天球振幅科研笔记

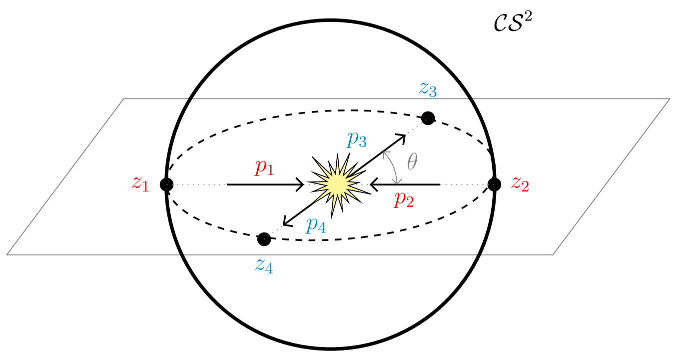
CELESTIAL AMPLITUDES

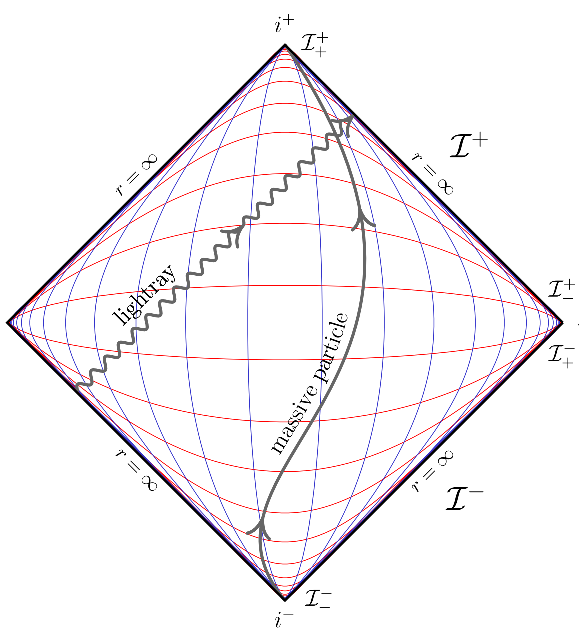
BUFAN ZHENG

Undergraduate Student at the Wuhan University

GitHub

whuzbf@qq.com





目录

PART

I

A quick review on SR & GR

SECTION 1

Basics conceptions about spacetime

我们生活的空间是一个四维局部平坦的 **Lorentz 流形**，也就是一个四维微分流形配备一个非正定、非退化的度规 $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$，这是一个 $(0,2)$ 张量。局部平坦意思是说任何一点处都可以选取一个坐标系 [1]使得 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \nabla_\rho g_{\mu\nu}$[2]。而 Lorentz 体现在 η 有一个指标是负数，而且根据惯性定理，无论你选取什么坐标系将度规对角化，最终负数的个数都是一样的，这样一来我们便可以严格的区分时间和空间 [3]。

参数化流形后，时空上的每一点（事件）都将对应一个坐标 x^μ，时空中的曲线（世界线）可以参数化为 $x^\mu(\tau)$，其可以看作是由矢量场 $X = X^\mu \partial_\mu = \frac{x^\mu(\tau)}{d\tau}\partial_\mu$ 诱导的。考虑世界线上相邻的两点，我们可以定义线长为

$$dl = \sqrt{|g(X,X)|} = \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{x^\nu}{d\tau}}$$

很多时候也把线长记为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 但是在微分几何的严格意义下，dx^μ 是对偶矢量，并不是初等微积分中的微分，所以这个式子只能理解为 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$，也就是说 ds^2 只是张量 g 的另一个叫法而已！后面我们为了方便可能牺牲严谨性，使用 ds^2 表示世界线长。

GR 中最重要的基本假设便是在坐标变换下物理定律是不变的，这说明作用量必须是标量，几乎唯一确定了真空引力场作用量为：

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{1.1}$$

Λ 是宇宙学常数
$g \equiv \det g_{\mu\nu}$
R 是 Ricci 标量
取自然单位制 $c = \hbar = 1$

由于度规是张量，所以其在坐标变换下分量变换为：[4]

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

在 SR 中我们仅研究平直的时空，或者说只研究惯性系之间的变换，这些惯性系中的变换满足 $\tilde{\eta} = \eta$，可以一般的记为：

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

那么 Λ 满足：

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta \tag{1.2}$$

下面是一些 GR 中常用公式总结，顺便熟悉下 convention，首先是协变导数符号约定：

$$\nabla_\lambda V^{\mu\cdots}{}_{\nu\ldots} = \partial_\lambda V^{\mu\cdots}{}_{\nu\ldots} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} V^{\sigma\cdots}{}_{\nu\ldots} + \cdots - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^{\mu\cdots}{}_{\sigma\ldots} - \cdots$$

测地线方程：[5]

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0}$$

[1] 这个坐标系称为**局部惯性系**，由于可以从指数映射结合测地线来构造这个惯性系，所以也称为**自由下落参考系**

[2] 这里符号约定为 $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+)$

[3] 如果这里把 η 中的 -1 变成 $+1$，我们称为 ***Riemann* 流形**

[4] 注意两边对应的自变量，因为张量都是关于流形上点的场，所以这里坐标变换后流形上某点对应的坐标也变了。

[5] τ 是仿射参量，对于有质量粒子可以取为固有时，对于无质量粒子要取成别的，再加上测地线类光的条件。

黎曼曲率张量以及对应的 Ricci 张量和标量：

$$R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta} \quad R \equiv \operatorname{Tr} R_{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$$

满足下面的对称性和 Bianchi 恒等式：[6]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0$$

[6] 有的文献写协变导数喜欢用 ; μ 代替 ∇_μ，用 , μ 代替 ∂_μ

SECTION 2

Poincaré group and Lorentz group

显然所有的 Λ 构成了一个群，称之为 **Lorentz 群**：

$$L \equiv O(3,1) \equiv \left\{\Lambda \in M(4,\mathbb{R}) | \Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda = \eta\right\} \tag{2.1}$$

而所有的保度规变换还要加入 a^{μ}，构成 **Poincaré 群**：$O(3,1) \ltimes \mathbb{R}^{3,1}$，群乘法为：

$$(\Lambda, a)\cdot(\Lambda', a') = (\Lambda\cdot\Lambda', a + \Lambda\cdot a') \tag{2.2}$$

利用 Poincaré 群的不等价不可约表示可以对基本粒子进行分类，见本部分末尾。后面我们将主要关注 Lorentz 群。不难验证 $\det\Lambda = \pm 1$，它将 Lorentz 群分成两个分支，其中 $\det\Lambda = 1$ 的部分含有单位元，构成子群**正规 Lorentz 群**。记为 $SO(3,1)$ 或 L_+

另外 $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ 也将 Lorentz 群分成两个分支，其中 $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ 的部分含有单位元，构成子群**正时 Lorentz 群**。记为 $O(3,1)^{\uparrow}$ 或 $L^{\uparrow}$。

最后 $L^{\uparrow}_{+} \equiv L^{\uparrow} \cap L_{+}$ 也构成了 L 的一个子群。这些子群之间可以用时间反演和空间反演算符相联系：

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

显然 $L_+ = \{L^{\uparrow}_+, \mathcal{T}\}, L^{\uparrow} = \{L^{\uparrow}_+, \mathcal{P}\}, L = \{L^{\uparrow}_+, \mathcal{T}, \mathcal{P}\}$

SUBSECTION 2.1

Poincaré algebra

现在考虑群的局部性质，考虑无穷小坐标变换 $x^{\mu} \mapsto x^{\mu} + \xi^{\mu}$，保度规条件为：

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \eta_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\mu}\xi_{\nu} = 0 \tag{2.4}$$

ξ^{μ} 可以用 $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 和 b^{μ} 两个无穷小参数标记：

$$\xi^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

平移生成元为:

$$P_{\mu} = -i\partial_{\mu} \Rightarrow T(b) = \exp(-ib^{\mu}P_{\mu})$$

boost 和转动生成元为：

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) \Rightarrow \Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)$$

生成共同构成 Poincaré 代数：

$$\boxed{\begin{array}{l}[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} = i\left(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}\right)]\end{array}} \tag{2.5}$$

Section 3

Boost and Rapidity

我们把 Lorentz 群记为 $O(3,1)$ 强烈暗示了其与 $O(n)$ 群的类似性，其实 Lorentz 变换完全可以看作是四维时空中的旋转。三维空间旋转有三个自由度，分别是绕着 x, y, z 轴的旋转，这些轴都是由另外两个轴张成的平面所确定的，总数为 $C_3^2 = 3$。那么对于高维空间旋转，比如四维空间可以推广为共 $C_4^2 = 6$ 个自由度。其中有 3 个是单纯的 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转，还有三个是混合了时间轴的旋转，也就是初等 SR 介绍中的两个相对速度为 v 的惯性系之间的变换，称为 **boost**。比如 x 方向上的 boost 就可以显式表达出来为：

$\gamma(v) = 1/\sqrt{(1-\beta(v)^2)}$
$\beta(v) = v/c$

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\beta(v) & 0 & 0 \\ -\gamma(v)\beta(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$\Lambda(v)$ 是一个 boost，或者说四维转动，类比三维转动 $R_x(\theta)R_x(\phi)R_x(\theta+\phi)$，很容易想到 $\Lambda(v)\Lambda(w) \stackrel{?}{=} \Lambda(v+w)$，即绕着某个轴的转动是一个单参数 Abel 子群。但实际上以 v 为参数并不能看出这一点。可以定义 [7]：

[7] $\chi \in (-\infty, +\infty)$，所以是非紧致的 *Lie* 群

$$\chi(v) \equiv \operatorname{arctanh}(\frac{v}{c}) \tag{3.2}$$

称为 **rapidity** 这样便有 $\Lambda(\chi_2)\Lambda(\chi_1) = \Lambda(\chi_2 + \chi_1)$。

rapidity 其实有非常明显的物理含义，回忆一下速度的定义：

$$\text{velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}}$$

由于右边的分式分子分母都是依赖于参考系的，所以如果 B 相对于 A 运动 [8]，实际上可以对于 B 定义三种不同的速度。

[8] 方便起见假设沿 x 轴作直线运动，但不要求匀速

Definition 1 $v = \frac{dx}{dt}$，这里 x, t 都是在 A 的参考系下测得的。

Definition 2 $u = \frac{dx}{d\tau}$，这里 x 是在 A 的参考系下测的，τ 是 B 的固有时。

这个定义是关于参考系协变的，也就是通常的 4-速度的定义。

Definition 3 $\tilde{(}v) = \frac{dx_B}{d\tau}$，分子分母都是 B 自己测得的。

但是这个定义有个很大的问题，B 自己测量时间没问题，但是 B 自己测量自己的位移始终是 0，所以上面这个定义必须重新审视。首先我们看如何对应 B 的加速度，假设

B 在固有时 τ 的时刻相对于地面系的速度 [9]为 v，这个时候考虑一个与 B 速度相同的瞬时惯性系，也就是说过一段时间 $d\tau$ 之后 B 相对于这个瞬时惯性系会有个速度 $d\tilde{v}$，加速度也便定义为 $d\tilde{v}/d\tau$。假设这段时间内，相对于地面系 B 速度增加了 dv，那么根据速度叠加法则：

$$\frac{v+d\tilde{v}}{1+vd\tilde{v}/c^2} = v + dv \Rightarrow d\tilde{v}\left(1+v^2/c^2\right)dv \tag{3.3}$$

[9] 第一个定义

现在对加速度进行积分：

$$I(\tau) = \int_0^\tau d\tau \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \int_0^{\tilde{v}} d\tilde{v} = \int_0^v \frac{dv}{1+v^2/c^2} = c\cdot \operatorname{arctanh}\frac{v(\tau)}{c} = c\cdot\chi(v(\tau)) \tag{3.4}$$

所以在这个速度的定义下，自然导出了 rapidity，如果取自然单位制 $c=1$，那么两者完全一致。

Section 4

Connected components of Lorentz group

对于任何正规且正时的 Lorentz 群中的元素都可以做标准分解：

Theorem 1 $\forall\Lambda\in L_+^\uparrow, \exists R_1, R_2 \in SO(3)$，使得

$$\Lambda = R_1 L_x(\chi) R_2 \tag{4.1}$$

而 Lorentz 群只需要再加上 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{P}$ 即可，而且这种分解对于 $d>2$ 维时空都是适用的。从物理上很好理解，一般的 Lorentz 变换无非就是绕着任意轴的 boost，我们都可以先进行转动，将 boost 方向转为 x 轴，进行 boost 之后再转回原来的方向。

任何一个 Lie 群实际上都是一个微分流形，而连通性这个概念正是建立在此之上从拓扑观点来看的。作为一个流形，G 不一定是连通的，可以有很多个连通分支，其中只有含有 e 的连通分支才能构成子群，我们记为 G_e，有下面的定理成立：

Theorem 2 $G_e \lhd G$ 且所有连通分支构成商群 G/G_e.

这里不做严格证明，下面我们将此定理用于 Lorentz 群。根据 4.1，由于其中的每个因子都与 e 道路连通，所以 $L_+^\uparrow \subseteq L_e$，而 L 中的其它群元为了与 e 相连，必须通过离散变换 $\mathcal{T},\mathcal{P}$，所以实际上 $L_+^\uparrow = L_e$，那么连通分支构成商群 $L/L_+^\uparrow \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$，这里同构成立是因为商群实际上由 $\{\mathcal{T},\mathcal{P}\}$ 生成。

后面我们都用 $\cong$ 表示同构，$\simeq$ 表示同态

可见 Lorentz 群确实包含了 4 个连通分支，可以根据 $\Lambda^0{}_0$ 以及 $\det\Lambda$ 的符号进行分类。

Section 5

Poincaré group and particles

这一部分是最为精妙的部分，我们将会利用 Poincaré 群的不可约表示对场和粒子进行分类，本节论述主要参考 Weinberg[1] 和董无极 [2]

to be continue. . .

