天球振幅科研笔记

CELESTIAL AMPLITUDES

BUFAN ZHENG

Undergraduate Student at the Wuhan University
GitHub

whuzbf@qq.com

目录

PART

I

A quick review on SR & GR

Section 1

Basics conceptions in SR

我们生活的空间是一个四维局部平坦的 **Lorentz 流形**，也就是一个四维微分流形配备一个非正定、非退化的度规 $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$，这是一个 $(0, 2)$ 张量。局部平坦意思是说任何一点处都可以选取一个坐标系[1]使得 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \nabla_\rho g_{\mu\nu}$[2]。而 Lorentz 体现在 η 有一个指标是负数，而且根据惯性定理，无论你选取什么坐标系将度规对角化，最终负数的个数都是一样的，这样一来我们便可以严格的区分时间和空间[3]。

参数化流形后，时空上的每一点（事件）都将对应一个坐标 x^μ，时空中的曲线（世界线）可以参数化为 $x^\mu(\tau)$，其可以看作是由矢量场 $X = X^\mu \partial_\mu = \frac{x^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu$ 诱导的。考虑世界线上相邻的两点，我们可以定义线长为

$$dl = \sqrt{|g(X,X)|} = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{x^\nu}{d\tau}}$$

很多时候也把线长记为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 但是在微分几何的严格意义下，dx^μ 是对偶矢量，并不是初等微积分中的微分，所以这个式子只能理解为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$，也就是说 ds^2 只是张量 g 的另一个叫法而已！后面我们为了方便可能牺牲严谨性，使用 ds^2 表示世界线长。

GR 中最重要的基本假设便是在坐标变换下物理定律是不变的，这说明作用量必须是标量，几乎唯一确定了真空引力场作用量为：

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \tag{1.1}$$

Λ 是宇宙学常数
$g \equiv \det g_{\mu\nu}$
R 是 Ricci 标量
取自然单位制 $c = \hbar = 1$

由于度规是张量，所以其在坐标变换下分量变换为：[4]

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

在 SR 中我们仅研究平直的时空，或者说只研究惯性系之间的变换，这些惯性系中的变换满足 $\tilde{\eta} = \eta$，可以一般的记为：

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

那么 Λ 满足：

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta \tag{1.2}$$

本笔记主要考虑 SR 时空。

Section 2

Poincaré group and Lorentz group

显然所有的 Λ 构成了一个群，称之为 **Lorentz 群**：

$$L \equiv O(3,1) \equiv \left\{ \Lambda \in M(4, \mathbb{R}) | \Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta \right\} \tag{2.1}$$

[1] 这个坐标系称为**局部惯性系**，由于可以从指数映射结合测地线来构造这个惯性系，所以也称为**自由下落参考系**

[2] 这里符号约定为 $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$

[3] 如果这里把 η 中的 -1 变成 $+1$，我们称为 ***Riemann* 流形**

[4] 注意两边对应的自变量，因为张量都是关于流形上点的场，所以这里坐标变换后流形上某点对应的坐标也变了。

而所有的保度规变换还要加入 $a^m u$，构成 **Poincaré 群**：$O(3,1) \ltimes \mathbb{R}$，群乘法为：

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') = (\Lambda \cdot \Lambda', a + \Lambda \cdot a') \tag{2.2}$$

利用 Poincaré 群的不等价不可约表示可以对基本粒子进行分类，见本部分末尾。后面我们将主要关注 Lorentz 群。不难验证 $\det \Lambda = \pm 1$，它将 Lorentz 群分成两个分支，其中 $\det \Lambda = 1$ 的部分含有单位元，构成子群**正规 Lorentz 群**。记为 $SO(3,1)$ 或 L_+

另外 $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ 也将 Lorentz 群分成两个分支，其中 $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 的部分含有单位元，构成子群**正时 Lorentz 群**。记为 $O(3,1)^\uparrow$ 或 $L^\uparrow$。

