不同的趋向方式，这也导致了不同的无穷远定义：

$i^+$ ：类时未来无穷远， $r$  一定， $t \rightarrow +\infty$ ；

$i^-$ ：类时过去无穷远， $r$  一定， $t \rightarrow -\infty$ ；

$i^0$ ：类空无穷远， $t$  一定， $r \rightarrow +\infty$ ；

$\mathcal{I}^+$ ：类光未来无穷远， $u$  一定， $r \rightarrow +\infty$ ；

$\mathcal{I}^-$ ：类光过去无穷远， $v$  一定， $r \rightarrow +\infty$ ；

这五个无穷远合称为**共形无穷远**。

但是无穷远还是一个靠想象的概念，无法在这样的图中表现出来，继续考虑坐标变换，变到所谓光锥坐标：

$$U \equiv \arctan u, \quad V \equiv \arctan v \quad (15.4)$$

度规在光锥坐标下变为：

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} \cdot (-4dUdV + \sin^2(V-U)d\Omega_2^2), \quad -\frac{\pi}{2} < U \leq V < \frac{\pi}{2} \quad (15.5)$$

现在我们牺牲对距离的精确描述，考虑 Weyl 变换之后，丢掉共形因子后的度规：

$$\tilde{ds}^2 = -4dUdV + \sin^2(V-U)d\Omega_2^2 \quad (15.6)$$

这样消去了在  $\pm \frac{\pi}{2}$  处的坐标奇性，我们称之为**共形紧化**。可以证明 [12]，两个相差共形变换的度规具有如下性质：

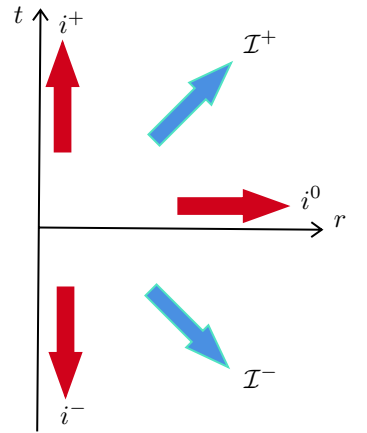


图 1. 共形无穷远定义

1. 由于  $\tilde{ds}^2 \iff ds^2 = 0$ , 所以光锥不变, 即时空因果结构不发生改变;
2. 向量场的类时、类空和类光性质不变;
3. 类时和类空曲线还是类时或者类空的, 但是类时或者类空测地线不一定仍是测地线, 但是类光测地线依然是类光测地线。

从这个意义上看, 如果我们只关注时空的因果结构, 完全可以考虑共形紧化之后的度规, 重点是共形紧化后坐标变成有限区间内取值, 这使得我们有希望在时空图上表现出共形无限远。继续对 15.6 做变换:

$$T = U + V, \quad R = U - V, \text{ overall } t \pm r = \tan \frac{1}{2} (T \pm R) \quad (15.7)$$

度规变为:

$$\tilde{ds}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega_2^2, \quad |T| + R < \pi, 0 \leq R < \pi \quad (15.8)$$

最后一项角向不用在意<sup>1</sup>, 现在整个时空图是一个有限大小的图, 其上面的每一点表示一个球面 (除了  $i^0$ ), 而且共形无限远以边界的形式表现出来:

<sup>1</sup> 坐标变换的时候我们只是把  $r, t$  进行变换, 没有将他们与角向坐标混合

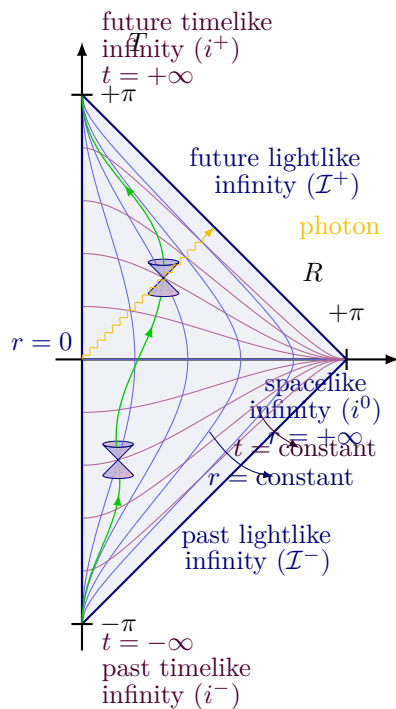


图 2. Minkowski 时空彭罗斯图

这种类光测地线都是  $45^\circ$  斜线, 而且能表示共形无限远的图称为彭罗斯图。这个图还有另一种更常用的画法, 其实是比上面的形式多出一个维度, 用图上左右部分两个点表示一个球  $S^2$ , 表示球上的一对对径点。原先在上图中只能画成折线的测地线现在可以展开画为曲线:

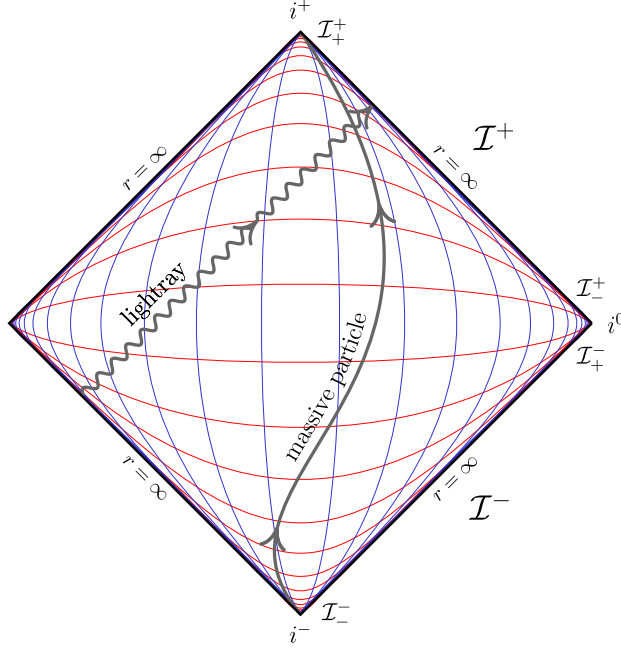


图 3. Minkowski 时空彭罗斯图的另一种形式

注意前面的几个 Penrose 图都特别对  $i^+, I_+^+; i^-, I_-^-$  以及  $i^0, I_+^-, I_-^+$  后面我们将会看到, 场在这几个点上其实是多值的, 或者说极限与趋近方向有关, 所以必须进行区分, 这几个点并不是一个点, 即使是极限的意义下也不是!

在我们考虑的散射过程中, 有质量粒子总是从  $i^-$  出发, 通过类时测地线最终抵达  $i^+$ , 而无质量粒子总是从  $I_-^-$  出发走  $45^\circ$  斜线到达  $I_+^+$ 。

## SECTION 16

## Celestial Sphere

如图 4 所示,  $I^\pm$  上的每一个点代表一个球面<sup>2</sup>, 我们称之为天球  $CS^2$ , 在 SR 的语境下, 天球一般指观察者所看到的无限远区域, 所以特指  $I^-$  上的天球。

在类光无穷远处可以选取 Bondi 坐标来参数化天球, 在  $I^+$  上我们选取  $(u, r, z, \bar{z})$ , 其中  $r \rightarrow \infty$ ,  $(z, \bar{z})$  是球极投影到复平面来表示天球的角向坐标, 这套坐标与  $\{x^\mu\}$  之间的关系为:

$$x^\mu = \left( u + r, r \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, ir \frac{\bar{z} - z}{1 + z\bar{z}}, r \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \quad (16.1)$$

在  $I^-$  上我们选取  $(v, r, z, \bar{z})$ , 其中  $r \rightarrow \infty$ , 注意现在角向坐标和  $I^+$  上的选取是对径认同的关系, 也就是说  $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ :

$$x^\mu = \left( v - r, -r \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, -ir \frac{\bar{z} - z}{1 + z\bar{z}}, -r \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \quad (16.2)$$

从上面的式子也可看出  $I^\pm$  上两套坐标空间部分的关系的确为空间反演, 在图 4 中我们也通过  $\bullet$  和  $\times$  标记出来了。

现在考虑 Lorentz 变换对天球的作用, 也就是要考虑 Lorentz 变换下 Bondi 坐标在  $r \rightarrow \infty$  怎么变。我们以  $I^+$  上的天球为例, 首先考虑  $r$  的变化。思路就是根据  $r = \sqrt{x^i x_i}$ ,  $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  以及  $SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  导致的 8.1 进行计算, 并取  $r \rightarrow \infty$  的极限, 经过冗长的计算后得到<sup>3</sup>:

<sup>2</sup> 在这个图上是左右两边各一个点组成的对径点连成的圆周表示一个球面

<sup>3</sup> 本节的详细计算参考 [13]



