

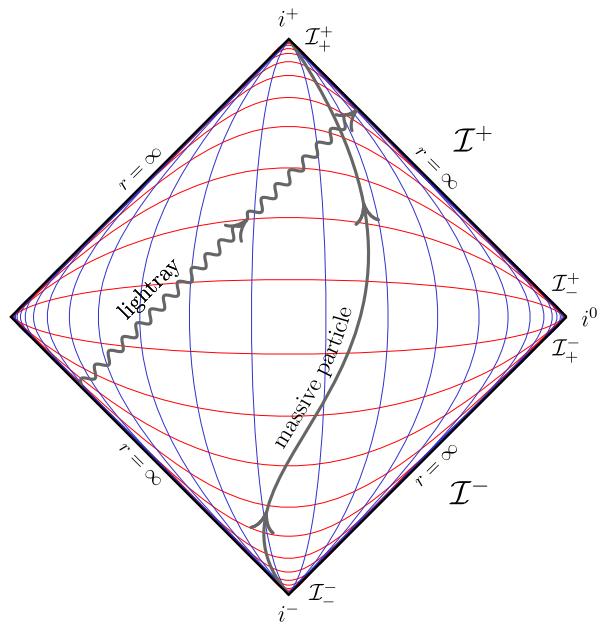
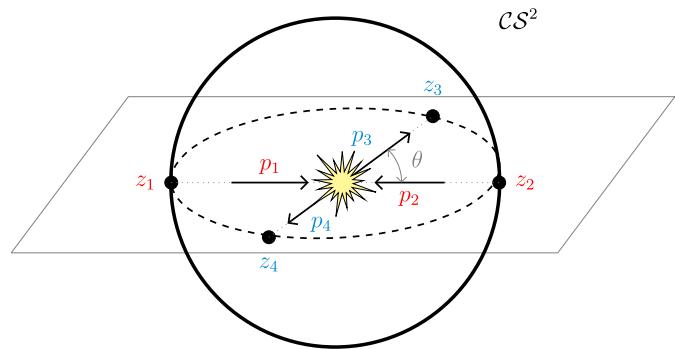
天球振幅科研笔记

CELESTIAL AMPLITUDES

BUFAN ZHENG

Undergraduate Student at the Wuhan University
GitHub

whuzbf@qq.com



目录

第一部分 A quick review on SR & GR	1
1 Basics conceptions about spacetime	1
2 Poincaré group and Lorentz group	2
2.1 Poincaré algebra	2
3 Boost and Rapidity	3
4 Connected components of Lorentz group	4
5 Poincaré group and particles	4
第二部分 Lorentz group & special linear groups	5
6 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$	5
7 $SO(2, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$	6
8 $SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$	7
9 Higher dimensions	8
第三部分 Conformal transformations	11
10 Pull back, push forward & Lie derivative	11
11 Killing & Conformal Killing vector field	12
12 Conformal transformations in $d > 2$	14
13 Conformal transformations in $d = 2$	16
13.1 Embedding formalism	17
14 Conformal transformations on the Riemann sphere	17
第四部分 Celestial Sphere & Asymptotic Flat Spacetime	19
15 Carter-Penrose diagram	19

16 Celestial Sphere	21
17 Asymptotic flat spacetime: basic concepts	23
18 Asymptotic flat spacetime: BMS group	26
19 Asymptotic flat spacetime: charges	28
19.1 Noether theorem	28
19.2 Komar Integral & ADM	30
19.3 Scattering problem	32
19.4 BMS charges	33
 第五部分 Soft Theorem	 34
20 Review on the quantization of gravity	34
21 Soft theorem from feynman diagrams	36
22 Subleading and subsubleading order soft theorem	38
23 Infrared divergence	39
24 Massless QED	42
24.1 Classical	42
24.2 Quantization	45
24.3 Large guage symmetry	46
25 Ward indentity = Soft theorem	47
25.1 Ward indentity of \mathcal{S} -Matrix	47
25.2 Mode expansion	48
25.3 Soft photon & graviton	49
25.4 Asymptotic analysis on QED	50
26 Spontaneous symmetry breaking	51
26.1 In QFT	51
26.2 On Celestial	53
27 Massive QED	53
28 Further Progress	57
28.1 Subleading order	57
28.2 Magnetic monopole	57
28.3 Non-Abelian gauge theory	59
28.4 Higher dimensions	60
28.5 $\mathcal{N} = 1$ Super Symmetry	60

第六部分 A Crush Course on CFT	61
29 Virasoro Algebra	62
30 Radial Quantization and Hilbert Space	63
30.1 Radial Quantization	63
30.2 BPZ Conjugate	64
31 Ward Identity and OPE	65
31.1 Infinitesimal Conformal Ward Identity	65
31.2 Operator Product Expansion	66
31.2.1 TT OPE	67
31.3 n-point correlators (n<4)	69
31.4 General Form of the OPE	71
31.4.1 Current Algebra	72
32 Crossing Symmetry	72
32.1 Fusing and Braiding Matrices	73
33 NOPs and Conformal family	75
33.1 Normal Ordered Products	75
33.2 Verma module	78
33.3 Descendant states	78
34 Representations of the Virasoro Algebra	80
35 Free CFT	81
35.1 Free Bosons	81
35.1.1 Vertex Operator	83
35.1.2 Compactified Bosons	85
35.1.3 Current Algebra Realization	85
35.2 Free Fermions	86
35.2.1 Bosonization	89
35.3 b, c Ghost	90
35.3.1 Ghost will change the Vacuum State	90
36 Unitary Representations of the Virasoro Algebra	92
36.1 Null States	92
36.2 Unitary Constraints	93
37 Fusion Rules	95
37.1 Landau - Ginzburg Formulation	96
38 Kač - Moody Symmetry	96
38.1 Kač - Moody Algebras	97
38.2 Sugawara Construction	97
38.3 WZNW Models	98
38.3.1 Nonlinear Sigma Models	99

38.3.2	Wess-Zumino-Novikov-Witten Models	99
38.4	Knizhnik – Zamolodchikov Equation	100
38.5	Ward Identity for Kač – Moody Symmetries	101
38.6	Kač – Moody descendant fields	101
39	Example: Highest Weight Representations of $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$	103
39.1	$\widehat{\mathfrak{so}}(N)_1$ Current Algebra	106
40	Coset Construction	106
40.1	Back to unitary minimal models	107
40.2	Branching Rules	108
41	\mathcal{W} Algebras	108
41.1	$\mathcal{W}(2, 3)$ Algebra	108
41.2	$\mathcal{W}(2, 4)$ Algebra	110
41.3	\mathcal{W}_N Algebra	111
41.4	\mathcal{W}_∞ Algebra	112
41.4.1	Contraction	113
41.4.2	Wedge subalgebra	114
41.5	$\mathcal{W}_{1+\infty}$ Algebra	115
41.5.1	Lone-star algebra	115
41.6	Realization of \mathcal{W} Algebras	116
41.6.1	Differential-operator realisations at $c = 0$	116
41.6.2	Embedding \mathcal{W}_∞ in $\mathcal{W}_{1+\infty}$	117
41.6.3	Fermionic Realization	117
41.6.4	Bosonic Realization	118
41.7	Related Topics	118
41.7.1	\mathcal{W} Gravity	118
41.7.2	\mathcal{W}_∞ in Quantum Hall Effect	118
41.7.3	$w_{1+\infty}$ on the Celestial	118
42	Liouville theory	119
第七部分 On-Shell Approach to Scattering Amplitudes		120
43	Color Decomposition of Gluon Amplitudes	120
43.1	Color-Ordered Feynman Rules	121
44	spinor helicity formalism	123
44.1	Little Group Scale	125
44.2	spinor-helicity formalism on the celestial	128
45	Tree Amplitudes	128

46 Collinear Limits	128
46.1 Soft Singularities	128
46.2 Collinear Singularities	128
47 Berends-Giele Current	128
48 BCFW Recursion Relations	128
49 Cachazo-Svrcek-Witten Rules	128
50 CHY Formula	128
第八部分 Celestial Amplitudes & CCFT	129
51 Conformal basis	129
51.1 Massive Scalar	129
51.2 Massless Scalar	133
51.3 photon & Graviton	134
51.4 Restrict to $Mink_4$	138
51.5 Conformally Soft photon & Graviton	138
51.5.1 Photon	138
51.5.2 Graviton	139
51.6 Massive Bosons	140
51.6.1 Polynomial encoding of symmetric traceless transverse tensors	140
51.6.2 Conformal basis of massive bosons	142
51.7 Fermions	143
51.7.1 Spinors in arbitrary dimensions	143
51.7.2 Conformal basis of Dirac spinor	146
51.8 Examples	147
51.8.1 ABC toy model	147
51.8.2 Gluons	148
52 Some properties of Conformal basis	148
52.1 Kerr-Schild double copy	148
52.2 Wyle double copy	148
53 Celestial Amplitudes	148
53.1 Amplitudes as Correlators	148
53.1.1 Poincaré Symmetry	149
53.1.2 Poincaré Constraints	151
53.2 Collinear Limits as OPEs	152
53.3 Ward Identity as Kač-Moody Symmetry	153
53.3.1 Abelian Case	153
53.3.2 non-Abelian Case	153
53.3.3 Graviton	155

第九部分 CFT ₂ on Torus	156
Appendix A: Surface Charge	157
参考文献	160

A quick review on SR & GR

SECTION 1

Basics conceptions about spacetime

我们生活的空间是一个四维局部平坦的 **Lorentz** 流形，也就是一个四维微分流形配备一个非正定、非退化的度规 $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ ，这是一个 $(0, 2)$ 张量。局部平坦意思是说任何一点处都可以选取一个坐标系¹使得 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ ²。而 Lorentz 体现在 η 有一个指标是负数，而且根据惯性定理，无论你选取什么坐标系将度规对角化，最终负数的个数都是一样的，这样以来我们便可以严格的区分时间和空间³。

参数化流形后，时空上的每一点（事件）都将对应一个坐标 x^μ ，时空中的曲线（世界线）可以参数化为 $x^\mu(\tau)$ ，其可以看作是由矢量场 $X = X^\mu \partial_\mu = \frac{x^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu$ 诱导的。考虑世界线上相邻的两点，我们可以定义线长为

$$dl = \sqrt{|g(X, X)|} = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

很多时候也把线长记为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 但是在微分几何的严格意义下， dx^μ 是对偶矢量，并不是初等微积分中的微分，所以这个式子只能理解为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ ，也就是说 ds^2 只是张量 g 的另一个叫法而已！后面我们为了方便可能牺牲严谨性，使用 ds^2 表示世界线长。

GR 中最重要的基本假设便是在坐标变换下物理定律是不变的，这说明作用量必须是标量，几乎唯一确定了真空引力场作用量为：

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1.1)$$

由于度规是张量，所以其在坐标变换下分量变换为：⁴

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

在 SR 中我们仅研究平直的时空，或者说只研究惯性系之间的变换，这些惯性系中的变换满足 $\tilde{\eta} = \eta$ ，可以一般的记为：

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

那么 Λ 满足：

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.2)$$

下面是一些 GR 中常用公式总结，顺便熟悉下 convention，首先是协变导数符号约定：

$$\nabla_\lambda V^{\mu\dots}{}_{\nu\dots} = \partial_\lambda V^{\mu\dots}{}_{\nu\dots} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} V^{\sigma\dots}{}_{\nu\dots} + \dots - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^{\mu\dots}{}_{\sigma\dots} - \dots$$

测地线方程：⁵

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0}$$

¹ 这个坐标系称为局部惯性系，由于可以从指数映射结合测地线来构造这个惯性系，所以也称为自由下落参考系

² 这里符号约定为 $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$

³ 如果这里把 η 中的 -1 变成 $+1$ ，我们称为 **Riemann** 流形

Λ 是宇宙学常数

$g \equiv \det g_{\mu\nu}$

R 是 Ricci 标量

取自然单位制 $c = \hbar = 1$

⁴ 注意两边对应的自变量，因为张量都是关于流形上点的场，所以这里坐标变换后流形上某点对应的坐标也变了。

黎曼曲率张量以及对应的 Ricci 张量和标量:

$$R^\lambda_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\alpha\lambda\beta} \quad R \equiv \text{Tr } R_{\alpha\beta} = R^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

满足下面的对称性和 Bianchi 恒等式:⁶

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0$$

⁶ 有的文献写协变导数喜欢用; μ 代替 ∇_μ , 用, μ 代替 ∂_μ

SECTION 2

Poincaré group and Lorentz group

显然所有的 Λ 构成了一个群, 称之为 **Lorentz 群**:

$$L \equiv O(3, 1) \equiv \{\Lambda \in M(4, \mathbb{R}) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \quad (2.1)$$

而所有的保度规变换还要加入 a^μ , 构成 **Poincaré 群**: $O(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^{3,1}$, 群乘法为:

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') = (\Lambda \cdot \Lambda', a + \Lambda \cdot a') \quad (2.2)$$

利用 Poincaré 群的不等价不可约表示可以对基本粒子进行分类, 见本部分末尾。后面我们将主要关注 Lorentz 群。不难验证 $\det \Lambda = \pm 1$, 它将 Lorentz 群分成两个分支, 其中 $\det \Lambda = 1$ 的部分含有单位元, 构成子群正规 **Lorentz 群**。记为 $SO(3, 1)$ 或 L_+

另外 $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ 也将 Lorentz 群分成两个分支, 其中 $\Lambda^0_0 \geq 1$ 的部分含有单位元, 构成子群正时 **Lorentz 群**。记为 $O(3, 1)^\uparrow$ 或 L^\uparrow 。

最后 $L_+^\uparrow \equiv L^\uparrow \cap L_+$ 也构成了 L 的一个子群。这些子群之间可以用时间反演和空间反演算符相联系:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

显然 $L_+ = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}\}$, $L^\uparrow = \{L_+^\uparrow, \mathcal{P}\}$, $L = \{L_+^\uparrow, \mathcal{T}, \mathcal{P}\}$

SUBSECTION 2.1

Poincaré algebra

现在考虑群的局部性质, 考虑无穷小坐标变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$, 保度规条件为:

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \eta_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2.4)$$

ξ^μ 可以用 ω^μ_ν 和 b^μ 两个无穷小参数标记:

$$\xi^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu + b^\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

平移生成元为:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \Rightarrow T(b) = \exp(-ib^\mu P_\mu)$$

boost 和转动生成元为:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Rightarrow \Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)$$

生成共同构成 Poincaré 代数:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

SECTION 3

Boost and Rapidity

我们把 Lorentz 群记为 $O(3, 1)$ 强烈暗示了其与 $O(n)$ 群的类似性，其实 Lorentz 变换完全可以看作是四维时空中的旋转。三维空间旋转有三个自由度，分别是绕着 x, y, z 轴的旋转，这些轴都是由另外两个轴张成的平面所确定的，总数为 $C_3^2 = 3$ 。那么对于高维空间旋转，比如四维空间可以推广为共 $C_4^2 = 6$ 个自由度。其中有 3 个是单纯的 \mathbb{R}^3 中的旋转，还有三个是混合了时间轴的旋转，也就是初等 SR 介绍中的两个相对速度为 v 的惯性系之间的变换，称为 **boost**。比如 x 方向上的 boost 就可以显式表达出来为：

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\beta(v) & 0 & 0 \\ -\gamma(v)\beta(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$\Lambda(v)$ 是一个 boost，或者说四维转动，类比三维转动 $R_x(\theta)R_x(\phi)R_x(\theta+\phi)$ ，很容易想到 $\Lambda(v)\Lambda(w) \stackrel{?}{=} \Lambda(v+w)$ ，即绕着某个轴的转动是一个单参数 Abel 子群。但实际上以 v 为参数并不能看出这一点。可以定义⁷:

$$\chi(v) \equiv \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right) \quad (3.2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \gamma(v) = 1/\sqrt{(1-\beta(v)^2)} \\ \beta(v) = v/c \end{array} \right.$$

⁷ $\chi \in (-\infty, +\infty)$, 所以是非紧致的 Lie 群

称为 **rapidity** 这样便有 $\Lambda(\chi_2)\Lambda(\chi_1) = \Lambda(\chi_2 + \chi_1)$ 。

rapidity 其实有非常明显的物理含义，回忆一下速度的定义：

$$\text{velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}}$$

由于右边的分式分子分母都是依赖于参考系的，所以如果 B 相对于 A 运动⁸，实际上可以对于 B 定义三种不同的速度。

⁸ 方便起见假设沿 x 轴作直线运动，但不要求匀速

Definition 1 $v = \frac{dx}{dt}$ ，这里 x, t 都是在 A 的参考系下测得的。

Definition 2 $u = \frac{dx}{d\tau}$ ，这里 x 是在 A 的参考系下测的， τ 是 B 的固有时。

这个定义是关于参考系协变的，也就是通常的 4-速度的定义。

Definition 3 $\tilde{v} = \frac{dx_B}{d\tau}$ ，分子分母都是 B 自己测得的。

但是这个定义有个很大的问题，B 自己测量时间没问题，但是 B 自己测量自己的位移始终是 0，所以上面这个定义必须重新审视。首先我们看如何对应 B 的加速度，假设

B 在固有时 τ 的时刻相对于地面系的速度⁹为 v , 这个时候考虑一个与 B 速度相同的瞬时惯性系, 也就是说过一段时间 $d\tau$ 之后 B 相对于这个瞬时惯性系会有个速度 $d\tilde{v}$, 加速度也便定义为 $d\tilde{v}/d\tau$ 。假设这段时间内, 相对于地面系 B 速度增加了 dv , 那么根据速度叠加法则:

$$\frac{v + d\tilde{v}}{1 + vd\tilde{v}/c^2} = v + dv \Rightarrow d\tilde{v} (1 + v^2/c^2) dv \quad (3.3)$$

现在对加速度进行积分:

$$I(\tau) = \int_0^\tau d\tau \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \int_0^{\tilde{v}} d\tilde{v} = \int_0^v \frac{dv}{1 + v^2/c^2} = c \cdot \operatorname{arctanh} \frac{v(\tau)}{c} = c \cdot \chi(v(\tau)) \quad (3.4)$$

所以在这个速度的定义下, 自然导出了 rapidity, 如果取自然单位制 $c = 1$, 那么两者完全一致。

SECTION 4

Connected components of Lorentz group

对于任何正规且正时的 Lorentz 群中的元素都可以做标准分解:

Theorem 1 $\forall \Lambda \in L_+^\uparrow, \exists R_1, R_2 \in SO(3)$, 使得

$$\Lambda = R_1 L_x(\chi) R_2 \quad (4.1)$$

而 Lorentz 群只需要再加上 \mathcal{T} 和 \mathcal{P} 即可, 而且这种分解对于 $d > 2$ 维时空都是适用的。从物理上很好理解, 一般的 Lorentz 变换无非就是绕着任意轴的 boost, 我们都可以先进行转动, 将 boost 方向转为 x 轴, 进行 boost 之后再转回原来的方向。

任何一个 Lie 群实际上都是一个微分流形, 而连通性这个概念正是建立在此之上从拓扑观点来看的。作为一个流形, G 不一定是连通的, 可以有很多个连通分支, 其中只有含有 e 的连通分支才能构成子群, 我们记为 G_e , 有下面的定理成立:

Theorem 2 $| G_e \triangleleft G$ 且所有连通分支构成商群 G/G_e .

这里不做严格证明, 下面我们将此定理用于 Lorentz 群。根据 4.1, 由于其中的每个因子都与 e 道路连通, 所以 $L_+^\uparrow \subseteq L_e$, 而 L 中的其它群元为了与 e 相连, 必须通过离散变换 \mathcal{T}, \mathcal{P} , 所以实际上 $L_+^\uparrow = L_e$, 那么连通分支构成商群 $L/L_+^\uparrow \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 这里同构成立是因为商群实际上由 $\{\mathcal{T}, \mathcal{P}\}$ 生成。

可见 Lorentz 群确实包含了 4 个连通分支, 可以根据 Λ_0^0 以及 $\det \Lambda$ 的符号进行分类。

⁹ 第一个定义

后面我们都用 \cong 表示同构, \simeq 表示同态

SECTION 5

Poincaré group and particles

这一部分是最为精妙的部分, 我们将会利用 Poincaré 群的不可约表示对场和粒子进行分类, 本节论述主要参考 Weinberg[1] 和董无极 [2]

to be continue...

Lorentz group & special linear groups

本部分我们的目的是建立一系列同构关系，基本思路就是先找到一个同态，然后利用同态核定理构造同构

Theorem 1 | (同态核定理) 如果 $f : G \rightarrow H$ 是一个群同态，那么有 $\ker(f) \triangleleft G$ 且 $G / \ker(f) \cong \text{Im}(f)$

而且本部分会充分利用李群是微分流形这一拓扑性质进行说明，很多证明没有数学上的严谨，重在直观的感性认知。

SECTION 6

$$SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$$

$SU(2)$ 是所有行列式为 1 的酉矩阵构成的群，其群元素可以一般的写为：

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

这意味着描述一个群元需要四个实参，且满足 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ ，显然这意味着 $SU(2)$ 的拓扑结构为 S^3 。另外一个需要用到的概念是群中心，也就是与所有群元都对易的群元¹。不难看出 $SU(2)$ 的群中心构成子群 \mathbb{Z}_2 ：

¹ 注意与 Casimir 算符的区别

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 2 | $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

PROOF 首先考虑 2×2 无迹厄米矩阵构成的线性空间 \mathbb{V} ，显然其中任意一个元素都可以写为 $X = x^i \sigma_i$ ，其中 σ_i 是三个 Pauli 矩阵，这实际上建立了同构 $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^3$ 。 $\mathfrak{su}(2)$ 李代数作为线性空间显然是与 \mathbb{V} 同构的，而 $SU(2)$ 在李代数^a上诱导出一个所谓伴随表示：

$$\mathcal{U}(U)X = UXU^\dagger = Ux^i \sigma_i U^\dagger \equiv f(U)_j^i x^j \sigma_i$$

容易验证这个表示是保范数 $\|x\|$ 的，那么 $f(U) \in O(3)$ ，也就是说我们建立了一个同态：

$$f : SU(2) \rightarrow O(3), U \mapsto f(U)$$

为了利用同态核定理，首先计算 $\text{Im}(f)$ 。由于 f 是个连续映射，而且 $SU(2)$ 单连通^b，所以 $f(U)$ 也应当包含在 $O(3)$ 的单连通子群中，即 $\text{Im}(f) \subseteq SO(3)$ 。反过来 $SO(3) \subseteq \text{Im}(f)$ 也成立，可以看作是 Euler 角和 Caylay-Klein 参数之间的对应，所以 $\text{Im}(f) = SO(3)$

现在来计算 $\ker(f)$ ， $f(U) = \mathbb{I}_{3 \times 3}$ 说明 $\forall X \in \mathbb{V}$ ，都有 $UXU^\dagger = X$ ，也就是说要找的 U 与任意 X 对易，那么其也与任意的 e^{iX} 对易，然而 Lie Group = e^{Lie Algebra}，所以 U 就是群中心的元素，所以 $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_2$ ，根据同态核定理便有 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 。□

^a 所谓代数，就是线性空间赋予一个封闭的乘法结构

^b \mathcal{S}^n 的基本群在 $n = 1$ 时为自由群 \mathbb{Z} ，其它时候都为平凡群

$$SO(2, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$$

Remark 这其实说明了 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 群的双覆盖, $SO(3)$ 群对应流形是对径认同实心球 $\mathbb{RP}^2 \times [0, \pi]$, 从流形上也能感受一下。最后我们显式给出这个同态:

$$f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \operatorname{Im}(a\bar{d} - b\bar{c}) \\ \operatorname{Im}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \operatorname{Re}(a\bar{d} - b\bar{c}) \\ \operatorname{Re}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b} - c\bar{d}) \\ \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix}$$

上式直接从 $U, -U$ 对应同一个 $SO(3)$ 中元素也可看出双覆盖性。

SECTION 7

$$SO(2, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$$

Lemma 1 (QR 分解) 任意复矩阵都可以分解为一个酉矩阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积, 且 R 主对角元全为正数。如果这个矩阵是实矩阵, 那么 Q 为正交矩阵。如矩阵可逆, 则分解唯一。

Lemma 2 $SL(2, \mathbb{R})$ 的拓扑结构为 $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, 基本群为 \mathbb{Z}

PROOF 根据 QR 分解, 以及 $\det S = 1 \neq 0$, 任意 $SL(2, \mathbb{R})$ 中的矩阵都可以唯一的分解为 $S = QR$, 而且要求 $|Q| \cdot |R| = 1$, 而 R 主对角元全为正数以及 $|Q| = \pm 1$ 实际上给出 $Q \in SO(3)$ 且 R 的对角线上元素有 $a \cdot b = 1$ 且为正数的限制, 而另一个元素不做限制。这其实就是在对 $SL(2, \mathbb{R})$ 做直积分解, 由于 $SO(2)$ 对应的流形为 \mathcal{S}^1 , 所以 $SL(2, \mathbb{R})$ 对应的流形为 $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, 后两者基本群平凡, 所以 $SL(2, \mathbb{R})$ 对应的基本群为 \mathbb{Z} 。^a \square

^a这里用了乘积空间基本群为各自基本群的直积。

了解了 $SL(2)$ 的拓扑性质后就可以开始证明本节的核心结论。

Theorem 3 $| SO(2, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

PROOF 与上一节同样, 我们先构造 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 李代数, 其由二维实无迹矩阵构成, 生成元为:

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张成的线性空间中任一元素可以表达为 $X = x^\mu t_\mu$, 显然 $\det X = -\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x^2$, 同样我们对 $S \in SL(2, \mathbb{C})$ 构造伴随表示 $X \mapsto SXS^{-1}$, 其保事件间隔不变, 所以诱导了一个同态:

$$f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow O(2, 1), S \mapsto f(S)$$

其中

$$St_\mu x^\mu S^{-1} = t_\mu f(S)^\mu{}_\nu x^\nu, \forall x^\mu \in \mathbb{R}^3 \iff St_\mu S^{-1} = t_\nu f(S)^\nu{}_\mu$$

根据 f 连续, 从拓扑上得知 $\operatorname{Im} f \in SO(2, 1)^\dagger$, 反过来, 要论证任何 $\Lambda \in SO(2, 1)^\dagger$ 都可以用 $f(S)$ 表示, 根据 $\Lambda = R_1 L(\chi) R_2$, 我们只需要找到 $S_1, S_2, S(\chi)$ 使得

$$f(S_1) = R_1, f(S_2) = R_2, f(S(\chi)) = L(\chi)$$

不难验证前两个等式只需要选取

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2) \subseteq SL(2, \mathbb{R})$$

$$SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

并合适选取 θ 参数即可，而后面一个只需选取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

最后证明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ 的方法就和上一节一样了。 \square

Remark 下面显式给出同态：

$$f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & -ab - cd \\ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & \frac{1}{2} (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) & -ab + cd \\ -ac - bd & bd - ac & ad + bc \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

SECTION 8

$$SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

这一节的证明与上一节非常类似，证明细节会适当省略。还是首先关注一下 $SL(2, \mathbb{C})SL(2, \mathbb{C})$ 的拓扑性质。

Lemma 3 $SL(2, \mathbb{C})$ 单连通

PROOF 证明依旧是使用 QR 分解，现在 R 需要一个正实数和一个复数来描述，所以对应流形为 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ ，基本群平凡。而 $Q \in SU(2)$ 对应流形为 S^3 ，基本群也平凡，所以 $SL(2, \mathbb{C})$ 基本群平凡，即单连通。 \square

下面证明本节核心定理：

Theorem 4 $SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

PROOF 证明完全仿造上一节，只是 $t \rightarrow \tau$ ， $\tau_0 = \mathbb{I}_{2 \times 2}$ ， $\tau_1 = -\sigma_1$ ^a， $\tau_2 = \sigma_2$ ， $\tau_3 = \sigma_3$ 。后面的证明也是用伴随表示诱导同态后计算 $\text{Im } f$ ，这里根据 $SL(2, \mathbb{C}) \supseteq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$ 可以得到 $f(S) = R$ ，剩下的一个只用取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\chi}{2} & \sinh \frac{\chi}{2} \\ \sinh \frac{\chi}{2} & \cosh \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

最后计算 $\ker f$ 也是同样的思路说明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ \square

^a这里符号约定上比一般定义多了个负号，是为了后文处理天球符号更自然。

Remark 下面显式给出同态：

$$f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) & -\text{Re}(a\bar{b} + c\bar{d}) & \text{Im}(a\bar{b} + c\bar{d}) & \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2) \\ -\text{Re}(\bar{a}c + \bar{b}d) & \text{Re}(\bar{a}\bar{d} + \bar{b}c) & -\text{Im}(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}c) & -\text{Re}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \text{Im}(\bar{a}c + \bar{b}d) & -\text{Im}(\bar{a}\bar{d} + bc) & \text{Re}(\bar{a}\bar{d} - bc) & \text{Im}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) & -\text{Re}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \text{Im}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

下面给出两个例子：

Example

z 轴旋转	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$ (8.2)
z 方向 boost	$\begin{pmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & -\sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$ (8.3)

SECTION 9

Higher dimensions**Definition 1**

(赋范可除代数) 首先考虑 \mathbb{R} 或者 \mathbb{C} 上的线性空间我们可以赋予乘法结构将其提升为代数, 如果除了 0 元其它元素都有逆元, 我们称为可除代数, 进一步我们可以赋予范数, 而且要求范数满足:

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|, \forall x, y \in V$$

即赋范可除代数。

Theorem 5 (Hurwitz) 任何赋范可除代数都同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 中的一种。其中 \mathbb{H} 是四元数, \mathbb{O} 是八元数。

这是一个非常漂亮的结论, 告诉我们为什么历史上发现复数之后寻找三元数必然是失败的, 而哈密顿的四元数会成功。

不难猜测, 对于更高维时空的 Lorentz 群, 会对应四元数和八元数, 实际上有:

$$SO(5, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{H})/\mathbb{Z}_2 \quad SO(9, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{O})/\mathbb{Z}_2 \quad (9.1)$$

另外, 八元数实际上构成的不是一个结合代数, 所以 $SL(2, \mathbb{O})$ 的存在并非显然的, 这里并不深入讨论。但是实际上这些同构关系式蕴含着很深刻的物理, 暗示着最小超对称理论只能构建在 3, 4, 6, 10 维时空中。更有意思的是, 可除代数与超弦理论之间有着非常深刻的联系。[\[3, 4\]](#)

Interlude: Project representation

下面对 Lorentz 群表示的本身做更加细致的考量, 主要是为了引进一些必要的数学概念, 最终结论主要就是将一些讨论更加数学严格化, 不用过分在意。本节讨论主要参照 Weinberg[\[1\]](#)。

对于一个对称群 G , 在考虑量子力学关于这个群的对称性时我们其实是在考虑其表示对 Hilbert 空间的作用。群表示自然是同态, 所以我们想到去考虑:

$$U(T)U(\bar{T}) = U(T \cdot \bar{T}) \quad (9.2)$$

但是量子力学的希尔伯特空间实际上是一个射影空间, 两个相差全局相位的量子态视作等价, 所以我们实际上应该去考虑群的射影表示:

$$U(T)U(\bar{T}) = e^{i\phi(T, \bar{T})} U(T \cdot \bar{T}) \quad (9.3)$$

这里利用线性可以证明 $\phi(T, \bar{T})$ 与所作用的量子态本身无关，但前提条件是这两个量子态是可加的。比如具有半整数自旋和整数自旋的量子态就是不可加的，最多只能制备出这两类态的直积态。

但是射影表示用起来很麻烦，如果相位具有下面的特殊结构：

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})$$

那我们可以对群表示后的算符重定义：

$$\tilde{U}(T) = U(T) \exp(i\alpha(T)) \quad (9.4)$$

这样我们就可以继续考虑普通的表示而不是射影表示了。现在我们必须严格考虑一个群是否存在不能通过重定义消去的射影表示，我们称为内禀射影表示。

既然考虑的是李群，那我们可以把群元用 θ^a 参数化，并定义：

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta))$$

根据 $f(0, \theta) = f(0, \bar{\theta}) = \theta$ ，我们得到单位元附近群元表示的展开：

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \mathcal{O}(\theta^3) \quad (9.5)$$

这里 t_a 就是常说的生成元，在这个符号约定下是厄米的， t_{ab} 关于指标对称，表示更高阶的项。另外 f 有展开：

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc} \bar{\theta}^b \theta^c + \mathcal{O}(\theta^3) \quad (9.6)$$

类似地，因为 $\phi(T, 1) = \phi(T, \bar{T}) = 0$ ，我们有展开：

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab} \theta^a \bar{\theta}^b \quad (9.7)$$

结合 9.5, 9.6 和 9.7 我们得到：

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a - i f_{bc} \quad (9.8)$$

再根据 t_{bc} 的对称性有： $\text{denoted by } C^a{}_{bc}$

$$[t_b, t_c] = i (f^a{}_{cb} - f^a{}_{bc}) t_a + i (f_{cb} - f_{bc}) \cdot \mathbb{I} \quad (9.9)$$

在相位不为 0 时，生成元的对易关系之间多了一项 $iC_{bc} \cdots \mathbb{I}$ ，称为中心荷。根据 Jacobi 恒等式，中心荷要满足方程：

$$\begin{aligned} C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd} C^e{}_{ab} + C^a{}_{db} C^e{}_{ac} &= 0 \\ C^a{}_{bc} C_{ad} + C^a{}_{cd} C_{ab} + C^a{}_{db} C_{ac} &= 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

这是与李代数具体结构无关的约束，给出一类特解：

$$C_{ab} = C^e{}_{ab} \phi_e, \quad \phi_e \in \mathbb{R}$$

这类解到底存不存在要看李代数具体结构，但如果说是李代数恰好是这样的解，那么我们可以通过重定义生成元：

$$\tilde{t}_a = t_a + \phi_a \Rightarrow [\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = i C^a{}_{bc} \tilde{t}_a \quad (9.11)$$

来消除中心荷。这引出了李群是否存在内禀射影表示的定理。

Theorem 6 | 如果李群满足下面两个条件:

- 可以类似 9.11 重定义生成元消去所有中心荷。
- 群的拓扑结构单连通。

那么我么总可以类似 9.4 一样令相位为。

证明比较复杂，我们重点看在 Poincaré 群上的应用，另外，这个定理告诉我们只有两种方式产生内禀投影表示，一种是代数的，一种是拓扑的。

Theorem 7 | (V.Bargmann[5]) 半单 Lie 代数都可以通过重定义生成元消去中心荷

很幸运，齐次 Lorentz 群，也就是 $M_{\mu\nu}$ 张成的代数是半单的，但不幸的是 Poincaré 代数不是半单的，不过更加幸运的是中心荷依旧可以被消除。

前面我们说明 Lorentz 群的拓扑结构使用了 QR 分解，实际上，使用另一种稍微不同的分解方式——极分解——可以证明拓扑结构其实同胚于 $\mathbb{R}^3 \times S^3 \times \mathbb{Z}_2$ ，Poincaré 群多出来的那一部分，也就是 \mathbb{R}^4 是平凡的，重点在于 $S^3 \times \mathbb{Z}_2$ ，这其实是个双连通结构。也就是说基本群为 \mathbb{Z}_2 。直观但不严谨的说就是初始点固定，转两圈总共回到初始点两次的“双圈”可以连续收缩到一点，但是单圈被分成两种，一种能收缩到一点，另一种必须再重复自己以此才能收缩到一点。

这么来看 Lorentz 群必须得用射影表示，我们看一下这个射影表示的特点，核心在于双圈可以收缩到单位元，所以 $1 \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow 1$ 的路径走两次等于单位元：

$$[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})]^2 = 1 \Rightarrow U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}) \quad (9.12)$$

这里的正负号完全可以解释成自旋！整数自旋取正号，半整数取负号。而完整的描述应该是这个射影表示加上所谓“超选择定则”。前面我们说过相位是不依赖于态的，但前提条件是这些态是可加的，所以我们可以认为整数和半整数自旋存在超选择定则，也就是说它们不可加，那么相位就依赖于作用的态的自旋，我们实验上也确实发现了这种不可加性。这就构成了整个 Lorentz 群的表示（同样的推理也可以扩张到 Poincaré 群，毕竟它们拓扑结构一致）。

但是这样还是比较繁琐，但是从数学上看似乎引进射影表示是必然的，那我们能否从物理上把超选择定则给去掉呢？其实，我们完全可以把大自然真正的对称群取为 $SL(2, \mathbb{C})$ 而不是 Lorentz 群 $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}$ ，这个更大的对称群只有普通表示，射影表示里的正负号随着表示本身的不同就自然的冒出来了。就像是 $SU(2)$ ，看作是对 $SO(3)$ 对称性的扩张，奇数维表示是简并表示，会出现负号，而偶数维是忠实表示，就只留下正号了。当然这一做法有代价，那就是抛弃了超选择定则²，这样不同自旋态的不可加性就不能从 Lorentz 不变性直接导出，但并不用担心这一点，毕竟实验上从未制备出这样的叠加态。

所以，对于任何对称群，如果存在中心荷，可以干脆扩张这个李代数，把与一切生成元都对易的生成元包含进来，这样就不存在中心荷了³，但是同样也会丢弃超选择定则；如果李群不是单连通的，我们可以将其表示成 C/H ，其中 C 单连通，称为 G 的通用覆盖群⁴。然后把对称群取为 C 而不是 G ，这样扩张群之后就可以不用担心射影表示问题，也不用引入超选择定则。

² 总之除了超选择定则，其它完全一样。

³ 伽利略群就存在质量 M 这个中心荷，我们可以进行扩张，见 A.Zee[6]

⁴ 类似的论述可以在 [7] 对应章节找到

Conformal transformations

SECTION 10

Pull back, push forward & Lie derivative

考虑光滑映射 $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, 可以定义拉回映射为:

Definition 1 (pull back) $\phi^*: C^\infty(\mathcal{N}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}), f \mapsto \phi^*f$ 其中 $\phi^*f \equiv f \circ \phi$, 也即 $(\phi^*f)|_p = f|_{\phi(p)}$, 这个定义可以自然延拓到 $\phi^*: \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(0, l) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(0, l)$, 其中:

$$(\phi^*T)_{a_1 \dots a_l}|_p(v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} \equiv T_{a_1 \dots a_l}|_{\phi(p)}(\phi_*v_1)^{a_1} \dots (\phi_*v_l)^{a_l}$$

对于 $\forall p \in \mathcal{M}, v_1, \dots, v_l \in \mathcal{X}_p(\mathcal{M})$ 恒成立。

$C^\infty(\mathcal{M})$ 表示 \mathcal{M} 上的光滑标量场

$\mathcal{X}(\mathcal{M})$ 表示 \mathcal{M} 上某点处的切矢空间, 相应的 $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ 表示余切丛空间

$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, l)$ 表示 \mathcal{M} 上的 (k, l) 型张量场

类似的可以定义推前映射概念:

Definition 2 (push forward) $\phi_*: \mathcal{X}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}_{\phi(p)}(\mathcal{N}), X^a \mapsto (\phi_*X)^a$ 其中

$$(\phi_*X)(f) = X(\phi^*f), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{N})$$

同样也可以进行延拓 $\phi_*: \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, 0) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(k, 0)$, 其中

$$(\phi_*T)^{a_1 \dots a_k}|_q(w^1)_{a_1} \dots (w^k)_{a_l} \equiv T^{a_1 \dots a_k}|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*w_1)_{a_1} \dots (\phi^*w_l)_{a_l}$$

对于 $\forall q \in \mathcal{N}, w_1, \dots, w_l \in \mathcal{X}_q^*(\mathcal{N})$ 恒成立。

如果 ϕ 是一个微分同胚, 那可以进一步延拓到 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(k, 0) \leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(k, 0)$ 之间的推前和拉回映射。

Definition 3 以 $(1, 1)$ 型张量的推前映射为例:

$$(\phi_*T)_b^a|_q w_a v^b \equiv T_b^a|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*w)_a(\phi^*v)^b$$

对于任意的 $q \in \mathcal{N}, w_a \in \mathcal{X}_q^*(\mathcal{N}), v^b \in \mathcal{X}_q(\mathcal{N})$ 成立, 其中 $(\phi^*v)^b$ 理解为 $(\phi_*^{-1}v)^b$ 。其它类型张量, 以及拉回映射可类似定义, 而且 $\phi^* = \phi_*^{-1}$

Remark 现在我们有必要澄清一下关于映射的主动和被动观点。首先注意到微分同胚 ϕ 其实很自然地定义了一个 \mathcal{M} 坐标变换 $x \mapsto x'$, 其中 x 是 \mathcal{M} 上老坐标, y 是 \mathcal{N} 上坐标, 则:

$$x'(p) \equiv y(\phi(p))$$

反过来, 坐标变换也可以确定一个微分同胚映射。这让我们可以用两种方法去看待这个微分同胚:

- **主动观点:** 老老实实看作是 $p \in \mathcal{M} \mapsto \phi(p) \in \mathcal{N}$, 然后在 \mathcal{N} 上确定了一个新的张量场, 由原先的张量场“认同”后得来, 也就是 $T|_p \mapsto \phi_*T|_{\phi(p)}$ 。

- **被动观点:** 还是在原先的 \mathcal{M} , 点和张量也没有变换, 而是现在在新的坐标系 $\{x^\mu\}$ 下考虑问题。

这两种观点是等价的, 关键就在于下面的这个等式:

$$\begin{array}{c} \text{in Old coordinate } \{y^\mu\} \\ (\phi_* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ \uparrow \text{New tensor} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Old tensor} \\ |_{\phi(p)} \\ = T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ \downarrow \text{at New point} \end{array} \quad (10.1)$$

$$\begin{array}{c} \text{at Old point} \\ |_p \\ \downarrow \text{in New coordinate } \{x'^\mu\} \end{array}$$

更多关于等价性的论述见梁灿彬 [8] 第四章相关内容, 后面会直接作为结论直接进行引述。

SECTION 11

Killing & Conformal Killing vector field

下面我们考虑 $\mathcal{M} = \mathcal{N}, \{x^\mu\} = \{y^\mu\}$ 。对于矢量场 ξ^a , 其积分曲线诱导了一个微分同胚 (点沿着积分曲线流动), 在被动观点下看就是诱导了一个无穷小坐标变换 $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu t$, 其中 $t \rightarrow 0$, 在主动观点下看就是诱导了流形上点的变换和张量的变换, 但是坐标系仍然不变。首先给出对 ξ 方向的李导数的定义:

Definition 4

(李导数) 李导数 \mathcal{L}_ξ 定义为

$$\mathcal{L}_\xi T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})$$

可以利用下面的式子计算其在某一坐标系下分量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \xi^\lambda \nabla_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - T^{\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\lambda \xi^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_\lambda \xi^{\mu_k} \\ &\quad + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \dots \nu_l} \nabla_{\nu_1} \xi^\lambda + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda} \nabla_{\nu_l} \xi^\lambda \end{aligned} \quad (11.1)$$

比如度规的李导数:¹

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (11.2)$$

¹ 这里我们用到了度规平行移动的性质, $\forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \nabla_X g = 0$

Definition 5

(Killing) 矢量场 ξ^a 诱导单参数微分同胚群 $\phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, 如果其诱导的度规变换满足:

$$\phi^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (11.3)$$

其中 $\Omega^2 \in C^\infty(\mathcal{M})$ 且正定。我们就称向量场为**共形 Killing 向量场**, 对应的微分同胚称为**共形映射** (变换)。从李导数的观点来看就是要求:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \omega(t) g_{\mu\nu} \quad (11.4)$$

其中 $\omega(t) \in C^\infty(\mathcal{M})$, 有关系 $\Omega^2 = 1 + \omega(t)t + \mathcal{O}(t^2)$ 。特殊的, 如果 $\Omega^2 = 1$ 也即 $\omega(t) = 0$, 那我们就称 ξ^a 为**Killing 向量场**, 对应的微分同胚为**等度规映射**。

前面的 Lorentz 变换其实就是在找在 Minkowski 时空中由 Killing 场诱导的变换, 这要求:

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\mu \xi_\nu = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0$$

称为**Killing 方程**。这与前面直接从坐标变换导出的式子是一致的²。实际上, 前面用坐标变换那一套就是在玩被动观点, 可以证明, ξ^a 是 (共形) Killing 场的充要条件是其生成的坐标变换使得:³

² 前面的式子实际上是把无穷小因子 t 吸收进了 ξ 中

³ 注意张量分量作为坐标的函数在何处取值, 以及偏导数在何处取值, 只要想清楚这些函数的自变量是什么、方程两边各自在哪个坐标系, 以及方程作为张量等式都是在流形上同一点取值即可。

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}(x') \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}(x') g_{\sigma\rho}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (11.5)$$

在场论中我们更多使用坐标变换的被动观点来看问题。这个等式的证明关键就是使用 10.1。

根据前面的论证，对于四维闵氏时空，Killing 方程共有 $10 = \frac{4 \times (4+1)}{2}$ 个独立解，也就是说存在 10 个独立的 Killing 场。实际上可以证明，对于任意 n 维时空，其最多具有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立的 Killing 场，然而闵氏时空的 Poincaré 变换正好取到不等式上界。由于 Killing 场诱导的是等度规映射，所以也成为时空的对称性，根据上面的分析，平直闵氏时空具有最大的对称性。

Remark 最大平直时空所有点都是“平权”的，也称为常曲率空间，其黎曼张量为：

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\lambda\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma}), \quad K = \frac{R}{n(n-1)}$$

而且 Weyl 张量处处为 0，也就是说时空是共形平直的，始终存在一个坐标系使得：

$$g_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 \eta_{\mu\nu}$$

对于黎曼流形，最大平直时空除了 $K = 0$ 的 \mathbb{R}^d ，还有 $K > 0$ 的球面以及 $K < 0$ 的双曲空间。宇宙学原理认为空间部分是最大对称空间，在 FLRW 度规下：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Omega_K^2$$

这里 $d\Omega_K^2$ 是上面三种的一种，而且根据 $K = 0, K > 0$ 和 $K < 0$ 可以把宇宙分为平宇宙、闭宇宙和开宇宙。

而对于 Lorentz 流形，除了 $K = 0$ 的 $\mathbb{R}^{1,d}$ ，还有 $K > 0$ 的 dS 时空以及 $K < 0$ 的 AdS 时空，他们都是带宇宙学常数的真空 Einstein 方程的特解。最后说一下，时空本身是绝对的，但空间是相对的，空间部分平坦取决于我们如何对时空用进行分层（坐标的选取 $t = \text{const}$ ），所以不能绝对地在未指定坐标系的情况下谈空间部分平直或者弯曲。更多有关最大对称时空的介绍可以见李理老师的报告：[带宇宙学常数的时空和黑洞相变（一）](#)。

Remark 在 GR 的语境下提到共形变换更多的其实是指 Weyl 变换，它的定义和共形变换很像，但是不等价。Weyl 变换的定义不需要微分同胚，或者说我们直接取同胚为 $\text{id}_{\mathcal{M}}$ ，这样流形上的点、张量和坐标系都不变，但是我们直接把流形上的度规结构改变，变成：

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

还要求物理不变，这就是 Weyl invariant，定义与共形变换非常类似，但是不能混淆两者，两者之间的微妙区别会体现在弦论中共形反常的消去上。[\[9\]](#)

度规在流形上定义了长度 $\|v\| \equiv g(v, v)$ ，相应的可以定义角度为：

$$\cos \theta \equiv \frac{g(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

显然，共形变换是不改变两曲线交点处切矢之间角度的变换，也常被称为保角变换。

SECTION 12

Conformal transformations in $d > 2$

现在假设背景时空是平直时空¹，利用共形 Killing 方程，共形 Killing 场满足：

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \omega(x) g_{\mu\nu} \quad (12.1)$$

式子两边同时取迹得到：

$$\omega(x) = \frac{2}{d} \partial^\mu \xi_\mu \quad (12.2)$$

12.1 两边同时微分 ∂_ρ 得到：

$$2\partial_\rho \partial_{\{\mu} \xi_{\nu\}} = \partial_\rho \omega g_{\mu\nu} \quad (12.3)$$

上式对三个指标进行轮换，每次轮换改变符号然后相加得到：

$$-\partial_\rho \omega g_{\mu\nu} + \partial_\mu \omega g_{\nu\rho} = 2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho \quad (12.4)$$

再次与 $g^{\mu\nu}$ 缩并得到：

$$\partial^\mu \partial_\mu \xi_\rho = \frac{2-d}{2} \partial_\rho \omega \quad (12.5)$$

12.1 作用上 $\partial^\rho \partial_\rho$ ，再由 **12.5** 得到：

$$[\partial^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu] \omega(x) \quad (12.6)$$

上式两边求迹得到：

$$(d-1)\partial^\mu \partial_\mu \omega(x) = 0 \quad (12.7)$$

$d=1$ ，上式恒成立，也就是说任意变换都是共形变换，这是由于一维无法定义角度导致的， $d \geq 2$ 时，满足拉普拉斯方程：

$$\square^2 \omega(x) = 0 \quad (12.8)$$

$d > 2$ 则根据 **12.6** 还进一步要求：

$$\partial_\mu \partial_\nu \omega(x) = 0 \quad (12.9)$$

这说明 ω 形式上只能为：

$$\omega(x) = A + B_\mu x^\mu \quad (12.10)$$

代入 ref11.10 得到

$$\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \frac{1}{2} (-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}) \quad (12.11)$$

右边是常向量。因此， ξ_μ 是 x^μ 的二次函数，可展开成

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad (12.12)$$

这里， $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ 是常数， $c_{\mu\nu\rho}$ 关于后两指标对称： $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ 。将上式代入 **12.2**，得到

$$\omega(x) = \frac{2}{d} (b^\mu{}_\mu + 2c^\mu{}_{\mu\rho} x^\rho) \quad (12.13)$$

因此， ω 的展开式 (1.30) 中的系数 A, B 同 b, c 的关系是

$$A = \frac{2}{d} b^\mu{}_\mu, \quad B_\mu = \frac{4}{d} c^\nu{}_{\nu\mu} \quad (12.14)$$

那么 A, B 由 a, b, c 确定了，(1.32) 代入 (1.31) 和 (1.18)，可进一步限制 b, c 的形式。事

¹后面的推导对于 Minkowski 时空和 Euclidean 时空都适用

实上，代入后得到

$$2c_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}) \quad (12.15)$$

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho})x^\rho = (A + B_\rho x^\rho)g_{\mu\nu} \quad (12.16)$$

于是

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = Ag_{\mu\nu} \quad (12.17)$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}(-B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} + B_\rho g_{\mu\nu}) \quad (12.18)$$

由此，知道共形因子后就可以写出共形变换。最终得到无穷小变换可分成以下几类：⁴

⁴ SCT: Special Conformal Transformation

Translation	$x'^\mu = x^\mu - a^\mu$
Rotation	$x'^\mu = x^\mu - b^{A\mu\nu}x_\nu, \quad b^{A\mu\nu} = -b^{A\nu\mu}$
Dilation	$x'^\mu = x^\mu - \frac{A}{2}x^\mu$
SCT	$x'^\mu = x^\mu - \frac{1}{4}(-B^\mu x^2 + 2x^\mu B^\nu x_\nu)$

对应的无穷小变换的生成元可表示为

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ M_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ D &= -ix^\mu\partial_\mu \\ K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu) \end{aligned}} \quad (12.20)$$

它们之间的对易关系为：

$$\boxed{\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \\ [D, P_\mu] &= iP_\mu \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \\ [K_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu) \\ [P_\rho, M_{\mu\nu}] &= i(g_{\rho\mu}P_\nu - g_{\rho\nu}P_\mu) \end{aligned}} \quad (12.21)$$

可以看到其中一部分就是 Poincaré 代数⁵，这也说明了等度规变换是共形变换的特
殊情况。这个 Lie 代数称为 d 维共形代数。

重定义生成元 $J_{ab}(a, b = -1, 0, \dots, d)$ ：

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \quad (12.22)$$

$$J_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (12.23)$$

$$J_{-10} = D \quad (12.24)$$

$$J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (12.25)$$

⁵ $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 时为 Euclidean 代数

从共形代数的对易关系，可以得到 J_{ab} 满足对易关系

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}) \quad (12.26)$$

当共形变换是 Euclidean 空间中的变换时， g_{ab} 是号差为 $(-, +, \dots, +)$ 的 Minkowski 度规⁶。也就是说 d 维 (Euclidean 空间) 中的共形代数，同构于 Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(d+1, 1)$ 。

有限共形变换可由无穷小共形变换的叠加构成，形式为：

⁶ 否则有两个负号

Translation	$x'^\mu = x^\mu - a^\mu$
Rotation(Boost)	$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$
Dilation	$x'^\mu = \alpha x^\mu$
SCT	$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$

(12.27)

其中最后一个变换是由平移和反演变换的组合得到的：

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow x''^\mu = x'^\mu - b^\mu \rightarrow x'''^\mu = \frac{x''^\mu}{x'^2} \quad (12.28)$$

而反演变换是离散的，所以 SCT 并不能用无穷小变换生成。根据前面的讨论，这些变化构成 $SO(d+1, 1)$ 群。

SECTION 13

Conformal transformations in $d = 2$

上一节利用李导数看待问题，也就是所谓主动观点，现在用坐标变换的观点来进行推演。

在二维情况下，使用复数作为参数非常方便，定义复变量：⁷

⁷ 导数这样定义是为了 $\partial_z z = \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$

$$z = x^1 + ix^2, \quad \partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

Euclidean 空间中度规可以写成：

$$g_z = dz d\bar{z} \quad (13.1)$$

现在考虑坐标变换 $z \mapsto z'(z, \bar{z})$ ，度规相应变为：

$$\begin{aligned} g_z \mapsto g'_z &= dz' d\bar{z}' \\ &= \left(\frac{\partial z'}{\partial z} dz + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} dz^2 + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} d\bar{z}^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right) dz d\bar{z} \end{aligned} \quad (13.2)$$

这导致了下面的 Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (13.3)$$

而且前面的推导只要求度规形式为 $\Omega(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ 。也就是说，变换 z' 为全纯⁸或者反全纯函数，而反全纯函数会将右手系变为左手系，后面主要考虑全纯情况，反全纯情况只需要全部取复共轭即可。

⁸ 数学人叫法，物理人喜欢称为解析函数

考虑局部的无穷小共形变换，变换形式可以写成：

$$z \mapsto z + \xi(z), \quad \bar{z} \mapsto \bar{z} + \bar{\xi}(\bar{z})$$

其中 ξ 可以进行 Laurent 展开为:

$$\xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n z^{n+1}, \quad \bar{\xi}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\xi}_n \bar{z}^{n+1}$$

对应于 $\xi_n, \bar{\xi}_n$ 的生成元为 L_n, \bar{L}_n , 显然这些生成元的个数是无限个! 生成了一个无限维李代数 Witt 代数⁹:

$$L_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (13.4)$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n}, \quad [L_n, \bar{L}_m] = 0 \quad (13.5)$$

二维共形场论在局域变换下具有无穷多的对称性! 但是全局的共形变换要求 $z'(z)$ 没有极点且只有一个非简并零点 (否则变换不是单的), 这限制了 $z'(z)$ 的形式为:

$$z'(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad (13.6)$$

这里 $a \neq 0$ 是为了让 $z \mapsto z'$ 为 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的满映射。

SUBSECTION 13.1

Embedding formalism

\mathbb{R}^d 上的共形变换¹⁰和 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的 Lorentz 变换有很直观的几何对应 [10, 11]。首先注意到由于 Lorentz 变换保 ds^2 , 所以对于顶点在原点处的光锥, Lorentz 变换是在光锥上的同胚。那我们可以把光锥看作是嵌入¹¹在 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 中的子流形, 这实际上是将 \mathbb{R}^d 通过下面的方式嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 中:

$$q^\mu = (1 + x^2, 2x^A, 1 - x^2), \quad x^A \in \mathbb{R}^d \quad (13.7)$$

这样, Lorentz 变换作用在光锥上可以看作是 \mathbb{R}^d 上的一个变换:

$$q^\mu \mapsto q'^\mu = \frac{(\Lambda q)^\mu}{(\Lambda q)^+} \quad (13.8)$$

其中分母是为了将 $q^+ \equiv \frac{1}{2}(q^0 + q^{d+1}) = 1$ 归一化, 所谓嵌入到光锥的正则部分(**canonical section**)。而且, 可以验证这个变换是 \mathbb{R}^d 上的全局共形变换! 特别地, 当 $d=2$ 时, 定义 $w = x^1 + ix^2$, 这个同构变成:

$$q^\mu(w, \bar{w}) = (1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, i(\bar{w} - w), 1 - w\bar{w}) \quad (13.9)$$

利用 8.1, 可以得到:

$$(\Lambda q)^+ = \left| \frac{\partial z'}{\partial z} \right|^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

任意类光矢量可以参数化为:¹²

$$k^\mu(w, \bar{w}) \equiv \omega q^\mu = k^0 \hat{q}^\mu = \frac{k^0}{1 + w\bar{w}} (1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, i(\bar{w} - w), 1 - w\bar{w}) \quad (13.10)$$

⁹ 严格来说是两个 Witt 代数的直积

¹⁰ $d=2$ 时取全局共形变换

¹¹ Embedding formalism 类似于光锥坐标

SECTION 14

Conformal transformations on the Riemann sphere

本节的关键在于下面的式子:

$$\mathcal{S}^2 \cong \mathbb{C} \cup \{z = \infty\} \quad (14.1)$$

¹² 后面会 ω_k, k^0 混用, 但是不要与 ω 弄混

这实际上是在对复平面进行一点紧化，导致的球面我们称为 Riemann 球面，这个同胚可以利用球极投影显式构造出来：

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x'_1, x'_2, 0) : \begin{cases} x'_1 = \frac{rx_1}{r+x_3} \\ x'_2 = \frac{rx_2}{r+x_3} \end{cases} \quad (14.2)$$

利用复坐标可以写为：

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto z \equiv \frac{x'_1 + ix'_2}{r} = \frac{x_1 + ix_2}{r + x_3} \iff z = e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \quad (14.3)$$

这里我们是按照南极为极点进行投影，投影到赤道平面，以北极为投影点只需要把上式中的 $r + x_3$ 替换为 $r - x_3$ 。更一般的，我们还可以给出高维的球极投影：

$$\mathcal{S}^{n+1} \cong \mathbb{E}^n \cup \{\infty\} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \mapsto \frac{(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, |x|^2 - 1)}{|x|^2 + 1} \quad (14.4)$$

将 \mathcal{S}^2 作为 \mathbb{R}^3 的子流形，不难在复坐标下写出对应度规为：

$$g_z = \frac{4r^2}{(1 + z\bar{z})^2} dz d\bar{z} \quad (14.5)$$

根据之前的分析， \mathcal{S}^2 上的共形变换由全纯或反全纯函数诱导，后者将左右手系互换。复平面一点紧化为球面之后，全局共形变换函数必然有一个极点，负责映射到 $\{\infty\}$ ，所以¹³

$$z'(z) = \frac{\text{Poly}(z)}{\text{Poly}(z)}$$

¹³ 下面只对全纯进行讨论，反全纯只需取复共轭

依旧根据变换的单射性质，要求分子分母都必须只能线性依赖于 z ，而且由于满性，分子分母零点不能相同，所以这要求全局共形变换形式只能为：

$$z'(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \quad (14.6)$$

注意到这里对行列式进行了归一化选取。一般谈及二维共形变换我们都是在加入无穷远点后进行讨论，在数学上这种变换称为 **Möbius 变换**。由于整体相差一个负号代表的是同一个变换，所以变换群为 $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ，将反全纯部分一并考虑进来后扩充为 $SL(2, \mathbb{C})$ 。

Witt 代数中 $n = \{-1, 0, 1\}$ 的部分张成了 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数¹⁴，也就是那些全局共形变换的生成元。它们实际上与 Lorentz 群生成元可以直接由下式联系：

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} (J_3 - iK_3), & L_{-1} &= \frac{1}{2} (-J_1 + iJ_2 + iK_1 + K_2), & L_1 &= \frac{1}{2} (J_1 + iJ_2 - iK_1 + K_2), \\ L_0 &= \frac{1}{2} (-J_3 - iK_3), & L_{-1} &= \frac{1}{2} (J_1 + iJ_2 + iK_1 - K_2), & L_1 &= \frac{1}{2} (-J_1 + iJ_2 - iK_1 - K_2). \end{aligned} \quad (14.7)$$

其中

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K_i = M_{i0}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

¹⁴ 非常巧，整数域的非平凡子域也就是它

Celestial Sphere & Asymptotic Flat Spacetime

SECTION 15

Carter-Penrose diagram

Minkowski 时空的度规在球坐标系下可以写为:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (15.1)$$

定义 retarded 和 advanced 坐标为:

$$u \equiv t - r, \quad v \equiv t + r \quad (15.2)$$

这个坐标系下度规重写为:

$$ds^2 = -dudv + \frac{(u-v)^2}{4} d\Omega_2^2, \quad -\infty < u \leq v < +\infty \quad (15.3)$$

由于时空具有球对称性, 所以考虑忽视角向, 只考虑径向, 那么时空图 $t-r$ 上每一个点代表一个球面, 径向光线意味着 u 或 v 是常数。时空的无限远有不同的趋向方式, 这也导致了不同的无穷远定义:

i^+ : 类时未来无穷远, r 一定, $t \rightarrow +\infty$;

i^- : 类时过去无穷远, r 一定, $t \rightarrow -\infty$;

i^0 : 类空无穷远, t 一定, $r \rightarrow +\infty$;

\mathcal{I}^+ : 类光未来无穷远, u 一定, $r \rightarrow +\infty$;

\mathcal{I}^- : 类光过去无穷远, v 一定, $r \rightarrow +\infty$;

这五个无穷远合称为共形无穷远。

但是无穷远还是一个靠想象的概念, 无法在这样的图中表现出来, 继续考虑坐标变换, 变到所谓光锥坐标:

$$U \equiv \arctan u, \quad V \equiv \arctan v \quad (15.4)$$

度规在光锥坐标下变为:

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} \cdot (-4dUdV + \sin^2(V-U)d\Omega_2^2), \quad -\frac{\pi}{2} < U \leq V < \frac{\pi}{2} \quad (15.5)$$

现在我们牺牲对距离的精确描述, 考虑 Weyl 变换之后, 丢掉共形因子后的度规:

$$\tilde{ds}^2 = -4dUdV + \sin^2(V-U)d\Omega_2^2 \quad (15.6)$$

这样消去了在 $\pm\frac{\pi}{2}$ 处的坐标奇性, 我们称之为共形紧化。可以证明 [12], 两个相差共形变换的度规具有如下性质:

1. 由于 $\tilde{ds}^2 \iff ds^2 = 0$, 所以光锥不变, 即时空因果结构不发生改变;

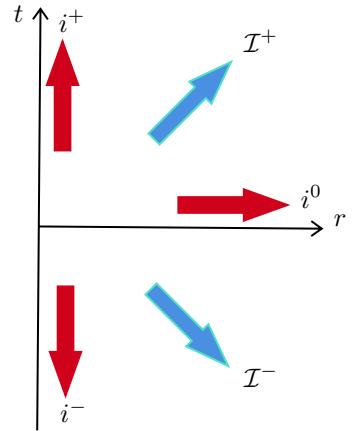


图 1. 共形无穷远定义

2. 向量场的类时、类空和类光性质不变;
3. 类时和类空曲线还是类时或者类空的，但是类时或者类空测地线不一定仍是测地线，但是类光测地线依然是类光测地线。

从这个意义上讲，如果我们只关注时空的因果结构，完全可以考虑共形紧化之后的度规，重点是共形紧化后坐标变成有限区间内取值，这使得我们有希望在时空图上表现出共形无限远。继续对 15.6 做变换：

$$T = U + V, \quad R = U - V \quad \xrightarrow{\text{overall}} \quad t \pm r = \tan \frac{1}{2} (T \pm R) \quad (15.7)$$

度规变为：

$$\tilde{ds}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega_2^2, \quad |T| + R < \pi, 0 \leq R < \pi \quad (15.8)$$

最后一项角向不用在意¹，现在整个时空图是一个有限大小的图，其上面的每一点表示一个球面（除了 i^0 ），而且共形无限远以边界的形式表现出来：

¹ 坐标变换的时候我们只是把 r, t 进行变换，没有将他们与角向坐标混合

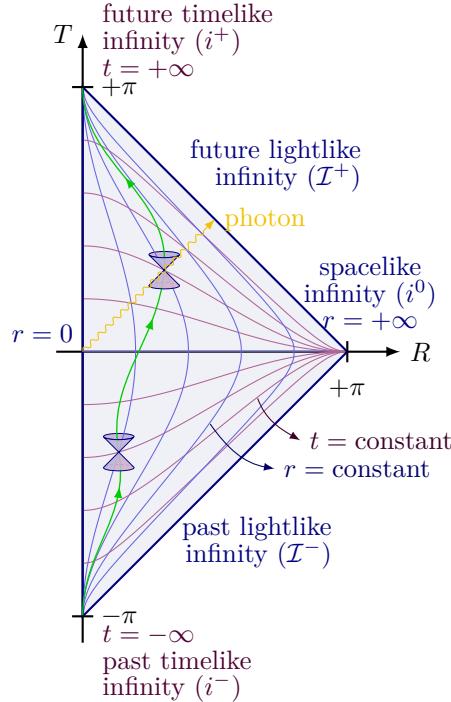


图 2. Minkowski 时空彭罗斯图

这种类光测地线都是 45° 斜线，而且能表示共形无限远的图称为彭罗斯图。这个图还有另一种更常用的画法，其实是比上面的形式多出一个维度，用图上左右部分两个点表示一个球 S^2 ，表示球上的一对对径点。原先在上图中只能画成折线的测地线现在可以展开画为曲线：

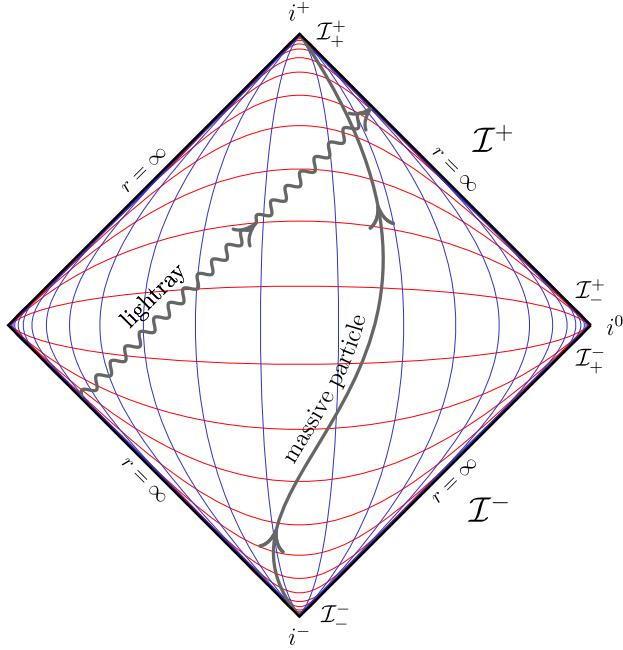


图 3. Minkowski 时空彭罗斯图的另一种形式

注意前面的几个 Penrose 图都特别对 i^+ , \mathcal{I}_+^+ ; i^- , \mathcal{I}_-^- 以及 i^0 , \mathcal{I}_+^- , \mathcal{I}_-^+ 后面我们将会看到, 场在这几个点上其实是多值的, 或者说极限与趋近方向有关, 所以必须进行区分, 这几个点并不是一个点, 即使是极限的意义下也不是!