PART

II

Lorentz group & special linear groups

本部分我们的目的是建立一系列同构关系，基本思路就是先找到一个同态，然后利用同态核定理构造同构

Theorem 1 (同态核定理) 如果 $f: G \to H$ 是一个群同态，那么有 $\ker(f) \lhd G$ 且 $G/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$

而且本部分会充分利用李群是微分流形这一拓扑性质进行说明，很多证明没有数学上的严谨，重在直观的感性认知。

Section 6

$SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

$SU(2)$ 是所有行列式为 1 的酉矩阵构成的群，其群元素可以一般的写为：

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

这意味着描述一个群元需要四个实参，且满足 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$，显然这意味着 $SU(2)$ 的拓扑结构为 $\mathcal{S}^3$。另外一个需要用到的概念是**群中心**，也就是与所有群元都对易的群元 [1]。不难看出 $SU(2)$ 的群中心构成子群 $\mathbb{Z}_2$：

[1] 注意与 *Casimir* 算符的区别

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem 2 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

Proof 首先考虑 2×2 无迹厄米矩阵构成的线性空间 $\mathbb{V}$，显然其中任意一个元素都可以写为 $X = x^i \sigma_i$，其中 σ_i 是三个 Pauli 矩阵，这实际上建立起了同构 $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^3$。$\mathfrak{su}(2)$ 李代数作为线性空间显然是与 $\mathbb{V}$ 同构的，而 $SU(2)$ 在李代数 [a] 上诱导出一个所谓伴随表示：

$$\mathcal{U}(U)X = UXU^\dagger = Ux^i\sigma_i U^\dagger \equiv f(U)^i_j x^j \sigma_i$$

容易验证这个表示是保范数 $\|x\|$ 的，那么 $f(U) \in O(3)$，也就是说我们建立了一个同态：

$$f: SU(2) \to O(3), U \mapsto f(U)$$

为了利用同态核定理，首先计算 $\mathrm{Im}(f)$。由于 f 是个连续映射，而且 $SU(2)$ 单连通 [b]，所以 $f(U)$ 也应当包含在 $O(3)$ 的单连通子群中，即 $\mathrm{Im}(f) \subseteq SO(3)$。反过来 $SO(3) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ 也成立，可以看作是 Euler 角和 Caylay-Klein 参数之间的对应，所以 $\mathrm{Im}(f) = SO(3)$

现在来计算 $\ker(f)$，$f(U) = \mathbb{I}_{3\times3}$ 说明 $\forall X \in \mathbb{V}$，都有 $UXU^\dagger = X$，也就是说要找的 U 与任意 X 对易，那么其也与任意的 e^{iX} 对易，然而 Lie Group = $\mathrm{e}^{\textbf{Lie Algebra}}$，所以 U 就是群中心的元素，所以 $\ker(f) \cong \mathbb{Z}_2$，根据同态核定理便有 $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$。 □

[a] 所谓代数，就是线性空间赋予一个封闭的乘法结构

[b] $\mathcal{S}^n$ 的基本群在 $n=1$ 时为自由群 $\mathbb{Z}$，其它时候都为平凡群

Remark 这其实说明了 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 群的双覆盖，$SO(3)$ 群对应流形是对径认同实心球 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \times [0,\pi]$，从流形上也能感受一下。最后我们显式给出这个同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & f \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \mathrm{Im}(a\bar{d} - b\bar{c}) & \mathrm{Re}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \mathrm{Im}(\bar{a}d + \bar{b}c) & \mathrm{Re}(a\bar{d} - b\bar{c}) & \mathrm{Im}(\bar{a}c - \bar{b}d) \\ \mathrm{Re}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \mathrm{Im}(a\bar{b} - c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2\right) \end{pmatrix}$$

上式直接从 $U, -U$ 对应同一个 $SO(3)$ 中元素也可看出双覆盖性。

Section 7

$SO(2,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

Lemma 1 (QR 分解) 任意复矩阵都可以分解为一个酉矩阵 Q 和一个上三角矩阵 R 的乘积，且 R 主对角元全为正数。如果这个矩阵是实矩阵，那么 Q 为正交矩阵。如矩阵可逆，则分解唯一。

Lemma 2 $SL(2,\mathbb{R})$ 的拓扑结构为 $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$，基本群为 $\mathbb{Z}$

Proof 根据 QR 分解，以及 $\det S = 1 \neq 0$，任意 $SL(2,\mathbb{R})$ 中的矩阵都可以唯一的分解为 $S = QR$，而且要求 $|Q| \cdot |R| = 1$，而 R 主对角元全为正数以及 $|Q| = \pm 1$ 实际上给出 $Q \in SO(3)$ 且 R 的对角线上元素有 $a \cdot b = 1$ 且为正数的限制，而另一个元素不做限制。这其实就是在对 $SL(2,\mathbb{R})$ 做直积分解，由于 $SO(2)$ 对应的流形为 $\mathcal{S}^1$，所以 $SL(2,\mathbb{R})$ 对应的流形为 $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$，后两者基本群平凡，所以 $SL(2,\mathbb{R})$ 对应的基本群为 $\mathbb{Z}$。[a] □

[a]这里用了乘积空间基本群为各自基本群的直积。

了解了 $SL(2)$ 的拓扑性质后就可以开始证明本节的核心结论。

Theorem 3 $SO(2,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

Proof 与上一节同样，我们先构造 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 李代数，其由二维实无迹矩阵构成，生成元为：

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张成的线性空间中任一元素可以表达为 $X = x^\mu t_\mu$，显然 $\det X = -\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x^2$，同样我们对 $S \in SL(2,\mathbb{C})$ 构造伴随表示 $X \mapsto SXS^{-1}$，其保事件间隔不变，所以诱导了一个同态：

$$f : SL(2,\mathbb{R}) \to O(2,1), S \mapsto f(S)$$

其中

$$S t_\mu x^\mu S^{-1} = t_\mu f(S)^\mu{}_\nu x^\nu, \forall x^\mu \in \mathbb{R}^3 \iff S t_\mu S^{-1} = t_\nu f(S)^\nu{}_\mu$$

根据 f 连续，从拓扑上得知 $\mathrm{Im}\, f \in SO(2,1)^{\uparrow}$，反过来，要论证任何 $\Lambda \in SO(2,1)^{\uparrow}$ 都可以用 $f(S)$ 表示，根据 $\Lambda = R_1 L(\chi) R_2$，我们只需要找到 $S_1, S_2, S(\chi)$ 使得

$$f(S_1) = R_1, f(S_1) = R_2, f(S(\chi)) = L(\chi)$$

不难验证前两个等式只需要选取

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \subseteq SL(2,\mathbb{R})$$

并合适选取 θ 参数即可，而后面一个只需选取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}$$

最后证明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ 的方法就和上一节一样了。 □

Remark 下面显式给出同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) & \frac{1}{2}\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right) & -ab-cd \\ \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right) & \frac{1}{2}\left(a^2-b^2-c^2-d^2\right) & -ab+cd \\ -ac-bd & bd-ac & ad+bc \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Section 8

$SO(3,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

这一节的证明与上一节非常类似，证明细节会适当省略。还是首先关注一下 $SL(2,\mathbb{C})SL(2,\mathbb{C})$ 的拓扑性质。

Lemma 3 $SL(2,\mathbb{C})$ 单连通

Proof 证明依旧是使用 QR 分解，现在 R 需要一个正实数和一个复数来描述，所以对应流形为 $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{C}$，基本群平凡。而 $Q \in SU(2)$ 对应流形为 $\mathcal{S}^3$，基本群也平凡，所以 $SL(2,\mathbb{C})$ 基本群平凡，即单连通。 □

下面证明本节核心定理：

Theorem 4 $SO(3,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

Proof 证明完全仿造上一节，只是 $t \to \tau$，$\tau_0 = \mathbb{I}_{2\times 2}$，$\tau_1 = -\sigma_1$[a],$\tau_2 = \sigma_2$，$\tau_3 = \sigma_3$。后面的证明也是用伴随表示诱导同态后计算 $\operatorname{Im} f$，这里根据 $SL(2,\mathbb{C}) \supseteq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$ 可以得到 $f(S) = R$，剩下的一个只用取：

$$S(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\chi}{2} & \sinh\frac{\chi}{2} \\ \sinh\frac{\chi}{2} & \cosh\frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

最后计算 $\ker f$ 也是同样的思路说明 $\ker f \cong \mathbb{Z}_2$ □

[a]这里符号约定上比一般定义多了个负号，是为了后文处理天球符号更自洽。

Remark 下面显式给出同态：

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right) & -\operatorname{Re}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2\right) \\ -\operatorname{Re}(\bar{a}c+\bar{b}d) & \operatorname{Re}(\bar{a}d+\bar{b}c) & -\operatorname{Im}(a\bar{d}-b\bar{c}) & -\operatorname{Re}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \operatorname{Im}(\bar{a}c+\bar{b}d) & -\operatorname{Im}(\bar{a}d+\bar{b}c) & \operatorname{Re}(a\bar{d}-b\bar{c}) & \operatorname{Im}(\bar{a}c-\bar{b}d) \\ \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\right) & -\operatorname{Re}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \operatorname{Im}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2\right) \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

下面给出两个例子：

Example z 轴旋转

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \pm\begin{pmatrix}e^{-i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix} \tag{8.2}$$

z 方向 boost

$$\begin{pmatrix}\cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi\end{pmatrix} \sim \pm\begin{pmatrix}e^{-\chi/2} & 0\\ 0 & e^{\chi/2}\end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Section 9

Higher dimensions

Definition 1 (赋范可除代数) 首先考虑 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$ 上的线性空间我们可以赋予乘法结构将其提升为代数，如果除了 0 元其它元素都有逆元，我们称为**可除代数**，进一步我们可以赋予范数，而且要求范数满足：

$$\|xy\| = \|x\|\,\|y\|\,, \forall x, y \in V$$

即**赋范可除代数**。

Theorem 5 (Hurwitz) 任何赋范可除代数都同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 中的一种。其中 $\mathbb{H}$ 是四元数，$\mathbb{O}$ 是八元数。

这是一个非常漂亮的结论，告诉我们为什么历史上发现复数之后寻找三元数必然是失败的，而哈密顿的四元数会成功。

不难猜测，对于更高维时空的 Lorentz 群，会对应四元数和八元数，实际上有：

$$SO(5,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2 \qquad SO(9,1)^{\uparrow} \cong SL(2,\mathbb{O})/\mathbb{Z}_2 \tag{9.1}$$

另外，八元数实际上构成的不是一个结合代数，所以 $SL(2,\mathbb{O})$ 的存在并非显然的，这里并不深入讨论。但是实际上这些同构关系式蕴含着很深刻的物理，暗示着最小超对称理论只能构建在 3，4，6，10 维时空中。更有意思的是，可除代数与超弦理论之间有着非常深刻的联系。[3, 4]

Interlude: Project representation

下面对 Lorentz 群表示的本身做更加细致的考量，主要是为了引进一些必要的数学概念，最终结论主要就是将一些讨论更加数学严格化，不用过分在意。本节讨论主要参照 Weinberg[1]。

对于一个对称群 G，在考虑量子力学关于这个群的对称性时我们其实是在考虑其表示对 Hilbert 空间的作用。群表示自然是个同态，所以我们想到去考虑：

$$U(T)U(\bar{T}) = U(T\cdot\bar{T}) \tag{9.2}$$

但是量子力学的希尔伯特空间实际上是一个射影空间，两个相差全局相位的量子态视作等价，所以我们实际上应该去考虑群的**射影表示**：

$$U(T)U(\bar{T}) = e^{i\phi(T,\bar{T})}U(T\cdot\bar{T}) \tag{9.3}$$

这里利用线性可以证明 $\phi(T,\bar{T})$ 与所作用的量子态本身无关，但前提条件是这两个量子态是可加的。比如具有半整数自旋和整数自旋的量子态就是不可加的，最多只能制备出这俩态的直积态。

但是射影表示用起来很麻烦，如果相位具有下面的特殊结构：

$$\phi(T,\bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})$$

那我们可以对群表示后的算符重定义：

$$\tilde{U}(T) = U(T)\exp\left(i\alpha(T)\right) \tag{9.4}$$

这样我们就可以继续考虑普通的表示而不是射影表示了。现在我们必须严格考虑一个群是否存在不能通过重定义消去的射影表示，我们称为**内禀射影表示**。

既然考虑的是李群，那我们可以把群元用 θ^a 参数化，并定义：

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T\left(f(\bar{\theta},\theta)\right)$$

根据 $f(0,\theta) = f(0,\theta) = \theta$，我们得到单位元附近群元表示的展开：

$$U\left(T(\theta)\right) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \mathcal{O}(\theta^3) \tag{9.5}$$

这里 t_a 就是常说的生成元，在这个符号约定下是厄米的，t_{ab} 关于指标对称，表示更高阶的项。另外 f 有展开：

$$f^a(\bar{\theta},\theta) = \theta^a + \theta^a + f^a{}_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \mathcal{O}(\theta^3) \tag{9.6}$$

类似地，因为 $\phi(T,1) = \phi(T,1) = 0$，我们有展开：

$$\phi\left(T(\theta),T(\bar{\theta})\right) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b \tag{9.7}$$

结合 9.5，9.6 和 9.7 我们得到：

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a - i f_{bc} \tag{9.8}$$

再根据 t_{bc} 的对称性有：

$$[t_b,t_c] = i\overbrace{\left(f^a{}_{cb} - f^a{}_{bc}\right)}^{\text{denoted by } C^a{}_{bc}} t_a + i\underbrace{\left(f_{cb} - f_{bc}\right)}_{\text{denoted by } C_{bc}}\cdot\mathbb{I} \tag{9.9}$$