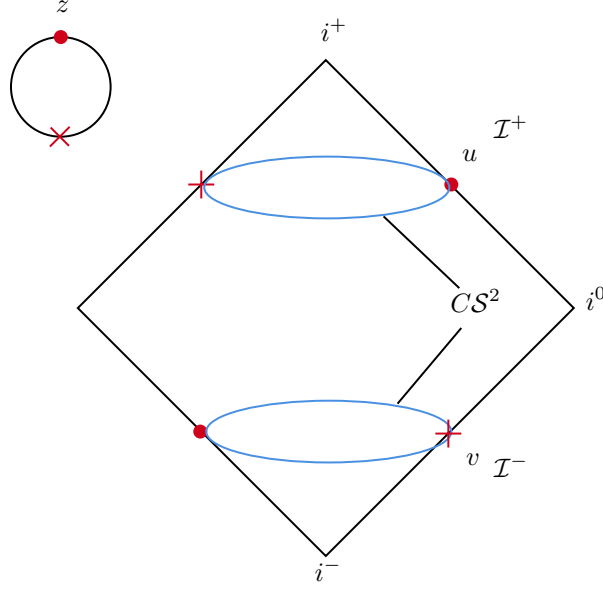


图 4. Bondi 坐标与天球

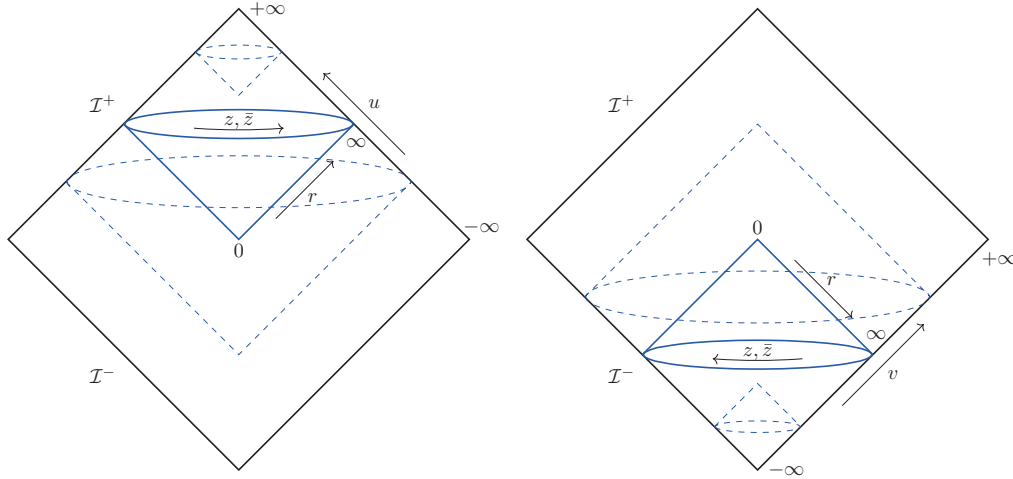


图 5. Bondi 坐标

$$r' = r \cdot \frac{|az + b|^2 + |cz + d|^2}{1 + z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \equiv r \cdot F(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(1) \quad (16.3)$$

所以 Lorentz 变换下确实会把  $r = \infty \mapsto r = \infty$ 。  $u$  的变换计算相对简单，注意到

$$t^2 - r^2 = u^2 + 2ur$$

式子左边是个 Lorentz 不变量，现在考虑的是某个固定  $u$  时的天球变换，所以  $r \rightarrow \infty$  后说明  $2ur$  是个 Lorentz 标量，代入  $r$  变换关系得到：

$$u' = \frac{u}{F(z, \bar{z})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (16.4)$$

注意，这里说明在一般的 Lorentz 变换后天球并非还是天球，因为  $u$  的变换依赖于角向

坐标。如果现在只关心天球的角向坐标怎么变，不关心变换后每个点是属于哪一“时刻”的天球，计算后发现：

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (16.5)$$

也就是说天球角向的变换就是  $CS^2$  上的全局共形变换！但是写出这个形式我们利用了 8.1，这也就是前面为何要取  $\tau_1 = -\sigma_1$  原因，本质上就是为了让这列公式形式更加漂亮，选取  $\sigma_1$  也不影响变换还是一个全局共形变换。天球在 Lorentz 变换下的变换可以用下图总结<sup>4</sup>：

<sup>4</sup> 不少精美的插图都是直接取自 [14]

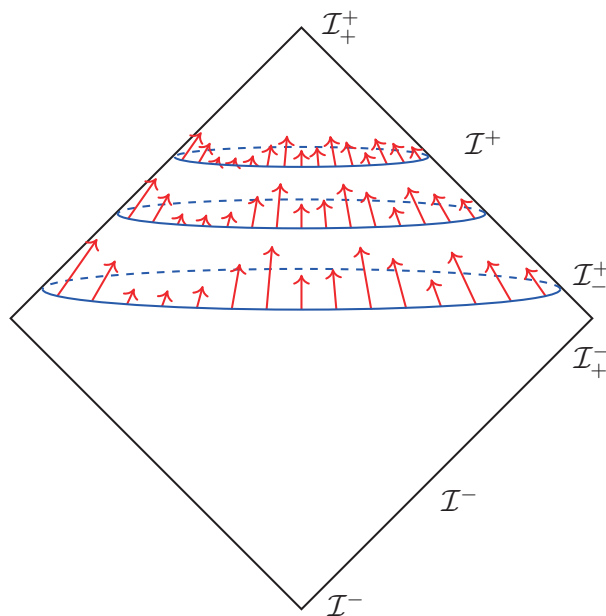


图 6. 天球上的 Lorentz 变换

## SECTION 17

### Asymptotic flat spacetime: basic concepts

所谓渐近平直时空简单点说就是在共形无限远处与 Minkowski 时空一致，渐近效应足够小允许存在引力波等解，但又要足够大能够排除无穷大能量这些非物理解。这一要求实际上可以用严格的与坐标无关的流形语言来描述 [15]。这里考虑使用某一特定坐标系——Bondi 坐标——的语言来进行阐述 [14, 16]，由于  $\mathcal{I}^\pm$  的处理方法类似，所以重点考虑于  $\mathcal{I}^+$ 。

由于广义相对论是一个与坐标无关的理论，即理论本身具有微分同胚不变性，这是理论本身的冗余自由度，我们这里实际上是在对理论选取一个特定规范后描述。Bondi 规范是最早也最自然的提法，当然也有其它规范选取 [17, 18]。对于某个固定的  $u(x^\mu)$ ，在时空上决定了一个超曲面，其上法矢为  $n^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu u$ ，第一个规范条件是要求这个超曲面类光<sup>5</sup>，也就是说  $n^\mu n_\mu = 0 \Rightarrow g^{uu} = 0$ ；再定义  $x^A, A = \{1, 2\}$  为角向坐标，与超曲面法矢相正交，即  $\nabla_n x^A = n^\mu \partial_\mu x^A = 0 \Rightarrow g^{uA} = 0$ ；最后一个要求是  $r$  取为 **luminosity distance**，这要求  $\partial_r \det(g_{AB}/r^2) = 0$ 。则  $x^\mu = (u, r, x^A)$  构成 Bondi 规范，上面的条件也等价于：

<sup>5</sup> 关于超曲面的严格定义以及相关概念可参考 [8]

$$g_{rr} = g_{rA} = 0, \quad \partial_r \det \frac{g_{AB}}{r^2} = 0 \quad (17.1)$$

在这个规范下，最一般的度规可以写作：<sup>6</sup>

<sup>6</sup> 后面若无特殊说明，对角向指标  $A, B$  求和

$$ds^2 = g_{uu}du^2 + 2g_{ur}dudr + 2g_{uA}dudx^A + g_{AB}dx^A dx^B \quad (17.2)$$

对于 Minkowski 时空, Bondi gauge 就是选取 retarded coordinate,  $u = t - r$ , 度规形式为:

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^A dx^B \quad (17.3)$$

渐近平直即要求  $r \rightarrow \infty$  时, 时空度规与上面一致。Bondi 等人计算后对渐近平直时空的度规在  $r \rightarrow \infty$  的渐近行为给予了如下限制 [19, 20]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^A dx^B \\ & + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{AB}dx^A dx^B + D^B C_{AB}dudx^A \\ & + \frac{1}{16r^2}C_{AB}C^{AB}dudr + \frac{1}{r} \left[ \frac{4}{3}(N_A + u\partial_A m_B) - \frac{1}{8}\partial_A (C_{BC}C^{BC}) \right] dudx^A \\ & + \frac{1}{4}\gamma_{AB}C_{CD}C^{CD}dx^A dx^B + \dots \end{aligned} \quad (17.4)$$

其中  $\gamma^{AB}C_{AB} = 0, C_{AB} = C_{BA}$ , 角向指标使用  $\gamma^{AB}$  进行升降, 而  $D^A$  是与  $\gamma^{AB}$  适配的协变导数<sup>2</sup>。这里特别注意  $u, r$  并不是 Minkowski 中的 retarded coordinates! 只是在  $r \rightarrow \infty$  时  $u \approx \tilde{t} - \tilde{r}$ <sup>7</sup>。同时还要求物质能动张量满足:

$$\begin{aligned} T_{uu}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-2}), & T_{ur}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-4}), & T_{rr}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-4}) \\ T_{uA}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-2}), & T_{rA}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-3}), & T_{AB}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-1}) \end{aligned}$$