在我们考虑的散射过程中, 有质量粒子总是从 i^- 出发, 通过类时测地线最终抵达 i^+ , 而无质量粒子总是从 \mathcal{I}_- 出发走 45° 斜线到达 \mathcal{I}_+ 。

SECTION 16

Celestial Sphere

如图 4 所示, \mathcal{I}^\pm 上的每一个点代表一个球面², 我们称之为天球 CS^2 , 在 SR 的语境下, 天球一般指观察者所看到的无限远区域, 所以特指 \mathcal{I}^- 上的天球。

在类光无穷远处可以选取 Bondi 坐标来参数化天球, 在 \mathcal{I}^+ 上我们选取 (u, r, z, \bar{z}) , 其中 $r \rightarrow \infty$, (z, \bar{z}) 是球极投影到复平面来表示天球的角向坐标, 这套坐标与 $\{x^\mu\}$ 之间的关系为:

$$x^\mu = \left(u + r, r \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, ir \frac{\bar{z} - z}{1 + z\bar{z}}, r \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \quad (16.1)$$

在 \mathcal{I}^- 上我们选取 (v, r, z, \bar{z}) , 其中 $r \rightarrow \infty$, 注意现在角向坐标和 \mathcal{I}^+ 上的选取是对称认同的关系, 也就是说 $z \mapsto -\frac{1}{z}$:

$$x^\mu = \left(v - r, -r \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, -ir \frac{\bar{z} - z}{1 + z\bar{z}}, -r \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \quad (16.2)$$

从上面的式子也可看出 \mathcal{I}^\pm 上两套坐标空间部分的关系的确为空间反演, 在图 4 中我们也通过 ● 和 ✕ 标记出来了。

现在考虑 Lorentz 变换对天球的作用, 也就是要考虑 Lorentz 变换下 Bondi 坐标在 $r \rightarrow \infty$ 怎么变。我们以 \mathcal{I}^+ 上的天球为例, 首先考虑 r 的变化。思路就是根据 $r = \sqrt{x^i x_i}$, $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 以及 $SO(3, 1)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ 导致的 8.1 进行计算, 并取 $r \rightarrow \infty$ 的极限, 经过冗长的计算后得到³:

² 在这个图上是左右两边各一个点组成的对径点连成的圆周表示一个球面

³ 本节的详细计算参考 [13]

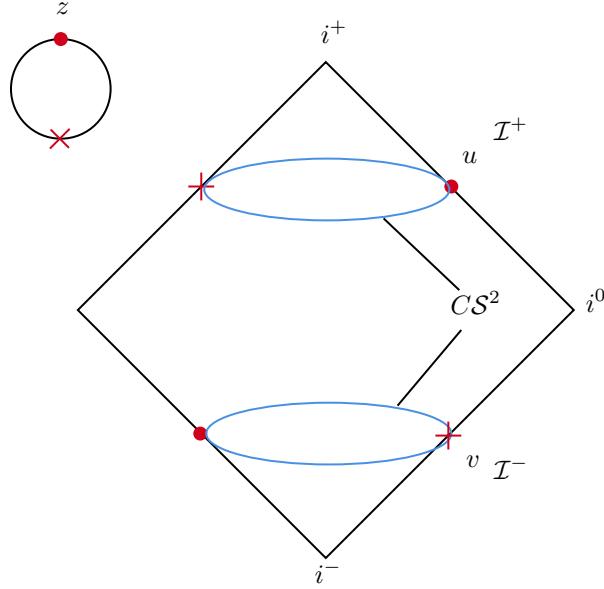


图 4. Bondi 坐标与天球

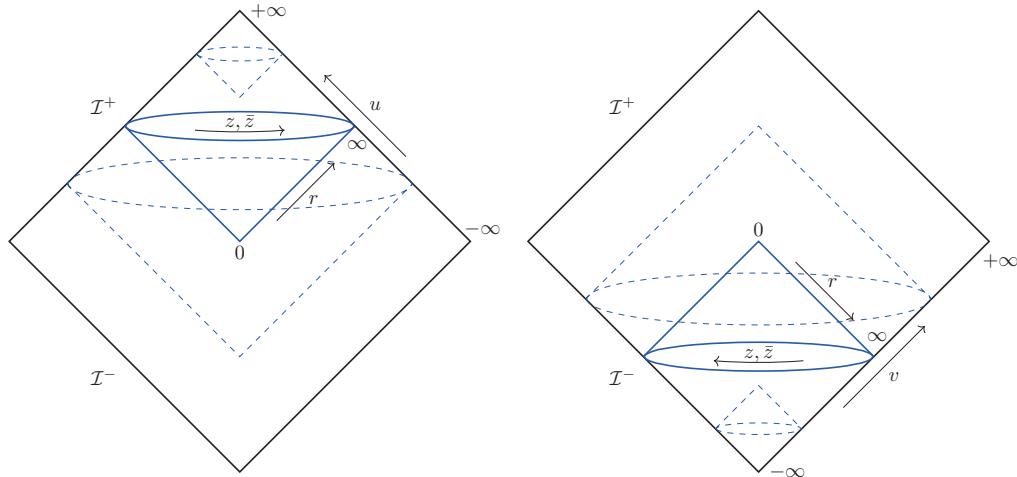


图 5. Bondi 坐标

$$r' = r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \equiv r \cdot F(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(1) \quad (16.3)$$

所以 Lorentz 变换下确实会把 $r = \infty \mapsto r = \infty$ 。 u 的变换计算相对简单，注意到

$$t^2 - r^2 = u^2 + 2ur$$

式子左边是个 Lorentz 不变量，现在考虑的是某个固定 u 时的天球变换，所以 $r \rightarrow \infty$ 后说明 $2ur$ 是个 Lorentz 标量，代入 r 变换关系得到：

$$u' = \frac{u}{F(z, \bar{z})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (16.4)$$

注意，这里说明在一般的 Lorentz 变换后天球并非还是天球，因为 u 的变换依赖于角向

坐标。如果现在只关心天球的角向坐标怎么变，不关心变换后每个点是属于哪一“时刻”的天球，计算后发现：

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (16.5)$$

也就是说天球角向的变换就是 CS^2 上的全局共形变换！但是写出这个形式我们利用了 8.1，这也就是前面为何要取 $\tau_1 = -\sigma_1$ 原因，本质上就是为了让这列公式形式更加漂亮，选取 σ_1 也不影响变换还是一个全局共形变换。天球在 Lorentz 变换下的变换可以用下图总结⁴：

⁴ 不少精美的插图都是直接取自 [14]

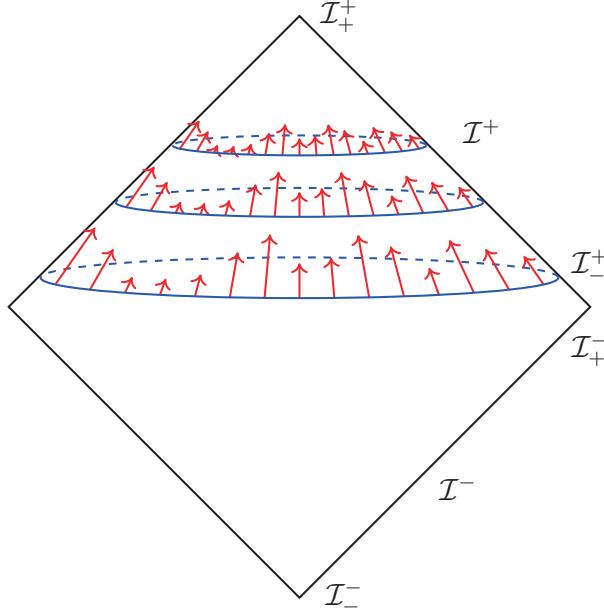


图 6. 天球上的 Lorentz 变换

SECTION 17

Asymptotic flat spacetime: basic concepts

所谓渐近平直时空简单点说就是在共形无限远处与 Minkowski 时空一致，渐近效应足够小允许存在引力波等解，但又要足够大能够排除无穷大能量这些非物理理解。这一要求实际上可以用严格的与坐标无关的流形语言来描述 [15]。这里考虑使用某一特定坐标系——Bondi 坐标——的语言来进行阐述 [14, 16]，由于 \mathcal{I}^\pm 的处理方法类似，所以重点考虑于 \mathcal{I}^+ 。

由于广义相对论是一个与坐标无关的理论，即理论本身具有微分同胚不变性，这是理论本身的冗余自由度，我们这里实际上是在对理论选取一个特定规范后进行描述。Bondi 规范是最早也最自然的提法，当然也有其它规范选取 [17, 18]。对于某个固定的 $u(x^\mu)$ ，在时空上决定了一个超曲面，其上法矢为 $n^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu u$ ，第一个规范条件是要求这个超曲面类光⁵，也就是说 $n^\mu n_\mu = 0 \Rightarrow g^{uu} = 0$ ；再定义 $x^A, A = \{1, 2\}$ 为角向坐标，与超曲面法矢相正交，即 $\nabla_n x^A = n^\mu \partial_\mu x^A = 0 \Rightarrow g^{uA} = 0$ ；最后一个要求是 r 取为 **luminosity distance**，这要求 $\partial_r \det(g_{AB}/r^2) = 0$ 。则 $x^\mu = (u, r, x^A)$ 构成 Bondi 规范，上面的条件也等价于：

$$g_{rr} = g_{rA} = 0, \quad \partial_r \det \frac{g_{AB}}{r^2} = 0 \quad (17.1)$$

在这个规范下，最一般的度规可以写作：⁶

⁵ 关于超曲面的严格定义以及相关概念可参考 [8]

⁶ 后面若无特殊说明，对角向指标 A, B 求和

$$ds^2 = g_{uu}du^2 + 2g_{ur}dudr + 2g_{uA}dudx^A + g_{AB}dx^A dx^B \quad (17.2)$$

对于 Minkowski 时空, Bondi guage 就是选取 retarded coordinate, $u = t - r$, 度规形式为:

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^A dx^B \quad (17.3)$$

渐近平直即要求 $r \rightarrow \infty$ 时, 时空间度规与上面一致。Bondi 等人计算后对渐近平直时空的度规在 $r \rightarrow \infty$ 的渐近行为给予了如下限制 [19, 20]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^A dx^B \\ & + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{AB}dx^A dx^B + D^B C_{AB}dudx^A \\ & + \frac{1}{16r^2}C_{AB}C^{AB}dudr + \frac{1}{r}\left[\frac{4}{3}(N_A + u\partial_A m_B) - \frac{1}{8}\partial_A(C_{BC}C^{BC})\right]dudx^A \\ & + \frac{1}{4}\gamma_{AB}C_{CD}C^{CD}dx^A dx^B + \dots \end{aligned} \quad (17.4)$$

其中 $\gamma^{AB}C_{AB} = 0$, $C_{AB} = C_{BA}$, 角向指标使用 γ^{AB} 进行升降, 而 D^A 是与单位球面上度规 γ^{AB} 适配的协变导数²。这里特别注意 u, r 并不是 Minkowski 中的 retarded coordinates! 只是在 $r \rightarrow \infty$ 时 $u \approx \tilde{t} - \tilde{r}$ ⁷。同时还要求物质能动张量满足:

$$\begin{aligned} T_{uu}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-2}), & T_{ur}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-4}), & T_{rr}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-4}) \\ T_{uA}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-2}), & T_{rA}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-3}), & T_{AB}^M &\sim \mathcal{O}(r^{-1}) \end{aligned}$$

而且由于是在 \mathcal{I}^+ 上考虑问题, 所以这些能动张量都来源于无质量粒子。

17.4 引进的这些参数都是有具体的物理意义的:

- m_B : **Bondi mass aspect**, 物理意义是在 \mathcal{I}^+ 的 u 处天球上观察得到的时空的能量角密度分布。**Bondi mass** 可以通过积分 $M(u) = \oint_{S_\infty^2} d^2\Omega m_B(u, x^A)$ 给出, $u \rightarrow -\infty$ 时, Bondi mass 等于 ADM 能量。
- C_{AB} : 这个量根据无迹对称约束, 会给出两种极化模式(或者说引力子的两个螺旋度取值), 它完全确定了 \mathcal{I}^+ 上的引力波辐射, 根据他可以定义 **Bondi news tensor** $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$, 这个量可以和电磁 Fraday 张量 $F_{uz} = \partial_u A_z$ ⁸类比, 它的平方正比于 \mathcal{I}^+ 上的能流。
- N_A : **angular momentum aspect**, 这是相对于 $r = 0$ 这一点的角动量角密度分布, 对他在 S_∞^2 上积分得到在 \mathcal{I}^+ 的 u 处天球上观察得到的时空的总角动量。

现在我们选取角向坐标为 $x^A = (z, \bar{z})$ 来简化讨论, 更一般的讨论见 [16]。这导致 γ_{AB} 对角项为 0, 由 C_{AB} 的无迹对称性质有 $C_{zz}C^{zz} = C_{\bar{z}\bar{z}}C^{\bar{z}\bar{z}}$, 实际上这个条件可以强化为 $(C_{zz})^* = C_{\bar{z}\bar{z}}$ 。在这样的角向坐标选取下, 17.4 简化为⁹:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ & + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + D^z C_{zz}dudz + D^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}}dud\bar{z} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{4}{3}(N_z + u\partial_z m_B) - \frac{1}{4}\partial_z(C_{zz}C^{zz})\right]dudz + c.c. + \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

²对于任何一个流形, 给定度规后都唯一存在一个无挠的联络 ∇ 使得 $\nabla_X g = 0, \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, 称为 Levi-Civita 联络, 对应的 Clifford 符号 $\nabla_{e_\mu} e_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$ 由下式给出:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

这里 $\Gamma_{zz}^z = -\frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} {}^*$, 其它都是 0。

⁷ 这里的 \tilde{t}, \tilde{r} 是指 Minkowski 时空中的通常四维坐标, 也就是使得度规为 $\eta_{\mu\nu}$ 的坐标

⁸ 后面章节将会看到为何是这个形式

⁹ 注意到这里忽略了 $r^{-2}dudr$ 贡献, 而且相比于 $r^2dzd\bar{z}$ 忽略了 17.4 最后一项 $\mathcal{O}(1)$ 的贡献

其中 $C_z z, N_z, m_B$ 按照 17.4 类似定义, 而且只与 (u, z, \bar{z}) 有关, 与 r 无关。所以渐近平直时空的度规渐近式 (在 Bondi gauge 下) 可以概括为:

$$\begin{aligned} g_{uu} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-1}), & g_{ur} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-2}), & g_{uz} &= \mathcal{O}(1) \\ g_{zz} &= \mathcal{O}(1), & g_{z\bar{z}} &= r^2 \gamma_{z\bar{z}} + \mathcal{O}(1), & g_{rr} &= g_{rz} = 0 \end{aligned}$$

在不少文献中 [21–23] 也经常见到 17.5 的另一种等价写法¹⁰:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -du^2 - 2dudr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \\ &\quad + \frac{2m_B}{r} du^2 + rC_{zz} dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 + 2g_{uz} dudz + 2g_{u\bar{z}} dud\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (17.6)$$

其中:

$$g_{uz} = \frac{1}{2} D^z C_{zz} + \frac{1}{6r} C_{zz} D_z C^{zz} + \frac{2}{3r} N_z + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (17.7)$$

不过这些对度规的限制都只是纯粹的几何意义上的, 度规还必须是爱因斯坦场方程的解¹¹:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}^M \quad (17.8)$$

Remark

这里我们讨论一下前面对度规的约束为何是纯几何的, 以 17.5 为例, 我们计算 $dudz$ 这一项的系数, 我们先暂且设为 U_z , 根据 Weyl 张量 (在 Weyl 变换下不变) 的定义:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} (g_{\nu\rho} R_{\sigma\mu} + g_{\mu\sigma} R_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} R_{\rho\mu} - g_{\mu\rho} R_{\sigma\nu}) + \frac{1}{6} R (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \quad (17.9)$$

我们感兴趣的是下面两个分量:

$$C_{rzzrz} = R_{rzzrz} - \frac{1}{2} g_{zz} R_{rr}, \quad C_{rurz} = R_{rurz} + \frac{1}{2} (g_{ur} R_{rz} - g_{uz} R_{rr}) \quad (17.10)$$

代入 ds^2 一通计算猛如虎:

$$C_{rzzrz} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad C_{rurz} = -\frac{1}{4r^2} (U_z - D^z C_{zz}) + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (17.11)$$

显然, 为了满足渐近平直性, 要求 $U_z = D^z C_{zz}$, 推导过程中我们完全没有使用场方程。

使用 17.6 的约定, 利用场方程代入度规进行计算, 逐项比较得到三个量满足的约束条件为:

$$\begin{aligned} \partial_u m_B &= \frac{1}{4} D_z^2 N^{zz} + \frac{1}{4} D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}} - \frac{1}{2} T_{uu}^M - \frac{1}{4} N_{zz} N^{zz} \\ \partial_u N_z &= -\frac{1}{4} (D_z D_{\bar{z}}^2 C^{\bar{z}\bar{z}} - D_z^3 C^{zz}) - T_{uz}^M + \partial_z m_B + \frac{1}{16} D_z \partial_u (C_{zz} C^{zz}) \\ &\quad - \frac{1}{4} N^{zz} D_z C_{zz} - \frac{1}{4} N_{zz} D_z C^{zz} - \frac{1}{4} D_z (C^{zz} N_{zz} - N^{zz} C_{zz}) \end{aligned} \quad (17.12)$$

其中

$$T_{\mu\nu}(u, z, \bar{z}) = 8\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 T_{\mu\nu}^M(u, z, \bar{z}) \quad (17.13)$$

对 \mathcal{I}^- 可以类似分析, 这里仅罗列结果¹²:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dv^2 + 2dvdr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \\ &\quad + \frac{2m_B^-}{r} dv^2 + rD_{zz} dz^2 + rD_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 + 2g_{vz} dv dz + 2g_{v\bar{z}} dv d\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (17.14)$$

¹⁰ 等价性并不显然, 实际上, 说他们等价, 并不是说可以直接通过 17.5 得到 17.6, 而是 17.6 形势下参数由场方程诱导的 N_z 的约束条件的形式会与 17.5 中的不同, 他们的等价性隐藏在约束条件之中了。

¹¹ 不少文献直接选取单位为 $c = \hbar = 8\pi G = 1$, 但是这样做实际上消去了所有量纲, 无法再使用量纲分析这一工具 [24]。

¹² 这里 $r \rightarrow \infty, v \approx t + r$, 角向坐标与 \mathcal{I}^+ 上的对径认同

其中¹³

$$g_{vz} = -\frac{1}{2}D^z D_{zz} - \frac{1}{6r}D_{zz}D_z D^{zz} - \frac{2}{3r}N_z^- + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (17.15)$$

¹³ 这里 D^{AB} 相当于前面的 C^{AB} , 不要与协变导数弄混!

类似的可以定义 News tensor:

$$M_{zz} \equiv \partial_v D_{zz} \quad (17.16)$$

约束条件为:

$$\begin{aligned} \partial_u m_B^- &= \frac{1}{4}D_z^2 M^{zz} + \frac{1}{4}D_{\bar{z}}^2 M^{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{2}T_{vv}^M + \frac{1}{4}M_{zz}M^{zz} \\ \partial_u N_z^- &= \frac{1}{4}(D_z D_{\bar{z}}^2 D^{\bar{z}\bar{z}} - D_z^3 D^{zz}) - T_{vz}^M - \partial_z m_B^- + \frac{1}{16}D_z \partial_v(C_{zz}C^{zz}) \\ &\quad - \frac{1}{4}M^{zz}D_z D_{zz} - \frac{1}{4}M_{zz}D_z D^{zz} - \frac{1}{4}D_z(D^{zz}M_{zz} - M^{zz}D_{zz}) \end{aligned} \quad (17.17)$$

渐近平直时空也可以从时空图上一窥其特征 [25], 只要是渐近平直时空, Penrose 图在 \mathcal{I}^\pm 边界上都类似于 Minkowski 时空图的直角形状。

SECTION 18

Asymptotic flat spacetime: BMS group

根据前一节的渐近分析, 我们是在寻找满足一系列边界条件的规范变换(微分同胚), 这些就是所谓的 Allowed Symmetries, 但是那些不改变物理, 没有啥效应的对称性要剔除掉¹⁴, 得到我们要找的渐近对称性

$$\text{Asymptotic symmetries} = \frac{\text{Allowed symmetries}}{\text{Trivial symmetries}} \quad (18.1)$$

¹⁴ 或者说我们需要它们能生成非 0 守恒荷

按理说在无穷远处时空渐近平直, 那么在无穷远处的渐近对称性应该就是 Poinccré 群, 但是由于渐近平直带来的高阶项(描述无穷远处的引力波扰动), 这会导致体系的对称性远远大于 Poincaré 群。这从某种程度上也意味着, 弱场、大尺度近似下广义相对论并不会退化为狭义相对论!

所谓 AFS 的对称变换, 并不要求是等度规映射, 仅仅要求保持 Bondi gauge 以及渐近平直性, 这其实是要求下面的 asymptotic invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{uu} &= \mathcal{O}(r^{-1}), & \mathcal{L}_\xi g_{ur} &= \mathcal{O}(r^{-2}), & \mathcal{L}_\xi g_{uz} &= \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{L}_\xi g_{zz} &= \mathcal{O}(1), & \mathcal{L}_\xi g_{z\bar{z}} &= \mathcal{O}(1), & \mathcal{L}_\xi g_{\bar{z}\bar{z}} &= \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

和 gauge invariant:

$$\mathcal{L}_\xi g_{zz} = \mathcal{L}_\xi g_{rz} = 0 \quad (18.2)$$

计算后发现¹⁵这要求矢量场形式为:

$$\begin{aligned} \xi^+ &= \left(1 + \frac{u}{2r}\right)Y^{+z}\partial_z - \frac{u}{2r}D^{\bar{z}}D_z Y^{+z}\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}(u+r)D_z Y^{+z}\partial_r + \frac{u}{2}D_z Y^{+z}\partial_u + c.c. \\ &\quad + f^+\partial_u - \frac{1}{r}(D^z f^+\partial_z + D^{\bar{z}} f^+\partial_{\bar{z}}) + D^z D_z f^+\partial_r \end{aligned} \quad (18.3)$$

¹⁵ 相当冗长的计算, 细节请参考: [19, 20, 26–29]

其中, $f(z, \bar{z})$ 是 $C\mathcal{S}^2$ 上的任意函数, 而 Y^{+z} 在 $C\mathcal{S}^2$ 上全纯:¹⁶

$$\partial_{\bar{z}} Y^{+z} = 0 \quad (18.4)$$

¹⁶ 就是 \mathcal{S}^2 上的共形 Killing 场之分量

首先来看相对比较简单的 supertranslation, 可以验证, 当 f 取为常函数, 其生成 u 方向的平移, 其它三个方向平移则由 $Y_1^{\{0,\pm 1\}}$ 生成¹⁷。所以下面这四个 f :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad f_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{1 + z\bar{z}}, \quad f_3 = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \quad (18.5)$$

所对应的生成元正好是 Poincaré 群的四个方向平移, 进一步 f 扩展为任意函数, 就变成了所谓 “supertranslation”。在无穷小的 supertranslation 下 N_{zz}, m_B, C_{zz} 的改变可以由下式定量刻画¹⁸:

$$\begin{aligned} \delta_{f^+} N_{zz} &= f^+ \partial_u N_{zz} \\ \delta_{f^+} m_B &= f^+ \partial_u m_B + \frac{1}{4} [N_{zz} D_z^2 f^+ + 2D_z N^{zz} D_z f^+ + c.c.] \\ \delta_{f^+} C_{zz} &= f^+ \partial_u C_{zz} - 2D_z^2 f^+ \end{aligned} \quad (18.6)$$

Minkowski 时空自然渐近平直, 对应的三个参数都为 0, 上式中前两个为 0, 可以解释为换一下坐标系不会改变质量, 也不会产生引力波。但是第三个式子不为 0, 这意味着渐近对称性在 Minkowski 时空中被破缺, 容易验证当且仅当 f 取 18.5 的四个值时, 对应 Poincaré 群的平动, 会让 $\delta_{f^+} C_{zz} = 0$ 。这种对称性的自发破缺实际上意味着经典引力中的真空不唯一, 且存在 Goldstone 粒子 [14]。

再来看 superrotation, 首先注意到 Y^{+z} 全纯, 这意味着其在 $C\mathcal{S}^2$ 上全局解析, 否则在极点处不满足 18.4。这说明 Y^{+z} 只能取为全局共形变换 Möbius 变换形式, 构成 Witt 代数的 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数, 有六个分量, 通常取为:¹⁹

$$\begin{aligned} Y_{12}^{+z} &= -iz, & Y_{13}^{+z} &= \frac{1}{2}(1 + z^2), & Y_{23}^{+z} &= \frac{i}{2}(1 - z^2) \\ Y_{03}^{+z} &= -z, & Y_{01}^{+z} &= \frac{1}{2}(1 - z^2), & Y_{02}^{+z} &= \frac{i}{2}(1 + z^2) \end{aligned}$$

事实上, 这六个函数对应的正是 $SO(3, 1)^\uparrow$ 的六个 boost 和 rotation! 所以 BMS 群的 superrotation 对应的就是 Lorentz 群:

$$BMS = SO(3, 1)^\uparrow \ltimes \text{Supertranslation} \quad (18.7)$$

所以, BMS 群在最初的意义上并没有 superrotation, 只是单纯的 rotation。但是, 文献 [26–28, 30] 指出, 真正的渐近对称性或许应该是下面的所谓 **extended BMS group**:

$$\text{extended BMS} = \text{Superrotation} \ltimes \text{Supertranslation} \quad (18.8)$$

也就是说, 那些 local 的解析函数 Y^{+z} 也应当是渐近对称性, 这样的话, 渐近对称性也变成无限维对称性, superrotation 部分与天球上共形变换一一对应。

在 superrotation 下度规前系数的变换可以写为²⁰:

$$\begin{aligned} \delta_{Y^+} C_{zz} &= \frac{u}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) \partial_u C_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} C_{zz} - \frac{1}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) C_{zz} - u D_z^3 Y^{+z} \\ \delta_{Y^+} N_{zz} &\equiv \partial_u \delta_{Y^+} C_{zz} = \frac{u}{2} (D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}) \partial_u N_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} N_{zz} - D_z^3 Y^{+z} \end{aligned} \quad (18.9)$$

对于 BMS^- , 同样可以进行讨论, 这里仅罗列一些公式:
Supertranslation:

$$\xi_{f^-} = -f^- \partial_v - \frac{1}{r} (D^z f^- \partial_z + D^{\bar{z}} f^- \partial_{\bar{z}}) + D^z D_z f^- \partial_r \quad (18.10)$$

$$\begin{aligned} \delta_{f^-} M_{zz} &= f^- \partial_v M_{zz} \\ \delta_{f^-} D_{zz} &= f^- \partial_v D_{zz} + 2D_z^2 f^- \end{aligned} \quad (18.11)$$

¹⁷ 这里 Y_ℓ^m 指球谐函数

¹⁸ 略去了后面应乘的无穷小参数

¹⁹ 也简记为 Y^z
 $1, z, z^2, i, iz, iz^2$, 是 S^2
global Killing vector 的基底
= 上

²⁰ 这里 $\mathcal{L}_{Y^+} \equiv \mathbf{Y}^+ \cdot \mathbf{D} + 2D_z Y^z$,
这一点可以把 C_{zz} 看作 $(0, 2)$ 张
量场分量, 然后利用 11.1 求李导数
看出

Superrotation:

$$\xi_{Y^-} = \left(1 - \frac{v}{2r}\right) Y^{-z} \partial_z + \frac{v}{2r} D^{\bar{z}} D_z Y^{-z} \partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}(r-v) D_z Y^{-z} \partial_r + \frac{v}{2} D_z Y^{-z} \partial_v + c.c. \quad (18.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{Y^-} D_{zz} &= \frac{v}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) \partial_v D_{zz} + \mathcal{L}_{Y^-} D_{zz} - \frac{1}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) D_{zz} + v D_z^3 Y^{-z} \\ \delta_{Y^-} M_{zz} &\equiv \partial_v \delta_{Y^-} D_{zz} = \frac{v}{2} (D_z Y^{-z} + D_{\bar{z}} Y^{-\bar{z}}) \partial_v M_{zz} + \mathcal{L}_{Y^-} M_{zz} + D_z^3 Y^{-z} \end{aligned} \quad (18.13)$$

文献 [27, 29] 中详细讨论了 \mathfrak{bms}_n 及其中心扩张, $\text{BMS}_{d+2}/\text{CFT}_d$ 对应以及 charge algebra。

SECTION 19

Asymptotic flat spacetime: charges

时空连续对称性会诱导守恒荷, 量子化后变成算符, 是后面 Ward 恒等式的出发点。

SUBSECTION 19.1

Noether theorem

考虑下面的对称变换:²¹

²¹ 场的旋量指标等等被省略了

$$x \rightarrow x', \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x))$$

场的变换一部分是因为场是 Poincaré 群的表示, 所以坐标变换导致场的变换, 另一部分是场位形自己的变换²²。现在考虑由参数 $\{\omega_a\}$ 标记的无穷小变换:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}, \quad \Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}(x).$$

²² 这里对 Noether 定理的讨论基于大黄书 [31], 大黄书的方法最标准且优雅。

下面的式子给出了变换生成元 G_a 的定义:

$$\delta_\omega \Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \Phi(x) \quad (19.1)$$

考虑这个对称变换下作用量的改变:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \int d^d x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_\mu \Phi'(x')) \\ &= \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)), (\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}) \partial_\nu \mathcal{F}(\Phi(x))) \\ &= \int d^d x \left(1 + \partial_\mu (\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}) \right) \mathcal{L} \left(\Phi + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}, \left(\delta_\mu^\nu - \partial_\mu (\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}) \right) \left(\partial_\nu \Phi + \partial_\nu (\omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}) \right) \right) \end{aligned} \quad (19.2)$$

注意到我们谈论对称性是在说作用量变分为 0, ω_a 是一族与坐标无关的参数, 但我们推导过程中可以把他们看作是一族函数, 但是对称变换是指这些函数变成常函数之后要有 $\delta S = 0$ 。所以, 上面的式子最后肯定正比于 $\omega_a(x)$ 的导数, 保留到一阶:

$$\delta \mathcal{S} = - \int d^d x j_a^\mu \partial_\mu \omega_a = \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \omega_a \quad (19.3)$$

其中:

$$j_a^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_i^\mu \mathcal{L} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \quad (19.4)$$

利用这种比较巧妙的思想我们得到了在 $\{\omega_a(x)\}$ 的变换下²³作用量的变换。现在注意到上式是在场平衡位形附近的变分，所以对于在壳的场，必然有式 19.3 对于任意的 $\{\omega_a(x)\}$ 均为 0，即连续对称性给出了守恒流 19.4：

$$\boxed{\partial_\mu j_a^\mu = 0} \quad (19.5)$$

对应的可以定义不随时间变化的守恒荷：

$$Q_a = \int d^{d-1}x j_a^0 \quad (19.6)$$

注意到对守恒流的定义其实可以相差一个反对称张量的偏导：

$$j_a^\mu \rightarrow j_a^\mu + \partial_\nu B_a^{\nu\mu}, \quad B_a^{\nu\mu} = -B_a^{\mu\nu}$$

考虑时空平移对称性：

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Phi} = 0$$

这带来我们熟悉的能动量张量及其守恒律：

$$\boxed{T_c^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \quad (19.7)$$

守恒流的定义可以差个反对称张量偏导数，所以可以将能动量张量对称化：

$$T_B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu}, \quad B^{\rho\mu\nu} = -B^{\mu\rho\nu} \quad (19.8)$$

对于一般的时空变换 $x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu(x)$ ，其实作用量的变换可以用能动量张量写成：²⁴

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_\nu \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} \underbrace{(\partial_\mu \omega_\nu + \partial_\nu \omega_\mu)}_{-\delta g_{\mu\nu} \equiv g(x) - g'(x')} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Big|_{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (19.9)$$

考虑共形变换为对称性，由于 Poincaré 变换是共形变换的一种，所以共形场论中仍有其散度为 0，再考虑伸缩变换 $\omega^\mu = \lambda x^\mu$ ，这将导致共形场论中能动张量无迹 $T^\mu{}_\mu = 0$ 。

量子场论中考虑不改变积分测度 $\mathcal{D}\Phi$ 的对称变换：

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - i\omega_a G_a \Phi(x) \quad (19.10)$$

与上面经典守恒流对应的是真空关联函数²⁵意义下的 Ward-Takahashi 恒等式：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \langle \Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle} \quad (19.11)$$

如果积分测度发生改变，就会出现量子反常 [32]。令 $\mathcal{Y} = \Phi(x_2) \cdots \Phi(x_n)$ ，且 $t = x_1^0$ 是 \mathcal{Y} 中最大的时间。对 Ward-Takahashi 恒等式在 $t_- < t < t_+ \cup \mathbb{R}^3$ 内积分：

$$\langle Q_a(t_+) \Phi(x_1) \mathcal{Y} \rangle - \langle Q_a(t_-) \Phi(x_1) \mathcal{Y} \rangle = -i \langle G_a \Phi(x_1) \mathcal{Y} \rangle \quad (19.12)$$

取极限 $t_- \rightarrow t_+$ ，由于 \mathcal{Y} 是任意的，所以：²⁷

²³ 且 $\{\omega_a\}$ 是常数的时候是对称变换

²⁴ 这本质上就是能动张量的定义，能动张量编码理论在度规发生无穷下变换下的行为。

²⁵ 利用 LSZ 公式把外腿在壳之后就得到了散射振幅

²⁶ 这里的公式和 Srednicki 书中不同，首先是因为 Srednicki 书中 convention 是 $\frac{\delta S}{\delta \varphi} \sim -\partial_\mu j^\mu$ ，比我们在 19.3 中多一个负号。其次是我们这里为了后面讨论二维 CFT 方便，已经将作用量做 Wick 转动，路径积分因子 $e^{iS} \mapsto e^{-S}$ 。这两点共同导致了这一公式形式。

²⁷ 注意这里是在 $j^\mu = T^{\mu\nu} \omega_\nu$ 的 convention 下，不同文献 convention 不同常常会差个负号。另外，不少文献中也会把 $\delta \omega_a$ 吸收进左侧 Q 的定义中，这样右侧就直接是 $\delta \Phi$ 了。

$$[Q_a, \Phi] = -iG_a\Phi = \frac{\delta_\omega \Phi}{\delta\omega_a} \quad (19.13)$$

量子化后，在算符的意义下，守恒荷是对称性的生成元。²⁸

广义相对论那边更多的使用所谓广义 Noether 定理，可以见 [16] 第一章的介绍。

SUBSECTION 19.2

Komar Integral & ADM

广义相对论里面定义守恒荷是一件很难的事情，这里介绍比较初级的理论，利用与电磁理论的对比来定义守恒荷。

利用 Killing 矢量 $K = K^\mu \partial_\mu$ ，可以得到与之对偶的 1-form， $K = K_\mu dx^\mu$ ，进而可以定义二形式 $F \equiv dF$

Lemma 1 (Ricci identity)

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}Z^\rho - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho Z^\sigma \quad (19.14)$$

Theorem 1 上面定义的 F 所满足的方程可以写成非齐次 Maxwell 方程的形式：

$$d \star F = \star j \quad (19.15)$$

其中 j 和物质场能动张量有关，真空 $j = 0$ 。

PROOF 利用 Ricci 恒等式，由于引力无挠：

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)K^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}K^\rho$$

缩并 μ, σ ：

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

最后利用 Killing 方程得到：

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

所以：

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla_\mu K_\nu - \nabla^\mu \nabla_\nu K_\mu = -2\nabla^\mu \nabla_\nu K_\mu = -2R_{\rho\nu}K^\rho$$

引力场方程：

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right)$$

显然，我们已经将 F 满足的方程写成了 19.15 的坐标形式。 \square

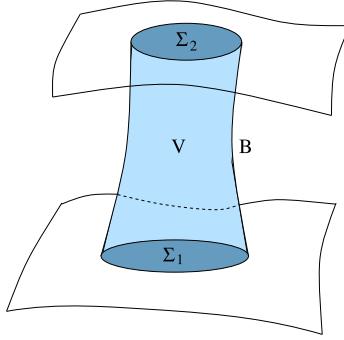
由此可以类比电磁规范理论定义 Komar 荷：

$$Q_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi G} \int_\Sigma d \star F = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} \star F = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} \star dK \quad (19.16)$$

若 Killing 场处处类时，上面的玩意儿我们叫 Komar 质量（能量） M_{Komar} 。下面简要说明一下其守恒的意义。

考虑下图所示的时空子流形：

²⁸ 你去用 ϕ_a, π^a 之间的正则对易关系当然也能得到这一点，比如 Srednicki [33]，只是这里我们是完全用路径积分量子化的方法。



其表示类空超曲面 Σ_1 随时间演化到 Σ_2 扫过的体积，其边界为：

$$\partial V = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup B$$

考虑 $j|_B = 0$ 的情况，这将导致下面的恒等式：

$$Q_e(\Sigma_1) - Q_e(\Sigma_2) = \int_{\Sigma_1} \star J - \int_{\Sigma_2} \star J = \int_{\partial V} \star J = \int_V d \star J = 0 \quad (19.17)$$

也就是随着时间演化，某一区域的荷不变。

Komar 质量依赖于类时 Killing 场的存在性，这对于非稳态时空是不可能的。但是对于渐近平直时空，有一种很好的定义场的总能量的方法。

Definition 1

(ADM 能量) 假设时空间度规为 g ，在某个类空超曲面 Σ 上诱导度规 h ，且这个类空超曲面满足存在某个坐标系 $\{x^i\}$ 使得 $r \rightarrow \infty, h_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(1/r)$ 也就是渐近平直于 Euclid 时空。 S_r^2 是嵌在 Σ 中半径为 r 的球面，则 ADM 能量定义为：

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} d\Omega r^2 \hat{x}^j (\partial_k h_{jk} - \partial_j h_{kk}) \quad (19.18)$$

前面讨论 AFS 时我们强调过，虽然我们在 Bondi gauge 下讨论问题，但是结论都是不依赖于规范的，这里 ADM 能量也不依赖于坐标系 $\{x^i\}$ 的选取，虽然看起来这个定义依赖于坐标系，而且这个定义对于渐近平直的稳态时空，如果取 Σ 渐近正交于类时 Killing 场，则其与 Komar 质量一致。

虽然爱因斯坦场方程对于某一给定度规总能求出解，但是能动张量是否是“物理的”值得思考，对此，人们总结出了下面的三个能动张量要满足的条件。

Definition 2

(弱能量条件) 任意瞬时观者测得的能量密度非负，即要求：

$$T_{ab} u^a u^b \geq 0, \quad \forall \text{类时矢量场 } u^a \quad (19.19)$$

Definition 3

(强能量条件) 这是在证明奇性定理时提出的条件：

$$T_{ab} Z^a Z^b \geq -\frac{1}{2} T, \forall \text{ 单位类时矢量场 } Z^a \quad (19.20)$$

Definition 4

(主能量条件) 本条件要求任一瞬时观者 $\overset{\circ}{(p, Z^a)}$ 测得的 4 动量密度 $W^a \equiv -T^a_b Z^b$ 是指向未来的类时或类光矢量，其物理解释是物质场的能量流动速率小于或等于光速 c 。

^a就是 Z^a 和粒子世界线在 p 处相切，这时在观者参考系下粒子瞬时静止。这个不难理解，自由下落参考

系就是通过测地线指数映射建立的，观者和粒子世界线相切说明相对静止，可做测量。

^b见经典名著 [34]

这三个条件互不蕴含，不要被名字忽悠了。

Theorem 2 (正质量定理 (Schoen&Yau)) 若渐近平直时空没有奇异性，且物质能动张量满足主能量条件，则其 ADM 质量大于或等于零。当且仅当为闵氏时空时等于零。^a

^a值得注意的是，教皇 Witten 找到了更简单的证明 [35, 36]。

SUBSECTION 19.3

Scattering problem

前面使用几何学和动力学给出了 \mathcal{I}^\pm 上的度规约束，为了完整的解出各个参数，我们需要一些 initial data²⁹。在此，有必要先明确一下我们所考虑的一类时空，它们是所谓 C-K 时空 [38, 39]，特点是在 i^\pm 都是真空，这给出了下面的渐近条件：

$$N_{zz} = \mathcal{O}(|u|^{-(1+\varepsilon)}), \quad \varepsilon > 0$$

为了让 Wyle 张量在 \mathcal{I}_+^+ 上归零，这要求 [16, 40]：

$$C_{zz}|_{\mathcal{I}_+^+} = -2D_z^2 \bar{C}|_{\mathcal{I}_+^+} \quad (19.21)$$

其中 $C(z, \bar{z})$ 是 \mathcal{S}^2 上的任意函数，称为 Supertranslation memory field。BMS 相关的文献符号不是太统一，本 part 后面内容的讨论我们在 17.5 的约定下干活，对应的我们还有如下不同于前文的符号约定：

$$\begin{aligned} T_{uu} &\equiv \frac{1}{4} N_{zz} N^{zz} + 4\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} [r^2 T_{uu}^M] \\ T_{uz} &\equiv 8\pi G \lim_{r \rightarrow \infty} [r^2 T_{uz}^M] - \frac{1}{4} \partial_z (C_{zz} N^{zz}) - \frac{1}{2} C_{zz} D_z N^{zz} \end{aligned} \quad (19.22)$$

对应的约束条件变为：³⁰

³⁰ 格外注意 N_z 的区别

$$\begin{aligned} \partial_u N_z &= \frac{1}{4} \partial_z (D_z^2 C^{zz} - D_{\bar{z}}^2 C^{\bar{z}\bar{z}}) - u \partial_u \partial_z m_B - T_{uz} \\ \partial_u m_B &= \frac{1}{4} [D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}] - T_{uu} \end{aligned} \quad (19.23)$$

从约束条件以及 $N^{zz} \equiv \partial_u C^{zz}$ 就可以看出 initial data 为：

$$\{N_{zz}(u, z, \bar{z}), C(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^+}, m_B^+(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^+}, N_z^-|_{\mathcal{I}_-^+}, \dots\} \quad (19.24)$$

后面的 … 表示当我们考虑度规中的更高阶项时需要加入的 initial data。对于 \mathcal{I}^- 类似分析可以得到 initial data：

$$\{M_{zz}(u, z, \bar{z}), D(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+}, m_B^-(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+}, N_z^-|_{\mathcal{I}_+^-}, \dots\} \quad (19.25)$$

经典引力理论的散射问题就是在找 \mathcal{I}^+ 上的 Cauchy data 到 \mathcal{I}^- 上的 Cauchy data 的映射。不过上面的 initial data 还无法完全使得此问题 well-define，文献 [40] 从 Lorentz 和 CPT 不变性的要求出发，认为需要加入下面的对称认同假设来构成散射问题的全部：

$$C(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = D(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-}, \quad m_B^+(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = m_B^-(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-}. \quad (19.26)$$

²⁹ 关于 initial data 的更多讨论，以及引力理论为啥是个 Cauchy 问题的细节证明可见 [37]§10

同样也要求 [22]:

$$N_z^+(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^+} = N_z^-(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^-} \quad (19.27)$$

这些式子也使得 $BMS^+ \times BMS^-$ 联合变换限制为一个子群, 称为 \mathcal{X} 变换 [22], 要求:

$$f^+(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^+} = f^-(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^-}, \quad Y^{+z}|_{\mathcal{I}_+^+} = Y^{-z}|_{\mathcal{I}_-^-} \quad (19.28)$$

所以后面我们不再区分 $N_z^\pm, f^\pm, Y^\pm, m_B^\pm, \{C^{zz}, D^{zz}\}, \{M^{zz}, N^{zz}\}$, 用统一的符号书写, 而且在 \mathcal{I}_\mp^\pm 上对径认同。在 QED 中, 这种对径认同也是存在的, 而且可以很自然地导出。

SUBSECTION 19.4

BMS charges

完全可以从广相的角度去推出守恒荷, 但是那太麻烦, 这里直接从对径认同的条件导出守恒荷。

首先是 supertranslation 对应的守恒荷:³¹

$$Q_f^+ \equiv \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^+} d^2 z \gamma_{z\bar{z}} f m_B = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_-^-} d^2 z \gamma_{z\bar{z}} f m_B \equiv Q_f^- \quad (19.29)$$

³¹ 这里的 $d^2 z \gamma_{z\bar{z}}$ 其实就是 \mathcal{S}^2 上的测度 $d^2 z \sqrt{\gamma}$

利用 Stokes 等式, $\partial \mathcal{I}^+ = \mathcal{I}_-^+ \cup \mathcal{I}_+^-$, 设 $m_B|_{\mathcal{I}_+^+} \rightarrow 0$ 并利用前面的约束方程, 得到:

$$\begin{aligned} Q_f^+ &= \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^+} du d^2 z \gamma_{z\bar{z}} f \left[T_{uu} - \frac{1}{4} (D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}) \right] \\ Q_f^- &= \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_-^-} dv d^2 z \gamma_{z\bar{z}} f \left[T_{vv} + \frac{1}{4} (D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}) \right] \end{aligned} \quad (19.30)$$

然后再是 superrotation 部分:

$$Q_Y^+ \equiv \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^+} d^2 z (Y_{\bar{z}} N_z + Y_z N_{\bar{z}}) = \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{I}_-^-} d^2 z (Y_{\bar{z}} N_z + Y_z N_{\bar{z}}) \equiv Q_Y^- \quad (19.31)$$

如果 Y^z 取为 \mathcal{S}^2 上共形 Killing 场的那六个分量, 上式在说明 AMD 角动量和 BORT center-of-mass³² 的守恒律。依旧是利用 Stokes 方程:

$$\begin{aligned} Q_Y^+ &= Q_H^+ + Q_S^+, \\ Q_S^+ &= -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^+} du d^2 z [D_z^3 Y^z u N_{\bar{z}} + D_{\bar{z}}^3 Y^{\bar{z}} u N_z], \\ Q_H^+ &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^+} du d^2 z (Y_{\bar{z}} T_{uz} + Y_z T_{u\bar{z}} + u \partial_z Y_{\bar{z}} T_{uu} + u \partial_{\bar{z}} Y_z T_{uu}) \end{aligned} \quad (19.32)$$

³² 可以见文献 [41] 中的定义

³³ 与文献 [21] 中的形式稍有不同, 注意到 $\gamma_{z\bar{z}} D_z Y^z = \partial_z Y_{\bar{z}}$ 可以证明等价性

我们到后面再聊它们的确 Supertranslations 和 Suprrotations 的生成元。

SECTION 20

Review on the quantization of gravity

本节采用 [42] 中的记号简要回顾引力量子化以及树图顶点项。众所周知微扰量子引力是不可重整化的，所以只能看作是一个有效理论，但好就好在它的低能极限是可以用计算引力波振幅的 [43–45]。

取自由引力场拉式量为：

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{-g} R, \quad \kappa = \sqrt{32\pi G} \quad (20.1)$$

然后在平直度规附近做微扰：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (20.2)$$

代入到 \mathcal{L}_{EH} 进行计算得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} = & \partial_\alpha h \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \partial_\alpha h_{\beta\gamma} \partial^\beta h^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} (\partial_\alpha h)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\gamma h_{\alpha\beta})^2 \\ & + \text{total derivatives} + \mathcal{O}(\kappa, h^3). \end{aligned} \quad (20.3)$$

其中 $h \equiv h_\alpha^\alpha$ 。这一堆都是 $(\partial h)^2$ 项，对应动能项，显然由于没有 h^2 项，所以引力子质量为 0。后面的高阶项意味着引力子之间是有自相互作用的。

由于广义相对论是微分同胚不变的，所以他其实也是个规范理论，不同的坐标系就意味着不同的规范，度规分量的变换正对应于场的规范变换。那么我们对 $h_{\mu\nu}$ 进行路径积分时就必须在规范下进行，这可以使用 F-P 鬼场方法来系统的处理。比较常用的规范选取是下面的 de-Donder 规范：

$$G_\mu \equiv \partial^\nu h_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\mu h = 0 \quad (20.4)$$

这导致规范固定项：

$$\mathcal{L}_{GF} = G_\mu G^\mu = \partial^\nu h_{\mu\nu} \partial^\rho h^\mu_\rho + \frac{1}{4} (\partial_\mu h)^2 - \partial^\nu h_{\mu\nu} \partial^\mu h \quad (20.5)$$

以及鬼场：

$$\mathcal{L}_{GH} = -\bar{b}^\mu \left(\kappa \frac{\delta G_\mu}{\delta \xi^\nu} \right) b^\nu \quad (20.6)$$

de-Donder 规范下：

$$\kappa \frac{\delta G_\mu}{\delta \xi^\nu} = \eta_{\mu\nu} \partial^2 + \kappa [\partial^\rho h_{\mu\nu} \partial_\rho + \partial^\rho h_{\nu\rho} \partial_\mu + \partial^\rho (\partial_\nu h_{\mu\rho}) - \partial_\mu h_{\nu\rho} \partial^\rho - \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu h)] \quad (20.7)$$

进行路径积分时，就不必再考虑规范，取而代之 $\mathcal{L}_{EH} \mapsto \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{GH}$ ，由于树图

鬼场无贡献，所以这里只考虑前两项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{EH}}|_{h^2} + \mathcal{L}_{\text{GF}} &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial^2 h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}h\partial^2 h \\ &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\underbrace{\left[\eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\delta)\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\right]}_{I^{\alpha\beta,\gamma\delta}}\partial^2 h_{\gamma\delta}\end{aligned}\quad (20.8)$$

给出费曼图顶点和传播子项：

$$\alpha\beta \text{ 顶点 } \gamma\delta = \frac{iP_{\alpha\beta,\gamma\delta}}{p^2 - i0^+} \quad \text{with} \quad P_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \eta_{\alpha(\gamma}\eta_{\delta)\beta} - \frac{1}{D-2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} \quad (20.9)$$

其中 $I^{\alpha\beta,\gamma\delta}P_{\gamma\delta,\rho\kappa} = \delta_{(\rho}^\alpha\delta_{\kappa)}^\beta$ 。高阶自相互作用顶点可以在 [46] 中找到。

引力子自旋为 2，但由于规范的限制，其仍然如光子一样只有两个独立的极化矢量（张量），对应引力波的两种偏振模式，只不过这个时候其实是个二阶对称极化张量。满足下面的条件：

$$p_\mu\epsilon_{++/-/-}^{\mu\nu}(p) = 0, \quad \eta_{\mu\nu}\epsilon_{++/-/-}^{\mu\nu}(p) = 0 \quad (20.10)$$

利用光子的极化矢量，可以构造出一组非常方便的 $\epsilon_{++/-/-}^{\mu\nu}$ 选取：

$$\epsilon_{\pm\pm}^{\mu\nu} = \epsilon_\pm^\mu\epsilon_\pm^\nu \quad (20.11)$$

现在考虑引力场与其他场的耦合，耦合项拉式量为：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (20.12)$$

这里 $T_{\mu\nu}$ 是场的能动张量，可以使用下式进行计算：¹

$$T_{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (20.13)$$

S_M 是物质场的作用量，但是在弯曲时空中的，可以使用最小耦合方法得到²。以自旋为 0 对应的实标量场为例。

$$S_M = \int d^4x\sqrt{-\eta}\left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right) \quad (20.14)$$

这里我们把所有暗含 η 的地方都显式的写出来了，弯曲时空中的作用量只需要将 $\eta \mapsto g, \partial \mapsto \nabla$ 即可，得到：

$$\tilde{S}_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right) \quad (20.15)$$

当然，对称性允许我们在后面添加正比于 Ricci 标量的项等等，但所谓我们要的就是“最小”耦合。不过在微扰引力框架下，我们其实只需要利用 20.14 对 η 求变分导数就好了，对于无质量的自由标量场（对应不动点处的理论），我们得到³：

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi \quad (20.16)$$

¹ 平直时空中能动张量是根据 Poincaré 不变性引入的 Noether current，可以说明（见 19.9）实际上等价于

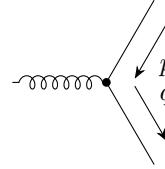
$$T_{\mu\nu}|_{\text{flat}} = -2\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\Big|_{g^{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$$

GR 里面的能动张量就是这个的推广。

² 玻色场可以这么做，费米场复杂些

³ 实际上，考虑弯曲背景时空之后，多出了一些可重整的项可以加入到作用量中，比如 $R\phi$ ，对于平直时空 $R = 0$ ，这一项不用考虑

对应的顶点项为:



$$\text{wavy line} \rightarrow \begin{cases} p \\ q \end{cases} = i\kappa p_\mu q^\nu + \text{正比于 } \eta_{\mu\nu} \text{ 的项} \quad (20.17)$$

SECTION 21

Soft theorem from feynman diagrams

所谓软粒子，指的就是动量趋于 0 的无质量粒子，因为无质量 $E = cp$ ，所以能量也会趋于 0，任意过程都会辐射出期望值为无限多个的软粒子。本节使用费曼图方法讨论辐射软粒子的振幅修正 [47]。

首先考虑辐射一个软光子，理论背景为旋量 QED，散射过程为 $ne^- \rightarrow me^- + \gamma$ ，注意考虑的是一般的旋量 QED，可以有不同味的电子，电荷为 Q_i 。这里考虑的是电子，正电子的讨论也类似，最终结论是一样的。

辐射软光子可以从入射外线辐射，也可以从出射外线辐射，还可以从内线辐射：

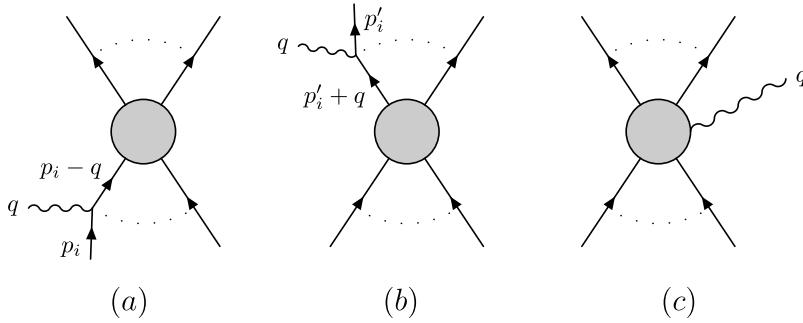


图 7. 辐射软光子的三种情况

我们使用 $\mathcal{A}(p, q)$ 表示辐射一个软光子后的振幅 $\mathcal{A}(p)$ 表示没有辐射软光子的振幅（所有阶费曼图求和）。用 $T(p_i - q)$ 表示原先没有辐射软光子的费曼图砍掉一个 p_i 外线但保留外线动量为非在壳的 $p_i - q$ 得到的费曼图振幅，显然 $T(p_i)u(p_i) = \mathcal{A}(p)$ 。

首先计算入射外线辐射软光子：

$$Q_i T(p_i - q) \frac{(-\not{p}'_i + \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2} u(p_i) = -Q_i T(p_i - q) \left[\frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q^\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i + i0^+} \right] u(p_i) \quad (21.1)$$

其中利用了 $\not{a}\not{b} = -2a \cdot b - \not{b}\not{a}$, $q \cdot \epsilon_\pm(q) = 0$ 以及狄拉克方程 $(\not{p} + m)u(p) = 0$ 。其中 $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 。唯一做近似的地方就是分母里面的 q^2 我们略去了，这对后面的高阶修正也不会影响。这一注意到 $q = 0$ 实际上是一个极点，这是因为在光子无线“软”的时候，多出来的那条内线传播子会无线趋于在壳，导致分母为 0。

对于出射粒子辐射软光子也是类似的计算得到：

$$Q'_i \bar{u}(p'_i) \frac{(-\not{p}'_i - \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2} \bar{T}(p_i + q) = Q'_i \bar{u}(p'_i) \left[\frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q^\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i - i0^+} \right] \bar{T}(p_i - q) \quad (21.2)$$

至于内线发射光子，我们用 $N^\mu(p, q)$ 表示，而且注意到 $q \rightarrow 0$ 时 N 非奇异，而且内线本身就是不在壳的，所以可以认为 $N^\mu(p, q) \sim \mathcal{O}(q^0)$ 。三项加起来得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p, p', q) = & \sum_{\text{incoming}} -Q_i T(p_i - q) \frac{\epsilon(q) \cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p_i + i0^+} u(p_i) \\ & + \sum_{\text{outgoing}} Q'_i \bar{u}(p'_i) \frac{\epsilon(q) \cdot p'_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q \cdot p'_i - i0^+} \bar{T}(p'_i + q) \\ & + \epsilon(q)_\mu N^\mu(p, p', q) \end{aligned} \quad (21.3)$$

考虑最低阶修正，也就是只保留极点，得到：

$$\boxed{\mathcal{A}(p, q) = \left[\sum_i \eta_i Q_i \frac{\epsilon(q) \cdot p_i}{q \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(1)} \quad (21.4)$$

其中对于入射粒子 $\eta_i = -1$ ，出射粒子为 $+1$ 。QED 中辐射出光子的振幅都可以拆分成 $\epsilon(q)_\mu \mathcal{M}^\mu$ ，振幅是相对论不变量，但是我们虽然常说 $\epsilon(q)_\mu$ 是极化矢量，但它并不是真正意义上的矢量，因为其在 Lorentz 变换下并不协变，而是会多出来一个正比于 q 的项⁴[1]。为了让振幅是相对论不变量，必须有：

$$\boxed{q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0} \quad (21.5)$$

⁴ 我们是在 Lorentz 变换的意义下理解，其实矢量的这种变换完全可以理解为规范选取不同，从而从振幅的规范不变性导出结果。[33]

也就是 Ward 恒等式，也可以从 Ward-高桥恒等式在 U(1) 对称性下导出它，实际上也就是利用电荷守恒导出它，但是前面我们的导出仅仅依赖于 Lorentz 不变性。现在把 21.4 中的 $\epsilon(q)$ 替换为 q 我们得到：

$$\boxed{\left[\sum_i \eta_i Q_i \right] \mathcal{A}(p) = 0} \quad (21.6)$$

也就是说，如果散射过程不被禁闭，也就是 $\mathcal{A}(p) \neq 0$ ，那么这个过程必然要电荷守恒！另外说一句，我们这里的推导得到的 21.4 对于任意自旋的场都适用，比如对于标量 QED，只需要把 $S^{\mu\nu}$ 替换为 0 就好，不同的自旋对应 $S^{\mu\nu}$ 的不同表示。

现在继续考虑两个光子的情况，两个光子由不同外线发射，在最低阶近似下只是乘上了 21.4 中两个因子，但是由相同外线发射就要考虑发射的先后顺序，因子形式会变化：

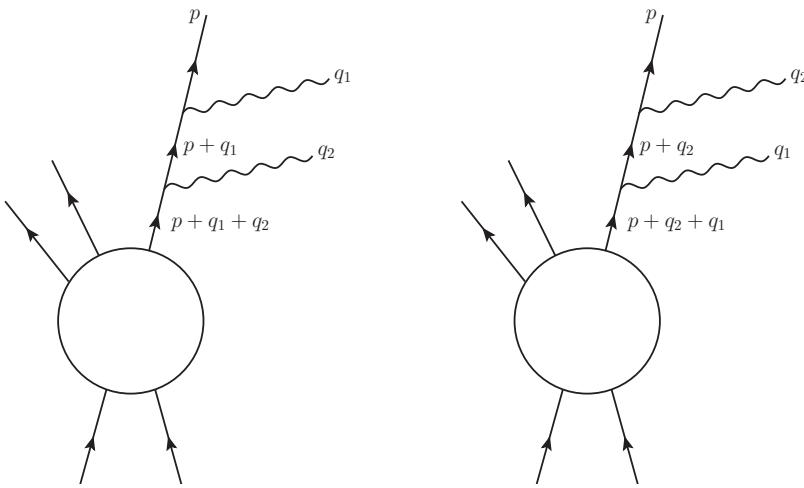


图 8. 同一外线辐射两个软光子

把两幅图贡献的因子加起来得到:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot q_1 - i\eta 0^+} \right] \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot (q_2 + q_1) - i\eta 0^+} \right] + \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot q_2 - i\eta 0^+} \right] \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta 0^+} \right] \\ &= \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1) \cdot p}{p \cdot q_1 - i\eta 0^+} \right] \left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2) \cdot p}{p \cdot q_2 - i\eta 0^+} \right] \end{aligned} \quad (21.7)$$

得到的结果就是不同外腿上面的辐射两个软光子得到的因子, 利用数学归纳法可以证明这一结论对于辐射任意数量的软光子都是适用的, 那么最终我们只需要把因子乘起来, 然后对所有外腿求和就好了, 用式子表示如下:

$$\boxed{\mathcal{A}(p, q_1, \dots, q_m) = \prod_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n Q_i \eta_i \frac{\epsilon(q_j) \cdot p_i}{q_j \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + +\mathcal{O}(1)} \quad (21.8)$$

前面的因子称为 **eikonal 因子**。推广到 non-Abelian Y-M 场的软定理也早有人计算过了 [48–51], 软定理更多更一般的推广见 [47] 的文献索引。

现在来考虑辐射一个软引力子的情况, 考虑第一节引入的标量场模型, 传播子为:

$$-\frac{i}{(p + \eta q)^2 + m^2} \quad (21.9)$$

顶点由 21.2 给出, 但是由于 20.16, 要与 $\epsilon^{\mu\nu}$ 缩并, 正比于 $\eta_{\mu\nu}$ 的项没有贡献。以出射外线辐射软引力子为例, 给出因子:

$$i\sqrt{32\pi G} \epsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \frac{-i}{(p + q)^2 + m^2} \rightarrow \sqrt{8\pi G} \frac{\epsilon^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{p \cdot q} \quad (21.10)$$

求和后得到:

$$\boxed{\mathcal{A}(p, q) = \left[\sum_i \frac{\kappa_i}{2} \eta_i \frac{\epsilon_{\mu\nu}(q) p_i^\mu p_i^\nu}{q \cdot p_i} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(1)} \quad (21.11)$$

引力子同样有类似于 21.5 的恒等式, 由此我们可以得到所有的 κ_i 都是相等的⁵, 也就是等效原理! 而自旋大于二的软粒子的软定理沿用上面的方法给出的限制就太强了, 以至于散射 \mathcal{S} 矩阵必须 trivial, 所以一般认为自旋大于二的无质量粒子在“变软”的时候就脱耦合了。

⁵ 这里有点循环论证了, 因为前面为了推导的方便我们同一取 $\kappa_i = \sqrt{32\pi G}$

SECTION 22

Subleading and subsubleading order soft theorem

考虑动量为 $\delta q, \delta \rightarrow 0$ 的软光子辐射, \pm 表示软光子的螺旋度, 而 ℓ_i 表示其它粒子的螺旋度, 则更一般的软定理可以用洛朗展开写成:

$$\mathcal{A}_{\ell_1, \dots, \ell_n, \pm}(p, \delta q) = \left[\sum_{a=0}^{\infty} \delta^{-1+a} S_{\pm}^{(a)} \right] \mathcal{A}_{\ell_1, \dots, \ell_n}(p) \quad (22.1)$$

次领头阶的计算可以从 21.5 式出发, 将 21.3 中所有的 ϵ 替换为动量, 保留到 $\mathcal{O}(\delta^0)$, 并且令等式左边为 0。注意到这一阶近似下可以有 $N^\mu(p, q) \approx N^\mu(p, 0)$, 得到:

$$-q^\mu N_\mu(p, 0) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \eta_i Q_i \mathcal{A}(p) + q^\mu \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \mathcal{A}(p) \quad (22.2)$$

其中第一项为 0 是因为电荷守恒 21.6，第二项中的 ∂_{p_i} 只作用于 \mathcal{A} 中的 T ，不作用于 u^6 。这样就确定出了 $N^{\mu}{}^7$ ，再带回到 21.3 得到：

$$A^\mu = \sum_{i=1}^n Q_i \left[\frac{\eta_i p_i^\mu}{\delta q \cdot p_i} + \frac{q^\nu p_i^\mu}{q \cdot p_i} \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - \frac{i q_\nu S_i^{\mu\nu}}{q \cdot p_i} - \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} \right] \mathcal{A}(p) + \mathcal{O}(\delta) \quad (22.3)$$

这个式子里面的 ∂_{p_i} 就是作用于整个 \mathcal{A} 了。定义：

$$L_i^{\mu\nu} = i \left(p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_{i\nu}} - p_i^\nu \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} \right), \quad J_i^{\mu\nu} + S_i^{\mu\nu} \quad (22.4)$$

这里 $S_i^{\mu\nu}$ 要根据第 i 个粒子的自旋去选取对应的 Lorentz 群不可约表示，比如 $s=0, S^{\mu\nu}=0; s=\frac{1}{2}, S^{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 。这样我们就得到了包含 subleading 修正的软定理 (LBK 定理 [52, 53])：

$$S_\pm^{(0)} = \sum_{i=1}^n Q_i \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu}(q) p_i^\mu}{q \cdot p_i}, \quad \text{and} \quad S_\pm^{(1)} = -i \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\epsilon_{\pm\mu}(q) q_\nu J_i^{\mu\nu}}{q \cdot p_i} \quad (22.5)$$

同样的方法可以推导出软引力子定理的 subleading 和 subsubleading 的修正项⁸[55–58]：

$$\begin{aligned} S_\pm^{(0)} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) p_i^\mu p_i^\nu}{q \cdot p_i}, \quad S_\pm^{(1)} = -i \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) p_i^\mu q_\lambda J_i^{\nu\lambda}}{q \cdot p_i}, \\ S_\pm^{(2)} &= -\frac{\kappa}{4} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q) q_\rho q_\sigma J_i^{\mu\rho} J_i^{\nu\sigma}}{q \cdot p_i} \end{aligned} \quad (22.6)$$

SECTION 23

Infrared divergence

QED 中软光子的产生是不需要能隙的，所以看起来任意的 QED 散射过程都需要无穷多的软光子进行修正，这一节来处理这个问题，我们会看到实软光子的辐射修正和虚软光子的圈图修正会精确地抵消。

在 Wilson 的有效场论框架下，重整化被理解为在路径积分中先积掉理论的 UV 和 IR 能标，带来 Λ 和 Λ' 两个截断能标，这样路径积分圈图中内线的积分上下限就变成 $\Lambda \sim \Lambda'$ ，自然也就有限。重整化后的场论就是在 $\Lambda \sim \Lambda'$ 能标上的有效理论，从实践上看，我们自然想把 Λ' 推导无穷大，重整化群理论告诉我们这仅仅只是将拉式量里面的重整化参数变成无穷大了而已，也就是用无穷大抵消无穷大，能这样做的理论就是可重整化的，是紫外有限的。一般的场论教科书并不太关注红外有限，通常我们就直接把 Λ 外推到 0 了，就像是我们已经先验的知道理论肯定红外有限，计算结果上看也确实是这样，毕竟红外修正是比较 trivial 的事情。现在我们来具体细致分析一下红外发散是如何产生的，又是如何消除的。

紫外发散来源于圈图积分时高能标自由度部分，那么红外发散也就理应当来源于低能自由度的圈图积分，所以下面我们来单独计算一下圈图的红外积分部分，单独看看红外发散⁹。依旧是考虑任何一个 QED 散射过程，相当于现在我们要考虑外腿之间传递任意数量的虚软光子的修正，所谓虚，表示不在壳，所谓软，表示圈图积分时从 $\lambda \sim \Lambda$ ，这里 λ 会在最后趋近于 0， Λ 来标记“软”到什么程度才是软粒子。用 M_Λ 表示只积分 $|p^0| > \Lambda$ 的硬自由度后的振幅， M_λ 表示虚软光子修正后的振幅。把虚软光子看作是一个外腿辐射 q 的软光子，而另外一个外腿辐射 $-q$ 的软光子，这样就可以利用前面的软定理的结论，发现最终的修正只是多了一个因子：

$$J_{mn} \equiv \int_{\lambda < |\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - i0^+} \cdot \frac{\eta_m Q_m p_m^\mu}{p_m \cdot (-q) - i\eta_m 0^+} \cdot \frac{\eta_n Q_n p_n^\nu}{p_n \cdot (q) - i\eta_n 0^+} \quad (23.1)$$

⁶ 因为这个式子的导出，是对 $T(p \pm q)$ 展开得到的。

⁷ 其实只能确定到某个与 q 无关的矢量 v ，满足 $q \cdot v = 0$ ，但是这样的 v 实际上不存在。

⁸ 软定理已经使用不同的方法推了很多遍，文献 [47, 54] 中有不同证明方法的文献索引，而且还有对于更复杂的非阿贝尔规范理论的软定理讨论。

⁹ 一般场论教科书里面做重整化当然是直接红外紫外打包处理，我们这里相当于只算红外部分，抽出红外效应看看

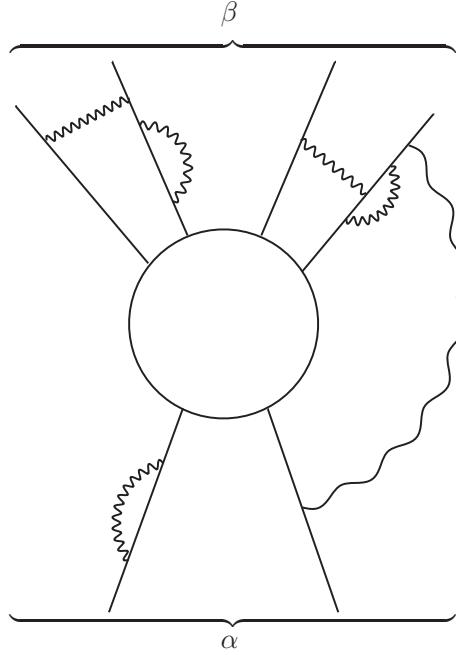


图 9. 虚软光子辐射修正

这里光子的传播子选取了费曼规范。考虑 N 个虚光子的辐射修正，需要对 m, n 对于所有可能的外线进行求和，光子线置换和光子线两端求和会引入重复，所以还需要除以 $N!2^N$ 因子：

$$M_\lambda = M_\Lambda \cdot \frac{1}{N!2^N} \left(\sum_{n,m} J_{nm} \right)^N = M_\Lambda \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{n,m} J_{nm} \right] \quad (23.2)$$

将 J_{mn} 中的 $\frac{Q_n Q_m \eta_n \eta_m}{(2\pi)^4}$ 抽离出来，剩下的积分部分记为 K_{mn} ，可以利用留数定理先计算 q^0 部分的积分：

$$K_{nm} = \begin{cases} -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)}, & \eta_n = -\eta_m = \pm 1 \\ -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} - \frac{4i\pi^3}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right), & \eta_n = \eta_m = \pm 1 \end{cases} \quad (23.3)$$

其中

$$\beta_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{m_n^2 m_m^2}{(p_n \cdot p_m)^2}}$$

这导致虚软光子修正的相因子对数发散，但我们最后实际可观测量是散射振幅的模方，所以最后这个虚数因子无关紧要，我们只需要关注 K_{nm} 的实部，可以统一的写为：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} K_{mn} &= -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} \\ &= \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (23.4)$$

Remark | 考虑非相对论量子力学中的散射问题时，需要求解径向波函数 $R_\ell \equiv u_\ell$ ：

$$\left| -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar}{2mr^2} \right] u_\ell = E_n u_\ell \right.$$

极点为：	
$q^0 = \frac{\mathbf{p}_m}{p_m^0} \cdot \mathbf{q} + i\eta_m 0^+$	$q^0 = \mathbf{q} - i0^+$
$q^0 = \frac{\mathbf{p}_n}{p_n^0} \cdot \mathbf{q} - i\eta_n 0^+$	$q^0 = - \mathbf{q} + i0^+$

如果考虑 $V(r) \propto \frac{1}{r}$ 的库伦散射，径向波函数的相因子并不是球面波的形式，也会出现对数发散：

$$R_\ell(r) \sim \frac{\exp(ipr - i\nu \ln r)}{r}$$

所以这里讨论的问题实际上时这个发散的相对论版本，非相对论版本的详尽分析见 [59]。

将上式代入到振幅的模方表达式得到可观测量跃迁速率的修正：

$$\Gamma_\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^A \Gamma_\Lambda \quad (23.5)$$

其中：¹⁰

$$A = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{Q_n Q_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right) = -\frac{Q^2}{8\pi^2} \left[4 - \frac{2}{\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right] \quad (23.6)$$

¹⁰ 利用了

$$\beta_{nm} = \begin{cases} 0, & \eta_n \eta_m = +1 \\ \beta \in (0, 1), & \eta_n \eta_m = -1 \end{cases}$$

Q 是总电荷量。上式说明 A 总是大于 0 的，所以当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，会导致 $\Gamma_\lambda \rightarrow 0$ ，这意味着，考虑了虚软光子的修正之后，红外发散体现为 QED 中所有的过程都不可能发生！跃迁速率都是 0！而这显然是不合常理的，这个发散会通过引入软光子辐射来消除，因为任意过程不但会在外腿之间传递任意数量的虚软光子，还会辐射出任意数量的，不可探测的实软光子。

根据前面的软定理，取模方并对螺旋度求和之后得到跃迁速率，然后再乘上相空间体积元， $\prod_{r=1}^N \frac{d^3 q_r}{(2\pi)^3 (2|\mathbf{q}_r|)}$ ，得到辐射 N 个软光子到动量空间体积微元的微分速率：

$$d\Gamma_\lambda(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \Gamma_\lambda \prod_{r=1}^N \frac{d^3 q_r}{(2\pi)^3 (2|\mathbf{q}_r|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m Q_n Q_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)} \quad (23.7)$$

由于我们不可能分辨出能量无限低的软光子，所以我们测量到的跃迁速率应当是将那些所有可能的软光子发射位形积分之后得到的总的 $\Gamma_\lambda(E, E_T)$ ¹¹，这里 E 表示不可观测的软光子的能量都小于 E ，这里的 E_T 表示不管不可观测的软光子被辐射了多少，最终总的软光子能量都小于 E_T 。首先对软光子动量方向积分：

$$d\Gamma_\lambda(\omega_1 \dots \omega_N) = \Gamma_\lambda A^N \frac{d\omega_1}{\omega_1} \dots \frac{d\omega_N}{\omega_N} \quad (23.8)$$

¹¹ 只要是我们看不到的过程，都要积分积掉！就像是在找边缘概率分布一样。

这里 A 就是 23.6。然后是对所有的软光子辐射数目可能求和，也就是对 N 求和，还要对软光子的能量积分，上限已经由 E, E_T 确定，下限同虚软光子一样是 λ ，最后将这个跑动参数定为 0，后面将看到发散会抵消，理论不依赖于 λ 能标。

$$\Gamma_\lambda(E, E_T) = \Gamma_\lambda \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^N \frac{d\omega_r}{\omega_r} \quad (23.9)$$

引入阶跃函数：

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp \left(iu \sum_r \omega_r \right) \quad (23.10)$$

可以将 $\Gamma_\lambda(E, E_T)$ 中积分简化为：

$$\Gamma_\lambda(E, E_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp \left(A \int_{\lambda}^E \frac{d\omega}{\omega} e^{i\omega u} \right) \Gamma_\lambda \quad (23.11)$$

指数中的积分可以通过写成 $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$ 与 $1/\omega$ 的积分之和, 得到:

$$\Gamma_\lambda(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A) \left(\frac{E}{\lambda} \right)^A \Gamma_\lambda \quad (23.12)$$

其中: ¹²

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x; A) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp \left(A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1) \right) \\ &= 1 - \frac{A^2 \theta(x - \frac{1}{2})}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \ln \left(\frac{x}{1-\omega} \right) + \dots \end{aligned} \quad (23.13)$$

¹² 作了换元 $u \rightarrow u/E_T, \omega \rightarrow E_T \omega$

如果 $E/E_T \approx 1, A \ll 1$, 则:

$$\mathcal{F}(1; A) \simeq 1 - \frac{1}{12} \pi^2 A^2 + \dots \rightarrow 1 \quad (23.14)$$

然后注意到 23.5, 最终得到红外修正为:

$$\Gamma_\lambda(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A) \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^A \Gamma_\Lambda \quad (23.15)$$

仅仅只是一个接近于 1 的因子, 实际的计算上, 我们使用费曼图计算 Γ_Λ 时圈积分在 Λ 以上做, 而理论本身肯定与这个“软”能标的选取无关的, 所以实际计算上可以自由地选取 Λ , 使得 $\mathcal{F} \rightarrow 1, A \ll 1$, 这样会使得前面的修正因子非常趋近于 1, 这样我们只需要计算来源于费曼图的 Γ_Λ 低阶贡献就能非常精确地得到 $\Gamma_\lambda(E, E_T)$ 的近似结果。

软引力子的红外发散抵消也可以类似的分析 [60], 非软粒子引起的一般的红外发散的处理参见 [1]§13。

SECTION 24

Massless QED

本章用天球的视角来看 QED 理论, 为下一节做准备, 本节的讨论都局限于比较简单的, 不含磁荷而且电子没有质量的 QED 理论, 但是基于此推出的许多结论实际上是普适的, 可以推广到有质量 QED 上 [14]。

SUBSECTION 24.1

Classical

弯曲时空中 QED 作用量:

$$S_{EM} = -\frac{1}{2e^2} \int F \wedge \star F + S_M = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + S_M \quad (24.1)$$

其中 S_M 由 $j^\nu A_\nu$ 形式给出相互作用项, 即 $j^\nu = -\frac{\delta S_M}{\delta A^\nu}$ 。Maxwell 场方程有下面简洁形式:

$$\begin{cases} dF = 0 & \Rightarrow \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \\ d\star F = e^2 \star j & \Rightarrow \nabla_\mu F_{\mu\nu} = e^2 j_\nu \end{cases} \quad (24.2)$$

下式给出了整个空间内的净电荷/磁荷¹³:

$$Q_E = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{S}_\infty^2} \star F = \int_{\Sigma} \star j, \quad Q_M = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}_\infty^2} F \quad (24.3)$$

¹³ 后文 $\star, *$ 指的都是 Hodge dual

它们是量子化的，只能取整数。QED 是 $U(1)$ 规范理论，在 $A \mapsto A + d\varepsilon$ 的规范变换下理论不变，后文不加说明都在所谓 **retarded radial** 规范下进行计算 [61, 62]：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^+ : A_r &= 0, & A_u|_{\mathcal{I}^+} &= 0 \\ \mathcal{I}^- : A_r &= 0, & A_v|_{\mathcal{I}^-} &= 0\end{aligned}\quad (24.4)$$

在 \mathcal{I}^\pm 附近可以把 A, F 展开成 $\mathcal{O}(1/r)$ 的形式，用 $A^{(i)}, F^{(i)}$ 表示 r^{-i} 项前的系数，那么在这一规范下有¹⁴：

$$F_{ur}^{(0)} = A_u^{(0)}, F_{z\bar{z}}^{(0)} = \partial_z A_{\bar{z}}^{(0)} - \partial_{\bar{z}} A_z^{(0)}, F_{uz}^{(0)} = \partial_u A_z^{(0)}, F_{r\bar{z}}^{(0)} = -A_{\bar{z}}^{(1)} \quad (24.5)$$

而且我们所关心的场位形在 \mathcal{I}_+^+ 处为真空，即满足：¹⁵

$$F_{ur}|_{\mathcal{I}_+^+} = F_{uz}|_{\mathcal{I}_+^+} = 0 \quad (24.6)$$

¹⁴ 各项系数都只和 (u, z, \bar{z}) 相关了

¹⁵ \mathcal{I}_-^- 也是，就是前面说的 $C-K$ 时空。

\mathcal{I}^- 处类似。但这个规范选取就如库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 一样没有完全确定规范， $A_z^{(0)}$ 还可以进行下面的所谓 Large gauge transformation：

$$A_z^{(0)} \mapsto A_z^{(0)} + \partial_z \varepsilon(z, \bar{z}), \quad \forall \varepsilon \in C^\infty [CS^2] \quad (24.7)$$

规范变换是一种冗余，但是这里的 Large gauge transformations 最大的特点就是在无穷远处不归零，这导致很多时候分部积分的边界项不能丢去，确确实实的成为了一个对称性，后面马上会看到会对应无穷多个守恒荷。

运动电荷激发的电磁场即所谓 Liénard-Wiecher 势 [63]。这里我们在天球坐标下将 advanced 和 retarded 势统一写为：

$$F_{rt}(\vec{x}, t) = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k (r - t\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)}{\left| \gamma_k^2 (t - r\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2 - t^2 + r^2 \right|^{3/2}}, \quad r^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} = r\hat{x} \quad (24.8)$$

其中我们假设所有电荷之间匀速运动，而且相互作用可忽略，这个假设有点强，但是请相信后面导出的结论是可以推广到一般情形的。现在计算在天球上的极限：

$$\begin{aligned}F_{rt}|_{\mathcal{I}^+} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 - \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2} \\ F_{rt}|_{\mathcal{I}^-} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 + \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2}\end{aligned}\quad (24.9)$$