在相位不为 0 时，生成元的对易关系之间多了一项 $iC_{bc}\cdots\mathbb{I}$，称为**中心荷**。根据 Jacobi 恒等式，中心荷要满足方程：

$$\begin{aligned} C^a{}_{bc}C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd}C^e{}_{ab} + C^a{}_{db}C^e{}_{ac} = 0 \\ C^a{}_{bc}C_{ad} + C^a{}_{cd}C_{ab} + C^a{}_{db}C_{ac} = 0 \end{aligned} \tag{9.10}$$

这是与李代数具体结构无关的约束，给出一类特解：

$$C_{ab} = C^e{}_{ab}\phi_e, \quad \phi_e \in \mathbb{R}$$

这类解到底存不存在要看李代数具体结构，但如果说李代数恰好是这样的解，那么我们可以通过重定义生成元：

$$\tilde{t}_a = t_a + \phi_a \Rightarrow [\tilde{t}_b,\tilde{t}_c] = iC^a{}_{bc}\tilde{t}_a \tag{9.11}$$

来消除中心荷。这引出了李群是否存在内禀射影表示的定理。

Theorem 6 如果李群满足下面两个条件：

- 可以类似 9.11 重定义生成元消去所有中心荷。
- 群的拓扑结构单连通。

那么我么总可以类似 9.4 一样令相位为。

证明比较复杂，我们重点看在 Poincaré 群上的应用，另外，这个定理告诉我们只有两种方式产生内禀投影表示，一种是代数的，一种是拓扑的。

Theorem 7 (V.Bargmann[5]) 半单 Lie 代数都可以通过重定义生成元消去中心荷

很幸运，齐次 Lorentz 群，也就是 $M_{\mu\nu}$ 张成的代数是半单的，但不幸的是 Poincaré 代数不是半单的，不过更加幸运的是中心荷依旧可以被消除。

前面我们说明 Lorentz 群的拓扑结构使用了 QR 分解，实际上，使用另一种稍微不同的分解方式——极分解——可以证明拓扑结构其实同胚于 $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^3 \times \mathbb{Z}_2$，Poincaré 群多出来的那一部分，也就是 $\mathbb{R}^4$ 是平凡的，重点在于 $\mathcal{S}^3 \times \mathbb{Z}_2$，这其实是个双连通结构。也就是说基本群为 $\mathbb{Z}_2$。直观但不严谨的说就是初始点固定，转两圈总共回到初始点两次的“双圈”可以连续收缩到一点，但是单圈被分成两种，一种能收缩到一点，另一种必须再重复自己以此才能收缩到一点。

这么来看 Lorentz 群必须得用射影表示，我们看一下这个射影表示的特点，核心在于双圈可以收缩到单位元，所以 $1 \to \Lambda \to \Lambda\bar{\Lambda} \to 1$ 的路径走两次等于单位元：

$$\left[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})\right]^2 = 1 \Rightarrow U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}) \tag{9.12}$$

这里的正负号完全可以解释成自旋！整数自旋取正号，半整数取负号。而完整的描述应该是这个射影表示加上所谓“超选择定则”。前面我们说过相位是不依赖于态的，但前提条件是这些态是可加的，所以我们可以认为整数和半整数自旋存在超选择定则，也就是说它们不可加，那么相位就依赖于作用的态的自旋，我们实验上也确实发现了这种不可加性。这就构成了整个 Lorentz 群的表示（同样的推理也可以扩张到 Poincaré 群，毕竟它们拓扑结构一致）。

但是这样还是比较繁琐，但是从数学上看似乎引进射影表示是必然的，那我们能否从物理上把超选择定则给去掉呢？其实，我们完全可以把大自然真正的对称群取为 $SL(2,\mathbb{C})$ 而不是 Lorentz 群 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}$，这个更大的对称群只有普通表示，射影表示里的正负号随着表示本身的不同就自然的冒出来了。就像是 $SU(2)$，看作是对 $SO(3)$ 对称性的扩张，奇数维表示是简并表示，会出现负号，而偶数维是忠实表示，就只留下正号了。当然这一做法有代价，那就是抛弃了超选择定则 [2]，这样不同自旋态的不可加性就不能从 Lorentz 不变性直接导出，但并不用担心这一点，毕竟实验上从未制备出这样的叠加态。

所以，对于任何对称群，如果存在中心荷，可以干脆扩张这个李代数，把与一切生成元都对易的生成元包含进来，这样就不存在中心荷了 [3]，但是同样也会丢弃超选择定则；如果李群不是单连通的，我们可以将其表示成 C/H，其中 C 单连通，称为 G 的通用覆盖群 [4]。然后把对称群取为 C 而不是 G，这样扩张群之后就可以不用担心射影表示问题，也不用引入超选择定则。

[2] 总之除了超选择定则，其它完全一样。

[3] 伽利略群就存在质量 M 这个中心荷，我们可以进行扩张，见 *A.Zee[6]*

[4] 类似的论述可以在 *[7]* 对应章节找到

PART III

Conformal transformations

SECTION 10

Pull back, push forward & Lie derivative

$C^\infty(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的光滑标量场
$\mathscr{X}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 上某点处的切矢空间，相应的 $\mathscr{X}^*(\mathcal{M})$ 表示余切丛空间
$\mathscr{T}_\mathcal{M}(k,l)$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的 (k,l) 型张量场

考虑光滑映射 $\phi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$，可以定义拉回映射为：

Definition 1 (pull back) $\phi^*:C^\infty(\mathcal{N})\to C^\infty(\mathcal{M}), f\mapsto\phi^*f$ 其中 $\phi^*f\equiv f\circ\phi$，也即 $(\phi^*f)|_p=f|_{\phi(p)}$，这个定义可以自然延拓到 $\phi^*:\mathscr{T}_\mathcal{N}(0,l)\to\mathscr{T}_\mathcal{M}(0,l)$，其中：

$$(\phi^*T)_{a_1\cdots a_l}|_p(v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l}\equiv T_{a_1\cdots a_l}|_{\phi(p)}(\phi_*v_1)^{a_1}\cdots(\phi_*v_l)^{a_l}$$

对于 $\forall p\in\mathcal{M},v_1,\ldots,v_l\in\mathscr{X}_p(\mathcal{M})$ 恒成立。

类似的可以定义推前映射概念：

Definition 2 (push forward) $\phi_*:\mathscr{X}_p(\mathcal{M})\to\mathscr{X}_{\phi(p)}(\mathcal{N}),X^a\mapsto(\phi_*X)^a$ 其中

$$\underbrace{(\phi_*X)}_{\text{at }\phi(p)}(f)=\underbrace{X}_{\text{at }p}(\phi^*f),\quad\forall f\in C^\infty(\mathcal{N})$$

同样也可以进行延拓 $\phi_*:\mathscr{T}_\mathcal{M}(k,0)\to\mathscr{T}_\mathcal{N}(k,0)$，其中

$$(\phi_*T)^{a_1\cdots a_k}|_q(w^1)_{a_1}\cdots(w^k)_{a_l}\equiv T^{a_1\cdots a_k}|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*w_1)_{a_1}\cdots(\phi^*v_l)_{a_l}$$

对于 $\forall q\in\mathcal{N},w_1,\ldots,w_l\in\mathscr{X}_p^*(\mathcal{N})$ 恒成立。

如果 ϕ 是一个微分同胚，那可以进一步延拓到 $\mathscr{T}_\mathcal{M}(k,0)\leftrightarrow\mathscr{T}_\mathcal{N}(k,0)$ 之间的推前和拉回映射。

Definition 3 以 $(1,1)$ 型张量的推前映射为例：

$$(\phi_*T)^a_b|_q w_a v^b\equiv T^a_b|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*w)_a(\phi^*v)^b$$

对于任意的 $q\in\mathcal{N},w_a\in\mathscr{X}_q^*(\mathcal{N}),v^b\in\mathscr{X}_q(\mathcal{N})$ 成立，其中 $(\phi^*v)^b$ 理解为 $(\phi_*^{-1}v)^b$。其它类型张量，以及拉回映射可类似定义，而且 $\phi^*=\phi_*^{-1}$

Remark 现在我们有必要澄清一下关于映射的主动和被动观点。首先注意到微分同胚 ϕ 其实很自然地定义了一个 $\mathcal{M}$ 坐标变换 $x\mapsto x'$，其中 x 是 $\mathcal{M}$ 上老坐标，y 是 $\mathcal{N}$ 上坐标，则：

$$x'(p)\equiv y(\phi(p))$$

反过来，坐标变换也可以确定一个微分同胚映射。这让我们可以用两种方法去看待这个微分同胚：

- **主动观点**：老老实实看作是 $p\in\mathcal{M}\mapsto\phi(p)\in\mathcal{N}$，然后在 $\mathcal{N}$ 上确定了一个新的张量场，由原先的张量场“认同”后得来，也就是 $T|p\mapsto\phi_*T|_{\phi(p)}$。

- **被动观点:** 还是在原先的 $\mathcal{M}$，点和张量也没有变换，而是现在在新的坐标系 $\{x^\mu\}$ 下考虑问题。

这两种观点是等价的，关键就在于下面的这个等式：

$$\underbrace{(\phi_*T)}_{\text{New tensor}}\overbrace{{}^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}^{\text{in Old coordinate }\{y^\mu\}}\underbrace{\Big|_{\phi(p)}}_{\text{at New point}} = \overbrace{T}^{\text{Old tensor}}\underbrace{{}'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}_{\text{in New coordinate }\{x'^\mu\}}\overbrace{\Big|_{p}}^{\text{at Old point}} \tag{10.1}$$

更多关于等价性的论述见梁灿彬 [8] 第四章相关内容，后面会直接作为结论直接进行引述。

Section 11

Killing & Conformal Killing vector field

下面我们考虑 $\mathcal{M}=\mathcal{N},\{x^\mu\}=\{y^\mu\}$。对于矢量场 ξ^a，其积分曲线诱导了一个微分同胚（点沿着积分曲线流动），在被动观点下看就是诱导了一个无穷小坐标变换 $x^\mu\mapsto x^\mu+\xi^\mu t$，其中 $t\to 0$，在主动观点下看就是诱导了流形上点的变换和张量的变换，但是坐标系仍然不变。首先给出对 ξ 方向的李导数的定义：

Definition 4 (李导数) 李导数 $\mathscr{L}_\xi$ 定义为

$$\mathscr{L}_\xi T^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_l}\equiv\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi_t^*T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}-T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\right)$$

可以利用下面的式子计算其在某一坐标系下分量：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\xi T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}=&\xi^\lambda\nabla_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}-T^{\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\nabla_\lambda\xi^{\mu_1}-\cdots-T^{\mu_1\cdots\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\nabla_\lambda\xi^{\mu_k}\\&+T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\lambda\cdots\nu_l}\nabla_{\nu_1}\xi^\lambda+\cdots+T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\lambda}\nabla_{\nu_l}\xi^\lambda\end{aligned}\tag{11.1}$$

比如度规的李导数：[1]

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu}=\nabla_\mu\xi_\nu+\nabla_\mu\xi_\nu \tag{11.2}$$

Definition 5 (Killing) 矢量场 ξ^a 诱导单参数微分同胚群 $\phi_t:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$，如果其诱导的度规变换满足：

$$\phi^*g_{ab}=\Omega^2 g_{ab},\quad \forall p\in\mathcal{M} \tag{11.3}$$

其中 $\Omega^2\in C^\infty(\mathcal{M})$ 且正定。我们就称向量场为**共形 Killing 向量场**，对应的微分同胚称为**共形映射（变换）**。从李导数的观点来看就是要求：

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu}=\omega(t)g_{\mu\nu} \tag{11.4}$$

其中 $\omega(t)\in C^\infty(\mathcal{M})$，有关系 $\Omega^2=1+\omega(t)t+\mathcal{O}(t^2)$。特殊的，如果 $\Omega^2=1$ 也即 $\omega(t)=0$，那我们就称 ξ^a 为 **Killing 向量场**，对应的微分同胚为**等度规映射**。

前面的 Lorentz 变换其实就是在找在 Minkowski 时空内由 Killing 场诱导的变换，这要求：

$$\mathscr{L}_\xi\eta_{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu+\nabla_\mu\xi_\nu=\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu=0$$

称为 **Killing 方程**。这与前面直接从坐标变换导出的式子是一致的 [2]。实际上，前面用坐标变换那一套就是在玩被动观点，可以证明，ξ^a 是（共形）Killing 场的充要条件是其生成的坐标变换使得：[3]

[1] 这里我们用到了度规平行移动的性质，$\forall X\in\mathscr{X}(\mathcal{M}),\nabla_X g=0$

[2] 前面的式子实际上是把无穷小因子 t 吸收进了 ξ 中

[3] 注意张量分量作为坐标的函数在何处取值，以及偏导数在何处取值，只要想清楚这些函数的自变量是什么、方程两边各自在哪个坐标系，以及方程作为张量等式都是在流形上同一点取值即可。

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}(x')\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}(x')g_{\sigma\rho}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \tag{11.5}$$

在场论中我们更多使用坐标变换的被动观点来看问题。这个等式的证明关键就是使用 10.1。

根据前面的论证，对于四维闵氏时空，Killing 方程共有 $10 = \frac{4\times(4+1)}{2}$ 个独立解，也就是说存在 10 个独立的 Killing 场。实际上可以证明，对于任意 n 维时空，其最多具有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立的 Killing 场，然而闵氏时空的 $Poincar$ 变换正好取到不等式上界。由于 Killing 场诱导的是等度规映射，所以也成为时空的对称性，根据上面的分析，平直闵氏时空具有最大的对称性。

Remark 在 GR 的语境下提到共形变换更多的其实是指 Weyl 变换，它的定义和共形变换很像，但是不等价。Weyl 变换的定义不需要微分同胚，或者说我们直接取同胚为 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，这样流形上的点、张量和坐标系都不变，但是我们直接把流形上的度规结构改变，变成：