最后 $L_+^\uparrow \equiv L^\uparrow \cap L_+$ 也构成了 L 的一个子群。这些子群之间可以用时间反演和空间反演算符相联系：

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

显然 $L_+ = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}\}, L^\uparrow = \{L_+^\uparrow, \mathcal{P}\}, L = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}, \mathcal{P}\}$

SUBSECTION 2.1

Poincaré algebra

现在考虑群的局部性质，考虑无穷小坐标变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$，保度规条件为：

$$\mathscr{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\mu \xi_\nu = \tilde{\eta}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \eta_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{2.4}$$

Remark 这里 $\mathscr{L}_\xi$ 表示李导数。李导数的严格定义涉及到拉回映射，首先对于某个矢量场 ξ，其给出了一个单参微分同胚群 ϕ_t（可以想象矢量场生成了一簇积分曲线，流形上每一点根据积分曲线移动便生成了单参微分同胚群），利用它我们可以构造拉回映射 ϕ_t^*，从而构造李导数为：

$$\mathscr{L}_\xi T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l} \equiv \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\right)$$

这里 a, b 是抽象指标，只表示张量类型，不表示分量。李导数可以利用下式计算其分量：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\xi T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} =& \xi^\lambda \nabla_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} - T^{\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \nabla_\lambda \xi^{\mu_1} - \cdots - T^{\mu_1\cdots\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \nabla_\lambda \xi^{\mu_k} \\ &+ T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\lambda\cdots\nu_l} \nabla_{\nu_1} \xi^\lambda + \cdots + T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\lambda} \nabla_{\nu_l} \xi^\lambda\end{aligned} \tag{2.5}$$

利用上式便可证明2.4的正确性。

ξ^μ 可以用 $\omega^\mu{}_\nu$ 和 b^μ 两个无穷小参数标记：

$$\xi^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

平移生成元为:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \Rightarrow T(b) = \exp(-ib^\mu P_\mu)$$

boost 和转动生成元为：

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) \Rightarrow \Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)$$

生成共同构成 Poincaré 代数：

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\
&[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} = i\left(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right)]
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

对于更一般的度规，如果矢量场满足[5]

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\mu \xi_\nu = 0$$

那我们称 ξ 为 Killing 矢量场，如果

$$\mathscr{L}_\xi g = 0$$

则称为共形 Killing 矢量场，后面共形变换部分会对这一点做深入讨论。

Remark 注意，当我们用矢量场来看待这个问题的时候，我们其实是在用所谓坐标变换的主动观点，也就是坐标变换诱导矢量场，矢量场再诱导流形同胚从而导致张量变换，因为在被动的坐标变换观点下，张量场不会有任何改变。更多关于主动被动观点的讨论见 [1]。

[5] 这里我们用到了度规平行移动的性质，$\forall X \in \mathscr{X}(\mathcal{M}), \nabla_X g = 0$

Section 3

Boost and Rapidity

我们把 Lorentz 群记为 $O(3,1)$ 强烈暗示了其与 $O(n)$ 群的类似性，其实 Lorentz 变换完全可以看作是四维时空中的旋转。三维空间旋转有三个自由度，分别是绕着 x, y, z 轴的旋转，这些轴都是由另外两个轴张成的平面所确定的，总数为 $C_3^2 = 3$。那么对于高维空间旋转，比如四维空间可以推广为共 $C_4^2 = 6$ 个自由度。其中有 3 个是单纯的 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转，还有三个是混合了时间轴的旋转，也就是初等 SR 介绍中的两个相对速度为 v 的惯性系之间的变换，称为 **boost**。比如 x 方向上的 boost 就可以显式表达出来为：