取极限，得到：

$$F_{rt}|_{\mathcal{I}_-^+} \neq F_{rt}|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (24.10)$$

正是这个式子说明了要严格区分 $\mathcal{I}_-^+, \mathcal{I}_+^-$ 和 i^0 。但是，因为 $F_{ru} = F_{rt} = F_{rv}$ ：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{ru}(\hat{x}) \Big|_{\mathcal{I}_-^+} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{rv}(-\hat{x}) \Big|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (24.11)$$

也就是说场在两个天球上是对称认同的，这也是为什么前面 \mathcal{I}^\pm 天球的角向选取是 antipodal 的，上边的式子可以写成下面很简洁的形式：

$$F_{ru}^{(2)}(z, \bar{z}) \Big|_{\mathcal{I}_-^+} = F_{rv}^{(2)}(z, \bar{z}) \Big|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (24.12)$$

这个式子是普适的，而且非常重要，是后面散射问题的核心。上面的式子破缺了 $\mathcal{I}^+ \times \mathcal{I}^-$ 上的 Large gauge，如 $BMS^+ \times BMS^-$ 一样破缺为一个 diagonal 的子群，现在考虑任意一个天球上的对径认同的函数：¹⁶

$$\varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = \varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (24.13)$$

¹⁶ 在 \mathcal{I}^\pm 上定义但是与 u, v 无关的函数，在 \mathcal{I}_\mp^\pm 上对径认同。

定义下面的 future charges 和 past charges：

$$\boxed{Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_-^+} \varepsilon * F, \quad Q_\varepsilon^- = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^-} \varepsilon * F} \quad (24.14)$$

由于 Hodge 对偶后出来的体积元 $\propto r^2$ ，所以在天球上 $r \rightarrow \infty$, $F \rightarrow F^{(2)}$ ，再根据对径认同的条件，这样对于任意一个函数 ε ，我们都给出了一个“电荷”守恒律：

$$\boxed{Q_\varepsilon^+ = Q_\varepsilon^-} \quad (24.15)$$

对于 ε 是常函数情形，就得到了一般的电荷守恒律。利用 Stokes 公式¹⁷可以改写 Q_ε^\pm 为¹⁸：

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} d\varepsilon \wedge *F + \int_{\mathcal{I}^+} \varepsilon * j + \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^+} \varepsilon * F \quad (24.16)$$

¹⁷ $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega$

¹⁸ Q_ε^- 只用把 $+$ 互换

最后一项为 0 是因为我们假设电子是无质量的，这样电子就是从 $\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$ ，而不是 $i^- \rightarrow i^+$ ，所以 $F|_{\mathcal{I}_+^+} = 0$ 。第一项是 Soft term Q_S^+ 与软光子的产生湮灭有关，第二项由于是与流耦合，所以叫 Hard term Q_H^+ 与带电实物粒子有关。将上面的微分形式写成分量形式¹⁹：

$$Q_\varepsilon^+ = \underbrace{-\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} du d^2 z (\partial_z \varepsilon F_{u\bar{z}}^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon F_{uz}^{(0)})}_{Q_S^+} + \underbrace{\int_{\mathcal{I}^+} du d^2 z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_u^{(2)}}_{Q_H^+} \quad (24.17)$$

¹⁹ 其中使用了 Bianchi 恒等式：
 $\partial_u F_{ru}^{(2)} + D^z F_{uz}^{(0)} + D^{\bar{z}} F_{u\bar{z}}^{(0)} + e^2 j_u^{(2)} = 0$

定义 Soft photon mode N_z ：

$$N_z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} e^{i\omega u} \quad (24.18)$$

再次看到 N_z 对应的是电磁场的零频部分，也就是软光子部分，而且有：

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} N_z - \partial_z N_{\bar{z}} &= \int_{-\infty}^{\infty} du [\partial_{\bar{z}} F_{uz}^{(0)} - \partial_z F_{u\bar{z}}^{(0)}] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} du \partial_u F_{z\bar{z}}^{(0)} = -F_{z\bar{z}}^{(0)} \Big|_{\mathcal{I}_-^+} = 0 \end{aligned} \quad (24.19)$$

最后等于 0 是因为 $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}_-^+} = 0$ ，本质上是因为没有磁单极子，磁场不是 long-range 的，在无穷远处为 0²⁰。所以 N_z 无旋，可以由此引申出一个实标量场 N 作为其原函数：

$$N_z \equiv e^2 \partial_z N = \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz}^{(0)} = A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^+} - A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} \quad (24.20)$$

²⁰ 因为 $F_{z\bar{z}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{z}} F_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} F_{ij}$ ，而规范场强的空间分量 F_{ij} 只和磁场有关。

利用 N , future charges 可以写成下面简洁形式：

$$Q_\varepsilon^+ = 2 \int_{S_\infty^2} d^2 z N \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon + \int_{\mathcal{I}^+} du d^2 z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_u^{(2)} \quad (24.21)$$

对 past charge 也可以来上面的这一套:

$$Q_{\varepsilon}^- = -2 \int_{S_{\infty}^2} d^2 z N^- \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon + \int_{\mathcal{I}^-} dv d^2 z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_v^{(2)} \quad (24.22)$$

Remark 正文里面省去了一些推导细节，在 retarded 下的 Maxwell 方程形式罗列如下：

$$\begin{aligned} (\partial_u - \partial_r) (r^2 F_{ru}) + \gamma^{z\bar{z}} (\partial_z F_{u\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} F_{u\bar{z}}) &= -e^2 r^2 j_u^M \\ -\partial_r (r^2 F_{ru}) + \gamma^{z\bar{z}} (\partial_z F_{r\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} F_{r\bar{z}}) &= -e^2 r^2 j_r^M \\ r^2 (\partial_u - \partial_r) F_{r\bar{z}} + r^2 \partial_r F_{u\bar{z}} + \partial_z (\gamma^{z\bar{z}} F_{z\bar{z}}) &= -e^2 r^2 j_z^M \end{aligned} \quad (24.23)$$

Lorenz 规范形式为：

$$-\partial_u (r^2 A_r) - \partial_r (r^2 A_u) + \partial_r (r^2 A_r) + \gamma^{z\bar{z}} (\partial_z A_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} A_z) = 0 \quad (24.24)$$

SUBSECTION 24.2

Quantization

上面讨论的都是经典场，现在进行量子化，目的是说明前面定义的 future charge 和 past charges 都是 Large gauge transformations 对应的生成元算符。量子化方案选用正则量化方案，这里使用的方法不需要事先对时空进行 3+1 分解，是协变的方法 [64–68]。

经典力学的正则形式是建立在辛几何上的，也就是给相流形上配备了一个非退化的、闭的二形式 [69]：

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega_{IJ} dx^I \wedge dx^J \quad (24.25)$$

而且可以证明，可以通过选取不同的广义坐标局部的将 ω_{IJ} 化为下面的矩阵：

$$\omega_{IJ} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{N \times N} \\ -1_{N \times N} & 0 \end{bmatrix} \quad (24.26)$$

力学量的 Possion 括号由下式给定：

$$\{A, B\} = \Omega^{IJ} \partial_I A \partial_J B \quad (24.27)$$

相空间是运动方程的解，可以与初始值一一对应。

到了场论这边，相空间我们可以选取为某一个柯西面 Σ 上的场位形。场 ϕ 本身是流形上的微分形式，24.25 中的 dx 应该替换为 $\delta\phi$ ，这里 δ 是场位形的在壳变分，也就是说 $\phi + \delta\phi$ 仍然是场方程的解。场本身是定义在某个纤维丛上的，可以粗浅的理解为两个流形拼起来，而 d 是底流形上的微分形式算子， δ 事实上是另一个正交的微分形式算子，所以 $\delta\phi$ 在 δ 的意义上是 1-form，在 d 的意义上 δ 的作用不会改变其是几形式，这样 Ω 形如 $\delta\phi \wedge \delta\varphi$ 从 δ 的意义上来看就是个二形式。构建的微分形式还应当满足规范不变性，闭且非退化，而且还要对柯西面的不同选取一致，利用 [68] 中方法可以得到 $U(1)$ 规范场的辛形式为：

$$\Omega_{\Sigma} = -\frac{1}{e^2} \int_{\Sigma} \delta(*F) \wedge \delta A \quad (24.28)$$

将柯西面选取为 \mathcal{I}^{\pm} ，得到分量为：

$$\begin{aligned} \omega_{uz\bar{z}}|_{\mathcal{I}^+} &= -\frac{1}{e^2} [\delta(*F)_{uz} \wedge \delta A_{\bar{z}} + \delta(*F)_{\bar{z}u} \wedge \delta A_z + \delta(*F)_{z\bar{z}} \wedge \delta A_u]_{\mathcal{I}^+} \\ &= -\frac{i}{e^2} [\delta F_{uz}^{(0)} \wedge \delta A_{\bar{z}}^{(0)} + \delta F_{\bar{z}u}^{(0)} \wedge \delta A_z^{(0)}], \end{aligned} \quad (24.29)$$

其中利用了：²¹

$$(*F)_{uz} = i(F_{uz} - F_{rz}), \quad (*F)_{z\bar{z}} = ir^2 \gamma_{z\bar{z}} F_{ru} \quad (24.30)$$

²¹ 注意到 Levi-Civita 符号不是张量，而是张量密度， $\sqrt{-g}\epsilon$ 才是张量，然后利用 Hodge dual 定义爆算即可

最终得到辛形式:

$$\Omega_{\mathcal{I}^+} = \frac{1}{e^2} \int du d^2z \left[\delta F_{uz}^{(0)} \wedge \delta A_{\bar{z}}^{(0)} + \delta F_{u\bar{z}}^{(0)} \wedge \delta A_z^{(0)} \right] \quad (24.31)$$

总是可以把 A_z 的 $u \rightarrow \pm\infty$, 也就是 \mathcal{I}_{\pm}^+ 的与 u 无关的部分分离出去, 这一部分又总是可以写成某个天球上标量场的导数, 因为要求 $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}_{\pm}^+} = 0$: ²²

$$A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) = \hat{A}_z(u, z, \bar{z}) + \partial_z \phi(z, \bar{z}), \quad \partial_z \phi \equiv \frac{1}{2} \left[A_z^{(0)} \Big|_{\mathcal{I}_+^+} + A_z^{(0)} \Big|_{\mathcal{I}_-^+} \right] \quad (24.32)$$

而且 $\partial_z \phi$ 是一个 pure gauge。利用上面的分解以及 soft photon mode 重写 24.31:

$$\Omega_{\mathcal{I}^+} = \frac{2}{e^2} \int du d^2z \partial_u \delta \hat{A}_z \wedge \delta \hat{A}_{\bar{z}} - 2 \int d^2z \partial_z \delta \phi \wedge \partial_{\bar{z}} \delta N \quad (24.33)$$

现在考虑正则量子化, 场变成算符, 而 Poisson 括号换成 Dirac 括号: ²³

$$\begin{aligned} -\frac{2}{e^2} [\partial_u \hat{A}_z(u, z, \bar{z}), \hat{A}_{\bar{w}}(u', w, \bar{w})] &= i\delta(u - u')\delta^2(z - w), \\ 2[\partial_z \phi(z, \bar{z}), \partial_{\bar{w}} N(w, \bar{w})] &= i\delta^2(z - w). \end{aligned} \quad (24.34)$$

积分得到: ²⁴

$$\begin{aligned} [\hat{A}_z(u, z, \bar{z}), \hat{A}_{\bar{w}}(u', w, \bar{w})] &= -\frac{ie^2}{4} \Theta(u - u')\delta^2(z - w), \\ [\phi(z, \bar{z}), N(w, \bar{w})] &= -\frac{i}{4\pi} \log |z - w|^2 + f(z, \bar{z}) + g(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (24.35)$$

SUBSECTION 24.3

Large gauge symmetry

利用上面发展的对易式可以去计算 Q_{ε}^{\pm} 与场算符的对易关系, 注意到物质场部分 Q_H 始终和规范场 A 对易, 所以:

$$\begin{aligned} [Q_{\varepsilon}^+, A_z^{(0)}(u, z, \bar{z})] &= i\partial_z \varepsilon(z, \bar{z}), \\ [Q_{\varepsilon}^-, A_z^{(0)}(v, z, \bar{z})] &= i\partial_z \varepsilon(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (24.36)$$

所以前面定义的守恒荷其实就是对径认同的 Large gauge transformation 的生成元, 自然就是一个守恒荷! 下面是另外一些比较有用的对易关系:

$$[Q_{\varepsilon}^+, N(z, \bar{z})] = 0, \quad [Q_{\varepsilon}^+, \hat{A}_z(u, z, \bar{z})] = 0, \quad [Q_{\varepsilon}^+, \phi(z, \bar{z})] = i\varepsilon(z, \bar{z}) \quad (24.37)$$

前面的讨论一直忽略了流耦合项 S_M , 加入后对前面的结论不会有影响, 注意到 Q_S 与物质场对易, 根据 Noether 定理:

$$[j_u^{(2)}(u', w, \bar{w}), \Phi_k(u, z, \bar{z})] = -Q_k \Phi_k(u, z, \bar{z}) \gamma^{z\bar{z}} \delta^2(z - w) \delta(u - u') \quad (24.38)$$

这意味着:

$$[Q_{\varepsilon}^+, \Phi_k(u, z, \bar{z})] = \left[\int_{\mathcal{I}^+} \varepsilon * j, \Phi_k(u, z, \bar{z}) \right] = -Q_k \varepsilon(z, \bar{z}) \Phi_k(u, z, \bar{z}) \equiv i\delta_{\varepsilon} \Phi_k(u, z, \bar{z}) \quad (24.39)$$

²² 这里所做的事情实际上是为了构建包含软光子模式 $\{\phi, N\}$ 的协变相空间做准备, Strominger 原始文献 [61](那里使用 $\{\phi_{\pm}\}$ 代替这里的式 $\{\phi, N\}$) 就指出, 如果不这样做会导致计算得出 Q_{ε}^{\pm} 不是 Large 规范变换的生成元

²³ $\{ \ , \ \} \mapsto \frac{1}{i} [\ , \]$

²⁴ 这里

$\Theta(u) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{d\omega}{\omega} e^{i\omega u} = \begin{cases} +1 & , u > 0 \\ -1 & , u < 0 \end{cases}$

所以 Q_S 生成规范场的规范变换, Q_H 生成费米场规范变换, 合起来 Q_ε 生成 \mathcal{I}^+ 上的 local 规范变换。

SECTION 25

Ward identity = Soft theorem

SUBSECTION 25.1

Ward identity of S-Matrix

量子力学里面就知道守恒意味着与哈密顿量对易, 而 $\mathcal{S} \sim \exp\{iHT\}$, 所以前面的守恒荷会和 \mathcal{S} 对易:²⁵

²⁵ 初末态基底选取平面波。

$$\langle \text{out} | (Q_\varepsilon^+ \mathcal{S} - \mathcal{S} Q_\varepsilon^-) | \text{in} \rangle = 0 \quad (25.1)$$

这样一个简单的式子就是 \mathcal{S} -Matrix 的 Ward identity。利用 24.21 和 24.22 得到:

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^- |\text{in}\rangle &= -2 \int d^2 z \partial_{\bar{z}} \varepsilon \partial_z N^-(z, \bar{z}) |\text{in}\rangle + \sum_{k=1}^m Q_k^{\text{in}} \varepsilon(z_k^{\text{in}}, \bar{z}_k^{\text{in}}) |\text{in}\rangle \\ \langle \text{out} | Q_\varepsilon^+ &= 2 \int d^2 z \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon \langle \text{out} | N(z, \bar{z}) + \sum_{k=1}^n Q_k^{\text{out}} \varepsilon(z_k^{\text{out}}, \bar{z}_k^{\text{out}}) \langle \text{out} | \end{aligned} \quad (25.2)$$

第一项没啥好说的, 后面会讨论其物理含义, 第二项的计算稍微提一下。首先我们假设入射态是 m 个 hard particles, 而且来自于天球上的点 z_k^{in} , 24.39 给出了守恒荷与物质场之间的对易关系, 实际上, 不难证明守恒荷和产生湮灭算符也满足同样的对易关系²⁶。以两个入射粒子为例:

$$\begin{aligned} Q_H^- |\text{in}\rangle &\sim Q_H^- a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \\ &\sim [Q_H^-, a_1^\dagger a_2^\dagger] |0\rangle + \cancel{a_1^\dagger a_2^\dagger Q_H^- |0\rangle}^0 \\ &\sim [Q_H^-, a_1^\dagger] a_2^\dagger |0\rangle + a_1^\dagger [Q_\varepsilon^-, a_2^\dagger] |0\rangle \\ &\sim Q_1 \varepsilon_1 |\text{in}\rangle + Q_2 \varepsilon_2 |\text{in}\rangle \end{aligned} \quad (25.3)$$

第二行我们利用了真空态一定是没荷的²⁷。现在可以把 25.1 写为:

$$\begin{aligned} 2 \int d^2 z \partial_z \partial_{\bar{z}} \varepsilon \langle \text{out} | (N(z, \bar{z}) \mathcal{S} - \mathcal{S} N^-(z, \bar{z})) |\text{in}\rangle \\ = \left[\sum_{k=1}^m Q_k^{\text{in}} \varepsilon(z_k^{\text{in}}, \bar{z}_k^{\text{in}}) - \sum_{k=1}^n Q_k^{\text{out}} \varepsilon(z_k^{\text{out}}, \bar{z}_k^{\text{out}}) \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \end{aligned} \quad (25.4)$$

取 $\varepsilon(z, \bar{z}) = \frac{1}{w-z}$, 则上式可以写为如下形式:²⁸

$$4\pi \langle \text{out} | (\partial_z N \mathcal{S} - \mathcal{S} \partial_z N^-) |\text{in}\rangle = \left[\sum_{k=1}^m \frac{Q_k^{\text{in}}}{z - z_k^{\text{in}}} - \sum_{k=1}^n \frac{Q_k^{\text{out}}}{z - z_k^{\text{out}}} \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \quad (25.5)$$

这个等式其实就是带有 U(1) Kac-Moody current 的 CFT₂ 的 Ward 恒等式 [70–73], 在介绍 CFT 后会专门讨论。这里的 ε 的选取是为了后面与正螺旋度光子的软定理联系, 如果考虑负螺旋度的情况, 可以选取 $\varepsilon(z, \bar{z}) = \frac{1}{\bar{w}-\bar{z}}$ 进行一样的推导。这一 ε 的选取是有非常强的物理上的 motivation 的, 因为后面推导的是单个软光子辐射的软定理, 那自然想到只在天球上的某一个点上 (这个点正代表着出射软光子 \hat{p}) 做 large gauge 变换, 所以 $\delta A_z \sim \partial_z \varepsilon \sim \delta(\cdot)$, 这正对应了我们此处的选取。

²⁶ 比如标量场 [33]

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = -i \int d^3 x e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x)$$

²⁷ 后面对称性自发破缺会提到 Q_ε^- 作用到真空上不是 0, 但是这里 Q_H^- 是没有破缺的对称性。

²⁸

$$\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z-w} = 2\pi \delta^2(z-w)$$

最后 $w \leftrightarrow z$

SUBSECTION 25.2

Mode expansion

本部分的终极目标是证明 Ward 恒等式可以联系渐近对称性和软定理，前文从相空间角度给出了 Ward 恒等式，在动量空间给出了软定理，是时候在动量空间重写 Ward 恒等式了，重点就是将场算符用平面波展开，也就是正则量子化的过程。free mode expansion 弯曲时空量子力学领域已经不少人算过了，U(1) 规范理论结果如下：

$$A_\nu(x) = e \sum_{\alpha=\pm} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} [\varepsilon_\nu^{*\alpha}(\vec{q}) a_\alpha^{\text{out}}(\vec{q}) e^{iq \cdot x} + \varepsilon_\nu^\alpha(\vec{q}) a_\alpha^{\text{out}}(\vec{q})^\dagger e^{-iq \cdot x}] \quad (25.6)$$

q 是平面波在壳动量 $q^2 = 0$, ε_μ^\pm 是极化矢量，常常取为：

$$\varepsilon^{+\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{z}, 1, -i, -\bar{z}), \quad \varepsilon^{-\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (z, 1, i, -z), \quad q_\mu \varepsilon^{\pm\mu}(\vec{q}) = 0, \quad \varepsilon_\alpha^\mu \varepsilon_{\beta\mu}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (25.7)$$

产生湮灭算符之间满足对易关系：

$$[a_\alpha^{\text{out}}(\vec{q}), a_\beta^{\text{out}}(\vec{q})^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 (2\omega_q) \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \quad (25.8)$$

定义内积：

$$(A, A') = -i \int d\Sigma^\mu [A^\nu (\nabla_\mu A'^*_\nu - \nabla_\nu A'^*_\mu) - (A \leftrightarrow A'^*)] \quad (25.9)$$

这样定义的内积与类空超曲面 Σ 的选取是无关的。这样一来产生湮灭算符可以写成：

$$a_\pm(q) = i(A, (\epsilon^\pm e^{iq \cdot x})^*) \quad (25.10)$$

对于 \mathcal{I}^- 类似讨论，结果只是把 out 改成 in。下面计算 $A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} A_z(u, r, z, \bar{z})$ 的模式展开：²⁹

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= e \sum_{\alpha=\pm} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} [\varepsilon_\mu^{*\alpha}(\vec{q}) a_\alpha(\vec{q}) e^{-i\omega_q u - i\omega_q r(1-\hat{q}\cdot\hat{x})} \\ &\quad + \varepsilon_\mu^\alpha(\vec{q}) a_\alpha^\dagger(\vec{q}) e^{i\omega_q u + i\omega_q r(1-\hat{q}\cdot\hat{x})}] \\ &= \frac{e}{8\pi^2} \sum_{\alpha=\pm} \int_0^\infty d\omega_q \omega_q \int_0^\pi d\theta \sin \theta [\varepsilon_\mu^{*\alpha}(\vec{q}) a_\alpha(\vec{q}) e^{-i\omega_q u - i\omega_q r(1-\cos \theta)} \\ &\quad + \varepsilon_\mu^\alpha(\vec{q}) a_\alpha^\dagger(\vec{q}) e^{i\omega_q u + i\omega_q r(1-\cos \theta)}]. \end{aligned} \quad (25.11)$$

这里 θ 是 \hat{q} 和 \hat{x} 之间的夹角，利用数学公式³⁰：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sin \theta e^{i\omega_q r(1-\cos \theta)} = \frac{i}{\omega_q r} \delta(\theta) + \mathcal{O}((r)^{-2}) \quad (25.12)$$

代入得到：

$$A_\mu(x) = -\frac{ie}{8\pi^2 r} \sum_{\alpha=\pm} \int_0^\infty d\omega_q [\varepsilon_\mu^{*\alpha}(\omega_q \hat{x}) a_\alpha(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} - c.c.] + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (25.13)$$

我们要求的玩意儿是 $A_z = \partial_z x^\mu A_\mu$, 注意到：

$$\partial_z x^\mu \varepsilon_\mu^+(\omega_q \hat{x}) = 0, \quad \partial_z x^\mu \varepsilon_\mu^-(\omega_q \hat{x}) = \frac{\sqrt{2}r}{1+z\bar{z}}$$

²⁹ 这里 \hat{q}, \hat{x} 都是指其空间部分

³⁰ 来源是鞍点近似

最终求得:³¹

³¹ 下文中的 ω 指 ω_q , 即 q^0

$$A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) = -\frac{i}{8\pi^2} \frac{\sqrt{2}e}{1+z\bar{z}} \int_0^\infty d\omega [a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x})e^{-i\omega u} - a_-^{\text{out}}(\omega\hat{x})^\dagger e^{i\omega u}] \quad (25.14)$$

把定义式 24.18 改写为厄米的形式:

$$\partial_z N = \frac{1}{2e^2} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty du (e^{i\omega u} + e^{-i\omega u}) F_{uz}^{(0)} \quad (25.15)$$

利用 $A_z^{(0)}$ 重写上式为:

$$\partial_z N = -\frac{1}{8\pi e} \frac{\sqrt{2}}{1+z\bar{z}} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} [\omega a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x}) + \omega a_-^{\text{out}}(\omega\hat{x})^\dagger] \quad (25.16)$$

在 \mathcal{I}^- 上也有类似式子, 只需要把 $N \rightarrow N^-, \text{out} \rightarrow \text{in}$ 就好。现在可以看出来为啥要叫 soft photon mode 了。根据前面的铺垫, 25.5 终于可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega \langle \text{out} | (a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x}) \mathcal{S} - \mathcal{S} a_-^{\text{in}}(\omega\hat{x})^\dagger) | \text{in} \rangle] \\ = \sqrt{2}e(1+z\bar{z}) \left[\sum_{k=1}^n \frac{Q_k^{\text{out}}}{z - z_k^{\text{out}}} - \sum_{k=1}^m \frac{Q_k^{\text{in}}}{z - z_k^{\text{in}}} \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \end{aligned} \quad (25.17)$$

SUBSECTION 25.3

Soft photon & graviton

前面用费曼图导出的软定理可以用 \mathcal{S} 矩阵写成如下形式:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega \langle \text{out} | a_+^{\text{out}}(\vec{q}) \mathcal{S} | \text{in} \rangle] = e \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\sum_{k=1}^m \frac{\omega Q_k^{\text{out}} p_k^{\text{out}} \cdot \varepsilon^+}{p_k^{\text{out}} \cdot q} - \sum_{k=1}^n \frac{\omega Q_k^{\text{in}} p_k^{\text{in}} \cdot \varepsilon^+}{p_k^{\text{in}} \cdot q} \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \quad (25.18)$$

这里出射和入射态都是平面波为基, 而且我们把元电荷作为公因子提出, $Q \in \mathbb{Z}$, 出入射动量用 Embedding 的形式写出来, 前面第三部分写过, 这里再写一遍:

$$\begin{aligned} q^\mu &= \frac{\omega}{1+z\bar{z}} (1+z\bar{z}, z+\bar{z}, -i(z-\bar{z}), 1-z\bar{z}), \\ p_k^\mu &= \frac{E_k}{1+z_k\bar{z}_k} (1+z_k\bar{z}_k, z_k+\bar{z}_k, -i(z_k-\bar{z}_k), 1-z_k\bar{z}_k) \end{aligned} \quad (25.19)$$

注意到:

$$\varepsilon_+^\mu(q) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \partial_z [(1+z\bar{z}) q^\mu], \quad \varepsilon_-^\mu(q) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \partial_{\bar{z}} [(1+z\bar{z}) q^\mu] \quad (25.20)$$

带进去一通暴力计算, 软定理被我们写成了:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} [\omega \langle \text{out} | a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x}) \mathcal{S} | \text{in} \rangle] = \frac{e}{\sqrt{2}} (1+z\bar{z}) \left[\sum_{k \in \text{out}} \frac{Q_k}{z - z_k} - \sum_{k \in \text{in}} \frac{Q_k}{z - z_k} \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \quad (25.21)$$

根据 \mathcal{CPT} 不变性:³²

³² 这里没搞懂为啥?

$$\langle \text{out} | a_+^{\text{out}}(\vec{q}) \mathcal{S} | \text{in} \rangle = -\langle \text{out} | \mathcal{S} a_-^{\text{in}\dagger}(\vec{q}) | \text{in} \rangle \quad (25.22)$$

结合上面两个式子就证明了 Ward 恒等式和软定理是一回事，或者说通过 Ward 恒等式，软定理和 Large gauge symmetry 是一回事。这其实反过来说明了我们找到的 Large gauge symmetry 是 non-trivial 的，确实得看作是一个渐近对称性。这种 non-trivial 从记忆效应也能体现出来，后面会详细讨论。

回到引力这边，这边的证明思路上差不多，但是有很多比较微妙的点。首先就是守恒荷的量子化，虽然也可以按照 QED 那边的方法一样做，但是技术细节上微妙许多。不过我们可以猜测它们应当有如下形式：

$$\boxed{[Q_f^+, \dots] = i\delta_f, \quad [Q_Y^+, \dots] = i\delta_Y} \quad (25.23)$$

至于 δ_f 和 δ_Y 的形式前面已经算过了，而且它们都是和哈密顿量对易的，这也是利用 Ward 恒等式的基础。第一个式子证明相对简单，可以看文献 [74]，第二个等式要复杂许多，首先是需要下面几个式子 [64, 75–77]：

$$\begin{aligned} [N_{\bar{z}\bar{z}}(u, z, \bar{z}), C_{ww}(u', w, \bar{w})] &= 16\pi Gi\gamma_{z\bar{z}}\delta^2(z - w)\delta(u - u') \\ [Q_S^+, C_{zz}] &= -iuD_z^3Y^z, \\ [Q_H^+, C_{zz}] &= \frac{iu}{2}D \cdot Y N_{zz} + iY \cdot DC_{zz} - \frac{i}{2}D \cdot Y C_{zz} + 2iD_z Y^z C_{zz} \end{aligned} \quad (25.24)$$

而且 Superrotation 对应的相空间也更加复杂 [78]。这些都只能先 argue 一下，细说太麻烦。同样也可以给出模式展开，这个时候 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$ 满足 linearized Einstein equation:

$$\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} = 0 \quad (25.25)$$

Mode expansion 为：

$$h_{\mu\nu}(x) = \kappa \sum_{\alpha \in \pm} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} [\epsilon_{\mu\nu}^{\alpha*} a_\alpha e^{ik \cdot x} + \epsilon_{\mu\nu}^\alpha a_\alpha^\dagger e^{-ik \cdot x}] \quad (25.26)$$

若 $h = 0$, 内积定义为：

$$(h, h') = -i \int d\Sigma^\rho [h^{\mu\nu} (\nabla_\rho h'^*_\mu{}^\nu - 2\nabla_\mu h'^*_\rho{}^\nu) - (h \leftrightarrow h'^*)] \quad (25.27)$$

同样也可以用鞍点近似去求度规里的那些参数的模式展开，然后去证明软引力子定理，详细的计算移步至文献 [22, 74, 79]。文献中详细论证了 Supertranslation 对应的守恒荷可以导出软定理的 leading order，而 Q_Y 对应 sub-leading order，计算过程十分复杂，后面对于比较简单的无质量标量 QED 的情况我们会细走一下这个过程。软引力子定理的 sub-subleading order 也被计算过了 [80]，这也意味着有更高阶的守恒荷，文献 [81] 对此进行了分析。

SUBSECTION 25.4

Asymptotic analysis on QED

这一节的主要目的是讲一下历史进程，文献最早是通过类似于 BMS 的渐近分析得到守恒荷这些 [61, 72]。分析渐近对称性的第一步就是指定边界条件，从而找到允许的对称性。由于 T_{uu} 是能动张量 T_{00} 和 T_{0i} 的线性组合，所以它现在代表能流，由于天球半径按照 r^2 增大，所以为了让能量有限大， $T_{uu} \sim \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ ，根据 Noether 定理：

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho \quad (25.28)$$

进行对称化操作得到：³³

³³ 这样子做最大的好处是现在不显含 A ，与规范无关了

$$T_S^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} \partial_\rho (F^{\rho\mu} A^\nu) = \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho \quad (25.29)$$

改到 Bondi 坐标下：

$$T_{uu} \sim F_{uz} F_{u\bar{z}} \frac{\gamma^{z\bar{z}}}{r^2} + \dots \quad (25.30)$$

这个式子意味着 $F_{uz} \sim \mathcal{O}(1)$, 再根据 F_{ru}, F_{rz} 是电磁场分量, 所以渐近行为均为 $\mathcal{O}(1/r^2)$ 。下面的一组 A 的渐近行为选取就满足这几个条件:^{34,35}

$$A_z \sim \mathcal{O}(1), \quad A_r \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad A_u \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (25.31)$$

³⁴ 这一节我们并不取定规范

³⁵ 这个条件充分但不必要, 但是根据文献 [82–84] 的讨论, 选别的理论会变得不是很自然。

而满足这一边界条件的规范变换只能是：

$$\varepsilon = \varepsilon(z, \bar{z}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (25.32)$$

无穷远 (天球) 处不归零, 就是前面说的 Large gauge transformations。类似于引力散射问题的分析, 可以证明 $\{A_z^0\}$ 是 initial data, 也就是说在 $\mathcal{I}^+(\mathcal{I}^-)$ 上知道了它就能将其它所有场在 $\mathcal{I}^+(\mathcal{I}^-)$ 柯西面上的位形确定到只差一个积分常数。所以 QED 这边散射问题 ($\mathcal{I}^- \rightarrow \mathcal{I}^+$ 场位形的 map 问题) 为了 well-define, 也必须把 $\{A_z^0\}$ 对径认同的要求看作是散射问题定义的一部分。这样的话自然也就要求 \mathcal{I}^\pm 上的规范变换 25.32 互相对径认同。

$$A_z^0|_{\mathcal{I}_-^+} = A_z^0|_{\mathcal{I}_+^-}$$

历史上的发展和本文讨论的路线是完全相反的, 2014 年那段时间 Strominger 那些人首先是对 QED 和微扰引力直接去分析渐近对称性, 然后去用 Noether 定理那一套去构建相应的守恒荷, 再使用协变相空间方法进行量子化。过程中根据 Lorentz 不变性和 \mathcal{CPT} 的要求发现渐近对称性必须是对径认同变换的子群。而现在是把场在 \mathcal{I}_\pm^\pm 上对径认同放在第一性原理上面 (看作是散射问题良定义的自然要求), 然后引入天球上对径认同的函数去直接构造守恒荷, 然后利用协变相空间进行量子化后发现这些守恒荷正是 Large gauge/diffeomorphic 变换的生成元!

SECTION 26

Spontaneous symmetry breaking

A. Zee[85] 这部分物理讲的很清楚。

SUBSECTION 26.1

In QFT

考虑 $\vec{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ 所定义的拉式量:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial \vec{\varphi})^2 + \mu^2 \vec{\varphi}^2] - \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2)^2 \quad (26.1)$$

这个理论具有明显的 $O(n)$ 对称性, 但是我们可以“人为地”在理论中添加 φ_1^2, φ_1^3 等项来使得理论本身的对称性破坏为子群。还有一种是下面的模型, 把质量项改成负的:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial \vec{\varphi})^2 - \mu^2 \vec{\varphi}^2] - \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2)^2 \quad (26.2)$$

并不能解释为粒子具有“虚数”质量, 而只能将质量项看作势能项的一部分。为了方便起见, 考虑 $N = 2$ 的情形, 势能项为:

$$V(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \vec{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\varphi}^2)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \vec{\varphi})^2 \quad (26.3)$$

最后一项为 0 是因为正定，所以我们后面找真空态场位形要求能量最低可以干脆在那些不随空间变化的场位形里面找。势能的图像就是右边的典中典 Mexican 帽

这种势能会导致极（小）值点不唯一，也就是说真空态是简并的，而我们做量子场论都是要选定一个真空态之后在其附近微扰找激发态。真空态选择不影响物理，但是一旦你选定了一个真空态，就意味着体系原先有的 $O(2)$ 对称性完全破缺了。所以说拉式量本身是对称的，但是真实世界由于选定了某个特殊的真空态，自发的破缺了对称性，导致我们现实中其实看不到体系的 $O(2)$ 对称性。

不妨取定真空态为 $\vec{\varphi} = (\sqrt{\mu^2/\lambda}, 0)$ ，然后在真空态附近展开场位形，即重定义场为：

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - v + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad \varphi'_2 = \varphi_2 - 0 + \mathcal{O}(\varphi^2) \quad (26.4)$$

代入原本的拉式量得到对称性自发破缺后的拉式量形式：³⁶

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2} [(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2] - \mu^2\varphi_1^2 + \mathcal{O}(\varphi^3) \quad (26.5)$$

对称性自发破缺带来了两个非常重要的东西：

- **质量项：**现在 φ_1 的质量项是正定的，可以解释为质量
- **无质量玻色子：**多了一项 φ_2 ，但是他是没有质量项的，我们称之为 Nambu-Goldstone 玻色子

$O(2)$ 对称性破缺有两个，一个是 Abel 的 Lie 群 $SO(2)$ 的破缺，也就是说沿着帽中轴线的旋转对称性由于选取了一个特定的真空被破缺了，正是这种连续对称性的破缺，会有守恒荷的破缺，所以最终导致 Nambu-Goldstone 玻色子的产生。而 \mathbb{Z}_2 的离散对称性破缺不会带来无质量玻色子。

Theorem 1 (Nambu-Goldstone) 每一个连续对称性的破缺都会带来一个无质量 Boson，称为 Nambu-Goldstone Boson。

PROOF 从对称性没有自发破缺的拉式量中可以得出一些守恒荷，有一些是将要破缺的对称性对应的 Q_b ，也有一些是物理世界真实会看到的 Q^a 。真空态自然是要求在物理真实世界的 Q 作用为 0：^b

$$H|0\rangle = Q|0\rangle = 0 \quad (26.6)$$

但是对于破缺的对称性会有 $Q_b|0\rangle \neq 0$ ，但是根据 $[H, Q_b] = 0$ 可以说明 $Q_b|0\rangle$ 还是一个真空态，所以破缺对称性对应的守恒荷作用在真空态上会把他变成另一个真空态。假设 D 为时空空间部分的维数，那么对于每一个守恒荷 $Q_b = \int d^Dx J^0(\vec{x}, t)$ 可以定义粒子态：

$$|s\rangle = \int d^Dx e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} J^0(\vec{x}, t)|0\rangle \quad (26.7)$$

下面的推演说明了其是动量为 \vec{k} 的单粒子态：

$$P^i|s\rangle = \int d^Dx e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} [P^i, J^0(\vec{x}, t)]|0\rangle = -i \int d^Dx e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \partial^i J^0(\vec{x}, t)|0\rangle = k^i|s\rangle \quad (26.8)$$

而且 $Q_b|0\rangle = \lim_{\vec{k} \rightarrow 0} |s\rangle$ ，而这意味着 $\vec{k} \rightarrow 0$ ， $|s\rangle$ 能量也趋近于 0，这意味着 $|s\rangle$ 对应一个无质量粒子！这样我们就证明了定理。而 Q_b 对应的 Goldstone 玻色子到底是 \mathcal{L} 里面的哪个场可以通过计算 Q_b 与无质量场之间的对易子完成，因为无质量玻色子从物理上看就是因为破缺的对称性会让它沿着等势面无需能量进行移动，如果对易子不是 0 就说明 Q_b 恰恰生成的是这个 Goldstone 玻色子。□

^aNoether 定理对连续对称性才有效，所以定理中才要强调连续对称性的破缺

^b真空零点能可以通过重定义 H 消去

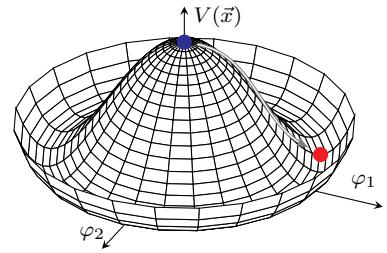


图 10. 对称性自发破缺

³⁶ 最后把 φ' 替换为 φ

但是上面的推导没有考虑量子真空涨落，在 $D = 2$ 时会失效：

Theorem 2 | (Coleman-Mermin-Wagner) 空间维数为 2 的系统不可能发生连续对称性的破缺。

这里面还有一个微妙的地方，对于 $D > 2$ 的体系，真空态之间其实会有所谓的“超选择性”，也就是说前面虽然说 Q_b 可以把简并的真空态联系起来，但这个算符其实是不可归一化的，或者说对应无穷大的能量。

SUBSECTION 26.2

On Celestial

现在把天球上 Large gauge symmetry 的对称性自发破缺按照前面的框架进行讨论，但天球上的又存在许多 subtle 的地方。

对于 QED，天球上的 large 规范变换实际上是在选取不同的真空，每一个 $\varepsilon(z, \bar{z})$ 就会对应一个真空，所以 QED 的真空是简并的，而且标记不同真空是用一个（对径认同）函数而不是一个连续参数，所以真空还是无穷维简并的，每一个 $\varepsilon(z, \bar{z})$ 便会带来一个对称性破缺的守恒荷 Q_ε^+ ，从 24.37 可以看到 $[Q_\varepsilon^+, \phi(z, \bar{z})] \neq 0$ ，所以 Large gauge symmetry 破缺导致的 Goldstone 粒子是 ϕ 对应的软光子！天球上的对称性自发破缺与一般的破缺最大的区别就是破缺对称性对应的守恒荷是 normalizable 的，不存在真空的超选择性，毕竟每个散射过程原则上都有无穷多的软光子产生湮灭。这个可以理解为天球上的简并真空是用一个 local 的函数标记的，而不是一般对称性破缺的一个 global 的连续参数，所以一般的对称性如果改变真空就需要牵一发而动全身，但是天球上真空的变化只需要合适的调整 local 函数，仅改变天球上的某一点，自然能量就有限大了。

不同真空态都是 pure gauge，对应 $F = 0$ ，所以他们的 $Q_\varepsilon^+|_{\text{vacuum}}$ 实际上都是 0，所以说 QED 比较平庸。但是引力就不一样了，前面 §4 就指出了 C 是 Supertranslation 破缺的 Goldstone 粒子，引力理论中不同的真空其实对应不同的角动量，也就是说守恒荷是非 0 的！正是因为真空不唯一，所以真空也带有角动量，所以角动量守恒：

$$\vec{J}_{\text{initial}} = \vec{J}_{\text{radiation}} + \vec{J}_{\text{vacuum}} \geq \vec{J}_{\text{radiation}} \quad (26.9)$$

引力角动量的非局域性，是因为我们没有考虑真空间并。把真空的角动量也加进来，角动量守恒在引力理论里面就依然成立！而前面说过天球上面对称性自发破缺是不存在超选择性的，所以可以很容易从一个真空转变为另一个真空。

总结一下，规范场具有 local 的，在边界上退化的规范对称性（冗余），而众所周知由于这一对称性的要求，规范场的没有能隙，所以存在软粒子，而软粒子实际上对应的是 large gauge symmetry，也就是在边界上的非退化的规范冗余的自发破缺。而且这种破缺的简并真空之间是不存在超选择的，对应的守恒荷也是有界的，所以才有了软定理这么丰富的红外现象。但是，large guage symmetry 的一个子群，global 的规范对称性（真正的对称性）并没有破缺，毕竟从软定理能看到电荷守恒还是满足的，你也可以直接在 25.4 中取 $\epsilon = \text{const}$ ，也就对应 global 的规范变换，直接得到 $\sum_k Q_k = 0$ 。所以 large guage symmetry 破缺了但没完全破缺，虽然软光子不守恒，但是自然界好歹还是让电荷守恒了。

SECTION 27

Massive QED

前面创建的一系列理论的前提本质上都是 Cauchy 面³⁷ 为 \mathcal{I}^\pm 。但是对于有质量情况，有质量的粒子不会跑到 \mathcal{I}^\pm 这个“边”(boundary) 上去，而会跑到“体”(bulk) 里面的 i^\pm ，这样就导致柯西面不能选取为 \mathcal{I}^\pm 。前面的结论就会失效，但是软粒子相关的推导都不会受到任何影响，准确来说只有 24.39 会受到影响。也就是说我们需要重新考虑 Large gauge 对 Massive 物质场的作用，也就是去考虑 $Q_H^+|p\rangle$ 。前面我们的结论表明对于无质量的情况 $Q_H^+|p\rangle \sim Q_k \varepsilon(z, \bar{z})|p\rangle$ ，这里 ε 是天球上的 Large gauge，自然的就会去想看一下 Large gauge 在 i^\pm 上的作用，这要求我们把边上的 ε 延拓到体上去³⁸。为了明确起见，下面的讨论在 Lorenz 规范 $\nabla_\mu A^\mu = 0$ 下进行，主要参考文献 [86]，不依赖于

³⁷ 就是 initial data 所处的超曲面

³⁸ 非常有 AdS/CFT 的味道了，后面会看到我们使用的格林函数就是 bulk-to-boundary 传播子

度规的讨论见 [62]。那么“延拓”之后的 $\varepsilon(x)$ 应该满足：

$$\square \varepsilon \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu \varepsilon = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \varepsilon(z, \bar{z}) \quad (27.1)$$

上式有下面形式的解：

$$\varepsilon(x) = \int d^2 \hat{q} G(x, \hat{q}) \varepsilon(\hat{q}) \quad (27.2)$$

其中：³⁹

$$\left. \begin{aligned} \square G(x, \hat{q}) &= 0 \\ \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ u \text{ fixed}}} G(x, \hat{q}) &= \delta^2(\hat{x} - \hat{q}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(x, \hat{q}) = -\frac{\sqrt{\gamma(\hat{q})}}{4\pi} \frac{x^\mu x_\mu}{(q \cdot x)^2} \quad (27.3)$$

³⁹ 稍微有点符号混乱，下面的 q 值的是 [13.10](#) 定义的 q^0 归一化后的 \hat{q}^μ ，而前面的 \hat{q} 指的是其空间部分

不难验证 G 还有一个比较好的性质是：

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ v=u+2r \text{ fixed}}} G(x, \hat{q}) = \delta^2(\hat{x} + \hat{q}),$$

这样就自动满足要求的 ε 在 \mathcal{I}_\mp^\pm 两个天球上对径认同。不如说这是因为我们取了 Lorenz 规范带来的方便，因为前面 argue 过 \mathcal{CPT} 和 Lorentz 不变性共同带来对径认同。

为了研究 i^\pm ，比较合适的坐标选取是利用 Mink₄ 的 \mathbb{H}_3, dS 划分，见图 [17](#)：

$$\tau^2 = -x^\mu x_\mu = t^2 - r^2 \begin{cases} \tau^2 > 0, & \mathbb{H}_3 (\text{Euclidean AdS}_3) \\ \tau^2 < 0, & dS_3 \end{cases} \quad (27.4)$$

研究 i^0 时使用 dS 那些 Slice，这里我们用 \mathbb{H}_3 ，选取坐标为 $(\rho, \tau, \hat{x}(z, \bar{z}))$ ，其中 $\rho \equiv \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}}$ 。得到 Mink₄ 上的度规形式：

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 \left[\frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (27.5)$$

取 $d\tau = 0$ 就得到了在 \mathbb{H}_3 上的诱导度规。格林函数可以相应的写成形式：

$$G(\tau, \rho, \hat{x}; \hat{q}) = \frac{\sqrt{\gamma(\hat{q})}}{4\pi \left[\sqrt{1 + \rho^2} - \rho \hat{q} \cdot \hat{x} \right]^2} \quad (27.6)$$

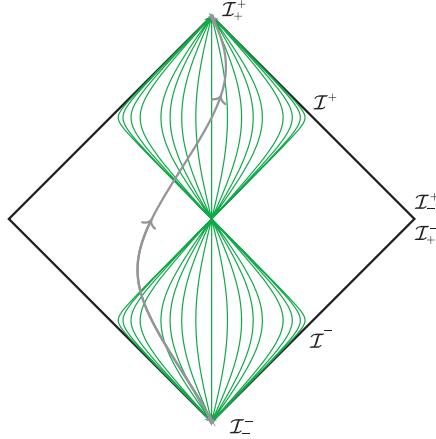
图 [17](#) 上的 slice 是按照 τ 划分的，按照 ρ 划分应该为图 [11](#)。考虑匀速运动的有质量粒子， $\vec{r} = \frac{\vec{p}}{E}t + \vec{r}_0$ ：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{|\frac{1}{E}\vec{p}t + \vec{r}_0|}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{E}\vec{p}t + \vec{r}_0\right)^2}}, \\ \tau &= \sqrt{t^2 - r^2} = \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{E}\vec{p}t + \vec{r}_0\right)^2}, \\ \hat{x} &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{p}t + E\vec{r}_0}{|\vec{p}t + E\vec{r}_0|}. \end{aligned} \quad (27.7)$$

取 $t \rightarrow \infty$ 的极限：

$$\tau \rightarrow \frac{m}{E}t \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \frac{|\vec{p}|}{m}, \quad \hat{x} \rightarrow \hat{p}. \quad (27.8)$$

可以看到粒子的世界线最终会趋近于某个 ρ slice，而且在 i^+ 球上的方位也是确定的。这和前面 \mathcal{I}^+ 上的情况完全相同，只不过那个时候是 $\mathbb{R} \times S^2$ 的结构，我们也是用粒子在哪个天球 (u) 以及在天球上的何处 (z, \bar{z}) 来标记粒子。现在的步骤就是写下辛形式进行量

图 11. ρ slices in $Mink_4$

子化找到对易子。不难猜到最终的结果为：

$$Q_\varepsilon^{+H} |\vec{p}\rangle = Q\varepsilon \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \hat{p} \right) |\vec{p}\rangle \quad (27.9)$$

与前面无质量的情况完全类似，只是这个时候 large gauge ε 不是 boundary 上的，而是 bulk 里的。但是这个结果并非显然，前面我们虽然是直接使用 Noether 定理“看”出来的，但更严谨的做法还是得去构造带电粒子的相空间辛形式，搞渐近分析和 surface charges 那一套。文献 [86] 对复标量场，也就是标量 QED 进行了仔细分析，稍微总结一下思路，首先是弯曲时空量子场论中算过自由标量场的模式展开，其和平直时空一样是傅里叶展式：⁴⁰

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} (b(\vec{p})e^{ip \cdot x} + d^\dagger(\vec{p})e^{-ip \cdot x}) \quad (27.10)$$

利用 ρ, τ 可以将相因子写成：

$$p \cdot x = \tau \left[-\sqrt{p^2 + m^2} \sqrt{1 + \rho^2} + \rho \vec{p} \cdot \hat{x} \right] \equiv -\tau f(\vec{p}) \quad (27.11)$$

⁴⁰ Lecture[14] 的习题里面讨论了这个问题，但讨论的是更为简单的 $\phi = \phi^\dagger$ 的实标量场，而我们标量 QED 里面需要的是复标量场，这样才有 $U(1)$ 对称性，参与耦合的 $U(1)$ 流不等于 0，所以下面我按照文献 [86] 的公式，顺着习题的思路进行了改写

类似于前面对光子的处理，我们感兴趣荷是在 $|\tau| \rightarrow \infty$ 的柯西面上定义的，所以去考虑 $\tau \rightarrow -\infty$ 附近的展开⁴¹。利用鞍点近似，将 $f(\vec{p})$ 在鞍点 $\vec{p} = m\rho\hat{x}$ 附近进行展开：

$$p \cdot x = -m\tau - \frac{\tau}{2} \mathcal{P}_{ij} (p_i - m\rho\hat{x}_i)(p_j - m\rho\hat{x}_j) + \mathcal{O}(p^3) \quad (27.12)$$

⁴¹ 后面一律考虑 Q^+ , $\tau \rightarrow -\infty$ 对应的 Q^- 讨论类似

这里 \mathcal{P}_{ij} 是 Hessian 矩阵：

$$\mathcal{P}_{ij} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} f \right|_{\vec{p}=m\rho\hat{x}} = \frac{1}{m} \left[\delta_{ij} - \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \hat{x}_i \hat{x}_j \right] \quad (27.13)$$

代入 φ 的模式展开得到：

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{i\pi/4} \\ \det \mathcal{P} = \frac{1}{m^3(1+\rho^2)} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \frac{1}{2m(2\pi)^3 \sqrt{1+\rho^2}} \left[b(m\rho\hat{x}) e^{-im\tau} \int d^3 p e^{-i\frac{\tau}{2}\mathcal{P}_{ij}p_i p_j} \right. \\
&\quad \left. + d^\dagger(m\rho\hat{x}) e^{im\tau} \int d^3 p e^{i\frac{\tau}{2}\mathcal{P}_{ij}p_i p_j} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\tau^3 \det \mathcal{P}}}}{2m(2\pi)^3 \sqrt{1+\rho^2}} \left[b(m\rho\hat{x}) e^{-im\tau} e^{-3i\pi/4} + d^\dagger(m\rho\hat{x}) e^{im\tau} e^{3i\pi/4} \right] \\
&= \frac{\sqrt{m}}{2(2\pi\tau)^{3/2}} \left[b(m\rho\hat{x}) e^{-im\tau} e^{-3i\pi/4} + d^\dagger(m\rho\hat{x}) e^{im\tau} e^{3i\pi/4} \right]
\end{aligned} \tag{27.14}$$

现在选取用 τ 分割的某个 \mathbb{H}_3 Slice 作为柯西面⁴²。对应相空间辛形式为：⁴³

$$\Omega_\tau = \int d^3 V \tau^3 \partial_\tau \delta\varphi \wedge \delta\varphi + h.c. \tag{27.15}$$

进一步选取 $\tau \rightarrow \infty$ 对应的柯西面，这样就能使用 27.14 进一步简化式子：

$$\Omega_{\tau \rightarrow \infty} = -\frac{im^2}{2(2\pi)^3} \int d^3 V (\delta b(m\rho\hat{x}) \wedge \delta b^\dagger(m\rho\hat{x}) + b \leftrightarrow d) \tag{27.16}$$

这个辛形式得到的 b, b^\dagger 之间的对易关系与平直时空里的完全一致！

$$[b(m\rho\hat{x}), b^\dagger(m\rho'\hat{x}')] = \frac{2(2\pi)^3}{m^2} \delta(\rho - \rho') \delta^2(\hat{x} - \hat{x}') = (2\pi)^3 (2\omega_p) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') = [d(m\rho\hat{x}), d^\dagger(m\rho'\hat{x}')] \tag{27.17}$$

我们知道标量 QED 里面的 $U(1)$ 流为：

$$\mathcal{J}_\mu = ie\varphi(D_\mu\varphi)^\dagger + h.c., \quad D_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi \tag{27.18}$$

现在 hard charges 就可以利用 bulk 里面的 ε 以及 $\tau \rightarrow \infty$ 时的 $U(1)$ 流来定义：

$$Q_\varepsilon^{+H} = - \int_{\mathbb{H}_3} d^3 V \varepsilon(\rho, \hat{x}) j^\tau(\rho, \hat{x}) \tag{27.19}$$

其中：

$$j^\tau(\rho, \hat{x}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^3 \mathcal{J}^\tau(\tau, \rho, \hat{x}) = \frac{em^2}{2(2\pi)^3} (b(\rho, \hat{x}) b^\dagger(\rho, \hat{x}) - d(\rho, \hat{x}) d^\dagger(\rho, \hat{x})) \tag{27.20}$$

从物理上讲，我们可以认为这个荷由 large gauge 对 hard 粒子的作用生成，再利用 b, b^\dagger 之间的对易关系就可以得到 27.9。

类似于 25.2，可以得到：⁴⁴

$$\begin{aligned}
\langle \text{out} | Q_\varepsilon^+ &= -2 \int d^2 w \partial_{\bar{w}} \varepsilon \langle \text{out} | \partial_w N \\
&\quad + \sum_{k \in \text{massless}} Q_k \varepsilon(z_k, \bar{z}_k) \langle \text{out} | + \sum_{k \in \text{massive}} Q_k \varepsilon \left(\frac{|\vec{p}_k|}{m_k}, \hat{p}_k \right) \langle \text{out} |
\end{aligned} \tag{27.21}$$

Ward 恒等式为：

$$\begin{aligned}
&-2 \int d^2 w \partial_{\bar{w}} \varepsilon \partial_w \langle \text{out} | [N(w, \bar{w}) \mathcal{S} - \mathcal{S} N^-(w, \bar{w})] | \text{in} \rangle \\
&= - \left[\sum_{k \in \text{massless}} Q_k \varepsilon(z_k, \bar{z}_k) + \sum_{k \in \text{massive}} Q_k \varepsilon \left(\frac{|\vec{p}_k|}{m_k}, \hat{p}_k \right) \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle
\end{aligned} \tag{27.22}$$

⁴² 柯西面从几何上看一个重要的特性就是与所有粒子的世界线最终相交的类空曲面

⁴³ 这里 \mathbb{H}_3 表示 $\tau = 1$ 所对应的单位双曲面， $d^3 V$ 是上面 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变的积分测度

⁴⁴ 注意这里不使用上标 in, out 来标记出入射，螺旋度、电荷、能量的大小用 h, Q, p^0 表示，那么出射取正，入射粒子的物理量为 $-h, -Q, -p^0$ ，也就是在前面加了个 η_n 被我们省略了

取 $\varepsilon(w, \bar{w}) = \frac{1}{z-w}$, 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{1+z\bar{z}} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} [\omega \langle \text{out} | a_+(\omega \hat{x}(z, \bar{z})) \mathcal{S} | \text{in} \rangle] \\ &= e \left[\sum_{k \in \text{massless}} \frac{Q_k}{z - z_k} + \sum_{k \in \text{massive}} Q_k \varepsilon \left(\frac{|\vec{p}_k|}{m_k}, \hat{p}_k \right) \right] \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \end{aligned} \quad (27.23)$$

利用格林函数的又双焱叕一种表达式:

$$G \left(\frac{|\vec{p}_k|}{m}, \hat{p}_k; w, \bar{w} \right) = \frac{1}{2\pi} \partial_{\bar{w}} \left[\frac{\sqrt{2}}{1+w\bar{w}} \frac{p_k \cdot \epsilon^+}{p_k \cdot \hat{q}} \right] \quad (27.24)$$

得到: ⁴⁵

$$\varepsilon \left(\frac{|\vec{p}_k|}{m}, \hat{p}_k \right) = \frac{\sqrt{2}}{1+z\bar{z}} \frac{p_k \cdot \epsilon^+}{p_k \cdot \hat{q}} \quad (27.25) \quad \begin{matrix} \text{45 分部积分加上} \\ \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z-w} = 2\pi\delta^2(z-w) \end{matrix}$$

代回到 Ward 恒等式就再次得到了软定理!

SECTION 28

Further Progress

SUBSECTION 28.1

Subleading order

本节集中处理无质量标量 QED 中的软定理次领头阶贡献与 Ward 恒等式的对应, 文献 [87] 首先进行了处理, 而且引言部分总结了天球物理上的诸多疑点, 但注意这已经是十年前的文献了, 而且文章的处理思路与现在的处理方法是顺序相反的, 并非先利用对径认同找守恒荷。文献 [82] 对此进行了补充。

SUBSECTION 28.2

Magnetic monopole

Strominger 认为, 前面对软定理的推导是在微扰理论的框架下进行的 (使用了费曼图就肯定是在研究微扰场论了), 但是 QED 本身由于朗道极点的存在就必然是 UV 不完备的, 所以要计算软定理领头阶的非微扰贡献, 求助于构造一个非微扰的 QED 是徒劳。不过 Strominger 认为有磁荷的 QED 或许能解决这个问题 [88]。

磁荷同样可以和软光子相互作用, 磁荷对软定理领头阶的修正可以完全地通过电磁对偶的手段非常简洁地建立起来。

$$\tilde{F} = -\frac{2\pi}{e^2} * F, \quad \tilde{e} = \frac{2\pi}{e}, \quad \tilde{Q}_k = \frac{1}{\tilde{e}^2} \int_{S_k^2} * \tilde{F} = M_k, \quad \tilde{M}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{S_k^2} \tilde{F} = -Q_k \quad (28.1)$$

这里 S_k^2 表示包围第 k 个电/磁荷的球面。通过上面的对偶变换, 我们建立了 $(\tilde{Q}, \tilde{M}) \leftrightarrow (M, -Q)$ 的对应, 从数学结构上看, 磁荷和电荷是完全类似的。注意, 我们这里做的操作只是数学上的换元而已, 方便我们看出背后的数学结构, 并未事先假定电磁之间存在某种对偶。那么类似的磁荷也会和规范场 \tilde{A} 相互作用:

$$F = dA, \quad A = e\varepsilon_\alpha e^{iq \cdot x} \quad (28.2)$$

$$\tilde{F} = d\tilde{A} = -\frac{2\pi}{e^2} * dA, \quad \tilde{A} = \tilde{e}\tilde{\varepsilon}_\alpha e^{iq \cdot x} \quad (28.3)$$

所以磁荷那部分的修正只需要做替换 $A \mapsto \tilde{A}, e \mapsto \tilde{e}, \varepsilon_\alpha \mapsto \tilde{\varepsilon}_\alpha$ 即可得到。

$$S_0^\alpha = \sum_k \eta_k \frac{e Q_k p_k \cdot \varepsilon^\alpha}{q \cdot p_k} \rightarrow \sum_k \eta_k \frac{p_k \cdot (Q_k e \varepsilon^\alpha + M_k \tilde{e} \tilde{\varepsilon}^\alpha)}{q \cdot p_k} \quad (28.4)$$

这个式子可以进一步化简，将前面的对偶推到天球上去看：

$$\tilde{F}_{z\bar{z}}^{(0)} = \frac{2\pi i}{e^2} \gamma_{z\bar{z}} F_{ru}^{(2)}, \quad \tilde{F}_{r\bar{u}}^{(2)} = \frac{2\pi i}{e^2} \gamma^{z\bar{z}} F_{z\bar{z}}^{(0)}, \quad \tilde{F}_{u\bar{z}}^{(0)} = \frac{2\pi i}{e^2} F_{u\bar{z}}^{(0)} \quad (28.5)$$

最后一个式子说明：

$$\tilde{A}_z^{(0)} = \frac{2\pi i}{e^2} A_z^{(0)} \quad (28.6)$$

同时也给出了 ε_α 和 $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ 之间的比例系数。软定理（领头阶）最终化简为：

$$S_0^\pm = \sum_k \eta_k \frac{(e Q_k \pm \frac{2\pi i}{e} M_k) p_k \cdot \varepsilon^\pm}{q \cdot p_k} \quad (28.7)$$

Strominger 认为这应当是考虑了非微扰效应之后的软定理领头阶的精确表达式。类似 24.12，磁荷这边也有：

$$F_{z\bar{z}}^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} = -F_{z\bar{z}}^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (28.8)$$

负号是因为方向角选取对径认同，所以 $\partial_z \leftrightarrow -\partial z$ 。前面不考虑磁荷时，认为天球上 $F_{z\bar{z}} = 0$ 。这样就可以利用对径认同的天球上的任意函数 $\varepsilon(z, \bar{z})$ 定义守恒的荷：

$$\tilde{Q}_\varepsilon^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{I}_-^+} \varepsilon F = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{I}_-^+} d^2 z \varepsilon F_{z\bar{z}}^{(0)} \quad (28.9)$$

$$\tilde{Q}_\varepsilon^- = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{I}_+^-} \varepsilon F = -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{I}_+^-} d^2 z \varepsilon F_{z\bar{z}}^{(0)} \quad (28.10)$$

$$\boxed{\tilde{Q}_\varepsilon^+ = \tilde{Q}_\varepsilon^-} \quad (28.11)$$

再次得到了无穷多个守恒荷，对应的又是何种对称性呢？或许我们可以完全类似于电荷认为它对应磁荷的 large gauge symmetries：

$$\tilde{\delta}_\varepsilon \tilde{A}_z^{(0)} = \partial_z \varepsilon \quad (28.12)$$

利用 A 可以表达为：

$$\tilde{\delta}_\varepsilon A_z^{(0)} = -\frac{ie^2}{2\pi} \partial_z \varepsilon \quad (28.13)$$

从 A_z 这边看，加入磁荷后相当于原先的 $U(1)$ large gauge 变成了一个复化之后的 large gauge，对应的守恒荷也复化了。

按理说现在要做的事情就是重复前面模式展开、协变相空间量子化那一套去证明 Ward 恒等式和 28.7 之间的等价性，[88] 也这么做了，但是却存在一些非常大的 conjecture。首先认为 \tilde{Q}^\pm 由 28.12 生成就是一个猜想， \tilde{A} 确实存在 28.12 这样的 large gauge，但是最终这证明 \tilde{Q}^\pm 是其生成元需要构造协变相空间的量子化从而计算对易子。这就导出了另外一个 conjecture，我们并不知道磁荷的辛形式如何去构造，而且前面推导电荷那边辛形式非常重要的一个边界条件是假定没有磁荷，加入磁荷之后辛形式如何修改还不清楚，我们只能认为加入磁荷后 Q^\pm 依旧由电荷的 large gauge 生成。文献 [88] 就是在这些假定下去做的。

另外一个重要点，电荷那边的 large gauge 是 $U(1)$ gauge 的一个子群，常说 $U(1)$ gauge 不是 symmetry，只是冗余自由度，要么没有守恒荷，要么构建出的守恒荷其

实不守恒³, 这些 “symmetry” 是 trivial 的, 只是 redundancy, 并非渐近对称性, 我们可以把通常所说的 $U(1)$ gauge 称为 “bulk gauge”, 而天球上的 large gauge 是真正的渐近对称性。对于 QED 的情况, large gauge 是 bulk gauge 的子群, 或者说非平庸的子群, 但是磁荷这边就不一样了, 上面通过对偶看出来的渐近对称性并不能看成 bulk gauge 的子群, 毕竟都出现复化跑出 $U(1)$ 了, 所以通过这点可以看出, 并不是所有的渐近对称性都可以看作是 bulk 里的对称性的子群

SUBSECTION 28.3

Non-Abelian gauge theory

不像其它定理到非阿贝尔情形就非常棘手, 这一节的东西推广到非阿贝尔情形几乎是 trivial 的, 下面顺着文献 [71, 73] 的思路来回顾一下。

场强张量:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = \mathcal{F}_{\mu\nu}^a T^a \quad (28.14)$$

满足运动方程:⁴⁶

$$\nabla^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} - i [\mathcal{A}^\nu, \mathcal{F}_{\nu\mu}] = g_{YM}^2 j_\mu^M \quad (28.15) \quad \text{取归一化} \\ f^{acd} f^{bcd} = \delta^{ab} = \text{tr}[T^a T^b]$$

有规范对称性:

$$\delta_\varepsilon \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \varepsilon - i [\mathcal{A}_\mu, \varepsilon], \quad \delta_\varepsilon \phi_k = i \varepsilon^a T_k^a \phi_k, \quad \delta_\varepsilon j_\mu^M = -i [j_\mu^M, \varepsilon] \quad (28.16)$$

在 \mathcal{I}^+ 处渐近展开:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_z(u, r, z, \bar{z}) &= A_z(u, z, \bar{z}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \\ \mathcal{A}_r(u, r, z, \bar{z}) &= \frac{1}{r^2} A_r(u, z, \bar{z}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ \mathcal{A}_u(u, r, z, \bar{z}) &= \frac{1}{r} A_u(u, z, \bar{z}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (28.17)$$

场强有下面的展开形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ur} &= \frac{1}{r^2} F_{ur} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \mathcal{F}_{uz} = F_{uz} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathcal{F}_{z\bar{z}} = F_{z\bar{z}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\ F_{ur} &= \partial_u A_r + A_u, \quad F_{uz} = \partial_u A_z, \quad F_{z\bar{z}} = \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z - i [A_z, A_{\bar{z}}] \end{aligned} \quad (28.18)$$

上面是纯粹的渐近分析, 我们平时说的规范变换在无穷远处归 0, 这自然是保护前面场强的渐近展开的, 但实际上还有下面的无穷远处不归 0 的 large gauge 变换也不会改变场强的渐近展开形式:

$$\delta_\varepsilon A_z(u, z, \bar{z}) = D_z \varepsilon(z, \bar{z}) \quad (28.19)$$

和前面 QED 的分析一样, 不同的 ϵ 标记了不同的真空, 而且为了让散射是良定义的, 在 C-K 时空下, 必须要求:

$$A_z|_{\mathcal{I}_-^+} = A_z|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (28.20)$$

Large Guage Symmetry 也只允许对角的那部分了:⁴

$$\varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = \varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (28.21)$$

³我们讲对称性, 首先要可以从 Noether 定理导出可观测的守恒荷, 而且有相应的对物理态的对称变换。global 的 $U(1)$ 对称性确实 non-trivial, 是真正的 symmetry, 对应电荷守恒, 这其实上无穷远处不归零已经有 large gauge 的影子了, 但是 local $U(1)$ 是 trivial 的, 它导出电荷守恒并非是 Noether 定理的结论 (回忆 Noether 定理的那些标记连续对称性的参数是 global 的而不是 local 的)。

⁴注意这里 A, ϵ 都应当理解为和 T^a 色因子求和之后的矩阵

这是一个 non-trivial 的对称性，确实和 QED 一样会带来无穷多的守恒荷。守恒荷的非 abel 推广为：

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{g_{YM}^2} \int_{\mathcal{I}_-^+} \text{tr} [\varepsilon * F] \quad (28.22)$$

然后你就可以用 Ward 恒等式去建立与软定理之间的联系，更好说明问题的方式其实是直接在天球基底下把软定理写成 Kač-Moody Ward 恒等式的形式。推迟到 Part 八再来做这件事情。

现在先做一些准备工作，考虑一下非 abel 的软定理，这方面 [89]§36.3 是很不错的阅读材料。单个在壳软胶子出射到简单，考虑动量为 p_γ^μ ，螺旋度为 $\epsilon_\lambda(p_\gamma)$ ，色指标为 a 的软胶子出射，软定理可以表达为：

$$\lim_{p_\gamma^0 \rightarrow 0^+} [p_\gamma^0 \mathcal{M}^{a,\lambda}(p_\gamma)] = g_{YM} \left[\sum_{k \in \text{out}} \frac{p_k \cdot \epsilon_\lambda(p_\gamma)}{p_k \cdot \hat{p}_\gamma} T_k^a - \sum_{k \in \text{in}} \frac{p_k \cdot \epsilon_\lambda(p_\gamma)}{p_k \cdot \hat{p}_\gamma} (T_k^a)^* \right] \mathcal{M} \quad (28.23)$$

下标 k 表示第 k 个粒子以及其所处 $SU(3)$ 群表示。上式可以写成 CCFT 上关联函数的形式：

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(p_1) \cdots \mathcal{O}_n(p_n) \mathcal{O}^a(q, \varepsilon) \rangle_{U=1} &= g_{YM} \sum_{k=1}^n \frac{p_k \cdot \varepsilon}{p_k \cdot q} \langle \mathcal{O}_1(p_1) \cdots \\ &\quad T_k^a \mathcal{O}_k(p_k) \cdots \mathcal{O}_n(p_n) \rangle_{U=1} + \mathcal{O}(q^0) \end{aligned} \quad (28.24)$$

其中假设所有粒子均出射，入射 T^a 要取共轭。这里说一下下标 $U=1$ 的含义，在无穷远处规范场归 0， \mathcal{CS}^2 上会有一个平直联络 $U_z = U \partial_z U^{-1}$, $U \in \mathcal{G}$, $U=1$ 就对应平直联络 trivial，这是微扰论中的选取，只有这样，才会让 \mathcal{CS}^2 上不同点的色的定义是一致的。前面软定理就是建立在微扰论上的，所以要这样选取。

胶子同样会有 Ward 恒等式 $q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ ，所以考虑将 28.24 中 $\varepsilon \mapsto q$ ，这导致不被禁闭的散射过程必有：

$$\sum_{k=1}^n \langle \mathcal{O}_1(p_1) \cdots T_k^a \mathcal{O}_k(p_k) \cdots \mathcal{O}_n(p_n) \rangle_{U=1} = 0 \quad (28.25)$$

所以软胶子定理对应色守恒。

SUBSECTION 28.4

Higher dimensions

SUBSECTION 28.5

$\mathcal{N} = 1$ Super Symmetry

A Crush Course on CFT

CFT 经典教材是大黄书 [31]，教材 [70, 90] 也是不错的选择¹，还有一些比较好的讲义 [91–93]，共形场论的自举 (bootstrap) 方法也是非常重要的，可以见讲义 [94] 的专门介绍。CFT 也可以当作一门数学课来学习，偏重于数学的阅读材料有 [95]。

首先是一些 Overview 性质的介绍。CFT 无非就是一种特殊的 QFT，但是这个时候理论具有比 Poincaré 对称性更大的对称性，在二维的情况下甚至提升为无穷维的对称性，这种对称性能让我们不通过微扰场论直接确定关联函数。一般的 QFT 中我们用 Poincaré 的不同的不可约表示来标记不同的场，或者说，我们用自旋来标记场，到了 CFT 这边，我们还需要使用共形维数 Δ 来标记，对于 $s = 0$ 的标量场，共形维数定义为在 Dilation $x \mapsto \lambda x$ 下场变换为：

$$\phi'(\lambda \vec{x}) = \lambda^{-\Delta} \phi(\vec{x}) \quad (28.26)$$

但是这只是对 Dilation 要求场在共形变换下“协变”，进一步要求对任意共形变换“协变”就给出了初级场 (primary field) 的定义。^{2,3}

Definition 1

共形维数为 Δ 的初级场 ($s=0$) 定义为在任意共形变换下满足：

$$\phi'(\vec{x}') = \left| \frac{\partial \vec{x}'}{\partial \vec{x}} \right|^{\Delta/d} \phi(\vec{x}) \quad (28.27)$$

初级场将是后面研究的主要对象。二维的共形对称性比较特殊，分为 global 和 local 的，如果上面的“协变性”只对 global 的共形变换适用，那我们称之为准初级场 (quasi-primary field)，显然初级场一定是准初级场，反过来却不一定。二维情况下我们还使用复平面为坐标⁵，但是我们为了一些地方的方便，并不是考虑的 \mathbb{C} ，而是 \mathbb{C}^2 ，也就是说我们把 z, \bar{z} 看作是完全独立的变量，进在一些特殊情况下认为 $z^* = \bar{z}$ 。而且把 Δ 拆分为共形权 (h, \bar{h}) = $\frac{1}{2}(\Delta + s, \Delta - s)$ 在这一符号约定下，共形权定义变为：

$$\boxed{\phi'(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) = \lambda^{-h} \bar{\lambda}^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z})} \quad (28.28)$$

(准) 初级场定义变为：

$$\boxed{\phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z})} \quad (28.29)$$

如果 ϕ 全纯我们称为 **chiral**，反全纯称为 **anti-chiral**。无穷小共形变换 $x \mapsto x + \epsilon$ 下：

$$\boxed{\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(z, \bar{z}) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = - (h \partial_z \epsilon + \epsilon \partial_z + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}}) \phi(z, \bar{z})} \quad (28.30)$$

Remark

初级场的定义可以看作是一种拓宽的张量定义，考虑一个带 s 个协变指标的张量，在任意坐标变换 $x \mapsto x + \epsilon(x)$ 下：

$$-\delta \Phi_{\mu_1 \dots \mu_s} = \epsilon^\nu \partial_\nu \Phi_{\mu_1 \dots \mu_s} + (\partial_{\mu_1} \epsilon^\nu) \Phi_{\nu \mu_2 \dots \mu_s} + \dots + (\partial_{\mu_s} \epsilon^\nu) \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \nu}$$