而且由于是在  $\mathcal{I}^+$  上考虑问题, 所以这些能动张量都来源于无质量粒子。

17.4 引进的这些参数都是有具体的物理意义的:

- $m_B$ : **Bondi mass aspect**, 物理意义是在  $\mathcal{I}^+$  的  $u$  处地球上观察得到的时空的能量角密度分布。**Bondi mass** 可以通过积分  $M(u) = \oint_{S_\infty^2} d^2\Omega m_B(u, x^A)$  给出,  $u \rightarrow -\infty$  时, Bondi mass 等于 ADM 能量。
- $C_{AB}$ : 这个量根据无迹对称约束, 会给出两种极化模式 (或者说引力子的两个螺旋度取值), 它完全确定了  $\mathcal{I}^+$  上的引力波辐射, 根据他可以定义 **Bondi news tensor**  $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$ , 这个量可以和电磁 Fraday 张量  $F_{uz} = \partial_u A_z$ <sup>8</sup> 类比, 它的平方正比于  $\mathcal{I}^+$  上的能流。
- $N_A$ : **angular momentum aspect**, 这是相对于  $r = 0$  这一点的角动量角密度分布, 对他在  $S_\infty^2$  上积分得到在  $\mathcal{I}^+$  的  $u$  处地球上观察得到的时空的总角动量。

现在我们选取角向坐标为  $x^A = (z, \bar{z})$  来简化讨论, 更一般的讨论见 [16]。这导致  $\gamma_{AB}$  对角项为 0, 由  $C_{AB}$  的无迹对称性质有  $C_{zz}C^{zz} = C_{\bar{z}\bar{z}}C^{\bar{z}\bar{z}}$ , 实际上这个条件可以强化为  $(C_{zz})^* = C_{\bar{z}\bar{z}}$ , 为了简化税额, 后面的公式中求复共轭表示下标  $z \mapsto \bar{z}$ 。在这样的角向坐标选取下, 17.4 简化为<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ & + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + D^z C_{zz}dudz + D^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}}dud\bar{z} \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{4}{3}(N_A + u\partial_z m_B) - \frac{1}{4}\partial_z (C_{zz}C^{zz}) \right] dudz + c.c. + \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

<sup>2</sup> 对于任何一个流形, 给定度规后都唯一存在一个无挠的联络  $\nabla$  使得  $\nabla_X g = 0, \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , 称为 Levi-Civita 联络, 对应的 Clifford 符号  $\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$  由下式给出:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

<sup>7</sup> 这里的  $\tilde{t}, \tilde{r}$  是指 Minkowski 时空中的通常四维坐标, 也就是使得度规为  $\eta_{\mu\nu}$  的坐标

<sup>8</sup> 后面章节将会看到为何是这个形式

<sup>9</sup> 注意到这里忽略了  $r^{-2}dudr$  贡献, 而且相比于  $r^2dzd\bar{z}$  忽略了 17.4 最后一项  $\mathcal{O}(1)$  的贡献

其中  $C_{zz}, N_z, m_B$  按照 17.4 类似定义, 而且只与  $(u, z, \bar{z})$  有关, 与  $r$  无关。所以渐近平直时空的度规渐近式 (在 Bondi gauge 下) 可以概括为:

$$\begin{aligned} g_{uu} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-1}), & g_{ur} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-2}), & g_{uz} &= \mathcal{O}(1) \\ g_{zz} &= \mathcal{O}(1), & g_{z\bar{z}} &= r^2 \gamma_{z\bar{z}} + \mathcal{O}(1), & g_{rr} &= g_{rz} = 0 \end{aligned}$$

在不少文献中 [21–23] 也经常见到 17.5 的另一种等价写法<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -du^2 - 2dudr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \\ &+ \frac{2m_B}{r} du^2 + r C_{zz} dz^2 + r C_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 + 2g_{uz} dudz + 2g_{u\bar{z}} dud\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (17.6)$$

其中:

$$g_{uz} = \frac{1}{2} D^z C_{zz} + \frac{1}{6r} C_{zz} D_z C^{zz} + \frac{2}{3r} N_z + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (17.7)$$

不过这些对度规的限制都只是纯粹的几何意义上的, 度规还必须是爱因斯坦场方程的解<sup>11</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}^M \quad (17.8)$$

<sup>10</sup> 等价性并不显然, 实际上, 说他们等价, 并不是说可以直接通过 17.5 得到 17.6, 而是 17.6 形势下参量由场方程诱导的约束条件的形式会与 17.5 中的不同, 他们的等价性隐藏在约束条件之中了。

<sup>11</sup> 不少文献直接选取单位为  $c = \hbar = 8\pi G = 1$ , 但是这样做实际上消去了所有量纲, 无法再使用量纲分析这一工具 [24]。

Remark

这里我们讨论一下前面对度规的约束为何是纯几何的, 以 17.5 为例, 我们计算  $dudz$  这一项的系数, 我们先暂且设为  $U_z$ , 根据 Weyl 张量 (在 Weyl 变换下不变) 的定义:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} (g_{\nu\rho} R_{\sigma\mu} + g_{\mu\sigma} R_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} R_{\rho\mu} - g_{\mu\rho} R_{\sigma\nu}) + \frac{1}{6} R (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \quad (17.9)$$

我们感兴趣的是下面两个分量:

$$C_{rzzrz} = R_{rzzrz} - \frac{1}{2} g_{zz} R_{rr}, \quad C_{rurz} = R_{rurz} + \frac{1}{2} (g_{ur} R_{rz} - g_{uz} R_{rr}) \quad (17.10)$$

代入  $ds^2$  一通计算猛如虎:

$$C_{rzzrz} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad C_{rurz} = -\frac{1}{4r^2} (U_z - D^z C_{zz}) + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (17.11)$$

显然, 为了满足渐近平直性, 要求  $U_z = D^z C_{zz}$ , 推导过程中我们完全没有使用场方程。

使用 17.6 的约定, 利用场方程代入度规进行计算, 逐项比较得到三个量满足的约束条件为:

$$\begin{aligned} \partial_u m_B &= \frac{1}{4} D_z^2 N^{zz} + \frac{1}{4} D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}} - \frac{1}{2} T_{uu}^M - \frac{1}{4} N_{zz} N^{zz} \\ \partial_u N_z &= -\frac{1}{4} (D_z D_{\bar{z}}^2 C^{\bar{z}\bar{z}} - D_z^3 C^{zz}) - T_{uz}^M + \partial_z m_B + \frac{1}{16} D_z z \partial_u (C_{zz} C^{zz}) \\ &\quad - \frac{1}{4} N^{zz} D_z C_{zz} - \frac{1}{4} N_{zz} D_z C^{zz} - \frac{1}{4} D_z (C^{zz} N_{zz} - N^{zz} C_{zz}) \end{aligned} \quad (17.12)$$

其中

$$T_{\mu\nu}(u, z, \bar{z}) = 8\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 T_{\mu\nu}^M(u, z, \bar{z}) \quad (17.13)$$

对  $\mathcal{I}^-$  可以类似分析, 这里仅罗列结果<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dv^2 + 2dvdr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \\ &+ \frac{2m_{\bar{B}}}{r} dv^2 + r D_{zz} dz^2 + r D_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 + 2g_{vz} dv dz + 2g_{v\bar{z}} dv d\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (17.14)$$

<sup>12</sup> 这里  $r \rightarrow \infty, v \approx t + r$ , 角向坐标与  $\mathcal{I}^+$  上的对径认同

其中<sup>13</sup>

$$g_{vz} = -\frac{1}{2}D^z D_{zz} - \frac{1}{6r}D_{zz}D_z D^{zz} - \frac{2}{3r}N_z^- + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (17.15)$$

<sup>13</sup> 这里  $D^{AB}$  相当于前面的  $C^{AB}$ , 不要与协变导数弄混!