$\gamma(v) = 1/\sqrt{(1-\beta(v)^2)}$
$\beta(v) = v/c$

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\beta(v) & 0 & 0 \\ -\gamma(v)\beta(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$\Lambda(v)$ 是一个 boost，或者说四维转动，类比三维转动 $R_x(\theta)R_x(\phi)R_x(\theta+\phi)$，很容易想到 $\Lambda(v)\Lambda(w) \overset{?}{=} \Lambda(v+w)$，即绕着某个轴的转动是一个单参数 Abel 子群。但实际上以 v 为参数并不能看出这一点。可以定义[6]：

$$\chi(v) \equiv \operatorname{arctanh}(\frac{v}{c}) \tag{3.2}$$

[6] $\chi \in (-\infty, +\infty)$，所以是非紧致的 *Lie* 群

称为 **rapidity** 这样便有 $\Lambda(\chi_2)\Lambda(\chi_1) = \Lambda(\chi_2 + \chi_1)$。

rapidity 其实有非常明显的物理含义，回忆一下速度的定义：

$$\text{velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}}$$

由于右边的分式分子分母都是依赖于参考系的，所以如果 B 相对于 A 运动[7]，实际上可以对于 B 定义三种不同的速度。

[7] 方便起见假设沿 x 轴作直线运动，但不要求匀速

Definition 1 $v = \frac{dx}{dt}$，这里 x, t 都是在 A 的参考系下测得的。

Definition 2 $u=\frac{dx}{d\tau}$，这里 x 是在 A 的参考系下测的，τ 是 B 的固有时。

这个定义是关于参考系协变的，也就是通常的 4-速度的定义。

Definition 3 $\tilde(v)=\frac{dx_B}{d\tau}$，分子分母都是 B 自己测得的。

但是这个定义有个很大的问题，B 自己测量时间没问题，但是 B 自己测量自己的位移始终是 0，所以上面这个定义必须重新审视。首先我们看如何对应 B 的加速度，假设 B 在固有时 τ 的时刻相对于地面系的速度[8]为 v，这个时候考虑一个与 B 速度相同的瞬时惯性系，也就是说过一段时间 $d\tau$ 之后 B 相对于这个瞬时惯性系会有个速度 $d\tilde{v}$，加速度也便定义为 $d\tilde{v}/d\tau$。假设这段时间内，相对于地面系 B 速度增加了 dv，那么根据速度叠加法则：

$$\frac{v+d\tilde{v}}{1+vd\tilde{v}/c^2}=v+dv\Rightarrow d\tilde{v}\left(1+v^2/c^2\right)dv \tag{3.3}$$

[8] 第一个定义

现在对加速度进行积分：

$$I(\tau)=\int_0^\tau d\tau\frac{d\tilde{v}}{d\tau}=\int_0^{\tilde{v}}d\tilde{v}=\int_0^v\frac{dv}{1+v^2/c^2}=c\cdot\operatorname{arctanh}\frac{v(\tau)}{c}=c\cdot\chi(v(\tau)) \tag{3.4}$$

所以在这个速度的定义下，自然导出了 rapidity，如果取自然单位制 $c=1$，那么两者完全一致。

SECTION 4

Connected components of Lorentz group

对于任何正规且正时的 Lorentz 群中的元素都可以做标准分解：

Theorem 1 $\forall\Lambda\in L_+^\uparrow,\exists R_1,R_2\in SO(3)$，使得

$$\Lambda=R_1L_x(\chi)R_2 \tag{4.1}$$

而 Lorentz 群只需要再加上 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{P}$ 即可，而且这种分解对于 $d>2$ 维时空都是适用的。从物理上很好理解，一般的 Lorentz 变换无非就是绕着任意轴的 boost，我们都可以先进行转动，将 boost 方向转为 x 轴，进行 boost 之后再转回原来的方向。

任何一个 Lie 群实际上都是一个微分流形，而连通性这个概念正是建立在此之上从拓扑观点来看的。作为一个流形，G 不一定是连通的，可以有很多个连通分支，其中只有含有 e 的连通分支才能构成子群，我们记为 G_e，有下面的定理成立：

Theorem 2 $G_e\lhd G$ 且所有连通分支构成商群 G/G_e.