⁵这是欧氏空间 CFT 的主要选取，也是后文研究的主要内容，Wick 转动到闵氏时空之后选取所谓光锥坐标。

¹ 伊藤克司先生的书还没有官方中文译本，不过这里有民间译本的重排本 <https://github.com/WHUZBF/CFT-book>

² 注意我们遵从大黄书的符号约定，和 [70, 92] 的定义恰巧相反，对最终 CFT 中的一些结论没有任何影响，仅仅只是中间推导过程有些细微的差别。

³ 对于 $s \neq 0$ 的情况 ϕ 需要额外带上指标，就像 Lorentz 指标一样。而这些指标使得 $\phi_{ab\dots}$ 构成 $SO(D)$ 的自旋 s 表示 ($s \in \mathbb{Z}$ 时可以通过找张量表示构造)。 $D = 2$ 时 $SO(2)$ 的不可约表示是一个 trivial 的相位因子，所以二维 CFT 并不需要 care 这些 $SO(D)$ 指标，初级场就简单由 28.27 定义。更多有关高维 CFT 的内容可见 [10]。

换到复平面，简单起见只考虑全纯部分，那么 $h = s$ ，上面的定义局限于 h 是整数，现在考虑任意取值，那些指标也没必要写出了，便得到：

$$-\delta\Phi = \epsilon\partial\Phi + s\partial\epsilon\Phi$$

这就是前面得到的无穷小变换形式。

同 QFT 一样，这些场都会量子化成算符。不像 QFT 中我们研究的场是有限多个的，比如说 QED 就是正负电子对应的 Dirac 场和一个 U(1) 规范场耦合，CFT 中我们研究的场很多情况下会是无穷多个的，因为我们把 $\phi, \partial\phi$ 看作是不同的场，因为他们是不同共形权的初级场。定义一个 CFT 第一步就是告诉我们理论中有哪些初级场，也就是一个谱 (Spectrum) $\{\mathcal{O}_{h,\bar{h}}\}$ 。CFT 中我们并非按照微扰场论那一套来建立关联函数的计算方法的，而会去关注场之间的算符乘积展开 (OPE)，后面将会看到自举给出了 OPE 的绝大多数信息，还有一些系数是自举无法确定的，需要 CFT 的定义给定，这是定义 CFT 的第二个 data。我们这样做是在算符的观点下看问题，或者说是在海森堡表象下看问题，那 CFT 的态是什么呢？这其实被所谓态算符对应联系起来。

最后想强调一点，正是因为 CFT 的思考方式和一般的 QFT 有比较大的不同，所以 CFT 的建立甚至是不需要已知理论的拉氏量的，我们需要知道的只是理论拥有的对称性，然后去找对称性的表示构造谱，能动量张量则刻画了 CFT 在共形变换下的性质，是构建 OPE 必须的，如果强行利用拉格朗日量进行分析反而会变得非常复杂，有的 CFT 甚至是没办法写下一个拉氏量的，但是通过自洽性分析我们是知道这种理论的存在性的，而且可以根据自举方法走得很远。

SECTION 29

Virasoro Algebra

讨论共形场论，都是在量子层面上已经消去共形反常后的理论，比如 YM 理论就是量子化后存在共形反常的 QFT，从而不能看作一个 CFT。二维 CFT 的共形代数是 $\text{Witt} \times \overline{\text{Witt}}$ ，后面我们讨论 CFT 其实都是在其中心扩张 $\text{Vir}_c \times \overline{\text{Vir}}_c$ 下进行⁴。这里我不打算讨论过多中心荷的物理意义，这应当是弦论课的内容，为何要引入中心荷可以从群表示的观点来看。

首先如果一个 CFT 具有某个对称性，这个对称性构成了一个群，那么体系的谱就生活在这个群的群表示之中⁵。也就是说假设对称代数为 $\mathfrak{V} \times \bar{\mathfrak{V}}^6$ ，则：

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \text{Rep}(\mathfrak{V})^2} m_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'} \mathcal{R} \otimes \bar{\mathcal{R}}' \quad (29.1)$$

但是这个表示只需要是个射影表示就好，而射影表示对应的是李代数的中心扩张的表示。前面处理洛伦兹群我们不用考虑那么多，因为我们这证明了理论总是可以 redefine 来消去中心荷，但是一般的共形场论至少都有 Virasoro 对称性，而这个代数的中心荷是 non-trivial 的，一般是不能消除的，所以我们考虑对称性并非直接考虑 Vir ，而是 Vir_c 。

Theorem 1

(Virasoro Algebra)

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad (29.2)$$

Remark | 如果我们考虑 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 子代数，会发现中心扩张是 trivial 的。

SECTION 30

Radial Quantization and Hilbert Space

⁴ 明确一下 convention，扩张前的代数用小写 l 标记，扩张后的用大写 L 标记

⁵ 严格说是表示的最高权是那些初级场，也就是 CFT 的谱，由这些谱生成的次级态最终张成整个 CFT 的希尔伯特空间，也就是对称代数的表示。

⁶ 注意在二维 CFT 中我们都会将对称代数复化为两个独立的部分。两个独立的李代数可以作为线性空间考虑他们的直和 $\mathfrak{V} \oplus \bar{\mathfrak{V}}$ ，这里写成 \times 也没错，是将他们考虑成集合，然后做卡氏积，由于两部分独立，所以这两者本质上没区别。

SUBSECTION 30.1

Radial Quantization

对于 $1+1$ 维时空，可以把空间方向一点紧化为圆，这样平面就会变为一个圆柱面，这样就可以引入圆柱面上的复坐标 $w = x^0 + ix^1$ ，这样 $w \sim w + 2\pi i$ 自动满足周期性条件，这也是弦论 worldsheet 的图像。而圆柱面又可以通过共形变换 $w \mapsto e^w$ 变到另一个复平面上：在这一变换下，时间方向变为了径向，空间方向变成了角向，而且把整个无

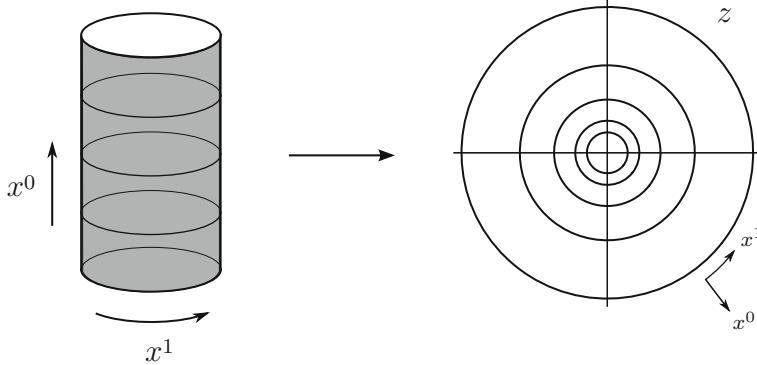


图 12. 径向量子化

穷远映射到了原点这一个点上。这下时间平移对应的哈密顿量 H 到复平面这边就变成了 dilation 算子 D ，而空间平移对应旋转 $e^{i\theta}$ ：

$$H = L_0 + \bar{L}_0, \quad P = i(L_0 - \bar{L}_0) \quad (30.1)$$

也正是因为时间方向变成了径向，时序积就应当变成“径向顺序积”，我们要去计算的就是径向顺序积的真空期望值，对于玻色子定义为：⁷

$$R(A(z)B(w)) \equiv \begin{cases} A(z)B(w) & \text{for } |z| > |w|, \\ B(w)A(z) & \text{for } |w| > |z|. \end{cases} \quad (30.2)$$

⁷ 费米子把下面的情况改成负号就好

圆柱上的场我们用 $\varphi(w, \bar{w})$ 表示，复平面上的场用 $\phi(z, \bar{z})$ 表示，那么根据共形变换：

$$\phi(z, \bar{z}) = z^{-h} \bar{z}^{-\bar{h}} \varphi(w, \bar{w}) \quad (30.3)$$

在圆柱那边的 CFT 中我们知道 $\varphi(w, \bar{w})$ 可以做平面波展开为 $e^{-ip^0 x^0 + ip^1 x^1}$ ，由于我们考虑的是欧氏空间的场论，Wick 转动后得到 $e^{-p^0 x^0 + p^1 x^1}$ ，即 $(e^{-w})^n (e^{-\bar{w}})^{\bar{m}}$ 的形式⁸。而这恰恰就是洛朗展开的每一项！所以复平面上的 CFT 的模式展开为洛朗展开：

Theorem 2 (Mode Expansion)

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} z^{-n-h} \bar{z}^{-\bar{m}-\bar{h}} \phi_{n, \bar{m}} \quad (30.4)$$

量子化场就是把 $\phi_{n, \bar{m}}$ 量子化为算符，这些算符具有 (n, \bar{m}) 的权。

QFT 微扰计算中一个非常重要的概念是渐近态，我们考虑的都是无穷远处的平面波入射经过复杂的相互作用后的平面波出射，微扰的角度看入射态就是在无穷远处的过去在真空附近施加一个扰动，也就是插入场算符，出射态也类似的这样做，这样就会自然出来时序积，然后 LSZ 约化这些的去计算振幅。同样的 CFT 这边也有这样的物理图景，

⁸ $n + m = p^0, n - m = p^1$

只是现在无穷远处过去被映射到原点这一个点上了，所以渐近态应该定义为：

$$|\phi\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle \quad (30.5)$$

在原点处上式不奇异自然要求：⁹

$$\phi_{n, \bar{m}} |0\rangle = 0 \quad \text{for } n > -h, \quad \bar{m} > -\bar{h} \quad (30.6)$$

⁹ 这似乎告诉我们 $n > -h, \bar{m} > -\bar{h}$ 对应的是 CFT 中的湮灭算符，后面讲到对易子会回到这里

完整得到渐近态的公式：

$$|\phi\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle = \phi_{-h, -\bar{h}} |0\rangle \quad (30.7)$$

这里有个非常有趣的地方，本来一个算符里面有很多模，最后只剩下了一个，所以在 CFT 中，态和局域算符是唯一对应的！这就是态-算符对应。这和一般的 QFT 形成了鲜明的对比，那里一个场对应是不同“方向”平面波的组合，没有做到一一对应，但是 CFT 做到正是因为他把一个无穷大的空间部分在无穷远的过去全部紧化到了原点这一处，为了加深理解我们用路径积分的观点来看一下。

回忆量子力学中的传播子可以用路径积分表达为：

$$G(x_f, x_i) = \int_{x(\tau_i)=x_i}^{x(\tau_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{iS} \quad (30.8)$$

那么演化后的末态波函数可以用初态波函数传播得到：

$$\psi_f(x_f, \tau_f) = \int dx_i G(x_f, x_i) \psi_i(x_i, \tau_i) \quad (30.9)$$

QFT 这边“波函数”是一个泛函 $\Psi[\phi(\sigma)]$ ，其模方表示在固定时间，空间中每个点 σ 上出现场构型 $\phi(\sigma)$ 的概率，可以用路径积分得到末态：

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), \tau_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(\tau_i)=\phi_i}^{\phi(\tau_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), \tau_i] \quad (30.10)$$

现在从柱面换到复平面 CFT：

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(r_i)=\phi_i}^{\phi(r_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), r_i] \quad (30.11)$$

不难发现初始态的作用是对 $|z| = r_i$ 的积分进行加权，构造初始态需要在无穷远的过去， $r_i \rightarrow 0$ ，从而初始态只对原点处积分进行加权，等价于在原点处插入一个算子，即：

$$\Psi[\phi_f; r] = \int^{\phi(r)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(z=0) \quad (30.12)$$

SUBSECTION 30.2

BPZ Conjugate

为了构建关联函数，我们需要“左矢”，也就是厄米共轭来构造出射态从而有内积，这里谈的 BPZ 共轭是厄米共轭在 Wick 转动后的径向量子化欧氏空间 CFT 上的自然推广。不想扯过多物理上的考量，[90] 从 Wick 转动后厄米共轭必须与时间反演一同定义 BPZ 共轭来解释了这一定义。

Definition 2 (BPZ Conjugate)

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \quad (30.13)$$

另一方面直接从洛朗展开得到:

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{+n+h} z^{+\bar{m}+\bar{h}} \phi_{n, \bar{m}} = \sum_{n, \bar{m} \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{+n-h} z^{+\bar{m}-\bar{h}} \phi_{n, \bar{m}} \quad (30.14)$$

从而有:

$$(\phi_{n, \bar{m}})^\dagger = \phi_{-n, -\bar{m}} \quad (30.15)$$

根据场的 BPZ 共轭定义, 出射态应该定义为:

$$\langle \phi | = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \langle 0 | \phi^\dagger(z, \bar{z}) = \lim_{w, \bar{w} \rightarrow \infty} w^{2h} \bar{w}^{2\bar{h}} \langle 0 | \phi(w, \bar{w}) = \langle 0 | \phi_{h, \bar{h}} \quad (30.16)$$

这里根据非奇异性要求了:

$$\langle 0 | \phi_{n, \bar{m}} = 0 \quad \text{for } n < h, \quad \bar{m} < \bar{h} \quad (30.17)$$

当然, 这里是根据定义严格来构造了一遍, 实际计算疯狂使用 30.15 就好。

SECTION 31

Ward Identity and OPE

SUBSECTION 31.1

Infinitesimal Conformal Ward Identity

前面 §4 已经看到共形对称性对应的守恒流可以使用 $T_{\mu\nu}\epsilon^\nu$ 来构造, 利用前面得到的最一般的 Ward 恒等式 19.11, 对整个时空进行积分:

$$\int dx^0 dx^1 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \Phi(x_1) \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle \quad (31.1)$$

$z = e^{x^0 + ix^1} = x + iy$, 进一步利用积分换元得到:¹⁰

¹⁰ 别忘了雅可比行列式

$$\begin{aligned} & \int dx^0 dx^1 \partial_\mu \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle \\ &= 4 \int dz d\bar{z} [\bar{\partial}(T_{\bar{z}\bar{z}}\epsilon) + \partial(T_{zz}\bar{\epsilon})] \\ &= 2 \int dxdy [\bar{\partial}(T_{\bar{z}\bar{z}}\epsilon) + \partial(T_{zz}\bar{\epsilon})] \end{aligned} \quad (31.2)$$

上面取了约定 $\epsilon^z \equiv \epsilon(z), \partial_z \equiv \partial$, 反全纯部分类似。现在考虑二元积分的格林公式:

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\Omega} dxdy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (31.3)$$

利用复变量 $z = x + iy$ 可得下面的形式:¹¹

¹¹ 就像是 Wick 转动一样, 我们总假设这样随意复化是可行的

$$\oint_{\partial\Omega} (P - iQ) dz + \frac{1}{2}(P + iQ) d\bar{z} = \int_{\Omega} dxdy (\partial(Q - iP) + \bar{\partial}(Q + iP)) \quad (31.4)$$

上式中所有的围道积分都假设方向相对于 z 而言是逆时针, 那么在 \bar{z} 平面上也就是逆时针, 不过为了方便, 而且 CFT 中我们也只考虑全纯部分, 反全纯部分只要做个 Conjugate 就好了, 后文中 $\oint d\bar{z}$, 表示围道方向相对于 \bar{z} 逆时针。

$$\int_{\Omega} dx dy (\partial \bar{f} + \bar{\partial} f) = \frac{1}{2i} \oint_{\partial \omega} f dz + \bar{f} d\bar{z} \quad (31.5)$$

再取:

$$T(z) \equiv -2\pi i T_{zz}, \bar{T}(\bar{z}) \equiv -2\pi i T_{\bar{z}\bar{z}} \quad (31.6)$$

不过这个归一化因子并不重要, 只是为了让 OPE 有一般的 convention, 后面比如自由玻色子这些具体模型我们都是先将归一化因子待定, 再根据 OPE 的形式来确定它, 只需要记住二维共形场论中 T_{zz} 始终全纯, $T_{\bar{z}\bar{z}}$ 始终反全纯就好了。归一化能动张量后, 得到初级场的 Ward 恒等式:

$$\sum_{i=1}^n \langle \Phi(x_1) \cdots \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \langle (T(z)\epsilon(z)dz + \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})d\bar{z}) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle \quad (31.7)$$

这里积分围道包围所有 w_i 。根据上式我们可以定义 **Conformal charge**:

$$Q \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz T(z)\epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})) \quad (31.8)$$

这样便有:

$$-\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi = [Q, \Phi] \quad (31.9)$$

SUBSECTION 31.2

Operator Product Expansion

但是 31.9 表面上有个非常大的漏洞, 那就是因为全纯, 直接导致围道积分始终为 0。解决这一问题是注意到 Q 是一个算符, 需要作用到其它场上面, 而两个算符靠的非常近时真空涨落发散¹², 上式积分中出现极点。也正是极点的存在导致我们定义局域算符之间的对易子的时候需要做正规化:

$$[A(z, \bar{z}), B(w, \bar{w})] = \lim_{\substack{|z| \rightarrow |w| \\ |z| > |w|}} A(z, \bar{z})B(w, \bar{w}) - \lim_{\substack{|z| \rightarrow |w| \\ |w| > |z|}} B(w, \bar{w})A(z, \bar{z}) \quad (31.10)$$

这直接导致对易子的计算可以等价于对径向顺序积的计算:¹³

¹² 类似于 $a_p, a_p^\dagger \sim \delta(0)$

¹³ 后文中 $\mathcal{C}(w)$ 表示只绕 w 的逆时针围道

$$\begin{aligned} \oint dz [A(z), B(w)] &= \oint_{|z| > |w|} dz A(z)B(w) - \oint_{|z| < |w|} dz B(w)A(z) \\ &= \oint_{\mathcal{C}(w)} dz R(A(z)B(w)), \end{aligned} \quad (31.11)$$

现在利用只含一个初级场的无穷小变换 Ward 恒等式, 或者说 31.9, 注意到 28.30, 以及:¹⁴

$$\begin{aligned} h(\partial_w \epsilon(w)) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz h \frac{\epsilon(z)}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}), \\ \epsilon(w)(\partial_w \phi(w, \bar{w})) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (31.12)$$

¹⁴ 回忆 n 阶极点留数公式:

$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$

得到全纯部分：

$$R(T(z)\phi(w, \bar{w})) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (31.13)$$

后面的省略号表示非奇异的项，大多数情况下我们要用的是 OPE 的奇异部分，因为它完全包含了和对易子一样的信息。像这样的把算符展开成其它算符和的形式称为 **OPE**。在一般的 QFT 中我们计算时序积需要先写下路径积分，然后进行微扰展开算费曼图，但是 CFT 中我们只需要去考虑 OPE 就好了，对称性为我们简化了许多。后面写 OPE 会省略 $R(\cdot)$ ，利用算符和能动张量之间的 OPE 我们还能给出一个初级场的等价定义：

Theorem 3 | 一个场是共形权为 (h, \bar{h}) 的初级场当且仅当它满足：

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \dots \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\phi(w, \bar{w}) + \dots \end{aligned} \quad (31.14)$$

再次强调，之后写下的所有的 OPE 都应当认为是在时序关联函数中插入算符时成立的关系！而且因为是时序积之中的关系：

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})\langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle \quad (31.15)$$

所以 OPE 结合律和交换律都自动满足。上式中 \dots 表示其它任意算符的插入，当然既然是级数总有一个收敛半径，何时 OPE 的插入是有效的是我们需要关心的，从前面对 OPE 的推导可以看出我们要求积分围道中只有 w 这一个奇点，所以 OPE 是精确的当且仅当其它算符的插入点 $\{w_i\}$ 满足 $|w - w_i| > |z - w|$ 。

现在再回到 Ward 恒等式 31.7，但是现在考虑有多个 Φ 的插入，从前面对 OPE 的分析得知围道内的极点是 $\{w_i\}$ ，然后利用柯西定理将等式右边的积分换成对绕每个极点的围道积分求和得到：¹⁵

$$\begin{aligned} 0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \left[\langle T(z)\phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle \right] \end{aligned} \quad (31.16)$$

等式左边再次利用 31.12，得到所谓共形 Ward 恒等式（仅适用于初级场）：¹⁶

$$\begin{aligned} &\langle T(z)\phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle + \text{regular} \end{aligned} \quad (31.17)$$

¹⁵ 我们预先假定了 $\epsilon(z)$ 没有 $\{w_i\}$ 以外的极点，这对后面推导没影响

¹⁶ 注意这并不是代入 T, ϕ 之间 OPE 得到的，因为前面说过 OPE 收敛半径等于与 OPE 处最近的其它算符插入处的距离。而我们下面要导出的等式与算符插入点完全无关，推导过程中看到我们将围道变形为单独绕每个 $\{w_i\}$ 的围道来使得 OPE 的插入是精确的。

31.2.1 TT OPE

CFT₂ 中非常重要的 OPE 是两个能动张量之间的 OPE，就平面上的二维共形场论而言，chiral 和 anti-chiral 部分是完全解耦的，所以：

$T(z)\bar{T}(\bar{w}) = 0$

(31.18)

回忆能动张量 $T \sim \frac{\delta S}{\delta} g$, 现在来数质量纲, 由于 S 最终要放到指数上, 所以 $[S] = 0$, 再根据泛函导数定义 $\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta^D(x - y)$, 所以 $[f] + \left[\frac{\delta}{\delta f} \right] = [\delta^D] = D^{17}$ 。由于 $[g] = 0$, 所以 $[T] = 2$, 这暗示着在 dilation 下 T 的共形权为 $(2, 0)$, 根据 31.14 得到:

$$T(z)T(w) = \dots + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \quad (31.19)$$

第一个省略号是因为 T 不一定是初级场! 第二个省略号表示奇异项。但是由于 $[TT] = 4$, 所以最奇异的项只能是 $(z-w)^{-4}$, 而且分子只能是一个常数, 我们取归一化为 $c/2$ 得到:¹⁸

Theorem 4 (TT OPE)

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \quad (31.20)$$

$\bar{T}\bar{T}$ 的 OPE 取个 conjugate 就好。

有两点需要解释一下, 首先是为何没有 $(z-w)^{-3}$ 项的加入? 这可以解释为由于 OPE 的交换律, 所以 $z \leftrightarrow w$ 对称性会紧闭所有奇数次数项。但是有一个例外是 $(z-w)^{-1}$:

$$T(w)T(z) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w) + 2(z-w)\partial T(w)}{(z-w)^2} - \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots = T(z)T(w) \quad (31.21)$$

可见 $(z-w)^{-1}$ 的对称性被更低一阶项分子的泰勒展开保护, 但是 $(z-w)^{-3}$ 的更低一阶分子是常数, 泰勒展开是 trivial 的。

虽然 T 并非初级场, 但是是准初级场, 因为 $\{L_0, L_{\pm 1}\}$ 的中心扩张是 trivial 的。虽然不是初级场, 但是能动张量在 $z \mapsto f(z)$ 的共形变换下的行为可以如下式描述:

Theorem 5

$$T'(f(z)) = \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^{-2} [T(z) - \frac{c}{12} S(f(z), z)] \quad (31.22)$$

其中 $S(f, z)$ 是 Schwarzian 导数, 定义为:

$$S(w, z) = \frac{1}{(\partial_z w)^2} \left((\partial_z w)(\partial_z^3 w) - \frac{3}{2} (\partial_z^2 w)^2 \right) \quad (31.23)$$

观察一下无穷小共形变换下能动张量的性质:

$$\begin{aligned} -\delta_\epsilon T(z) &= [Q, T] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z)} dw \epsilon(w) T(w) T(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z)} dw \epsilon(w) \left(\frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z T(z)}{w-z} + \dots \right) \\ &= \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) + 2T(z) \partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z). \end{aligned} \quad (31.24)$$

不难证明在无穷小变换下 31.22 的正确性。现在来考虑 T 模展开的对易子:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad \text{where} \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad (31.25)$$

¹⁷ 最后一个等号是因为 $\int dx^D \delta^D(x-y) = 1$, $[x] = -1$

¹⁸ 下面等式说明了能动张量在 $z \rightarrow \infty$ 处有性质:

$$T(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{z^4}\right)$$

这在共形自举中可看作是一大公理, 实际上也可看作是共形 Ward 恒等式的一个假设

PROOF

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} [T(z), T(w)] \\
&= \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} R(T(z)T(w)) \\
&= \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right) \\
&= \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \left((m+1)m(m-1)w^{m-2} \frac{c}{2 \cdot 3!} \right. \\
&\quad \left. + 2(m+1)w^m T(w) + w^{m+1} \partial_w T(w) \right) \\
&= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{c}{12}(m^3 - m) \mid w^{m+n-1} \right. \\
&\quad \left. + 2(m+1)w^{m+n+1} T(w) + w^{m+n+2} \partial_w T(w) \right) \\
&= \frac{c}{12}(m^3 - m) \delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} \\
&\quad + 0 - \underbrace{\oint \frac{dw}{2\pi i} (m+n+2)T(w)w^{m+n+1}}_{=(m+n+2)L_{m+n}} \\
&= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m) \delta_{m,-n}
\end{aligned} \tag{31.26}$$

上面这一套是非常一般的做法。

□

所以能动张量的 Laurent 模满足的是 Virasoro 代数。将这一套做法放到 31.14 得到：

$$[L_m, \phi_n] = ((h-1)m - n) \phi_{m+n} \tag{31.27}$$

SUBSECTION 31.3

n-point correlators ($n < 4$)

利用共形对称性实际上可以完全确定四点以下关联函数的形式。先来考虑准初级 chiral 场的关联函数，前面考虑的都是无穷小变换的 Ward 恒等式，确定准初级场的关联函数重点是全局共形变换 $\{L_0, L_{\pm 1}\}$ 子代数。共形变换下关联函数变换最一般形式的如下：

$$\langle \phi'_1(x'_1) \cdots \phi'_N(x'_N) \rangle = \langle \phi_1(x'_1) \cdots \phi_N(x'_N) \rangle \tag{31.28}$$

上式等价于：

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}_i} \Big|_{z=z_i, \bar{z}=\bar{z}_i} \langle \phi_1(z'_1, \bar{z}'_1) \cdots \phi_n(z'_n, \bar{z}'_n) \rangle \tag{31.29}$$

可以通过考察路径积分轻易得到。利用这一等式就可以得到一点关联函数必定是 trivial 的，这也可以根据前面的态算符对应要求的 30.6 和 30.17 得到。

Theorem 6 (2-pt)

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij} \delta_{h_i, h_j}}{(z-w)^{2h_i}} \tag{31.30}$$

Theorem 7 (3-pt)

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}} \tag{31.31}$$

| 其中 $z_{ij} \equiv z_i - z_j$

Remark $d_{\phi\phi}, C_{123}$ 可以用关联函数写成下面的形式:

$$d_{\phi\phi} = \langle \phi | \phi \rangle \quad (31.32)$$

$$C_{123} = \langle 0 | \phi_{(1)+h_1} \phi_{(2)h_3-h_1} \phi_{(3)-h_3} | 0 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_{(2)h_3-h_1} | \phi_3 \rangle \quad (31.33)$$

这里 $\phi_{(i)n}$ 表示 ϕ_i 的第 n 个 Laurent 模。

另外根据关联函数的单值性, 还进一步要求¹⁹ Chiral 场的共形权只能是整数或者半整数。把反全纯部分也加进来考虑得到:

- 2-pt:

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{d_{12}}{z_{12}^{h_1+h_2} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}} \delta_{h_1, h_2} \delta_{\bar{h}_1, \bar{h}_2} \quad (31.34)$$

- 3-pt:

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle \\ &= \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1} \bar{z}_{13}^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}} \end{aligned} \quad (31.35)$$

根据 OPE 的交换性和结合性可以知道 $C_{123} = C_{231} = C_{312}$ 。

关于这些公式的详细推导 [90] 上面都有, 这里主要考虑用无穷小 Ward 恒等式的方法, 但是我们考虑的毕竟是准初级场, 所以只需要考虑 $\epsilon(z) = \epsilon_{-1} + \epsilon_0 z + \epsilon_1 z^2$ 。将 31.28 在无穷小变换下展开得到全纯部分:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (h_i \partial_i \epsilon(z_i) + \epsilon(z_i) \partial_i) \langle \phi_1(z_1) \cdots \phi_n(z_n) \rangle = 0} \quad (31.36)$$

这是一个微分方程, 我们比较关心 $\epsilon(z) = \epsilon_{-1} + \epsilon_0 z + \epsilon_1 z^2$ 的情况, 分开写可以写成:

$$\begin{aligned} & \sum_i \partial_{w_i} \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle = 0 \\ & \sum_i (w_i \partial_{w_i} + h_i) \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle = 0 \\ & \sum_i (w_i^2 \partial_{w_i} + 2w_i h_i) \langle \phi_1(w_1) \cdots \phi_n(w_n) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (31.37)$$

前面导出的 Ward 恒等式称为 local 的, 现在这三个称为 global 的。所以我们可以通过求解这个微分方程来确定关联函数的形式, 不难验证 31.30 和 31.31 就有这一特征。这种将关联函数计算转化为微分方程的求解的方法后面我们还会碰到。

Remark 虽然我们这一节强调考虑准初级场, 不过 31.28, 31.29 和 31.36 是非常一般的, 对初级场也适用, 只是对于准初级场 ϵ 被限制为 $\epsilon_0, \epsilon_{\pm 1}$ 。准初级场的关联函数满足的方程 31.36 被限制为三个 31.37, 初级场会有更多方程, 对关联函数的限制也更大, 但是并不一定能保证这些限制会给出更多有用信息, 可能依旧不能消除理论中的大部分自由度。

但是四点及以上函数就不能确定到只差一个待定系数了, 不过我们仍旧可以利用所谓交叉对称性 (Crossing Symmetry) 走的很远。

SUBSECTION 31.4

General Form of the OPE

为了简化讨论，先从 chiral 场开始， $\{\phi_i\}$ 表示 CFT₂ 的 Spectrum，下标 i 表示共形权为 h_i ，则 OPE 有下面的一般形式：

Theorem 8

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_{k,n \geq 0} C_{ij}^k \frac{a_{ijk}^n}{n!} \frac{1}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} \partial^n \phi_k(w) \quad (31.38)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_{ijk}^n &= \binom{2h_k + n - 1}{n}^{-1} \binom{h_k + h_i - h_j + n - 1}{n}, \\ C_{ijk} &= \sum_l C_{ij}^l d_{lk} \end{aligned} \quad (31.39)$$

由于 1-pt 关联函数始终为 0，所以上面的 OPE 对两点关联函数的贡献只能是 $n = 0$ 且 $h = 0$ 的常值初级场贡献，也即 $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle \propto \frac{\delta_{h_1, h_2}}{z_{12}^{h_1+h_2}}$ 。

PROOF

考虑下面的关联函数：

$$\langle (\phi_i(z)\phi_j(1)) \phi_k(0) \rangle = \sum_{l,n \geq 0} C_{ij}^l \frac{a_{ijl}^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^{h_i+h_j-h_l-n}} \langle \partial^n \phi_l(1) \phi_k(0) \rangle \quad (31.40)$$

这里 OPE 的插入有效已经暗示 $|z-1| < |0-1| = 1$ 。利用两点关联函数的一般形式得到：

$$\left. \langle \partial_z^n \phi_l(z) \phi_k(0) \rangle \right|_{z=1} = \left. \partial_z^n \left(\frac{d_{lk} \delta_{h_l, h_k}}{z^{2h_k}} \right) \right|_{z=1} = (-1)^n n! \binom{2h_k + n - 1}{n} d_{lk} \delta_{h_l, h_k} \quad (31.41)$$

而 3-pt 关联函数的一般形式前面已经给出：

$$\langle (\phi_i(z)\phi_j(1)) \phi_k(0) \rangle = \frac{C_{ijk}}{(z-1)^{h_i+h_j-h_k} z^{h_i+h_k-h_j}} \quad (31.42)$$

自洽性直接要求：

$$\sum_{l,n \geq 0} C_{ij}^l d_{lk} a_{ijk}^n \binom{2h_k + n - 1}{n} (-1)^n (z-1)^n \stackrel{!}{=} \frac{C_{ijk}}{(1+(z-1))^{h_i+h_k-h_j}} \quad (31.43)$$

由于 $|z-1| < 1$ ，所以可对右边利用下面的广义二项式定理进行展开：

$$\frac{1}{(1+x)^H} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{H+n-1}{n} x^n \quad (31.44)$$

比较 31.43 两边就得到了系数 31.39，这其实就是 Bootstrap 的思想。 \square

Laurent 模之间的一般对易关系形式为：

Theorem 9

$$[\phi_{(i)m}, \phi_{(j)n}] = \sum_k C_{ij}^k p_{ijk}(m, n) \phi_{(k)m+n} + d_{ij} \delta_{m,-n} \binom{m+h_i-1}{2h_i-1} \quad (31.45)$$

其中：

$$p_{ijk}(m, n) = \sum_{\substack{r, s \in \mathbb{Z}_0^+ \\ r+s=h_i+h_j-h_{k-1}}} C_{r,s}^{ijk} \cdot \binom{-m+h_i-1}{r} \cdot \binom{-n+h_j-1}{s},$$

$$C_{r,s}^{ijk} = (-1)^r \frac{(2h_k-1)!}{(h_i+h_j+h_k-2)!} \prod_{t=0}^{s-1} (2h_i-2-r-t) \prod_{u=0}^{r-1} (2h_j-2-s-u) \quad (31.46)$$

这里 \mathbb{Z}_0^+ 的意思是正整数以及 0，后面的乘积 \prod 在 $s=0$ (or $r=0$) 时定义为 1，上面的系数形式还有一个非常重要的信息，就是只有当 $h_k < h_i + h_j$ 时才有贡献。

通过共形对称性得到了 OPE 非常多的信息，唯一没有确定下来的只是一些系数，这就必须要 CFT 本身的一些性质了²⁰。

更一般的非手征（准）初级场 OPE 的一般表达式更加复杂，形式为：

$$\phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(w, \bar{w}) = \sum_p \sum_{\{k, \bar{k}\}} C_{ij}^p \frac{\beta_{ij}^{p, \{k\}} \bar{\beta}_{ij}^{p, \{\bar{k}\}} \phi_p^{\{k, \bar{k}\}}(w, \bar{w})}{(z-w)^{h_i+h_j-h_p-K} (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j-\bar{h}_p-\bar{K}}} \quad (31.47)$$

这里：

$$\{\hat{L}_{-k_1} \dots \hat{L}_{-k_n} \hat{\bar{L}}_{-k_1} \dots \hat{\bar{L}}_{-k_n} \phi_p(z, \bar{z})\}, \quad K \equiv \sum_i k_i \quad (31.48)$$

$\beta_{ij}^{p, \{k\}}$ 和前面的 a_{ijk}^n 一样是之和初级场的共形权有关的，是与理论本身无关的可以计算出来的系数，我们唯一不知道的就是 C_{ij}^p 。

31.4.1 Current Algebra

Definition 3

共形权为 1 的 chiral(anti-chiral) 场 $j(z)$ 称为流。

考虑一个谱为 N 个流的理论，根据前面 Laurent 模的一般形式得到：

$$[j_{(i)m}, j_{(j)n}] = \sum_k C_{ij}^k p_{111}(m, n) j_{(k)m+n} + d_{ij} m \delta_{m, -n} \quad (31.49)$$

d_{ij} 在 $i \neq j$ 时为 0，但是不同的 ij 对应的比例系数不同。我们总是可以通过 rescal 这些流，使得 $d_{ij} = k \delta_{i,j}$ ，然后再通过对流进行重新组合得到：

$$[j_m^i, j_n^j] = i \sum_l f^{ijl} j_{m+n}^l + km \delta^{ij} \delta_{m, -n} \quad (31.50)$$

这些流的模构成了一个 Lie 代数，显然中心荷 non-trivial，后面会进一步详细讨论。它实际上是仿射化之后得到的 *Kač-Moody* 代数。

SECTION 32

Crossing Symmetry

本节的目的是最大程度得到四点关联函数 $\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle$ 的信息。 $n < 4$ 的可以完全确定从数学上看是因为黎曼球面上任意两个或三个点，都可以通过共形变换映射为固定的 $\{0, 1, \infty\}$ ，但是四点我们最多只能将他们映射到 $\{0, x, 1, \infty\}$ ，

²⁰ 比如能动张量的形式，以及其它的对称性

其中 x 是交比 (Crossing Ratio)。

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}, \quad \bar{x} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)} \quad (32.1)$$

所以四点关联函数用前面的方法只能确定到一个与交比有关的函数。利用 31.28，我们知道任意四点关联函数可以与下面的关联函数联系起来：²¹

$$\propto \langle \phi_i(0,0)\phi_j(x,\bar{x})\phi_l(1,1)\phi_m(\infty,\infty) \rangle \equiv G_{lm}^{ij}(x,\bar{x}) \quad (32.2)$$

由于 OPE 由结合律，所以可以前两个先做 OPE，后两个在做 OPE，注意到 $\langle \phi_p | \phi_q \rangle \sim \delta_{h_p, h_q}$ ，我们可以将上式重写为：

$$G_{lm}^{ij}(x,\bar{x}) = \sum_p C_{ij}^p C_{lm}^p \mathcal{F}_{ij}^{lm}(p|x) \bar{\mathcal{F}}_{ij}^{lm}(p|\bar{x}) \quad (32.3)$$

这里的 $\mathcal{F}_{ij}^{lm}(p|x)$ 称为 **Conformal Block**，关联函数就是由这些 Block 线性组合而来的。再次利用 31.28，考虑 $z \mapsto 1-z$ 和 $z \mapsto 1/z$ ，有：

$$G_{lm}^{ij}(x,\bar{x}) = \langle \phi_i(1,1)\phi_j(1-x,1-\bar{x})\phi_l(0,0)\phi_m(\infty,\infty) \rangle = G_{im}^{lj}(1-x,1-\bar{x}) \quad (32.4)$$

$$G_{lm}^{ij}(x,\bar{x}) = x^{2h_j} \bar{x}^{2\bar{h}_j} \langle \phi_i(1,1)\phi_j\left(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}}\right)\phi_l(\infty,\infty)\phi_m(0,0) \rangle = x^{2h_j} \bar{x}^{2\bar{h}_j} G_{il}^{mj}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}}\right) \quad (32.5)$$

这让我们得到另外两个 $G(x,\bar{x})$ 的表达式：

$$G(x,\bar{x}) = \sum_p C_{im}^p C_{jl}^p \mathcal{F}_{im}^{jl}(p|1-x) \bar{\mathcal{F}}_{im}^{jl}(p|1-\bar{x}) \quad (32.6)$$

$$G(x,\bar{x}) = x^{-2h_j} \bar{x}^{-2\bar{h}_j} \sum_p C_{il}^p C_{jm}^p \mathcal{F}_{il}^{jm}\left(p|\frac{1}{x}\right) \bar{\mathcal{F}}_{il}^{jm}\left(p|\frac{1}{\bar{x}}\right) \quad (32.7)$$

这三个等式对应不同顺序的 OPE 缩并，就像是 QFT 中费曼图的 s,t,u 三个 channel， p 就像是中间的传播子，共形不变性要求这三个 $G(x,\bar{x})$ 的等式殊途同归，这就给出了 C_{ij}^p 必须要满足的一套等式，共形自举的思想就是通过这套方程完全确定 OPE 系数。

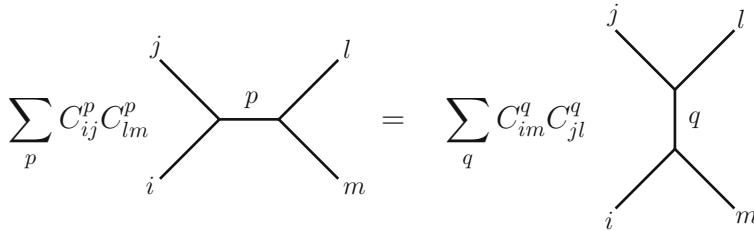


图 13. $G(x) = G(1-x)$ Crossing Symmetry 的图示

SUBSECTION 32.1

Fusing and Braiding Matrices

考虑一个比较简单的情形，CFT 的谱是个有限谱²²，这样 Conformal Blocks 构成了一个有限维线性空间，其中的某个线性组合得到的元素就是我们要的四点关联函数²³。这其实就是在说 32.3, 32.6 和 32.7 中的 Conformal Blocks 相差的仅仅是一个线性变换，

²² 比如 RCFT

²³ 当然还要把全纯反全纯组合起来

他们是同一个线性空间的不同基底！

$$\mathcal{F}_{ij}^{kl}(p \mid x) = \sum_q B_{\begin{bmatrix} j & k \\ i & l \end{bmatrix}_{pq}} \mathcal{F}_{ik}^{jl}\left(q \mid \frac{1}{x}\right) \quad (32.8)$$

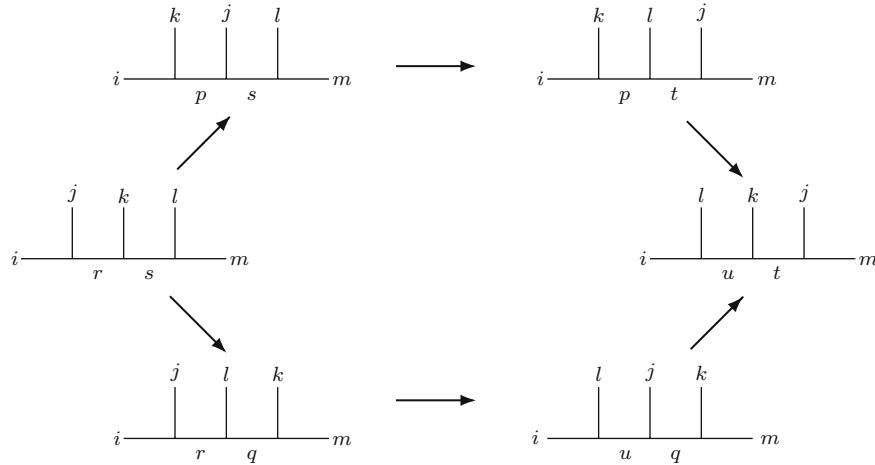
$$\mathcal{F}_{ij}^{kl}(p \mid x) = \sum_q F_{\begin{bmatrix} j & k \\ i & l \end{bmatrix}_{pq}} \mathcal{F}_{il}^{jk}(q \mid 1-x) \quad (32.9)$$

这里 B 称作 **Braiding Matrices**, F 称作 **Fusing Matrices**, p, q 是标记矩阵元, $\{i, j, l, m\}$ 标记矩阵本身。我们用类似轮换序图的形式来表达上面的两个方程:

$$\begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ i - p - l \end{array} = \sum_q B_{pq} \begin{array}{c} k \quad j \\ | \quad | \\ i - q - l \end{array}$$

$$\begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ i - p - l \end{array} = \sum_q F_{pq} \begin{array}{c} k \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ i - q - l \end{array}$$

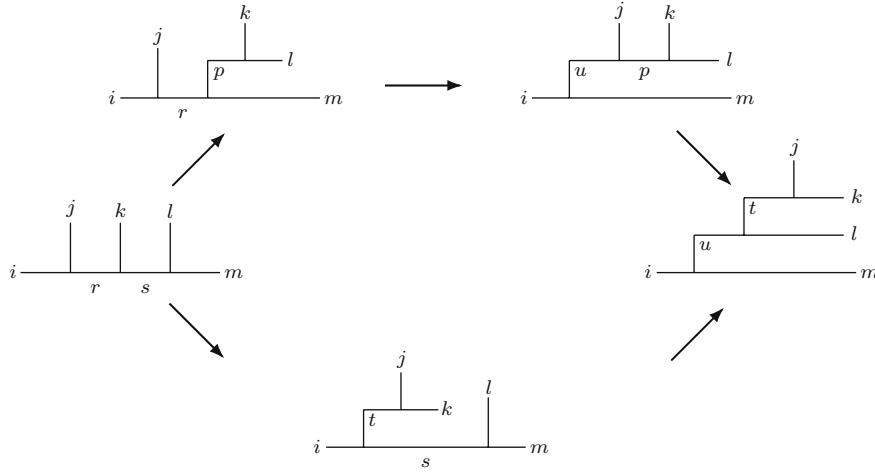
利用下面图表的交换性:



得到 hexagon 恒等式:

$$\boxed{\sum_p B_{\begin{bmatrix} j & k \\ i & s \end{bmatrix}_{rp}} B_{\begin{bmatrix} j & l \\ p & m \end{bmatrix}_{st}} B_{\begin{bmatrix} k & l \\ i & t \end{bmatrix}_{pu}} = \sum_q B_{\begin{bmatrix} k & l \\ r & m \end{bmatrix}_{sq}} B_{\begin{bmatrix} j & l \\ i & q \end{bmatrix}_{ru}} B_{\begin{bmatrix} j & k \\ u & m \end{bmatrix}_{qt}}} \quad (32.10)$$

上面的方程非常像 Yang-Baxter 方程, 所以 CFT 和可积性有很大的关联。但是注意上面这不是证明! 就和 YBE 的图形化规则推导一样, 只是便于计算和记忆。同样根据下面的图表交换:



得到 pentagon 恒等式:

$$F \begin{bmatrix} j & k \\ i & s \end{bmatrix}_{rt} F \begin{bmatrix} t & l \\ i & m \end{bmatrix}_{su} = \sum_p F \begin{bmatrix} k & l \\ r & m \end{bmatrix}_{sp} F \begin{bmatrix} j & p \\ i & m \end{bmatrix}_{ru} F \begin{bmatrix} j & k \\ u & l \end{bmatrix}_{pt} \quad (32.11)$$

SECTION 33

NOPs and Conformal family

SUBSECTION 33.1

Normal Ordered Products

两个算符的 OPE 在两个算符的插入位置一样时会发散, 这种发散就类似于一般 QFT 中的红外发散, 因为空间无限大, 所以真空零点能发散, 这种发散可以通过取算符的正规乘积 (NOP) 得到, 共形场论也有这样的做法。我们先考虑自由场, 也就是 $R(\phi \partial^n \phi)$ 最多只有一项是奇异的,²⁴那么我们直接减去真空期望值就去除了所有的发散项, 所以 NOP 可以定义为:

Definition 4

(NOPs)

$$:\phi_1(z)\phi_2(w): \equiv (\phi_1(z)\phi_2(w) - \langle\phi_1(z)\phi_2(w)\rangle) : \quad (33.1)$$

这里省略了所有的径向排序, 记收缩:

$$\overline{\phi(z)}\phi(w) \equiv \langle\phi_1(z)\phi_2(w)\rangle \quad (33.2)$$

缩并后是一个数, 可以提出去。显然在 $z \rightarrow w$ 后 OPE 的所有奇异性都被减除:

$$:\phi_1\phi_2:(w) \equiv \lim_{z \rightarrow w} (: \phi_1(z)\phi_2(w) :) \quad (33.3)$$

Theorem 10

(Wick)

$$\boxed{R[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)] = N[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n) + (\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n} \text{的所有可能缩并})]} \quad (33.4)$$

²⁴ 对于 QFT 那边就是场的模式展开可以完全分离成产生算符和湮灭算符之和

由于正规序插入到真空态之间恒为 0，所以任何没有完全缩并的项对真空期望值都没有贡献。

PROOF 关于 Wick 定理的证明可见任何一本正则量子化的 QFT 教材，比如余钊煥老师的讲义^a，这里只想强调定理本身依赖于前面对自由场的 NOP 定义。□

^a<http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html>

Example

$$\begin{aligned} R(\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d) = N & \left(\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d + \overbrace{\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \overbrace{\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \overbrace{\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \right. \\ & + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \\ & \left. + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \right) \end{aligned} \quad (33.5)$$

计算的下一步是将所有收缩的项放在一起，未收缩的项放在一起，对于玻色场由于满足对易关系可以随便移动场的位置，这一步是 trivial 的，不过费米场因为满足反对易关系，所以交换两个场位置时会产生一个负号需要额外注意。

左边减去右边，并取 $x_a, x_b \rightarrow x$ 和 $x_c, x_d \rightarrow y$ 的极限后得到两个 NOP 的时序积的 Wick 定理：

$$\begin{aligned} R[: \Phi_a \Phi_b : (x) : \Phi_c \Phi_d : (y)] = N & \left(\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d + \overbrace{\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \overbrace{\Phi_a \Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \right. \\ & + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \\ & \left. + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} + \Phi_a \overbrace{\Phi_b \Phi_c \Phi_d}^{} \right) \end{aligned} \quad (33.6)$$

这个计算实际上是非常一般的，他告诉我们计算 NOP 的时序积时跟没有 NOP 时一样计算，但是认为 NOP 内部的场之间的收缩为 0。

Remark

下面是一些比较有用的缩并等式：

$$A(z) : B^n : (w) = n A(z) B(w) : B^{n-1}(w) : \quad (33.7)$$

$$A(z) : e^{B(w)} : = A(z) B(w) : e^{B(w)} : \quad (33.8)$$

$$\begin{aligned} : e^{A(z)} :: e^{B(z)} : &= \sum_{m,n,k} \frac{k!}{m!n!} \binom{m}{k} \binom{n}{k} [A(z) B(w)]^k : A^{m-k}(w) B^{n-k}(w) : \\ &= \exp \left\{ \overbrace{A(z) B(w)} \right\} : e^{A(w)} e^{B(w)} : \end{aligned} \quad (33.9)$$

但是对于非自由场，NOP 不能这么定义，比如 TT 的 NOP 照此定义，仍然发散，所以对于一般场的 NOP 应当定义成减去所有的奇异项。

Definition 5

$$(A(z)B(w)) \equiv A(z)B(w) - \overbrace{A(z)B(w)} \quad (33.10)$$

这里 $\overbrace{A(z)B(w)}$ 表示 OPE 的所有奇异部分。注意我们引入了文献中另外一种表示 NOP 的方式： (\cdot) 。同样，定义：

$$(AB)(w) = \lim_{z \rightarrow w} (A(z)B(w)) \quad (33.11)$$

将 NOP 其中一个场做洛朗展开，然后可以将 OPE 用 NOP 表达为：

Theorem 11 (NOPs \iff OPEs)

$$\phi(z)\chi(w) = \text{sing.} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-w)^n}{n!} N(\partial^n \phi \chi)(w) \quad (33.12)$$

同样可以用 OPE 表达 NOP:

$$N(\phi\chi)(w) = \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\phi(z)\chi(w)}{z-w} \quad (33.13)$$

考虑 NOP 的 Laurent 模:

$$\begin{aligned} N(\phi\chi)(w) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} w^{-n-h^\phi-h^\chi} N(\phi\chi)_n, \\ N(\phi\chi)_n &= \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+h^\phi+h^\chi-1} N(\phi\chi)(w) \end{aligned} \quad (33.14)$$

Theorem 12

$$N(\phi\chi)_n = \sum_{k>-h^\phi} \chi_{n-k} \phi_k + \sum_{k \leq -h^\phi} \phi_k \chi_{n-k} \quad (33.15)$$

PROOF

$$\begin{aligned} N(\phi\chi)_n &= \oint_{C(0)} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+h^\phi+h^\chi-1} \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\phi(z)\chi(w)}{z-w} \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+h^\phi+h^\chi-1} \underbrace{\left(\oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\phi(z)\chi(w)}{z-w} - \oint_{|z|<|w|} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\chi(w)\phi(z)}{z-w} \right)}_{\mathcal{I}_2} \\ &\quad \underbrace{\phantom{\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+h^\phi+h^\chi-1}}}_{\mathcal{I}_1} \end{aligned} \quad (33.16)$$

计算 \mathcal{I}_1 得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z-w} \sum_{r,s} z^{-r-h^\phi} w^{-s-h^\chi} \phi_r \chi_s \\ &= \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} \sum_{p \geq 0} \left(\frac{w}{z}\right)^p \sum_{r,s} z^{-r-h^\phi} w^{-s-h^\chi} \phi_r \chi_s \\ &= \oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \sum_{p \geq 0} \sum_{r,s} z^{-r-h^\phi-p-1} w^{-s-h^\chi+p} \phi_r \chi_s. \end{aligned} \quad (33.17)$$

频繁利用 Cauchy 积分公式得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \sum_{p \geq 0} \sum_s w^{-s-h^\chi+p+n+h^\phi+h^\chi-1} \phi_{-h^\phi-p} \chi_s \\ &= \sum_{p \geq 0} \phi_{-h^\phi-p} \chi_{h^\phi+n+p} = \sum_{k \leq -h^\phi} \phi_k \chi_{n-k} \end{aligned} \quad (33.18)$$

对另外一项也同样计算就可以证明这个及其重要的等式了。 \square

这个等式其实非常好理解, 从前面对 CFT 的希尔伯特空间构造可以看到, 一个场的 Laurent 模当 $n > -h$ 时是湮灭算符, $n \leq -h$ 时是产生算符, 所以这个等式的含义就是相对 ϕ 而言将所有的产生算符排在前面, 湮灭算符放在后面, 这正是在 QFT 中对 NOP 最 naive 的定义!

另外， NOP 与 OPE 最大的不同是他并不满足交换律和结合律，这也意味着对多个算符的 NOP 定义有歧义²⁵，往往选取的是下面的嵌套定义：

$$(ABC \cdots DE) \equiv (A(B(C(\cdots (DE)))))) \quad (33.19)$$

另外， Wick 定理也失效了，不过我们有下面的等式：

Theorem 13 (Generalized Wick)

$$A(z)(BC)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} \frac{dx}{x-w} \left\{ \overline{A(z)} B(x) C(w) + B(x) \overline{A(z)} C(w) \right\} + \text{regular} \quad (33.20)$$

上式是对自由场的下面特殊的 Wick 定理的相互作用推广：

$$\phi_1(x) : \phi_2 \phi_3 : (y) = \overline{\phi_1(x)} \phi_2(y) : \phi_3(y) : + \overline{\phi_1(x)} \phi_3(y) : \phi_2(y) : + \underbrace{: \phi_1(x) \phi_2(y) \phi_3(y) :}_{\text{regular}} \quad (33.21)$$

还可以证明，虽然结合律失效了，但是有下面等式：

Theorem 14 (Rearrangement Lemma)

$$((AB)E) - (A(BE)) = (A([E, B])) + (([E, A])B) + ([(AB), E]) \quad (33.22)$$

E 一般取为 (CD) 。

T 不是初级场， $N(TT)$ 也不是初级场，但是下面定义的 $\mathcal{N}(TT)$ 是共形权为 $(4, 0)$ 的初级场：

$$\mathcal{N}(TT) = N(TT) - \frac{3}{10} \partial^2 T \quad (33.23)$$

后面会用到这个式子。

SUBSECTION 33.2

Verma module

从真空态出发，将 L_n 作为产生算符作用上去，得到的一系列态成为 Verma 模：

Definition 6 (Verma Module)

$$\{L_{k_1} \dots L_{k_n} |0\rangle |k_i \leq -2\} \quad (33.24)$$

中的元素称为 Verma Module。

根据态算符对应，每一个 Verma Module 都会对应一个场（不一定是初级场），可以证明这些场一定是能动张量或者其偏导或者它们的 NOP：

$$F \in \{T, \partial T, \dots, N(\dots)\} \quad (33.25)$$

SUBSECTION 33.3

Descendant states

前面是考虑一个真空态开始往上构造其它态，由于：

$$L_n |\phi\rangle = [L_n, \phi_{-h}] |0\rangle = (h(n+1) - n) \phi_{-h+n} |0\rangle = 0, \quad n > 0 \quad (33.26)$$

²⁵ 对于自由场，前面的定义还是 well-defined 的

所以初级场作用在真空态上构造的 $|\phi\rangle$ 也比较特殊，和真空态一样被所有的 L_n 湮灭算符湮灭，所以也可以考虑从 $|\phi\rangle$ 开始构造其它态：

Definition 7

(Descendant States)

$$\{L_{k_1} \dots L_{k_n} |\phi\rangle : k_i \leq -1\} \quad (33.27)$$

其中 ϕ 是任意一个初级场。这些态称为初级场的次级态 (descendant states)。

Field	State	Level
$\phi(z)$	$\phi_{-h} 0\rangle = h\rangle$	0
$\partial\phi$	$L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	1
$\partial^2\phi$	$L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$N(T\phi)$	$L_{-2}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$\partial^3\phi$	$L_{-1}L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$N(T\partial\phi)$	$L_{-2}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$N(\partial T\phi)$	$L_{-3}\phi_{-h} 0\rangle$	3
...

表 1. 次级态和次级场之间的对应

同样根据态算符对应，这些态也会对应到一些场，根据上面的表就可以猜到是：

$$[\phi(z)] := \{\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots, N(T\phi), \dots\} \quad (33.28)$$

我们成为 ϕ 的 Conformal Family。Verma Module 是直接真空态生成来的，真空态对应 $h = 0$ ，可以用 [1] 来标记这个特殊的 Conformal Family。

注意到在上面的表中我们写下来对应的 Level，注意到 L_0 可看作体系的哈密顿量，真空态对应能量 0，初级场 $|h\rangle$ 对应能量 h ，而作用 L_{-k} 上去会把能量加 k ，所以这就跟量子力学中谐振子问题作用产生算符得到更高能级的态一样。只不过这里能级都是简并的，而简并态数目的计数在后面的环面 CFT 配分函数构造上有很大的作用，对于 Verma module (真空态毕竟唯一)，或者 $|h\rangle$ 本身不简并的 Conformal Family 来说，设 $P(N)$ 是第 N 个 Level 简并度，则其有下面的生成函数：

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N)q^N \quad (33.29)$$

次级态和次级场之间用 NOP 对应，而 NOP 天然的和 OPE 有对应，所以实际上我们可以用 OPE 的围道积分来表示：

Theorem 15

用 $\hat{L}_{-n}\phi(w)$ 表示 $L_{-n}|\phi\rangle$ 对应的次级场，那么：

$$\hat{L}_{-n}\phi(w) = \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-w)^{n-1}} T(z)\phi(w) \quad (33.30)$$

PROOF 利用态算符对应，取 $w \rightarrow 0$ 的极限就能看出正确性了。代入 OPE 实际计算几个例子也能得到表 1 的结果。 \square

现在我们来证明 CFT 自举里面非常重要的一个微分方程，核心目的是将次级态和其他初级场的关联函数用其他初级场的关联函数来表示。

Theorem 16 $\phi, \phi_1, \dots, \phi_N$ 是初级场, 则:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_{-n} \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle &= \mathcal{L}_{-n} \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle \\ \text{Where, } \quad \mathcal{L}_{-n} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{(n-1)h_i}{(w_i - w)^n} - \frac{1}{(w_i - w)^{n-1}} \partial_{w_i} \right) \end{aligned} \quad (33.31)$$

这个等式和 31.17 等价, 有时候也叫 local Ward 恒等式。

PROOF

$$\begin{aligned} &\langle \hat{L}_{-n} \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle \\ &= \oint_{\mathcal{C}(w)} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{1-n} \langle (T(z)\phi(w)) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(w_i)} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{1-n} \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots (T(z)\phi_i(w_i)) \dots \phi_N(w_N) \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(w_i)} \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^{1-n} \times \\ &\quad \times \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \right) \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^N \left((1-n)(w_i - w)^{-n} h_i + (w_i - w)^{1-n} \partial_{w_i} \right) \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle \end{aligned} \quad (33.32)$$

上面证明中第二个等号利用了全平面内极点留数只和为 0, 第三个等号利用了初级场 OPE。 \square

SECTION 34

Representations of the Virasoro Algebra

现在来从群表示的观点看下我们前面的 Verma Module 和 Conformal Family 实在做什么。前面反复强调如果我们有了一个理论的对称代数, 那么确定其希尔伯特空间就是在找群表示。最简单的 CFT 就是只有 Virasoro 代数作为其对称代数, 由于这时左右模完全分离, 所以我们可以先分开讨论, 然后 $\bigoplus_{\{h, \bar{h}\}} V_{c,h} \otimes V_{c,\bar{h}}$ 就构成了整个表示空间²⁶。

我们要找的表示是所谓最高权表示, 从量子力学的角度去想, 构造谱的第一步是去找 CSCO, 由于理论没有其他对称性, 也就是说没有其他力学量和 L_0 对易, 所以我们期望构造的谱是 L_0 的本征值。进一步, 由于 $\{L_n, n \geq 0\}$ 构成了理论的湮灭算符, 所以我们先找到被所有湮灭算符湮灭的那些态:

$$\begin{aligned} L_n |h\rangle &= 0 \quad \text{for } n > 0, \\ L_0 |h\rangle &= h |h\rangle \end{aligned} \quad (34.1)$$

找到了所有的最高权之后, 下一步就是将产生算符 $\{L_n, n < 0\}$ 作用到上面构造能量更高的态:²⁷

$$L_{-1} |h\rangle, \quad L_{-2} |h\rangle, \quad L_{-1} L_{-1} |h\rangle, \quad L_{-3} |h\rangle, \quad \dots \quad (34.2)$$

不难发现, 最高权就是真空态和理论中的初级态, 而其他用产生算符构造的态就是 Verma module 和 descendant states。

但是这只是从数学上构造出了这些态, 真正物理的态最大的特点就是可归一化, 所以那些模方为 0 的态要被剔除出去, 比如说前面在构造 Verma Module 时, 就没有把

²⁶ 也正因为完全分离, 这里 h, \bar{h} 直积时无特殊要求, 后面玻色子我们会看到一个有要求的最简单的例子。

²⁷ 这些态都是 L_0 的本征态, 但是我们并不用 $|h+k\rangle$ 这样的记号标记他们, 因为要和最高权区分。

$L_{-1}|0\rangle$ 算进去, 后面我们会进一步阐明如何找到其它的模方为 0 的态。进一步如果要求理论是么正的, 那些模方为负数的表示还要整个剔除掉。²⁸

如果理论还存在更大的对称性, 这个时候 CSCO 就会加入其他的和 L_0 对易的算符, 谱将会同时对角化 CSCO 中的算符, 即最高权现在由更多量子数标记 $|h, q\rangle$ 。而且产生湮灭算符也不只有 $\{L_n, n < 0\}$ 了, 构造次级态还需要用理论中其他的产生湮灭算符去作用。这在数学上本身就是个非常麻烦的事情, 后面我们并不追求数学上的一般性和严谨性, 只是给些例子。

²⁸ 注意, 么正性要求那些有模方为负数的次级态的表示是被禁闭的, 而不是像模方为 0 的态稍微剔除一下就好。

SECTION 35

Free CFT

学习 CFT 最好的方式是给出一些具体的例子, 首先我们考虑最简单的自由 CFT。

SUBSECTION 35.1

Free Bosons

自由玻色场可以从圆柱上定义的标量场量子化后得来, 这里直接给出二维 CFT 的版本²⁹:

$$S = \frac{1}{4\pi\kappa} \int dz d\bar{z} \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a X \partial_b X \\ \xleftarrow{\kappa=1} \frac{1}{4\pi} \int dz d\bar{z} \partial X \cdot \bar{\partial} X \quad (35.1)$$

²⁹ 已经做了 Wick 转动, κ 是弦论来的耦合常数

其中度规是从圆柱上的平直度规转到复平面上的度规:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2z\bar{z}} \\ \frac{1}{2z\bar{z}} & 0 \end{bmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 2z\bar{z} \\ 2z\bar{z} & 0 \end{bmatrix} \quad (35.2)$$

再次强调 CFT 的定义根本不需要拉氏量, 这里只是更场论一点的出发方式。直接读出运动方程: ³⁰

$$\partial \bar{\partial} X(z, \bar{z}) = 0 \quad (35.3)$$

³⁰ 这也说明 $X(z, \bar{z})$ 总是可以写成全纯和反全纯部分之和

可以定义下面两个手征场:

$$j(z) = i\partial X(z, \bar{z}), \quad \bar{j}(\bar{z}) = i\bar{\partial} X(z, \bar{z}) \quad (35.4)$$

还可以读出传播子 $K \equiv \langle X(z, \bar{z})X(w, \bar{w}) \rangle$:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} K(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = -2\pi\delta^{(2)}(z, -w) \Rightarrow K = -\log |z - w|^2 \quad (35.5)$$

这直接说明了 X 不是初级场, 但是:

$$\langle j(z)j(w) \rangle = \frac{1}{(z - w)^2} \quad (35.6)$$

说明了 $j(z)$ 是 $h = 1$ 的初级场, 也得到了 OPE: ³¹

$$j(z)j(w) = \partial_z X(z) \partial_w X(w) = \frac{1}{(z - w)^2} + \dots$$

(35.7)

³¹ 由于 OPE 的最奇异项只能是二次的, 而一次的又破坏了 $z \leftrightarrow w$ 的对称性。

根据 OPE 很容易算出对易关系:

$$[j_m, j_n] = m\delta_{m+n,0}$$

(35.8)

根据 j 是共形权为 1 的初级场很容易证明作用量的确是共形不变的³²。下面演示如何通过作用量确定 CFT 中最关键的能动张量：

$$T_{ab} = -4\pi \gamma \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{ab}} \quad (35.9)$$

这里 γ 是待定的归一化系数，利用上式计算得到：³³

$$T_{zz} = -\gamma \partial X \partial X, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \quad (35.10)$$

下面最重要的一步就是取正规乘积，这相当于把理论的零点能 shift 掉：

$$T(z) = -\gamma N(\partial X \partial X)(z) = \gamma N(jj)(z) \quad (35.11)$$

定 γ 的方式有很多，重点就是其洛朗模 L_n 要满足 Virasoro 代数， L_n 和初级场的洛朗模之间对易关系要有正确的形式 31.27，或者是能动张量和初级场的 OPE 有 31.14 的形式，我们主要来看这种方法：³⁴

$$\begin{aligned} \overline{T(z)j(w)} &= \gamma \overline{N(jj)(z)j(w)} = \gamma j(w) \overline{N(jj)(z)} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi i} \oint_{C(z)} \frac{dx}{x-z} \left\{ \overline{j(w)j(x)j(z)} + j(x) \overline{j(w)j(z)} \right\} \\ &= \frac{2\gamma}{(z-w)^2} j(z) \\ &= \frac{2\gamma}{(z-w)^2} j(w) + \frac{2\gamma}{z-w} \partial j(w) \end{aligned} \quad (35.12)$$

最后一步使用泰勒展开并丢掉 Regular 部分。和 31.14 对比便知道 $\gamma = \frac{1}{2}$ ：

$$T(z) = \frac{1}{2} N(jj)(z) \quad (35.13)$$

$$L_n = \frac{1}{2} N(jj)_n = \frac{1}{2} \sum_{k>-1} j_{n-k} j_k + \frac{1}{2} \sum_{k\leq-1} j_k j_{n-k} \quad (35.14)$$

下面再来阐明如何计算中心荷，比较简单的方式是利用 $\langle 0 | L_{+2} L_{-2} | 0 \rangle = \langle 0 | [L_2, L_{-2}] | 0 \rangle = \frac{c}{2}$ ，为了继续熟悉 Wick 定理，我们根据 TT OPE 来计算：

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{4} R[:jj:(z):jj:(w)] + \dots \\ &= \frac{1}{4} \overline{j(z)j(w)} :j(z)j(w): \times 2 + \frac{1}{4} \overline{j(z)j(w)} \cdot \overline{j(z)j(w)} \times 2 + \dots \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} :j(z)j(w): + \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \dots \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} :jj:(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w :jj:(w) \times \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (35.15)$$

这里利用了自由场的 Wick 定理 33.6 进行计算，倒数第二个等号利用了 $j(z)$ 泰勒展开。与 31.20 对比得到：

Theorem 17 | 自由玻色场 CFT 的中心荷 $[c = 1]$

³² 不少文献数量纲之后根据尺度不变性直接说明共形不变，绝大多数情况下这没问题，甚至一度让人们觉得尺度不变蕴含共形不变。但是上世纪八十年代 Polchinski 就研究了反例 [96]

³³ $\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ab} \delta g^{ab}$

³⁴ 35.7 得知 $\overline{j(z)j(w)} = \frac{1}{(z-w)^2}$

如果理论是 N 个无相互作用的 Boson 场，那么中心荷是 $c = N$ 。所以中心荷某种程度上可以理解为理论的自由度个数。

35.1.1 Vertex Operator

虽然从 CFT 的角度来看我们更关心 j ，但是从弦的角度来看 X 是更基本的，利用 35.7 洛朗展开后积分得到：

$$X(z, \bar{z}) = x_0 - i(j_0 \ln z + \bar{j}_0 \ln \bar{z}) + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (j_n z^{-n} + \bar{j}_n \bar{z}^{-n}) \quad (35.16)$$

根据 $X(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X(z, \bar{z})$ 有：

$$\boxed{j_0 = \bar{j}_0} \quad (35.17)$$

这个等式是后面构造正确的希尔伯特空间的关键。从自由场模式展开的观点来看，这些 z^n 模对到圆柱那边就是傅里叶展开，所以 j_n 就是理论的产生湮灭算符。而 j_0 实际上对应质心的正则动量 π_0 ：

$$\pi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dx^1 \frac{\partial X(x^0, x^1)}{\partial(-ix^0)} = \frac{j_0 + \bar{j}_0}{2} = j_0 \quad (35.18)$$

x_0 对应弦的质心。按照正则量子化应当有 $[x_0, \pi_0] = i$ 。这样来看 35.14 就分成了质心的动能和弦上激发能，相对质心能量两部分。

$$L_0 = \frac{1}{2} j_0 j_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} j_{-k} j_k + \frac{1}{2} \sum_{k \leq -1} j_k j_{-k} \quad (35.19)$$

Definition 8

(Vertex Operator) 虽然 X 本身不是初级场，但是总可以定义下面的顶点算符：

$$\boxed{V(z) =: e^{i\alpha X(z)} :} \quad (35.20)$$

他是共形权为 $\left(\frac{\alpha^2}{2}, 0\right)$ 的初级场，反全纯部分也可以类似定义。

PROOF

利用 Wick 定理得到下面的 OPE：

$$\partial \varphi(z) : \varphi^n : (w) = \frac{-n}{z-w} : \varphi^{n-1} : (w) \quad (35.21)$$

将顶点算符泰勒展开得到：

$$\begin{aligned} \overline{j(z)V_\alpha(w)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-in}{z-w} \frac{(i\alpha)^n}{n!} : \varphi^{n-1} : (w) \\ &= \frac{\alpha}{z-w} V_\alpha(w) \end{aligned} \quad (35.22)$$

再计算与 T 的 OPE: ^a

$$\begin{aligned}
 \overline{T(z)V_\alpha(w)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \varphi(w, \bar{w})^n : \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \cdot n(n-1) : \varphi(w, \bar{w})^{n-2} : \\
 &\quad + \frac{1}{z-w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \cdot n : \partial\varphi(z)\varphi(w, \bar{w})^{n-1} : \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} \frac{V_\alpha(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w V_\alpha(w, \bar{w})}{z-w}
 \end{aligned} \tag{35.23}$$

最后一个等号利用了 $\partial\phi(z)$ 在 w 处的泰勒展开。 \square

^a计算中并没有直接去用 35.22，想想这是为什么？可以参考 <https://physics.stackexchange.com/questions/398365/ope-double-contractions-between-t-and-eikx>

根据 35.22 可以得到下面的对易关系：

$$[j_0, V_\alpha] = \alpha V_\alpha \Rightarrow j_0 |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{35.24}$$

所以 α 的物理含义是质心动量！手征的部分终究不是物理的，我们需要把全纯反全纯的顶点算符按一定的要求组合起来得到体系真正的初级场。这个要求就是 35.17，左模动量要等于右模动量，所以体系中的初级场应当是：

$$V_\alpha(z, \bar{z}) = V_\alpha(z) \bar{V}_\alpha(\bar{z}) =: e^{i\alpha X(z, \bar{z})} : \tag{35.25}$$

对应共形权为 $\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2}\right)$ 。利用 33.9 得到：

$$V_\alpha(z, \bar{z}) V_\beta(w, \bar{w}) = |z-w|^{2\alpha\beta} V_{\alpha+\beta}(w, \bar{w}) \tag{35.26}$$

显然 $\langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_\beta(w, \bar{w}) \rangle \sim \delta(|\alpha| - |\beta|)$ ，但是 $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\beta > 0$ ，根据上面的 OPE 这将导致体系呈现出长程关联，超距作用。所以唯一的可能就是 $\alpha + \beta = 0$ ，所以顶点算符的两点关联函数唯一不为零的只能是：

$$\langle V_{-\alpha}(z, \bar{z}) V_\alpha(w, \bar{w}) \rangle = \frac{1}{(z-w)^{\alpha^2} (\bar{z}-\bar{w})^{\alpha^2}} \tag{35.27}$$

而 α 的含义是质心动量，所以这其实是动量守恒的体现。实际上自由玻色子对称性比共形对称性更大，从作用量可以看出 $X(z, \bar{z}) \mapsto X(z, \bar{z}) + a$ 并不会对作用量产生任何影响，根据 Noether 定理这实际上对应的是 35.4 这两个守恒流，自由玻色子真正的对称性是 $\hat{u}(1)_1$ 的流对称性。守恒流对应的守恒荷正是 $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z) = j_0$ ，所以有动量守恒。这一点可以推广到顶点算符的 n 点关联函数，其不为 0 当且仅当 $\sum_i \alpha_i = 0$ 。

现在我们构造出了理论里所有的谱 $\{j, V_\alpha\}$ ，构造希尔伯特空间的产生湮灭算符这里用的是流所对应的 j_n 而不是 L_n ³⁵：

³⁵ 当然这里 L_n 本身就是 j_n 构造来的

Theorem 18 自由玻色体系的希尔伯特空间由下面的态张成：

$$j_{-1}^{n_1} j_{-2}^{n_2} \cdots \bar{j}_{-1}^{m_1} \bar{j}_{-2}^{m_2} \cdots |\alpha\rangle \quad (n_i, m_j \geq 0) \tag{35.28}$$

这其实蕴含了相当大的物理意义，我们并不从群表示的观点来看，而是从物理本身上来看。这里 α 的不同标记了不同质心动量的真空，它是在 $\alpha = 0$ 的“绝对”真空上作用 $V_\alpha(z, \bar{z})$ 得到的。我们也提到了 j_n 就是 X 模式展开之后的产生湮灭算符，所以用它在这些真空中作用得到希尔伯特空间也是非常合理的。