类似的可以定义 News tensor:

$$M_{zz} \equiv \partial_v D_{zz} \quad (17.16)$$

约束条件为:

$$\begin{aligned} \partial_u m_B^- &= \frac{1}{4}D_z^2 M^{zz} + \frac{1}{4}D_{\bar{z}}^2 M^{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{2}T_{vv}^M + \frac{1}{4}M_{zz}M^{zz} \\ \partial_u N_z^- &= \frac{1}{4}(D_z D_{\bar{z}}^2 D^{\bar{z}\bar{z}} - D^3 z D^{zz}) - T_{vz}^M - \partial_z m_B^- + \frac{1}{16}D_z z \partial_v (C_{zz} C^{zz}) \\ &\quad - \frac{1}{4}M^{zz} D_z D_{zz} - \frac{1}{4}M_{zz} D_z D^{zz} - \frac{1}{4}D_z (D^{zz} M_{zz} - M^{zz} D_{zz}) \end{aligned} \quad (17.17)$$

渐近平直时空也可以从时空图上一窥其特征 [25], 只要是渐近平直时空, Penrose 图在  $\mathcal{I}^\pm$  边界上都类似于 Minkowski 时空图的直角形状。

## SECTION 18

### Asymptotic flat spacetime: BMS group

$$\text{Asymptotic symmetries} = \frac{\text{Allowed symmetries}}{\text{Trivial symmetries}} \quad (18.1)$$

这个式子是在说我们在体系背景时空原有的对称性外, 对于其它允许的对称性寻找叫**渐近对称性**, 我们现在考虑的问题就是平直时空背景, 由于渐近平直带来的高阶项(描述无穷远处的引力波扰动), 这会导致体系的对称性远远大于 Poincaré 群。

所谓 AFS 的对称变换, 并不要求是等度规映射, 仅仅要求保持 Bondi gauge 以及渐近平直性, 这其实是要求下面的 asymptotic invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{uu} &= \mathcal{O}(r^{-1}), & \mathcal{L}_\xi g_{ur} &= \mathcal{O}(r^{-2}), & \mathcal{L}_\xi g_{uz} &= \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{L}_\xi g_{zz} &= \mathcal{O}(1), & \mathcal{L}_\xi g_{z\bar{z}} &= \mathcal{O}(1), & \mathcal{L}_\xi g_{\bar{z}\bar{z}} &= \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

和 gauge invariant:

$$\mathcal{L}_\xi g_{zz} = \mathcal{L}_\xi g_{r\bar{z}} = 0 \quad (18.2)$$

计算后发现<sup>14</sup>这要求矢量场形式为:

$$\begin{aligned} \xi^+ &= \left(1 + \frac{u}{2r}\right) Y^{+z} \partial_z - \frac{u}{2r} D^{\bar{z}} D_z Y^{+z} \partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}(u+r) D_z Y^{+z} \partial_r + \frac{u}{2} D_z Y^{+z} \partial_u + c.c. \\ &\quad + f^+ \partial_u - \frac{1}{r} (D^z f^+ \partial_z + D^{\bar{z}} f^+ \partial_{\bar{z}}) + D^z D_z f^+ \partial_r \end{aligned} \quad (18.3)$$

Superrotation  $\xi_Y^+$

Supertranslation  $\xi_f^+$

<sup>14</sup> 相当冗长的计算, 细节请参考: [19, 20, 26–29]

其中,  $f(z, \bar{z})$  是  $CS^2$  上的任意函数, 而  $Y^{+z}$  在  $CS^2$  上全纯:<sup>15</sup>

$$\partial_{\bar{z}} Y^{+z} = 0 \quad (18.4)$$

<sup>15</sup> 就是  $S^2$  上的共形 Killing 场之分量

首先来看相对比较简单的 supertranslation, 可以验证, 当  $f$  取为常函数, 其生成  $u$  方向的平移, 其它三个方向平移则由  $Y_1^{\{0, \pm 1\}}$  生成<sup>16</sup>。所以下面这四个  $f$ :

<sup>16</sup> 这里  $Y_\ell^m$  指球谐函数

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad f_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{1 + z\bar{z}}, \quad f_3 = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \quad (18.5)$$

所对应的生成元正好是 Poincaré 群的四个方向平移, 进一步  $f$  扩展为任意函数, 就变成了所谓 “supertranslation”。在无穷小的 supertranslation 下  $N_{zz}, m_B, C_{zz}$  的改变可以由下式定量刻画<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned}\delta_{f+} N_{zz} &= f^+ \partial_u N_{zz} \\ \delta_{f+} m_B &= f^+ \partial_u m_B + \frac{1}{4} [N_{zz} D_z^2 f^+ + 2D_z N^{zz} D_z f^+ + c.c.] \\ \delta_{f+} C_{zz} &= f^+ \partial_u C_{zz} - 2D_z^2 f^+\end{aligned}\quad (18.6)$$

Minkowski 时空自然渐近平直, 对应的三个参数都为 0, 上式中前两个为 0, 可以解释为换一下坐标系不会改变质量, 也不会产生引力波。但是第三个式子不为 0, 这意味着渐近对称性在 Minkowski 时空中被破缺, 容易验证当且仅当  $f$  取 18.5 的四个值时, 对应 Poincaré 群的平动, 会让  $\delta_{f+} C_{zz} = 0$ 。这种对称性的自发破缺实际上意味着经典引力中的真空不唯一, 且存在 Goldstone 粒子 [14]。

再来看 superrotation, 首先注意到  $Y^{+z}$  全纯, 这意味着其在  $CS^2$  上全局解析, 否则在极点处不满足 18.4。这说明  $Y^{+z}$  只能取为全局共形变换 Möbius 变换形式, 构成 Witt 代数的  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  子代数, 有六个分量, 通常取为:

$$\begin{aligned}Y_{12}^{+z} &= -iz, & Y_{13}^{+z} &= \frac{1}{2}(1+z^2), & Y_{23}^{+z} &= \frac{i}{2}(1-z^2) \\ Y_{03}^{+z} &= -z, & Y_{01}^{+z} &= \frac{1}{2}(1-z^2), & Y_{02}^{+z} &= \frac{i}{2}(1+z^2)\end{aligned}$$

事实上, 这六个函数对应的正是  $SO(3, 1)^\uparrow$  的六个 boost 和 rotation! 所以 BMS 群的 superrotation 对应的就是 Lorentz 群:

$$\text{BMS} = \text{Supertranslation} \times SO(3, 1)^\uparrow \quad (18.7)$$

所以, BMS 群在最初的意义并没有 superrotation, 只是单纯的 rotation。但是, 文献 [26–28, 30] 指出, 真正的渐近对称性或许应该是下面的所谓 **extended BMS group**:

$$\text{extended BMS} = \text{Supertranslation} \times \text{Superrotation} \quad (18.8)$$

也就是说, 那些 local 的解析函数  $Y^{+z}$  也应当是渐近对称性, 这样的话, 渐近对称性也变成无限维对称性, superrotation 部分与天球上共形变换一一对应。

在 superrotation 下度规前系数的变换可以写为<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned}\delta_{Y^+} C_{zz} &= \frac{u}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) \partial_u C_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} C_{zz} - \frac{1}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) C_{zz} - u D_z^3 Y^{+z} \\ \delta_{Y^+} N_{zz} &\equiv \partial_u \delta_{Y^+} C_{zz} = \frac{u}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) \partial_u N_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} N_{zz} - D_z^3 Y^{+z}\end{aligned}\quad (18.9)$$

对于  $\text{BMS}^-$ , 同样可以进行讨论, 这里仅罗列一些公式:  
Supertranslation:

$$\xi_{f^-} = -f^- \partial_v - \frac{1}{r} (D^z f^- \partial_z + D^{\bar{z}} f^- \partial_{\bar{z}}) + D^z D_z f^- \partial_r \quad (18.10)$$

$$\begin{aligned}\delta_{f^-} M_{zz} &= f^- \partial_v M_{zz} \\ \delta_{f^-} D_{zz} &= f^- \partial_v D_{zz} + 2D_z^2 f^-\end{aligned}\quad (18.11)$$

Superrotation:

$$\xi_{Y^-} = \left(1 - \frac{v}{2r}\right) Y^{-z} \partial_z + \frac{v}{2r} D^{\bar{z}} D_z Y^{-z} \partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2} (r-v) D_z Y^{-z} \partial_r + \frac{v}{2} D_z Y^{-z} \partial_v + c.c. \quad (18.12)$$

<sup>17</sup> 略去了后面应乘的无穷小参数

<sup>18</sup> 这里  $\mathcal{L}_{Y^+} \equiv \mathbf{Y}^+ \cdot \mathbf{D} + 2D_z Y^z$ , 这一点可以从把  $C_{zz}$  看作  $(0, 2)$  张量场分量, 然后利用 11.1 求李导数看出

$$\begin{aligned}
\delta_Y D_{zz} &= \frac{v}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) \partial_v D_{zz} + \mathcal{L}_Y D_{zz} - \frac{1}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) D_{zz} + v D_z^3 Y^{-z} \\
\delta_Y M_{zz} &\equiv \partial_v \delta_Y D_{zz} = \frac{v}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) \partial_v M_{zz} + \mathcal{L}_Y M_{zz} + D_z^3 Y^{-z}
\end{aligned} \tag{18.13}$$

文献 [27, 29] 中详细讨论了  $\mathfrak{bms}_n$  及其中心扩张,  $\text{BMS}_{d+2}/\text{CFT}_d$  对应以及 charge algebra。 to be continue ...