这里不做严格证明，下面我们将此定理用于 Lorentz 群。根据4.1，由于其中的每个因子都与 e 道路连通，所以 $L_+^\uparrow\subseteq L_e$，而 L 中的其它群元为了与 e 相连，必须通过离散变换 $\mathcal{T},\mathcal{P}$，所以实际上 $L_+^\uparrow=L_e$，那么连通分支构成商群 $L/L_+^\uparrow\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$，这里同构成立是因为商群实际上由 $\{\mathcal{T},\mathcal{P}\}$ 生成。

后面我们都用 $\cong$ 表示同构，$\simeq$ 表示同态

可见 Lorentz 群确实包含了 4 个连通分支，可以根据 $\Lambda^0{}_0$ 以及 $\det\Lambda$ 的符号进行分类。

SECTION 5

Poincaré group and particles

encoding$\cdots$

PART II

Lorentz group & special linear groups

本部分我们的目的是建立一系列同构关系，基本思路就是先找到一个同态，然后利用同态核定理构造同构

Theorem 1 (同态核定理) 如果 $f: G \to H$ 是一个群同态，那么有 $\ker(f) \lhd G$ 且 $G/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$

而且本部分会充分利用李群是微分流形这一拓扑性质进行说明，很多证明没有数学上的严谨，重在直观的感性认知。

Section 6

$SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

$SU(2)$ 是所有行列式为 1 的酉矩阵构成的群，其群元素可以一般的写为：

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

这意味着描述一个群元需要四个实参，且满足 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$，显然这意味着 $SU(2)$ 的拓扑结构为 $\mathcal{S}^3$。另外一个需要用到的概念是**群中心**，也就是与所有群元都对易的群元[1]。不难看出 $SU(2)$ 的群中心构成子群 $\mathbb{Z}^2$：

[1] 注意与 *Casimir* 算符的区别

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 2 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

Proof 首先考虑 2×2 无迹厄米矩阵构成的线性空间 $\mathbb{V}$，显然其中任意一个元素都可以写为 $X = x^i \sigma_i$，其中 σ_i 是三个 Pauli 矩阵，这实际上建立起了同构 $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^3$。$\mathfrak{su}(2)$ 李代数作为线性空间显然是与 $\mathbb{V}$ 同构的，而 $SU(2)$ 在李代数[a]上诱导出一个所谓伴随表示：

$$\mathcal{U}(U)X = UXU^\dagger = Ux^i\sigma_i U^\dagger \equiv f(U)^i_j x^j \sigma_i$$

容易验证这个表示是保范数 $\|x\|$ 的，那么 $f(U) \in O(3)$，也就是说我们建立了一个同态：

$$f: SU(2) \to O(3), U \mapsto f(U)$$

为了利用同态核定理，首先计算 $\mathrm{Im}(f)$。由于 f 是个连续映射，而且 $SU(2)$ 单连通[b]，所以 $f(U)$ 也应当包含在 $O(3)$ 的单连通子群中，即 $\mathrm{Im}(f) \subseteq SO(3)$。反过来 $SO(3) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ 也成立，可以看作是 Euler 角和 Caylay-Klein 参数之间的对应，所以 $\mathrm{Im}(f) = SO(3)$

现在来计算 $\ker(f)$，$f(U) = \mathbb{I}_{3\times 3}$ 说明 $\forall X \in \mathbb{V}$，都有 $UXU^\dagger = X$，也就是说要找的 U 与任意 X 对易，那么其也与任意的 e^{iX} 对易，然而 Lie Group = $\mathrm{e}^{\textbf{Lie Algebra}}$，所以 U 就是群中心的元素，所以 $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_2$，根据同态核定理便有 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$。 □

[a] 所谓代数，就是线性空间赋予一个封闭的乘法结构

[b] $\mathcal{S}^n$ 的基本群在 $n = 1$ 时为自由群 $\mathbb{Z}$，其它时候都为平凡群

Remark 这其实说明了 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 群的双覆盖，$SO(3)$ 群对应流形是对径认同实心球 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \times [0,\pi]$，从流形上也能感受一下。最后我们显式给出这个同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & f \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\bar{a}d+\bar{b}c) & \mathrm{Im}(a\bar{d}-b\bar{c}) & \mathrm{Re}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \mathrm{Im}(\bar{a}d+\bar{b}c) & \mathrm{Re}(a\bar{d}-b\bar{c}) & \mathrm{Im}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \mathrm{Re}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \mathrm{Im}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2\right) \end{pmatrix}$$