35.1.2 Compactified Bosons

既然玻色体系是允许 $X(z, \bar{z}) \mapsto X(z, \bar{z}) + a$ 的 shift 的，那我们何不干脆把 X 的位形空间粘合起来，也就是认为：

$$X \sim X + 2\pi nR, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (35.29)$$

把 X 看作是像角度变量一样的场，这样的紧致化显然是可行的， n 称为 **winding number**。但要注意，我们这里是把位形空间从 \mathbb{R} 紧致化成 $\mathbb{R} \cup \infty \cong S^1_R$ ，并没有对场本身所定义在的时空流形做任何的拓扑变形，这一点要与后面环面 CFT 区分。

这样一来，场的单值性被放宽为 $X(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X(z, \bar{z}) + 2\pi nR$ ，从而 35.17 变为：

$$j_0 - \bar{j}_0 = nR, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (35.30)$$

顶点算符（手征）也只允许那些 $\alpha = \frac{m}{R}, m \in \mathbb{Z}$ 的谱。这种紧致化对场论的希尔伯特空间会有比较大的变化，由于 35.17 改变了，所以左右模的组合方式也要随之改变，而且体系的谱也从连续谱变成了离散谱。

$\{j_0, \bar{j}_0, L_0\}$ 构成体系的 CSCO，初级态应该同时对角化它们，除了 35.30，还有质心动量给的约束：

$$\pi_0 = \frac{j_0 + \bar{j}_0}{2} = \alpha = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (35.31)$$

初级场原先由 $|\alpha\rangle$ 标记，现在由两个整数标记为 $|m, n\rangle$ ：

$$j_0 |m, n\rangle = \left(\frac{m}{R} + \frac{Rn}{2} \right) |m, n\rangle, \quad \bar{j}_0 |m, n\rangle = \left(\frac{m}{R} - \frac{Rn}{2} \right) |m, n\rangle \quad (35.32)$$

m 和质心动量有关， n 和卷绕数有关， $m \neq 0$ 的态称为 Kaluza-Klein 态。这个最高权的共形权显然为：

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{R} + \frac{Rn}{2} \right)^2, \quad \bar{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{R} - \frac{Rn}{2} \right)^2 \quad (35.33)$$

希尔伯特空间的剩下部分就是把 j_n, \bar{j}_n 作用到 $|m, n\rangle$ 上面去了。

Remark

前面推导有关顶点算符的对易关系都是使用的 wick 定理，这样推起来虽然方便，但是物理上看比较好的方式是直接代入 X 的显式表达式 35.16，再根据正则对易关系 $[x_0, \pi_0] = i$ 得到 $[\pi_0, V_\alpha] = \alpha V_\alpha$ ，前面只是在 $j_0 = \pi_0$ 的特例下去推导^a。所谓不同的真空，应当就是 π_0 的不同模，同样也是 j_0, \bar{j}_0 的本征态。然后在上面作用 j_n 就得到了次级态。这样来看前面的一系列讨论物理图像就很清晰。

^a这也解释了 j_0 作用到 $|m, n\rangle$ 真空上得到的并非 α

35.1.3 Current Algebra Realization

现在回到非紧致化的 Bosons，除了 j 这一个流，顶点算符还确定了两个流：

$$j^\pm(z) =: e^{\pm i\sqrt{2}X} : \quad (35.34)$$

利用前面得到的 jV 以及 VV OPE 我们可以得到下面的对易关系：³⁶

³⁶ Blumenhagen [70] 从自举的角度，也就是从 31.49 考虑了这个问题

$$\begin{aligned} [j_m, j_n] &= m\delta_{m+n,0}, & [j_m^\pm, j_n^\pm] &= 0, \\ [j_m, j_n^\pm] &= \pm\sqrt{2}j_{m+n}^\pm, & [j_m^+, j_n^-] &= \sqrt{2}j_{m+n} + m\delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (35.35)$$

重定义：

$$j^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (j^+ + j^-), \quad j^2 = \frac{1}{\sqrt{2}i} (j^+ - j^-), \quad j^3 = j \quad (35.36)$$

得到:

$$[j_m^i, j_n^j] = +i\sqrt{2} \sum_k \epsilon^{ijk} j_{m+n}^k + m\delta^{ij}\delta_{m,-n} \quad (35.37)$$

这具有流代数的形式, 这实际上是个 $\mathfrak{su}(2)$ 的流代数。

Remark 注意, 我们只是说明了在自由玻色子体系中具有流代数代数结构, 并不是说自由玻色子有 $\mathfrak{su}(2)$ 的对称性! 它的对称性永远是 $u(1)$, 问题的关键就在于在 $N(jj)$ 的能动张量所描述的玻色体系下, 这三个流真正守恒的也就 $i\partial X$ 一个, 后面会发现如果要让其对称性提升为 $\mathfrak{su}(2)$, 必须重新构造能动张量, 这相当于在作用量中加入其他的项, 构成所谓 WZW 模型。紧致化为半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 圆的玻色体系也会提升为 $\mathfrak{su}(2)$ 对称性。

SUBSECTION 35.2

Free Fermions

这里我们考虑 Majorana 型费米子, 也就是下面作用量中:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int dz d\bar{z} (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}) \quad (35.38)$$

ψ 这个给 wyle 旋量是一个实值标量场, 而且是个 Grassmann 数。运动方程为:

$$\partial \bar{\psi} = \bar{\partial} \psi = 0 \quad (35.39)$$

传播子 $K \equiv \langle \psi(z) \psi(w) \rangle$ 为:

$$\partial_{\bar{z}} K(z, w) = 2\pi \delta^{(2)}(z - w) \Rightarrow K(z, w) = \frac{1}{z - w} \quad (35.40)$$

这表明 $\psi(z)$ 是共形权为 $(\frac{1}{2}, 0)$ 的初级场, 利用这一点也可证明作用量确实共形不变。上式也是 OPE 的奇异部分, 注意到上式并非关于 z, w 对称的, 因为费米子的反对易性, 所以对径向序的定义为:

$$R(\Psi(z)\Theta(w)) := \begin{cases} +\Psi(z)\Theta(w) & \text{for } |z| > |w| \\ -\Theta(w)\Psi(z) & \text{for } |w| > |z| \end{cases} \quad (35.41)$$

这直接导致费米子的 OPE 是反交换律的, 这也解释了为什么 OPE 中没有 $(z - w)^{-\frac{1}{2}}$ 的项。费米体系我们比较关注下面的两类边界条件: ³⁷

$$\begin{aligned} \psi(e^{2\pi i} z) &= +\psi(z) && \text{Neveu-Schwarz sector (NS)} \\ \psi(e^{2\pi i} z) &= -\psi(z) && \text{Ramond sector (R)} \end{aligned} \quad (35.42)$$

这就像是对多值函数 \sqrt{z} 考虑其哪一支。两类边界条件也导致了不同的洛朗展开:

$$\psi(z) = \sum_r \psi_r z^{-r-\frac{1}{2}} = \begin{cases} r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{NS} \\ r \in \mathbb{Z} & \text{R} \end{cases} \quad (35.43)$$

³⁷ 这一点其实是弦论里面引出的, 在导出运动方程 35.39 时, 由于分部积分带来边界项, 为了让这一项确实为 0, 必须有下面的两类边界条件, 也就是说费米子的场位形只能是下面两种中的一种, 而 Fock 空间就应当是 $NS \oplus R$

反对易关系同样包含于 OPE:

$$\begin{aligned}
 \{\psi_r, \psi_s\} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \{\psi(z), \psi(w)\} z^{r-\frac{1}{2}} w^{s-\frac{1}{2}} \\
 &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{s-\frac{1}{2}} \left(\oint_{|z|>|w|} \frac{dz}{2\pi i} \psi(z) \psi(w) z^{r-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - \oint_{|z|<|w|} \frac{dz}{2\pi i} -\psi(w) \psi(z) z^{r-\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{s-\frac{1}{2}} \oint_{\mathcal{C}(w)} \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{R(\psi(z)\psi(w))}_{\frac{1}{z-w}} z^{r-\frac{1}{2}} \\
 &= \oint \frac{aw}{2\pi i} w^{r+s-1} \\
 &= \delta_{r+s,0}
 \end{aligned} \tag{35.44}$$

费米子体系我们用下面的式子来确定能动张量:

$$T_{\mu\nu}^c = 8\pi \gamma \left(-\eta_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i \right) \tag{35.45}$$

$$T_{zz} = \gamma \psi \partial \psi, \quad T_{z\bar{z}} = -\gamma \bar{\psi} \partial \bar{\psi} = 0, \quad T_{\bar{z}z} = -\gamma \psi \bar{\partial} \psi = 0, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \gamma \bar{\psi} \bar{\partial} \bar{\psi} \tag{35.46}$$

然后取 NOP 去除零点能:

$$T(z) = \gamma N(\psi \partial \psi)(z) \tag{35.47}$$

费米子情况, 由于反对易性, NOP 洛朗模要修正为:³⁸

$$N(\theta\psi)_r = - \sum_{s>-h^\theta} \psi_{r-s} \theta_s + \sum_{s\leq-h^\phi} \theta_s \psi_{r-s}$$

(35.48)

³⁸ Blumenhagen 书中 NOP 定义差个符号, 导致后面洛朗模和能动张量都差个负号

得到能动张量的洛朗模:³⁹

$$L_m = -\gamma \sum_{s>-\frac{3}{2}} \psi_{m-s} \psi_s \left(s + \frac{1}{2} \right) + \gamma \sum_{s\leq-\frac{3}{2}} \psi_s \psi_{m-s} \left(s + \frac{1}{2} \right) \tag{35.49}$$

³⁹ 对于共形权为 h 的初级场 ϕ , 其次级场 $\partial\phi$ 的洛朗模与 ϕ_n 有关系: $(\partial\phi)_n = -(n+h)\phi_n$

然后就可以根据 $[L_m, \psi_r] = (-\frac{m}{2} - r) \psi_{m+r}$ 的要求确定 γ , 这里继续采用 Wick 定理来做:

$$\begin{aligned}
 T(z)\psi(w) &= \gamma : \psi \partial \psi : (z) \psi(w) \\
 &= -\gamma \overline{\psi(z)} \overline{\psi(w)} \partial \psi(z) + \gamma \psi(z) \overline{\partial_z \psi(z)} \overline{\partial(w)} \\
 &= -\frac{\gamma}{z-w} \partial \psi(z) - \frac{\gamma}{(z-w)^2} \psi(z) \\
 &= -\frac{\gamma}{z-w} \partial \psi(w) - \frac{\gamma}{(z-w)^2} \psi(w) - \frac{\gamma}{(z-w)} \partial \psi(w) + \dots \\
 &= -\frac{\gamma}{(z-w)^2} \psi(w) - \frac{2\gamma}{z-w} \partial \psi(w) + \dots
 \end{aligned} \tag{35.50}$$

最后两个等号用了 $\psi(z)$ 泰勒展开, 与 31.14 对比得到 $\gamma = -\frac{1}{2}$:

$$T(z) = -\frac{1}{2} N(\psi \partial \psi)(z)$$

(35.51)

同样的步骤计算 TT OPE 可以得知:

Theorem 19 | 自由 (Majorana) 型费米子 CFT 的中心荷: $c = \frac{1}{2}$

现在来考虑费米子的希尔伯特空间, 对于 NS Sector, 答案是 trivial 的:

$$\mathcal{H}_{NS} \left| n_{\frac{1}{2}}, n_{\frac{3}{2}}, n_{\frac{5}{2}}, \dots \right\rangle = \left(\psi_{-\frac{1}{2}} \right)^{n_{\frac{1}{2}}} \left(\psi_{-\frac{3}{2}} \right)^{n_{\frac{3}{2}}} \left(\psi_{-\frac{5}{2}} \right)^{n_{\frac{5}{2}}} \dots |0\rangle, \quad n_s = 0, 1 \quad (35.52)$$

这里 $n_s = 0, 1$ 是因为反对易性, 这和泡利不相容原理吻合。哈密顿量全纯部分也能很好地从 35.49 得到:

$$L_0 = \sum_{s=\frac{1}{2}}^{\infty} s \psi_{-s} \psi_s \quad (35.53)$$

不难发现零点能确实被 shift 掉了。第 N 个 level 的简并度有下面的生成函数:

$$\prod_{r \geq 0} \left(1 + q^{r+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{N \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} P(N) q^N \quad (35.54)$$

但是 Ramond Sector 比较微妙。首先要问 $\{\psi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 中哪些是湮灭算符, 根据 $z \rightarrow 0$ 的奇异性, 似乎这要求 ψ_0 以及 $\psi_{n>0}$ 都是湮灭算符。但是按照前面推倒的 $\{\psi_r, \psi_s\} = \delta_{r+s,0}, \psi_0 |0\rangle$ 也将被所有的 $\psi_{n>0}$ 湮灭, 但是 $\psi_0^2 = \frac{1}{2}$ 得出 $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \frac{12}{\pi^2} 0$, 而且 $[L_0, \psi_0] = 0$ 导致 $|0\rangle$ 和 $\psi_0 |0\rangle$ 能量相同。种种这些都告诉我们 $\psi_0 |0\rangle$ 和 $|0\rangle$ 是简并的两个真空! 希尔伯特空间需要在这两个简并的空间上去构造。

还有一个比较怪的点是 Ramond Sector 的两点关联函数:

$$\begin{aligned} \langle \psi(z) \psi(w) \rangle &= \sum_{k,q \in \mathbb{Z}} z^{-k-1/2} w^{-q-1/2} \langle \psi_k \psi_q \rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{zw}} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k-1/2} w^{k-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{zw}} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^k \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{zw}} \frac{z+w}{z-w} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z/w} + \sqrt{w/z}}{z-w} \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{8w^2} - \frac{z-w}{8w^3} + \frac{15}{128w^4} (z-w)^2 + \dots \end{aligned} \quad (35.55)$$

和前面 OPE 的形式是冲突的, 只有当 $w \rightarrow z$ 的极限意义下才相同。根据自由场 NOP 的定义, 需要用 OPE 减去上面的两点关联函数:

$$\begin{aligned} \langle T(z) \rangle &= -\frac{1}{4} \lim_{w \rightarrow z} \partial_w \left(\frac{\sqrt{zw} + \sqrt{w/z}}{z-w} \right) + \frac{1}{2(z-w)^2} \\ &= \frac{1}{16z^2} \neq 0 \end{aligned} \quad (35.56)$$

这自然导致 Ramond Sector 的能动张量零点能没有消干净! 事实上 R Sector 的 chiral 能量为:⁴⁰

⁴⁰ 式 35.49 中对 s 的求和, 在 R Sector 理解为跑遍所有满足不等号的整数

$$L_0 = \sum_{s=1}^{\infty} s\psi_{-s}\psi_s + \frac{1}{16} \quad (35.57)$$

Remark 似乎看起来 R Sector 非常怪异，但实际上它们在 boson 理论中也会出现，这都是因为理论有 \mathbb{Z}_2 的对称性，所以我们可以考虑转一圈不回到原位，而是加个符号的理论边界条件，这不会对 \mathcal{S} 产生任何影响，但是会要求洛朗展开出现割线：

$$i\partial X(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} a_r z^{-r-1} \quad (35.58)$$

从数学上看这实际上是进入了 Virasoro 代数的另一个表示罢了。bosons 这边我们称为 **twisted sector**。

35.2.1 Bosonization

现在考虑一个两个无相互作用费米场构成的理论，可以复化为：

$$\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{(1)}(z) + i\psi^{(2)}(z)), \quad \bar{\Psi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{(1)}(z) - i\psi^{(2)}(z)) \quad (35.59)$$

这里的 $\bar{\cdot}$ 并不意味着反全纯。相应的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \Psi\partial\bar{\Psi} + \bar{\Psi}\partial\Psi + c.c. \quad (35.60)$$

显然理论具有一个 global 的 $U(1)$ 对称性，根据 Noether 定理 19.4 导致守恒流⁴¹：

⁴¹ 使用正规序消去零点能

$$j(z) = N(\Psi\bar{\Psi})(z) = -iN(\psi^{(1)}\psi^{(2)})(z) \quad (35.61)$$

上式已经合适选取归一化因子使得其为 $h = 1$ 初级场。上式最后一个等号利用了 $N(\psi^{(a)}\psi^{(b)}) = -N(\psi^{(b)}\psi^{(a)})$ ，这并不是用反对易性直接看出来的，因为 OPE 的对易性反对易性并不能放到 NOP 上，这个式子的证明可以利用 35.48。 Ψ 之间的反对易关系可以直接从定义读出：

$$\{\Psi_r, \Psi_s\} = \{\bar{\Psi}_r, \bar{\Psi}_s\} = 0, \quad \{\Psi_r, \bar{\Psi}_s\} = \delta_{r+s,0} \quad (35.62)$$

既然都说了这个对称性是 $U(1)$ 对称性， j 的洛朗模之间也确实有和玻色子一样的对易关系：

$$\boxed{\begin{aligned} \{\Psi_m, \bar{\Psi}_n\} &= \delta_{m+n,0}, & \{\Psi_m, \Psi_n\} &= \{\bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_n\} = 0, \\ [j_m, j_n] &= m\delta_{m+n,0}, & [L_m, j_n] &= -nj_{m+n}, \\ [j_m, \Psi_s] &= +\Psi_{m+s}, & [j_m, \bar{\Psi}_s] &= -\bar{\Psi}_{m+s}. \end{aligned}} \quad (35.63)$$

第二行说明了理论的对称性，第三行说明了 $\Psi, \bar{\Psi}$ 带 \pm 的对称荷。现在考虑下面守恒流定义的理论：

$$j(z) = i\partial X(z, \bar{z}), \quad j^{\pm}(z) = V_{\pm 1}(z) =: e^{\pm iX} : \quad (35.64)$$

这对应紧致化到 $R = 1$ 上圆的 bosons⁴²，不难发现有下面的对易关系：

$$\boxed{\begin{aligned} [j_m, j_n] &= m\delta_{m+n}, & [j_m^+, j_n^-] &= \delta_{m+n,0}, \\ [j_m, j_n^{\pm}] &= \pm j_{m+n}^{\pm}, & [j_m^{\pm}, j_n^{\pm}] &= 0. \end{aligned}} \quad (35.65)$$

⁴² 这里为什么我还没完全搞清楚，但似乎对于 S_R^1 上的 Bosons, V_{R-1} 会变成守恒流

如果 $j^+ \rightarrow \Psi, j^- \rightarrow \bar{\Psi}, [\cdot] \rightarrow \{ \cdot \}$ ，我们发现 35.63 和 35.65 完全一致！

Theorem 20 (Bosonization)

Two Fermions = One Bosons

SUBSECTION 35.3

b, c Ghost

这部分是弦论非常关心的，这里只做一些结论的总结，因为推导完全可以作为前面两部分的课后习题。

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z (b_{zz}\partial^z c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\partial^{\bar{z}} c^{\bar{z}}) \quad (35.66)$$

数量纲就会发现 b, c 共形维数分别为： $h^b = 2, h^c = -1$ ，但是这并不是说他们是玻色子，相反，他们暂时违背自旋统计定理，是 Grassmann 数。根据作用量可读出传播子：

$$\partial^z \langle b(z)c(w) \rangle = 4\pi \delta^{(2)}(z-w) \Rightarrow \langle b(z)c(w) \rangle = \frac{1}{z-w} \quad (35.67)$$

进而得到 b, c 之间 OPE⁴³ 计算出反对易关系：

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{n+m,0}, \quad \{b_m, b_n\} = 0, \quad \{c_m, c_n\} = 0 \quad (35.68)$$

由于这个体系很像自由费米体系，所以对能动量张量的求解可以通过下面的 ansatz 进行：

$$T(z) = \alpha N(b\partial c) + \beta N(\partial bc) \quad (35.69)$$

根据 b, c 是对应共形权的初级场，计算得知 $\alpha = 2, \beta = 1$ ，且：

Theorem 21 | b, c 鬼场的中心荷 $c = -26$

⁴³ bb, cc 自己之间的 OPE 没有奇异部分，只有 bc 之间：

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

35.3.1 Ghost will change the Vacuum State

虽然我们按照前面的方法莽算建立起了鬼的共形场论，但是仔细思考会发现两个明显的问题：

- 真空态 $|0\rangle$ 是最高权态，按理说应当是基态，但是 c 的共形权是负数，导致虽然 c_1 是第一个不湮灭 $|0\rangle$ 的模，但是 $[L_0, c_1] = -c_1$ 说明它依旧会把 L_0 降低，这说明 $|0\rangle$ 并非 b, c 的基态。
- b, c 明明是初级场，而且共形权不相等，为何它们之间的关联函数 35.67 不是 0？

这两个问题是直接联系的，下面我们来解决它们。根据规范场论引入鬼态进行正则量子化的经验（Gupta 量子化方法），鬼态会对真空态做些破坏，真空态在 CFT 中依靠 b, c 的谐振子代数定义， b 没啥好说的，由于共形权大于 0，所以和一般的场处理起来一样。但是 c 共形权小于 0，我们尝试利用下面的最高权态要求构造真空⁴⁴：

$$|0\rangle, \quad |c\rangle = c_1 |0\rangle, \quad |(\partial c) c\rangle = c_0 c_1 |0\rangle \quad (35.70)$$

⁴⁴ 初级场都是 Virasoro 代数的最高权态，真空 L_0 最小，而且被其他初级场湮灭

不难验证上面的三个都满足 $c_{n \geq 2}$ 作用上去为 0，后面两个更是对于 $c_{n \geq 1}$ 都是 0，后面两个是重点，因为它们是 L_0 左模能量更低的“真空”。而且这两个态的厄米共轭也很不一样，直觉上可能觉得 $(c_1 |0\rangle)^\dagger = |0\rangle c_{-1}$ ，但实际上：

$$(c_1 |0\rangle)^\dagger = \langle 0 | c_{-1} c_0 \xrightarrow{\text{Norm.}} \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 |0\rangle = 1 \quad (35.71)$$

如果我们从 naive 的想法直接出发去计算 bc 的关联函数：

$$\begin{aligned} \langle b(z)c(w) \rangle &= \sum_{m \leq 1} \langle 0 | b_n z^{-n-2} c_m w^{-m+1} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle \frac{w}{z^2} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{w^3}{z^3} \frac{\langle 0 | 0 \rangle}{z-w} \end{aligned} \quad (35.72)$$

不但和前面同样 naive 想法从传播子来的形式对不上，更糟糕的是和前面的形式同样都似乎破缺掉了 global 共形对称性，除非 $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ 。事实上问题的关键就在于 $|0\rangle$ 确实是

null vector! 现在我们来解释一下前面说的这一堆乌云。

首先根据 b, c 的 $U(1)$ 对称性可以得到 Noether 流:

$$j(z) = - : b(z)c(z) : \quad (35.73)$$

这个流虽然在经典层面上守恒, 但是量子层面上会出现反常。利用鬼场能动张量计算得到:

$$\begin{aligned} T(z)j(w) &\sim \frac{-3}{(z-w)^3} + \frac{j(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j(w)}{z-w} + \dots \\ [L_n, j_m] &= \frac{-3n(n+1)}{2} \delta_{n+m,0} - mj_{m+n} \end{aligned} \quad (35.74)$$

从上面的计算结果能直接看出来 j 连准初级场都不是。

考虑满足下面 OPE 的算符 \mathcal{O}_q :

$$j(z)\mathcal{O}_q(w) \sim \frac{q\mathcal{O}_q(w)}{z-w} + \dots, \quad \begin{cases} \mathcal{O}_{q=1}(w) = c(w) \\ \mathcal{O}_{q=-1}(w) = b(w) \end{cases} \quad (35.75)$$

称为鬼数 (ghost number) 为 q 的算符, 根据态算符对应:

$$|q\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{O}_q(z) |0\rangle \quad (35.76)$$

这其实是 j_0 的本征态:

$$j_0 |q\rangle = q |q\rangle \quad (35.77)$$

前面说过 j_0 不是厄米的, 会出现常数项, 这直接导致 $\langle q' | q \rangle$ 不一定为 0:

$$\begin{aligned} q \langle q' | q \rangle &= \langle q' | j_0 | q \rangle = (j_0^\dagger | q' \rangle)^\dagger | q \rangle \\ &= [(3 - j_0) | q' \rangle]^\dagger | q \rangle = (3 - q') \langle q' | q \rangle \end{aligned} \quad (35.78)$$

可见, 只要 $q + q' = 3$, $\langle q' | q \rangle$ 就可以不为 0, q 取 0, 1 得到两对互为厄米共轭的态:

$$\begin{aligned} q = 0 : |0\rangle &\leftrightarrow q = 3 : c_{-1}c_0c_1|0\rangle \\ q = 1 : c_1|0\rangle &\leftrightarrow q = 2 : c_0c_1|0\rangle \end{aligned} \quad (35.79)$$

这就解释了归一化 $\langle 0 | c_{-1}c_0c_1 | 0 \rangle = 1$ 的合理性, 以及 $(|0\rangle)^\dagger \neq |0\rangle$ 带来的 $|0\rangle$ 为 null state。现在回到最初的问题, 如何理解 bc 关联函数从传播子来看确实是 $\frac{1}{z-w}$? 首先计算下面的五点关联函数: ⁴⁵

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_{-1}c_0c_1c(z)b(w) | 0 \rangle &= \sum_{\substack{m \leq -2 \\ n \geq 2}} \langle 0 | c_{-1}c_0c_1(\delta_{n+m,0} - b_m c_n) | 0 \rangle z^{-n+1} w^{-m-2} \\ &= \sum_{m \leq -2} \frac{w^{-m-2}}{z^{-m-1}} - \sum_{m \leq -2, n \geq 2} \underbrace{\langle 0 | c_{-1}c_0c_1 b_m c_n | 0 \rangle}_{=0} z^{-n+1} w^{-m-2} \\ &= \sum_{m \leq -2} \frac{w^{-m-2}}{z^{-m-1}} = \frac{1}{z-w} \end{aligned} \quad (35.80)$$

⁴⁵ 计算中利用了:

$$\begin{aligned} b_{m \geq -1} |0\rangle &= 0, & \langle 0 | b_{m \leq 1} &= 0 \\ c_{n \geq 2} |0\rangle &= 0, & \langle 0 | c_{n \leq -2} &= 0 \end{aligned}$$

同样可以计算得到 $\langle 0 | c_{-1}c_0c_1b(z)c(w) | 0 \rangle = \frac{1}{z-w}$ 。所以这似乎意味着我们考虑涉及到鬼场的真空关联函数的时候, 都要当成是有背景荷的真空关联函数, 直接夹在 null state $|0\rangle$ 之间是没有意义的, 也就是说: ⁴⁶

⁴⁶ 省略关联函数里面的径向排序

$$\langle 0 | \cdot | 0 \rangle \sim \langle 0 | c_{-1}c_0c_1 | 0 \rangle \quad (35.81)$$

但是前面直接从场论的观点，从传播子出发，它又是怎么自己“知道”这一点的呢？首先，我们前面的从场论出发实际上是从路径积分出发来看，然而在鬼场的路径积分语言中 $\int \mathcal{D}[c]$ 包含下面三个积分：

$$\int dc_{-1}dc_0dc_1 c_{-1}^x c_0^y c_1^z = \delta_{x,1}\delta_{y,1}\delta_{z,1} \quad (35.82)$$

自然地就帮我们把背景给加上了！

Remark

最后说一句，本节研究的所有三个模型中心荷都不是 trivial 的，但弦论为了消去共形反常只允许 trivial 的中心荷，所以都会在理论中加入别的场来把中心荷消掉，而这一步实际上也就暗含了常说的弦论为了自洽必须定义在更高维度空间中。比如玻色弦，上面鬼场 $c = -26$ ，暗含其必须定义在 26 维时空中^a；如果引入超对称得到超弦理论，每个费米子会带来一个超对称玻色子伙伴，玻色子同理，对于鬼场，也会带来对易的，但是共形权是分数 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ 的伙伴 β, γ 。引入超对称后一个完整的玻色场理论一定还包括一个费米场，总的中心荷为 $\frac{3}{2}$ ，而鬼场的中心荷这时变成了 11，这暗示理论必须定义在 $\frac{2}{3}(26 - 11) = 10$ 维空间中。

^aRecall: 中心荷某种程度上对应自由度

SECTION 36

Unitary Representations of the Virasoro Algebra

SUBSECTION 36.1

Null States

在关注么正表示之前先来看看表示中出现 Null State 的条件，由于线性空间中任何一个向量都可以用基底展开，所以向量模为 0 等价于下面的二次型为 0：

$$0 = \|v\|^2 = \sum_{a,b=1}^n \lambda_a \langle a | b \rangle \lambda_b = \sum_{a,b=1}^n \lambda_a M_{ab} \lambda_b = \vec{\lambda}^T M \vec{\lambda} \quad (36.1)$$

也正是因为这是一个二次型，所以上式成立等价于 λ 是矩阵 M 的零模，按照这个思路，对于某个最高权表示我们也可以去寻找对应的 M 表示，但是由于 L_0 是厄米的，所以他的每一个特征子空间，也就是那些 N-level 之间是正交的，所以 $M = \bigoplus_{N=1} M_N$ ：

$$\langle h | \prod_i L_{+k_i} \prod_j L_{-m_j} | h \rangle, \quad \sum_i k_i = \sum_j m_j = N \quad (36.2)$$

下面要做的事情就是把所谓的 Kač 行列式 $\det M$ 求出来，他的零点就对应存在零模的表示，零点的重数就表示零模的个数。

Example

$N = 1$:

$$M_1(h, c) = \langle h | L_1 L_{-1} | h \rangle = 2 \langle h | L_0 | h \rangle = 2h \quad (36.3)$$

$N = 2$:

子空间由 $\{L_{-2} | h \rangle, L_{-1} L_{-1} | h \rangle\}$ 张成：

$$\det M_2(c, h) = \det \begin{pmatrix} 4h + \frac{c}{2} & 6h \\ 6h & 4h(2h+1) \end{pmatrix} = 32h \left(h^2 - \frac{5}{8}h + \frac{1}{8}hc + \frac{1}{16}c \right) \quad (36.4)$$

不难发现 $h = 0$ 时 $N = 1$ 上面有一个 Null State， $h = \frac{5-c}{16} \pm \frac{1}{16}\sqrt{(1-c)(25-c)}$ 时 $N = 2$ 上面出现 Null State，更高阶的情况以此类推。现在来关注一下如何具体地把

$N = 2$ 上面的 Null State 构造出来，做下面的 ansatz:

$$L_{-2} |h\rangle + a L_{-1} L_{-1} |h\rangle = 0 \quad (36.5)$$

由于他是零模，所以任何算符作用上去都是 0，作用 L_{-1} 得到：

$$\begin{aligned} 0 &= [L_1, L_{-2}] |h\rangle + a [L_1, L_{-1} L_{-1}] |h\rangle \\ &= 3L_{-1} |h\rangle + a (2L_0 L_{-1} + 2L_{-1} L_0) |h\rangle \\ &= (3 + 2a(2h+1)) L_{-1} |h\rangle \Rightarrow a = -\frac{3}{2(2h+1)} \end{aligned} \quad (36.6)$$

当然，你也可以通过直接求解 $M_2 \cdot (1, a)^T$ 这个方程组来得到 a 。这样就得到了一个 CFT 自洽性所要求的方程：

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)} L_{-1}^2 \right) |h\rangle = 0 \quad (36.7)$$

其中 $h = \frac{5-c}{16} \pm \frac{1}{16}\sqrt{(1-c)(25-c)}$ 。

Kač 行列式的零点结构已经被一般地研究过了：

Theorem 22

$$\det M_N(c, h) = \alpha_N \prod_{\substack{p, q \leq N \\ p, q > 0}} (h - h_{p,q}(c))^{P(N-pq)}$$

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-c}{1-c}}$$

(36.8)

上面的公式中 α_N 是某个正数，对零点估计无影响， m 有两个取值，计算中取其中一个就好了，因为这两种取值给出的 $\{h_{p,q}\}$ 是相同的。

SUBSECTION 36.2

Unitary Constraints

幺正性对理论做了非常强的限制，但是完整的证明非常复杂，这里仅仅只是做一个结论总结。幺正性最容易想到的一个限制是 $h \geq 0$ ，在其基础之上我们还可以对中心荷进行分类，结合图??：

- $c > 1, h > 0$: Kač 行列式无零点且其本征值都是正的，这个时候理论总是幺正
- $c = 1$: Kač 行列式零点分布为 $h = \frac{n^2}{4}, n \in \mathbb{Z}$
- $c < 1, h \geq 0$: 只有图??的交点处才会出现幺正表示

下面的定理给出了交点处的坐标：

Theorem 23

(Unitary Minimal Models) $c < 1, h \geq 0$ 的 CFT，只有在中心荷满足：

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad m = 3, 4, \dots$$

(36.9)

时才有幺正谱，谱为：

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq p \leq m-1 \text{ and } 1 \leq q \leq m$$

(36.10)

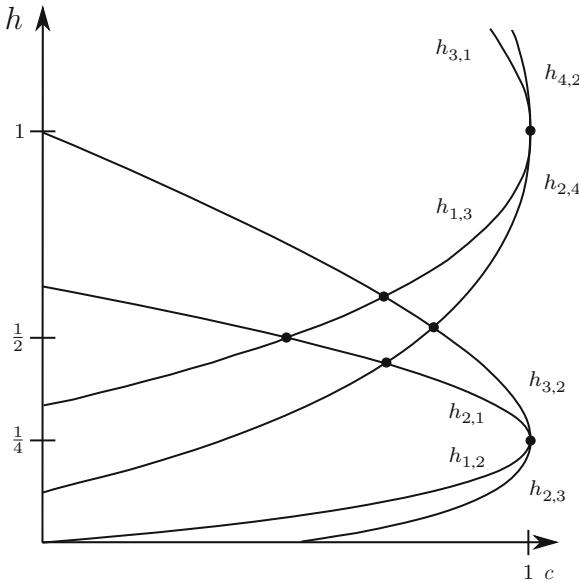


图 14. Kac 行列式零点和中心荷之间的关系

我们原先说 CFT 的谱是无穷多或者连续的，但对于对称性只有 Virasoro 的 CFT，幺正性直接让理论的谱变成有限离散的。这时的 CFT 我们称为 **unitary minimal models**。有些时候理论不必是幺正的，不过我们还是希望这个 CFT 的谱依旧被限制为有限离散谱，这时的 CFT 称为 **Minimal models**，由下面的中心荷和谱定义：

Theorem 24 (Minimal models)

$$\boxed{\begin{aligned} c &= 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq}, \quad p, q \geq 2, \quad p \perp q \\ h_{r,s}(p,q) &= \frac{(pr - qs)^2 - (p-q)^2}{4pq}, \quad 1 \leq r \leq q-1 \text{ and } 1 \leq s \leq p-1 \end{aligned}} \quad (36.11)$$

类似这种谱有限离散，而且这时 h 还都是有理数的 CFT 我们称为**有理 CFT(RCFT)**。

Example 考虑 $m = 3$ 的幺正极小模型，这实际上是 Ising Model 二阶相变临界点处的理论，根据公式可以计算出中心荷为 $\frac{1}{2}$ ，谱为：

$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{2}$

表 2. Ising 模型的谱，横轴表示 $1 \leq p \leq 2$ ，纵轴表示 $1 \leq q \leq 3$ ，这种表叫 Kac 表

从 p, q 取值范围来看似乎有 $m(m-1)$ 个谱，但实际上有一半是重复的，只有 C_m^2 个谱。

让我们从一个例子出发，利用 33.31

$$\widehat{L}_{-2} \phi(z) - \frac{3}{2(2h+1)} \widehat{L}_{-1}^2 \phi(z) = \left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)} \mathcal{L}_{-1}^2 \right) \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle = 0 \quad (37.1)$$

得到微分方程：

$$\left[\left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{h_i}{(w_i-w)^2} - \frac{1}{w_i-w} \partial_{w_i} \right) - \frac{3}{2(2h+1)} \partial_w^2 \right) \langle \phi(w) \phi_1(w_1) \dots \phi_N(w_N) \rangle = 0 \right] \quad (37.2)$$

前面用共形对称性已经确定两点和三点函数只差一个常数系数，带入到方程中发现第一个 non-trivial 的结果来自于三点函数：

$$2(2h+1)(h+2h_2-h_1) = 3(h-h_1+h_2)(h-h_1+h_2+1) \quad (37.3)$$

h, h_1, h_2 分别是 ϕ, ϕ_1, ϕ_2 对应的共形权。这对三点函数的 $C_{\phi\phi_1\phi_2}$ 做出了更强的限制，告诉我们绝大部分都是 0。当然这个限制仅限于 $h = h_{2,1}(m)$ or $h_{1,2}(m)$ ，这时上面的推导才成立，但是 h_1, h_2 是一般的。不妨取 $h = h_{2,1}$ ，并把 h_1 也取为存在 Null State 的谱 $h_{p,q}$ ，根据上面的方程可以解出不为 0 的条件是：

$$h_2 = \frac{1}{6} + \frac{h}{3} + h_1 \pm \frac{2}{3} \sqrt{h^2 + 3hh_1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}h_1 + \frac{1}{16}} \in \{h_{p-1,q}(m), h_{p+1,q}(m)\} \quad (37.4)$$

由 OPE 的一般表达式我们知道 OPE 是由一系列初级场和其导数，或者说次级场组合而成的，由于 OPE 有结合律，所以三点函数的计算可以看作是前两个先插入 OPE⁴⁷，然后和第三个场做两点函数，而两点函数不为零当且仅当共形权一致。上面的方程告诉我们三点函数不为零的条件是 h_2 只能取特定的两个值，从 OPE 去看这正说明了前两个场的 OPE 最终出来的那些场只能是共形权为 $\{h_{p-1,q}(m), h_{p+1,q}(m)\}$ 的场的线性组合！这一思想完全可以推广到次级场的 OPE：

$$[\phi_{(2,1)}] \times [\phi_{(p,q)}] = [\phi_{(p+1,q)}] + [\phi_{(p-1,q)}] \quad (37.5)$$

也就是说， $\phi_{(2,1)}$ 和 $\phi_{(p,q)}$ Conformal family 中的元素做 OPE，最终得到的只能是 $\phi_{(p-1,q)}$ 和 $\phi_{(p+1,q)}$ Conformal family 中元素的组合。

Theorem 25 (Fusion rules of unitary minimal models)

$$[\phi_{(p_1,q_1)}] \times [\phi_{(p_2,q_2)}] = \sum_{\substack{k=1+|p_1-p_2| \\ k+p_1+p_2 \text{ odd}}}^{p_1+p_2-1} \sum_{\substack{l=1+|q_1-q_2| \\ l+q_1+q_2 \text{ odd}}}^{q_1+q_2-1} [\phi_{(k,l)}] \quad (37.6)$$

只要是 RCFT，谱是离散有限的，都可以构造类似的融合规则：

$$[\phi_i] \times [\phi_j] = \sum_k N_{ij}^k [\phi_k], \quad N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_0^+ \quad (37.7)$$

根据 OPE 的性质可以知道这是一个交换代数，还是一个结合代数，其中的恒等元 [1] 就是 Verma Module，对应真空表示，毕竟本身某个初级态的次级态就是用 $N(T \dots)$ 定义出来的。

⁴⁷ 我们假设第三个场隔得比较远，使得 OPE 的插入是精确的

Theorem 26

$$\boxed{\sum_l N_{kj}^l N_{il}^m = \sum_l N_{ij}^l N_{lk}^m} \quad (37.8)$$

定义 $(\bar{N}_i)_{jk} \equiv N_{ij}^k$, 上式可以写成矩阵形式:

$$\boxed{\bar{N}_i \bar{N}_k = \bar{N}_k \bar{N}_i} \quad (37.9)$$

PROOF 证明就是使用交换律和结合律:

$$\begin{aligned} [\phi_i] \times ([\phi_j] \times [\phi_k]) &= [\phi_i] \times \sum_l N_{jk}^l [\phi_l] = \sum_{l,m} N_{jk}^l N_{il}^m [\phi_m] \\ ([\phi_i] \times [\phi_j]) \times [\phi_k] &= \sum_{l,m} N_{ij}^l N_{lk}^m [\phi_m], \end{aligned} \quad (37.10)$$

□

SUBSECTION 37.1

Landau - Ginzburg Formulation

Minimal model 名字叫极小, 内容一点也不小, 即便是前面我们略掉了大部分的证明细节还是只讲了冰山一角, 接下来我们简单介绍一些极小模型的具体实现。由于量子力学是么正的, 所以这里我们考虑的是极小模型 $\mathcal{M}_{p,q}$ 的子集, 么正极小模型 \mathcal{M}_m 。与这个模型所对应的欧氏场论是所谓 Landau - Ginzburg 模型:

$$\mathcal{A} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + V(\varphi) \right] V(\varphi) = g_1 \varphi + g_2 : \varphi^2 : + \cdots + g_{2(m-2)} : \varphi^{2(m-2)} : + g : \varphi^{2(m-1)} : \quad (37.11)$$

这里我们把作用量符号改记 \mathcal{A} , 因为这个理论最早提出来是为了唯象地解释相变, 这里的场实际上是序参量, 上式积分得到的是自由能。当然, 这个理论在量子场论中也有对应, 从重整化的角度看, 他对应标量场在不动点处的理论。注意 $V(\varphi)$ 中没有 $\varphi^{2(m-1)-1}$ 项, 因为总可以通过 $\varphi \mapsto \varphi + \text{const.}$ 将其纳入 $g_1 : \varphi :$ 中。按照经典相变理论的分析, 假设 $g > 0$, 是一个不变的常数, 现在在 g_i 这恶鬼参数空间下变动, 总存在一个点, 使得 $V(\varphi)$ 有 $m-1$ 个极大值, 比如 $m=2, V(\varphi) = g(\varphi^2 - a^2)^2; m=3, V(\varphi) = g\varphi^2 (\varphi^2 - b^2)^2$, 这些不同的极大值用量子力学的语言说就是简并基态, 它们也对应着理论中的 $m-1$ 个不同的相。而 $g_i = 0, g \neq 0$, 也就是 \mathcal{A} 直到 φ 的 $2m-3$ 阶导数都为 0, 这对应理论的 $m-1$ 个相共存的临界点 (multi-critical point)。

multi-critical point 处作用量所对应的运动方程为:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \sim : \varphi^{2q-3} : \quad (37.12)$$

这里的 \sim 表示要把上式看作跟 OPE 一样, 只有在关联函数下才成立的等式。

SECTION 38

Kač - Moody Symmetry

从现在开始, 我们来考虑比 Virasoro 对称性更大的对称性。本节大量涉及无穷维李代数的艰深数学内容, 大黄书专门用了两章进行铺垫介绍, 这里不追求数学上的严谨性。⁴⁸

⁴⁸ 数学读物可见 [97, 98]

SUBSECTION 38.1

Kač - Moody Algebras

Kač - Moody 对称性是理论中加入了其他守恒流，这些守恒流的洛朗模之间满足下面的代数关系：

Definition 9 (Kač - Moody Algebras)

$$[j_m^a, j_n^b] = i \sum_c f^{abc} j_{m+n}^c + km\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \quad (38.1)$$

k 称为这个代数的 level。

从上面的定义看到 $\{j_0^a\}$ 构成了上面这个代数的子代数，没有中心荷：

$$[j_0^a, j_0^b] = i \sum_c f^{abc} j_0^c \quad (38.2)$$

这就是我们熟悉的李代数结构 \mathfrak{g} ，而 Kač - Moody 代数可以看作是这个子代数的仿射化，记为 $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 。比如 35.37 就是一个 $\hat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 的代数结构。

Theorem 27 (OPEs of Currents) 由于 OPE 和对易关系蕴含完全相同的信息，所以前面的对易关系也可以翻译为流之间的 OPE：

$$j^a(z)j^b(w) = \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \sum_c \frac{if^{abc}}{z-w} j^c(w) + \dots \quad (38.3)$$

SUBSECTION 38.2

Sugawara Construction

构造 CFT 首先要给出理论的谱，这可以通过寻找 Kač - Moody 代数的表示得到，这个后面再说。理论在无穷小共形变换时的性质完全由能动张量刻画，本节的目的就是完全从自洽性出发把能动张量构造出来。

这些流是守恒流，就像我们构造 Casimir 算符一样，可以做下面的 ansatz：

$$T(z) = \gamma \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} N(j^a j^a)(z) \quad (38.4)$$

把所有的流加起来使得其再对称群变换下是不变的，现在根据 j^a 的共形权为 1 定出前面的归一化系数。

$$L_m = \gamma \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \left(\sum_{l \leq -1} j_l^a j_{m-l}^a + \sum_{l > -1} j_{m-l}^a j_l^a \right) \quad (38.5)$$

计算对易关系⁶：⁴⁹

49 你依旧可以用 OPE 做

⁶计算中第四个等号利用了结构张量前两个指标反对称所导出的：

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq -1} (j_l^b j_{m+n-l}^c - j_{l+n}^b j_{m-l}^c) &= \sum_{l \leq -1} j_l^b j_{m+n-l}^c - \sum_{l \leq -1+n} j_l^b j_{m+n-l}^c = - \sum_{l=0}^{n-1} j_l^b j_{m+n-l}^c \\ \sum_{l > -1} (j_{m+n-l}^c j_l^b - j_{m-l}^c j_{l+n}^b) &= \sum_{l > -1} j_{m+n-l}^c j_l^b - \sum_{l > -1+n} j_{m+n-l}^c j_l^b = + \sum_{l=0}^{n-1} j_{m+n-l}^c j_l^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [L_m, j_n^a] \\
&= \gamma \sum_b \left(\sum_{l \leq -1} [j_l^b j_{m-l}^b, j_n^a] + \sum_{l > -1} [j_{m-l}^b j_l^b, j_n^a] \right) \\
&= \gamma \sum_b \left(\sum_{l \leq -1} (j_l^b [j_{m-l}^b, j_n^a] + [j_l^b, j_n^a] j_{m-l}^b) + \sum_{l > -1} (j_{m-l}^b [j_l^b, j_n^a] + [j_{m-l}^b, j_n^a] j_l^b) \right) \\
&= -2\gamma n k j_{m+n}^a + \gamma \sum_{b,c} i f^{bac} \sum_{l \leq -1} (j_l^b j_{m+n-l}^c + j_{l+n}^c j_{m-l}^b) \\
&\quad + \gamma \sum_{b,c} i f^{bac} \sum_{l > -1} (j_{m+n-l}^c j_l^b + j_{m-l}^b j_{l+n}^c) \\
&= -2\gamma n k j_{m+n}^a - \gamma \sum_{b,c} i f^{bac} \sum_{l=0}^{n-1} [j_l^b, j_{m+n-l}^c] \\
&= -2\gamma n k j_{m+n}^a - \gamma \sum_{b,c} i f^{bac} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_d i f^{bcd} j_{m+n}^d \\
&= -2\gamma n k j_{m+n}^a + \gamma n \sum_{b,c,d} f^{bac} f^{bcd} j_{m+n}^d.
\end{aligned}$$

李代数的伴随表示有下面的等式:

$$\sum_{b,c} f^{bac} f^{bcd} = -2C_g \delta^{ad} \quad (38.6)$$

其中 C_g 叫 **dual Coxeter number**, 下表给出了一些李群的 dual Coxeter number:

Algebar	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
C_g	$n+1$	$2n-2$	12	18	30

表 3. ADE 分类的 Coxeter number, 在现在的语境下可以将 A_n 对应 \mathfrak{su}_{n+1} , D_n 对应 \mathfrak{so}_{2n}

Theorem 28 (Sugawara energy - momentum tensor) $\hat{\mathbf{g}}_k$ 所确定 CFT 的能动张量由下式给定:

$$T(z) = \frac{1}{2(k+C_g)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} N(j^a j^a)(z) \quad (38.7)$$

利用能动张量 OPE 或者 $\frac{c}{2} = \langle 0 | L_{+2} L_{-2} | 0 \rangle$ 可计算出理论的中心荷:

Theorem 29 Sugawara 构造出来的 CFT 中心荷为:

$$c = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + C_g} \quad (38.8)$$

SUBSECTION 38.3

WZNW Models

前面导出能动张量的过程再次强调了研究 CFT 时很多情况下拉氏量是放在次要位置的, 我们当然也可以直接构造一个有流对称代数的拉氏量, 即所谓的 WZW 模型, 然后再用作用量变分导数得到能动张量。本节目的是知道这样做有多麻烦。

从自由玻色场来看, 其作用量可以写成下面的形式:

50 已重新选取耦合常数

$$\mathcal{S} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \partial g^{-1} \bar{\partial} g \quad (38.9)$$

这里 Σ 是复平面这个最简单的黎曼曲面，其中 g 是：

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{U}(1); z \mapsto g(z, \bar{z}) = \exp(i\varphi(z, \bar{z})) \quad (38.10)$$

前面说 $\phi \mapsto \phi + a$ 是 $U(1)$ 对称性或许还有些困惑，从这个作用量就很好看出来的是 $g \mapsto e^{ia}g$ 的 $U(1)$ 变换，WZNW 模型就是对这个模型的非阿贝尔推广。

38.3.1 Nonlinear Sigma Models

Definition 10

非线性 sigma 模型包含一个定义在某个黎曼曲面上的到群流形的玻色场 $g : \Sigma \rightarrow G^a$ ，作用量为：

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2a^2} \int_{\Sigma} d^2x \text{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) \quad (38.11)$$

这个 Tr 其实要写成 Tr' 和一般的取迹进行区分，如果在某个表示下，生成元矩阵有 $\text{Tr}(t^a t^b) = x \delta^{ab}$ ，那么 $\text{Tr}' \equiv \frac{1}{x} \text{Tr}$ 。后面假设都已经做了这个归一化。

^a或者精确点说是在 G 的么正表示里面取值

对作用量进行变分得到运动方程：

$$\partial^\mu(g^{-1} \partial_\mu g) = 0 \quad (38.12)$$

这直接说明了存在下面的守恒流：

$$J_\mu = g^{-1} \partial_\mu g \quad (38.13)$$

这个守恒流对应模型的 global $G \times G$ 对称性。黎曼曲面是一个一维复流形，任何一点领域都同胚于复平面的开子集，所以可以在上面 local 地赋予复坐标，定义上面守恒流的全纯和反全纯部分：

$$J_z = g^{-1} \partial g, \quad \bar{J}_{\bar{z}} = g^{-1} \bar{\partial} g \Rightarrow \partial \bar{J}_{\bar{z}} + \bar{\partial} J_z = 0 \quad (38.14)$$

一般而言，全纯和反全纯部分不能单独守恒，和 $U(1)$ 的情况不一样，我们期望在理论中加上一些项，让对称性进一步扩大为反全纯和全纯部分单独守恒。

Definition 11

(Wess-Zumino term)

$$\Gamma = \frac{-i}{12\pi} \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \quad (38.15)$$

这里 B 是一个带边三维流行，其边界为 Σ ， $\tilde{g} : B \rightarrow G$ 可看作是 g 从 Boundary 到 Bulk 的扩张，这种扩张不是唯一的，流形 B 也不是唯一的。但可以证明这个差别只会体现为 $2n\pi i$ ，所以虽然作用量上面看不一样，但是最终就欧几里得路径积分而言 $e^{-\Gamma}$ 是唯一的，所以不会对场论造成任何影响。

38.3.2 Wess-Zumino-Novikov-Witten Models

考虑下面的作用量：

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + k\Gamma, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (38.16)$$

按照前面说的虽然 Γ 不唯一，但是理论唯一。计算运动方程为：

$$\partial^\mu(g^{-1} \partial_\mu g) + \frac{a^2 ik}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu(g^{-1} \partial^\nu g) = 0 \quad (38.17)$$

在复坐标下为：

$$\left(1 + \frac{a^2 k}{4\pi}\right) \partial(g^{-1} \bar{\partial} g) + \left(1 - \frac{a^2 k}{4\pi}\right) \bar{\partial}(g^{-1} \partial g) = 0 \quad (38.18)$$

所以为了让流的全纯和反全纯部分的流单独守恒，要求：

$$a^2 = 4\pi/k \quad (38.19)$$

Theorem 30 $(\widehat{\mathfrak{g}}_k \text{ WZNW Models})$

$$\mathcal{S} = \frac{k}{8\pi} \int_{\Sigma} d^2x \operatorname{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) + k\Gamma, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (38.20)$$

另外一个 $a^2 = -4\pi/k$ 的解并不是我们关注的流守恒。左右流的单独守恒体现到场上是场可以分解为 $g(z, \bar{z}) = g_L(z)g_R(\bar{z})$ ，提现到体系的对称群上是从 global $G \times G$ 扩张为 local 的 $G(z) \times G(\bar{z})$ ，即下面的变换下作用量不变：

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}), \quad \Omega(z), \bar{\Omega}(\bar{z}) \in G \quad (38.21)$$

rescale 守恒流：

$$\begin{aligned} J(z) &\equiv -\frac{k}{2}J_z(z) = -\frac{k}{2}\partial gg^{-1} \\ \bar{J}(\bar{z}) &\equiv \frac{k}{2}\bar{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) = \frac{k}{2}g^{-1}\bar{\partial}g \end{aligned} \quad (38.22)$$

然后类似于 YM 理论里面的操作，在生成元 t^a 上投影， $J = J^a t^a$ ，可以证明 J^a 就是那些 Kač-Moody 流，理论的能动张量也就是 Sugawara 构造的那样！

SUBSECTION 38.4

Knizhnik - Zamolodchikov Equation

前面我们研究初级场实际上都是在看其在 Virasoro 代数下如何变换，现在显然我们要找更大对称群的表示。就像是 YM 理论一样，除了 Lorentz 变换本身对场进行了分类，分成标量场，矢量场等等。然后理论中本身冒出来一个规范对称群，要求理论中不同的场 ϕ_a 之间在 $\phi_a \rightarrow U_R^{ab} \phi_b$ 的规范变换下理论仍不变。这种场之间的内在对称性实际上就类似于 Kač-Moody 对称性，场除了被 Virasoro 表示分类（不同的共形权），还要在流代数的表示之中。

Definition 12

(Kač - Moody (chiral) primary field)

$$j^a(z)\phi_R^r(w) = \frac{1}{z-w} \sum_s (t_R^a)_s^r \phi_R^s(w) + \dots \quad (38.23)$$

j^a 是生成变换群 G 的流， R 表示 $\{\phi_R^a\}$ 具体处于群的哪个表示， t_R^a 是生成元的表示矩阵。满足这一条件的初级场，一定也是 Virasoro 初级场，你可以尝试去计算 Sugawara 能动张量和 ϕ 之间的 OPE 来证明这一点。

Remark

本节我们只考虑全纯部分，因为全纯反全纯完全解耦，把反全纯部分也加上来后初级场定义为：

$$\begin{aligned} j^a(z)\phi_{R,\bar{R}}(w, \bar{w}) &\sim \frac{t_R^a \phi_{R,\bar{R}}(w, \bar{w})}{z-w} \\ \bar{j}^a(\bar{z})\phi_{R,\bar{R}}(w, \bar{w}) &\sim -\frac{\phi_{R,\bar{R}}(w, \bar{w}) t_R^a}{\bar{z}-\bar{w}} \end{aligned} \quad (38.24)$$

R, \bar{R} 分别表示全纯和反全纯部分处于哪个表示。另外，不少文献对 38.23 的定义差个负号，这会导致后面的方程正负号有些差别，但这无伤大雅。

SUBSECTION 38.5

Ward Identity for Kač - Moody Symmetries

Virasoro 初级场有 Ward 恒等式限制它们之间的关联函数形式，同样这里也有更强的限制：

Theorem 31

$$\begin{aligned} & \langle j^a(z) \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{t_{R_i}^a}{z - w_i} \langle \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle + \text{regular} \end{aligned} \quad (38.25)$$

这里 $\{\phi_{R_i}\}$ 是 Kač - Moody (chiral) primary field, t_{R_i} 仅仅作用于 ϕ_{R_i} ，它们的矩阵指标没有明写出来。

PROOF

证明过程和共形 Ward 恒等式的证明一模一样，守恒流给出守恒荷从而给出 Kač-Moody 代数作用下场的无穷小变换的形式：

$$-\delta_\epsilon \phi(w) = \oint_{\mathcal{C}(w)} \frac{dz}{2\pi i} \sum_a j^a(z) \epsilon^a(z) \phi(w) \quad (38.26)$$

考虑关联函数的无穷小变换：

$$\begin{aligned} & \delta_\epsilon \langle \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \oint_{\mathcal{C}(w_1, \dots, w_N)} \frac{dz}{2\pi i} \sum_a \epsilon^a(z) \langle j^a(z) \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(w_i)} \frac{dz}{2\pi i} \sum_a \epsilon^a(z) \langle \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \left(j^a(z) \phi_{R_i}(w_i, \bar{w}_i) \right) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(w_i)} \frac{dz}{2\pi i} \sum_a \epsilon^a(z) \frac{t_{R_i}^a}{z - w_i} \langle \phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_{R_N}(w_N, \bar{w}_N) \rangle \end{aligned} \quad (38.27)$$

比较第一个等号和最后一个等号即得证。由于上面的关联函数在 G 的 global 作用下实际上要不变，所以上面这一长串等式，在 ϵ 为常数时，实际上为 0，所以我们其实还有下面的等式成立：^a

$$\sum_{i=1}^n t_i^a \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) \rangle = 0 \quad (38.28)$$

这个等式类似于 31.37，确定了两点和三点函数。 \square

^a 证明的前一半是 local 形式的证明，因为证明中群变换的参数 ϵ 是 local 的，所以才能说积分号里面的东西相等；证明 global 的形式实际上是让 ϵ 是 global 的参数，也就是考虑 global 的群变换，这部分才是对称性，由于 ϵ 与 z 无关，所以上式最后一个等式可以把围道积分积出来得到下式。31.37 也可以用这种方式来看。

SUBSECTION 38.6

Kač - Moody descendant fields

从态的角度看，现在对称性增大了，原先构造 descendant fields 是用 Virasoro 初级场配合 $L_{-n}, n \geq 1$ 去构造，现在初级场应该用 Kač - Moody 初级场，产生算符应该用

对称性所对应的 $j_{-n}, n \geq 1$ ⁷。⁵¹

$$\text{Kač - Moody descendant fields} = \{\mathcal{U}(\hat{g}_k)_+ |\phi_R\rangle\}$$

同样类似 33.30 态算符对应给出次级场:

$$(\hat{j}_{-n}^a \phi_R)(w) = \oint_{C(w)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-w)^n} j^a(z) \phi_R(w) \quad (38.29)$$

⁵¹ 下面的 $\mathcal{U}(\hat{g}_k)$ 不少文献称为 \hat{g}_k 的泛包络代数的表示, 名字很唬人, 简单点说就是那些 j_{-n}^a 构成的一个结合代数, 也就是 $j_{-n}^a j_{-m}^b \dots$, 下标 + 表示只取 $n \geq 1$ 。

Example

$$\begin{aligned} j_0^a |\phi_R\rangle &= \lim_{w \rightarrow 0} \oint \frac{dz}{2\pi i} j^a(z) \phi_R(w) |0\rangle \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-w} t_R^a \phi_R(w) + \dots \right) |0\rangle = t_R^a |\phi_R\rangle \end{aligned} \quad (38.30)$$

这个方程蛮重要的, 它告诉我们 ϕ_R 生成了 j_0 的表示空间而 j_0 就是没有仿射化的, 通常的李代数 38.2 的群表示, 一下就看清楚了 ϕ_R 这个下标 R 的具体意义。而对称性变大之后, 最高权除了由 L_0 本征值 h 标记, 还应该由 j_0^a 所处的表示来标记, 后面用例子来感受这一点。

利用这个我们可以类似去计算 Kač - Moody descendant fields 和 Kač - Moody primary fields 之间的关联函数, 有与 33.31 类似的方程:

Theorem 32

$$\begin{aligned} \langle \hat{j}_{-n} \phi_R(w) \phi_{R_1}(w_1) \dots \phi_{R_N}(w_N) \rangle &= \mathcal{J}_{-n} \langle \phi_R(w) \phi_{R_1}(w_1) \dots \phi_{R_N}(w_N) \rangle \\ \text{Where, } \mathcal{J}_{-n} &= - \sum_{i=1}^N \frac{t_{R_i}^a}{(w_i - w)^n} \end{aligned} \quad (38.31)$$

更关键的是去找理论中的零模, 从而得到类似 37.2 的对初级场关联函数约束。

Theorem 33

(Knizhnik - Zamolodchikov Equation)

$$\left(\partial_{w_i} - \frac{1}{k + C_g} \sum_{j \neq i} \frac{\sum_a t_{R_i}^a \otimes t_{R_j}^a}{w_i - w_j} \right) \langle \phi_{R_1}(w_1) \dots \phi_{R_N}(w_N) \rangle = 0 \quad (38.32)$$

上式省略了矩阵下标, $t_{R_i}^a$ 只作用于 ϕ_{R_i} 。上面方程对任意的 $i = 1, \dots, N$ 都成立。

PROOF

$$\begin{aligned} L_{-1} |\phi_R^r\rangle &= \frac{1}{2(k + C_g)} \sum_a \left(\sum_{l \leq -1} j_l^a j_{-1-l}^a + \sum_{l > -1} j_{-1-l}^a j_l^a \right) |\phi_R^r\rangle \\ &= \frac{1}{2(k + C_g)} \sum_a (j_{-1}^a j_0^a + j_{-1}^a j_0^a) |\phi_R^r\rangle \\ &= \frac{1}{k + C_g} \sum_a j_{-1}^a \sum_s (t_R^a)^r_s |\phi_R^r\rangle, \end{aligned} \quad (38.33)$$

⁷现在估计就不难从数学上去理解我们为什么构造 Free Bosons 的希尔伯特空间的时候是用 j_{-n} 去构造了, 因为理论是 $\hat{\mathfrak{u}}(1)$ 的对称性, 所以我们希望初级场是 Kač-Moody 的, 次级态也是, 所以 j_{-n} 作用真上去得到 Verma 模, 作用到顶点算符构造的初级场上面得到次级态 (jV_α 的 OPE 确实有 38.23 的形式, $U(1)$ 还是过于 trivial, 生成元表示就是一个常数)。由于 T 就是用 j Sugawara 构造来的, 所以也同时是 Virasoro 初级态。

直接给出了一个 Null State:

$$\left(\widehat{L}_{-1} - \frac{1}{k + C_{\mathfrak{g}}} \sum_a \widehat{j}_{-1}^a t_R^a \right) \phi_R(z) = 0 \quad (38.34)$$

这可以看作是 Sugawara 构造用次级态表述。把它插在关联函数中恒为 0:

$$0 = \left\langle \phi_{R_1}(w_1) \dots \left(\widehat{L}_{-1} - \frac{1}{k + C_{\mathfrak{g}}} \sum_a \widehat{j}_{-1}^a t_{R_i}^a \right) \phi_{R_i}(w_i) \dots \phi_{R_N}(w_N) \right\rangle \quad (38.35)$$

再利用 33.31 和 38.31 即可证明。 \square

注意这个约束非常一般，前面 37.2 好歹还要求 $|h\rangle$ 本身就是有零模的谱，对 h 有约束，这里就啥也没有了。KZ 方程的解催生出了非常多的数学问题，由于四点函数不能被共形对称性很好的确定，所以我们比较关心这个方程能否给出四点函数的形式？文章 [99] 在末尾用合流超几何函数给了答案。

Remark 本节前面的讨论相当于选取了一个特殊的基底，38.6 更一般的表述是下面的 Killing 型：

$$K^{ab} = \frac{1}{2g} \text{Tr}(\text{ad}_{t^a} \text{ad}_{t^b}) = \frac{1}{2g} f^{acd} f^{bcd} \quad (38.36)$$

前面我们在 \mathfrak{g} 中 shift 基底将 K_{ab} 化为 δ_{ab} ，38.1、38.3、38.7 和 38.32 的形式都要发生相应的变化，具体来说就是 $\delta^{ab} \rightarrow K_{ab}$ ，注意 $J^a J^a$ 中隐含了一个 δ_{ab} 。

SECTION 39

Example: Highest Weight Representations of $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$

$\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ 流代数和我们熟悉的角动量系统非常接近，首先按照下面的方式构造出流中的上升下降算符：

$$\hat{j}_m^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} j_m^3, \quad \hat{j}_m^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (j_m^1 \pm i j_m^2) \quad (39.1)$$

满足对易关系：

$$[\hat{j}_m^3, \hat{j}_n^3] = \frac{mk}{2} \delta_{m+n,0}, \quad [\hat{j}_m^3, \hat{j}_n^\pm] = \pm \hat{j}_{m+n}^\pm, \quad [\hat{j}_m^+, \hat{j}_n^-] = km \delta_{m+n,0} + 2\hat{j}_{m+n}^3 \quad (39.2)$$

前面就提到过 $\{j_0\}$ 生成无中心荷的 $\mathfrak{su}(2)$ 子代数，而且不难看到 L_0 和他们是对易的，所以现在 L_0 的 h 模是简并的，简并态构成的子空间是 $\mathfrak{su}(2)$ 子代数的表示空间，这个表示空间还不只有一个不等价不可约表示，可能是很多不等价不可约表示直和起来构造出的更大的空间。所以现在最高权应该有两个指标标记，一个指标是其共形权 h ，表示其能量 L_0 ，最高的含义依旧是：

$$L_0 |h\rangle = h |h, q\rangle, \quad L_n |h, q\rangle = 0, \quad \forall n > 0 \quad (39.3)$$

第二个标记 q 是在说其处于哪个 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示， $\mathfrak{su}(2)$ 群的表示可以用自旋 $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ 去标记，而我们这里关心的是最高权，所以它在 $\mathfrak{su}(2)$ 的表示中也是最高的那个，也就是 $m = l$ ，这里我们设 $q = 2l \in \mathbb{Z}_0^+$ 。另外它作为最高权还要类似 L_{-n} 湮灭一样被 j_{-n}^a 湮灭：

$$\begin{aligned} \hat{j}_n^3 |h, q\rangle &= \hat{j}_n^\pm |h, q\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0 \\ \hat{j}_0^3 |h, q\rangle &= \frac{q}{2} |h, q\rangle, \\ \hat{j}_0^+ |h, q\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (39.4)$$

这些条件合起来就定义了一个最高权表示，与 Virasoro 代数不同，初级态不止包含这些最高权，实际上它应该包含所有 h 模简并的态，或者说我们要用 \hat{j}_0^\pm 继续在 $\mathfrak{su}(2)$ 的自旋 $q/2$ 表示中升降把表示空间构造全：⁵²

$$|h, q_\alpha\rangle := \left(\hat{j}_0^-\right)^\alpha |h, q\rangle, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, q \quad (39.5)$$

这就对应于前面 Kač-Moody 初级场的 $|h, q_\alpha\rangle$ ，显然从这个构造就可以看出来 $|h, q_\alpha\rangle$ 张成 $\mathfrak{su}(2)$ 的一个表示。利用 Sugawara 构造得知：

$$L_0 = \frac{1}{2(k+2)} \sum_{a=1}^3 \left(\sum_{l \leq -1} j_{+l}^a j_{-l}^a + \sum_{l > -1} j_{-l}^a j_{+l}^a \right) \quad (39.6)$$

由此可计算 $|h, q\rangle$ 关于 L_0 的本征值：

$$\begin{aligned} L_0 |h, q\rangle &= \frac{1}{2(k+2)} \sum_{a=1}^3 j_0^a j_0^a |h, q\rangle \\ &= \frac{1}{k+2} \sum_{a=1}^3 \hat{j}_0^a \hat{j}_0^a |h, q\rangle = \frac{q(q+2)}{4(k+2)} |h, q\rangle \end{aligned} \quad (39.7)$$

计算的最后利用了 $j_0^a j_0^a$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的 Casimir 算符。但是我们又知道本征值应该为 h ，所以 L_0 的谱和允许的表示之间是有关联的，要求：

$$h = \frac{q(q+2)}{4(k+2)} \quad (39.8)$$

而 $q \in \mathbb{Z}_0^+$ ，所以理论中的谱可取值被极大限制住了，这也再次说明了这个模型是个 RCFT。上面做的这些实际上是在考虑 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ 的非常特殊的一个 $\mathfrak{su}(2)$ 子群，其实这样的子群有无数多个 $\mathfrak{su}(2)_{(n)} \subset \widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ ：⁵³

$$\begin{aligned} \tilde{j}_{(n)}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (j_{-n}^1 + i j_{-n}^2), \\ \tilde{j}_{(n)}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (j_{+n}^1 - i j_{+n}^2), \\ \tilde{j}_{(n)}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} j_0^3 - \frac{n}{2} k, \end{aligned} \quad (39.9)$$

53

$$\begin{aligned} [L_0, \tilde{j}_{(n)}^\pm] &= \mp n \tilde{j}_{(n)}^\pm \\ [\tilde{j}_0^3, \tilde{j}_{(n)}^\pm] &= \pm \tilde{j}_{(n)}^\pm \end{aligned}$$

所以 h 的增加以 1 为单位， q 的增加以 2 为单位

首先考虑 $\mathfrak{su}(2)_{(1)}$ ，计算 $j_{(1)}^+ |h, q\rangle$ 的模：

$$\begin{aligned} \langle h, q | \tilde{j}_{(1)}^- \tilde{j}_{(1)}^+ |h, q\rangle &= \langle h, q | [\tilde{j}_{(1)}^-, \tilde{j}_{(1)}^+] |h, q\rangle \\ &= \langle h, q | -2\tilde{j}^3 |h, q\rangle \\ &= -2 \langle h, q | j_0^3 - \frac{k}{2} |h, q\rangle \\ &= -q + k \end{aligned} \quad (39.10)$$

而我们如果考虑么正表示，所有的谱模应当正定，所以 $q \leq k$ 。

Theorem 34 | $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ 最高权表示么正要求 $0 \leq q \leq k$ 。

我们只说明了必要性，请相信它也是充分的。现在考虑其他 $\mathfrak{su}(2)_{(n)}$ 。现在考虑具体

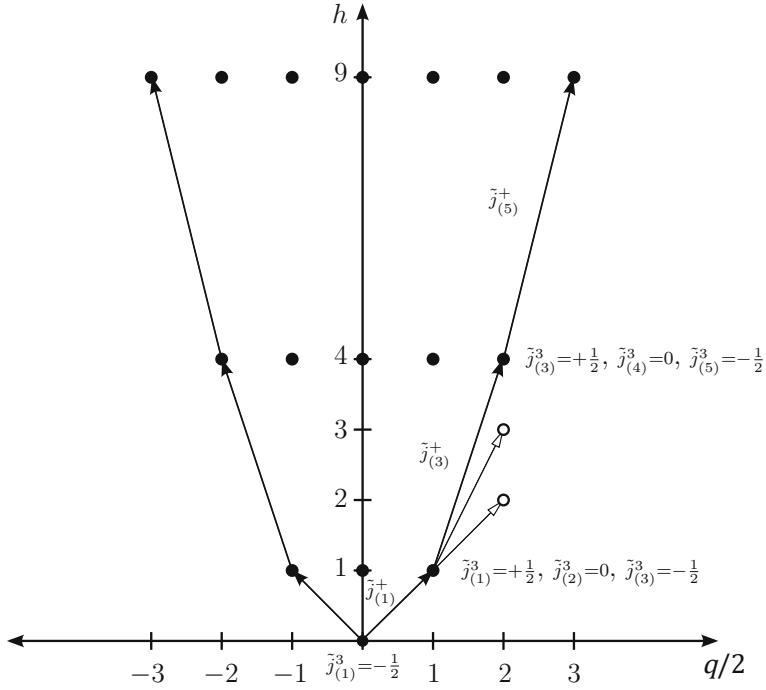


图 15. 这些黑点表示作用 $\tilde{j}_{(n)}^\pm$ 可以得到的态，实心箭头表示用 roots 升降权，空心箭头表示作用任何一个 root 上去都得 0

的 $k=1$ 的简单情形，考虑 $|0,0\rangle$ 这个最高权，反复作用 $\tilde{j}_{(n)}^\pm$ 去构造表示空间中的其它态，表示空间中的向量我们仍用本征值 h, q 标记，但是它们不是最高权，所以前面的一些约束都没有了。最高权表示对应的初级态 $|h, q_\alpha\rangle$ 相对 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_{(0)}$ 处在自旋 $q/2$ 表示中，自然想到把这些初级态作用 $\tilde{j}_{(n)}^\pm$ 之后应该是别的 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_{(n)}$ 子群的表示。

比如 $\tilde{j}_{(1)}^3 |0,0\rangle = -\frac{1}{2} |0,0\rangle$ ，而且 $\tilde{j}_{(1)}^- |0,0\rangle = 0$ ，所以 $\{|0,0\rangle, \tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle = |0,0\rangle\}$ 处于 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_{(1)}$ 的自旋 $1/2$ 表示，对应 $(h, q) = \{(0,0), (1,2)\}$ 。

$\tilde{j}_{(2)}^3 \tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle = 0$ 且 $\tilde{j}_{(2)}^+ \tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle = 0$ ，所以 $\tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle$ 又处在 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_{(2)}$ 的自旋 0 表示。 $\{\tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle, \tilde{j}_{(3)}^+ \tilde{j}_{(1)}^+ |0,0\rangle\}$ 又张成 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_{(3)}$ 的自旋 $1/2$ 表示，对应 $(h, q) = \{(0,0), (4,4)\}$ 。可见，由于这些不同 n 对应 $\tilde{j}_{(n)}^\pm$ 的是不对易的，所以这些表示是以某种方式“纠缠”在一起的。这个过程可以无限进行下去，我们得到权图 15。

这个权图是有边界的，边界为 $(h, q) = (m^2, 2m)$, $m \in \mathbb{Z}$ 。这些边界才是真正要紧的，构造次级态就看它们，就 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_1$ 而言，知道了边界的那些态，就足够构造整个希尔伯特空间，下面从玻色子的想法来说明。

玻色子体系是有 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_1$ 代数的，具体而言可以由 $R = \sqrt{2}$ 上的紧致化实现:⁵⁴

$$\begin{aligned} j(z) &= i\partial X(z, \bar{z}) \quad (h, q) = (1, 0), \\ V_{\pm\sqrt{2}} &=: e^{\pm i\sqrt{2}X} : \quad (h, q) = (1, \pm 2) \end{aligned} \tag{39.11}$$

⁵⁴ 后面的 (h, q) 表示场对应的态所对应的 L_0, \tilde{j}_0^3 本征值

前面提到过还应存在初级场：

$$V_{\pm\sqrt{2}m} =: e^{\pm i\sqrt{2}mX} : \quad (h, q) = (m^2, \pm 2m) \tag{39.12}$$

似乎这些场就能对应到权图上面的边界态，其实这是可以严格证明的。根据这一点，由玻色场希尔伯特空间 $j_{-n}|\alpha\rangle$ 的启发，用边界态作用 j_{-n} 上去应该就能得到 $\tilde{\mathfrak{su}}(2)_1$ 模型完整的 $|0,0\rangle$ 最高权表示表示空间了。每个态上面的简并度也可以很方便地用生成函数

表达为:⁵⁵

$$\mathcal{Z}_{0,1}(q) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} \quad (39.13)$$

⁵⁵ q^h 前面的系数表示 L_0 的本征值
为 h 的本征空间的简并度

另外还有一个 $q = 1, h = 1/4$ 的最高权表示，也可以类似的做，得到生成简并度的生成函数：

$$\mathcal{Z}_{1,1}(q) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{(m+\frac{1}{2})^2} \quad (39.14)$$

这两个函数在构造环面上的 $S^1_{\sqrt{2}}$ 自由玻色子的配分函数很有用。

SUBSECTION 39.1

$\widehat{\mathfrak{so}}(N)_1$ Current Algebra

u 前面一直在玩玻色子，也体会到了它加上各种边界条件可以实现 $\widehat{\mathfrak{su}}$ ，费米子对应实际上也是 $\widehat{\mathfrak{so}}$ 流代数。考虑 N 个自由费米子，作用量在 $\psi_i \mapsto O_{ij}\psi_j$ 的作用下不变，其中 $O_{ij} \in SO(N)$ 属于其基本表示之中。仿照前面玻色化那里定义的流，可以非 abel 推广到：⁵⁶

$$j^a(z) = \gamma N(\psi^i t_{ij}^a \psi^j) \quad (39.15)$$

⁵⁶ 前面玻色化那里两个费米子有个 $SO(2)$ 对称性，是 abel 的，对应 $t_{ij} = \epsilon_{ij}$

选取归一化 $\text{Tr}(t^a t^b) = 2\delta^{ab}$ 。归一化系数 γ 可以用 wick 定理求 jj OPE 得到：

$$j^a(z) j^b(w) = \gamma^2 \frac{2 \text{Tr}(t^a t^b)}{(z-w)^2} + 2\gamma \frac{if^{abc}}{z-w} j^c(w) + \dots \quad (39.16)$$

所以要求 $\gamma = \frac{1}{2}$ ，而且这意味着 $k = 1$ ，所以确实实现了 $\widehat{\mathfrak{so}}(N)_1$ 流代数。利用 Sugawara 构造就可以很方便得到理论的能动张量，对应的中心荷由 ?? 给出：

$$c = \frac{1 \cdot \frac{N(N-1)}{2}}{1+N-1} = \frac{N}{2} \quad (39.17)$$

SECTION 40

Coset Construction

WZW Models 核心是理论的那些流，这正是极小模型欠缺的，但似乎两个 WZW 模型的“商”可以和极小模型联系起来。更广点说，陪集构造试图完全分类 RCFT，本节做些最基本的介绍。

考虑一个定义在 \mathfrak{g}_{k_g} 上的 WZW 模型，考虑子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ，这个子代数仿射化为 $\widehat{\mathfrak{h}}_{k_h}$ 后也可定义一个 WZW 模型。注意这里的 k_h 和 g 是有关系的，成正比 $k_h = x_e k_g$ ，这里的 x_e 是 **Embedding index**。两个 WZW 模型的能动张量可以用 Sugawara 构造构造出来：

$$\begin{aligned} T_g(z) &= \frac{1}{2(k_g + C_g)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} N(j_g^a j_g^a)(z) \\ T_h(z) &= \frac{1}{2(k_h + C_h)} \sum_{b=1}^{\dim \mathfrak{h}} N(j_h^b j_h^b)(z) \end{aligned} \quad (40.1)$$

显然 $j_{\mathfrak{h}}$ 在两个模型中都被包含，都是流，所以：

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{g}}(z)j_{\mathfrak{h}}^b(w) &= \frac{j_{\mathfrak{h}}^b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j_{\mathfrak{h}}^b(w)}{z-w} + \dots \\ T_{\mathfrak{h}}(z)j_{\mathfrak{h}}^b(w) &= \frac{j_{\mathfrak{h}}^b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j_{\mathfrak{h}}^b(w)}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (40.2)$$

两式相减得到：

$$T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(z)j_{\mathfrak{h}}^b(w) = \text{regular} \quad T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(z)T_{\mathfrak{h}}(w) = \text{regular}, \quad T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \equiv (T_{\mathfrak{g}} - T_{\mathfrak{h}}) \quad (40.3)$$

而 OPE 正规意味着对易子为 0，所以我们可以把那个大的 WZW 模型分解为小的 WZW 和一个与其“正交”的模型： $T_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} + T_{\mathfrak{h}}$ 。

$$T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}T_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{g}}T_{\mathfrak{g}} - T_{\mathfrak{h}}T_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{g}}T_{\mathfrak{g}} - T_{\mathfrak{h}}T_{\mathfrak{h}} \quad (40.4)$$

这意味着 $T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 的中心荷等于两个理论之差：

$$c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}} = \frac{k_{\mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}}{k_{\mathfrak{g}} + C_{\mathfrak{g}}} - \frac{k_{\mathfrak{h}} \dim \mathfrak{h}}{k_{\mathfrak{h}} + C_{\mathfrak{h}}} \quad (40.5)$$

Definition 13

(Coset Construction) $T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, 以及流 $\{j \in \hat{\mathfrak{g}}_{k_{\mathfrak{g}}} | \mathcal{R}(jj_{\mathfrak{h}}) \text{ no singular, } \forall j_{\mathfrak{g}} \in \hat{\mathfrak{h}}_{k_{\mathfrak{g}}}\}$ 定义了一个 CFT，这也常被称为 **Goddard - Kent - Olive (GKO)** 构造。

Remark 理论的流是那些和 $\hat{\mathfrak{h}}_{k_{\mathfrak{g}}}$ 中的流 OPE 非奇异的，这也符合“商掉”的 naive 想法。注意我们这里称为陪集陪集构造，因为只有在 \mathfrak{h} 是理想的时候这个商才是个李代数，所以构造出来的 CFT 一般不是一个 WZW 模型。这恰巧是非常重要的，用 WZW 模型可以构造出新的物理！

SUBSECTION 40.1

Back to unitary minimal models

经常要涉及到的一类陪集构造是 $(\hat{\mathfrak{g}}_{k_1} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{k_2})/\hat{\mathfrak{g}}_k$, 称为 **diagonal coset models**。 $\hat{\mathfrak{g}}_{k_i}$ 里面的流是 $j_{(i)}^a$, 那么 $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{k_2}$ 里面的流就是：

$$j^{ab} = j_{(1)}^a + j_{(2)}^b, \quad [j_{(1)}^a, j_{(2)}^b] = 0 \quad (40.6)$$

注意这里的对易关系说明我们考虑的实际上是由直和。底下的 $\hat{\mathfrak{g}}_k$ 里面的流是对角的部分：

$$j_{\text{diag}}^a = j_{(1)}^a + j_{(2)}^a \quad (40.7)$$

j_{diag} 仍旧满足 Kač-Moody 代数：

$$[j_m^a, j_n^b] = i \sum_c f^{abc} j_{m+n}^c + k m \delta^{ab} \delta_{m+n,0} \quad (40.8)$$

还是因为 $[j_{(1)}^a, j_{(2)}^b] = 0$, 得到：

$$f^{abc} = f^{abc} + f^{abc}, \quad k = k_1 + k_2 \quad (40.9)$$

而且按照 Sugawara 构造：

$$T_{(\mathfrak{g}_{k_1} \times \mathfrak{g}_{k_2})/\mathfrak{g}_{k_1+k_2}} = T_{\mathfrak{g}_{k_1}} + T_{\mathfrak{g}_{k_2}} - T_{\mathfrak{g}_{k_1+k_2}} \quad (40.10)$$

下面的 Coset 构造:

$$\frac{\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k \times \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1}{\mathfrak{su}(2)_{k+1}} \quad (40.11)$$

不难计算出中心荷为:

$$c = \frac{3k}{k+2} + 1 - \frac{3(k+1)}{k+3} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)} \quad (40.12)$$

这正是 unitary minimal models 的中心荷, 而且你无法找到与所有的 j_{dia} 都对易的 j^{ab} , 所以理论中是没有守恒流的, 这也正是极小模型的特征, 它只有 Virasoro 对称性。严格证明这两个的等价性非常复杂, 但是这里指出两者是完全一致的!