## SECTION 19

# Asymptotic flat spacetime: charges

---

时空连续对称性会诱导守恒荷, 量子化后变成算符, 是后面 Ward 恒等式的出发点。

## SUBSECTION 19.1

# Noether theorem

---

# Soft Theorem

## SECTION 20

### Review on the quantization of gravity

本节采用 [31] 中的记号简要回顾引力量子化以及树图顶点项。众所周知微扰量子引力是不可重整化的，所以只能看作是一个有效理论，但好就好在它的低能极限是可以用于计算引力波振幅的 [32–34]。

取自由引力场拉式量为：

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{-g} R, \quad \kappa = \sqrt{32\pi G} \quad (20.1)$$

然后在平直度规附近做微扰：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (20.2)$$

代入到  $\mathcal{L}_{EH}$  进行计算得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} = & \partial_\alpha h \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \partial_\alpha h_{\beta\gamma} \partial^\beta h^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} (\partial_\alpha h)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\gamma h_{\alpha\beta})^2 \\ & + \text{total derivatives} + \mathcal{O}(\kappa, h^3). \end{aligned} \quad (20.3)$$

其中  $h \equiv h^\alpha_\alpha$ 。这一堆都是  $(\partial h)^2$  项，对应动能项，显然由于没有  $h^2$  项，所以引力子质量为 0。后面的高阶项意味着引力子之间是有自相互作用的。

由于广义相对论是微分同胚不变的，所以他其实也是个规范理论，不同的坐标系就意味着不同的规范，度规分量的变换正对应于场的规范变换。那么我们对  $h_{\mu\nu}$  进行路径积分时就必须规范下进行，这可以使用 F-P 鬼场方法来系统的处理。比较常用的规范选取是下面的 de-Donder 规范：

$$G_\mu \equiv \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h = 0 \quad (20.4)$$

这导致规范固定项：

$$\mathcal{L}_{GF} = G_\mu G^\mu = \partial^\nu h_{\mu\nu} \partial^\rho h^\mu_\rho + \frac{1}{4} (\partial_\mu h)^2 - \partial^\nu h_{\mu\nu} \partial^\mu h \quad (20.5)$$

以及鬼场：

$$\mathcal{L}_{GH} = -\bar{b}^\mu \left( \kappa \frac{\delta G_\mu}{\delta \xi^\nu} \right) b^\nu \quad (20.6)$$

de-Donder 规范下：

$$\kappa \frac{\delta G_\mu}{\delta \xi^\nu} = \eta_{\mu\nu} \partial^2 + \kappa [\partial^\rho h_{\mu\nu} \partial_\rho + \partial^\rho h_{\nu\rho} \partial_\mu + \partial^\rho (\partial_\nu h_{\mu\rho}) - \partial_\mu h_{\nu\rho} \partial^\rho - \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu h)] \quad (20.7)$$

进行路径积分时，就不必再考虑规范，取而代之  $\mathcal{L}_{EH} \mapsto \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{GH}$ ，由于树图



鬼场无贡献，所以这里只考虑前两项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{EH}}|_{h^2} + \mathcal{L}_{\text{GF}} &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial^2 h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}h\partial^2 h \\ &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta} \underbrace{\left[ \eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\delta)\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} \right]}_{I^{\alpha\beta,\gamma\delta}} \partial^2 h_{\gamma\delta}\end{aligned}\quad (20.8)$$

给出费曼图顶点和传播子项：

$$\alpha\beta \text{ \scriptsize{~~~~~}} \gamma\delta = \frac{iP_{\alpha\beta,\gamma\delta}}{p^2 - i0^+} \quad \text{with} \quad P_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \eta_{\alpha(\gamma}\eta_{\delta)\beta} - \frac{1}{D-2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} \quad (20.9)$$

其中  $I^{\alpha\beta,\gamma\delta}P_{\gamma\delta,\rho\kappa} = \delta_{(\rho}^{\alpha}\delta_{\kappa)}^{\beta}$ 。高阶自相互作用顶点可以在 [35] 中找到。

引力子自旋为 2，但由于规范的限制，其仍然如光子一样只有两个独立的极化矢量（张量），对应引力波的两种偏振模式，只不过这个时候其实是个二阶对称极化张量。满足下面的条件：

$$p_{\mu}\epsilon_{++/--}^{\mu\nu}(p) = 0, \quad \eta_{\mu\nu}\epsilon_{++/--}^{\mu\nu}(p) = 0 \quad (20.10)$$

利用光子的极化矢量，可以构造出一组非常方便的  $\epsilon_{++/--}^{\mu\nu}$  选取：

$$\epsilon_{\pm\pm}^{\mu\nu} = \epsilon_{\pm}^{\mu}\epsilon_{\pm}^{\nu} \quad (20.11)$$

现在考虑引力场与其他场的耦合，耦合项拉式量为：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (20.12)$$

这里  $T_{\mu\nu}$  是场的能动张量，可以使用下式进行计算：

$$T_{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (20.13)$$

$S_M$  是物质场的作用量，但是是在弯曲时空中的，可以使用最小耦合方法得到<sup>1</sup>。以自旋为 0 对应的实标量场为例。<sup>1</sup> 玻色场可以这么做，费米场复杂些

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left( -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - V(\phi) \right) \quad (20.14)$$

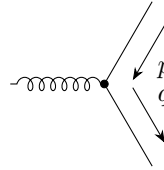
这里我们把所有暗含  $\eta$  的地方都显式的写出来了，弯曲时空中的作用量只需要将  $\eta \mapsto g, \partial \mapsto \nabla$  即可，得到：

$$\tilde{S}_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - V(\phi) \right) \quad (20.15)$$

当然，对称性允许我们在后面添加正比于 Ricci 标量的项等等，但所谓我们要的就是“最小”耦合。不过在微扰引力框架下，我们其实只需要利用 20.14 对  $\eta$  求变分导数就好了，对于无质量的自由标量场（对应不动点处的理论），我们得到：

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\phi\partial_{\rho}\phi \quad (20.16)$$

对应的顶点项为：



$$= i\kappa p_\mu q_\nu + \text{正比于}\eta_{\mu\nu}\text{的项} \quad (20.17)$$

## SECTION 21

### Soft theorem from feynman diagrams

所谓软粒子，指的就是动量趋于 0 的无质量粒子，因为无质量  $E = cp$ ，所以能量也会趋于 0，任意过程都会辐射出期望值为无限多个的软粒子。本节使用费曼图方法讨论辐射软粒子的振幅修正 [36]。

首先考虑辐射一个软光子，理论背景为旋量 QED，散射过程为  $ne^- \rightarrow me^- + \gamma$ ，注意考虑的是一般的旋量 QED，可以有不同味的电子，电荷为  $Q_i$ 。这里考虑的是电子，正电子的讨论也类似，最终结论是一样的。

辐射软光子可以从入射外线辐射，也可以从出射外线辐射，还可以从内线辐射：

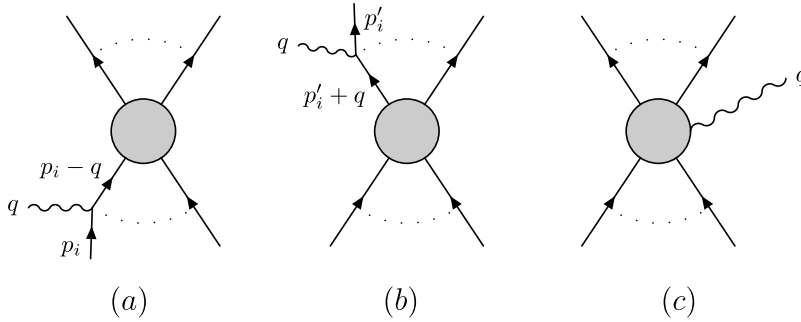


图 7. 辐射软光子的三种情况

我们使用  $\mathcal{A}(p, q)$  表示辐射一个软光子后的振幅  $\mathcal{A}(p)$  表示没有辐射软光子的振幅（所有阶费曼图求和）。用  $T(p_i - q)$  表示原先没有辐射软光子的费曼图砍掉一个  $p_i$  外线但保留外线动量为非在壳的  $p_i - q$  得到的费曼图振幅，显然  $T(p_i)u(p_i) = \mathcal{A}(p)$ 。

首先计算入射外线辐射软光子：

$$Q_i T(p_i - q) \frac{(-\not{p}'_i + \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2} u(p_i) = -Q_i T(p_i - q) \left[ \frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i + i0^+} \right] u(p_i) \quad (21.1)$$

其中利用了  $\not{q}\not{b} = -2a \cdot b - \not{b}\not{a}$ ， $q \cdot \epsilon_\pm(q) = 0$  以及狄拉克方程  $(\not{p} + m)u(p) = 0$ 。其中  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 。唯一做近似的地方就是分母里面的  $q^2$  我们略去了，这对后面的高阶修正也不会影响。这一注意到  $q = 0$  实际上是一个极点，这是因为在光子无线“软”的时候，多出来的那条内线传播子会无线趋于在壳，导致分母为 0。