上式直接从 $U, -U$ 对应同一个 $SO(3)$ 中元素也可看出双覆盖性。

Section 7

$SO(2,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

Lemma 1 (QR 分解) 任意复矩阵都可以分解为一个酉矩阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积，且 R 主对角元全为正数。如果这个矩阵是实矩阵，那么 Q 为正交矩阵。如矩阵可逆，则分解唯一。

Lemma 2 $SL(2,\mathbb{R})$ 的拓扑结构为 $\mathcal{S}$，基本群为 $\mathbb{Z}$

Proof 根据 QR 分解，以及 $detS = 1 \neq 0$，任意 $SL(2,\mathbb{R})$ 中的矩阵都可以唯一的分解为 $S = QR$，而且要求 $|Q|\cdot|R| = 1$，而 R 主对角元全为正数以及 $|Q| = \pm 1$ 实际上给出 $Q \in SO(3)$ 且 R 的对角线上元素有 $a \cdot b = 1$ 且为正数的限制，而另一个元素不做限制。这其实就是在对 $SL(2,\mathbb{R})$ 做直积分解，由于 $SO(2)$ 对应的流形为 $\mathcal{S}^1$，所以 $SL(2,\mathbb{R})$ 对应的流形为 $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$，后两者基本群平凡，所以 $SL(2,\mathbb{R})$ 对应的基本群为 $\mathbb{Z}$。[a] □

[a]这里用了乘积空间基本群为各自基本群的直积。

了解了 $SL(2)$ 的拓扑性质后就可以开始证明本节的核心结论。

Theorem 3 $SO(2,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

Proof 与上一节同样，我们先构造 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 李代数，其由二维实无迹矩阵构成，生成元为：

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张成的线性空间中任一元素可以表达为 $X = x^\mu t_\mu$，显然 $\det X = -\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -x^2$，同样我们对 $S \in SL(2,\mathbb{C})$ 构造伴随表示 $X \mapsto SXS^{-1}$，其保事件间隔不变，所以诱导了一个同态：

$$f : SL(2,\mathbb{R}) \to O(2,1), S \mapsto f(S)$$

其中

$$St_\mu x^\mu S^{-1} = t_\mu f(S)^\mu{}_\nu x^\nu, \forall x^\mu \in \mathbb{R}^3 \iff St_\mu S^{-1} = t_\nu f(S)^\nu{}_\mu$$

根据 f 连续，从拓扑上得知 $\mathrm{Im}\, f \in SO(2,1)^{\uparrow}$，反过来，要论证任何 $\Lambda \in SO(2,1)^{\uparrow}$ 都可以用 $f(S)$ 表示，根据 $\Lambda = R_1 L(\chi) R_2$，我们只需要找到 $S_1, S_2, S(\chi)$ 使得

$$f(S_1) = R_1, f(S_1) = R_2, f(S(\chi)) = L(\chi)$$

不难验证前两个等式只需要选取

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \subseteq SL(2,\mathbb{R})$$

并合适选取 θ 参数即可，而后面一个只需选取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

最后证明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ 的方法就和上一节一样了。 □

Remark 下面显式给出同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) & \frac{1}{2}\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right) & -ab-cd \\ \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right) & \frac{1}{2}\left(a^2-b^2-c^2-d^2\right) & -ab+cd \\ -ac-bd & bd-ac & ad+bc \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Section 8

$SO(3,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

这一节的证明与上一节非常类似，证明细节会适当省略。还是首先关注一下 $SL(2,\mathbb{C})SL(2,\mathbb{C})$ 的拓扑性质。

Lemma 3 $SL(2,\mathbb{C})$ 单连通

Proof 证明依旧是使用 QR 分解，现在 R 需要一个正实数和一个复数来描述，所以对应流形为 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$，基本群平凡。而 $Q \in SU(2)$ 对应流形为 $\mathcal{S}^3$，基本群也平凡，所以 $SL(2,\mathbb{C})$ 基本群平凡，即单连通。 □