SUBSECTION 40.2

Branching Rules

前面我们只说了 GKO 构造之后的理论有哪些流, 问有哪些谱就要去想最高权表示, 由于原先大的 WZW 模型分成了两个正交的模型, 所以我们自然觉得原先 WZW 模型的最高权表示现在在更小的两个群下看是可约的, 应该会被分解为若干个 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 和 \mathfrak{h} 的最高权表示的直积。

$$(\lambda_{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\lambda_{\mathfrak{h}}} (\lambda_{\mathfrak{h}}) \otimes (\lambda_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) \quad (40.13)$$

我们只是形式的写下了这个关系, 具体怎么分解就称为 **Branching Rules**。比如 $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{su}}(2)_k \times \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1 \rightarrow \widehat{\mathfrak{su}}(2)_{k+1} \times (\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k \times \widehat{\mathfrak{su}}(2)_1)/\widehat{\mathfrak{su}}(2)_{k+1}$ 的分解就是:

$$(p-1)_k \otimes (\epsilon)_1 = \bigoplus_{0 \leq (q-1) \leq k+1} (q-1)_{k+1} \otimes (h_{p,q}(m))$$

$p - q + \epsilon = 0 \bmod 2$

$$(40.14)$$

这里 $\epsilon = 0, 1, m = k+2, 0 \leq (p-1) \leq k$, $(l)_k$ 意思是 $\widehat{\mathfrak{su}}(2)_k$ 的自旋 $\frac{l}{2}$ 最高权表示。上世纪粒子物理研究很多都在干各种群表示分解, 文献 [100] 就总结的很到位, 另外还有比如 LieART[101, 102] 这种 Mathematica® 程序包可以很方便地进行计算。

SECTION 41

W Algebras

本节主要参考 [103]。前面考虑对称性本质上都是在找 Virasoro 代数的扩张, 最简单的情况就是加入一个 $s=1$ 对应的 Kač-Moody 流。自然就要问可不可以往对称代数里面加入更高自旋的流⁵⁷, 进一步扩张 Virasoro 代数? 这是 W 代数的物理出发点, 我们仍旧只考虑 $\mathcal{A} \times \bar{\mathcal{A}}$ 的对称性的 chiral 部分。

⁵⁷ 注意这里我们扩展了流的定义, 任意理论中对称性对应的守恒流无论 h 是否为 1 我们都称为流

SUBSECTION 41.1

$\mathcal{W}(2,3)$ Algebra

第一个例子是不加入 $s=1$ 的流, 加入 $s=3$ 的流, 注意能动张量本身是自旋为 2 的流, 所以我们称这时候的代数是 $\mathcal{W}(2,3)$ 代数。

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \\ [L_m, W_n] &= (2m-n)W_{m+n} \end{aligned} \quad (41.1)$$

第一个等式就是 Virasoro 代数, 第二个等式因为 W 是 $h=3$ 的初级场, 现在还需要考虑 WW 之间的对易关系。根据 31.45 对易关系的右边是一堆初级场的线性组合, 而且最

高自旋为 $3+3-2=4$, 而代数中的初级场除了 T, W , 剩下能凑出自旋为 4 的只能是 33.23 给出的 $\mathcal{N}(TT)$ 。但是自旋为 1 的初级场可能通过像 $\mathcal{N}(TT)$ 的方式结合得到⁵⁸:

$$\begin{aligned} [W_m, W_n] &= C_{WW}^L p_{332}(m, n) L_{m+n} + C_{WW}^W p_{333}(m, n) W_{m+n} \\ &+ C_{WW}^{\mathcal{N}(TT)} p_{334}(m, n) \mathcal{N}(LL)_{m+n} + d_{WW} \binom{m+2}{5} \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (41.2)$$

上面公式中的系数绝大部分都是可以通过自举定出来的。首先回忆 TT OPE 里面的中心项对应 $d_{LL} = \frac{c}{2}$ 完全是惯例的选取, 也就是说取这样一个 d_{LL} 的归一化, 其他归一化等价于把算符 Scaling 一下。所以这里 d_{WW} 也完全可以看作是一个惯例的选取, 一般取为 $\frac{c}{3}$ 。根据 p 的一般计算式 $p_{\Delta\Delta(2k+1)}(m, n) = p_{\Delta\Delta(2k+1)}(n, m)$, 另一方面, 由于对易关系 41.2 是反对称的, 所以这直接导致 $C_{\Delta\Delta}^{(2k+1)} = 0$, W_n 的项直接没了 $C_{WW}^W = 0$ ⁵⁹。

再根据 31.45, $p_{233}(m, n) = \frac{2m-n}{3}$, 而且和 41.1 对比得知 $C_{LW}^W = 3$ 。根据定义 $C_{ijk}^1 = C_{ij}^l d_{lk}$, 得益于 $C_{WW}^W = 0$, 且 $\mathcal{N}(TT)$ 和 T 共形维数不同导致 $d_{\mathcal{N}(TT),L} = 0$, 所以:

$$C_{WW}^L = C_{WWL} (d_{LL})^{-1} = C_{LW}^W d_{WW} (d_{LL})^{-1} = 3 \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{2}{c} = 2 \quad (41.3)$$

最后需要计算的只剩下 $C_{WW}^{\mathcal{N}(TT)}$, 核心就是利用 41.3 的思想:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(TT)_{-4}|0\rangle &= \left(L_{-2}L_{-2} - \frac{3}{10} \cdot 2L_{-4} \right) |0\rangle \\ \Rightarrow d_{\mathcal{N}(TT)\mathcal{N}(TT)} &= \langle 0 | \mathcal{N}(TT)_4 \mathcal{N}(TT)_{-4} | 0 \rangle = \frac{(5c+22)c}{10} \end{aligned} \quad (41.4)$$

再根据 31.33 得到:

$$\begin{aligned} C_{WW\mathcal{N}(TT)} &= \left\langle 0 \left| W_3 W_1 \left(L_{-2}L_{-2} - \frac{3}{5}L_{-4} \right) \right| 0 \right\rangle \\ &= \langle 0 | W_3 [W_1, L_{-2}L_{-2}] | 0 \rangle - \frac{3}{5} \langle 0 | W_3 [W_1, L_{-4}] | 0 \rangle \\ &= 5 \langle 0 | W_3 (L_{-2}W_{-1} + W_{-1}L_{-2}) | 0 \rangle - \frac{27}{5} \langle 0 | W_3 W_{-3} | 0 \rangle \\ &= 5 \langle 0 | W_3 [W_{-1}, L_{-2}] | 0 \rangle - \frac{27}{5} \langle 0 | W_3 W_{-3} | 0 \rangle \\ &= \frac{48}{5} \langle 0 | W_3 W_{-3} | 0 \rangle = \frac{48}{5} d_{WW} = \frac{16}{5} c. \end{aligned} \quad (41.5)$$

所以:

$$C_{WW}^{\mathcal{N}(TT)} = C_{WW\mathcal{N}(TT)} (d_{\mathcal{N}(TT)\mathcal{N}(TT)})^{-1} = \frac{32}{5c+22} \quad (41.6)$$

$\mathcal{W}(2,3)$ 代数的最后一块拼图为:

$$\begin{aligned} [W_m, W_n] &= 2p_{332}(m, n) L_{m+n} + \frac{32}{5c+22} p_{334}(m, n) \mathcal{N}(LL)_{m+n} \\ &+ \frac{c}{3} \binom{m+2}{5} \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (41.7)$$

整体用 OPE 写起来是:⁶⁰

⁵⁸ 或许你想用 T, W 次级场线性组合得到初级场, 但是次级场相比于初级场 h 只增不减

⁵⁹ 这一点推广后在构建 \mathcal{W}_∞ 代数时非常有用

⁶⁰ ~ 表示只写奇异项

$$\begin{aligned}
 T(z)T(w) &\sim \frac{\partial T(w)}{z-w} + \frac{2T}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4} \\
 T(z)W(w) &\sim \frac{\partial W}{z-w} + \frac{3W}{(z-w)^2} \\
 W(z)W(w) &\sim \frac{16}{22+5c} \left(\frac{\partial \mathcal{N}(TT)}{z-w} + \frac{2\mathcal{N}(TT)}{(z-w)^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{15} \left(\frac{\partial^3 T}{z-w} + \frac{9}{2} \frac{\partial^2 T}{(z-w)^2} + 15 \frac{\partial T}{(z-w)^3} + 30 \frac{T}{(z-w)^4} \right) \\
 &+ \frac{c/3}{(z-w)^6}
 \end{aligned} \tag{41.8}$$

上面的代数满足李代数的所有比如反对称和雅可比恒等式所有特征，但是数学家并不称为李代数，而称为包络代数 (enveloping algebra)，因为对易子的右边出现了 LL 这种非线性的项。假设代数中拥有的流的最大自旋为 s ，那么这个流自己的对易子必定会引入一个 $2s - 2 > s$ 的流，这只能通过 $\mathcal{N}(TT)$ 这样直接结合两个更低自旋的流组成非线性项得到。唯一的例外是 $s = 2$ 所对应的 Virasoro 代数。

不同中心荷会导致不同 \mathcal{W} 代数的中心扩张，类似于前面对 Virasoro 代数表示的分析，只有当中心荷取一系列值时，理论中才可能出现幺正表示，计算表明：

$$c = 2 \left(1 - \frac{12}{(k+3)(k+4)} \right) \tag{41.9}$$

会将 $\mathcal{W}(2,3)$ 代数对应到一个 RCFT。而 RCFT 又可以通过陪集构造来得到，上面的中心荷的选取对应的陪集构造为：

$$\frac{\widehat{\mathfrak{su}}(3)_k \times \widehat{\mathfrak{su}}(3)_1}{\mathfrak{su}(3)_{k+1}} \tag{41.10}$$

SUBSECTION 41.2

$\mathcal{W}(2,4)$ Algebra

现在考虑理论中不是多加一个 $h = 3$ 的流，而是 4 的流：

$$[L_m, W_n] = (3m - n) W_{m+n} \tag{41.11}$$

仍旧考虑自举的方法：⁶¹

⁶¹ 现在 $C_{WW}^W \neq 0$

$$\begin{aligned}
 [W_m, W_n] &= C_{WW}^L p_{442}(m, n) L_{m+n} + C_{WW}^W p_{444}(m, n) W_{m+n} \\
 &+ C_{WW}^{\mathcal{N}(LL)} p_{444}(m, n) \mathcal{N}(LL)_{m+n} \\
 &+ C_{WW}^{\mathcal{N}(L\partial^2 L)} p_{446}(m, n) \mathcal{N}(L\partial^2 L)_{m+n} \\
 &+ C_{WW}^{\mathcal{N}(\mathcal{N}(LL)L)} p_{446}(m, n) \mathcal{N}(\mathcal{N}(LL)L)_{m+n} \\
 &+ C_{WW}^{\mathcal{N}(WL)} p_{446}(m, n) \mathcal{N}(WL)_{m+n} + \frac{c}{4} \binom{m+3}{7} \delta_{m+n,0}
 \end{aligned} \tag{41.12}$$

其中已经选取了归一化 $d_{WW} = \frac{c}{4}$ ，那些 $\mathcal{N}(AB)$ 这里也没有写出的必要了，只需要知道他们是构造出来的特定维数的初级场就好。 p 都可以直接计算出来，那些 C 也是可以计

算出来的：

$$\begin{aligned} C_{WW}^L &= 2, & C_{WW}^{\mathcal{N}(LL)L} &= \frac{24(72c+13)}{(5c+22)(7c+68)(2c-1)} \\ C_{WW}^{\mathcal{N}(LL)} &= \frac{42}{5c+22}, & C_{WW}^{\mathcal{N}(WL)} &= \frac{28}{3(c+24)}C_{WW}^W \\ C_{WW}^{\mathcal{N}(L\partial^2 L)} &= \frac{3(19c-524)}{10(7c+68)(2c-1)}, \end{aligned} \quad (41.13)$$

但是 c 和 C_{WW}^W 还是自由的，而雅可比恒等式又对他们做出了限制：

$$(C_{WW}^W)^2 = \frac{54(c+24)(c^2-172c+196)}{(5c+22)(7c+68)(2c-1)} \quad (41.14)$$

所以直接去从李代数的角度研究 $\mathcal{W}(2, \Delta)$ 本身过于复杂。 $\mathcal{W}(2, 4)$ 对于满足上式的 c 还都是闭的，而到了 $\mathcal{W}(2, 5)$ ，要求代数是闭的，中心荷只能是 $\frac{6}{7}, -7, -\frac{350}{11}, 134 \pm 60\sqrt{5}$ ，但是到了 $\mathcal{W}(2, 6)$ ，任何中心荷选取又都可以了。

SUBSECTION 41.3

\mathcal{W}_N Algebra

前面 $\mathcal{W}(2, \Delta)$ 代数，只是在 Virasoro 代数的基础上加入一个流，如果 $2 < s \leq N$ 的流各加一个，得到的就是 $\mathcal{W}(2, 3, \dots, N)$ 代数，也就是 \mathcal{W}_N 代数。第一节研究的就是 \mathcal{W}_3 代数。但是通过前面两节的铺垫可知直接去研究对易关系够呛，比如 \mathcal{W}_4 的对易关系显式 [104, 105] 非常复杂。换个思路，我们或许可以直接去研究其对应的 CFT 本身的实现。 \mathcal{W}_N 代数实际上就可以通过 $N-1$ 个玻色子（标量场） $\vec{\phi}$ 实现。

首先考虑一个微分算子：

$$L = u_N \partial^N + u_{N-2} \partial^{N-2} + u_{N-3} \partial^{N-3} \cdots + u_1 \partial + u_0 \quad (41.15)$$

利用 Miura 变换可以和 $SU(N)$ 群联系起来：

$$L = \prod_{i=1}^N \left(\alpha_0 \partial + (\vec{\mu}_i - \vec{\mu}_{i+1}) \cdot \partial \vec{\phi} \right) \quad (41.16)$$

这里 α_0 是任意常数， $\vec{\mu}_i$ 是 $SU(N)$ 的基本权，定义为 $\vec{\mu}_i \cdot \vec{\alpha}_j = \delta_{ij}$ ，这里 α_j 是 $SU(N)$ 的 simple roots。类似于前面讨论的 free Boson， $\vec{\phi}$ 是自旋为 0 的玻色场，而且不是初级场，满足 OPE 为：

$$\phi_i(z)\phi_j(w) \sim \delta_{ij} \log(z-w) \quad (41.17)$$

每求一个导数，其自旋加一，所以我们可以用 $[\phi^m \partial^n \phi]$ 去表示 u_{N-s} ，对应自旋为 s 。除了一个尺度放缩， $T(z)$ 就是 u_{N-2} ，而 $u_{N-s}, s \geq 3$ 一般不是初级场，还可能需要加上一些更低自旋的流组合起来得到的项，类似于 $\mathcal{N}(TT)$ 。这套方法可以具体用在 \mathcal{W}_3 的实现上：

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 + \alpha_1 \partial^2 \phi_1 + \alpha_2 \partial^2 \phi_2, \\ W(z) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{22+5c}} \left(\frac{1}{3}(\partial\phi_1)^3 - \partial\phi_1(\partial\phi_2)^2 + \alpha_1 \partial\phi_1 \partial^2 \phi_1 - 2\alpha_2 \partial\phi_1 \partial^2 \phi_2 - \alpha_1 \partial\phi_2 \partial^2 \phi_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\alpha_1^2 \partial^3 \phi_1 - \alpha_1 \alpha_2 \partial^3 \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (41.18)$$

中心荷：

$$c = 2 - 16\alpha_1^2, \quad \alpha_1^2 = 3\alpha_2^2 \quad (41.19)$$

类似于 \mathcal{W}_3 , 我们预期 \mathcal{W}_N 的么正表示也只会出现在一些固定的 c 的选取, 从而对应一个 RCFT, 从而可以用陪集构造构造出来。不难猜测这个陪集构造为:

$$\frac{\widehat{\mathfrak{su}}(N)_k \times \widehat{\mathfrak{su}}(N)_1}{\mathfrak{su}(N)_{k+1}} \quad (41.20)$$

对应的中心荷:

$$c = (N-1) \left(1 - \frac{N(N+1)}{(m+N)(m+N+1)} \right) \quad \text{with } m \geq 1. \quad (41.21)$$

所以似乎对 \mathcal{W} 代数的分类变成了对 RCFT 的分类。对于不大的 N , 这一点被明确建立起来了, 更高 N 还有待研究。

SUBSECTION 41.4

\mathcal{W}_∞ Algebra

Virasoro 代数里面不会出现非线性项是因为 $2 \times 2 - 2 = 2$, 出现非线性项总归是两项乘积的自旋大于最大允许的自旋。如果现在取 $N \rightarrow \infty$ 的极限, 由于任何自旋都允许了, 所以 \mathcal{W}_∞ 代数应该不需要低自旋的流组成更高自旋的非线性流, 所以它应当是一个线性代数。

另外, \mathcal{W}_N 代数对易子的右边也不是包含所有 $2 \sim \leq s + s' - 2$ 的流, 比如 $C_{WW}^W = 0$ 就得知 WW 右边不包含 $s = 3$ 的 W , 这个观察可以进一步推广, 实际上, 自旋为 s 和 s' 的流之间的 OPE 应当只会包含 $s + s' - 2, s + s' - 4, \dots$ ⁶²。现在我们用上标标记自旋, 下标标记洛朗模, 做 ansatz:

$$[V_m^i, V_n^j] = \sum_{\ell \geq 0} g_{2\ell}^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j-2\ell} + c_i(m) \delta^{ij} \delta_{m+n, 0} \quad (41.22)$$

注意, 由于历史原因, 这里的 V^i 表示的是自旋为 $s = i + 2$ 的流

$$V^i(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^i z^{-m-i-2} \quad (41.23)$$

由于后面涉及到的公式过于复杂, 为了方便直接引用原文献的公式, 还是不要随意更改符号约定。文献 [106, 107] 经过暴力计算得到:

$$\begin{aligned} c_i(m) &= m(m^2 - 1)(m^2 - 4) \cdots (m^2 - (i+1)^2) c_i \\ c_i &= \frac{2^{2i-3} i! (i+2)!}{(2i+1)!! (2i+3)!!} c \end{aligned} \quad (41.24)$$

$$\begin{aligned} g_\ell^{ij}(m, n) &= \frac{1}{2(\ell+1)!} \phi_\ell^{ij} N_\ell^{ij}(m, n) \\ N_\ell^{ij}(m, n) &= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^k \binom{\ell+1}{k} [i+1+m]_{\ell+1-k} [i+1-m]_k [j+1+n]_k [j+1-n]_{\ell+1-k}, \\ &= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^k \binom{\ell+1}{k} (2i+2-\ell)_k [2j+2-k]_{\ell+1-k} [i+1+m]_{\ell+1-k} [j+1+n]_k \\ \phi_\ell^{ij} &= {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{\ell}{2} \\ -i - \frac{1}{2}, -j - \frac{1}{2}, i + j - \ell + \frac{5}{2} \end{matrix}; 1 \right] \end{aligned} \quad (41.25)$$

这里 $[a]_n \equiv a(a-1) \cdots (a-n+1) = a!/(a-n)!$ 称为 descending Pochhammer 符号, $(a)_n \equiv a(a+1) \cdots (a+n-1) = (a+n-1)!/(a-1)!$ 称为 ascending Pochhammer 符号。

⁶² 如果自旋和是偶数就在 2 终止, 否则在 3 终止, 因为不可能有 2 以下的流。

ϕ_ℓ^{ij} 定义里面的那一堆叫做 "Saalschützian ${}_4F_3(1)$ generalised hypergeometric function"。也可以用 Wigner 6-j 符号去表达⁶³[107]。平民化的形式为：

$$\phi_\ell^{ij} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-\frac{1}{2})_k (\frac{3}{2})_k (-\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2})_k (-\frac{\ell}{2})_k}{k! (-i - \frac{1}{2})_k (-j - \frac{1}{2})_k (i + j - \ell + \frac{5}{2})_k} \quad (41.26)$$

⁶³ 这部分内容可见喀兴林 [108] 角动量那一章节

Example

$$[V_m^i, V_n^j] = \frac{1}{2} \phi_0^{ij} N_0^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j} + \frac{1}{2 \cdot 3!} \phi_2^{ij} N_2^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j-2} + \frac{1}{2 \cdot 5!} \phi_4^{ij} N_4^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j-4} + \dots \quad (41.27)$$

其中：

$$\begin{aligned} \phi_0^{ij} &= 1, \\ \phi_2^{ij} &= 1 - \frac{9}{(2i+1)(2j+1)(2i+2j+1)}, \\ \phi_4^{ij} &= 1 - \frac{30}{(2i+1)(2j+1)(2i+2j-3)} \left(1 + \frac{15/2}{(2i-1)(2j-1)(2i+2j-1)} \right) \\ N_0^{ij}(m, n) &= 2(j+1)m - 2(i+1)n \\ N_2^{ij}(m, n) &= 4j(j+1)(2j+1)m^3 - 12ij(2j+1)m^2n + 12ij(2i+1)mn^2 - 4i(i+1)(2i+1)n^3 \\ &\quad - 4j(j+1)(1+3i+3i^2+2j+3ij)m + 4i(i+1)(1+3j+3j^2+2i+3ij)n \\ N_4^{ij}(m, n) &= 5'th-order polynomial in m and n \end{aligned} \quad (41.28)$$

上面例子看 $L_m = V_m^0$ 的情形，除了 V^3 ，其它的场都不是初级场，但是在 L_0, L_\pm 子代数下是准初级场，当然，也可以通过重新组合来把它们变成初级场，但代价就是 \mathcal{W}_∞ 再次变为非线性。

41.4.1 Contraction

首先补充一下 Lie 代数的一个重要数学概念，contraction，很多量子层面上的代数结构可以通过 contraction 变回到经典层面，A.Zee[6] 书最后就强调了这一点。更多内容可见 [109]，里面还给出了与 contraction 相反的操作，deformation 的定义。

Definition 14

(Contraction) 取一个 $\mathfrak{g} \rightarrow GL(N)$ ($N = \dim \mathfrak{g}$) 的在 ϵ_0 去心领域非奇异的线性变换^a，则下面的李括号：

$$[x, y]' \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow \epsilon_0} \mathcal{U}_\varepsilon^{-1}([\mathcal{U}_\varepsilon(x), \mathcal{U}_\varepsilon(y)]) \quad (41.29)$$

定义了一个新的李代数 \mathfrak{g}' ，称为原先李代数的收缩。

^a没有要求是表示

作为一个合格的物理人，我们更关注如何具体地做出来，后面我们用到的实际上是广义 Inönü - Wigner 收缩。首先把李代数分解为一些子空间（不要求是子代数）的和（不要求直和）：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_p \quad (41.30)$$

然后取：⁶⁴

$$\mathcal{U}_\varepsilon^{\text{WW}} = \bigoplus_j \varepsilon^{n_j} \text{id}_{\mathfrak{g}_j}, \quad \varepsilon > 0, \quad n_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p \quad (41.31)$$

⁶⁴ 狹義的 Inönü - Wigner 收縮即下式 $p = 1$ ，且 $n_0 = 0, n_1 = 1$

其中 $p \leq \dim \mathfrak{g}$ 。对于 \mathcal{W} 代数，最自然的分法是取某个自旋的所有模单独成一个子空间，然后做收缩：

$$V_m^i \longrightarrow q^{-i} V_m^i \quad (41.32)$$

对易关系变成:

$$[V_m^i, V_n^j] = \sum_{\ell > 0} q^{2\ell} g_{2\ell}^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j-2\ell} + q^{2i} c_i(m) \delta^{ij} \delta_{m+n, 0} \quad (41.33)$$

取 $q \rightarrow 0$ 极限, 李代数中元素用小写 v 记:

$$[v_m^i, v_n^j] = \left((j+1)m - (i+1)n \right) v_{m+n}^{i+j} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta^{i,0} \delta^{j,0} \delta_{m+n,0} \quad (41.34)$$

这就是 \mathcal{W}_∞ 代数。注意, 只有 $L_m = v_m^0$ 张成的 Virasoro 子代数是有中心荷的, 高自旋的中心荷都是 trivial 的, 用更符合直觉的上标标记自旋的记号, 高自旋部分代数可表达为:

$$[w_m^r, w_n^s] = [(r-1)n - (s-1)m] w_{m+n}^{r+s} \quad (41.35)$$

且在 L_m 下 primary。利用 \mathcal{W}_∞ 代数的对易子, 可以计算得到 OPE 形式:

$$V^i(z) V^j(w) \sim - \sum_{\ell \geq 0} q^{2\ell} f_{2\ell}^{ij}(\partial_z, \partial_w) \frac{V^{i+j-2\ell}(w)}{z-w} - q^{2i} c_i \delta^{ij} (\partial_z)^{2i+3} \frac{1}{z-w}. \quad (41.36)$$

这里:

$$\begin{aligned} f_\ell^{ij}(m, n) &= \frac{1}{2(\ell+1)!} \phi_\ell^{ij} M_\ell^{ij}(m, n) \\ M_\ell^{ij}(m, n) &= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^k \binom{\ell+1}{k} (2i+2-\ell)_k [2j+2-k]_{\ell+1-k} m^{\ell+1-k} n^k \end{aligned} \quad (41.37)$$

注意, 上面的表达式都是带着收缩因子的, 通常表达 OPE 时习惯把收缩因子取为 $q = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} V^0(z) V^0(w) &\sim \frac{\partial V^0}{z-w} + \frac{2V^0}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4}, \\ V^0(z) V^1(w) &\sim \frac{\partial V^1}{z-w} + \frac{3V^1}{(z-w)^2}, \\ V^0(z) V^2(w) &\sim \frac{\partial V^2}{z-w} + \frac{4V^2}{(z-w)^2} + \frac{12}{5} \frac{V^0}{(z-w)^4}, \\ V^1(z) V^1(w) &\sim \frac{2\partial V^2}{z-w} + \frac{4V^2}{(z-w)^2} \\ &\quad + \frac{1}{10} \left(\frac{\partial^3 V^0}{z-w} + \frac{9}{2} \frac{\partial^2 V^0}{(z-w)^2} + 15 \frac{\partial V^0}{(z-w)^3} + 30 \frac{V^0}{(z-w)^4} \right) \\ &\quad + \frac{c/2}{(z-w)^6}. \end{aligned} \quad (41.38)$$

从上面的几个 OPE 可以清楚地看到 V^1 是初级场, 但是 V^2 准初级。

41.4.2 Wedge subalgebra

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 是 \mathbb{R} 上的 Virasoro 代数, 显然构成 \mathcal{W}_∞ 代数的子代数。实际上这个子代数可以取地更大一些, $\forall i, \{V_m^i\}, -i-1 \leq m \leq i+1$ 构成了 \mathcal{W}_∞ 代数的子代数。 i 为纵轴, m 为横轴, 这些算符作为离散的点填满了一个楔形, 所以称为 wedge 子代数。每一层有 $2i+3$ 个算符, 它们实际上处于 $SL(2, \mathbb{R})$ 的 $2i+1$ 维不可约表示之中。考虑 $SL(N, \mathbb{R})$ 的自伴表示, 这是一个 $N^2 - 1$ 维的表示, 它在 $SL(2, \mathbb{R})$ 上的诱导表示有下面的不可约表示分解:

$$(N^2 - 1) \longrightarrow 3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus \cdots \oplus (2N-1) \quad (41.39)$$

可以看到, 取 $N \rightarrow \infty$, 这个 wedge 子代数就处于 $SL(\infty, \mathbb{R})$ 的自伴表示之中, 也就是说它们是 $\mathfrak{sl}(\infty, \mathbb{R})$ 的生成元, 所以 $\mathfrak{sl}(\infty, \mathbb{R})$ 是 \mathcal{W} 的 wedge 子代数。

有限维李代数不同生成元的选取是等价的, 只是基底的选取不同, 最终的李括号是等价的。但是你最终不同的基底在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下导出的李括号可能是不等价的。 $\mathfrak{sl}(\infty, \mathbb{R})$ 就有由单参数标记的互不等价的一簇代数, 生成元用 X_m^i 标记, 这里 i, m 之间满足在 wedge 内:

$$\begin{aligned} [X_m^i, X_n^j] &= \sum_{\ell \geq 0} g_{2\ell}^{ij}(m, n; s) X_{m+n}^{i+j-2\ell}, \quad s \geq -\frac{1}{2} \\ g_\ell^{ij}(m, n; s) &= \frac{1}{2(\ell+1)!} \phi_\ell^{ij}(s) N_\ell^{ij}(m, n) \\ \phi_\ell^{ij}(s) &= {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} - 2s, \frac{3}{2} + 2s, -\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{\ell}{2} \\ -i - \frac{1}{2}, -j - \frac{1}{2}, i + j - \ell + \frac{5}{2} \end{matrix}; 1 \right] \end{aligned} \quad (41.40)$$

这里我们把 $g_\ell^{ij}, \phi_\ell^{ij}$ 扩展为了一个单参曲线。而 \mathcal{W}_∞ 的 wedge 子代数对应的那一个是在 $s = 0$ 的情况。

SUBSECTION 41.5

$\mathcal{W}_{1+\infty}$ Algebra

$s = 0$ 对应 \mathcal{W}_∞ 的 wedge 子代数, 那是否可以通过对 s 的不同选取, 使其称为更大的代数的 wedge 子代数? 我们比较关心的是对易子等式右边出来自旋为 1 的项, 也就是 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数。已经证明这有且只有一种选取, $s = -\frac{1}{2}$, 对应的李代数中元素用 \tilde{V}_m^i 表示:

$$\begin{aligned} [\tilde{V}_m^i, \tilde{V}_n^j] &= \sum_{\ell \geq 0} q^{2\ell} \tilde{g}_{2\ell}^{ij}(m, n) \tilde{V}_{m+n}^{i+j-2\ell} + q^{2i} \tilde{c}_i(m) \delta^{ij} \delta_{m+n, 0} \\ \tilde{g}_\ell^{ij}(m, n) &\equiv g_\ell^{ij}(m, n, -\frac{1}{2}) \\ \tilde{c}_i(m) &= m(m^2 - 1)(m^2 - 4) \cdots (m^2 - (i+1)^2) \tilde{c}_i \\ \tilde{c}_i &= \frac{2^{2i-2} ((i+1)!)^2}{(2i+1)!!(2i+3)!!} c. \end{aligned} \quad (41.41)$$

可以发现 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 和 \mathcal{W}_∞ 只有细微的一些差别, 而他的收缩 $w_{1+\infty}$ 的李括号形式上依旧是 41.34, 只是这个时候上标的取值不再是 $i \geq 0$, 而是 $i \geq -1$ 。 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 用 OPE 写下来形式为:

$$\tilde{V}^i(z) \tilde{V}^j(w) \sim - \sum_{\ell \geq 0} q^{2\ell} \tilde{f}_{2\ell}^{ij}(\partial_z, \partial_w) \frac{\tilde{V}^{i+j-2\ell}(w)}{z-w} - q^{2i} \tilde{c}_i \delta^{ij} (\partial_z)^{2i+3} \frac{1}{z-w} \quad (41.42)$$

其中:

$$\tilde{f}_\ell^{ij}(m, n) = \frac{1}{2(\ell+1)!} \tilde{\phi}_\ell^{ij} M_\ell^{ij}(m, n) \quad (41.43)$$

41.5.1 Lone-star algebra

前面对李代数的讨论是完全一般的, 除了后面构造 OPE 形式, 我们对李括号的限制就是反对易和雅可比恒等式, 并没有完全理解为对易子, 物理上更多的会把李括号直接理解为结合代数生成的对易子:

$$[A, B] \equiv A \star B - B \star A, \quad A \star (B \star C) = (A \star B) \star C. \quad (41.44)$$

这个结合代数 \star 称为 Lone-star 代数, 可以证明, \mathcal{W}_∞ 情况下为:

$$V_m^i \star V_n^j = \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq -1} q^\ell g_\ell^{ij}(m, n) V_{m+n}^{i+j-\ell}, \quad (41.45)$$

$\mathcal{W}_{1+\infty}$ 非常类似:

$$\tilde{V}_m^i \star \tilde{V}_n^j = \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq -1} q^\ell \tilde{g}_\ell^{ij}(m, n) \tilde{V}_{m+n}^{i+j-\ell}, \quad (41.46)$$

SUBSECTION 41.6

Realization of \mathcal{W} Algebras

41.6.1 Differential-operator realisations at $c = 0$

在考虑具体物理上 CFT 的实现之前先来看看直接用微分算符实现, 类似于 \mathcal{W}_N 一样, 但是这适用于中心扩张 trivial 情况。先看 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数, 定义:

$$j_n \equiv \tilde{V}_n^{-1}, \quad L_n \equiv \tilde{V}_n^0 \quad (41.47)$$

j_m 生成了无中心荷的 $U(1)$ Kač-Moody 代数, 再引入一个微分算符 d 与其满足对易关系: ⁶⁵

$$[j_m, j_n] = 0, \quad [d, j_m] = -mj_m \quad (41.48)$$

Virasoro 代数生成元可表达为:

$$L_m = (d + \frac{1}{2}m)j_m \quad (41.49)$$

可以证明生成元可以下面递推形式表达:

$$\tilde{V}_m^i \equiv (d + \frac{1}{2}m)\tilde{V}_m^{i-1} + \frac{i^2(i^2 - m^2)}{4(4i^2 - 1)}\tilde{V}_m^{i-2} \quad (41.50)$$

Example

上面的递推式可以最终写成:

$$\tilde{V}_m^i = P_i(d; m)j_m \quad (41.51)$$

前几个 P 为:

$$P_{-1} = 1,$$

$$P_0 = d + \frac{1}{2}m,$$

$$P_1 = d^2 + md + \frac{1}{12}(2m^2 + 1),$$

$$P_2 = d^3 + \frac{3}{2}md^2 + \frac{1}{20}(12m^2 + 7) + \frac{1}{40}(2m^3 + 7m),$$

$$P_3 = d^4 + 2md^3 + \frac{1}{14}(18m^2 + 13)d^2 + \frac{1}{14}(4m^3 + 13m)d + \frac{1}{560}(8m^4 + 100m^2 + 27) \quad (41.52)$$

不妨取 $j_m = e^{im\theta}$, $d = i\frac{\partial}{\partial\theta}$ 来实现 41.48, $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数 (centerless) 就可以看作是 S^1 上所有的光滑微分算子构成的代数。同样的方法可以用在 \mathcal{W}_∞ 上:

$$V_m^i = Q_i(L_0; m)L_m, \quad L_m = ie^{im\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad (41.53)$$

⁶⁵ 我们构建的是一个包络代数实现, 实际上还需要 j_m 满足一个 ideal relation, $j_m j_n - j_{m+n} = 0$, 总之, 后面用微分算子具体实现 j, d 是满足种种这些的。

一般的递推关系与 41.50 相比只是去掉~并 $d \mapsto L_0$ 。 Q 前面几个值为:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1, \\ Q_1 &= L_0 + \frac{m}{2}, \\ Q_2 &= L_0^2 + mL_0 + \frac{1}{5}(m^2 + 1), \\ Q_3 &= L_0^3 + \frac{3m}{2}L_0^2 + \frac{1}{14}(9m^2 + 10)L_0 + \frac{1}{14}(m^3 + 5m), \\ Q_4 &= L_0^4 + 2mL_0^3 + \frac{1}{3}(4m^2 + 5)L_0^2 + \frac{1}{3}(m^3 + 5m)L_0 + \frac{1}{42}(m^4 + 15m^2 + 8) \end{aligned} \quad (41.54)$$

\mathcal{W}_∞ 也是 \mathcal{S}^1 上的光滑微分算子构成的代数，但是 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 允许常数项 $(\frac{\partial}{\partial\theta})^0$ 的出现，但这里微分算子最低阶都是 1。

41.6.2 Embedding \mathcal{W}_∞ in $\mathcal{W}_{1+\infty}$

前面的微分算子实现可以看出 $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}_{1+\infty}$ ，这种浸入可以显示表达出来，但是前面的基底（生成元）选取在这里并不合适，假设我们已经将 \mathcal{W}_∞ 和 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 的生成元进行合适的 redefine，仍旧用 V, \tilde{V} 表达（生成的李括号与原来等价），则：

$$V_m^i = \sum_{j=-1}^i a_{ij}(m) \tilde{V}_m^j, \quad i = 0, 1, \dots \quad (41.55)$$

a_{ij} 是一个 $i - j$ 阶的多项式，前面几个为：

$$\begin{aligned} V_m^0 &= \tilde{V}_m^0 + \frac{m}{2}\tilde{V}_m^{-1} - \frac{c}{8}\delta_{m,0}, \\ V_m^1 &= \tilde{V}_m^1 + \frac{m}{2}\tilde{V}_m^0 + \frac{1}{12}(m^2 - 1)\tilde{V}_m^{-1}, \\ V_m^2 &= \tilde{V}_m^2 + \frac{m}{2}\tilde{V}_m^1 + \frac{1}{20}(2m^2 - 3)\tilde{V}_m^0 + \frac{1}{120}(2m^3 + 7m)\tilde{V}_m^{-1} - \frac{3c}{320}\delta_{m,0} \end{aligned} \quad (41.56)$$

那么 $\{V_m^{i \geq 0}, \tilde{V}_m^{-1}\}$ 就生成了新的基底下的 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数， $\{V_m^{i \geq 0}\}$ 就是浸入的 \mathcal{W}_∞ 子代数。这种浸入对两个代数的中心荷有下面的要求：

$$c = -2\tilde{c} \quad (41.57)$$

这意味着想直接通过浸入把 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 的么正表示分解为 \mathcal{W}_∞ 的么正表示的计划泡汤了，因为么正表示最基本的要求是 $c > 0$ 。

41.6.3 Fermionic Realization

利用前面复化的费米模型可以实现有中心荷的 \mathcal{W} 代数。回忆 Ψ 模型的定义：

$$\bar{\Psi}(z)\Psi(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad T(z) = \frac{1}{2}N(\partial\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\partial\Psi), \quad J(z) = N(\Psi\bar{\Psi}) \quad (41.58)$$

仿照 J 流，问题是能否用 Ψ 或者其次级态的组合生成更高自旋的流？⁶⁶事实上这种构造不仅存在，还是唯一的。比如自旋 2 的流，只可能是 $\{\partial\bar{\Psi}\Psi, \bar{\Psi}\partial\Psi\}$ 的线性组合，但是其中一个线性组合是 ∂J ，所以剩下的一个线性无关的只能是前面构造的 T 。更高自旋类似，每个自旋只能构建出一个独立的算符，不过你具体在每个自旋如何去线性组合那些 $\Psi, \partial\Psi$ 仍旧是自由的，相当于在 \mathcal{W} 代数里面取不同的基底，我们期望这些基底会是 T 下

⁶⁶ 同样，我们只是实现 \mathcal{W} 代数，并不意味着原先 Ψ 模型的 T 定义下有这些流对称性， \mathcal{W} 引力才是真正让 \mathcal{W} 代数作为对称代数

的准初级场，这对应一族用 $a \in \mathbb{R}$ 标记的：

$$\begin{aligned} \tilde{V}^i(z) &= \sum_{j=0}^{i+1} \alpha_j(i; a) N(\partial^j \bar{\Psi} \partial^{i+1-j} \Psi) \\ \alpha_j(i; a) &= \binom{i+1}{j} \frac{(i+2a+2-j)_j (2a-i-1)_{i+1-j}}{(i+2)_{i+1}} \end{aligned} \quad (41.59)$$

这生成了 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数。但是中心荷和 a 的关系比较复杂，前面我们涉及到的所有代数，中心项都会带上一个关于自旋的 $\delta_{s,s'}$ ，但是上面的基底一般来说中心项并不是关于自旋对角的，也就是说两个不同自旋的算符之间的对易关系也会出来中心项，当且仅当 $a = 0, \pm \frac{1}{2}$ 的时候中心项对角。

$a = 0$ 就对应 $q = \frac{1}{4}$ 得到的 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 的 OPE，也是标准讨论 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数时的选取，但是中心荷为 $c = 1$ ； $a = \pm \frac{1}{2}$ 对应中心荷 $c = -2$ ，取正号时 $\{\tilde{V}^{-1}, \tilde{V}^{i \geq 0}\}$ 构成 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 代数，直接把 \tilde{V}^{-1} 丢掉，剩下的 $\tilde{V}^{i \geq 0}$ 构成 \mathcal{W}_∞ 子代数。

41.6.4 Bosonic Realization

考虑自由的复标量场：⁶⁷

⁶⁷ 其它 $\phi\phi, \bar{\phi}\bar{\phi}$ 之间的 OPE 是 0

$$\bar{\phi}(z)\phi(w) \sim \log(z-w), \quad T(z) = -N(\partial\phi\partial\bar{\phi})(z) \quad (41.60)$$

根据前面费米实现的经验，可以通过线性组合 ϕ 和次级场得到更高自旋的流，而且这时每个自旋同样只能得到一个线性无关的流，下面的基底选取生成了 $q = \frac{1}{4}$ 时的 \mathcal{W}_∞ 代数 41.38：

$$V^i(z) = \frac{2^{-i-1}(i+2)!}{(i+1)(2i+1)!!} \sum_{k=0}^i (-)^k \binom{i+1}{k} \binom{i+1}{k+1} : \partial^{i-k+1} \bar{\phi} \partial^{k+1} \phi : \quad (41.61)$$

$\mathcal{W}_{1+\infty}$ 的玻色实现可以通过前面费米实现的玻色化得到。

SUBSECTION 41.7

Related Topics

41.7.1 W Gravity

考虑二维引力，引力场 $h_{\mu\nu}$ 可以看作是在 local 的 Virasoro 代数下的规范场，把这个代数扩张为 \mathcal{W} 代数，自然也可以构建一个 local \mathcal{W} 代数下的规范引力理论，这个理论必然会导致高自旋的 $h_{\mu\nu\dots\rho}$ 引力场的引入。所以 \mathcal{W} 引力可以看作是引力的高自旋推广，如果考虑的是收缩形变后的 w 代数，那么就是经典 \mathcal{W} 引力。这部分内容在上世纪末火了一段时间，但还比较容易算的东西算完了也没看出什么新物理，所以纯粹学习 \mathcal{W} 引力完全只能算作是陶冶情操，这部分感兴趣可以翻阅 [110]， \mathcal{W} 代数的内容前面数学部分的介绍已经非常完善了，这部分物理就没必要介绍了。

41.7.2 \mathcal{W}_∞ in Quantum Hall Effect

非常 amazing， \mathcal{W} 代数竟然可以和凝聚态里面的量子霍尔效应联系起来，下面我们顺着 Karabali 的系列工作 [111, 112] 来尝试理解一下。

41.7.3 $w_{1+\infty}$ on the Celestial

Strominger 近期的工作 [113] 又带火了一把 \mathcal{W} 代数。复化的 Fermion 可以用一个实标量场 X 表达，具体对应为：

$$\Psi =: e^X : \quad \bar{\Psi} =: e^{-X} \quad (41.62)$$

这里我们已经把顶点算符里面的 i 吸收进 X 里面了，所以：

$$X(z)X(w) \sim \log(z - w) \quad (41.63)$$

利用玻色场可以将费米场的 NOP 表达为：

$$\begin{aligned} : \partial^i \bar{\Psi}(z) \partial^j \Psi(z) := & \sum_{k=i+1}^{i+j+1} \frac{1}{k} (-)^{k-1-i} \binom{\ell}{k-1-i} \partial^{i+j-k+1} P^{(k)}(z) \\ & P^{(k)}(z) =: e^{-X(z)} \partial^k e^{X(z)} : \end{aligned} \quad (41.64)$$

那么前面的 41.59 也就可以顺利用玻色场表达出来了。

SECTION 42

Liouville theory

On-Shell Approach to Scattering Amplitudes

散射振幅的学习笔记，重点在 double copy，前面一些基础内容主要参考 [114] 和张扬老师的线上 note¹，后面 double copy 主要参考 [115–117]。

这部分一个重要的 Motivation 就是微扰论计算 QCD 胶子散射过程，即便是纯胶子（纯 YM）的树级振幅²，需要计算的费曼图的数目随外线数目的增长远超阶乘！如果考虑圈图以及其他粒子相互作用，就更为复杂。这个时候再执着于用传统的微扰论，也就是费曼图方法去计算散射振幅已经没有出路了。而传统的费曼图方法是用理论的拉氏量路径积分围绕展开导出的，规范场的拉氏量最大的特点就是存在规范冗余。实际上，虽然要计算的图非常多，但是在计算的最后将在壳条件 $p^2 = 0$ 以及横向极化条件 $p \cdot \epsilon^\pm = 0$ 代入之后，相当多的项直接为 0。所以，现代散射振幅的计算发展出一套在壳方法，始终带着这两个条件进行计算，脱离拉氏量本身，这会让计算变得容易很多。本 note 主要关注于树图散射振幅的现代在壳纲领。

SECTION 43

Color Decomposition of Gluon Amplitudes

Yang-Mill 理论的拉氏量为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \text{Tr } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} [A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (43.1)$$

这里出现的 $\sqrt{2}$ 是因为我们选取了 $\text{Tr } T^a T^b = \delta^{ab}$ 的归一化，常见的也有 $\text{Tr } T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ 的选择。传统微扰计算振幅的第一步就是加入规范固定项和鬼场，由于考虑的只是树级振幅，所以后者不需要了。Gervais – Neveu 规范在树图层面上非常方便：

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (H_\mu^\mu)^2, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{ig}{\sqrt{2}} A_\mu A_\nu \quad (43.2)$$

最终拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - i\sqrt{2} g \partial^\mu A^\nu A_\nu A_\mu + \frac{g^2}{4} A^\mu A^\nu A_\nu A_\mu \right) \quad (43.3)$$

QCD 过程复杂的是顶角函数都会含有色因子，从费曼规则上看他们是和动力学参数动量这些耦合在一起的，这导致最终计算上除了运动学，还要关注色因子求和，非常麻烦。但是在树图阶，色和动力学是解耦的，问题的关键在于下面的完备性关系：³

$$(T^a)_i^j (T^a)_k^l = \delta_i^l \delta_k^j - \frac{1}{N} \delta_i^j \delta_k^l \quad (43.4)$$

Remark | 这个完备性关系可以用下面形象的图表达：

¹ <http://staff.ustc.edu.cn/~y়zphy/PH16212.html>

² 不需要考虑鬼场和其他粒子相互作用顶点，只需要关注胶子三顶角和四顶角，没有圈图还需要做重整化

³ 在基本表示下成立，不过 QCD 就是取的基本表示

$$(t_f^a)_{ij}(t_f^a)_{kl} = \begin{array}{c} j \leftarrow \bullet \leftarrow i \\ k \rightarrow \bullet \rightarrow l \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with a loop} \\ - \frac{1}{N} \end{array}$$

粗黑点表示一个生成元矩阵，胶子线表示色因子求和，外线表示矩阵下标，相连表示求和。这种类似 Penrose 张量图示的方法非常直观，甚至书籍 [118] 就全篇用这个记号讲群论。比如下面的化简就可以用图的方法证明：

$$\begin{aligned} t_f^a t_f^b t_f^a &= \begin{array}{c} \text{Diagram with a loop} \\ b \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with a loop} \\ - \frac{1}{N} \end{array} \\ &= \text{tr}(t_f^b) \mathbf{1} - \frac{1}{N} t_f^b = -\frac{1}{N} t_f^b. \end{aligned}$$

[119] 用这种图证明了四点情况的色因子分解。

由此可以把任意树图阶振幅写成下面的形式：

$$A_n^{\text{full,tree}} = g^{n-2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathbb{Z}_n} \text{tr} \left(T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}} \right) A_n(\sigma(1) \dots \sigma(n)) \quad (43.5)$$

这里 $\mathfrak{S}_n / \mathbb{Z}_n$ 的意思是所有指标的置换商掉轮换。这也等价于第一个指标不动，后面的指标轮换：

$$A_n^{\text{full,tree}} = g^{n-2} \sum_{\text{perms } \sigma} A_n[1\sigma(2\dots n)] \text{Tr} \left(T^{a_1} T^{\sigma(a_2)} \dots T^{a_n} \right) \quad (43.6)$$

不难发现，色因子完全蕴含在前面一堆生成元的 Trace 中，我们唯一要去计算的就是 $A_n(\sigma(1) \dots \sigma(n))$ ，称为色序偏振幅，之和胶子的动量以及螺旋度有关。

色序偏振幅有下面的特性：

- 轮换性：

$$A_n[12\dots n] = A_n[2\dots n1] \quad (43.7)$$

- 对称性：

$$A_n[12\dots n] = (-1)^n A_n[n\dots 21]. \quad (43.8)$$

- U(1) 光子解耦公式：

$$A_n[123\dots n] + A_n[213\dots n] + A_n[231\dots n] + \dots + A_n[23\dots 1n] = 0 \quad (43.9)$$

最后一个等式的证明非常精妙，它来源于胶子不和光子相互作用，没有 U(1) 的项，把其中一个 T^a 换成恒等元一定会导致振幅为 0。

SUBSECTION 43.1

Color-Ordered Feynman Rules

提出色因子之后需要计算的图大量减少，只要那些平面图才会对色序偏振幅有贡献⁴。比如四点振幅，有贡献的是下面三个图：

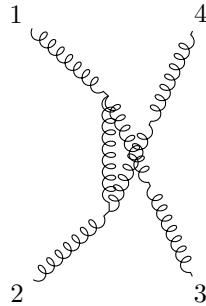
4

胶子的数目	图的数目	轮换序图的数目
4	4	3
5	25	10
6	220	38
7	2,485	154
8	34,300	654
9	589,405	2,871
10	10,525,900	12,925

$$A_4(1234) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (43.10)$$

The equation shows the four-gluon amplitude \$A_4(1234)\$ as a sum of three diagrams. Each diagram consists of four gluon lines labeled 1, 2, 3, and 4. In Diagram 1, gluon 1 enters from the top-left, 2 from the bottom-left, 3 from the bottom-right, and 4 from the top-right. In Diagram 2, gluon 1 enters from the top-left, 2 from the bottom-left, 3 from the top-right, and 4 from the bottom-right. In Diagram 3, gluon 1 enters from the top-left, 2 from the bottom-left, 3 from the bottom-right, and 4 from the top-right.

下面的这个图是没有贡献的:⁵



⁵ 这个图用 tikz 画起来很费劲，参考：<https://tex.stackexchange.com/questions/515275/how-do-you-do-crossed-lines-using-tikz>

所以我们干脆画费曼图的时候就直接画那些平面图，我们称为轮换序图 (cyclic-ordered graphs)：

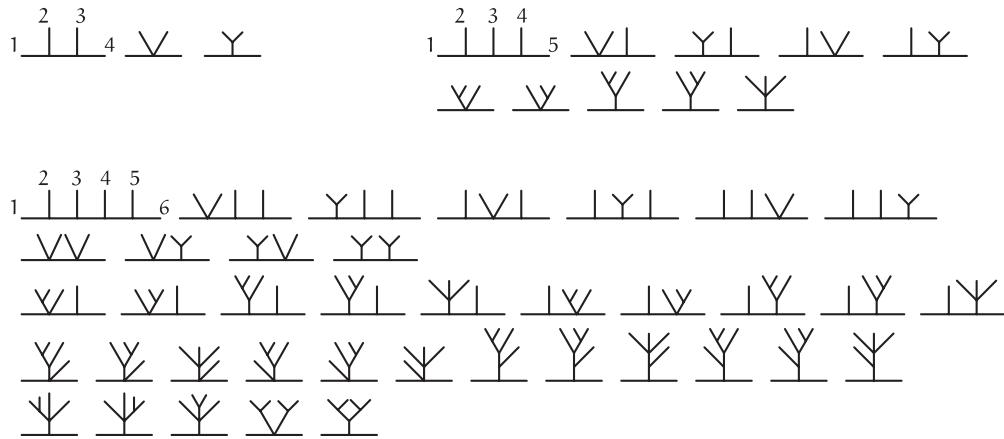


图 16. 轮换序图

计算时使用色序振幅的费曼规则：⁶

⁶ \$(-+++)\$ 度规，动量参考正方向全部朝外

- 传播子：

$$\frac{1}{i}\Delta_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - i0^+} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (43.11)$$

- 3-pt:

$$iV^{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, p_2, p_3) = -i\sqrt{2} (g^{\mu_1\mu_2}p_1^{\mu_3} + g^{\mu_2\mu_3}p_2^{\mu_1} + g^{\mu_3\mu_1}p_3^{\mu_2}) \quad (43.12)$$

- 4-pt:

$$iV^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = ig^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} \quad (43.13)$$

但是我们仍旧有非常多的项需要计算，为了进一步简化，从而从振幅中迅速读出物理信息，我们需要借助旋量螺旋度形式。

SECTION 44

spinor helicity formalism

任何一个四动量都可以将其改写成一个 2×2 的矩阵：

$$p_{ab} \equiv p_\mu (\sigma^\mu)_{ab} = \begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix} \quad (44.1)$$

利用 ε^{ab} 升降指标⁷后可定义 $p^{\dot{a}\dot{b}} \equiv p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}}$ ，不难发现 $\det p = -p^2 = m^2$ ，所以对于无质量粒子，上面的矩阵是降秩的，可以拆分为两个向量的外积，我们记为：

$$p_{ab} = -|p]_a \langle p|_b, \quad p^{\dot{a}\dot{b}} = -|p\rangle^{\dot{a}} [p|^{\dot{b}} \quad (44.2)$$

⁷

$$\begin{aligned} \varepsilon^{12} &= \varepsilon^{i\dot{j}} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{j}} = +1, \\ \varepsilon^{21} &= \varepsilon^{\dot{i}\dot{j}} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{j}} = -1 \end{aligned}$$

$|\cdot], |\cdot\rangle$ 这些就是旋量螺旋度形式，不难发现他们隐含 $\det p = 0$ ，在壳条件被自动满足。根据 γ 矩阵的表达式：

$$-\not{p} = -\begin{pmatrix} 0 & p_{ab} \\ p^{\dot{a}\dot{b}} & 0 \end{pmatrix} = |p\rangle [p] + |p\rangle \langle p| \quad (44.3)$$

注意，上面的式子最后一个等号要理解为在左右手征的投影下成立，毕竟左边是 4×4 的矩阵，到了右边变成了 2×2 的矩阵。或者说把不加下标的旋量螺旋度形式看成是增广矩阵：

$$[p] \equiv ([p]^a, 0) \quad \langle p] \equiv (0, \langle p|_a) \quad |p] \equiv \begin{pmatrix} |p]_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad |p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (44.4)$$

后面经常两种混用⁸。 $p_{ab} \rightarrow p^{\dot{a}\dot{b}}$ 可以翻译为：

$$[p]^a = \epsilon^{ab} [p]_b, \quad |p\rangle^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \langle p|_b \quad (44.5)$$

⁸ 这种混用不会对后面的恒等式产生任何影响，而且这种四分量的形式相比于两分量的形式能提醒我们单独的 $|\cdot\rangle$ 和 $|\cdot]$ 不能形成内积

Theorem 1

$$p^\mu \text{ real : } [p]^a = (|p\rangle^a)^* \quad \text{and} \quad \langle p|_a = (|p]_a)^* \quad (44.6)$$

PROOF 注意这里动量为实数的要求并不是废话，证明 BCFW 递推的时候就需要把它 shift 到复平面上去。此式的证明只需要将旋量螺旋度形式用四动量写出来就好了，比如：

$$|p\rangle^{\dot{a}} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

其中：

$$p^\mu = (E, E \sin \theta \cos \phi, E \sin \theta \sin \phi, E \cos \theta)$$

□

定义下面的内积：

$$\langle pq \rangle = \langle p|_a |q\rangle^a, \quad [pq] = [p]^a [q]_a \quad (44.7)$$

利用 44.5 还可以证明这个内积是反对称的：

$$\langle pq \rangle = -\langle qp \rangle, \quad [pq] = -[qp] \quad (44.8)$$

所以有下面的等式：

$$p^{\dot{a}\dot{b}} [p]_b = 0, \quad p_{ab} |p\rangle^b = 0, \quad [p]^b p_{ba} = 0, \quad \langle p|_b p^{\dot{b}\dot{a}} = 0 \quad (44.9)$$

根据 44.6 还有等式：

$$\langle pq \rangle = [qp]^* \quad (44.10)$$

在进一步分析之前，强调一下目前为止我们对旋量螺旋度形式的介绍完全是数学上的操作，但他们其实是有物理含义的。旋量螺旋度形式完全可以从物理动机上引入。Dirac 方程在无质量极限下形式为：⁹

$$\not{p}v_{\pm}(p) = 0, \quad \bar{u}_{\pm}\not{p} = 0 \quad (44.11)$$

⁹ $\gamma^0(\cdot)^{\dagger}$, v, \bar{u} 表示出射反费米子和费米子

在 Weyl 基底下上面无质量 Dirac 方程的解左右手完全分开，所以我们可以将解设为：

$$\begin{aligned} v_+(p) &= \begin{pmatrix} |p|_a \\ 0 \end{pmatrix}, & v_-(p) &= \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle_a \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_-(p) &= (0, \langle p|_a), & \bar{u}_+(p) &= ([p|^a, 0) \end{aligned} \quad (44.12)$$

无质量极限下交叉对称性保证 $u_{\pm} = v_{\mp}, \bar{u}_{\pm} = \bar{v}_{\mp}$ ，而这正是 44.5。44.9 就是 Dirac 方程。由此可见旋量螺旋度形式是有非常清晰的物理意义的，在设计无质量费米子的散射问题时，我们也可以直接使用 44.12 的替换来在壳地计算散射振幅，由于此时非常简单的交叉对称性，默认计算散射振幅时所有的外线都是出射粒子。

下面是一些常用的恒等式：

$$\langle pq \rangle [pq] = 2p \cdot q = (p + q)^2 \quad (44.13)$$

下式中的旋量螺旋度形式作四分量形式理解，或者看作两分量，但是 γ 理解成把左右手的 sigma 矩阵抽出来¹⁰。

$$\begin{aligned} [k|\gamma^{\mu}|p\rangle &= \langle p|\gamma^{\mu}|k], \\ [k|\gamma^{\mu}|p\rangle^* &= [p|\gamma^{\mu}|k\rangle \quad (p \in \mathbb{R}^4) \\ \langle p|\gamma^{\mu}|k\rangle &= 0 = [p|\gamma^{\mu}|k] \end{aligned} \quad (44.14)$$

¹⁰ 具体投影到哪一个根据带点旋量指标之间缩并，不带点指标之间缩并

Fierz 恒等式：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\langle p|\gamma_{\mu}|q\rangle\gamma^{\mu} &= |q\rangle\langle p| + |p\rangle\langle q| \\ -\frac{1}{2}[p|\gamma_{\mu}|q]\gamma^{\mu} &= |q\rangle[p] + |p\rangle[q] \end{aligned} \quad (44.15)$$

Sandwich 一下可以得到：

$$\langle 1|\gamma^{\mu}|2\rangle\langle 3|\gamma_{\mu}|4\rangle = 2\langle 13\rangle[24] \quad (44.16)$$

我们经常会使用 i 作为 p_i 的简写。

$$\sum_{i=1}^n |i\rangle[i] = 0, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i=1}^n \langle qi|ik] = 0 \quad (44.17)$$

这个式子实际上是动量守恒， q, k 的选取是任意的。由于任意的二分量旋量空间最大独立的旋量个数只能是 2，所以有 Schouten 恒等式：

$$|i\rangle\langle jk\rangle + |j\rangle\langle ki\rangle + |k\rangle\langle ij\rangle = 0 \quad (44.18)$$

更常用的形式是将上式左乘一个任意的 $\langle r|$ ：

$$\langle ri\rangle\langle jk\rangle + \langle rj\rangle\langle ki\rangle + \langle rk\rangle\langle ij\rangle = 0 \quad (44.19)$$

利用

$$\text{Tr}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\tau}\bar{\sigma}^{\rho}) = 2(\eta^{\mu\nu}\eta^{\tau\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}) \quad (44.20)$$

可以证明下面的等式:

$$\langle ij \rangle [jk] \langle kl \rangle [li] = 2(p_i \cdot p_l)(p_j \cdot p_k) + 2(p_i \cdot p_j)(p_k \cdot p_l) - 2(p_i \cdot p_k)(p_j \cdot p_l) - 2i\epsilon(i, j, k, l) \quad (44.21)$$

Definition 1

(Gram matrix) 任意的四个矢量可以定义出一个 Gram 矩阵:

$$G(e_1, e_2, e_3, e_4)_{ij} \equiv e_i \cdot e_j \quad (44.22)$$

由此衍生出一个 Lorentz 不变量:

$$g(e_1, e_2, e_3, e_4) \equiv \det G(e_1, e_2, e_3, e_4) = -\epsilon(i, j, k, l)^2 \quad (44.23)$$

其中 $\epsilon(i, j, k, l) = \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{i\mu_1} p_{j\mu_2} p_{k\mu_3} p_{l\mu_4}$ 。前面我们只说明了这个符号是在壳的，我们还需要说明横向极化条件也被满足，实际上极化矢量有下面的形式:¹¹

$$\epsilon_-^\mu(p; q) = -\frac{\langle p | \gamma^\mu | q \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle}, \quad \epsilon_+^\mu(p; q) = -\frac{\langle q | \gamma^\mu | p \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle} \quad (44.24)$$

¹¹ 出射对应 ϵ , 入射对应 ϵ^* , 后面考虑散射全部都是出射

这里 q 是参考动量, 选取是任意的, 不会对振幅的计算有任何影响, 其实这就相当于 $\epsilon_\pm^\mu(p) \rightarrow \epsilon_\pm^\mu(p) + C p^\mu$, Ward 恒等式保证了振幅不受影响。但是这是在所有图求和之后, 所以对于一个散射过程的不同图, q 的选取必须一致。极化适量的 slash 有下面的形式:

$$\not{\epsilon}_-(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{[qp]} (|p\rangle [q] + |q\rangle [p]), \quad \not{\epsilon}_+(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle qp \rangle} (\langle p| [q] + \langle q| [p]) \quad (44.25)$$

SUBSECTION 44.1

Little Group Scale

虽然我们将 p 分解为了两个二分量旋量的外积, 但是这种分解方式仍然是存在冗余的:

$$\begin{aligned} \langle p | &\mapsto z \langle p |, |p] \mapsto z^{-1} |p] \\ |p\rangle &\mapsto z |p\rangle, [p] \mapsto z^{-1} [p] \end{aligned} \quad (44.26)$$

这实际上对应 Lorentz 群的 $ISO(2)$ 小群变换, 对于 $p \in \mathbb{R}$, 由于 44.5, $|z| = 1, z \in \mathbb{C}$ 。这个对称性对振幅产生的唯一影响就是一个尺度变换。这个尺度变换完全来自于外腿的 u, v, ϵ 的贡献, 螺旋度为负对应的是 $| \cdot \rangle$, 所以带来 z^{+1} , 螺旋度为正对应 $| \cdot]$, 所以带来 z^{-1} 。同理, 可证明光子的极化矢量会有 $z^{\pm 2}$ 的尺度变换。所以振幅在小群变换下的行为为:

$$A_n(\{|1\rangle, |1], h_1\}, \dots, \{z_i|i\rangle, z_i^{-1}|i], h_i\}, \dots) = z_i^{-2h_i} A_n(\dots \{|i\rangle, |i], h_i\} \dots) \quad (44.27)$$

注意这里我们给 z 加上了下标, 因为可以对不同的动量做不同的小群变换。

现在来分析最简单的三点振幅, 动量守恒得到:

$$|1\rangle [1] + |2\rangle [2] + |3\rangle [3] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \langle 12 \rangle [2] = -\langle 13 \rangle [3] \\ \langle 21 \rangle [1] = -\langle 23 \rangle [3] \end{cases} \quad (44.28)$$

上面的方程有两组解, 一组是:

$$|1] \propto |2] \propto |3] \iff [12] = [23] = [31] = 0 \quad \text{holomorphic} \quad (44.29)$$

另一组是：

$$|1\rangle \propto |2\rangle \propto |3\rangle \iff \langle 12 \rangle = \langle 23 \rangle = \langle 31 \rangle \text{ anti-holomorphic} \quad (44.30)$$

由于所有的旋量指标要缩并，所以最后三点振幅的形式一定要么是全纯的，要么是反全纯的，而且，因为实动量会导致 44.10，所以实动量同时满足全纯和反全纯，也就是说任意三点无质量振幅在 $p \rightarrow \mathbb{R}$ 时都是 0。除非振幅是 ϕ^3 理论一样与动力学无关的常数¹²。但是研究三点振幅还是有必要的，因为很多 n 点振幅都会包含三点振幅，我们可以在计算时先将三点部分动量 off-shell 到复平面，最后取实轴极限。

考虑反全纯部分，我们有下面的 ansatz：

$$A_3(1^{h_1} 2^{h_2} 3^{h_3}) = c \langle 12 \rangle^{x_{12}} \langle 13 \rangle^{x_{13}} \langle 23 \rangle^{x_{23}} \quad (44.31)$$

小群变换要求：

$$-2h_1 = x_{12} + x_{13}, \quad -2h_2 = x_{12} + x_{23}, \quad -2h_3 = x_{13} + x_{23} \quad (44.32)$$

最终我们完全确定了三点振幅：

$$\boxed{A_3(1^{h_1} 2^{h_2} 3^{h_3}) = c \langle 12 \rangle^{h_3 - h_1 - h_2} \langle 13 \rangle^{h_2 - h_1 - h_3} \langle 23 \rangle^{h_1 - h_2 - h_3}} \quad (44.33)$$