对于出射粒子辐射软光子也是类似的计算得到：

$$Q'_i \bar{u}(p'_i) \frac{(-\not{p}'_i - \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2} \bar{T}(p_i + q) = Q'_i \bar{u}(p'_i) \left[ \frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i - i0^+} \right] \bar{T}(p_i - q) \quad (21.2)$$

至于内线发射光子，我们用  $N^\mu(p, q)$  表示，而且注意到  $q \rightarrow 0$  时  $N$  非奇异，而且内线本身就是不在壳的，所以可以认为  $N^\mu(p, q) \sim \mathcal{O}(q^0)$ 。三项加起来得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p, p', q) = & \sum_{\text{incoming}} -Q_i T(p_i - q) \frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i + i0^+} u(p_i) \\ & + \sum_{\text{outgoing}} Q'_i \bar{u}(p'_i) \frac{\epsilon(q) \cdot p'_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p'_i - i0^+} \bar{T}(p'_i + q) \\ & + \epsilon(q)_\mu N^\mu(p, p', q) \end{aligned} \quad (21.3)$$

考虑最低阶修正，也就是只保留极点，得到：

$$\mathcal{A}(p, q) = \left[ \sum_i \eta_i Q_i \frac{\epsilon(q) \cdot p_i}{q \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(1) \quad (21.4)$$

其中对于入射粒子  $\eta_i = -1$ ，出射粒子为  $+1$ 。QED 中辐射出光子的振幅都可以拆分成  $\epsilon(q)_\mu \mathcal{M}^\mu$ ，振幅是相对论不变量，但是我们虽然常说  $\epsilon(q)_\mu$  是极化矢量，但它并不是真正意义上的矢量，因为其在 lorentz 变换下并不协变，而是会多出来一个正比于  $q$  的项<sup>2</sup>[1]。为了让振幅是相对论不变量，必须有：

$$q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 \quad (21.5)$$

也就是 Ward 恒等式，也可以从 Ward-高桥恒等式在 U(1) 对称性下导出它，实际上也就是利用电荷守恒导出它，但是前面我们的导出仅仅依赖于 Lorentz 不变性。现在把 21.4 中的  $\epsilon(q)$  替换为  $q$  我们得到：

$$\left[ \sum_i \eta_i Q_i \right] \mathcal{A}(p) = 0 \quad (21.6)$$

也就是说，如果散射过程不被禁闭，也就是  $\mathcal{A}(p) \neq 0$ ，那么这个过程必然要电荷守恒！另外说一句，我们这里的推导得到的 21.4 对于任意自旋的场都适用，比如对于标量 QED，只需要把  $S^{\mu\nu}$  替换为 0 就好，不同的自旋对应  $S^{\mu\nu}$  的不同表示。

现在继续考虑两个光子的情况，两个光子由不同外线发射，在最低阶近似下只是乘上了 21.4 中两个因子，但是由相同外线发射就要考虑发射的先后顺序，因子形式会变化：

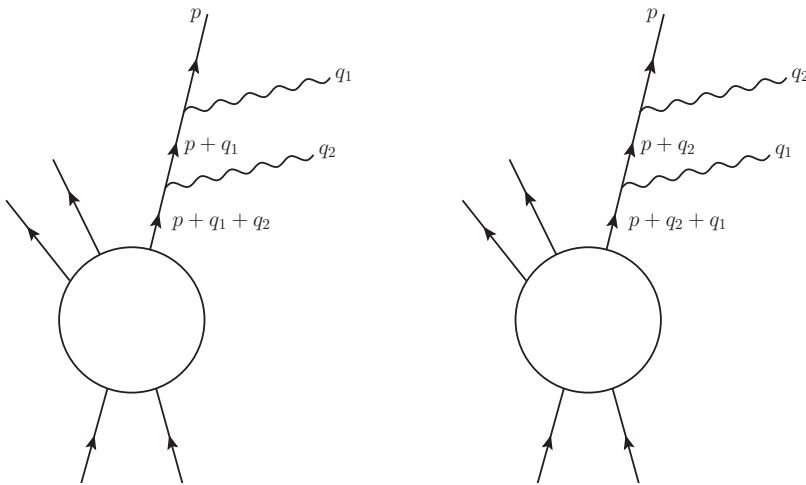


图 8. 同一外线辐射两个软光子

<sup>2</sup> 我们是在 Lorentz 变换的意义下理解，其实矢量的这种变换完全可以理解为规范选取不同，从而从振幅的规范不变性导出结果。[37]

把两幅图贡献的因子加起来得到：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot q_1 - i\eta 0^+} \right] \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot (q_2 + q_1) - i\eta 0^+} \right] + \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot q_2 - i\eta 0^+} \right] \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta 0^+} \right] \\ &= \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot q_1 - i\eta 0^+} \right] \left[ \frac{\eta Q \epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot q_2 - i\eta 0^+} \right] \end{aligned} \quad (21.7)$$

得到的结果就是不同外腿上面的辐射两个软光子得到的因子，利用数学归纳法可以证明这一结论对于辐射任意数量的软光子都是适用的，那么最终我们只需要把因子乘起来，然后对所有外腿求和就好了，用式子表示如下：

$$\mathcal{A}(p, q_1, \dots, q_m) = \prod_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n Q_i \eta_i \frac{\epsilon(q_j) \cdot p_i}{q_j \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(1) \quad (21.8)$$

前面的因子称为 **eikonal 因子**。推广到 non-Abelian Y-M 场的软定理也早有人计算过了 [38–41]，软定理更多更一般的推广见 [36] 的文献索引。

现在来考虑辐射一个软引力子的情况，考虑第一节引入的标量场模型，传播子为：

$$-\frac{i}{(p + \eta q)^2 + m^2} \quad (21.9)$$

顶点由 21.2 给出，但是由于 20.16，要与  $\epsilon^{\mu\nu}$  缩并，正比于  $\eta_{\mu\nu}$  的项没有贡献。以出射外线辐射软引力子为例，给出因子：

$$i\sqrt{32\pi G} \epsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \frac{-i}{(p + q)^2 + m^2} \rightarrow \sqrt{8\pi G} \frac{\epsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{p \cdot q} \quad (21.10)$$

求和后得到：

$$\mathcal{A}(p, q) = \left[ \sum_i \frac{\kappa_i}{2} \eta_i \frac{\epsilon_{\mu\nu}(q) p_i^\mu p_i^\nu}{q \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(1) \quad (21.11)$$

引力子同样有类似于 21.5 的恒等式，由此我们可以得到所有的  $\kappa_i$  都是相等的<sup>3</sup>，也就是等效原理！而自旋大于二的软粒子的软定理沿用上面的方法给出的限制就太强了，以至于散射  $\mathcal{S}$  矩阵必须 trivial，所以一般认为自旋大于二的无质量粒子在“变软”的时候就脱耦合了。

<sup>3</sup> 这里有点循环论证了，因为前面为了推导的方便我们同一取  $\kappa_i = \sqrt{32\pi G}$

## SECTION 22

### Subleading and subsubleading order soft theorem

考虑动量为  $\delta q, \delta \rightarrow 0$  的软光子辐射， $\pm$  表示软光子的螺旋度，而  $\ell_i$  表示其它粒子的螺旋度，则更一般的软定理可以用洛朗展开写成：

$$\mathcal{A}_{\ell_1, \dots, \ell_n, \pm}(p, \delta q) = \left[ \sum_{a=0}^{\infty} \delta^{-1+a} S_{\pm}^{(a)} \right] \mathcal{A}_{\ell_1, \dots, \ell_n}(p) \quad (22.1)$$

次领头阶的计算可以从 21.5 式出发，将 21.3 中所有的  $\epsilon$  替换为动量，保留到  $\mathcal{O}(\delta^0)$ ，并且令等式左边为 0。注意到这一阶近似下可以有  $N^\mu(p, q) \approx N^\mu(p, 0)$ ，得到：

$$-q^\mu N_\mu(p, 0) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \eta_i Q_i \mathcal{A}(p) + q^\mu \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \mathcal{A}(p) \quad (22.2)$$

其中第一项为0是因为电荷守恒 21.6, 第二项中的  $\partial_{p_i}$  只作用于  $\mathcal{A}$  中的  $T$ , 不作用于  $u^4$ 。这样就确定出了  $N^{\mu 5}$ , 再带回到 21.3 得到:

$$A^\mu = \sum_{i=1}^n Q_i \left[ \frac{\eta_i p_i^\mu}{\delta q \cdot p_i} + \frac{q^\nu p_i^\mu}{q \cdot p_i} \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - \frac{i q_\nu S_i^{\mu\nu}}{q \cdot p_i} - \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(\delta) \quad (22.3)$$

这个式子里面的  $\partial_{p_i}$  就是作用于整个  $\mathcal{A}$  了。定义:

$$L_i^{\mu\nu} = i \left( p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_{i\nu}} - p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} \right), \quad J_i^{\mu\nu} + S_i^{\mu\nu} \quad (22.4)$$