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

还要求物理不变，这就是 Weyl invariant，定义与共形变换非常类似，但是不能混淆两者，两者之间的微妙区别会体现在弦论中共形反常的消去上。[9]

度规在流形上定义了长度 $\|v\| \equiv g(v,v)$，相应的可以定义角度为：

$$\cos\theta \equiv \frac{g(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

显然，共形变换是不改变两曲线交点处切矢之间角度的变换，也常被称为**保角变换**。

Section 12

Conformal transformations in $d > 2$

现在假设背景时空是平直时空 [1]，利用共形 Killing 方程，共形 Killing 场满足：

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = \omega(x)g_{\mu\nu} \tag{12.1}$$

式子两边同时取迹得到：

$$\omega(x) = \frac{2}{d}\partial^\mu\xi_\mu \tag{12.2}$$

12.1 两边同时微分 ∂_ρ 得到：

$$2\partial_\rho\partial_{\{\mu}\xi_{\nu\}} = \partial_\rho\omega g_{\mu\nu} \tag{12.3}$$

上式对三个指标进行轮换，每次轮换改变符号然后相加得到：

$$-\partial_\rho\omega g_{\mu\nu} + \partial_\mu\omega g_{\nu\mu} = 2\partial_\mu\partial\nu\xi_\rho \tag{12.4}$$

再次与 $g^{\mu\nu}$ 缩并得到：

$$\partial^u\partial_\mu\xi_\rho = \frac{2-d}{2}\partial_\rho\omega \tag{12.5}$$

12.1 作用上 $\partial^\rho\partial_\rho$，再由 12.5 得到：

$$\left[\partial^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} + (d-2)\partial_\mu\partial_\nu\right]\omega(x) \tag{12.6}$$

上式两边求迹得到：

$$(d-1)\partial^\mu\partial_\mu\omega(x) = 0 \tag{12.7}$$

[1] 后面的推导对于 Minkowski 时空和 Euclide 时空都适用

$d = 1$，上式恒成立，也就是说任意变换都是共形变换，这是由于一维无法定义角度导致的，$d \geq 2$ 时，满足拉普拉斯方程：

$$\Box^2 \omega(x) = 0 \tag{12.8}$$

$d > 2$ 则根据 12.6 还进一步要求：

$$\partial_\mu \partial_\nu \omega(x) = 0 \tag{12.9}$$

这说明 ω 形式上只能为：

$$\omega(x) = A + B_\mu x^\mu \tag{12.10}$$

代入 ref11.10 得到

$$\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \frac{1}{2}\left(-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}\right) \tag{12.11}$$

右边是常向量。因此， ξ_μ 是 x^μ 的二次函数，可展开成

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \tag{12.12}$$

这里， $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ 是常数， $c_{\mu\nu\rho}$ 关于后两指标对称： $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$。将上式代入 12.2 ，得到

$$\omega(x) = \frac{2}{d}\left(b^\mu{}_\mu + 2c^\mu{}_{\mu\rho} x^\rho\right) \tag{12.13}$$

因此， ω 的展开式 (1.30) 中的系数 A, B 同 b, c 的关系是

$$A = \frac{2}{d} b^\mu{}_\mu, \quad B_\mu = \frac{4}{d} c^\nu{}_{\nu\mu} \tag{12.14}$$

那么 A, B 由 a, b, c 确定了， (1.32) 代入 (1.31) 和 (1.18) ，可进一步限制 b, c 的形式。事实上，代入后得到

$$2c_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}\right) \tag{12.15}$$

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2\left(c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho}\right) x^\rho = \left(A + B_\rho x^\rho\right) g_{\mu\nu} \tag{12.16}$$

于是

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = A g_{\mu\nu} \tag{12.17}$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}\left(-B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} + B_\rho g_{\mu\nu}\right) \tag{12.18}$$

由此，知道共形因子后就可以写出共形变换。最终得到无穷小变换可分成以下几类：[4]

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Translation} & x'^\mu = x^\mu - a^\mu \\ \text{Rotation} & x'^\mu = x^\mu - b^{A\mu\nu} x_\nu, \quad b^{A\mu\nu} = -b^{A\nu\mu} \\ \text{Dilation} & x'^\mu = x^\mu - \dfrac{A}{2} x^\mu \\ \text{SCT} & x'^\mu = x^\mu - \dfrac{1}{4}\left(-B^\mu x^2 + 2x^\mu B^\nu x_\nu\right) \end{array}} \tag{12.19}$$

[4] *SCT: Special Conformal Transformation*

对应的无穷小变换的生成元可表示为

$$\boxed{\begin{aligned} &P_\mu = -i\partial_\mu \\ &M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right) \\ &D = -ix^\mu\partial_\mu \\ &K_\mu = -i\left(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu\right) \end{aligned}} \tag{12.20}$$

它们之间的对易关系为：

$$\boxed{\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\ &[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} = i\left(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right)] \\ &[D, P_\mu] = iP_\mu \\ &[D, K_\mu] = -iK_\mu \\ &[K_\mu, P_\nu] = 2i\left(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}\right) \\ &[K_\rho, M_{\mu\nu}] = i\left(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu\right) \\ &[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i\left(g_{\rho\mu}P_\nu - g_{\rho\nu}P_\mu\right) \end{aligned}} \tag{12.21}$$

可以看到其中一部分就是 Poincaré 代数 [5]，这也说明了等度规变换是共形变换的特殊情况。这个 Lie 代数称为 d **维共形代数**。

[5] $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 时为 *Euclide* 代数

重定义生成元 $J_{ab}(a, b = -1, 0, \cdots, d)$：

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \tag{12.22}$$

$$J_{-1\mu} = \frac{1}{2}\left(P_\mu - K_\mu\right) \tag{12.23}$$

$$J_{-10} = D \tag{12.24}$$

$$J_{0\mu} = \frac{1}{2}\left(P_\mu + K_\mu\right) \tag{12.25}$$

从共形代数的对易关系，可以得到 J_{ab} 满足对易关系

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i\left(g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}\right) \tag{12.26}$$

当共形变换是 Euclide 空间中的变换时， g_{ab} 是号差为 $(-, +, \cdots, +)$ 的 Minkowski 度规 [6]。也就是说 d 维（Euclide 空间）中的共形代数，同构于 Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(d+1, 1)$。

[6] 否则有两个负号

有限共形变换可有由无穷小共形变换的叠加构成，形式为：

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Translation} & x'^\mu = x^\mu - a^\mu \\ \text{Rotation(Boost)} & x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ \text{Dilation} & x'^\mu = \alpha x^\mu \\ \text{SCT} & x'^\mu = \dfrac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b\cdot x + b^2x^2} \end{array}} \tag{12.27}$$

其中最后一个变换是由平移和反演变换的组合得到的：

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \to x''^\mu = x'^\mu - b^\mu \to x'''^\mu = \frac{x''^\mu}{x''^2} \tag{12.28}$$

而反演变换是离散的，所以 SCT 并不能用无穷小变换生成。根据前面的讨论，这些变化构成 $SO(d+1, 1)$ 群。

Section 13
Conformal transformations in $d=2$

上一节利用李导数看待问题，也就是所谓主动观点，现在用坐标变换的观点来进行推演。

在二维情况下，使用复数作为参数非常方便，定义复变量：[7]

$$z = x^1 + ix^2, \quad \partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

[7] 导数这样定义是为了 $\partial_z z = \partial_{\bar{z}}\bar{z} = 1$

Euclide 空间中度规可以写成：

$$g_z = dzd\bar{z} \tag{13.1}$$

现在考虑坐标变换 $z \mapsto z'(z,\bar{z})$，度规相应变为：

$$\begin{aligned} g_z \mapsto g'_z &= dz'd\bar{z}' \\ &= \left(\frac{\partial z'}{\partial z}dz + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\ &= \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}dz^2 + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}dz'^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)dzd\bar{z} \end{aligned} \tag{13.2}$$

这导致了下面的 Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{13.3}$$

而且前面的推导只要求度规形式为 $\Omega(z,\bar{z})dzd\bar{z}$。也就是说，变换 z' 为全纯[8]或者反全纯函数，而反全纯函数会将右手系变为左手系，后面主要考虑全纯情况，反全纯情况只需要全部取复共轭即可。

[8] 数学人叫法，物理人喜欢称为解析函数

考虑局部的无穷小共形变换，变换形式可以写成：

$$z \mapsto z + \xi(z), \quad \bar{z} \mapsto \bar{z} + \bar{\xi}(\bar{z})$$

其中 ξ 可以进行 Laurent 展开为：

$$\xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n z^{n+1}, \quad \bar{\xi}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\xi}_n \bar{z}^{n+1}$$

对应于 $\xi_n, \bar{\xi}_n$ 的生成元为 $L_n, \bar{L}_n$，显然这些生成元的个数是无限个！生成了一个无限维李代数 Witt 代数 [9]：

[9] 严格来说是两个 *Witt* 代数的直积

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \tag{13.4}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n}, \quad [L_n, \bar{L}_m] = 0 \tag{13.5}$$

二维共形场论在局域变换下具有无穷多的对称性！但是全局的共形变换要求 $z'(z)$ 没有极点且只有一个非简并零点（否则变换不是单的），这限制了 $z'(z)$ 的形式为：

$$z'(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \tag{13.6}$$

这里 $a \neq 0$ 是为了让 $z \mapsto z'$ 为 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的满映射。

Subsection 13.1
Embedding formalism

$\mathbb{R}^d$ 上的共形变换 [10]和 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的 Lorentz 变换有很直观的几何对应 [10, 11]。首先注意到由于 Lorentz 变换保 ds^2，所以对于顶点在原点处的光锥，Lorentz 变换是在光锥上的同胚。那我们可以把光锥看作是嵌入 [11]在 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 中的子流形，这实际上是将 $\mathbb{R}^d$ 通过下面的方式嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 中：

$$q^\mu = (1+x^2, 2x^A, 1-x^2), \quad x^A \in \mathbb{R}^d \tag{13.7}$$

这样，Lorentz 变换作用在光锥上可以看作是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个变换：

$$q^\mu \mapsto q'^\mu = \frac{(\Lambda q)^\mu}{(\Lambda q)^+} \tag{13.8}$$

其中分母是为了将 $q^+ \equiv \frac{1}{2}\left(q^0 + q^{d+1}\right) = 1$ 归一化，所谓嵌入到光锥的**正则部分（canonical section）**。而且，可以验证这个变换是 $\mathbb{R}^d$ 上的全局共形变换！特别地，当 $d=2$ 时，定义 $w = x^1 + ix^2$，这个同构变成：

$$q^\mu(w,\bar{w}) = (1+w\bar{w}, w+\bar{w}, i(\bar{w}-w), 1-w\bar{w}) \tag{13.9}$$

利用 8.1，可以得到：

$$(\Lambda q)^+ = \left|\frac{\partial z'}{\partial z}\right|^{-\frac{1}{2}} \left|\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

任意类光矢量可以参数化为：[12]

$$k^\mu(w,\bar{w}) \equiv \omega q^\mu = k^0 \hat{q}^\mu = \frac{k^0}{1+w\bar{w}}(1+w\bar{w}, w+\bar{w}, i(\bar{w}-w), 1-w\bar{w}) \tag{13.10}$$

[10] $d=2$ 时取全局共形变换

[11] *Embedding formalism*

[12] 后面会 ω_k,k^0 混用，但是不要与 ω 弄混

SECTION 14

Conformal transformations on the Riemann sphere

本节的关键在于下面的式子：

$$\mathcal{S}^2 \cong \mathbb{C} \cup \{z=\infty\} \tag{14.1}$$

这实际上是在对复平面进行**一点紧化**，导致的球面我们称为 Riemann 球面，这个同胚可以利用球极投影显式构造出来：

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1', x_2', 0) : \begin{cases} x_1' = \frac{rx_1}{r+x_3} \\ x_2' = \frac{rx_2}{r+x_3} \end{cases} \tag{14.2}$$

利用复坐标可以写为：

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto z \equiv \frac{x_1' + ix_2'}{r} = \frac{x_1+ix_2}{r+x_3} \iff z = \mathrm{e}^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2} \tag{14.3}$$

这里我们是按照南极为极点进行投影，投影到赤道平面，以北极为投影点只需要把上式中的 $r+x_3$ 替换为 $r-x_3$。更一般的，我们还可以给出高维的球极投影：

$$\mathcal{S}^{n+1} \cong \mathbb{E}^n \cup \{\infty\} \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n,0) \mapsto \frac{(2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n, |x|^2-1)}{|x|^2+1} \tag{14.4}$$

将 $\mathcal{S}^2$ 作为 $\mathbb{R}^3$ 的子流形，不难在复坐标下写出对应度规为：

$$g_z = \frac{4r^2}{(1+z\bar{z})^2} dz d\bar{z} \tag{14.5}$$

根据之前的分析，$\mathcal{S}^2$ 上的共形变换由全纯或反全纯函数诱导，后者将左右手系互换。复平面一点紧化为球面之后，全局共形变换函数必然有一个极点，负责映射到 $\{\infty\}$，所以 [13]

$$z'(z) = \frac{\text{Poly}(z)}{\text{Poly}(z)}$$

依旧根据变换的单射性质，要求分子分母都必须只能线性依赖于 z，而且由于满性，分子分母零点不能相同，所以这要求全局共形变换形式只能为：

$$z'(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \tag{14.6}$$

注意到这里对行列式进行了归一化选取。一般谈及二维共形变换我们都是在加入无穷远点后进行讨论，在数学上这种变换称为 **Möbius 变换**。由于整体相差一个负号代表的是同一个变换，所以变换群为 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$，将反全纯部分一并考虑进来后扩充为 $SL(2,\mathbb{C})$。