反全纯部分类似。还有一个问题是如何确定振幅是全纯的还是反全纯的，这可以通过分析质量量纲得到，如果我们从拉氏量清楚振幅的质量量纲，则根据 bracket 的量纲为 1 就可以分析出来了。

Theorem 2 | D 维时空中的 n 点振幅的质量量纲为 $4 - D$

PROOF 利用交叉对称性，n 点振幅可以看作是 $2 \rightarrow n - 2$ 的散射过程，根据费米黄金规则，散射截面表达式为：

$$d\sigma = \frac{1}{4|\mathbf{k}_1|_{CM} \sqrt{s}} |\mathcal{A}|^2 d\text{LIPS}_{n-2}(k_1 + k_2) \quad (44.34)$$

其中：

$$d\text{LIPS}_{n'}(k) \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k - \sum_{j=1}^{n'} k'_j) \prod_{j=1}^{n'} dk'_j \quad (44.35)$$

量纲分析得到：

$$-2 = [d\sigma] = -2 + 2[\mathcal{A}] + 2(n - 2) - 4 \quad (44.36)$$

□

另外你还可以从 $p \rightarrow \mathbb{R}$ 时振幅趋近 0 去想，因为 44.33 关于 $\langle \cdot \rangle$ 是 $-h$ 幂次的， h 是总的螺旋度，而 $p \in \mathbb{R}$ 时，会让所有的括号都变成 0，所以只有在 $h \leq 0$ 时才不会发散。所以 $h \leq 0$ 的时候反全纯，否则全纯。

上面的这些分析最大的特点是普适性，我们没有引入任何的费曼规则，完全是从自洽性进行分析，这种 bootstrap 的想法甚至能帮助我们重塑理论的拉氏量¹³。现在我们来考虑 YM 理论，量纲分析能帮助我们进一步确定振幅。

Theorem 3

$$A_n^{\text{tree}}(1^+ 2^+ \dots n^+) = 0 \quad \text{and} \quad A_n^{\text{tree}}(1^- 2^+ \dots n^+) = 0 \quad (44.37)$$

$$A_n^{\text{tree}}(1^- 2^- \dots n^-) = 0 \quad \text{and} \quad A_n^{\text{tree}}(1^+ 2^- \dots n^-) = 0 \quad (44.38)$$

PROOF 从振幅是洛伦兹标量出发，不难发现振幅都有下面的形式：

$$A_n \sim \sum_{\text{diagrams}} \frac{\sum (\prod (\epsilon_i \cdot \epsilon_j)) (\prod (\epsilon_i \cdot k_j)) (\prod (k_i \cdot k_j))}{\prod P_I^2} \quad (44.39)$$

¹² 你还可以考虑 $(-, +, -, +)$ 时空，这时虽然动量依旧是实数，但是 $\langle \cdot |$ 和 $| \cdot \rangle$ 无关了，所以这个时候三点振幅是 non-trivial 的

¹³ 比如在线讲义 https://www.ph.nat.tum.de/fileadmin/w00bya/t70/Seminar2021/Amplitudes_Sanfilippo.pdf，三点振幅形式加上理论的定域性要求（没有高阶导数项），就可以重塑拉氏量的三点相互作用项。

分母表示平方传播子。传播子质量量纲 $[\Delta] = -2$, 顶角函数 $[V_3] = 1, [V_4] = 0$, 对于全部都是三顶角的图:

$$[A_n] \sim \frac{(\text{mass})^{n-2}}{(\text{mass}^2)^{n-3}} \sim (\text{mass})^{4-n} \quad (44.40)$$

不难发现这种图分子量纲最大, 其他图量纲都小于 $n - 2$ 。接下来注意到:

$$\epsilon_{i+} \cdot \epsilon_{j+} \propto \langle q_i q_j \rangle, \quad \epsilon_{i-} \cdot \epsilon_{j-} \propto [q_i q_j], \quad \epsilon_{i-} \cdot \epsilon_{j+} \propto \langle i q_j \rangle [j q_i] \quad (44.41)$$

q_i 是粒子参考动量, 在所有图求和之后振幅与其无关, 所以我们可以把所有的 q_i 取成相同的 q , 这样对于振幅 $A_n(1^+ 2^+ \cdots n^+)$, 唯一有贡献的只能是 $\epsilon \cdot k$, 而这样的项要有 n 个, 这直接导致分子的质量量纲至少为 $n > n - 2$, 所以这样的振幅是被禁闭的。继续考虑 $A_n(1^- 2^+ \cdots n^+)$, 取 $q_2 = q_3 = \cdots = q_n = p_1$, 这导致 $\epsilon_{i+} \cdot \epsilon_{j+} = 0 = \epsilon_{i-} \cdot \epsilon_{j+}$ 。这再次导致需要 n 个 $\epsilon \cdot k$, 导致禁闭。

到这里就证明完了, 但是这只是意味着树图振幅求和为 0, 实际上圈图修正后不为 0, 证明失效的原因在于 44.40 在 loop-level 上不成立, tree-level 上成立是因为加一个外线, 只会带来一个顶角和一个传播子, 但是 loop-level 这一点是错的。□

我们还可以利用三点振幅形式来说明光子没有三点自相互作用项。比如全纯部分振幅形式为:

$$\mathcal{M}(1^+ 2^+ 3^+) = c_1 [12][23][31], \quad \mathcal{M}(1^+ 2^+ 3^-) = c_2 \frac{[12]^3}{[23][31]} \quad (44.42)$$

注意这是振幅, 而不是色序偏振幅。由于粒子是玻色子, 交换任意两个粒子动量应该是对称的 (产生湮灭之间满足对易关系), 但是上面括号部分是反对称的, 所以要么 $c = 0$. 要么理论中不只有一种玻色子, 也就是说这些玻色子带色荷, 交换的时候把颜色也交换了, c 带有颜色指标, 而且是全反对称的:

$$\mathcal{M}(1_a^+ 2_b^+ 3_c^+) = c_1^{abc} [12][23][31], \quad \mathcal{M}(1_a^+ 2_b^+ 3_c^-) = c_2^{abc} \frac{[12]^3}{[23][31]} \quad (44.43)$$

这正好就说明了光子无自相互作用, 圈图修正也为 0¹⁴, 胶子三点相互作用正比于全反对称结构张量 f^{abc} 。

虽然我们利用本节的旋量螺旋度形式可以很简洁的表达振幅, 但是我们更希望用动力学变量直接表示出来, 如:

Definition 2

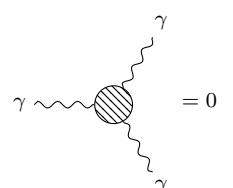
(Mandelstam variables) 对于全部是出射粒子的散射过程, Mandelstam 变量定义为:

$$s_{ij} = -(p_i + p_j)^2, \quad s_{ijk} = -(p_i + p_j + p_k)^2, \quad \text{etc.} \quad (44.44)$$

举个实际计算的例子:

Example

$$\begin{aligned} \frac{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle} &= \frac{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle [31][42]}{s_{13}s_{24}} = \frac{\langle 21 \rangle [13] \langle 34 \rangle [42]}{s_{13}s_{24}} \\ &= \frac{s_{12}s_{34}/2 + s_{24}s_{13}/2 - s_{23}s_{14}/2}{s_{13}s_{24}} = \frac{s^2/2 - t^2/2 + (s+t)^2/2}{(s+t)^2} \quad (44.45) \\ &= \frac{s}{s+t} \end{aligned}$$



实际上这个计算是 non-trivial 的, 你需要灵活利用前面的那些恒等式。利用更现代的 Momentum Twistor 方法, 可以把这种化简变成机械式的, 具体可见文献 [120] 附录。

SUBSECTION 44.2

spinor-helicity formalism on the celestial

[121]

SECTION 45

Tree Amplitudes

SECTION 46

Collinear Limits

虽然散射振幅的形式可以很复杂，但是在一些极限情况下会变得很简单，比如软极限下就直接只是在原先振幅前多个因子。还有一类比较重要的极限是共线极限，本节利用旋量螺旋度形式重述（树阶）软定理以及共线极限下振幅形式。两个极限可以用于检验计算的正确性，也可以根据它们反推出非极限情况下的振幅形式（自举法）。下面的讨论都主要以 YM 理论为例。

SUBSECTION 46.1

Soft Singularities

SUBSECTION 46.2

Collinear Singularities

两者都出现了奇异性¹⁵，奇点出现的共同点都是让内线传播子在壳了。

SECTION 47

Berends-Giele Current

¹⁵ 当然，我们在前面说过软定理的那个红外发散可以被虚软光子交换抵消掉（或者说，QFT 红外完备正是因为软定理的存在）

这节有点跑题，实际上属于 off-shell 的内容，主要参考 [51, 122]

SECTION 48

BCFW Recursion Relations

SECTION 49

Cachazo-Svrcek-Witten Rules

SECTION 50

CHY Formula

Celestial Amplitudes & CCFT

SECTION 51

Conformal basis

QFT 中利用费曼图计算散射振幅都是在动量空间下进行的，也就是选取在平面波为基底，这样做最大的好处是可以显现出平移对称性。但是在考虑天球上的散射问题时，很显然我们应当最大化利用共性对称性，所以基底应该选取为类似 CFT 中初级场的形式，称之为“Conformal Primary Wave Function”，这样 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的散射振幅就有希望在这个基底下类似于 CFT_d 中的 n 点关联函数，Clifford Cheung 很早就利用这个基底对一些特殊情形进行了研究 [123]¹。现在顺着文献 [125] 的思路来介绍这一组基底。

SUBSECTION 51.1

Massive Scalar

Definition 1

(Massive Scalar Conformal Primary Wave Function) 自旋为 0 的标量场既没有 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的 $SO^{\dagger}(d+1,1)$ 指标，也没有 spinning CFT 特有的张量指标，或者说处于 $SO(d)$ 的标量表示。对于平面波，我们使用壳动量来标记基底，现在我们使用 $\Delta \in \mathbb{C}, \vec{w}$ 来标记基底。

- 在壳：

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial}{\partial X_\nu} - m^2 \right) \phi_\Delta(X^\mu; \vec{w}) = 0 \quad (51.1)$$

- 在共形变换和 $SO(d+1,1)$ 下协变：

$$\phi_\Delta(\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu; \vec{w}'(\vec{w})) = \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{-\Delta/d} \phi_\Delta(X^\mu; \vec{w}) \quad (51.2)$$

这里 $\vec{w} \rightarrow \vec{w}'$ 是共形变换^a， $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是诱导的 Lorentz 变换。

^a注意，对于 $d=2$ 的情形，对应的是全局共形变换，更类似于准初级场。

后面的讨论使用 Embedding 形式将 \mathbb{R}^d 嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 的光锥，再次写下这个嵌入：

$$q^\mu(\vec{w}) = (1 + |\vec{w}|^2, 2\vec{w}, 1 - |\vec{w}|^2), \quad q^\mu(\vec{w}') = \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{\frac{1}{d}} \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu(\vec{w}) \quad (51.3)$$

粒子在壳动量 $p^2 = -m^2$ ，由于质量是固定的，抽出动量方向得到 $\hat{p}^2 = -1$ ，而这其实就说明 \hat{p} 位于 unit hyperboloid space \mathbb{H}_{d+1} 上²。可以利用 Poincaré half-plane 对 \mathbb{H}_{d+1} 进行参数化：

$$ds_{\mathbb{H}_{d+1}}^2 = \frac{dy^2 + d\vec{z} \cdot d\vec{z}}{y^2}, \quad y > 0, \vec{z} \in \mathbb{R}^d \quad (51.4)$$

² \mathbb{H}_{d+1} 表示 $d+1$ 维截面曲率恒为 -1 的超曲面，Killing-Hopf 定理保证这样的曲面只有这一种

$y=0$ 对应 $\partial\mathbb{H}_{d+1}$ 。 $ds_{\mathbb{H}_{d+1}}^2$ 天然是 $SO(d+1,1)$ 不变的，也就是在下面的变换下不变：

- \mathbb{R}^d translation : $y' = y, \vec{z}' = \vec{z} + \vec{a},$

- $SO(d)$ rotation : $y' = y, \vec{z}' = M \cdot \vec{z}$,
- dilation : $y' = \lambda y, \vec{z}' = \lambda \vec{z}$
- special conformal transformation : $y' = \frac{y}{1+2\vec{b} \cdot \vec{z} + |\vec{b}|^2(y^2 + |\vec{z}|^2)}, \vec{z}' = \frac{\vec{z} + (y^2 + |\vec{z}|^2)\vec{b}}{1+2\vec{b} \cdot \vec{z} + |\vec{b}|^2(y^2 + |\vec{z}|^2)}$

任意壳在壳动量 $m\hat{p}$ 可以参数化为：

$$\hat{p}(y, \vec{z}) = \left(\frac{1+y^2+|\vec{z}|^2}{2y}, \frac{\vec{z}}{y}, \frac{1-y^2-|\vec{z}|^2}{2y} \right) \quad (51.5)$$

这其实就是在将 \mathbb{H}_{d+1} 嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 的未来光锥部分³，比如 $\mathbb{R}^{3,1}$ 的时空图就可以分³因为 $\hat{p}^0 > 0$ 层为：

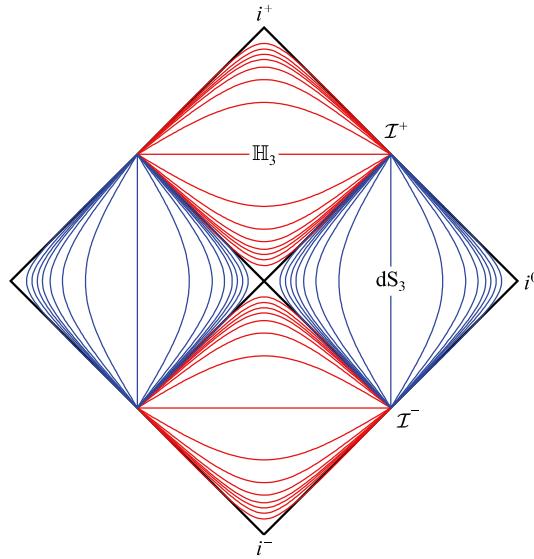


图 17. $Mink_4$ 时空的叶状结构

我们只使用 unit 的那一层。AdS/CFT 对偶里面有一个 bulk-to-boundary 传播子，在前面的参数化下定义为 [126]：

$$G_\Delta(\hat{p}; \vec{w}) = \left(\frac{y}{y^2 + |\vec{z} - \vec{w}|^2} \right)^\Delta = G_\Delta(\hat{p}; q) = \frac{1}{(-\hat{p} \cdot q)^\Delta} \quad (51.6)$$

这个传播子在共形变换 $q \rightarrow q'$ ，以及所诱导的 Lorentz 变换 $\hat{p} \rightarrow \hat{p}'$ 下变换性质为：

$$G_\Delta(\hat{p}'; q') = \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{-\Delta/d} G_\Delta(\hat{p}; q) \quad (51.7)$$

最终的基底肯定是用平面波 $\exp[\pm im\hat{p} \cdot X]$ 线性组合得到的，这里 + 表示 out 态，- 表示 in 态。而且线性组合要对所有在壳动量构成的平面波求和，所以积分是在 \mathbb{H}_{d+1} 上进行的，积分测度是上面的不变测度：

$$\int_{\mathbb{H}_{d+1}} [d\hat{p}] \equiv \int_0^\infty \frac{dy}{y^{d+1}} \int d^d \vec{z} = \int_{\hat{p}^2=-1} \frac{d^{d+1} \hat{p}^i}{\hat{p}^0} \quad (51.8)$$

由于 KG 方程是一个线性方程，所以线性组合之后的结果都是 KG 方程的解⁴。由于 G_Δ 在共形变换下刚好出来我们需要的共形变换因子，而诱导的 Lorentz 变换本身不会改变 $\hat{p} \cdot X$ 和积分测度，所以下面的积分就是满足条件的 conformal basis：

⁴ 只要线性组合的系数与 X 无关就好

$$\boxed{\phi_\Delta^\pm(X^\mu; \vec{w}) = \int_{\mathbb{H}_{d+1}} [d\hat{p}] G_\Delta(\hat{p}; \vec{w}) \exp [\pm i m \hat{p} \cdot X]} \quad (51.9)$$

注意 Δ 和 \vec{w} 是用来标记基底的，与 m 无关。但是上面的式子只是形式上的定义，第一不便于计算，第二上式对于 $m \in \mathbb{R}_+$ 是发散的，只有对于 $m \in -i\mathbb{R}_+$ 才收敛，所以上式应当看作是先把 m 变成纯虚数积分，然后延拓到实轴。所以考虑直接去找满足条件的 KG 方程的解，设试探解为：

$$\phi_\Delta(X^\mu; \vec{w}) = \frac{f(X^2)}{(-q \cdot X)^\Delta} \quad (51.10)$$

代入方程得到：

$$0 = 4X^2 f''(X^2) - 2(2\Delta - d - 2)f'(X^2) - m^2 f(X^2) \quad (51.11)$$

这是虚宗量 Bessel 方程，考虑 $X \rightarrow \infty$ 收敛的解，解正比于第二类修正 Bessel 函数：

$$f(X^2) \propto \left(\sqrt{-X^2}\right)^{\Delta - \frac{d}{2}} K_{\Delta - \frac{d}{2}}(m\sqrt{X^2})$$

前面的比例系数可以从积分表达式 51.9 积分后最终对比得到：

$$\phi_\Delta^\pm(X^\mu; \vec{w}) = \frac{2^{\frac{d}{2}+1} \pi^{\frac{d}{2}}}{(im)^{\frac{d}{2}}} \frac{(\sqrt{-X^2})^{\Delta - \frac{d}{2}}}{(-q(\vec{w}) \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} K_{\Delta - \frac{d}{2}}(m\sqrt{X^2}) \quad (51.12)$$

$\mathcal{A} \equiv \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle$ ，那么在 conformal 基底下的散射振幅和原先动量空间散射振幅之间关系为：

$$\tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, \vec{w}_i) \equiv \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{H}_{d+1}} [d\hat{p}_k] G_{\Delta_k}(\hat{p}_k; \vec{w}_k) \mathcal{A}(\pm m_i \hat{p}_i^\mu) \quad (51.13)$$

显然其具有 CFT 中 n 点关联函数性质：

$$\tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, \vec{w}'_i(\vec{w}_i)) = \prod_{k=1}^n \left| \frac{\partial \vec{w}'_k}{\partial \vec{w}_k} \right|^{-\Delta_k/d} \tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, \vec{w}_i) \quad (51.14)$$

前面一直在讲基底，但前面不对 Δ 进行限制，构造出来的 $\{\phi_{\Delta, \vec{w}}^\pm\}$ 极有可能是超完备的。下面我们要干的事情是在构造出来的这些基底里面选某一簇构造正交完备归一基底。

Definition 2

(shadow transformation) 对于一个共形维数为 Δ 的（准）初级场 $\mathcal{O}_\Delta(\vec{w})$ ，其 shadow 的定义为 [127–131]：

$$\tilde{\mathcal{O}}_\Delta(\vec{w}) \equiv \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \int d^d \vec{w}' \frac{1}{|\vec{w} - \vec{w}'|^{2(d-\Delta)}} \mathcal{O}_\Delta(\vec{w}') \quad (51.15)$$

不难发现，场的 shadow 变成了共形维数为 $d - \Delta$ 的（准）初级场。

由于 $K_\alpha = K_{-\alpha}$ ，以及下面的恒等式 [132]：

$$\int d^d \vec{z} \frac{1}{|\vec{z} - \vec{w}|^{2(d-\Delta)}} \frac{1}{(-q(\vec{z}) \cdot X)^\Delta} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} \frac{(-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta}}{(-q(\vec{w}) \cdot X)^{d-\Delta}} \quad (51.16)$$

得到了一个核心等式:

$$\widetilde{\phi}_{\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) = \phi_{d-\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) \quad (51.17)$$

这实际上直接把空间一分为二, 分成某个子空间和它的 shadow, 我们只用取其中一个构成基就好, 因为它的 shadow 是其线性组合。

在考虑 $SO(d+1, 1)$ 的无限维表示⁵时会出现所谓 **principal continuous series** 的概念:

$$\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R} \quad (51.18)$$

⁵ [133, 134] 这两篇文章比较易读, 而且重在比较新, 文章 [135] 的 §2.2 是对此内容的一个简短 review, 更多的阅读材料可以在那里找到。

后面构造 conformal basis 就是用这一 series 里面的 Δ 或其子集进行构造, 这一点不加证明, 后面只是去说明这样确实能得到正确的基底。

首先注意到关于 G_{Δ} 的几个正交完备性关系 [136]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \mu(\nu) \int d^d \vec{w} G_{\frac{d}{2}+i\nu}(\hat{p}_1; \vec{w}) G_{\frac{d}{2}-i\nu}(\hat{p}_2; \vec{w}) = \delta^{(d+1)}(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \quad (51.19)$$

这里 δ 函数是定义在 \mathbb{H}_{d+1} 上也就是 $SO(d+1, 1)$ 不变的, 积分测度 $\mu(\nu)$:

$$\mu(\nu) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + i\nu)\Gamma(\frac{d}{2} - i\nu)}{4\pi^{d+1}\Gamma(i\nu)\Gamma(-i\nu)} \quad (51.20)$$

还有一个

$$\begin{aligned} & \int_{H_{d+1}} [d\hat{p}] G_{\frac{d}{2}+i\nu}(\hat{p}; \vec{w}_1) G_{\frac{d}{2}+i\bar{\nu}}(\hat{p}; \vec{w}_2) = \\ & 2\pi^{d+1} \frac{\Gamma(i\nu)\Gamma(-i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu)} \delta(\nu + \bar{\nu}) \delta^{(d)}(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) + 2\pi^{\frac{d}{2}+1} \frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)} \delta(\nu - \bar{\nu}) \frac{1}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{2(\frac{d}{2}+i\nu)}}. \end{aligned} \quad (51.21)$$

利用这些关系可以得到 51.9 的逆变换:

$$e^{\pm im\hat{p} \cdot X} = 2 \int_0^{\infty} d\nu \mu(\nu) \int d^d \vec{w} G_{\frac{d}{2}-i\nu}(\hat{p}; \vec{w}) \phi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}) \quad (51.22)$$

由于平面波基底完备, 逆变换的存在性立刻就说明了利用 principal continuous series 构造出来的 $\{\phi_{\Delta, \vec{w}}^{\pm}\}$ 也完备, 而且注意到我们这里利用 51.17 将 ν 限制在了 \mathbb{R}_+ 上, 所以:

$$\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}_{\geq 0} \quad (51.23)$$

这佐证了前面提到的只需要在空间和其 shadow 里面取一个就好了。正交性依赖于内积的定义, 这里自然的定义 KG 内积:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma} d^{d+1} X^i [\Phi_1(X) \partial_{X^0} \Phi_2^*(X) - \partial_{X^0} \Phi_1(X) \Phi_2^*(X)] \quad (51.24)$$

这个定义是 Poincaré 不变的，是与 Cauchy 面选取无关的。计算得到：

$$\begin{aligned} & \left(\phi_{\frac{d}{2}+i\nu_1}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}_1), \phi_{\frac{d}{2}+i\nu_2}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}_2) \right) \\ &= \pm \frac{2^{d+3}\pi^{2d+2}}{m^d} \frac{\Gamma(i\nu_1)\Gamma(-i\nu_1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu_1)\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu_1)} \delta(\nu_1 - \nu_2) \delta^{(d)}(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \\ & \quad + \frac{2^{d+3}\pi^{\frac{3d}{2}+2}}{m^d} \frac{\Gamma(i\nu_1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu_1)} \delta(\nu_1 + \nu_2) \frac{1}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{2(\frac{d}{2}+i\nu_1)}} \end{aligned} \quad (51.25)$$

第二项为 0 是因为 51.23。总结一下，我们得到了 $|in\rangle$ 和 $|out\rangle$ 态的基底为：

$$\mathcal{B}^{\pm} = \left\{ \phi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X; \vec{w}) \mid \nu \geq 0, \vec{w} \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (51.26)$$

它的 shadow 同样是一组基底：

$$\tilde{\mathcal{B}}^{\pm} = \left\{ \phi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X; \vec{w}) \mid \nu \leq 0, \vec{w} \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (51.27)$$

SUBSECTION 51.2

Massless Scalar

无质量情况看作是有质量情况的极限，作换元 $\omega \equiv \frac{m}{2y}$ ，积分核有如下渐近行为：

$$G_\Delta(y, \vec{z}; \vec{w}) \xrightarrow{m \rightarrow 0} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)} y^{d-\Delta} \delta^{(d)}(\vec{z} - \vec{w}) + \frac{y^\Delta}{|\vec{z} - \vec{w}|^{2\Delta}} + \dots \quad (51.28)$$

计算得到：

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X; \vec{w}) & \xrightarrow{m \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2} \right)^{-\frac{d}{2}-i\nu} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)} \int_0^\infty d\omega \omega^{\frac{d}{2}+i\nu-1} e^{\pm i\omega q(\vec{w}) \cdot X} \\ & + \left(\frac{m}{2} \right)^{-\frac{d}{2}+i\nu} \int d^d \vec{z} \frac{1}{|\vec{z} - \vec{w}|^{2(\frac{d}{2}+i\nu)}} \int_0^\infty d\omega \omega^{\frac{d}{2}-i\nu-1} e^{\pm i\omega q(\vec{z}) \cdot X} \end{aligned} \quad (51.29)$$

上面的极限不是 well-defined 的，因为 $m^{\pm i\nu}$ ，但这是个相位，不妨先丢掉，而第二项是第一项的 shadow，所以猜测最终应该是下面的形式：⁶

$$\varphi_{\Delta}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}) \equiv \int_0^\infty d\omega \omega^{\Delta-1} e^{\pm i\omega q \cdot X - \epsilon\omega} = \frac{(\mp i)^\Delta \Gamma(\Delta)}{(-q(\vec{w}) \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} \quad (51.30)$$

其中 $\Delta \in \mathbb{C}$ ，需要重新去找寻。这个式子的形式就是所谓 Mellin 变换⁷，可以解释成对未来光锥上的某一条射线积分，也就是把所有同“方向”，不同“能量”的平面波组合。注意这个式子有个非常明显的特征，在除去一个归一化因子的意义下，上式结果与 G_Δ 将 q 替换为 X 得到的结果完全一致。上面变换的逆变换为：

$$e^{\pm i\omega q \cdot X - \epsilon\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \omega^{-\Delta} \frac{(\mp i)^\Delta \Gamma(\Delta)}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta}, \quad \omega > 0, \operatorname{Re}(\Delta) > 0 \quad (51.31)$$

这说明了 $\operatorname{Re}(\Delta) > 0$ 就能保证完备性，而且这组基底张成的空间中很重要的一点是不含零动量的平面波解⁸。如果选取 $\operatorname{Re}(\Delta) = \frac{d}{2}$, $\operatorname{Im}(\Delta) \in \mathbb{R}$ ，则：

⁶ 无质量极限下

$\mathbb{H}_3 \rightarrow \mathcal{I}^{\pm} : m\hat{p} \rightarrow \omega q$

⁷ 数学上 Mellin 变换定义为：

$\mathcal{M}(f)(\Delta) = \int_0^\infty d\omega \omega^{\Delta-1} f(\omega)$

其逆变换为：

$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\Delta \omega^{-\Delta} \mathcal{M}(f)(\Delta)$,

其中 $c \in \mathbb{R}$

⁸ 这一点是必须的，因为他是 KG 方程没有物理意义的解，要抛弃掉

$$\left(\varphi_{\frac{d}{2}+i\nu_1}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}_1), \varphi_{\frac{d}{2}+i\nu_2}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}_2) \right) = \pm 8\pi^{d+2} \delta(\nu_1 - \nu_2) \delta^{(d)}(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \quad (51.32)$$

这个时候注意 shadow:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}}(X^\mu; \vec{w}) &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + i\nu)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(i\nu)} \int d^d \vec{z} \frac{1}{|\vec{z} - \vec{w}|^{2(\frac{d}{2} - i\nu)}} \varphi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X^\mu; \vec{z}) \\ &= (\mp i)^{\frac{d}{2} + i\nu} \Gamma(\frac{d}{2} + i\nu) \frac{(-X^2)^{-i\nu}}{(-q(\vec{w}) \cdot X \mp i\epsilon)^{\frac{d}{2} - i\nu}} \\ \left(\varphi_{\frac{d}{2}+i\nu_1}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}_1), \widetilde{\varphi_{\frac{d}{2}+i\nu_2}^{\pm}}(X^\mu; \vec{w}_2) \right) &= \pm 8\pi^{\frac{d}{2}+2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - i\nu_1)}{\Gamma(-i\nu_1)} \delta(\nu_1 - \nu_2) \frac{1}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{2(\frac{d}{2} + i\nu_1)}} \end{aligned} \quad (51.33)$$

其 shadow 当然也是一组基底，但并不是 $\nu \rightarrow -\nu$ 这么简单了，这导致 ν 的取值范围也拓宽到了所有实数。总结一下，我们得到了 Massless scalar 的 conformal basis:

$$\boxed{\mathcal{B}_{m=0}^{\pm} = \left\{ \varphi_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}) \mid \nu \in \mathbb{R}, \vec{w} \in \mathbb{R}^d \right\}} \quad (51.34)$$

其 shadow 也可以作为一组基:

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{B}}_{m=0}^{\pm} = \left\{ \widetilde{\varphi}_{\frac{d}{2}+i\nu}^{\pm}(X^\mu; \vec{w}) \mid \nu \in \mathbb{R}, \vec{w} \in \mathbb{R}^d \right\}} \quad (51.35)$$

Remark Mellin 变换和傅里叶变换，拉普拉斯变换一样都有卷积定理，它还有个非常重要的 **Ramanujan's Master Theorem**[137]:

Theorem 1 若复变函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)(-x)^k}{k!}$, 则:

$$\mathcal{M}_f(x) = \Gamma(s) \varphi(-s)$$

还有一条 **Generalized Ramanujan's Master Theorem**:

Theorem 2 若复变函数 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)\eta(k)}{k!} x^k$, 且 $\mathcal{M}(f)(s) = \phi(s)$ 则:

$$\mathcal{M}_F(s) = \phi(s)\eta(-s)$$

由这一定理可以证明不少积分公式，比如 [138]。

SUBSECTION 51.3

photon & Graviton

这两个除了自旋不为 0，还有一个比较麻烦的点是需要取定规范。由于自旋不为 0，所以基底除了在壳动量、初末态的 \pm ，以及极化矢量带来的 $SO(1, d+1)$ 矢量指标，还需要一个指标用来标记自旋，这里考虑的是无质量玻色子，所以这个指标标记的是粒子的螺旋度，体现为 CFT_d 上的一个 \mathbb{R}^d 张量指标， $a = 1, 2, \dots, d$ 。令在壳动量 $k = \omega q$ ，在 Lorenz 规范下可以把平面波基底写为下面的形式:⁹:

$$\partial_a q_\mu e^{\pm i\omega q \cdot X} \quad (51.36)$$

9

$$\partial_a q^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial w^a} q^\mu(\vec{w}) = 2(w^a, \delta^{ba}, -w^a)$$

注意 Lorenz 规范只能将前面的极化矢量确定到一个正比于 k 的项，选取这样的形式相当于完全取定了规范。不难验证 $d = 2$ 时，上面的选取就对应 25.7 的选取。

Definition 3(Spin-1 Massless Boson, $d \geq 1$)

- 在壳: ^a

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\sigma} \frac{\partial}{\partial X_\sigma} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right) A_{\mu a}^{\Delta \pm}(X^\rho; \vec{w}) = 0 \quad (51.37)$$

- 协变:

$$A_{\mu a}^{\Delta \pm}(\Lambda^\rho_\nu X^\nu; \vec{w}'(\vec{w})) = \frac{\partial w^b}{\partial w'^a} \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{-(\Delta-1)/d} \Lambda_\mu^\sigma A_{\sigma b}^{\Delta \pm}(X^\rho; \vec{w}) \quad (51.38)$$

^a满足的是 Proca 方程

\mathbb{H}_{d+1} 上面的 Spin-1 bulk-to boundary 传播子为 $G_{\mu;q}^\Delta$ ¹⁰, 计算上更常用的是其 **uplift** $G_{\mu;\nu}^\Delta$, 定义为:¹¹

$$G_{\mu;q}^\Delta = \frac{\partial q^\nu}{\partial w^a} G_{\mu;\nu}^\Delta(\hat{p}; q) \quad (51.39)$$

$$G_{\mu;\nu}^\Delta(\hat{p}; q) = \frac{(-q \cdot \hat{p}) \eta_{\mu\nu} + q_\mu \hat{p}_\nu}{(-q \cdot \hat{p})^{\Delta+1}} \quad (51.40)$$

uplift 之后, $G_{\mu;\nu}^\Delta$ 就是一个标量 CFT_d, 而且是 $\mathbb{R}^{1,d+1}$ 上的 2-tensor:

$$G_{\mu;\nu}^\Delta(\Lambda \hat{p}; \Lambda q) = \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{-\Delta/d} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu G_{\rho;\sigma}^\Delta(\hat{p}; q) \quad (51.41)$$

而且关于两个自变量还满足横向条件:

$$\hat{p}^\mu G_{\mu;\nu}^\Delta(\hat{p}; q) = 0, \quad q^\nu G_{\mu;\nu}^\Delta(\hat{p}; q) = 0 \quad (51.42)$$

根据前面的标量场经验, 不难猜测 A 的形式就是 G 把 q 换成 X :

$$\begin{aligned} A_{\mu a}^{\Delta,\pm}(X^\mu; \vec{w}) &= \frac{\partial_a q_\mu}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} + \frac{\partial_a q \cdot X}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^{\Delta+1}} q_\mu \\ &= -\frac{1}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^{\Delta-1}} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial w^a} \log(-q \cdot X \mp i\epsilon) \end{aligned} \quad (51.43)$$

证明略。下面计算其 shadow。

Definition 4

(shadow for spinning fields) 对于自旋为 J 的场, 其会导致带有 J 个 \mathbb{R}^d 上的指标 a_1, \dots, a_J , 而且这些指标是无迹且全对称的, 或者说 $\mathcal{O}_{a_1 \dots a_J}^\Delta(\vec{w})$ 是 $SO(d)$ 的无迹对称张量表示, 即 Spin-J 表示。计算其 shadow 最简单的方式是使用其 uplift 计算, 然后再投影回来, uplift 与其自身的关系为:

$$\mathcal{O}_{a_1 \dots a_J}^\Delta(\vec{w}) = \frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial w^{a_1}} \dots \frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial w^{a_J}} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_J}^\Delta(\vec{w}) \quad (51.44)$$

uplift 与其自变量之间存在类似 51.42 的横向关系。

$$\widetilde{\mathcal{O}^\Delta}_{\mu_1 \dots \mu_J}(\vec{w}) = \frac{\Gamma(\Delta+J)}{\pi^{\frac{d}{2}} (\Delta-1)_J \Gamma(\Delta-\frac{d}{2})} \int d^d \vec{w}' \frac{\prod_{n=1}^J [\delta_{\mu_n}^{\nu_n} (-\frac{1}{2} q \cdot q') + \frac{1}{2} q'_{\mu_n} q^{\nu_n}]}{(-\frac{1}{2} q \cdot q')^{d-\Delta+J}} \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_J}^\Delta(\vec{w}') \quad (51.45)$$

这里 $(a)_J \equiv \Gamma(a+J)/\Gamma(a)$, 称为 Pochhammer 符号, 而且不难发现上面的定义对于

某些 Δ 不是 well-defined 的，所以需要解析延拓到全部复平面。

利用上面定义计算得到：

$$\widetilde{A}_{\mu a}^{\Delta, \pm}(X^\mu; \vec{w}) = (-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta} A_{\mu a}^{d-\Delta, \pm}(X^\mu; \vec{w}) \quad (51.46)$$

和无质量标量场一样，不是正比于 $A_{\mu a}^{d-\Delta, \pm}$ 。现在还没有讨论我们的计算是在哪个规范下进行的，但其实前面对 $A_{\mu a}^{\Delta, \pm}$ 那些在壳协变的要求就已经为我们完全取定了规范，是 Lorenz 和 radial 规范同时加上去：¹²

$$X^\mu A_{\mu a}^{\Delta, \pm}(X^\mu; \vec{w}) = 0, \quad \partial^\mu A_{\mu a}^{\Delta, \pm}(X^\mu; \vec{w}) = 0. \quad (51.47)$$

下表总结了 $A_{\mu a}^{\Delta, \pm}$ 及其 shadow 为 pure gauge¹³ 的条件：

	$d = 2$	$d \neq 2$
$A_{\mu a}^{\Delta, \pm}$	$\Delta = 1$	$\Delta = 1$
$\widetilde{A}_{\mu a}^{d-\Delta, \pm}$		\times

回顾一些前面给的平面波基底是在 Lorenz 规范下给的，不一定满足 radial 规范，所以 A 不能写成平面波基底的积分变换形式，但是：

$$\varphi_{\mu a}^{\Delta, \pm}(X^\mu; \vec{w}) = \int_0^\infty d\omega \omega^{\Delta-1} (\partial_a q_\mu e^{\pm i\omega q \cdot X - \epsilon\omega}) = (\mp i)^\Delta \Gamma(\Delta) \frac{\partial_a q_\mu}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} \quad (51.48)$$

和 $A_{\mu a}^{\Delta, \pm}$ 之间只差一个规范变换¹⁴，那么在计算散射振幅这种与规范选取无关的物理量的时候，用两组基底都能得到同样的结果，但是注意用 $\varphi_{\mu a}^{\Delta, \pm}$ 做基底的时候就没有协变的条件了，但是好处在两基底振幅之间是 Mellin 变换的形式。在下面的内积定义下：

$$(A_\mu, A'_{\mu'}) = -i \int_{\Sigma} d^{d+1}X^i [A^\rho F_{0\rho}^{*\prime} - A'^{\rho*} F_{0\rho}] \quad (51.49)$$

当选取 $\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}$ 时构成完备基底，其 shadow 亦然。

这组基底虽说是 photon 的，但实际上非阿贝尔情形也完全适用，因为每个色指标的场满足相同的方程，相同的协变条件，所以上面的推导完全不变，这是很容易接受的，因为平面波基底对于 photon 和 gluon 都是一样通用的。

现在来看引力子的情况，首先在 Lorenz¹⁵、无迹规范下平面波基底可以写为：

$$15 \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\rho_\rho = 0,$$

$$g_{\mu\nu; a_1 a_2}^{\pm}(X; \omega, q) = P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \partial_{b_1} q_\mu \partial_{b_2} q_\nu e^{\pm i\omega q \cdot X} \quad (51.50)$$

这里：

$$P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \equiv \delta_{(a_1}^{b_1} \delta_{a_2)}^{b_2} - \frac{1}{d} \delta_{a_1 a_2} \delta^{b_1 b_2} \quad (51.51)$$

Definition 5

(Graviton, $d \geq 2$)

- 指标约束：

$$\begin{aligned} h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} &= h_{\mu_2 \mu_1; a_1 a_2}^{\Delta, \pm}, \\ h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} &= h_{\mu_1 \mu_2; a_2 a_1}^{\Delta, \pm}, \quad \delta^{a_1 a_2} h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} = 0 \end{aligned} \quad (51.52)$$

第一个约束是几何上要求度规对称，第二个是要求 \mathbb{R}^d 指标无迹且对称。

¹² 这两个规范是可以同时取的，见 [139]

¹³ pure gauge 就是说可以从 $A = 0$ 通过规范变换变过来，所以场强张量为 0， A 可以写为 $\frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger$ 的形式

¹⁴ $\frac{\partial}{\partial X^\mu} \left(\frac{\partial_a q \cdot X}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} \right)$

- 在壳: ^a

$$\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_{\mu;a_1 a_2} + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_{\nu;a_1 a_2} - \partial_\mu \partial_\nu h^\sigma_{\sigma;a_1 a_2} - \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu;a_1 a_2} = 0 \quad (51.53)$$

- 协变:

$$h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} (\Lambda_\nu^\rho X^\nu; \vec{w}'(\vec{w})) = \frac{\partial w^{b_1}}{\partial w'^{a_1}} \frac{\partial w^{b_2}}{\partial w'^{a_2}} \left| \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \right|^{-(\Delta-2)/d} \Lambda_{\mu_1}^{\sigma_1} \Lambda_{\mu_2}^{\sigma_2} h_{\sigma_1 \sigma_2; b_1 b_2}^{\Delta, \pm} (X^\rho; \vec{w}) \quad (51.54)$$

^a满足的是 Linearized Einstein 方程

利用 \mathbb{H}_{d+1} 上面的 Spin-2 bulk-to boundary 传播子:

$$\begin{aligned} h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} (X; \vec{w}) &= P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \frac{[(-q \cdot X) \partial_{b_1} q_{\mu_1} + (\partial_{b_1} q \cdot X) q_{\mu_1}] [(-q \cdot X) \partial_{b_2} q_{\mu_2} + (\partial_{b_2} q \cdot X) q_{\mu_2}]}{(-q \cdot X)^{\Delta+2}} \\ &= P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \frac{1}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^{\Delta-2}} \partial_{b_1} \partial_{\mu_1} \log(-q \cdot X \mp i\epsilon) \partial_{b_2} \partial_{\mu_2} \log(-q \cdot X \mp i\epsilon) \end{aligned} \quad (51.55)$$

其 shadow:

$$\widetilde{h}_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} (X; \vec{w}) = (-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta} h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{d-\Delta, \pm} (X; \vec{w}) \quad (51.56)$$

前面实际上选取了规范:

$$\eta^{\mu_1 \mu_2} h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} = 0, \quad X^\mu h_{\mu \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} = 0 \quad (51.57)$$

有 Pure gauge 条件: ¹⁶

¹⁶ 可以写为 $\partial_{(\mu} \xi_{\nu)}$ 的形式

	$d=2$	$d \geq 2$
$h_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm}$	$\Delta=0$	$\Delta=0, 1$
$\widetilde{h}_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{d-\Delta, \pm}$	$\Delta=1$	$\Delta=2$

同样, 前面的平面波基底不满足 radial 规范, 但利用 Mellin 变换后得到的:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} (X^\mu; \vec{w}) &= \int_0^\infty d\omega \omega^{\Delta-1} g_{\mu_1 \mu_2; a_1 a_2}^{\Delta, \pm} (X^\mu; \omega, q^\mu) \\ &= (\mp i)^\Delta \Gamma(\Delta) P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \frac{\partial_{b_1} q_{\mu_1} \partial_{b_2} q_{\mu_2}}{(-q \cdot X \mp i\epsilon)^\Delta} \end{aligned} \quad (51.58)$$

与 51.55 只差一个规范变换。在下面的内积意义下:

$$\begin{aligned} (h_{\mu\nu}, h'_{\mu'\nu'}) &= -i \int d^{d+1} X^i \left[h^{\mu\nu} \partial_0 h'^*_{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu} \partial_\mu h'^*_{0\nu} + h \partial^\mu h'^*_{0\mu} - h \partial_0 h'^* + h_{0\mu} \partial^\mu h'^* \right. \\ &\quad \left. - (h \leftrightarrow h') \right] \end{aligned} \quad (51.59)$$

$\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}$ 时构成完备基底, 其 shadow 亦然。

Remark $| SO(1, d+1)$ 群的无限维不可约么正表示由共形维数 $\Delta \in \mathbb{C}$ 和 $SO(d)$ 的表示去标记 (或者说取决于对应的 $SO(d)$ 是哪个自旋表示)。前面找的基底就是在找表示, Δ 和 J 之间是有约束的, 具体来说有下面几个 Series:

Because:

$$\frac{\partial_b q_{(\mu_1} q_{\mu_2)}}{(-q \cdot X)^\Delta} = \frac{\partial_{(\mu_1}}{\Delta-1} \left(\frac{\partial_b q_{\mu_2)}}{(-q \cdot X)^{\Delta-1}} \right)$$

$$\frac{q_{\mu_1} q_{\mu_2}}{(-q \cdot X)^\Delta} = \frac{\partial_{(\mu_1}}{\Delta-1} \left(\frac{q_{\mu_2)}}{(-q \cdot X)^{\Delta-1}} \right)$$

- Principal Series \mathcal{P} : $\forall J \in \mathbb{N}, \Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}$
- Complementary Series \mathcal{C} : $\Delta = \frac{d}{2} + c$, 其中 $J = 0$ 时 $0 < |c| \leq \frac{d}{2}$, $J \geq 1$ 时 $0 < |c| \leq \frac{d}{2} - 1$
- Discrete Series \mathcal{D} : 对于奇数维数 d , 任意 J , Δ 可取半整数或者整数

表示 $[\Delta, J]$ 的 shadow 就是表示 $[d - \Delta, J]$, 这两个表示是等价表示。

SUBSECTION 51.4

Restrict to Mink₄

根据前面的一系列一般性讨论, 回到 Mink₄ 情况很简单, 这里只是用文献中比较常用的记号重新写一遍。¹⁷ 标量场:

$$\phi_{\Delta,m} \left(\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu; \frac{aw+b}{cw+d}, \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}} \right) = |cw+d|^{2\Delta} \phi_{\Delta,m}(X^\mu; w, \bar{w}) \quad (51.60)$$

无质量规范玻色子:

$$A_{\mu;a}^{\Delta,\pm} \left(\Lambda^\rho{}_\nu X^\nu; \frac{aw+b}{cw+d}, \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}} \right) = (cw+d)^{2h} (\bar{c}\bar{w}+\bar{d})^{2\bar{h}} \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma A_{\sigma;a}^{\Delta,\pm}(X^\rho; w, \bar{w}) \quad (51.61)$$

无质量规范玻色子只有两种螺旋度选取, 对应这里 $a = w, \bar{w}$, 分别有 $J = +1, -1$ 。

引力子:

$$h_{\mu\nu;a}^{\Delta,\pm} \left(\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu; \frac{aw+b}{cw+d}, \frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}} \right) = (cw+d)^{\Delta+J} (\bar{c}\bar{w}+\bar{d})^{\Delta-J} \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma;a}^{\Delta,\pm}(X^\mu; w, \bar{w}) \quad (51.62)$$

同样的引力子也只有两种螺旋度选取, 对应 $a = ww, \bar{w}\bar{w}$, 分别对应 $J = +2, -2$ 。不难看出这些情况共形权 $(h, \bar{h}) = \frac{1}{2}(\Delta+J, \Delta-J)$, $h - \bar{h}$ 确实就对应自旋。后面考虑有质量玻色子这里的 J 的取值范围就会从 $-s \sim s$ 。

SUBSECTION 51.5

Conformally Soft photon & Graviton

前面的基底其实对于软光子和软引力子要进行修正, 文献 [141] 首先进行了分析, 文献 [140] 给出了更一般的处理技术, 并进行了推广, 文献 [142] 又对费米子情况进行了讨论¹⁸。

¹⁸ 本笔记不涉及这部分内容

51.5.1 Photon

处理 soft sector 最 naive 的想法就是直接取 $\Delta = 1$ 得到对应的一个零模解:

$$A_{\mu;a}^G \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 1} A_{\mu;a}^{\Delta,\pm} = \partial_\mu \alpha_a^1, \quad \alpha_a^1 = -\frac{\partial_a q \cdot X}{a \cdot X} \quad (51.63)$$

这个解真正对称性自发破缺后产生的软光子, 所以我们成为 Goldstone mode。注意由于能量趋于 0, 正负能解, 也就是出入射解简并了, 正是这种简并暗示为了构造完备的基底, 我们还需要找到另一个与其线性无关的零模¹⁹。不难验证下面的波函数也满足 Proca 方程:

$$A_{\mu;a}^{\log,\pm} \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 1} \partial_\Delta \left(A_{\mu;a}^{\Delta,\pm} + \widetilde{A}_{\mu;a}^{\Delta,\pm} \right) \xrightarrow{\text{regularize}} -\log [-X^2 \mp 2i\varepsilon X^0 - \varepsilon^2] \partial_\mu \left(\frac{\partial_a(q \cdot X \pm i\varepsilon q^0)}{-q \cdot X \mp i\varepsilon q^0} \right) \quad (51.64)$$

¹⁹ 文献中常称为 Canonical Partner

而且也是 $\Delta = 1$ 的 Primary wavefunction。对应可以构建场强张量为：

$$F_{\mu\nu;a}^{\log,\pm} = -\frac{2(X_\mu \pm i\varepsilon\delta_\mu^0)}{X^2 \pm 2i\varepsilon X^0 + \varepsilon^2} \partial_\nu \left(\frac{\partial_a(q \cdot X \pm i\varepsilon q^0)}{-q \cdot X \mp i\varepsilon q^0} \right) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (51.65)$$

我们感兴趣的是下面的组合：⁸

$$F_{\mu\nu;a}^{\text{CS}} \equiv \frac{1}{2\pi i} (F_{\mu\nu;a}^{\log,+} - F_{\mu\nu;a}^{\log,-}) = 2X_\mu A_{\nu;a}^G \left(\delta(X^2) + \frac{(q \cdot X)}{X^2} \delta(q \cdot X) \right) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (51.66)$$

对应的规范场为：

$$A_{\mu;a}^{\text{CS}} = (q \cdot X) \log[X^2] A_{\mu;a}^G \delta(q \cdot X) + A_{\mu;a}^G \Theta(X^2) \quad (51.67)$$

这个就是所谓的 **Conformally Soft Gauge Field**, 仍旧是满足场方程且 $\Delta = 1$ 的初级场。可以验证 G 和 CS 模式是互相正交的：²⁰

$$i(A_w^{\text{CS}}(w), A_{w'}^G(w'))_{\mathcal{I}^+} = 8\pi^2 \delta^{(2)}(w - w') \quad (51.68)$$

²⁰ 这里用全纯或者反全纯的下标表示 ± 1 的螺旋度。

所以 G, CS 和其他 $\text{Im}(\Delta) \neq 0$ 的谱一起构成了完备正交基底。其进一步的物理意义待到和天球上的 Kač-Moody 流一起讲。

51.5.2 Graviton

考虑引力子的思路和光子几乎是一样的，尽管前面给出引力子 Pure gauge 条件时除了 $\Delta = 1$, 还有 $\Delta = 0, 2$, 但是单单从实用角度上看我们不必分析 $\Delta = 0, 2$, 因为只需要 $\text{Re}(\Delta) = 1$ 的基底就能构成完备基了，出于物理意义上可能会稍加讨论。

首先依旧是 naive 的 Goldstone mode:

$$h_{\mu\nu;a}^G \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 1} h_{\mu\nu;a}^{\Delta,\pm} = \partial_\mu \xi_{\nu;a} + \partial_\nu \xi_{\mu;a}, \quad \xi_{\mu;a} \equiv -\frac{1}{8} \partial_a^2 [q_\mu \log(-q \cdot X)] \quad (51.69)$$

然后是 log 部分：

$$h_{\mu\nu;a}^{\log,\pm} \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 1} \partial_\Delta \left(h_{\mu\nu;a}^{\Delta,\pm} + \widetilde{h}_{\mu\nu;a}^{\Delta,\pm} \right) \quad (51.70)$$

正规化，找场强，线性组合 log 部分，所有的这些后续计算都和光子的方法是一致的，最终结果为：

$$h_{\mu\nu;a}^{\text{ST}} = (q \cdot X) \log[X^2] h_{\mu\nu;a}^G \delta(q \cdot X) + h_{\mu\nu;a}^G \Theta(X^2) \quad (51.71)$$

这满足场方程，且 $\Delta = 1$ ，由于这个模式与某个 Supertranslation 对应，所以我们叫 ST mode，而没有用 conformally soft graviton 这个名称。同样可以证明 G 和 ST 是相互正交的：

$$(h_{ww}^{\text{ST}}(w), h_{w'w'}^G(w'))_{\mathcal{I}^+} = \frac{i\pi^2}{2} \gamma_{w\bar{w}} \delta^{(2)}(w - w') \quad (51.72)$$

Remark | 计算中用到了一个之后可能会用到的技术，这来源于文献 [143]，一般维数看古老文献

⁸计算中用到了下面的常见等式：

$$\begin{aligned} \delta(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right), \\ \delta'(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-i\varepsilon)^2} \right) = -\frac{\delta(x)}{x} \end{aligned}$$

[144]。定义下面的 Conformal Integrals(2D):

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z - z_i)^{h_i}} \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^{\bar{h}_i}} \quad (51.73)$$

其中:

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i = 2, h_i - \bar{h}_i \in \mathbb{Z}$$

第一个等式确保了在 $SL(2, \mathbb{C})$ 下积分是共形协变的, 第二个条件确保了积分单值性。正是由于与共形变换之间的密切联系, 让这个看似非常难以计算的积分可以被极大的限制住, $n = 2$ 的情况为:

$$I_2 = \frac{\Gamma(1-h_1)\Gamma(1-h_2)}{\Gamma(\bar{h}_1)\Gamma(\bar{h}_2)} (-1)^{h_1-\bar{h}_1} 2\pi \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \quad (51.74)$$

$n = 3, 4$ 的情况请见文献中的讨论。

下面来考虑 $\Delta = 2$ 的 Goldstone 模式:

$$\widetilde{h}_{\mu\nu;a}^{\Delta=2} \equiv -X^2 h_{\mu\nu;a}^{\Delta=2} = \partial_\mu \zeta_{\nu;a} + \partial_\nu \zeta_{\mu;a} \quad (51.75)$$

其中 Pure Gauge:

$$\zeta_{\mu;a} \equiv -\frac{1}{24} \partial_a^3 [X^\rho (q_\rho \partial_{\bar{a}} q_\mu - q_\mu \partial_{\bar{a}} q_\rho) \log(-q \cdot X)] \quad (51.76)$$

把度规 h 在 Bondi 坐标下写出啦, 就可以找到对应的 Bondi News:

$$\tilde{N}_{zz;ww}^{\Delta=2} = \frac{1}{(z-w)^4} = D_z^3 Y_{ww}^z, \quad Y_{ww}^z \equiv -\frac{1}{6(z-w)} \quad (51.77)$$

后面会看到它与 CCFT 上能动张量之间的联系。

SUBSECTION 51.6

Massive Bosons

文献 [145] 率先给出了有质量玻色子的分析。而且利用这一基底计算了一些振幅。为了总结结论, 首先要介绍 [146] 中的 Polynomial Encoding。

51.6.1 Polynomial encoding of symmetric traceless transverse tensors

对于 \mathbb{H}_3 上定义的任意一个 spin-s 的对称无迹 transverse 张量 $H_{\mu_1 \dots \mu_s}(\hat{p})$, 可以在下面的辅助矢量定义的子流形上:

$$\hat{p}^2 + 1 = Y^2 = \hat{p} \cdot Y = 0$$

将张量编码进在此子流形上定义的多项式上:²¹

²¹ 后面对此多项式的一切操作都要记得是在这个子流形上完成的

$$H(\hat{p}, Y) = H_{\mu_1 \dots \mu_s}(\hat{p}) Y^{\mu_1} \dots Y^{\mu_s} \quad (51.78)$$

利用下面定义的微分算符:²²

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial Y^\mu} + \hat{p}_\mu \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \right) + \left(Y \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial Y^\mu} \\ &\quad + \hat{p}_\mu \left(Y \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) - \frac{Y_\mu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial Y \cdot \partial Y} + \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \right) \end{aligned} \quad (51.79)$$

²²

$K_\mu K_\nu = K_\nu K_\mu, \hat{p}^\mu K_\mu = 0, K_\mu K^\mu = 0$

可以将多项式还原成张量本身:²³

$$H_{\mu_1 \dots \mu_s}(\hat{p}) = \frac{1}{s! \left(\frac{1}{2}\right)_s} K_{\mu_1} \dots K_{\mu_s} H(\hat{p}, Y) \quad (51.80)$$

对 \hat{p} 的协变导数定义为:²⁴

$$\nabla_{\hat{p}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} + \hat{p}_\mu \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \right) + Y_\mu \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \right) \quad (51.81)$$

下面考虑光锥（正则部分）上面的 spin-J 的对称无迹 transverse 张量 $F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q)$, 可以把它看作是天球上的 spin-J 对称无迹张量 $f_{a_1 \dots a_J}(w, \bar{w})$ 的 uplift。对称无迹已经把 f 限制成只有两个不为 0 的分量了:²⁵

$$f_J(w, \bar{w}) = f_{w \dots w}(w, \bar{w}) \quad \text{and} \quad \tilde{f}_J(w, \bar{w}) = f_{\bar{w} \dots \bar{w}}(w, \bar{w}) \quad (51.82)$$

所以

$$f_J(w, \bar{w}) = \frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial w} \dots \frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial w} F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) \quad \text{and} \quad \tilde{f}_J(w, \bar{w}) = \frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial \bar{w}} \dots \frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial \bar{w}} F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) \quad (51.83)$$

利用

$$v^\mu \equiv -\frac{1}{2} \partial_w \partial_{\bar{w}} q^\mu = (-1/2, 0, 0, 1/2) \quad (51.84)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q^\mu}{\partial w} \frac{\partial q^\nu}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial q^\mu}{\partial \bar{w}} \frac{\partial q^\nu}{\partial w} \right) + q^\mu v^\nu + v^\mu q^\nu \quad (51.85)$$

计算 $F^{\dots \mu_i \dots}$ 会出现 $q^\mu (v^\nu F_{\dots \nu \dots}(q))$, 不如直接取定规范 $v^{\mu_i} F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) = 0$, 这样由于 $q_\mu \partial_w q^\mu = q_\mu \partial_{\bar{w}} q^\mu = 0$, 并不会对 51.83 产生任何影响。利用下面子流形上的辅助矢量 Z :

$$v^2 = q^2 = q \cdot v - 1 = Z^2 = q \cdot Z = v \cdot Z = 0. \quad (51.86)$$

可以编码 F 为:

$$F(q, Z) = F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) Z^{\mu_1} \dots Z^{\mu_J} = \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) Z^{\mu_1} \dots Z^{\mu_J} = \mathcal{F}(q, Z) \quad (51.87)$$

这里 \mathcal{F} 的意思是把 F 中 $\propto q, \eta$ 这些与后面 Z 点乘为 0 的项丢掉后形成的新张量²⁶。而且计算表明把 51.83 中的 F 替换为 \mathcal{F} 没有任何影响。同样定义微分算子:²⁷

$$\begin{aligned} R_\mu &= \frac{d-2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial Z^\mu} - v_\mu \left(q \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) - q_\mu \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right) + \left(Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial Z^\mu} \\ &\quad - q_\mu \left(Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) - v_\mu \left(Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(q \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \\ &\quad - \frac{Z_\mu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial Z \cdot \partial Z} - 2 \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(q \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right) \end{aligned} \quad (51.88)$$

d 的意思是天球维数, 所以意味着在计算的最后要取 $d \rightarrow 2$ 极限。

$$F_{\mu_1 \dots \mu_J}(q) = \frac{1}{J! \left(\frac{d-2}{2}\right)_J} R_{\mu_1} \dots R_{\mu_J} F(q, Z) = \frac{1}{J! \left(\frac{d-2}{2}\right)_J} R_{\mu_1} \dots R_{\mu_J} \mathcal{F}(q, Z) \quad (51.89)$$

利用这一形式还可计算天球上两张量之间的缩并:²⁸

²³ 有点像配分函数, 这里 $(\cdot)_s$ 是 Pochhammer 符号

²⁴ 满足 $Y \cdot \nabla_{\hat{p}} = Y \cdot \partial_{\hat{p}}$

²⁵ In general $\tilde{f}_J \neq f_J^*$

²⁶ 类似于做了一个规范变换, 这样一来 \mathcal{F} 对称但不一定无迹

²⁷ $R_\mu R_\nu = R_\nu R_\mu, q^\mu R_\mu = 0, v^\mu R_\mu = 0, R_\mu R^\mu = 0$

²⁸ \mathcal{F}_1 理解为作用于后面的微分算符

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)_C &= g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_J b_J} f_{1a_1 \cdots a_J} f_{2b_1 \cdots b_J} = \frac{f_{1J} \tilde{f}_{2J} + \tilde{f}_{1J} f_{2J}}{2^J} \\
&= F_1^{\mu_1 \cdots \mu_J} F_{2\mu_1 \cdots \mu_J} = \frac{1}{J! \left(\frac{d-2}{2}\right)_J} \mathcal{F}_1(q, R) \mathcal{F}_2(q, Z) \\
&= \frac{1}{J! \left(\frac{d-2}{2}\right)_J} \mathcal{F}_1(q, D_Z) \mathcal{F}_2(q, Z)
\end{aligned} \tag{51.90}$$

其中

$$D_{Z^\mu} = \left(\frac{d}{2} - 1 + Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial Z^\mu} - \frac{1}{2} Z_\mu \frac{\partial^2}{\partial Z \cdot \partial Z}$$

51.6.2 Conformal basis of massive bosons

有质量玻色子平面波基底为:

$$\phi_{\pm, m, b}^{\mu_1 \cdots \mu_s}(X) = \epsilon_b^{\mu_1 \cdots \mu_s} e^{\pm i m \hat{p}^\nu X_\nu} \tag{51.91}$$

这里 b 可以从 $-s$ 取到 s 。自旋为 1 的有质量玻色子极化矢量: ²⁹

$$P^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\hat{p}^\mu \hat{p}^\nu}{\hat{p}^2}$$

$$\epsilon_{-1}^\mu = \sqrt{2} y \partial_{\bar{z}} \hat{p}^\mu, \quad \epsilon_0^\mu = y \partial_y \hat{p}^\mu, \quad \epsilon_{+1}^\mu = \sqrt{2} y \partial_z \hat{p}^\mu \tag{51.92}$$

满足:

$$\epsilon_a \cdot \hat{p} = 0, \quad \epsilon_a^* \cdot \epsilon_b = \delta_{a,b}, \quad \sum_{a=-1}^1 \epsilon_a^* \epsilon_a^\nu = P^{\mu\nu} \tag{51.93}$$

自旋为 2 的有质量玻色子极化矢量: ³⁰

³⁰ 文献 [147, 148] 对更高维情况进行了考虑

$$\begin{aligned}
\epsilon_{-2}^{\mu\nu} &= \epsilon_{-1}^\mu \epsilon_{-1}^\nu, \quad \epsilon_{-1}^{\mu\nu} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_{-1}^\mu \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^\mu \epsilon_{-1}^\nu), \quad \epsilon_0^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\epsilon_0^\mu \epsilon_0^\nu - \frac{1}{2} \epsilon_{-1}^\mu \epsilon_{+1}^\nu - \frac{1}{2} \epsilon_{+1}^\mu \epsilon_{-1}^\nu) \\
\epsilon_{+2}^{\mu\nu} &= \epsilon_{+1}^\mu \epsilon_{+1}^\nu, \quad \epsilon_{+1}^{\mu\nu} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\epsilon_{+1}^\mu \epsilon_0^\nu + \epsilon_0^\mu \epsilon_{+1}^\nu)
\end{aligned} \tag{51.94}$$

满足:

$$\epsilon_a^{\mu\nu} \hat{p}_\nu = 0, \quad \epsilon_a^* \epsilon_b^{\mu\nu} \epsilon_{b\mu\nu} = \delta_{a,b}, \quad \sum_{a=-2}^2 \epsilon_a^* \epsilon_a^\rho \epsilon_a^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} P^{\mu\rho} P^{\nu\sigma} + \frac{1}{2} P^{\nu\rho} P^{\mu\sigma} - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} \tag{51.95}$$

Conformal basis 可以一般的写为下面的形式:

$$\phi_{\pm, \Delta, m, J}^{\mu_1 \cdots \mu_s}(X; w, \bar{w}) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \int dz d\bar{z} \sum_{b=-s}^s G_{Jb}^{(s)}(w, \bar{w}; y, z, \bar{z}) \epsilon_b^{\mu_1 \cdots \mu_s} e^{\pm i m \hat{p}^\nu X_\nu} \tag{51.96}$$

$s \leq 2$ 的玻色子对应的 G 显式表达式为:

$$G_{Ja}^{(0)} = (-q \cdot \hat{p})^{-\Delta} \tag{51.97}$$

$$G_{Ja}^{(1)} = (-q \cdot \hat{p})^{-\Delta-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}(w-z)^2}{y} & -2(w-z) & -\sqrt{2}y \\ \sqrt{2}(w-z) & \frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y} - y & \sqrt{2}(\bar{w}-\bar{z}) \\ \sqrt{2}y & 2(\bar{w}-\bar{z}) & -\frac{\sqrt{2}(\bar{w}-\bar{z})^2}{y} \end{pmatrix} \tag{51.98}$$

$$G_{Ja}^{(2)} = (-q \cdot \hat{p})^{-\Delta-2} \times \begin{pmatrix} \frac{2(w-z)^4}{y^2} & \frac{4i(w-z)^3}{y} & \frac{2\sqrt{6}(w-z)^2}{y} & \frac{4iy(w-z)}{y} & \frac{2y^2}{y} \\ \frac{2(w-z)^3}{y} & i(w-z)^2 \left(3 - \frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y^2}\right) & \frac{\sqrt{6}(w-z)(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z}))}{y} & i(y^2 - 3(w-z)(\bar{w}-\bar{z})) & 2y(\bar{z}-\bar{w}) \\ 2(w-z)^2 & \frac{2i(w-z)(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z}))}{y} & \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}((w-z)(\bar{w}-\bar{z})(w-z)(\bar{w}-\bar{z})-4y^2)+y^4}{y^2} & \frac{2i(\bar{z}-\bar{w})(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z}))}{y} & 2(\bar{z}-\bar{w})^2 \\ 2y(w-z) & i(y^2 - 3(w-z)(\bar{w}-\bar{z})) & \frac{\sqrt{6}(\bar{z}-\bar{w})(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z}))}{y} & i(\bar{z}-\bar{w})^2 \left(3 - \frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y^2}\right) & \frac{2(\bar{z}-\bar{w})^3}{y} \\ 2y^2 & 4iy(\bar{z}-\bar{w}) & 2\sqrt{6}(\bar{z}-\bar{w})^2 & \frac{4i(\bar{z}-\bar{w})^3}{y} & \frac{2(\bar{z}-\bar{w})^4}{y^2} \end{pmatrix} \quad (51.99)$$

对于更高自旋，可以利用 encode 之后的 $G_{J,\Delta}^{(s)}(\hat{p}, Y; w, \bar{w})$:

$$G_{J,\Delta}^{(s)}(\hat{p}, Y; w, \bar{w}) = (-1)^{|J|\theta(-J)} \frac{(Y \cdot q)^{s-|J|} ((\hat{p} \cdot q)(Y \cdot Dq) - (\hat{p} \cdot Dq)(q \cdot Y))^{|J|}}{(-\hat{p} \cdot q)^{\Delta+s}} \quad (51.100)$$

³¹ θ 是 Heaviside 阶跃函数

$Dq^\mu = \begin{cases} \partial_{\bar{w}} q^\mu & \text{for } J > 0 \\ \partial_w q^\mu & \text{for } J < 0 \end{cases}$

利用 K 导数可以提取 G :

$$\sum_b G_{Jb}^{(s)} \epsilon_b^{\mu_1 \dots \mu_s} = \frac{1}{s! (\frac{1}{2})_s} K^{\mu_1} \dots K^{\mu_s} G_{J,\Delta}^{(s)}(\hat{p}, Y; w, \bar{w}) \quad (51.101)$$

encode 之后的 conformal basis 可以很容易地写为:

$$\phi_{J,\Delta}^{\pm, m, s}(X, Y; w, \bar{w}) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \int dz d\bar{z} G_{J,\Delta}^{(s)}(\hat{p}, Y; w, \bar{w}) e^{\pm im\hat{p}^\nu X_\nu} \quad (51.102)$$

利用 51.101 形式的 K 导数就可以提取出 ϕ 了³²。可以证明 $\Delta = 1 + i\mathbb{R}_{\geq 0}$ 时构成正交完备归一基底。目前更高维以及其 Shadow 还未被计算过。

³² 按理说对 ϕ 进行 encode 应该使用 Z ，这里更应当看作是从 51.96 和 51.101 导出的定义

SUBSECTION 51.7

Fermions

首先介绍高维空间中旋量的概念，主要参考 Polchinski[149] 附录 A, Weinberg[150] 附录以及 [151]。另外，A.Zee[6] 使用 Clifford 代数详细地构造了 SO(n) 群的旋量表示。

51.7.1 Spinors in arbitrary dimensions

考虑 $d = t + s$ 维时空中的旋量，其中 t 表示类时坐标个数， s 表示类空坐标个数，也就是:

$$\eta_{ab} = \text{diag}(\underbrace{- \dots -}_t, \underbrace{+, +, +}_s) \quad (51.103)$$

Clifford 代数是指满足:³³

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab} \quad (51.104)$$

³³ 由于考虑一般维数，所以这里 a, b 指标从 1 开始

的 d 个 Γ 构成的代数，如果我们找到了上面代数的表示，那么令:

$$\mathcal{I}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i} [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = -\mathcal{I}_{\nu\mu} \quad (51.105)$$

显然 $\mathcal{I}_{\mu\nu}$ 满足 $\mathfrak{so}(t, s)$ 李代数:³⁴

$$i[\mathcal{I}_{\mu\nu}, \mathcal{I}_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} \mathcal{I}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} \mathcal{I}_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\mu} \mathcal{I}_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu} \mathcal{I}_{\rho\mu} \quad (51.106)$$

³⁴ 这也说明了构造的 \mathcal{I} 是 $SO(t, s)$ 变换下，对旋量变换的生成元

所以我们间接找到了 $SO(t, s)$ 的表示，但通常来说是可约表示。对于 Clifford 的表示我们需要偶数维和奇数维分开来看。

首先是比较简单的偶数维，如果 $t = 0$ ，利用三个泡利矩阵可以得到 $2^{\frac{d}{2}}$ 维表示：³⁵

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \sigma_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \\ \Gamma_2 &= \sigma_2 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \\ \Gamma_3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \\ \Gamma_4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \\ \Gamma_5 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \dots\end{aligned}\tag{51.107}$$

³⁵ 根据 d 的具体大小选择省略号在何处截断。

$t \neq 0$ 只需要把上面公式中前面 t 个 Γ 改成 $i\Gamma$ 即可。显然有：

$$\Gamma_a^\dagger = (-1)^t A \Gamma_a A^{-1}, \quad A \equiv \Gamma_1 \dots \Gamma_t \tag{51.108}$$

而且所有的 $2^{\frac{d}{2}} \times 2^{\frac{d}{2}}$ 矩阵都可以用基底 $\{\Gamma^{(n)}\}$ 进行展开：

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma_{a_1 \dots a_n} \equiv \Gamma_{[a_1} \Gamma_{a_2} \dots \Gamma_{a_n]} \tag{51.109}$$

最后一个矩阵 $\Gamma^{(d)}$ 格外重要，一般归一化为：

$$\Gamma_* = (-i)^{d/2+t} \Gamma_1 \dots \Gamma_d, \quad \Gamma_* \Gamma_* = 1 \tag{51.110}$$

这个矩阵对于 $d = 1+3$ 的情况就是 γ_5 ，这里由于定义的 Γ_* 与其它所有的 Γ_a 都反对易，所以实际上可以把它作为 $d+1$ 维³⁶ 的 Γ_{d+1} ，其它的 Γ_a 不变，这样我们就得到了 $d+1$ 维的表示。所以奇数维度的表示需要通过比他第一维度的偶数维来构造，构造出来的是 $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ 维表示，同样可以去构造 $\Gamma^{(n)}$ 那些。

在任意维度都可以找到所谓电荷共轭算符 \mathcal{C} ，满足：

$$\mathcal{C}^T = -\varepsilon \mathcal{C}, \quad \Gamma_a^T = -\eta \mathcal{C} \Gamma_a \mathcal{C}^{-1} \tag{51.111}$$

这里 $\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1$ ，但是具体怎么取与维数有关。

$$(\mathcal{C} \Gamma^{(n)})^T = -\epsilon(-1)^{n(n-1)/2} (-\eta)^n \mathcal{C} \Gamma^{(n)} \tag{51.112}$$

下表给出了 $\mathcal{C} \Gamma^{(n)}$ 对称性以及 ε, η 选取与维数之间的关系：³⁷

³⁶ 注意 d 是偶数，所以下一维度是奇数

³⁷ S 和 A 是在找对称/反对称的 $\mathcal{C} \Gamma^{(n)}$ 对应的 $n \bmod 4$

$d \pmod 8$	S	A	ε	η
0	0, 3	2, 1	-1	+1
	0, 1	2, 3	-1	-1
1	0, 1	2, 3	-1	-1
2	1, 0	3, 2	-1	-1
	1, 2	3, 0	+1	+1
3	1, 2	0, 3	+1	+1
4	2, 1	0, 3	+1	+1
	2, 3	0, 1	+1	-1
5	2, 3	0, 1	+1	-1
6	3, 2	1, 0	+1	-1
	3, 0	1, 2	-1	+1
7	0, 3	1, 2	-1	+1

从上表可以看出奇数维只有一种可能的 ε, η 取值。

前面讲的表示在任意维都存在，称为 Dirac 旋量表示，但是一般来说这个表示是可约表示，存在更小的旋量。比如对于任意偶数维，都可以用下面的方式约化为两个 Weyl 旋量：

$$\lambda_L = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_*) \lambda, \quad \lambda_R = \frac{1}{2} (1 - \Gamma_*) \lambda \tag{51.113}$$

这是根据“手性”来分，还可以根据“虚实”来分。注意到：

$$\Gamma_a^* = -\eta(-)^t B \Gamma_a B^{-1}, \quad B^T = C A^{-1} \quad (51.114)$$

如果旋量满足下面的 reality 条件，那我们就称为 Majorana 旋量：³⁸

³⁸ 已经利用了 Lorentz 不变性

$$\lambda^* = \alpha B \lambda, \quad |\alpha| = 1, \quad B^* B = \mathbb{1} \quad (51.115)$$