这里  $S_i^{\mu\nu}$  要根据第  $i$  个粒子的自旋去选取对应的 Lorentz 群不可约表示, 比如  $s=0, S^{\mu\nu}=0; s=\frac{1}{2}, S^{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 。这样我们就得到了包含 subleading 修正的软定理 (LBK 定理 [42, 43]):

$$S_\pm^{(0)} = \sum_{i=1}^n Q_i \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu}(q) p_i^\mu}{q \cdot p_i}, \quad \text{and} \quad S_\pm^{(1)} = -i \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\epsilon_{\pm\mu}(q) q_\nu J_i^{\mu\nu}}{q \cdot p_i} \quad (22.5)$$

同样的方法可以推导出软引力子定理的 subleading 和 subsubleading 的修正项<sup>6</sup>[45–48]:

$$\begin{aligned} S_\pm^{(0)} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) p_i^\mu p_i^\nu}{q \cdot p_i}, \quad S_\pm^{(1)} = -i \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) p_i^\mu q_\lambda J_i^{\nu\lambda}}{q \cdot p_i}, \\ S_\pm^{(2)} &= -\frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) q_\rho q_\sigma J_i^{\mu\rho} J_i^{\nu\sigma}}{q \cdot p_i} \end{aligned} \quad (22.6)$$

<sup>4</sup> 因为这个式子的导出, 是对  $T(p \pm q)$  展开得到的。

<sup>5</sup> 其实只能确定到某个与  $q$  无关的矢量  $v$ , 满足  $q \cdot v = 0$ , 但是这样的  $v$  实际上不存在。

<sup>6</sup> 软定理已经使用不同的方法推了很多遍, 文献 [36, 44] 中有不同证明方法的文献索引, 而且还有对于更复杂的非阿贝尔规范理论的软定理讨论。

## SECTION 23

### Massless QED

本章用天球的视角来看 QED 理论, 为下一节做准备, 本节的讨论都局限于比较简单的, 不含磁荷而且电子没有质量的 QED 理论, 但是基于此推出的许多结论实际上是普适的, 可以推广到有质量 QED 上 [14]。

弯曲时空中 QED 作用量:

$$S_{EM} = -\frac{1}{2e^2} \int F \wedge \star F + S_M = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + S_M \quad (23.1)$$

其中  $S_M$  由  $j^\nu A_\nu$  形式给出相互作用项, 即  $j^\nu = -\frac{\delta S_M}{\delta A_\nu}$ 。Maxwell 场方程有下面简洁形式:

$$\begin{cases} dF = 0 & \Rightarrow \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \\ d\star F = e^2 \star j & \Rightarrow \nabla_\mu F^{\mu\nu} = e^2 j^\nu \end{cases} \quad (23.2)$$

下式给出了整个空间内的净电荷/磁荷<sup>7</sup>:

$$Q_E = \frac{1}{e^2} \int_{S_\infty^2} \star F = \int_\Sigma \star j, \quad Q_M = \frac{1}{2\pi} \int_{S_\infty^2} F \quad (23.3)$$

它们是量子化的, 只能取整数。QED 是  $U(1)$  规范理论, 在  $A \mapsto A + d\varepsilon$  的规范变换下理论不变, 后文不加说明都在所谓 **retarded radial 规范** 下进行计算 [49]:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^+ : A_r &= 0, \quad A_u|_{\mathcal{I}^+} = 0 \\ \mathcal{I}^- : A_r &= 0, \quad A_v|_{\mathcal{I}^-} = 0 \end{aligned} \quad (23.4)$$

<sup>7</sup> 后文  $\star, *$  指的都是 Hodge dual

在  $\mathcal{I}^\pm$  附近可以把  $A, F$  展开成  $\mathcal{O}(1/r)$  的形式, 用  $A^{(i)}, F^{(i)}$  表示  $r^{-i}$  项前的系数, 那么在这一规范下有:

$$F_{ur}^{(0)} = A_u^{(0)} = 0, F_{z\bar{z}}^{(0)} = \partial_z A_{\bar{z}}^{(0)} - \partial_{\bar{z}} A_z^{(0)}, F_{uz}^{(0)} = \partial_u A_z^{(0)}, F_{rz}^{(0)} = -A_z^{(1)} \quad (23.5)$$

$\mathcal{I}^-$  处类似。但这个规范选取就如库伦规范  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  一样没有完全确定规范,  $A_z$  还可以进行下面的所谓 Large gauge transformation:

$$A_z \mapsto A_z + \partial_z \varepsilon(z, \bar{z}), \quad \forall \varepsilon \in C^\infty[CS^2] \quad (23.6)$$

运动电荷激发的电磁场即所谓 Liénard-Wiecher 势 [50]。这里我们在天球坐标下将 advanced 和 retarded 势统一写为:

$$F_{rt}(\vec{x}, t) = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k \left( r - t\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k \right)}{\left| \gamma_k^2 \left( t - r\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k \right)^2 - t^2 + r^2 \right|^{3/2}}, \quad r^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} = r\hat{x} \quad (23.7)$$

其中我们假设所有电荷之间匀速运动, 而且相互作用可忽略, 这个假设有点强, 但是请相信后面导出的结论是可以推广到一般情形的。现在计算在天球上的极限:

$$\begin{aligned} F_{rt}|_{\mathcal{I}^+} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 - \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2} \\ F_{rt}|_{\mathcal{I}^-} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 + \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2} \end{aligned} \quad (23.8)$$

取极限, 得到:

$$\boxed{F_{rt}|_{\mathcal{I}_-^+} \neq F_{rt}|_{\mathcal{I}_+^-}} \quad (23.9)$$

正是这个式子说明了要严格区分  $\mathcal{I}_-^+, \mathcal{I}_+^-$  和  $i^0$ 。但是, 因为  $F_{ru} = F_{rt} = F_{rv}$ :

$$\boxed{\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{ru}(\hat{x})|_{\mathcal{I}_-^+} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{rv}(-\hat{x})|_{\mathcal{I}_+^-}} \quad (23.10)$$

也就是说场在两个天球上是对径认同的, 这也是为什么前面  $\mathcal{I}^\pm$  天球的角向选取是 antipodal 的, 上边的式子可以写成下面很简洁的形式:

$$\boxed{F_{ru}^{(2)}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = F_{rv}^{(2)}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-}} \quad (23.11)$$

这个式子是普适的, 而且非常重要, 是后面散射问题的核心。现在考虑任意一个天球上的对径认同的函数:

$$\varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = \varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (23.12)$$

定义下面的 future charges 和 past charges:

$$\boxed{Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_-^+} \varepsilon * F, \quad Q_\varepsilon^- = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^-} \varepsilon * F} \quad (23.13)$$

由于 Hodge 对偶后出来的体积元  $\propto r^2$ , 所以在天球上  $r \rightarrow \infty$ ,  $F \rightarrow F^{(2)}$ , 再根据对径

认同的条件，这样对于任意一个函数  $\varepsilon$ ，我们都给出了一个“电荷”守恒律：

$$\boxed{Q_\varepsilon^+ = Q_\varepsilon^-} \quad (23.14)$$

对于  $\varepsilon$  是常函数情形，就得到了一般的电荷守恒律。利用 Stokes 公式<sup>8</sup>可以改写  $Q_\varepsilon^\pm$  为<sup>9</sup>：

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} d\varepsilon \wedge *F + \int_{\mathcal{I}^+} \varepsilon * j + \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} \varepsilon * F \quad (23.15)$$

最后一项为 0 是因为我们假设电子是无质量的，这样电子就是从  $\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$ ，而不是  $i^- \rightarrow i^+$ ，所以  $F|_{\mathcal{I}^+} = 0$ 。第一项是 Soft term  $Q_S^+$  与软光子的产生湮灭有关，第二项由于是与流耦合，所以叫 Hard term  $Q_H^+$  与带电实物粒子有关。将上面的微分形式写成分量形式<sup>10</sup>：

$$Q_\varepsilon^+ = \underbrace{-\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \left( \partial_z \varepsilon F_{uz}^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon F_{u\bar{z}}^{(0)} \right)}_{Q_S^+} + \underbrace{\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_u^{(2)}}_{Q_H^+} \quad (23.16)$$

定义 Soft photon mode  $N_z$ ：

$$N_z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} e^{i\omega u} \quad (23.17)$$

再次看到  $N_z$  对应的是电磁场的零频部分，也就是软光子部分，而且有：

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} N_z - \partial_z N_{\bar{z}} &= \int_{-\infty}^{\infty} du \left[ \partial_{\bar{z}} F_{uz}^{(0)} - \partial_z F_{u\bar{z}}^{(0)} \right] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} du \partial_u F_{z\bar{z}}^{(0)} = -F_{z\bar{z}}^{(0)} \Big|_{\mathcal{I}^+}^{\mathcal{I}^-} = 0 \end{aligned} \quad (23.18)$$