Witt 代数中 $n = \{-1, 0, 1\}$ 的部分张成了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 子代数 [14]，也就是那些全局共形变换的生成元。它们实际上与 Lorentz 群生成元可以直接由下式联系：

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}\left(J_3 - iK_3\right), \quad L_{-1} = \frac{1}{2}\left(-J_1 + iJ_2 + iK_1 + K_2\right), \quad L_1 = \frac{1}{2}\left(J_1 + iJ_2 - iK_1 + K_2\right), \\ L_0 &= \frac{1}{2}\left(-J_3 - iK_3\right), \quad L_{-1} = \frac{1}{2}\left(J_1 + iJ_2 + iK_1 - K_2\right), \quad L_1 = \frac{1}{2}\left(-J_1 + iJ_2 - iK_1 - K_2\right). \end{aligned} \tag{14.7}$$

其中

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K_i = M_{i0}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

[13] 下面只对全纯进行讨论，反全纯只需取复共轭

[14] 非常巧，整数域的非平凡子域也就是它

PART

IV

Celestial Sphere & Asymptotic Flat Spacetime

Section 15

Carter-Penrose diagram

Minkowski 时空的度规在球坐标系下可以写为：

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \overbrace{\boxed{\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)}}^{d{\Omega_2}^2} \tag{15.1}$$

定义 retarded 和 advanced 坐标为：

$$u \equiv t - r, \quad v \equiv t + r \tag{15.2}$$

这个坐标系下度规重写为：

$$ds^2 = -dudv + \frac{(u-v)^2}{4} d{\Omega_2}^2, \quad -\infty < u \leq v < +\infty \tag{15.3}$$

由于时空具有球对称性，所以考虑忽视角向，只考虑径向，那么时空图 t-r 上每一个点代表一个球面，径向光线意味着 u 或 v 是常数。时空的无限远有不同的趋向方式，这也导致了不同的无穷远定义：

i^+ ：类时未来无穷远，r 一定，$t \to +\infty$；

i^- ：类时过去无穷远，r 一定，$t \to -\infty$；

i^0 ：类空无穷远，t 一定，$r \to +\infty$；

$\mathcal{I}^+$ ：类光未来无穷远，u 一定，$r \to +\infty$；

$\mathcal{I}^-$ ：类光过去无穷远，v 一定，$r \to +\infty$；

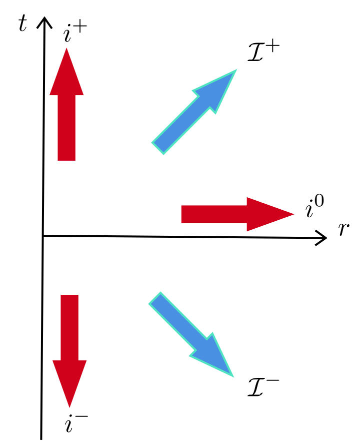


图 1. 共形无穷远定义

这五个无穷远合称为**共形无穷远**。

但是无穷远还是一个靠想象的概念，无法在这样的图中表现出来，继续考虑坐标变换，变到所谓光锥坐标：

$$U \equiv \arctan u, \quad V \equiv \arctan v \tag{15.4}$$

度规在光锥坐标下变为：

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2 U \cos^2 V} \cdot \left(-4dUdV + \sin^2(V-U) d{\Omega_2}^2\right), \quad -\frac{\pi}{2} < U \leq V < \frac{\pi}{2} \tag{15.5}$$

现在我们牺牲对距离的精确描述，考虑 Weyl 变换之后，丢掉共形因子后的度规：

$$\tilde{ds}^2 = -4dUdV + \sin^2(V-U) d{\Omega_2}^2 \tag{15.6}$$

这样消去了在 $\pm\frac{\pi}{2}$ 处的坐标奇性，我们称之为**共形紧化**。可以证明 [12]，两个相差共形变换的度规具有如下性质：

1. 由于 $\tilde{ds}^2 \iff ds^2=0$，所以光锥不变，即时空因果结构不发生改变；
2. 向量场的类时、类空和类光性质不变；
3. 类时和类空曲线还是类时或者类空的，但是类时或者类空测地线不一定仍是测地线，但是类光测地线依然是类光测地线。

从这个意义上看，如果我们只关注时空的因果结构，完全可以考虑共形紧化之后的度规，重点是共形紧化后坐标变成有限区间内取值，这使得我们有希望在时空图上表现出共形无限远。继续对 15.6 做变换：

$$T=U+V,\quad R=U-V \quad \overset{\text{overall}}{\Longrightarrow} \quad t\pm r=\tan\frac{1}{2}(T\pm R) \tag{15.7}$$

度规变为：

$$\tilde{ds}^2=-dT^2+dR^2+\sin^2 R d\Omega_2{}^2,\quad |T|+R<\pi, 0\le R<\pi \tag{15.8}$$

最后一项角向不用在意 [1]，现在整个时空图是一个有限大小的图，其上面的每一点表示一个球面（除了 i^0），而且共形无限远以边界的形式表现出来：

[1] 坐标变换的时候我们只是把 r,t 进行变换，没有将他们与角向坐标混合

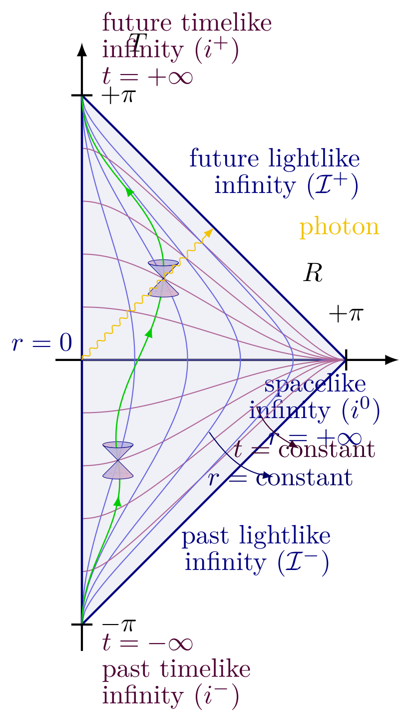


图 2. Minkowski 时空彭罗斯图

这种类光测地线都是 45° 斜线，而且能表示共形无限远的图称为彭罗斯图。这个图还有另一种更常用的画法，其实是比上面的形式多出一个维度，用图上左右部分两个点表示一个球 $\mathcal{S}^2$，表示球上的一对对径点。原先在上图中只能画成折线的测地线现在可以展开画为曲线：

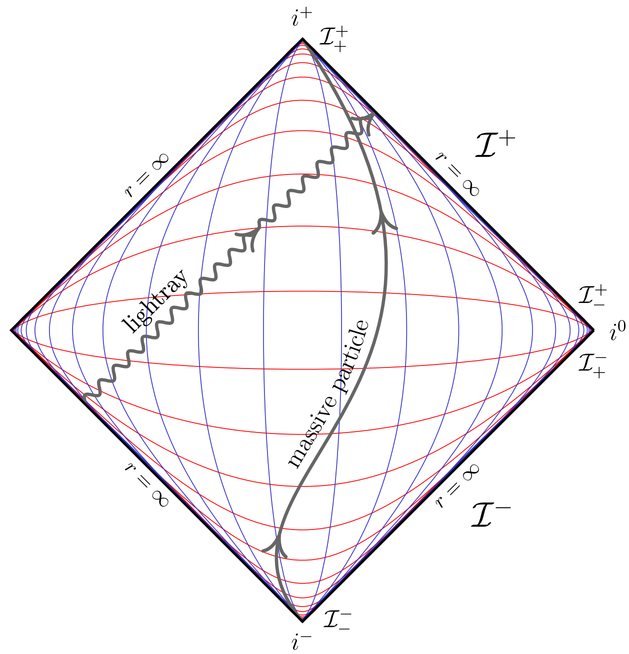


图 3. Minkowski 时空彭罗斯图的另一种形式

注意前面的几个 Penrose 图都特别对 $i^+, \mathcal{I}^+_+; i^-, \mathcal{I}^-_-$ 以及 $i^0, \mathcal{I}^-_+, \mathcal{I}^+_-$ 后面我们将会看到，场在这几个点上其实是多值的，或者说极限与趋近方向有关，所以必须进行区分，这几个点并不是一个点，即使是极限的意义下也不是！

在我们考虑的散射过程中，有质量粒子总是从 i^- 出发，通过类时测地线最终抵达 i^+，而无质量粒子总是从 $\mathcal{I}_-$ 出发走 $45°$ 斜线到达 $\mathcal{I}_+$。

Section 16

Celestial Sphere

如图 4 所示，$\mathcal{I}^\pm$ 上的每一个点代表一个球面 [2]，我们称之为天球 $C\mathcal{S}^2$，在 SR 的语境下，天球一般指观察者所看到的无限远区域，所以特指 $\mathcal{I}^-$ 上的天球。

在类光无穷远处可以选取 Bondi 坐标来参数化天球，在 $\mathcal{I}^+$ 上我们选取 $(u, r, z, \bar{z})$，其中 $r \to \infty$，$(z, \bar{z})$ 是球极投影到复平面来表示天球的角向坐标，这套坐标与 $\{x^\mu\}$ 之间的关系为：

$$x^\mu = \left(u + r, r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, ir\frac{\bar{z}-z}{1+z\bar{z}}, r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) \tag{16.1}$$

在 $\mathcal{I}^-$ 上我们选取 $(v, r, z, \bar{z})$，其中 $r \to \infty$，注意现在角向坐标和 $\mathcal{I}^+$ 上的选取是对径认同的关系，也就是说 $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$：

$$x^\mu = \left(v - r, -r\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, -ir\frac{\bar{z}-z}{1+z\bar{z}}, -r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) \tag{16.2}$$

从上面的式子也可看出 $\mathcal{I}^\pm$ 上两套坐标空间部分的关系的确为空间反演，在图 4 中我们也通过 • 和 × 标记出来了。

现在考虑 Lorentz 变换对天球的作用，也就是要考虑 Lorentz 变换下 Bondi 坐标在 $r \to \infty$ 怎么变。我们以 $\mathcal{I}^+$ 上的天球为例，首先考虑 r 的变化。思路就是根据 $r = \sqrt{x^i x_i}$，$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 以及 $SO(3,1)^\uparrow \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ 导致的 8.1 进行计算，并取 $r \to \infty$ 的极限，经过冗长的计算后得到 [3]：

[2] 在这个图上是左右两边各一个点组成的对径点连成的圆周表示一个球面

[3] 本节的详细计算参考 [13]

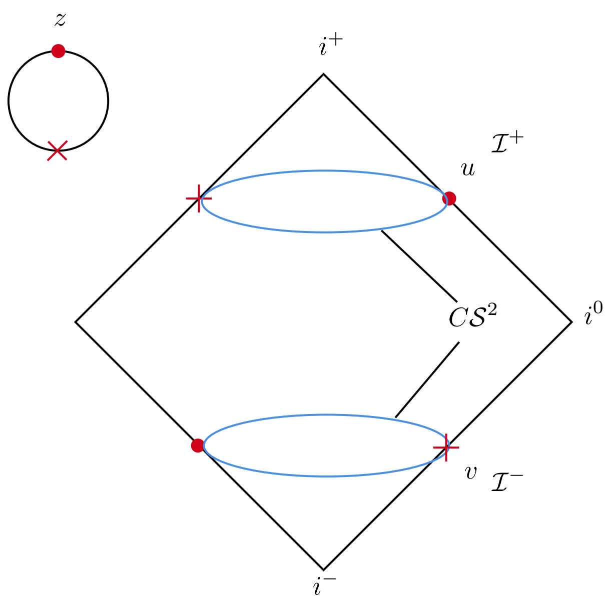


图 4. Bondi 坐标与天球

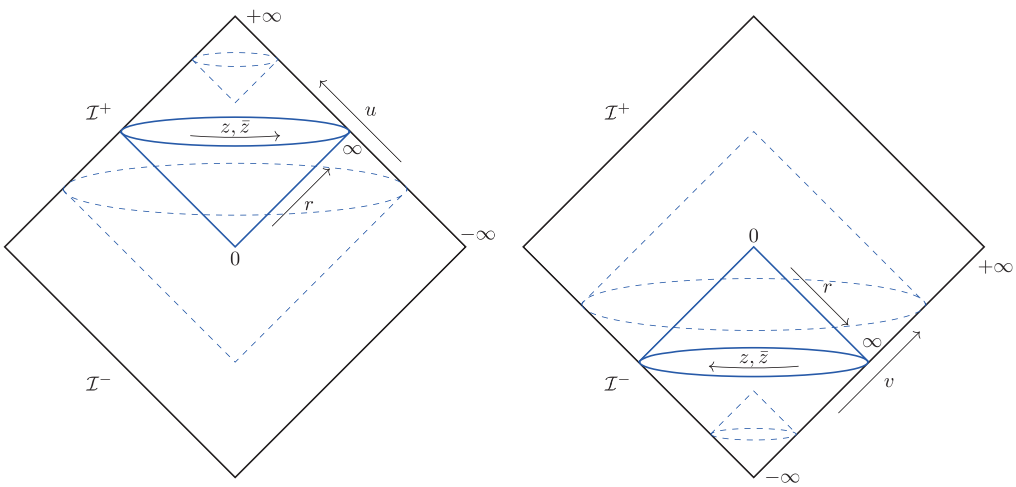


图 5. Bondi 坐标

$$r' = r \cdot \frac{|az+b|^2 + |cz+d|^2}{1+z\bar{z}} + \mathcal{O}(1) \equiv r \cdot F(z,\bar{z}) + \mathcal{O}(1) \tag{16.3}$$