但是这一条件存在对维数是有约束的。Majorana 条件还可以叙述为 Dirac 共轭和 Majorana 共轭相等。³⁹

$$\bar{\lambda}^M \equiv \lambda^T C, \quad \bar{\lambda}^D \equiv \lambda^\dagger A \alpha^{-1} \quad (51.116)$$

³⁹ 对于 $d = 1 + 3$, $\bar{\lambda}^D$ 回到熟知的 $\lambda^\dagger \Gamma^0$

如果 Majorana 和 Weyl 条件可以一起加，那就称为 Majorana-Weyl 旋量。引入超对称后还可以引入 Symplectic Majorana 旋量的概念，要求：

$$\lambda_i^* \equiv (\lambda^i)^* = B \Omega_{ij} \lambda^j \quad (51.117)$$

其中 Ω 是一个反对称的 $\Omega^* \Omega = -\mathbb{1}$ 的矩阵。下表总结了各个维数下这几个旋量的存在的可能性，以及对应的最小的 Spinor 的维数：

d	t	0	1	2	3
1	M	1	M	1	
2	M ⁻	2	MW	1	M ⁺ 2
3		4	M	2	M 2
4	SMW	4	M ⁺	4	MW 2 M ⁻ 4
5		8		8	M 4 M 4
6	M ⁺	8	SMW	8	M ⁻ 8 MW 4
7	M	8		16	
8	MW	8	M ⁻	16	SMW 16 M ⁺ 16
9	M	16	M	16	
10	M ⁻	32	MW	16	M ⁺ 32 SMW 32
11		64	M	32	M 32 64
12	SMW	64	M ⁺	64	MW 32 M ⁻ 64

λ^\pm : Majorana 旋量, 土表示 η 需要取的符号
MW: Majorana-Weyl 旋量
SMW: Symplectic Majorana-Weyl 旋量
表格对于横向 (t) 是 mod 4 的

文献 [152, 153] 给出了一些比较有用的形式：

$$\Gamma_{a_1 \dots a_i} \Gamma^{b_1 \dots b_j} = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} \frac{i! j!}{s! t! u!} \delta_{[a_i}^{[b_1} \dots \delta_{a_{t+1}]^{b_s]} \Gamma_{a_1 \dots a_t}^{b_{s+1} \dots b_j]} \quad (51.118)$$

$$s = \frac{1}{2}(i + j - k), \quad t = \frac{1}{2}(i - j + k), \quad u = \frac{1}{2}(-i + j + k)$$

$$\Gamma_{b_1 \dots b_k} \Gamma_{a_1 \dots a_\ell} \Gamma^{b_1 \dots b_k} = c_{k, \ell} \Gamma_{a_1 \dots a_\ell} \quad (51.119)$$

$$c_{k, \ell} = (-1)^{k(k-1)/2} k! (-1)^{k\ell} \sum_i^{\min(k, \ell)} \binom{\ell}{i} \binom{D - \ell}{k - i} (-1)^i$$

以及 Firez 恒等式：⁴⁰

$$M_\alpha^\beta \Delta = \sum_{k=0}^{[D]} (-1)^{k(k-1)/2} \frac{1}{k!} (\Gamma_{a_1 \dots a_k})_\alpha^\beta \text{Tr}(\Gamma^{a_1 \dots a_k} M) \quad (51.120)$$

⁴⁰ $\Delta \equiv 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$

$\begin{cases} [D] = D & \text{for even } D \\ [D] = (D-1)/2 & \text{for odd } D \end{cases}$

这里 M 是任意的 $\Delta \times \Delta$ 矩阵。

51.7.2 Conformal basis of Dirac spinor

后面对于 spinor 的描述是在 Gamma 矩阵的 Embedding 形式下进行。注意到对于 \mathbb{R}^d 上面的 Clifford 代数 $\{\gamma_i\}$, 其表示直接导致了 $\mathbb{R}^{1,d+1}$ 下面的 $\{\Gamma_a\}$ 的表示:⁴¹

⁴¹ 这里时间分量用 0 标记

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i \end{pmatrix}, \quad \Gamma_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (51.121)$$

其中 $\Gamma_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_0 \pm \Gamma_{d+1})$ 。对应的 Dirac 旋量可以由两个 \mathbb{R}^d 上面的旋量拼凑构成:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

量子场论中, Dirac 旋量平面波基底可以表达为:

$$u_s(p)e^{+ip \cdot X}, \quad v_s(p)e^{-ip \cdot X}$$

与前面的情况类似, 天球上的 conformal basis 由 \vec{w}, \pm, Δ 标记⁴²。文献 [154] 显式构造了有质量 Dirac 旋量的 conformal basis:

$$\begin{aligned} \Psi_{\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) &= \int_{\mathbb{H}_{d+1}} [d\hat{p}] \frac{e^{\pm im\hat{p} \cdot X}}{[-2\hat{p} \cdot q(\vec{w})]^{\Delta+\frac{1}{2}}} \Pi_{\pm}(\hat{p}) \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\pm i)^{-\Delta-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{d}{2}} m^{-\frac{d}{2}}}{[-2q(\vec{w}) \cdot X \mp i\epsilon]^{\Delta+\frac{1}{2}}} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{m} \Gamma^M \partial_M \right) \left[\left(\sqrt{X^2} \right)^{\Delta-\frac{d-1}{2}} K_{\Delta-\frac{d-1}{2}} \left(m\sqrt{X^2} \right) \right] \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (51.122)$$

其中:

$$\Pi_{\pm}(\hat{p}) = \frac{1}{2} (1 \pm i\hat{p}^M \Gamma_M), \quad \psi \equiv w^i \gamma_i \quad (51.123)$$

可以验证确实协变且满足狄拉克方程⁴³。

⁴³

Definition 6

(Shadow of Dirac Spinors) Dirac 旋量的 shadow 计算首先也是先将其 uplift:

$$\left(\Gamma^M \frac{\partial}{\partial X^M} - m \right) \Psi(X) = 0$$

$$\Psi_{\Delta}(X; \vec{w}) = \widehat{\Psi}_{\Delta}(X; q(\vec{w})) \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51.124)$$

然后再利用 uplift 之后的旋量计算 shadow:

$$\widehat{\widehat{\Psi}}_{\Delta}(X; q) = \int_{\mathbb{H}_{d+1}} [dq'] \frac{\widehat{\Psi}_{\Delta}(X; q') q'^M \Gamma_M}{(-2q \cdot q')^{d-\Delta+1/2}} \quad (51.125)$$

再利用 51.124 变回来就好。

对于 Dirac 旋量计算结果为:

$$\widetilde{\Psi}_{\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) = \mp i\pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\Delta - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(\Delta + \frac{1}{2})} \Psi_{d-\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) \quad (51.126)$$

正交归一完备是在下面的内积意义下讨论的:

$$(\Psi, \Psi') = \int d\Sigma^M \bar{\Psi} \Gamma_M \Psi' = \int_{X^0=\text{const}} d^{d+1} X \Psi^{\dagger}(X) \Psi'(X) \quad (51.127)$$

可以证明 $\boxed{\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}_{\geq 0}}$ 时构成正交完备归一基底，其 shadow 亦然。最后来看无质量极限，得到 Mellin 变换的形式：

$$\Upsilon_{\Delta}^{\pm}(X; \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{\frac{d}{2}+1}} \int_0^{\infty} d\omega \omega^{\Delta - \frac{1}{2}} e^{\pm i\omega q(\vec{w}) \cdot X} \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51.128)$$

$\boxed{\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}}$ 时构成正交完备归一基底，shadow 也是。文献 [155] 对 $d = 1 + 3$ 情况进行了细致的讨论，没有使用 Gamma 矩阵嵌入形式，那里有一些非常具体的表达式。

SUBSECTION 51.8

Examples

举一些 Mink₄ 振幅放到 CCFT₂ 上的例子。

51.8.1 ABC toy model

考虑两个无质量标量场和一个有质量标量场的 $gABC$ 形式耦合，Mink₄ 树图阶非常简单：

$$\mathcal{A}(\hat{p}_i) = g\delta^{(4)}(\omega_1\hat{q}_1 + \omega_2\hat{q}_2 - m\hat{p}) \quad (51.129)$$

变换到 conformal basis:⁴⁴

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, z_i, \bar{z}_i) &= g \prod_{i=1}^2 \left(\int_0^\infty d\omega_i \omega_i^{\Delta_i-1} \right) \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \int d^2 w \left(\frac{y}{y^2 + |z_3 - w|^2} \right)^{\Delta_3} \\ &\times \delta^{(4)}(\omega_1\hat{q}_1 + \omega_2\hat{q}_2 - m\hat{p}). \end{aligned} \quad (51.130)$$

经过一系列并不是那么容易“注意到”的换元和积分操作 [23, 156]:⁴⁵

⁴⁴ 注意在利用费曼图计算散射振幅时，我们都是在最后再加上动量守恒 $\delta(\sum_i p_i^\mu)$ ，但是变换到天球基底时的那个被积函数，也就是变换前的散射振幅，一定要把 $\delta(\cdot)$ 给带上！

⁴⁵ 这里 $z_{ij} \equiv z_i - z_j$, Δ 同理

$$\tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, z_i, \bar{z}_i) = \frac{gm^{2\Delta_2+\Delta_3-4}}{2^{2\Delta_2-\Delta_3-2}|z_{12}|^{2\Delta_2-2\Delta_3}} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-1}}{(m^2|z_{23}|^2 + 4|z_{12}|^2|z_{13}|^2\omega^2)^{\Delta_3}} \quad (51.131)$$

最后让我们相信 Mathematica 13[®] 的计算能力：⁴⁶

⁴⁶ $B(\alpha, \beta)$ 是 Beta 函数

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}(\Delta_i, z_i, \bar{z}_i) &= \frac{C(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)}{|z_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |z_{13}|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2} |z_{23}|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}, \\ C(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) &= g \frac{m^{\Delta_1+\Delta_2-4}}{2^{\Delta_1+\Delta_2-1}} B\left(\frac{\Delta_{12} + \Delta_3}{2}, \frac{-\Delta_{12} + \Delta_3}{2}\right) \end{aligned} \quad (51.132)$$

不难发现，天球振幅确实有共形场论里面多点关联函数的形式，是可以直接根据全局共形对称性完全确定的。文献 [157] 考虑了三个有质量标量场耦合，且 $m_{\text{in}} = (2 + \epsilon)m_{\text{out}}$ 的渐近行为，式子大概长下面这个复杂的样子：

$$\frac{i2^{\frac{9}{2}}\pi^6\lambda\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-2}{2})\Gamma(\frac{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}{2})\Gamma(\frac{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}{2})\Gamma(\frac{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}{2})\sqrt{\varepsilon}}{m^4\Gamma(\Delta_1)\Gamma(\Delta_2)\Gamma(\Delta_3)|w_1-w_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|w_2-w_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}|w_3-w_1|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (51.133)$$

已经有非常多的文献在 conformal basis 下讨论了各种不同的振幅形式。

Remark | 这里对 Gamma 函数的一些高级性质进行总结。

- Legendre 加倍公式:

$$\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s) \quad s > 0 \quad (51.134)$$

- 余元公式:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (51.135)$$

- Euler-Gauss 公式:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (51.136)$$

- Weierstrass 公式:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \quad (51.137)$$

51.8.2 Gluons

本节主要参考文献为 [121]。

SECTION 52

Some properties of Conformal basis

SUBSECTION 52.1

Kerr-Schild double copy

SUBSECTION 52.2

Wyle double copy

SECTION 53

Celestial Amplitudes

本节主要对前面讨论的这么一大堆内容做些形式化的总结。

SUBSECTION 53.1

Amplitudes as Correlators

不管你是在哪个基底下写 \mathcal{S} 矩阵元，总是可以将其写为关联函数的形式:

$$\langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle = \langle \mathcal{O}_1(E_1, z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(E_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle \quad (53.1)$$

注意这一步存粹是形式上的改写， (z_k, \bar{z}_k) 标记粒子的出入射方向， E_k 标记粒子能量，诸如自旋等其他指标做简化略去。不过单单这样写还没有将天球上的 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性发挥到极致，所以可以利用前面费了很大力气构造的 conformal basis，在这个基底下去将 \mathcal{S} 矩阵元写成天球上的关联函数。具体来说，对于无质量的粒子，直接对应于 \mathcal{I}^\pm 上的某一个点，所以可以直接对某条射线进行 Mellin 变换定义：

$J = h - \bar{h}$ 解释为螺旋度
 $\Delta = h + \bar{h}$ 是共形维数

$$\tilde{\mathcal{O}}(\Delta, z, \bar{z}) = \int_0^\infty d\omega \omega^{m-1} \mathcal{O}(E, z, \bar{z}) \quad (53.2)$$

这样就将 \mathcal{S} 矩阵元写成了天球上的关联函数，即下面的关系式：⁴⁷

⁴⁷ 为了式子形式上简单一点，我们省略了算符上面的~

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}^{\pm}(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_{\Delta_n}^{\pm}(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \prod_{i=1}^n \int_0^\infty d\omega_i \omega_i^{\Delta_i - 1} \langle \text{out} | \mathcal{S} | \text{in} \rangle \quad (53.3)$$

这直接导致天球上的关联函数具有二维 CFT 初级场的关联函数的形式。不过，由于有质量的粒子并不会到类光无穷远处，所以 z_k 的物理意义稍微没那么直接。我们在构造无质量粒子的天球关联函数时，是直接对同一个点 z_k 处进行 Mellin 变换，但是有质量粒子前面 §27 的分析告诉我们它会到达 \mathbb{H}_3 上的某个点，这对应着天球上每个点加权求和（bulk-to-boundary）。所以 Mellin 变换的积分核就要变成与 ω 和 z_k 有关的 G_Δ ，公式形式无变化。

53.1.1 Poincaré Symmetry

由于 AFS 的散射振幅具有 Poincaré 不变性，所以可以将其看作是 Poincaré 群的表示，在 QFT 中常常选取平面波基底，这导致散射振幅是动量算符的本征态：⁴⁸

$$P_k A(q_1, \dots, q_n) = \epsilon_k \omega_k \hat{q}_k A(q_1, \dots, q_n) \quad (53.4)$$

当参与散射的粒子全部是无质量粒子时，到共形基底下的散射振幅仅需要一个 Mellin 变换：

$$\begin{aligned} P_k \tilde{\mathcal{A}}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) &= \prod_{j=1}^n \left(\int_0^\infty d\omega_j \omega_j^{\Delta_j - 1} \right) \epsilon_k \omega_k q_k A(q_1, \dots, q_n) \\ &= \prod_{j=1, j \neq k}^n \left(\int_0^\infty d\omega_j \omega_j^{\Delta_j - 1} \right) \int_0^\infty d\omega_k \omega_k^{\Delta_k + 1 - 1} \epsilon_k q_k A(q_1, \dots, q_n) \quad (53.5) \\ &= \epsilon_k q_k \tilde{\mathcal{A}}(\Delta_1, \dots, \Delta_k + 1, \dots, \Delta_n). \end{aligned}$$

可见共形基底下动量算符对 $\mathcal{O}_{h, \bar{h}}$ 的作用是将共形维数 shift 一下然后再乘上动量方向：⁴⁹

$$P_{\mu, k} = \epsilon_k q_\mu(z_k, \bar{z}_k) e^{\partial_{\Delta_k}} = \epsilon_k q_{\mu, k} e^{(\partial_h + \partial_{\bar{h}})/2} \quad (53.6)$$

⁴⁸ 这里我们讨论的所有外线都是无质量的粒子， ϵ_k 对入射粒子取 +1，反之取 -1， p, q 符号约定见本章最前面，无质量情况下我们不用 $m\hat{p}$ ，而是用 ωq 标记动量

⁴⁹ 原则上来说这会导致 $\Delta \notin 1 + i\mathbb{R}$ 从而导致发散，这一问题我们暂且忽略，可见 [158] 的讨论

动量守恒可以写成下面的算符形式：

$$\mathcal{P}_\mu \tilde{\mathcal{A}}_n = 0, \quad \mathcal{P}_\mu \equiv \sum_{k=1}^n P_{\mu, k} \quad (53.7)$$

对于无质量粒子的散射，这直接导致：

$$\tilde{\mathcal{A}}_n(\Delta_1 + 1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) + \tilde{\mathcal{A}}_n(\Delta_1, \Delta_2 + 1, \dots, \Delta_n) + \dots + \tilde{\mathcal{A}}_n(\Delta_1, \dots, \Delta_n + 1) = 0. \quad (53.8)$$

文献 [159] 计算了 $SL(2, \mathbb{C})$ 对 $\mathcal{O}_{h, \bar{h}}$ 的作用：⁵⁰

$$\begin{aligned} L_0 \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= 2(z\partial_z + h)\mathcal{O}_{h, \bar{h}}, & L_- \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= \partial_z \mathcal{O}_{h, \bar{h}}, & L_+ \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= (z^2 \partial_z + 2zh)\mathcal{O}_{h, \bar{h}}, \\ \bar{L}_0 \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= 2(\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{h})\mathcal{O}_{h, \bar{h}}, & \bar{L}_- \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= \partial_{\bar{z}} \mathcal{O}_{h, \bar{h}}, & \bar{L}_+ \mathcal{O}_{h, \bar{h}} &= (\bar{z}^2 \partial_{\bar{z}} + 2\bar{z}\bar{h})\mathcal{O}_{h, \bar{h}}. \end{aligned} \quad (53.9)$$

⁵⁰ $L_0 \equiv L_3$, $L_\pm \equiv \frac{L_1 \pm L_2}{2}$, L_i 和 $M^{\mu\nu}$ 之间的关系见 [159]

同样有 Lorenz 不变性带来的方程：

$$\mathcal{L}_I \tilde{\mathcal{A}}_n = \bar{\mathcal{L}}_I \tilde{\mathcal{A}}_n = 0, \quad \mathcal{L}_I = \sum_{k=1}^n L_{I, k}, \quad \bar{\mathcal{L}}_I \equiv \sum_{k=1}^n \bar{L}_{I, k} \quad (53.10)$$

由于 Lorenz 不变性在天球上就是 global 的共形对称性，所以上面的方程其实就等价于共形 Ward 恒等式 31.28。如果我们考虑的是更加特殊的 YM 理论，在树阶是标度不变的（但更高阶会有共形反常），所以在数图阶，YM 理论的振幅有更大的对称性，从 Poincaré 不变性提升为了 4 维共形不变性⁵¹，即还可以加入特殊共形变换对应的 K_μ 和 Dilation 算符 D ，它们在天球上的对应分别为：

$$\begin{aligned} K_0 &= [\partial_z \partial_{\bar{z}} + (z \partial_z + 2h - 1)(\bar{z} \partial_{\bar{z}} + 2\bar{h} - 1)] e^{-(\partial_h + \partial_{\bar{h}})/2} \\ K_1 &= [(z \partial_z + 2h - 1)\partial_{\bar{z}} + (\bar{z} \partial_{\bar{z}} + 2\bar{h} - 1)\partial_z] e^{-(\partial_h + \partial_{\bar{h}})/2} \\ K_2 &= -i[(z \partial_z + 2h - 1)\partial_{\bar{z}} - (\bar{z} \partial_{\bar{z}} + 2\bar{h} - 1)\partial_z] e^{-(\partial_h + \partial_{\bar{h}})/2} \\ K_3 &= [\partial_z \partial_{\bar{z}} - (z \partial_z + 2h - 1)(\bar{z} \partial_{\bar{z}} + 2\bar{h} - 1)] e^{-(\partial_h + \partial_{\bar{h}})/2} \end{aligned} \quad (53.11)$$

$$D = -i(h + \bar{h} - 1) \quad (53.12)$$

同样有 Ward 恒等式：

$$\mathcal{K}\tilde{\mathcal{A}}_{\text{YM}}^{\text{tree}} = 0, \quad \mathcal{K} = K_{\mu,1} + K_{\mu,2} - \sum_{n=3}^N K_{\mu,l} \quad (53.13)$$

$$\mathcal{D}\tilde{\mathcal{A}}_{\text{YM}}^{\text{tree}} = 0, \quad \mathcal{D} = \sum_{n=1}^N \text{Im}(\Delta_n) \quad (53.14)$$

Lorenz 不变性的限制在天球上就是 global 共形变换的限制，这一点对散射振幅的限制共形场论中已经被充分研究了，在 AFS 这边更重要的是额外的动量守恒，所以我们的目标就是仅仅通过前面的对称性限制共形基底下的振幅形式。尽管有质量粒子的散射从物理上看最后不是发生在天球上的某几个孤立点，但前面对有质量粒子共形基底的构造告诉我们，仍旧可以用天球上的坐标 \vec{w} 来标记共形基底，所以也能写成天球上关联函数的形式。有质量标量场的动量算符由下式替代：⁵²

$$\epsilon P^\mu = \frac{m}{2} \left(\left(\partial_w \partial_{\bar{w}} q^\mu + \frac{(\partial_{\bar{w}} q^\mu) \partial_w + (\partial_w q^\mu) \partial_{\bar{w}}}{\Delta - 1} + \frac{q^\mu \partial_w \partial_{\bar{w}}}{(\Delta - 1)^2} \right) e^{-\partial_\Delta} + \frac{\Delta q^\mu}{\Delta - 1} e^{\partial_\Delta} \right) \quad (53.15)$$

有质量玻色子的共形基底会把不同螺旋度的平面波混合起来， G 变成了一个矩阵，类似的， P 算符也变成了一个矩阵：

$$\begin{aligned} \epsilon P_{J,I}^\mu &= \frac{m}{2} \left[\frac{(J+s)\delta_{J,I+1}}{\Delta - J - 1} \left((\partial_w q^\mu) + \frac{1}{\Delta + I} q^\mu \partial_w \right) + \frac{(J-s)\delta_{J+1,I}}{\Delta + J - 1} \left((\partial_{\bar{w}} q^\mu) + \frac{1}{\Delta - I} q^\mu \partial_{\bar{w}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{J,I} \left((\partial_w \partial_{\bar{w}} q^\mu) + \frac{(\partial_{\bar{w}} q^\mu) \partial_w}{\Delta - 1 + J} + \frac{(\partial_w q^\mu) \partial_{\bar{w}}}{\Delta - 1 - J} + \frac{q^\mu \partial_w \partial_{\bar{w}}}{(\Delta - 1)^2 - J^2} \right) e^{-\partial_\Delta} + \frac{(\Delta - s - 1)(\Delta + s)}{(\Delta - 1)^2 - J^2} q^\mu e^{\partial_\Delta} \right] \end{aligned} \quad (53.16)$$

其中 $J, I = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ 。对应的 Ward 恒等式也会把不同螺旋度的振幅混合起来：

$$\sum_i \epsilon_i P_i^\mu A = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \delta_{J_1, I_1} \dots \delta_{J_{i-1}, I_{i-1}} P_{i, J_i, I_i}^\mu \delta_{J_{i+1}, I_{i+1}} \dots \delta_{J_n, I_n} A_{I_1, \dots, I_n} = 0 \quad (53.17)$$

上式对任意 $\{J_i\}$ 的取值都成立， I, J 是振幅的螺旋度指标，对 $I_j, j = 1, \dots, n$ 的求和使用 Einstein 求和约定。同样， $M^{\mu\nu}$ 算符也要带上 I, J 指标变成矩阵，不过它的改变是 trivial 的，只需要乘上 $\delta_{I,J}$ 就好了。文献 [145] 详细讨论了对称性对有质量自旋不为 0 粒子的散射振幅的限制，我们这里考虑比较简单的情况 [160]。

⁵¹ 注意这里是 CFT_4 ，一般的天球振幅自然是个 CFT_2

⁵² $q^\mu(w, \bar{w})$ 由 $\mathcal{O}_{h, \bar{h}}(w, \bar{w})$ 得到

53.1.2 Poincaré Constraints

53.7 的约束可以看作是一个线性方程组:

$$Q \cdot X = 0 \quad \text{with} \quad Q = (q_1^\mu q_2^\mu \dots q_n^\mu), \quad X_j \equiv \epsilon_j \exp\left(\frac{1}{2}\partial_{h_j} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{h}_j}\right) A \quad (53.18)$$

这个齐次线性方程组前面的系数矩阵是个 $4 \times n$ 的, 考虑 $n \leq 4$ 的情况, 方程有非零解的情况只能是 $\text{rank}_r Q < n$, 这等价于任取 Q 的 n 行出来构成行列式都要求其为 0。而 Q 本身又是一个取值关于 q 连续的矩阵, 所以最终会导致 $\tilde{\mathcal{A}}$ 出现 δ 函数。比如四点情况这要求: ⁵³

$$\tilde{\mathcal{A}}_4 \propto \delta(z - \bar{z}), \quad z = \frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{34}}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}_{13}\bar{z}_{24}}{\bar{z}_{12}\bar{z}_{34}} \quad (53.19)$$

下一步是利用 53.10, 但实际上没必要直接用这个方程, 这个方程体现到天球上就是全局共形不变性, 共形场论告诉我们振幅被限制为下面的形式: ⁵⁴

$$\tilde{\mathcal{A}}_4 = K_{h_i, \bar{h}_i}(z_i, \bar{z}_i) \delta(z - \bar{z}) f^{h_i, \bar{h}_i}(z, \bar{z}) \quad (53.20)$$

其中:

$$K_{h_i, \bar{h}_i}(z_i, \bar{z}_i) = \prod_{i < j=1}^4 z_{ij}^{h/3-h_i-h_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j}, \quad h = \sum_{i=1}^4 h_i, \quad \bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i \quad (53.21)$$

共形场论到这一步就无法继续走下去了, 但我们的振幅并非只有 $SL(2, \mathbb{C})$ 的共形对称性, 它的对称性是更大的 Poincaré 对称性, 所以依赖于交比的函数 $f^{h_i, \bar{h}_i}(z, \bar{z})$ 应该能被进一步确定。重新代入动量守恒 53.7: ⁵⁵

$$\sum_{j=1}^4 K_{h_j + \frac{1}{2}, \bar{h}_j + \frac{1}{2}}(z_i, \bar{z}_i) f^{h_j + \frac{1}{2}, \bar{h}_j + \frac{1}{2}}(z, \bar{z}) = 0 \quad (53.22)$$

直接计算得知:

$$\sum_{j=1}^4 K_{h_j + \frac{1}{2}, \bar{h}_j + \frac{1}{2}}(z_i, \bar{z}_i) = 0 \quad (53.23)$$

很容易想到 53.22 第一个非平庸解: ⁵⁶

$$f^{h_i + \frac{1}{2}, \bar{h}_i + \frac{1}{2}}(z, \bar{z}) = f^{h_j + \frac{1}{2}, \bar{h}_j + \frac{1}{2}}(z, \bar{z}), \quad \forall i, j \quad (53.24)$$

这表明 f 作为 $\{\Delta_i = h_i + \bar{h}_i\}$ 的函数, $\{\Delta_i\}$ 只能以 $\sum_i^4 \Delta_i$ 的形式依赖于 f :

$$f^{h_i, \bar{h}_i}(z, \bar{z}) = f^{\beta, J_i}(z, \bar{z}), \quad \beta = \sum_{i=1}^4 (h_i + \bar{h}_i) = \sum_{i=1}^4 \Delta_i \quad (53.25)$$

$J_i = h_i - \bar{h}_i$ 是已知的螺旋度。或者 Δ_i 单独依赖于 f , 但是必须具有 1 的周期。但是这种情况根据 Mellin 变换所要求的收敛性, 其导致 f 要么是个常数, 要么就不是解析的, 所以我们不用考虑这种情况 [160]。

Remark 考虑下面更一般的方程:

$$e^{\partial_{z_i}} f(z_1, z_2, \dots, z_n) = e^{\partial_{z_j}} f(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad \text{for all pairs } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (53.26)$$

比如第一个约束:

$$f(z_1 + 1, z_2, \dots) = f(z_1, z_2 + 1, \dots) \quad (53.27)$$

⁵³ 这只是其中一个解, 其他解要求 $\{z_i\}$ 中至少两个相同, 这样的运动学比较特殊, 下面的是更一般的, 更吸引人的振幅。

⁵⁴ 无质量情况 z_i 和运动学对应比较简单, 所以交比可以直接用 Mandelstam 变量表示为:

$$z = -\frac{t}{s}, s = -(p_1 + p_2)^2, t = -(p_1 + p_3)^2$$

⁵⁵ 这里下标的意思是某一个 h_i, \bar{h}_i 增加 $\frac{1}{2}$

⁵⁶ 更细致分析表明也只需要想到这个

任何的函数 $f(x, y, \dots)$ 总是可以重定义为 $\tilde{f}(x + y, y, \dots)$:

$$\tilde{f}(z_1 + z_2 + 1, z_2, \dots) = \tilde{f}(z_1 + z_2 + 1, z_2 + 1, \dots) \quad (53.28)$$

这其实就是在说函数 f 最终可以整理为 $z_1 + z_2$ 的函数，而剩下的那些 z_2 的以来只能是周期为 1 的依赖。这样的构造可以一直持续下去，最终可以说明 f 可以整理为 $z_1 + \dots + z_n$ 的函数，剩下的 z_2, \dots, z_n 只能是周期为 1 的变量。前面的构造是从 z_1 开始一直进行下去的，你也可以从 z_2 开始进行构造，最终说明 f 是 $z_1 + \dots + z_n$ 的函数，剩下的 z_1, z_3, \dots, z_n 周期为 1。这样最终就说明了所有的 z_i 要么是以求和的整体形式依赖于 f ，要么就是周期形式依赖。

再举一个两个无质量粒子和一个有质量粒子的情况，Lorentz 不变性限制为：

$$\tilde{\mathcal{A}}(1, 2, 3^{(m)}) = \frac{C^J(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)}{|z_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |z_{23}|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} |z_{13}|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}} \quad (53.29)$$

分子可以用动量守恒：

$$(P_1 + P_2 + P_3^{(m)}) \tilde{\mathcal{A}}_3(1, 2, 3^{(m)}) = 0 \quad (53.30)$$

继续去限制住：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta_{12}^2}{4} - \frac{(\Delta_3 - 1)^2}{4} \right) C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1} + \Delta_3(\Delta_3 - 1) C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3+1} &= 0, \\ 4\epsilon_2(\Delta_3 - 1) C_{\Delta_1, \Delta_2+1, \Delta_3} + m\epsilon_3(\Delta_3 - 1 - \Delta_{12}) C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1} &= 0, \\ 4\epsilon_1(\Delta_3 - 1) C_{\Delta_1+1, \Delta_2, \Delta_3} + m\epsilon_3(\Delta_3 - 1 + \Delta_{12}) C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1} &= 0, \\ \Delta_i - \Delta_j &\equiv \Delta_{ij}. \end{aligned} \quad (53.31)$$

为了化简这个方程，可以在 C 中提出一个 Beta 函数：

$$C_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}^J = \left(\frac{m}{2} \right)^{\Delta_1+\Delta_2} \cdot B \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3}{2}, \frac{\Delta_2 - \Delta_1 + \Delta_3}{2} \right) c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}^J \quad (53.32)$$

其中 $c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}^J$ 是新的未知变量，代入方程后满足：⁵⁷

$$\begin{aligned} c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1}^J &= c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3+1}^J \\ c_{\Delta_1+1, \Delta_2, \Delta_3}^J &= c_{\Delta_1, \Delta_2+1, \Delta_3}^J \\ c_{\Delta_1+1, \Delta_2, \Delta_3}^J &= c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1}^J \end{aligned} \quad (53.33)$$

⁵⁷ 已经利用 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3$ ，也就是说要么入射只有有质量粒子，要么出射只有有质量粒子，这也是动力学所允许的情况。

再次出现了周期性依赖，按照前面的 argue，这种依赖会导致非解析性从而逆 Mellin 变换不是 Well-defined 的，所以为了让逆 Mellin 变换 Well-defined，只能让它关于 $\{\Delta_i\}$ 的依赖是常数：

$$c_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3-1}^J = c^J \quad (53.34)$$

当然，不同螺旋度，以及不同的理论导致的耦合常数会使得 c 有些差别，对比直接根据 Mellin 变换得到的 51.132， $c^{J=0} = \frac{2g}{m^4}$ 。我们从对称性就直接确定了振幅，剩下的前面的系数就是量纲分析，终究只是个 Scaling 的系数。

SUBSECTION 53.2

Collinear Limits as OPEs

SUBSECTION 53.3

Ward Identity as Kač-Moody Symmetry

软定理利用天球上的关联函数可以写成 Kač-Moody Ward 恒等式的形式，这体现的是渐近对称性在 CCFT 上的作用。

53.3.1 Abelian Case

关注 25.5，注意到 N 是未来类光无穷远处的算符， N^- 是过去类光无穷远处的算符，所以等式左边夹在 $|in\rangle$ 和 $\langle out|$ 之间的部分可以写成时间排序 $\mathcal{T}[(\partial_z N - \partial_z N^-) \mathcal{S}]$ ，注意到 24.20，可以定义全纯的流：

$$J_z = -\frac{4\pi}{e^2} (N_z - N_z^-) = \frac{4\pi}{e^2} (A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^+} + A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} - A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^-} - A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^-}) \quad (53.35)$$

则软定理 25.5 就可以写成下面的形式：

$$\begin{aligned} \langle J_z \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle &\equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle \mathcal{O}^+(\omega, z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{z - z_k} \langle \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle. \end{aligned} \quad (53.36)$$

其中我们假设了所有的粒子都是出射，入射可以用交叉对称性去转换为出射粒子。注意到这正是 38.25 的 $U(1)$ 流代数 Ward 恒等式，电荷的不同标记处在 $U(1)$ 的不同表示。25.5 是出射为正螺旋度的软光子定理，对应一个全纯的 $U(1)$ 流，自然可以完全类似的定义反全纯的部分，对应的就是出射为负螺旋度光子的软定理。

还可以定义下面的 Goldstone 流 [73]：

$$S_z = \frac{i}{4} \left(A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^+} + A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^+} + A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_-^-} + A_z^{(0)}|_{\mathcal{I}_+^-} \right) \quad (53.37)$$

在 large gauge 下的变换为：

$$\delta_\varepsilon S_z = i\partial_z \varepsilon \quad (53.38)$$

这两个流可以和前面研究的 Conformally soft photon 联系起来，加上 CS 和 Goldstone 模式之后，与 $\Delta = 1 + i\lambda$ 一起构成了一个完备基底，所以类似于 A_μ 在平面波基底下展开，同样也可以在这组基底下进行展开，前面的系数就量子化为产生湮灭算符， A^G 前面的系数是 S_z ， A^{CS} 前面的系数是 J_z [141]。两个流之间满足正交归一关系：

$$[J_w(w), S_{w'}(w')] = 8\pi^2 \delta^{(2)}(w - w') \quad (53.39)$$

这得益于 A^G 和 A^{CS} 之间正交归一。

53.3.2 non-Abelian Case

类似于 QED 情况可定义软胶子模：

$$\begin{aligned} N_z &= \int_{-\infty}^{\infty} du F_{uz} = A_z|_{\mathcal{I}_+^+} - A_z|_{\mathcal{I}_-^+}. \\ N_z^- &= \int_{-\infty}^{\infty} dv F_{vz}^- = A_z^-|_{\mathcal{I}_-^-} - A_z^-|_{\mathcal{I}_+^-}. \end{aligned} \quad (53.40)$$

只不过这个时候它们都是与 T^a 色因子缩并之后的矩阵。在下面流的定义下：

$$J_z = -\frac{4\pi}{g_{YM}^2} (N_z - N_z^-) \quad (53.41)$$

出射正螺旋度的软胶子定理 28.24 可以写成：⁵⁸

⁵⁸ 推导完全是前面 QED 情况带上色指标之后的复刻，无质量 QED 成立无质量 QCD 必然也成立，但是有质量 QED 那里能否拓展到有质量 QCD 还不好说，所以这个式子我们先假设所有外腿都无质量。

$$\begin{aligned} \langle J_z^a \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle_{U=1} &\equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \langle \mathcal{O}^{+,a}(\omega, z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} \langle \mathcal{O}_1(\omega_1, z_1, \bar{z}_1) \cdots \\ &\quad T_k^a \mathcal{O}_k(\omega_k, z_k, \bar{z}_k) \cdots \mathcal{O}_n(\omega_n, z_n, \bar{z}_n) \rangle_{U=1} \end{aligned} \quad (53.42)$$

这里 $J_z^a = \text{Tr}(T^a J_z)$ 。显然这就是非阿贝尔流代数的 Ward 恒等式。考虑 J_z 在 \mathcal{CS}^2 某个闭合回路上的加权积分：

$$J_C[\varepsilon] = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \text{tr} [\varepsilon J_z] \quad (53.43)$$

把他插到关联函数里面：

$$\langle J_C[\varepsilon] \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} = \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \varepsilon^a(z_k) T_k^a \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} \quad (53.44)$$

可见其生成了 \mathcal{C} 里面的 large gauge 变换，这是有很大的物理缘由的，可以证明 J_C 和 Q_ε 之间有下面的联系：

$$J_C[\varepsilon] = Q_\varepsilon^{-S} - Q_\varepsilon^{+S} \quad (53.45)$$

右边 Q_ε 积分计算时，取 ε 在围道外为 0，而 Q^S 生成的正是 large gauge。Kač-Moody Symmetry 还有一个比较重要的是其 level，前面 $U(1)$ 的情况没有额外讨论这一点，因为任何 level 都等价，但是非 abel 情形不一样。类似 53.44，注意到：⁵⁹

$$\langle J_C(\varepsilon) J_w \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} = \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle J_w \mathcal{O}_1 \cdots \varepsilon_k(z_k) \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} + \langle \varepsilon(w) J_w \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} \quad (53.46)$$

⁵⁹ 这里莫非是直接类比过来的吗？文献 [71] 说是根据软定理来的，还没搞懂

其中最后一项当且仅当 $\omega \in \mathcal{C}$ 时存在。而一般的 Kač-Moody Symmetry：

$$\begin{aligned} &\oint_C \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon^a(z) \langle J^a(z) J^b(w) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle \\ &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \sum_{k \in \mathcal{C}} \frac{\varepsilon^a}{z - w_k} \langle J^b(w) \mathcal{O}_1 \cdots T_k^a \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle + \oint_{\mathcal{C}_w} \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon^a(z) \langle (J^a(z) J^b(w)) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle J^b(w) \mathcal{O}_1 \cdots \varepsilon_k(z_k) \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle + \oint_{\mathcal{C}_w} \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon^a(z) \left\langle \left(\frac{i f^{abc} J^c(w)}{(z-w)} + \frac{k \delta^{ab}}{(z-w)^2} \right) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle J^b(w) \mathcal{O}_1 \cdots \varepsilon_k(z_k) \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle + \langle (\varepsilon_A(w) J_w)^b \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle + k \partial \varepsilon^b(w) \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle \end{aligned} \quad (53.47)$$

所以这个 $SU(2)$ 流代数 level 是 0。

作为微扰论推导软定理，我们都是在 $U = 1$ 的前提下，既然 large gauge 可以改变这个 U ，而 J_C 又正好生成了这个变换，那我们就可以通过插入 J_C 来得到其他 U 下的关联函数。考虑下面的变换：

$$\delta U(z, \bar{z}) = i\varepsilon(z, \bar{z}) + \dots \quad (53.48)$$

关联函数的变化可以表示为：

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} &\equiv \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1+i\varepsilon} - \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} \\ &= i \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \varepsilon^a(z_k) T_k^a \mathcal{O}_k \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1} \quad (53.49) \\ &= i \langle J_C[\varepsilon] \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{U=1}. \end{aligned}$$

所以前面的 conjecture 是正确的, J_C 还可以写为:

$$J_C[\varepsilon] = \int_{R_C} d^2z \gamma_{z\bar{z}} \varepsilon^a \frac{\delta}{\delta U^a} \quad (53.50)$$

这里 R_C 表示 C 的内部。 $U=1$ 相当于选取了一个特殊的真空, J_C 的作用是在不同的真空中切换, 这体现了 large gauge 的破缺, 破缺带来的 Goldstone 玻色子就是软胶子。

QED 里面反全纯的部分对应出射螺旋度为负的软胶子, QCD 是否也是这样呢? 答案非常微妙, 首先双软胶子出射的软定理就很微妙, 从微扰论出发可以证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+2}(p_1, \dots, p_n; q, \epsilon, a; q', \epsilon', b) &= g_{YM}^2 \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon \cdot p_k}{q \cdot p_k} \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon' \cdot p_j}{q' \cdot p_j} \langle O_1 \cdots T_k^a O_k \cdots T_j^b O_j \cdots O_n \rangle_{U=1} \\ &\quad - i g_{YM}^2 f^{abc} \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon' \cdot p_j}{q' \cdot p_j} \frac{\epsilon \cdot q'}{q \cdot q'} (O_1 \cdots T_j^c O_j \cdots O_n)_{U=1} + \mathcal{O}(q^0, q'^0) \end{aligned} \quad (53.51)$$

软定理需要取 $q, q' \rightarrow 0$ 的极限, 但是这个极限是和次序有关的!

$$\begin{aligned} \left[\lim_{q \rightarrow 0}, \lim_{q' \rightarrow 0} \right] \mathcal{A}_{n+2}(p_1, \dots, p_n; q, \epsilon, a; q', \epsilon', b) &= i g_{YM}^2 f^{abc} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\epsilon \cdot p_k}{p_k \cdot q} - \frac{\epsilon \cdot q'}{q \cdot q'} \right) \left(\frac{\epsilon' \cdot p_k}{q' \cdot p_k} - \frac{\epsilon' \cdot q}{q \cdot q'} \right) \\ &\quad \times \langle O_1 \cdots T_k^a O_k \cdots O_n \rangle_{U=1} + \mathcal{O}(q^0, q'^0) \end{aligned} \quad (53.52)$$

除非两个出射胶子的螺旋度一致, 否则右边不为 0。这意味着胶子的 \mathcal{S} 矩阵在软边界处的定义很模糊。如果你选取所有螺旋度为正的胶子都先变软, 那么:

$$J_z^a J_{\bar{w}}^b \sim -\frac{i f^{abc}}{z - w} J_{\bar{w}}^c. \quad (53.53)$$

这样全纯的流生成流对称性, 反过来要求螺旋度为负的胶子先变软:

$$J_z^a J_{\bar{w}}^b \sim -\frac{i f^{abc}}{\bar{z} - \bar{w}} J_z^c. \quad (53.54)$$

现在反全纯的流生成流对称性, 这意味着 QCD 这里全纯的流和反全纯的流不能放在对等的地位, 你必须舍弃一个, 这一点非常怪⁶⁰。[\[71\]](#)

注意, 直到现在, 本节涉及到的所有关联函数只是把 S 矩阵换了个写法, 我们依旧是在平面波基底下讨论问题, 要换到天球基底还需要进行 Mellin 变换:

$$\mathcal{O}_\Delta(z, \bar{z}) = \int_0^\infty d\omega \omega^{\Delta-1} \mathcal{O}(\omega, z, \bar{z}) \quad (53.55)$$

注意 Mellin 变换需要对所有能量积分, 但是前面定义的流是在 $\omega \rightarrow 0$ 的软粒子极限下定义的, 这意味着把流放到天球上去没那么简单。文献 [\[113, 161–163\]](#) 对这一点进行了讨论。

⁶⁰ 我并没有搞懂为什么 [53.53](#) 就意味着全纯的是流对称了, 它是怎么来的

53.3.3 Graviton

PART

IX

CFT₂ on Torus

Appendix A: Surface Charge

前面介绍协变相空间量子化的时候直接使用结论，没有讲清楚他是什么，这里补上。

Geometrical view of Lie Group

为了方便后面对纤维丛的讨论，首先来利用微分几何的语言重述一下李群的一些基本结论，前面 §2 其实已经用了不少几何直观，现在来点严谨的数学。为了行文简便简化了不少证明，不过本节内容详细证明都可以在 [8] 中找到。

Definition 1 如果 G 既是 n 维流形又是群，而且其乘法可看作是 $G \times G \rightarrow G$ 上的 C^∞ 映射，而且群元求逆映射也是 $G \rightarrow G$ 的 C^∞ 映射，那我们称 G 是李群。

Example | 有限群可以在上面赋予离散拓扑，这样就可以认为其是一个零维李群。

Definition 2 (同态/同构) $G \rightarrow H$ 的 C^∞ 映射称为同态，如果该映射是个微分同胚，则升级为李群同构。

Definition 3 H 是 G 的李子群当且仅当其是子群也是子流形

下面的叙述是重排定理在李群的推广：

Theorem 1 (重排定理) $\forall g, L_g : h \mapsto gh$ 称为 g 生成的左平移，其必然是一个微分同胚。

后面用正体 A 表示一个切矢，花体 \mathcal{A} 表示矢量场， $\mathcal{A}|_p$ 表示在 p 处的矢量场取值。

Definition 4 如果 $\forall g \in G, (L_g)_* \mathcal{A} = \mathcal{A}$ ，则称 \mathcal{A} 为左不变矢量场。

Lemma 1 左不变的矢量场必然 C^∞ ，而且上面的定义根据 push forward 的定义等价于

$$\mathcal{A}|_{gh} = (L_g)_* \mathcal{A}|_h, \quad \forall g, h \in G$$

利用上面的引理可以证明下面极为重要的定理：

Theorem 2 G 上全体左不变的集合记为 \mathcal{L} ， G 的恒等元处的切空间记为 V_e ，则在线性空间的意义上两者同构。

也就是说任意一个左不变的矢量场 \mathcal{A} 都唯一对应 V_e 中的一个切矢 A ，vice versa。李代数抽象的定义不需要依赖于李群，在线性空间上赋予双线性、封闭、反对易且遵循雅可比恒等式的乘法就可以使之提升为一个李代数。前面提到的 \mathcal{L} 其实就构成了一个李代数，矢量场我们是可以根据李导数去定义李括号的 $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ ，这样定义的李括号自然构成了李代数的乘法运算规则，唯一要证明的是封闭性，可以证明两个左不变的矢量场在这样的运算下仍然是一个左不变的矢量场。

李代数是描述李群在恒等元附近的局部性质的，在微分几何这边理所当然会和 V_e 联系起来。注意到任意一个 V_e 中的元素都对应一个左不变矢量场，所以可以使用左不变矢量场之间的李括号 $[,]$ 去定义 V_e 的李括号 $\{, \}$ 从而使之成为一个李代数。

Definition 5

(李群的李代数) 李群 G 的 V_e 在 $\{A, B\} \equiv [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ 的李括号定义下升级为一个李代数, 称为李群 G 的李代数 \mathfrak{g} 。

李代数的同构就是指保李括号的一一映射, 显然 $\mathcal{L} \cong \mathfrak{g}$ 。

Theorem 3 | 若 $H \subset G$, 则 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

再强调一下, 李代数本身的定义是不依赖于李群的, 但是每个李群都有一个李代数, 一个李代数可以有很多个李群与之对应, 但是与之对应的单连通李群只有一个。¹既然李群的李代数已经作为几何对象来描述, 李括号本质上就可以看作是一个(1,2)型张量, 定义下面的结构张量 C :

$$[A, B]^c = C_{ab}^c A^a B^b \quad (53.56)$$

¹ 回忆前面 § 证明的那么多群同态式子, 相同的李代数, 不同的李群, 最终找到一个单连通群是他们的覆盖群。

如果我们选取了一组基底 $\{e_\mu\}$:

$$[e_\mu, e_\nu]^c = C_{\mu\nu}^c (e_\mu)^a (e_\nu)^b = C_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma \quad (53.57)$$

这里 $C_{\mu\nu}^\sigma$ 就是我们常说的结构常数, 显然它虽说是常数, 但是是和坐标系的选取相关的, 看你如何在李群李代数空间中选取基底。

Definition 6

若 $[g, h] \in \mathfrak{h}, \forall g \in \mathfrak{g}, h \in \mathfrak{h}, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, 那么称 \mathfrak{h} 是 \mathfrak{g} 的理想。从李群这边看就是没有群中心。

Example | 任何李代数都有两个平庸的理想, $\{0\}$ 和自身。

正规子群相对于群就像是理想相对于李代数, 利用正规子群可以划分等价类从而得到商群的概念, 李代数也同样, 只不过这时候线性空间的商空间用仿射子集划分。²

Definition 7

若 \mathfrak{h} 为 \mathfrak{g} 的理想, 那么 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 称为商李代数

Theorem 4

- **单李代数:** 非 Abel 且不含非平庸的理想。

- **半单李代数:** 非 Abel 且不含非平庸的 Abel 理想。

到李群这边看, 对应的单李群就是非 Abel 且不含非平庸正规子群, 半单李群就是不含非平庸 Abel 正规子群

下面从微分几何角度来分析 $e^{\text{Lie Algebra}} = \text{Lie Group}$ 。

Definition 8

C^∞ 上的曲线 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ 如果满足 $\gamma s + t = \gamma s \gamma t$, 则称为一个单参李群。

这个定义和单参微分同胚群非常相近, 后面会看到的确如此。

Theorem 5

任何一个左不变的矢量场均完备, 也就是说它的任意一条积分曲线参数都可以延拓到全体实轴。

由于左不变的矢量场完备, 根据定义就有希望积分曲线是一个单参李群。还是根据 $\mu : \mathcal{L} \cong \mathfrak{g}$, 任意一个左不变的矢量场 \mathcal{A} 找到一个过恒等元 ($\gamma(0) = e$) 的积分曲线, 那么这条曲线就是 \mathcal{A} 给出的单参李群, 而且在单位元处切矢为 A , 反过来如果找到了一个过单位元且单位元处切矢为 A 的单参李群, 那么它必然是 \mathcal{A} 的一条积分曲线。所以说李群李代数中的元素 A 实际上充当了生成一个单参李群的作用, 所以我们称为生成元。

回忆一下定义了度规结构的流形可以有测地线的概念, 给一个点(起点)和这点处的切矢(速度)可以生成一条测地线, 这种点和切矢与测地线的一一对应我们称为指数映射。对于单参李群也是如此, 现在的点不是任意的, 就是单位元, 任给一个切矢 A , 可

² 对于 $W \subset V, a \sim b \iff a - b \in W$

以找到一个单参数群 γ , 我们把参数取为 1 那么下面的 $\mathfrak{g} \rightarrow G$ 的映射就称为指数映射:

$$\exp(A) = \gamma(1)$$

我们也可以把参数带上, 这样就可以用生成元加一个实参来用指数映射生成对应的单参数群:

$$\exp(tA) = \gamma(t)$$

这个式子形式上就是 $e^{\text{Lie Algebra}} = \text{Lie Group}$ 。但是那里的指数 \exp 是真的理解为自然常数为底的指数函数, 原因就是物理上我们一般考虑的不是抽象的李群, 真正用起来都是矩阵李群, 或者说找群的表示。到了矩阵李群的层面上, 把群元这些统统替换为矩阵, 指数映射里面的 \exp 就不仅仅只是在名字上叫他指数映射了。另外, 李括号也可以具体的用矩阵乘法写成 $[A, B] = AB - BA$ 了。

最后指出单参数微分同胚群和单参数群之间的关系, 由下面的定理给出:

Theorem 6 | 若 ϕ 是由 $A \in \mathfrak{g}$ 对应的 \mathcal{A} 生成的单参数微分同胚群, 那么:

$$\phi_t(g) = g \exp(tA) \quad (53.58)$$

从几何图像上也好理解, 单参数微分同胚群相当于一族曲线, 单参数群只是其中过 e 的一支, 想要得到过其它群元的, 用群元和最基本的单参数群这一支相乘就好了。

Fiber Bundle

to be continue ...

参考文献

- [1] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge University Press (6, 2005), [10.1017/CBO9781139644167](https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167).
- [2] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, WORLD SCIENTIFIC (1985), [10.1142/0097](https://doi.org/10.1142/0097), [<https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/0097>].
- [3] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry I*, *Proc. Symp. Pure Maths.* **81** (2010) 65 [[0909.0551](#)].
- [4] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry II*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **15** (2011) 1373 [[1003.3436](#)].
- [5] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, *Annals of Mathematics* **59** (1954) 1.
- [6] A. Zee, *Group Theory in A Nutshell*, Princeton University Press (2016).
- [7] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer Cham, 2 ed. (2017), [10.1007/978-3-319-66631-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66631-0).
- [8] 梁灿彬,《微分几何入门与广义相对论》, vol. 1, 科学出版社 (2006).
- [9] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Heidelberg, Germany (2013), [10.1007/978-3-642-29497-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29497-6).
- [10] S. Rychkov, *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in D>= 3 Dimensions*, SpringerBriefs in Physics (1, 2016), [10.1007/978-3-319-43626-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-43626-5), [[1601.05000](#)].
- [11] H. Osborn, *Lecture notes on Conformal Field Theories*, Cambridge (October, 2019), [<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/CFTNotes.pdf>].
- [12] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, Universität Bern (April, 2023), [<http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>].
- [13] B. Oblak, *From the Lorentz Group to the Celestial Sphere*, 8, 2015 [[1508.00920](#)].
- [14] A. Strominger, *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory* (3, 2017), [[1703.05448](#)].
- [15] 梁灿彬,《微分几何入门与广义相对论》, vol. 2, 科学出版社 (2006).
- [16] G. Compère, *Advanced Lectures on General Relativity*, vol. 952, Springer, Cham, Cham, Switzerland (2, 2019), [10.1007/978-3-030-04260-8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04260-8).
- [17] M. Campiglia and A. Laddha, *Asymptotic symmetries of gravity and soft theorems for massive particles*, *JHEP* **12** (2015) 094 [[1509.01406](#)].
- [18] M. Campiglia, *Null to time-like infinity Green's functions for asymptotic symmetries in Minkowski spacetime*, *JHEP* **11** (2015) 160 [[1509.01408](#)].
- [19] H. Bondi, M.G.J. van der Burg and A.W.K. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **269** (1962) 21.
- [20] R.K. Sachs, *Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **270** (1962) 103.
- [21] S. Pasterski, *Lectures on celestial amplitudes*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 1062 [[2108.04801](#)].
- [22] D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski and A. Strominger, *Semiclassical Virasoro symmetry of the quantum gravity S-matrix*, *JHEP* **08** (2014) 058 [[1406.3312](#)].
- [23] A.-M. Raclariu, *Lectures on Celestial Holography*, [2107.02075](#).
- [24] D. Tong, *Lectures on General Relativity*, Cambridge (2019), [<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>].

- [25] 赵柳,《相对论与引力理论导论》,科学出版社 (2017).
- [26] G. Barnich and C. Troessaert, *Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited*, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 111103 [[0909.2617](#)].
- [27] G. Barnich and C. Troessaert, *Supertranslations call for superrotations*, *PoS CNCFCG2010* (2010) 010 [[1102.4632](#)].
- [28] G. Barnich and C. Troessaert, *BMS charge algebra*, *JHEP* **12** (2011) 105 [[1106.0213](#)].
- [29] G. Barnich and C. Troessaert, *Aspects of the BMS/CFT correspondence*, *JHEP* **05** (2010) 062 [[1001.1541](#)].
- [30] T. Banks, *A Critique of pure string theory: Heterodox opinions of diverse dimensions*, [hep-th/0306074](#).
- [31] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, New York (1997), [10.1007/978-1-4612-2256-9](#).
- [32] A. Bilal, *Lectures on Anomalies*, [0802.0634](#).
- [33] M. Srednicki, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1, 2007).
- [34] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2, 2023), [10.1017/9781009253161](#).
- [35] E. Witten, *A Simple Proof of the Positive Energy Theorem*, *Commun. Math. Phys.* **80** (1981) 381.
- [36] T. Parker and C.H. Taubes, *On Witten's Proof of the Positive Energy Theorem*, *Commun. Math. Phys.* **84** (1982) 223.
- [37] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago Univ. Pr., Chicago, USA (1984), [10.7208/chicago/9780226870373.001.0001](#).
- [38] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space (PMS-41)*, Princeton University Press, Princeton (1994), doi:[10.1515/9781400863174](#).
- [39] D. Christodoulou, *Nonlinear nature of gravitation and gravitational-wave experiments*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1486.
- [40] A. Strominger, *On BMS Invariance of Gravitational Scattering*, *JHEP* **07** (2014) 152 [[1312.2229](#)].
- [41] P.-N. Chen and M.-T. Wang, *Conserved Quantities of harmonic asymptotic initial data sets*, [1409.5105](#).
- [42] S. Badger, J. Henn, J. Plefka and S. Zoia, *Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory*, [2306.05976](#).
- [43] W.D. Goldberger and I.Z. Rothstein, *An Effective field theory of gravity for extended objects*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 104029 [[hep-th/0409156](#)].
- [44] Z. Bern, C. Cheung, R. Roiban, C.-H. Shen, M.P. Solon and M. Zeng, *Black Hole Binary Dynamics from the Double Copy and Effective Theory*, *JHEP* **10** (2019) 206 [[1908.01493](#)].
- [45] G. Mogull, J. Plefka and J. Steinhoff, *Classical black hole scattering from a worldline quantum field theory*, *JHEP* **02** (2021) 048 [[2010.02865](#)].
- [46] S. Sannan, *Gravity as the Limit of the Type II Superstring Theory*, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 1749.
- [47] T. McLoughlin, A. Puhm and A.-M. Raclariu, *The SAGEX review on scattering amplitudes chapter 11: soft theorems and celestial amplitudes*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443012 [[2203.13022](#)].

- [48] F.A. Berends and W.T. Giele, *Recursive Calculations for Processes with n Gluons*, *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 759.
- [49] F.A. Berends and W.T. Giele, *Multiple Soft Gluon Radiation in Parton Processes*, *Nucl. Phys. B* **313** (1989) 595.
- [50] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Quark - Gluon Amplitudes in the Dual Expansion*, *Nucl. Phys. B* **299** (1988) 673.
- [51] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Multiparton amplitudes in gauge theories*, *Phys. Rept.* **200** (1991) 301 [[hep-th/0509223](#)].
- [52] T.H. Burnett and N.M. Kroll, *Extension of the low soft-photon theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 86.
- [53] F.E. Low, *Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions*, *Phys. Rev.* **110** (1958) 974.
- [54] A. Brandhuber, J. Plefka and G. Travaglini, *The SAGEX Review on Scattering Amplitudes Chapter 1: Modern Fundamentals of Amplitudes*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443002 [[2203.13012](#)].
- [55] Z. Bern, S. Davies, P. Di Vecchia and J. Nohle, *Low-energy behavior of gluons and gravitons from gauge invariance*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 084035.
- [56] R. Jackiw, *Low-energy theorems for massless bosons: Photons and gravitons*, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1623.
- [57] C.D. White, *Diagrammatic insights into next-to-soft corrections*, *Phys. Lett. B* **737** (2014) 216 [[1406.7184](#)].
- [58] J. Broedel, M. de Leeuw, J. Plefka and M. Rosso, *Constraining subleading soft gluon and graviton theorems*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 065024 [[1406.6574](#)].
- [59] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw Hill Higher Education, Maidenhead, England, 3 ed. (1968).
- [60] S. Weinberg, *Infrared photons and gravitons*, *Phys. Rev.* **140** (1965) B516.
- [61] T. He, P. Mitra, A.P. Porfyriadis and A. Strominger, *New Symmetries of Massless QED*, *JHEP* **10** (2014) 112 [[1407.3789](#)].
- [62] D. Kapec, M. Pate and A. Strominger, *New Symmetries of QED*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **21** (2017) 1769 [[1506.02906](#)].
- [63] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd edition, 1998, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119985144>.
- [64] A. Ashtekar, *Asymptotic quantization : based on 1984 naples lectures*, 1987, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:107226501>.
- [65] V.P. Frolov, *NULL SURFACE QUANTIZATION AND QUANTUM THEORY OF MASSLESS FIELDS IN ASYMPTOTICALLY FLAT SPACE-TIME*, *Gen. Rel. Grav.* **10** (1979) 833.
- [66] S.W. Hawking and W. Israel, *Three Hundred Years of Gravitation*, Cambridge University Press (1989).
- [67] J. Lee and R.M. Wald, *Local symmetries and constraints*, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 725.
- [68] R.M. Wald and A. Zoupas, *A General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 084027 [[gr-qc/9911095](#)].
- [69] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer New York, NY, 2 ed. (May, 1989).
- [70] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to conformal field theory: with applications to String theory*, vol. 779 (2009), [10.1007/978-3-642-00450-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00450-6).
- [71] T. He, P. Mitra and A. Strominger, *2D Kac-Moody Symmetry of 4D Yang-Mills Theory*, *JHEP* **10** (2016) 137 [[1503.02663](#)].

- [72] A. Strominger, *Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory*, *JHEP* **07** (2014) 151 [[1308.0589](#)].
- [73] A. Nande, M. Pate and A. Strominger, *Soft Factorization in QED from 2D Kac-Moody Symmetry*, *JHEP* **02** (2018) 079 [[1705.00608](#)].
- [74] T. He, V. Lysov, P. Mitra and A. Strominger, *BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem*, *JHEP* **05** (2015) 151 [[1401.7026](#)].
- [75] A. Ashtekar and R.O. Hansen, *A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I - Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity*, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1542.
- [76] A. Ashtekar and M. Streubel, *Symplectic Geometry of Radiative Modes and Conserved Quantities at Null Infinity*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **376** (1981) 585.
- [77] A. Ashtekar, *Asymptotic quantization of the gravitational field*, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 573.
- [78] A. Strominger and A. Zhiboedov, *Superrotations and Black Hole Pair Creation*, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 064002 [[1610.00639](#)].
- [79] M. Campiglia and A. Laddha, *Asymptotic symmetries and subleading soft graviton theorem*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 124028 [[1408.2228](#)].
- [80] F. Cachazo and A. Strominger, *Evidence for a New Soft Graviton Theorem*, [1404.4091](#).
- [81] M. Campiglia and A. Laddha, *Sub-subleading soft gravitons and large diffeomorphisms*, *JHEP* **01** (2017) 036 [[1608.00685](#)].
- [82] M. Campiglia and A. Laddha, *Subleading soft photons and large gauge transformations*, *JHEP* **11** (2016) 012 [[1605.09677](#)].
- [83] E. Conde and P. Mao, *Remarks on asymptotic symmetries and the subleading soft photon theorem*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 021701 [[1605.09731](#)].
- [84] E. Conde and P. Mao, *BMS Supertranslations and Not So Soft Gravitons*, *JHEP* **05** (2017) 060 [[1612.08294](#)].
- [85] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition*, Princeton University Press (2, 2010).
- [86] M. Campiglia and A. Laddha, *Asymptotic symmetries of QED and Weinberg's soft photon theorem*, *JHEP* **07** (2015) 115 [[1505.05346](#)].
- [87] V. Lysov, S. Pasterski and A. Strominger, *Low's Subleading Soft Theorem as a Symmetry of QED*, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 111601 [[1407.3814](#)].
- [88] A. Strominger, *Magnetic Corrections to the Soft Photon Theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 031602 [[1509.00543](#)].
- [89] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press (3, 2014).
- [90] 伊藤克司, *共形場理論: 現代数理物理の基礎として*, サイエンス社.
- [91] S. Nawata, R. Tao and D. Yokoyama, *Fudan lectures on 2d conformal field theory*, [2208.05180](#).
- [92] P.H. Ginsparg, *APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY*, in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena*, 9, 1988 [[hep-th/9108028](#)].
- [93] J.D. Qualls, *Lectures on Conformal Field Theory*, [1511.04074](#).
- [94] S. Ribault, *Conformal field theory on the plane*, [1406.4290](#).
- [95] M. Schottenloher, ed., *A mathematical introduction to conformal field theory*, vol. 759 (2008), [10.1007/978-3-540-68628-6](#).

- [96] J. Polchinski, *Scale and Conformal Invariance in Quantum Field Theory*, *Nucl. Phys. B* **303** (1988) 226.
- [97] J. Fuchs, *Lectures on conformal field theory and Kac-Moody algebras*, *Lect. Notes Phys.* **498** (1997) 1 [[hep-th/9702194](#)].
- [98] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras* (1990).
- [99] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, *Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two-Dimensions*, *Nucl. Phys. B* **247** (1984) 83.
- [100] R. Slansky, *Group Theory for Unified Model Building*, *Phys. Rept.* **79** (1981) 1.
- [101] R. Feger and T.W. Kephart, *LieART—A Mathematica application for Lie algebras and representation theory*, *Comput. Phys. Commun.* **192** (2015) 166 [[1206.6379](#)].
- [102] R. Feger, T.W. Kephart and R.J. Saskowski, *LieART 2.0 – A Mathematica application for Lie Algebras and Representation Theory*, *Comput. Phys. Commun.* **257** (2020) 107490 [[1912.10969](#)].
- [103] C.N. Pope, *Lectures on W algebras and W gravity*, in *Summer School in High-energy Physics and Cosmology*, pp. 827–867, 12, 1991 [[hep-th/9112076](#)].
- [104] H.G. Kausch and G.M.T. Watts, *A Study of W algebras using Jacobi identities*, *Nucl. Phys. B* **354** (1991) 740.
- [105] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel and R. Varnhagen, *W algebras with two and three generators*, *Nucl. Phys. B* **361** (1991) 255.
- [106] C.N. Pope, L.J. Romans and X. Shen, *The Complete Structure of W(Infinity)*, *Phys. Lett. B* **236** (1990) 173.
- [107] C.N. Pope, L.J. Romans and X. Shen, *W(infinity) and the Racah-wigner Algebra*, *Nucl. Phys. B* **339** (1990) 191.
- [108] 喀兴林, *高等量子力学* (第 2 版), 高等教育出版社 (2006).
- [109] A. Fialowski and M. de Montigny, *Deformations and contractions of lie algebras*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 6335.
- [110] C.M. Hull, *W geometry*, *Commun. Math. Phys.* **156** (1993) 245 [[hep-th/9211113](#)].
- [111] D. Karabali, *W(infinity) algebras and incompressibility in the quantum Hall effect*, in *20th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, 6, 1994 [[hep-th/9411082](#)].
- [112] D. Karabali, *W(infinity) algebras in the quantum Hall effect*, *Nucl. Phys. B* **428** (1994) 531 [[hep-th/9405057](#)].
- [113] A. Strominger, *$w_{1+\infty}$ Algebra and the Celestial Sphere: Infinite Towers of Soft Graviton, Photon, and Gluon Symmetries*, *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021) 221601 [[2105.14346](#)].
- [114] H. Elvang and Y.-t. Huang, *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*, Cambridge University Press (4, 2015).
- [115] J.J.M. Carrasco, *Gauge and Gravity Amplitude Relations*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Journeys Through the Precision Frontier: Amplitudes for Colliders*, pp. 477–557, WSP, 2015, DOI [[1506.00974](#)].
- [116] Z. Bern, J.J. Carrasco, M. Chiodaroli, H. Johansson and R. Roiban, *The Duality Between Color and Kinematics and its Applications*, [1909.01358](#).
- [117] Z. Bern, J.J. Carrasco, M. Chiodaroli, H. Johansson and R. Roiban, *The SAGE review on scattering amplitudes Chapter 2: An invitation to color-kinematics duality and the double copy*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443003 [[2203.13013](#)].
- [118] P. Cvitanović, *Group theory: birdtracks, Lie's, and exceptional groups*, Princeton University Press.
- [119] F. Gelis, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (7, 2019).

- [120] S. Badger, H. Frellesvig and Y. Zhang, *A Two-Loop Five-Gluon Helicity Amplitude in QCD*, *JHEP* **12** (2013) 045 [[1310.1051](#)].
- [121] S. Pasterski, S.-H. Shao and A. Strominger, *Gluon Amplitudes as 2d Conformal Correlators*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 085006 [[1706.03917](#)].
- [122] L.J. Dixon, *Calculating scattering amplitudes efficiently*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 95): QCD and Beyond*, pp. 539–584, 1, 1996 [[hep-ph/9601359](#)].
- [123] C. Cheung, A. de la Fuente and R. Sundrum, *4D scattering amplitudes and asymptotic symmetries from 2D CFT*, *JHEP* **01** (2017) 112 [[1609.00732](#)].
- [124] P.A.M. Dirac, *Wave equations in conformal space*, *Annals of Mathematics* **37** (1936) 429.
- [125] S. Pasterski and S.-H. Shao, *Conformal basis for flat space amplitudes*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 065022 [[1705.01027](#)].
- [126] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [[hep-th/9802150](#)].
- [127] S. Ferrara and G. Parisi, *Conformal covariant correlation functions*, *Nucl. Phys. B* **42** (1972) 281.
- [128] S. Ferrara, A.F. Grillo and G. Parisi, *Nonequivalence between conformal covariant wilson expansion in euclidean and minkowski space*, *Lett. Nuovo Cim.* **5S2** (1972) 147.
- [129] S. Ferrara, A.F. Grillo, G. Parisi and R. Gatto, *The shadow operator formalism for conformal algebra. Vacuum expectation values and operator products*, *Lett. Nuovo Cim.* **4S2** (1972) 115.
- [130] S. Ferrara, A.F. Grillo, G. Parisi and R. Gatto, *Covariant expansion of the conformal four-point function*, *Nucl. Phys. B* **49** (1972) 77.
- [131] M.S. Costa and T. Hansen, *Conformal correlators of mixed-symmetry tensors*, *JHEP* **02** (2015) 151 [[1411.7351](#)].
- [132] D. Simmons-Duffin, *Projectors, Shadows, and Conformal Blocks*, *JHEP* **04** (2014) 146 [[1204.3894](#)].
- [133] Z. Sun, *A group theoretical approach to quantum gravity in (A)dS*, Ph.D. thesis, Columbia U., 2021. 10.7916/d8-113p-mq30.
- [134] Z. Sun, *A note on the representations of $SO(1, d + 1)$* , [2111.04591](#).
- [135] A. Bissi and S. Sarkar, *A constructive solution to the cosmological bootstrap*, *JHEP* **09** (2023) 115 [[2305.08939](#)].
- [136] M.S. Costa, V. Gonçalves and J.a. Penedones, *Spinning AdS Propagators*, *JHEP* **09** (2014) 064 [[1404.5625](#)].
- [137] L. Bougoffa, *A note on the ramanujan master theorem*, 2019.
- [138] M. Glasser and M. Milgram, *Master theorems for a family of integrals*, *Integral Transforms and Special Functions* **25** (2014) 805 [<https://doi.org/10.1080/10652469.2014.924114>].
- [139] E. Magliaro, C. Perini and C. Rovelli, *Compatibility of radial, lorenz, and harmonic gauges*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084013.
- [140] L. Donnay, S. Pasterski and A. Puhm, *Asymptotic Symmetries and Celestial CFT*, *JHEP* **09** (2020) 176 [[2005.08990](#)].
- [141] L. Donnay, A. Puhm and A. Strominger, *Conformally Soft Photons and Gravitons*, *JHEP* **01** (2019) 184 [[1810.05219](#)].
- [142] Y. Pano, S. Pasterski and A. Puhm, *Conformally soft fermions*, *JHEP* **12** (2021) 166 [[2108.11422](#)].

- [143] F.A. Dolan and H. Osborn, *Conformal Partial Waves: Further Mathematical Results*, [1108.6194](#).
- [144] K. Symanzik, *On Calculations in conformal invariant field theories*, *Lett. Nuovo Cim.* **3** (1972) 734.
- [145] Y.T.A. Law and M. Zlotnikov, *Massive Spinning Bosons on the Celestial Sphere*, *JHEP* **06** (2020) 079 [[2004.04309](#)].
- [146] M.S. Costa, J. Penedones, D. Poland and S. Rychkov, *Spinning Conformal Correlators*, *JHEP* **11** (2011) 071 [[1107.3554](#)].
- [147] K. Hinterbichler, A. Joyce and R.A. Rosen, *Massive Spin-2 Scattering and Asymptotic Superluminality*, *JHEP* **03** (2018) 051 [[1708.05716](#)].
- [148] J. Bonifacio, K. Hinterbichler, A. Joyce and R.A. Rosen, *Massive and Massless Spin-2 Scattering and Asymptotic Superluminality*, *JHEP* **06** (2018) 075 [[1712.10020](#)].
- [149] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (12, 2007), [10.1017/CBO9780511618123](#).
- [150] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*, Cambridge University Press (6, 2013).
- [151] A. Van Proeyen, *Tools for supersymmetry*, *Ann. U. Craiova Phys.* **9** (1999) 1 [[hep-th/9910030](#)].
- [152] A.D. Kennedy, *Clifford Algebras in Two ω Dimensions*, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1330.
- [153] J.W. van Holten and A. Van Proeyen, *N=1 Supersymmetry Algebras in D=2, D=3, D=4 MOD-8*, *J. Phys. A* **15** (1982) 3763.
- [154] L. Iacobacci and W. Mück, *Conformal Primary Basis for Dirac Spinors*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 106025 [[2009.02938](#)].
- [155] S.A. Narayanan, *Massive Celestial Fermions*, *JHEP* **12** (2020) 074 [[2009.03883](#)].
- [156] H.T. Lam and S.-H. Shao, *Conformal Basis, Optical Theorem, and the Bulk Point Singularity*, *Phys. Rev. D* **98** (2018) 025020 [[1711.06138](#)].
- [157] S. Pasterski, S.-H. Shao and A. Strominger, *Flat Space Amplitudes and Conformal Symmetry of the Celestial Sphere*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 065026 [[1701.00049](#)].
- [158] S. Stieberger and T.R. Taylor, *Strings on Celestial Sphere*, *Nucl. Phys. B* **935** (2018) 388 [[1806.05688](#)].
- [159] S. Stieberger and T.R. Taylor, *Symmetries of Celestial Amplitudes*, *Phys. Lett. B* **793** (2019) 141 [[1812.01080](#)].
- [160] Y.T.A. Law and M. Zlotnikov, *Poincaré constraints on celestial amplitudes*, *JHEP* **03** (2020) 085 [[1910.04356](#)].
- [161] A. Guevara, E. Himwich, M. Pate and A. Strominger, *Holographic symmetry algebras for gauge theory and gravity*, *JHEP* **11** (2021) 152 [[2103.03961](#)].
- [162] T. Adamo, L. Mason and A. Sharma, *Celestial amplitudes and conformal soft theorems*, *Class. Quant. Grav.* **36** (2019) 205018 [[1905.09224](#)].
- [163] A. Guevara, *Notes on Conformal Soft Theorems and Recursion Relations in Gravity*, [1906.07810](#).
- [164] J. Ellis, *TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ*, *Comput. Phys. Commun.* **210** (2017) 103 [[1601.05437](#)].