最后等于 0 是因为  $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}^\pm}$ ，本质上是因为没有磁单极子，磁场不是 long-range 的，在无穷远处为 0<sup>11</sup>。所以  $N_z$  无旋，可以由此引申出一个实标量场  $N$  作为其原函数：

$$N_z \equiv e^2 \partial_z N = \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} = A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}^+} - A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}^-} \quad (23.19)$$

利用  $N$ ，future charges 可以写成下面简洁形式：

$$Q_\varepsilon^+ = 2 \int_{S_\infty^2} d^2z N \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon + \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_u^{(2)} \quad (23.20)$$

对 past charge 也可以来上面的这一套：

$$Q_\varepsilon^- = -2 \int_{S_\infty^2} d^2z N \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon + \int_{\mathcal{I}^-} dv d^2z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_v^{(2)} \quad (23.21)$$

上面讨论的都是经典场，现在进行量子化，目的是说明前面定义的 future charge 和 past charges 都是 Large gauge transformations 对应的生成元算符。量子化方案选用正则量子化方案，这里使用的方法不需要事先对时空进行 3+1 分解，是协变的方法 [51–55]。

## SECTION 24

### Ward identity = Soft theorem

<sup>8</sup>  $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

<sup>9</sup>  $Q_\varepsilon^-$  只用把  $+$   $\mapsto -$

<sup>10</sup> 其中使用了 Bianchi 恒等式：  
 $\partial_u F_{ru}^{(2)} + D^z F_{uz}^{(0)} + D^{\bar{z}} F_{u\bar{z}}^{(0)} + e^2 j_u^{(2)} = 0$

<sup>11</sup> 因为  $F_{z\bar{z}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{z}} F_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} F_{ij}$ ，而规范场强的空间分量  $F_{ij}$  只和磁场有关。





*Appendix:*  
*Geometric Approaches*

## 参考文献

- [1] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge University Press (6, 2005), [10.1017/CBO9781139644167](#).
- [2] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, WORLD SCIENTIFIC (1985), [10.1142/0097](#), [<https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/0097>].
- [3] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry I*, *Proc. Symp. Pure Maths.* **81** (2010) 65 [[0909.0551](#)].
- [4] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry II*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **15** (2011) 1373 [[1003.3436](#)].
- [5] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, *Annals of Mathematics* **59** (1954) 1.
- [6] A. Zee, *Group Theory in A Nutshell*, Princeton University Press (2016).
- [7] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer Cham, 2 ed. (2017), [10.1007/978-3-319-66631-0](#).
- [8] 梁灿彬, 《微分几何入门与广义相对论》, vol. 1, 科学出版社 (2006).
- [9] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Heidelberg, Germany (2013), [10.1007/978-3-642-29497-6](#).
- [10] S. Rychkov, *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in  $D \geq 3$  Dimensions*, SpringerBriefs in Physics (1, 2016), [10.1007/978-3-319-43626-5](#), [[1601.05000](#)].
- [11] H. Osborn, *Lecture notes on Conformal Field Theories*, Cambridge (October, 2019), [<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/CFTNotes.pdf>].
- [12] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, Universität Bern (April, 2023), [<http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>].
- [13] B. Oblak, *From the Lorentz Group to the Celestial Sphere*, 8, 2015 [[1508.00920](#)].
- [14] A. Strominger, *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory* (3, 2017), [[1703.05448](#)].
- [15] 梁灿彬, 《微分几何入门与广义相对论》, vol. 2, 科学出版社 (2006).
- [16] G. Compère, *Advanced Lectures on General Relativity*, vol. 952, Springer, Cham, Cham, Switzerland (2, 2019), [10.1007/978-3-030-04260-8](#).
- [17] M. Campiglia and A. Laddha, *Asymptotic symmetries of gravity and soft theorems for massive particles*, *JHEP* **12** (2015) 094 [[1509.01406](#)].
- [18] M. Campiglia, *Null to time-like infinity Green's functions for asymptotic symmetries in Minkowski spacetime*, *JHEP* **11** (2015) 160 [[1509.01408](#)].
- [19] H. Bondi, M.G.J. van der Burg and A.W.K. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **269** (1962) 21.
- [20] R.K. Sachs, *Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **270** (1962) 103.
- [21] S. Pasterski, *Lectures on celestial amplitudes*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 1062 [[2108.04801](#)].
- [22] D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski and A. Strominger, *Semiclassical Virasoro symmetry of the quantum gravity  $\mathcal{S}$ -matrix*, *JHEP* **08** (2014) 058 [[1406.3312](#)].
- [23] A.-M. Raclariu, *Lectures on Celestial Holography*, [2107.02075](#).
- [24] D. Tong, *Lectures on General Relativity*, Cambridge (2019), [<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>].

- [25] 赵柳, 《相对论与引力理论导论》, 科学出版社 (2017).
- [26] G. Barnich and C. Troessaert, *Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited*, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 111103 [0909.2617].
- [27] G. Barnich and C. Troessaert, *Supertranslations call for superrotations*, *PoS CNCFG2010* (2010) 010 [1102.4632].
- [28] G. Barnich and C. Troessaert, *BMS charge algebra*, *JHEP* **12** (2011) 105 [1106.0213].
- [29] G. Barnich and C. Troessaert, *Aspects of the BMS/CFT correspondence*, *JHEP* **05** (2010) 062 [1001.1541].
- [30] T. Banks, *A Critique of pure string theory: Heterodox opinions of diverse dimensions*, *hep-th/0306074*.
- [31] S. Badger, J. Henn, J. Plefka and S. Zoia, *Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory*, **2306.05976**.
- [32] W.D. Goldberger and I.Z. Rothstein, *An Effective field theory of gravity for extended objects*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 104029 [hep-th/0409156].
- [33] Z. Bern, C. Cheung, R. Roiban, C.-H. Shen, M.P. Solon and M. Zeng, *Black Hole Binary Dynamics from the Double Copy and Effective Theory*, *JHEP* **10** (2019) 206 [1908.01493].
- [34] G. Mogull, J. Plefka and J. Steinhoff, *Classical black hole scattering from a worldline quantum field theory*, *JHEP* **02** (2021) 048 [2010.02865].
- [35] S. Sannan, *Gravity as the Limit of the Type II Superstring Theory*, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 1749.
- [36] T. McLoughlin, A. Puhm and A.-M. Raclariu, *The SAGEX review on scattering amplitudes chapter 11: soft theorems and celestial amplitudes*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443012 [2203.13022].
- [37] M. Srednicki, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1, 2007).
- [38] F.A. Berends and W.T. Giele, *Recursive Calculations for Processes with n Gluons*, *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 759.
- [39] F.A. Berends and W.T. Giele, *Multiple Soft Gluon Radiation in Parton Processes*, *Nucl. Phys. B* **313** (1989) 595.
- [40] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Quark - Gluon Amplitudes in the Dual Expansion*, *Nucl. Phys. B* **299** (1988) 673.
- [41] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Multiparton amplitudes in gauge theories*, *Phys. Rept.* **200** (1991) 301 [hep-th/0509223].
- [42] T.H. Burnett and N.M. Kroll, *Extension of the low soft-photon theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 86.
- [43] F.E. Low, *Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions*, *Phys. Rev.* **110** (1958) 974.
- [44] A. Brandhuber, J. Plefka and G. Travaglini, *The SAGEX Review on Scattering Amplitudes Chapter 1: Modern Fundamentals of Amplitudes*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443002 [2203.13012].
- [45] Z. Bern, S. Davies, P. Di Vecchia and J. Nohle, *Low-energy behavior of gluons and gravitons from gauge invariance*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 084035.
- [46] R. Jackiw, *Low-energy theorems for massless bosons: Photons and gravitons*, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1623.
- [47] C.D. White, *Diagrammatic insights into next-to-soft corrections*, *Phys. Lett. B* **737** (2014) 216 [1406.7184].
- [48] J. Broedel, M. de Leeuw, J. Plefka and M. Rosso, *Constraining subleading soft gluon and graviton theorems*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 065024 [1406.6574].

- [49] T. He, P. Mitra, A.P. Porfyriadis and A. Strominger, *New Symmetries of Massless QED*, *JHEP* **10** (2014) 112 [[1407.3789](#)].
- [50] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd edition, 1998, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119985144>.
- [51] A. Ashtekar, *Asymptotic quantization : based on 1984 naples lectures*, 1987, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:107226501>.
- [52] V.P. Frolov, *NULL SURFACE QUANTIZATION AND QUANTUM THEORY OF MASSLESS FIELDS IN ASYMPTOTICALLY FLAT SPACE-TIME*, *Gen. Rel. Grav.* **10** (1979) 833.
- [53] S.W. Hawking and W. Israel, *Three Hundred Years of Gravitation*, Cambridge University Press (1989).
- [54] J. Lee and R.M. Wald, *Local symmetries and constraints*, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 725.
- [55] R.M. Wald and A. Zoupas, *A General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 084027 [[gr-qc/9911095](#)].
- [56] J. Ellis, *TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ*, *Comput. Phys. Commun.* **210** (2017) 103 [[1601.05437](#)].