所以 Lorentz 变换下确实会把 $r = \infty \mapsto r = \infty$。$u$ 的变换计算相对简单，注意到

$$t^2 - r^2 = u^2 + 2ur$$

式子左边是个 Lorentz 不变量，现在考虑的是某个固定 u 时的天球变换，所以 $r \to \infty$ 后说明 $2ur$ 是个 Lorentz 标量，代入 r 变换关系得到：

$$u' = \frac{u}{F(z,\bar{z})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{16.4}$$

注意，这里说明在一般的 Lorentz 变换后天球并非还是天球，因为 u 的变换依赖于角向

坐标。如果现在只关心天球的角向坐标怎么变，不关心变换后每个点是属于哪一“时刻”的天球，计算后发现：

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{16.5}$$

也就是说天球角向的变换就是 $C\mathcal{S}^2$ 上的全局共形变换！但是写出这个形式我们利用了 8.1，这也就是前面为何要取 $\tau_1 = -\sigma_1$ 原因，本质上就是为了让这列公式形式更加漂亮，选取 σ_1 也不影响变换还是一个全局共形变换。天球在 Lorentz 变换下的变换可以用下图总结 [4]：

[4] 不少精美的插图都是直接取自 [14]

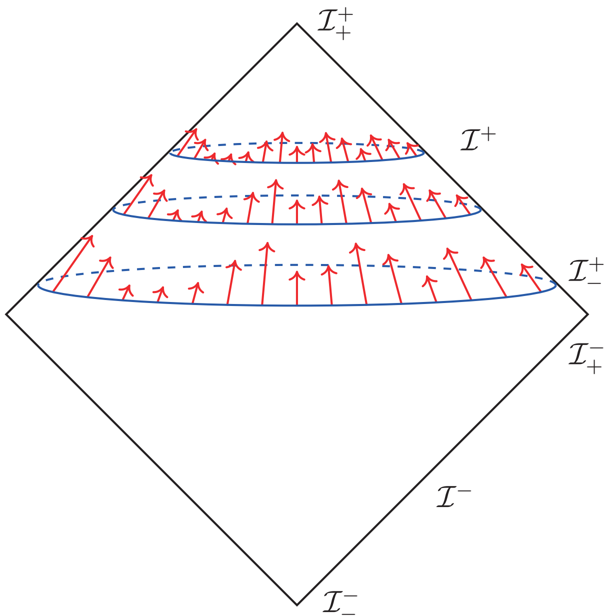


图 6. 天球上的 Lorentz 变换

Section 17

Asymptotic flat spacetime: basic concepts

所谓渐近平直时空简单点说就是在共形无限远处与 Minkowski 时空一致，渐近效应足够小允许存在引力波等解，但又要足够大能够排除无穷大能量这些非物理解。这一要求实际上可以用严格的与坐标无关的流形语言来描述 [15]。这里考虑使用某一特定坐标系——Bondi 坐标——的语言来进行阐述 [14, 16]，由于 $\mathcal{I}^\pm$ 的处理方法类似，所以重点考虑于 $\mathcal{I}^+$。

由于广义相对论是一个与坐标无关的理论，即理论本身具有微分同胚不变性，这是理论本身的冗余自由度，我们这里实际上是在对理论选取一个特定规范后进行描述。Bondi 规范是最早也最自然的提法，当然也有其它规范选取 [17, 18]。对于某个固定的 $u(x^\mu)$，在时空上决定了一个超曲面，其上法矢为 $n^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu u$，第一个规范条件是要求这个超曲面类光 [5]，也就是说 $n^\mu n_\mu = 0 \Rightarrow g^{uu} = 0$；再定义 $x^A, A = \{1,2\}$ 为角向坐标，与超曲面法矢相正交，即 $\nabla_n x^A = n^\mu \partial_\mu x^A = 0 \Rightarrow g^{uA} = 0$；最后一个要求是 r 取为 **luminosity distance**，这要求 $\partial_r \det\left(g_{AB}/r^2\right) = 0$。则 $x^\mu = (u, r, x^A)$ 构成 Bondi 规范，上面的条件也等价于：

[5] 关于超曲面的严格定义以及相关概念可参考 [8]

$$g_{rr} = g_{rA} = 0, \quad \partial_r \det \frac{g_{AB}}{r^2} = 0 \tag{17.1}$$

在这个规范下，最一般的度规可以写作：[6]

[6] 后面若无特殊说明，对角向指标 A, B 求和

$$ds^2 = g_{uu}du^2 + 2g_{ur}dudr + 2g_{uA}dudx^A + g_{AB}dx^Adx^B \tag{17.2}$$

对于 Minkowski 时空，Bondi guage 就是选取 retarded coordinate，$u = t - r$，度规形式为：

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^Adx^B \tag{17.3}$$

渐近平直即要求 $r \to \infty$ 时，时空度规与上面一致。Bondi 等人计算后对渐近平直时空的度规在 $r \to \infty$ 的渐近行为给予了如下限制 [19, 20]：

$$\begin{aligned} ds^2 =& -du^2 - 2dudr + r^2\gamma_{AB}dx^Adx^B \\ &+ \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{AB}dx^Adx^B + D^BC_{AB}dudx^A \\ &+ \frac{1}{16r^2}C_{AB}C^{AB}dudr + \frac{1}{r}\left[\frac{4}{3}\left(N_A + u\partial_A m_B\right) - \frac{1}{8}\partial_A\left(C_{BC}C^{BC}\right)\right]dudx^A \\ &+ \frac{1}{4}\gamma_{AB}C_{CD}C^{CD}dx^Adx^B + \cdots \end{aligned} \tag{17.4}$$

其中 $\gamma^{AB}C_{AB} = 0, C_{AB} = C_{BA}$，角向指标使用 γ^{AB} 进行升降，而 D^A 是与单位球面上度规 γ^{AB} 适配的协变导数 [2]。这里特别注意 u, r 并不是 Minkowski 中的 retarded coordinates！只是在 $r \to \infty$ 时 $u \approx \tilde{t} - \tilde{r}$[7]。同时还要求物质能动张量满足：

$$\begin{aligned} &T^M_{uu} \sim \mathcal{O}(r^{-2}), && T^M_{ur} \sim \mathcal{O}(r^{-4}), && T^M_{rr} \sim \mathcal{O}(r^{-4}) \\ &T^M_{uA} \sim \mathcal{O}(r^{-2}), && T^M_{rA} \sim \mathcal{O}(r^{-3}), && T^M_{AB} \sim \mathcal{O}(r^{-1}) \end{aligned}$$

而且由于是在 $\mathcal{I}^+$ 上考虑问题，所以这些能动张量都来源于无质量粒子。

17.4 引进的这些参数都是有具体的物理意义的：

- m_B：**Bondi mass aspect**，物理意义是在 $\mathcal{I}^+$ 的 u 处天球上观察得到的时空的能量角密度分布。**Bondi mass** 可以通过积分 $M(u) = \oint_{\mathcal{S}^2_\infty} \mathrm{d}^2\Omega m_B(u, x^A)$ 给出，$u \to -\infty$ 时，Bondi mass 等于 ADM 能量。
- C_{AB}：这个量根据无迹对称约束，会给出两种极化模式（或者说引力子的两个螺旋度取值），它完全确定了 $\mathcal{I}^+$ 上的引力波辐射，根据他可以定义 **Bondi news tensor** $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$，这个量可以和电磁 Fraday 张量 $F_{uz} = \partial_u A_z$[8]类比，它的平方正比于 $\mathcal{I}^+$ 上的能流。
- N_A：**angular momentum aspect**，这是相对于 $r = 0$ 这一点的角动量角密度分布，对他在 $\mathcal{S}^2_\infty$ 上积分得到在 $\mathcal{I}^+$ 的 u 处天球上观察得到的时空的总角动量。

现在我们选取角向坐标为 $x^A = (z, \bar{z})$ 来简化讨论，更一般的讨论见 [16]。这导致 γ_{AB} 对角项为 0，由 C_{AB} 的无迹对称性质有 $C_{zz}C^{zz} = C_{\bar{z}\bar{z}}C^{\bar{z}\bar{z}}$，实际上这个条件可以强化为 $(C_{zz})^* = C_{\bar{z}\bar{z}}$。在这样的角向坐标选取下，17.4 简化为 [9]：

$$\begin{aligned} ds^2 =& -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &+ \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + D^zC_{zz}dudz + D^{\bar{z}}C_{\bar{z}\bar{z}}dud\bar{z} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{4}{3}\left(N_z + u\partial_z m_B\right) - \frac{1}{4}\partial_z\left(C_{zz}C^{zz}\right)\right]dudz + c.c. + \cdots \end{aligned} \tag{17.5}$$

[7] 这里的 $\tilde{t}, \tilde{r}$ 是指 *Minkowski* 时空中的通常四维坐标，也就是使得度规为 $\eta_{\mu\nu}$ 的坐标

[8] 后面章节将会看到为何是这个形式

[9] 注意到这里忽略了 $r^{-2}dudr$ 贡献，而且相比于 $r^2dzd\bar{z}$ 忽略了 *17.4* 最后一项 $\mathcal{O}(1)$ 的贡献

[2] 对于任何一个流形，给定度规后都唯一存在一个无挠的联络 ∇ 使得 $\nabla_X g = 0, \forall X \in \mathscr{X}(\mathcal{M})$，称为 Levi-Civita 联络，对应的 Clifford 符号 $\nabla_{e_\mu}e_\nu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}e_\lambda$ 由下式给出：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

这里 $\Gamma^z_{zz} = -\frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} = {\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}}}^*$，其它都是 0。

其中 C_zz, N_z, m_B 按照 17.4 类似定义，而且只与 $(u,z,\bar{z})$ 有关，与 r 无关。所以渐近平直时空的度规渐近式（在 Bondi gauge 下）可以概括为：

$$\begin{aligned} &g_{uu}=-1+\mathcal{O}(r^{-1}), && g_{ur}=-1+\mathcal{O}(r^{-2}), && g_{uz}=\mathcal{O}(1) \\ &g_{zz}=\mathcal{O}(1), && g_{z\bar{z}}=r^2\gamma_{z\bar{z}}+\mathcal{O}(1), && g_{rr}=g_{rz}=0 \end{aligned}$$

在不少文献中 [21–23] 也经常见到 17.5 的另一种等价写法 [10]：

$$\begin{aligned} ds^2=&-du^2-2dudr+2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &+\frac{2m_B}{r}du^2+rC_{zz}dz^2+rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2+2g_{uz}dudz+2g_{u\bar{z}}dud\bar{z}+\cdots \end{aligned} \tag{17.6}$$

[10] 等价性并不显然，实际上，说他们等价，并不是说可以直接通过 *17.5* 得到 *17.6*，而是 *17.6* 形势下参量由场方程诱导的 N_z 的约束条件的形式会与 *17.5* 中的不同，他们的等价性隐藏在约束条件之中了。

其中：

$$g_{uz}=\frac{1}{2}D^zC_{zz}+\frac{1}{6r}C_{zz}D_zC^{zz}+\frac{2}{3r}N_z+\mathcal{O}(r^{-2}) \tag{17.7}$$

不过这些对度规的限制都只是纯粹的几何意义上的，度规还必须是爱因斯坦场方程的解 [11]：

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi GT^M_{\mu\nu} \tag{17.8}$$

[11] 不少文献直接选取单位为 $c=\hbar=8\pi G=1$，但是这样做实际上消去了所有量纲，无法再使用量纲分析这一工具 *[24]*。

Remark 这里我们讨论一下前面对度规的约束为何是纯几何的，以 17.5 为例，我们计算 $dudz$ 这一项的系数，我们先暂且设为 U_z，根据 Weyl 张量（在 Weyl 变换下不变）的定义：

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}=R_{\mu\nu\rho\sigma}+\frac{1}{2}\left(g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu}+g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu}-g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}-g_{\mu\rho}R_{\sigma\nu}\right)+\frac{1}{6}R\left(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}-g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}\right) \tag{17.9}$$

我们感兴趣的是下面两个分量：

$$C_{rzzrz}=R_{rzrz}-\frac{1}{2}g_{zz}R_{rr},\quad C_{rurz}=R_{rurz}+\frac{1}{2}(g_{ur}R_{rz}-g_{uz}R_{rr}) \tag{17.10}$$

代入 ds^2 一通计算猛如虎：

$$C_{rzzrz}=\mathcal{O}(r^{-3}),\quad C_{rurz}=-\frac{1}{4r^2}\left(U_z-D^zC_{zz}\right)+\mathcal{O}(r^{-3}) \tag{17.11}$$

显然，为了满足渐近平直性，要求 $U_z=D^zC_{zz}$，推导过程中我们完全没有使用场方程。

使用 17.6 的约定，利用场方程代入度规进行计算，逐项比较得到三个量满足的约束条件为：

$$\begin{aligned} \partial_u m_B=&\frac{1}{4}D_z^2N^{zz}+\frac{1}{4}D_{\bar{z}}^2N^{\bar{z}\bar{z}}-\frac{1}{2}T^M_{uu}-\frac{1}{4}N_{zz}N^{zz} \\ \partial_u N_z=&-\frac{1}{4}\left(D_zD_{\bar{z}}^2C^{\bar{z}\bar{z}}-D_z^3C^{zz}\right)-T^M_{uz}+\partial_z m_B+\frac{1}{16}D_z\partial_u(C_{zz}C^{zz}) \\ &-\frac{1}{4}N^{zz}D_zC_{zz}-\frac{1}{4}N_{zz}D_zC^{zz}-\frac{1}{4}D_z\left(C^{zz}N_{zz}-N^{zz}C_{zz}\right) \end{aligned} \tag{17.12}$$

其中

$$T_{\mu\nu}(u,z,\bar{z})=8\pi G\lim_{r\to\infty}r^2T^M_{\mu\nu}(u,z,\bar{z}) \tag{17.13}$$