下面证明本节核心定理：

Theorem 4 $SO(3,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

Proof 证明完全仿造上一节，只是 $t \to \tau$，$\tau_0 = \mathbb{I}_{2\times 2}$，$\tau_1 = -\sigma_1$[a],$\tau_2 = -\sigma_2$，$\tau_3 = -\sigma_3$。后面的证明也是用伴随表示诱导同态后计算 $\operatorname{Im} f$，这里根据 $SL(2,\mathbb{C}) \supseteq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$ 可以得到 $f(S) = R$，剩下的一个只用取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\chi}{2} & \sinh\frac{\chi}{2} \\ \sinh\frac{\chi}{2} & \cosh\frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

最后计算 $\ker f$ 也是同样的思路说明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ □

[a]这里符号约定上比一般定义多了个负号，是为了后文处理天球符号更自洽。

Remark 下面显式给出同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right) & -\operatorname{Re}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2\right) \\ -\operatorname{Re}(\bar{a}c+\bar{b}d) & \operatorname{Re}(\bar{a}d+\bar{b}c) & -\operatorname{Im}(a\bar{d}-b\bar{c}) & -\operatorname{Re}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \operatorname{Im}(\bar{a}c+\bar{b}d) & -\operatorname{Im}(\bar{a}d+\bar{b}c) & \operatorname{Re}(a\bar{d}-b\bar{c}) & \operatorname{Im}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\right) & -\operatorname{Re}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2\right) \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

下面给出两个之后会用到的例子：

Example z 轴旋转

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

z 方向 boost

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & \sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Section 9

Higher dimensions

Definition 1 (赋范可除代数) 首先考虑 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$ 上的线性空间我们可以赋予乘法结构将其提升为代数，如果除了 0 元其它元素都有逆元，我们称为**可除代数**，进一步我们可以赋予范数，而且要求范数满足：

$$\|xy\| = \|x\|\,\|x\|\,, \forall x, y \in V$$

即**赋范可除代数**。

Theorem 5 (Hurwitz) 任何赋范可除代数都同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 中的一种。其中 $\mathbb{H}$ 是四元数，$\mathbb{O}$ 是八元数。

这是一个非常漂亮的结论，告诉我们为什么历史上发现复数之后寻找三元数必然是失败的，而哈密顿的四元数会成功。

不难猜测，对于更高维时空的 Lorentz 群，会对应四元数和八元数，实际上有：

$$SO(5,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2 \qquad SO(9,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{O})/\mathbb{Z}_2 \tag{9.1}$$

另外，八元数实际上构成的不是一个结合代数，所以 $SL(2,\mathbb{O})$ 的存在并非显然的，这里并不深入讨论。但是实际上这些同构关系式蕴含着很深刻的物理，暗示着最小超对称理论只能构建在 3，4，6，10 维时空中。更有意思的是，可除代数与超弦理论之间有着非常深刻的联系。[2, 3]

Interlude: Project representation

下面对 Lorentz 群表示的本身做更加细致的考量，主要是为了引进一些必要的数学概念，最终结论主要就是将一些讨论更加数学严格化，不用过分在意。本节讨论主要参照 Weinberg[4]。

to be continue...

Conformal transformations

PART

III

参考文献

[1] 梁灿彬,《微分几何入门与广义相对论》, vol. 1, 科学出版社 (2006).

[2] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry I*, *Proc. Symp. Pure Maths.* **81** (2010) 65 [0909.0551].

[3] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry II*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **15** (2011) 1373 [1003.3436].

[4] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge University Press (6, 2005), 10.1017/CBO9781139644167.

[5] B. Oblak, *From the Lorentz Group to the Celestial Sphere*, 8, 2015 [1508.00920].