对 $\mathcal{I}^-$ 可以类似分析，这里仅罗列结果 [12]：

$$\begin{aligned} ds^2=&-dv^2+2dvdr+2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &+\frac{2m_B^-}{r}dv^2+rD_{zz}dz^2+rD_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2+2g_{vz}dvdz+2g_{v\bar{z}}dvd\bar{z}+\cdots \end{aligned} \tag{17.14}$$

[12] 这里 $r\to\infty, v\approx t+r$，角向坐标与 $\mathcal{I}^+$ 上的对径认同

其中 [13]

$$g_{vz} = -\frac{1}{2}D^z D_{zz} - \frac{1}{6r}D_{zz}D_z D^{zz} - \frac{2}{3r}N_z^- + \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{17.15}$$

[13] 这里 D^{AB} 相当于前面的 C^{AB}，不要与协变导数弄混！

类似的可以定义 News tensor：

$$M_{zz} \equiv \partial_v D_{zz} \tag{17.16}$$

约束条件为：

$$\begin{aligned}
\partial_u m_B^- =& \frac{1}{4}D_z^2 M^{zz} + \frac{1}{4}D_{\bar z}^2 M^{\bar z\bar z} + \frac{1}{2}T_{vv}^M + \frac{1}{4}M_{zz}M^{zz} \\
\partial_u N_z^- =& \frac{1}{4}\left(D_z D_{\bar z}^2 D^{\bar z\bar z} - D_z^3 D^{zz}\right) - T_{vz}^M - \partial_z m_B^- + \frac{1}{16}D_z\partial_v(C_{zz}C^{zz}) \\
& - \frac{1}{4}M^{zz}D_z D_{zz} - \frac{1}{4}M_{zz}D_z D^{zz} - \frac{1}{4}D_z\left(D^{zz}M_{zz} - M^{zz}D_{zz}\right)
\end{aligned} \tag{17.17}$$

渐近平直时空也可以从时空图上一窥其特征 [25]，只要是渐近平直时空，Penrose 图在 $\mathcal{I}^\pm$ 边界上都类似于 Minkowski 时空图的直角形状。

Section 18

Asymptotic flat spacetime: BMS group

根据前一节的渐近分析，我们是在寻找满足一系列边界条件的规范变换（微分同胚），这些就是所谓的 Allowed Symmetries，但是那些不改变物理，没有啥效应的对称性要剔除掉 [14]，得到我们要找的**渐近对称性**

[14] 或者说我们需要它们能生成非 0 守恒荷

$$\text{Asymptotic symmetries} = \frac{\text{Allowed symmetries}}{\text{Trivial symmetries}} \tag{18.1}$$

按理说在无穷远处时空渐近平直，那么在无穷远处的渐近对称性应该就是 Poinccreé 群，但是由于渐近平直带来的高阶项（描述无穷远处的引力波扰动），这会导致体系的对称性远远大于 Poincaré 群。这从某种程度上也意味着，弱场、大尺度近似下广义相对论并不会退化为狭义相对论！

所谓 AFS 的对称变换，并不要求是等度规映射，仅仅要求保持 Bondi gauge 以及渐近平直性，这其实是要求下面的 asymptotic invariant:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\xi g_{uu} = \mathcal{O}(r^{-1}), \qquad && \mathcal{L}_\xi g_{ur} = \mathcal{O}(r^{-2}), \qquad && \mathcal{L}_\xi g_{uz} = \mathcal{O}(1) \\
&\mathcal{L}_\xi g_{zz} = \mathcal{O}(1), && \mathcal{L}_\xi g_{z\bar z} = \mathcal{O}(1), && \mathcal{L}_\xi g_{\bar z\bar z} = \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

和 gauge invariant:

$$\mathcal{L}_\xi g_{zz} = \mathcal{L}_\xi g_{rz} = 0 \tag{18.2}$$

计算后发现 [15]这要求矢量场形式为：

[15] 相当冗长的计算，细节请参考：[19, 20, 26–29]

$$\begin{aligned}
\xi^+ =& \overbrace{\left(1+\frac{u}{2r}\right)Y^{+z}\partial_z - \frac{u}{2r}D^{\bar z}D_z Y^{+z}\partial_{\bar z} - \frac{1}{2}(u+r)D_z Y^{+z}\partial_r + \frac{u}{2}D_z Y^{+z}\partial_u + c.c.}^{\text{Superrotation } \xi_Y^+} \\
& + \underbrace{f^+\partial_u - \frac{1}{r}\left(D^z f^+\partial_z + D^{\bar z}f^+\partial_{\bar z}\right) + D^z D_z f^+\partial_r}_{\text{Supertranslation } \xi_f^+}
\end{aligned} \tag{18.3}$$

其中，$f(z,\bar z)$ 是 $C\mathcal{S}^2$ 上的任意函数，而 Y^{+z} 在 $C\mathcal{S}^2$ 上全纯：[16]

[16] 就是 $\mathcal{S}^2$ 上的共形 Killing 场之分量

$$\partial_{\bar z}Y^{+z} = 0 \tag{18.4}$$

首先来看相对比较简单的 supertranslation，可以验证，当 f 取为常函数，其生成 u 方向的平移，其它三个方向平移则由 $Y_1^{\{0,\pm1\}}$ 生成 [17]。所以下面这四个 f：

[17] 这里 Y_ℓ^m 指球谐函数

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad f_2 = \frac{i(\bar{z}-z)}{1+z\bar{z}}, \quad f_3\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \tag{18.5}$$

所对应的生成元正好是 Poincaré 群的四个方向平移，进一步 f 扩展为任意函数，就变成了所谓"supertranslation"。在无穷小的 supertranslation 下 N_{zz}, m_B, C_{zz} 的改变可以由下式定量刻画 [18]：

[18] 略去了后面应乘的无穷小参数

$$\begin{aligned}
\delta_{f^+} N_{zz} &= f^+ \partial_u N_{zz} \\
\delta_{f^+} m_B &= f^+ \partial_u m_B + \frac{1}{4}\left[N_{zz} D_z^2 f^+ + 2D_z N^{zz} D_z f^+ + c.c.\right] \\
\delta_{f^+} C_{zz} &= f^+ \partial_u C_{zz} - 2D_z^2 f^+
\end{aligned} \tag{18.6}$$

Minkowski 时空自然渐近平直，对应的三个参数都为 0，上式中前两个为 0，可以解释为换一下坐标系不会改变质量，也不会产生引力波。但是第三个式子不为 0，这意味着渐近对称性在 Minkowski 时空中被破缺，容易验证当且仅当 f 取 18.5 的四个值时，对应 Poincaré 群的平动，会让 $\delta_{f^+} C_{zz} = 0$。这种对称性的自发破缺实际上意味着经典引力中的真空不唯一，且存在 Goldstone 粒子 [14]。

再来看 superrotation，首先注意到 Y^{+z} 全纯，这意味着其在 $C\mathcal{S}^2$ 上全局解析，否则在极点处不满足 18.4。这说明 Y^{+z} 只能取为全局共形变换 Mobiüs 变换形式，构成 Witt 代数的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 子代数，有六个分量，通常取为：[19]

[19] 也简记为 $Y^z = 1, z, z^2, i, iz, iz^2$，是 $\mathcal{S}^2$ 上 *global Kiling vector* 的基底

$$\begin{aligned}
Y_{12}^{+z} &= -iz, & Y_{13}^{+z} &= \frac{1}{2}(1+z^2), & Y_{23}^{+z} &= \frac{i}{2}(1-z^2) \\
Y_{03}^{+z} &= -z, & Y_{01}^{+z} &= \frac{1}{2}(1-z^2), & Y_{02}^{+z} &= \frac{i}{2}(1+z^2)
\end{aligned}$$

事实上，这六个函数对应的正是 $SO(3,1)^{\uparrow}$ 的六个 boost 和 rotation！所以 BMS 群的 superrotation 对应的就是 Lorentz 群：

$$\text{BMS} = SO(3,1)^{\uparrow} \ltimes \text{Supertranslation} \tag{18.7}$$

所以，BMS 群在最初的意义上并没有 superrotation，只是单纯的 rotation。但是，文献 [26–28, 30] 指出，真正的渐近对称性或许应该是下面的所谓 **extended BMS group**：

$$\text{extended BMS} = \text{Superrotation} \ltimes \text{Supertranslation} \tag{18.8}$$

也就是说，那些 local 的解析函数 Y^{+z} 也应当是渐近对称性，这样的话，渐近对称性也变成无限维对称性，superrotation 部分与天球上共形变换一一对应。

在 superrotation 下度规前系数的变换可以写为 [20]：

[20] 这里 $\mathcal{L}_{Y^+} \equiv \mathbf{Y}^+ \cdot \mathbf{D} + 2D_z Y^z$，这一点可以从把 C_{zz} 看作 $(0,2)$ 张量场分量，然后利用 11.1 求李导数看出

$$\begin{aligned}
\delta_{Y^+} C_{zz} &= \frac{u}{2}\left(D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}\right)\partial_u C_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} C_{zz} - \frac{1}{2}\left(D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}\right) C_{zz} - u D_z^3 Y^{+z} \\
\delta_{Y^+} N_{zz} &\equiv \partial_u \delta_{Y^+} C_{zz} = \frac{u}{2}\left(D_z Y^{+z} + D_{\bar{z}} Y^{+\bar{z}}\right)\partial_u N_{zz} + \mathcal{L}_{Y^+} N_{zz} - D_z^3 Y^{+z}
\end{aligned} \tag{18.9}$$

对于 BMS$^-$，同样可以进行讨论，这里仅罗列一些公式：

Supertranslation：

$$\xi_{f^-} = -f^- \partial_v - \frac{1}{r}\left(D^z f^- \partial_z + D^{\bar{z}} f^- \partial_{\bar{z}}\right) + D^z D_z f^- \partial_r \tag{18.10}$$

$$\begin{aligned}\delta_{f^-}M_{zz} &= f^-\partial_v M_{zz}\\ \delta_{f^-}D_{zz} &= f^-\partial_v D_{zz} + 2D_z^2 f^-\end{aligned} \tag{18.11}$$

Superrotation：

$$\xi_{Y^-} = \left(1-\frac{v}{2r}\right)Y^{-z}\partial_z + \frac{v}{2r}D^{\bar{z}}D_zY^{-z}\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}(r-v)D_zY^{-z}\partial_r + \frac{v}{2}D_zY^{-z}\partial_v + c.c. \tag{18.12}$$

$$\begin{aligned}\delta_{Y^-}D_{zz} &= \frac{v}{2}\left(D_zY^{-z}+D_{\bar{z}}Y^{-\bar{z}}\right)\partial_v D_{zz} + \mathcal{L}_{Y^-}D_{zz} - \frac{1}{2}\left(D_zY^{-z}+D_{\bar{z}}Y^{-\bar{z}}\right)D_{zz} + vD_z^3Y^{-z}\\ \delta_{Y^-}M_{zz} &\equiv \partial_v\delta_{Y^-}D_{zz} = \frac{v}{2}\left(D_zY^{-z}+D_{\bar{z}}Y^{-\bar{z}}\right)\partial_v M_{zz} + \mathcal{L}_{Y^-}M_{zz} + D_z^3Y^{-z}\end{aligned} \tag{18.13}$$

文献 [27, 29] 中详细讨论了 $\mathfrak{bms}_n$ 及其中心扩张，$\mathrm{BMS}_{d+2}/\mathrm{CFT}_d$ 对应以及 charge algebra。

Section 19

Asymptotic flat spacetime: charges

时空连续对称性会诱导守恒荷，量子化后变成算符，是后面 Ward 恒等式的出发点。

Subsection 19.1

Noether theorem

考虑下面的对称变换：[21]

$$x \to x', \quad \Phi(x) \to \Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x))$$

场的变换一部分是因为场是 Poincaré 群的表示，所以坐标变换导致场的变换，另一部分是场位形自己的变换 [22]。现在考虑由参数 $\{\omega_a\}$ 标记的无穷小变换：

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}, \quad \Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\omega_a}(x).$$

下面的式子给出了变换生成元 G_a 的定义：

$$\delta_\omega\Phi(x) \equiv \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a\Phi(x) \tag{19.1}$$

考虑这个对称变换下作用量的改变：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}' &= \int \mathrm{d}^dx'\mathcal{L}(\Phi'(x'),\partial'_\mu\Phi'(x'))\\ &= \int \mathrm{d}^dx\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)),(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu})\partial_\nu\mathcal{F}(\Phi(x)))\\ &= \int \mathrm{d}^dx\left(1+\partial_\mu(\omega_a\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a})\right)\mathcal{L}\left(\Phi+\omega_a\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\omega_a},\left(\delta^\nu_\mu - \partial_\mu(\omega_a\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a})\right)\left(\partial_\nu\Phi+\partial_\nu(\omega_a\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\omega_a})\right)\right)\end{aligned} \tag{19.2}$$

注意到我们谈论对称性是在说作用量变分为 0，ω_a 是一簇与坐标无关的参数，但我们推导过程中可以把他们看作是一簇函数，但是对称变换是指这些函数变成常函数之后要有 $\delta S = 0$。所以，上面的式子最后肯定正比于 $\omega_a(x)$ 的导数，保留到一阶：

$$\delta\mathcal{S} = -\int \mathrm{d}^dx j^\mu_a\partial_\mu\omega_a = \int \mathrm{d}^dx\partial_\mu j^\mu_a\omega_a \tag{19.3}$$

[21] 场的旋量指标等等被省略了

[22] 这里对 *Noether* 定理的讨论基于大黄书 *[31]*，大黄书的方法最标准且优雅。

其中：

$$\boxed{j_a^\mu = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\nu\Phi - \delta_i^\mu\mathcal{L}\right)\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega_a} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\omega_a}} \tag{19.4}$$

利用这种比较巧妙的思想我们得到了在 $\{\omega_a(x)\}$ 的变换下 [23]作用量的变换。现在注意到上式是在场平衡位形附近的变分，所以对于在壳的场，必然有式 19.3 对于任意的 $\{\omega_a(x)\}$ 均为 0，即连续对称性给出了守恒流 19.4：

[23] 且 $\{\omega_a\}$ 是常数的时候是对称变换

$$\boxed{\partial_\mu j_a^\mu = 0} \tag{19.5}$$

对应的可以定义不随时间变化的守恒荷：

$$Q_a = \int \mathrm{d}^{d-1}x j_a^0 \tag{19.6}$$

注意到对守恒流的定义其实可以相差一个反对称张量的偏导：

$$j_a^\mu \to j_a^\mu + \partial_\nu B_a^{\nu\mu}, \qquad B_a^{\nu\mu} = -B_a^{\mu\nu}$$

考虑时空平移对称性：

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Phi} = 0$$

这带来我们熟悉的能动量张量及其守恒律：

$$\boxed{T_{\mathsf{c}}^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial^\nu\Phi, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \tag{19.7}$$

守恒流的定义可以差个反对称张量偏导数，所以可以将能动量张量对称化：

$$T_{\mathrm{B}}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu}, \quad B^{\rho\mu\nu} = -B^{\mu\rho\nu} \tag{19.8}$$

对于一般的时空变换 $x'\mu = x^\mu + \omega^\mu(x)$，其实作用量的变换可以用能动量张量写成：

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= \int d^d x T^{\mu\nu}\partial_\mu\omega_\nu \\
&= \frac{1}{2}\int d^d x T^{\mu\nu} \underbrace{(\partial_\mu\omega_\nu + \partial_\nu\omega_\mu)}_{-\delta g_{\mu\nu}\equiv g(x)-g'(x')} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^d x T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\Big|_{g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}
\end{aligned} \tag{19.9}$$

考虑共形变换为对称性，由于 Poincaré 变换是共形变换的一种，所以共形场论中仍有其散度为 0，再考虑伸缩变换 $\omega^\mu = \lambda x^\mu$，这将导致共形场论中能动张量无迹 $T^\mu{}_\mu = 0$。

量子场论中考虑**不改变积分测度** $\mathcal{D}\Phi$ 的对称变换：

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - i\omega_a G_a\Phi(x) \tag{19.10}$$

与上面经典守恒流对应的是真空关联函数 [24]意义下的 Ward-Takahashi 恒等式：

[24] 利用 *LSZ* 公式把外腿在壳之后就得到了散射振幅

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle j_a^\mu(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle = -i\sum_{i=1}^n \delta(x-x_i)\langle\Phi(x_1)\cdots G_a\Phi(x_i)\cdots\Phi(x_n)\rangle} \tag{19.11}$$

如果积分测度发生改变，就会出现量子反常 [32]。令 $\mathcal{Y} = \Phi(x_2)\cdots\Phi(x_n)$，且 $t = x_1^0$ 是

$\mathcal{Y}$ 中最大的时间。对 Ward-Takahashi 恒等式在 $t_- < t < t_+ \cup \mathbb{R}^3$ 内积分：

$$\langle Q_a(t_+)\Phi(x_1)\mathcal{Y}\rangle - \langle Q_a(t_-)\Phi(x_1)\mathcal{Y}\rangle = -i\,\langle G_a\Phi(x_1)\mathcal{Y}\rangle \tag{19.12}$$

取极限 $t_- \to t_+$，由于 $\mathcal{Y}$ 是任意的，所以：

$$\boxed{[Q_a, \Phi] = -iG_a\Phi} \tag{19.13}$$

量子化后，在算符的意义下，守恒荷是对称性的生成元。[25]

广义相对论那边更多的使用所谓广义 Noether 定理，可以见 [16] 第一章的介绍。

[25] 你去用 ϕ_a, π^a 之间的正则对易关系当然也能得到这一点，比如 *Srednicki[33]*，只是这里我们是完全用路径积分量子化的方法。

Subsection 19.2

Komar Integral & ADM

广义相对论里面定义守恒荷是一件很难的事情，这里介绍比较初级的理论，利用与电磁理论的对比来定义守恒荷。

利用 Killing 矢量 $K = K^\mu\partial_\mu$，可以得到与之对偶的 1-form，$K = K_\mu dx^\mu$，进而可以定义二形式 $F \equiv dF$

Lemma 1 (Ricci identity)

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}Z^\rho - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho Z^\sigma \tag{19.14}$$

Theorem 1 上面定义的 F 所满足的方程可以写成非齐次 Maxwell 方程的形式：

$$d\star F = \star j \tag{19.15}$$

其中 j 和物质场能动张量有关，真空 $j = 0$。

Proof 利用 Ricci 恒等式，由于引力无挠：

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)K^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}K^\rho$$

缩并 μ, σ：

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

最后利用 Killing 方程得到：

$$\nabla_\mu\nabla_\nu K^\mu = R_{\rho\nu}K^\rho$$

所以：

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla^\mu\nabla_\mu K_\nu - \nabla^\mu\nabla_\nu K_\mu = -2\nabla^\mu\nabla_\nu K_\mu = -2R_{\rho\nu}K^\rho$$

引力场方程：

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)$$

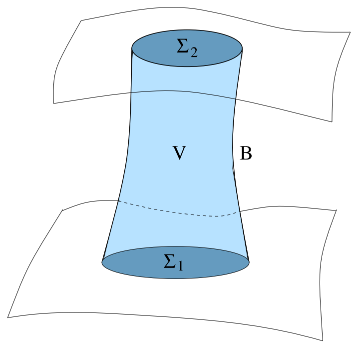
显然，我们已经将 F 满足的方程写成了 19.15 的坐标形式。 □

由此可以类比电磁规范理论定义 Komar 荷：

$$\boxed{Q_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi G}\int_\Sigma d\star F = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma}\star F = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma}\star dK} \tag{19.16}$$

若 Killing 场处处类时，上面的玩意儿我们叫 Komar 质量（能量）M_{Komar}。下面简要说明一下其守恒的意义。

考虑下图所示的时空子流形：



其表示类空超曲面 Σ_1 随时间演化到 Σ_2 扫过的体积，其边界为：

$$\partial V = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup B$$

考虑 $j|_B = 0$ 的情况，这将导致下面的恒等式：

$$Q_e(\Sigma_1) - Q_e(\Sigma_2) = \int_{\Sigma_1} \star J - \int_{\Sigma_2} \star J = \int_{\partial V} \star J = \int_V d \star J = 0 \tag{19.17}$$

也就是随着时间演化，某一区域的荷不变。

Komar 质量依赖于类时 Killing 场的存在性，这对于非稳态时空是不可能的。但是对于渐近平直时空，有一种很好的定义场的总能量的方法。

Definition 1 (ADM 能量) 假设时空度规为 g，在某个类空超曲面 Σ 上诱导度规 h，且这个类空超曲面满足存在某个坐标系 $\{x^i\}$ 使得 $r \to \infty, h_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(1/r)$ 也就是渐近平直于 Euclid 时空。$\mathcal{S}_r^2$ 是嵌在 Σ 中半径为 r 的球面，则 ADM 能量定义为：

$$\boxed{E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{S_r^2} d\Omega r^2 \hat{x}^j (\partial_k h_{jk} - \partial_j h_{kk})} \tag{19.18}$$

前面讨论 AFS 时我们强调过，虽然我们在 Bondi gauge 下讨论问题，但是结论都是不依赖于规范的，这里 ADM 能量也不依赖于坐标系 $\{x^i\}$ 的选取，虽然看起来这个定义依赖于坐标系，而且这个定义对于渐近平直的稳态时空，如果取 Σ 渐近正交于类时 Killing 场，则其与 Komar 质量一致。

虽然爱因斯坦场方程对于某一给定度规总能求出解，但是能动张量是否是“物理的”值得思考，对此，人们总结出了下面的三个能动张量要满足的条件。

Definition 2 (弱能量条件) 任意瞬时观者测得的能量密度非负，即要求：

$$T_{ab} u^a u^b \geq 0, \quad \forall \text{类时矢量场 } u^a \tag{19.19}$$

Definition 3 (强能量条件) 这是在证明奇性定理时提出的条件：

$$T_{ab} Z^a Z^b \geq -\frac{1}{2} T, \forall \quad \text{单位类时矢量场 } Z^a \tag{19.20}$$

Definition 4 (主能量条件) 本条件要求任一瞬时观者 [a](p, Z^a) 测得的 4 动量密度 $W^a \equiv -T^a{}_b Z^b$ 是指向未来的类时或类光矢量，其物理解释是物质场的能量流动速率小于或等于光速 [b]。

[a]就是 Z^a 和粒子世界线在 p 处相切，这时在观者参考系下粒子瞬时静止。这个不难理解，自由下落参考

系就是通过测地线指数映射建立的，观者和粒子世界线相切说明相对静止，可做测量。

[b]见经典名著 [34]

这三个条件互不蕴含，不要被名字忽悠了。

Theorem 2 (正质量定理（Schoen&Yau）) 若渐近平直时空没有奇异性，且物质能动张量满足主能量条件，则其 ADM 质量大于或等于零。当且仅当为闵氏时空时等于零。[a]

[a]值得注意的是，教皇 Witten 找到了更简单的证明 [35, 36]。

Subsection 19.3

Scattering problem

前面使用几何学和动力学给出了 $\mathcal{I}^\pm$ 上的度规约束，为了完整的解出各个参数，我们需要一些 initial data。在此，有必要先明确一下我们所考虑的一类时空，它们是所谓 C-K 时空 [37, 38]，特点是在 $i^\pm$ 都是真空，这给出了下面的渐近条件：

$$N_{zz} = \mathcal{O}\left(|u|^{-(1+\varepsilon)}\right), \quad \varepsilon > 0$$

为了让 Wyle 张量在 $\mathcal{I}^+_-$ 上归零，这要求 [16, 39]：

$$C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} = -2D_z^2\bar{C}|_{\mathcal{I}^+_-} \tag{19.21}$$

其中 $C(z,\bar{z})$ 是 $\mathcal{S}^2$ 上的任意函数，称为 Supertranslation memory field。BMS 相关的文献符号不是太统一，本 part 后面内容的讨论我们在 17.5 的约定下干活，对应的我们还有如下不同于前文的符号约定：

$$\begin{aligned} T_{uu} &\equiv \frac{1}{4}N_{zz}N^{zz} + 4\pi G\lim_{r\to\infty}\left[r^2T^M_{uu}\right] \\ T_{uz} &\equiv 8\pi G\lim_{r\to\infty}\left[r^2T^M_{uz}\right] - \frac{1}{4}\partial_z\left(C_{zz}N^{zz}\right) - \frac{1}{2}C_{zz}D_zN^{zz} \end{aligned} \tag{19.22}$$

对应的约束条件变为：[26]

[26] 格外注意 N_z 的区别

$$\begin{aligned} \partial_u N_z &= \frac{1}{4}\partial_z\left(D_z^2C^{zz} - D_{\bar{z}}^2C^{\bar{z}\bar{z}}\right) - u\partial_u\partial_z m_B - T_{uz} \\ \partial_u m_B &= \frac{1}{4}\left[D_z^2N^{zz} + D_{\bar{z}}^2N^{\bar{z}\bar{z}}\right] - T_{uu} \end{aligned} \tag{19.23}$$

从约束条件以及 $N^{zz} \equiv \partial_u C^{zz}$ 就可以看出 initial data 为：

$$\{N_{zz}(u,z,\bar{z}), C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, m_B^+(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, N_z^-|_{\mathcal{I}^+_-}, \cdots\} \tag{19.24}$$

后面的 $\cdots$ 表示当我们考虑度规中的更高阶项时需要加入的 initial data。对于 $\mathcal{I}^-$ 类似分析可以得到 initial data：

$$\{M_{zz}(u,z,\bar{z}), D(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, m_B^-(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, N_z^-|_{\mathcal{I}^-_+}, \cdots\} \tag{19.25}$$

经典引力理论的散射问题就是在找 $\mathcal{I}^+$ 上的 Cauchy data 到 $\mathcal{I}^-$ 上的 Cauchy data 的映射。不过上面的 initial data 还无法完全使得此问题 well-define，文献 [39] 从 Lorentz 和 $\mathcal{CPT}$ 不变性的要求出发，认为需要加入下面的对径认同假设来构成散射问题的全部：

$$C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = D(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, \quad m_B^+(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = m_B^-(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+}. \tag{19.26}$$

同样也要求 [22]：

$$N_z^+(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = N_z^-(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \tag{19.27}$$

这些式子也使得 $BMS^+ \times BMS^-$ 联合变换限制为一个子群，称为 $\mathcal{X}$ 变换 [22]，要求：

$$f^+(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = f^-(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-}, \quad Y^{+z}|_{\mathcal{I}_-^+} = Y^{-z}|_{\mathcal{I}_+^-} \tag{19.28}$$

所以后面我们不再区分 $N_z^\pm, f^\pm, Y^\pm, m_B^\pm, \{C^{zz}, D^{zz}\}, \{M^{zz}, N^{zz}\}$，用统一的符号书写，而且在 $\mathcal{I}_\mp^\pm$ 上对径认同。在 QED 中，这种对径认同也是存在的，而且可以很自然地导出。

Subsection 19.4

BMS charges

完全可以从广相的角度去推出守恒荷，但是那太麻烦，这里直接从对径认同的条件导出守恒荷。

首先是 supertranslation 对应的守恒荷：[27]

$$Q_f^+ \equiv \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}_-^+} d^2z\gamma_{z\bar{z}} f m_B = \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}_+^-} d^2z\gamma_{z\bar{z}} f m_B \equiv Q_f^- \tag{19.29}$$

利用 Stokes 等式，$\partial\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}_-^+ \cup \mathcal{I}_+^-$，设 $m_B|_{\mathcal{I}_+^+} \to 0$ 并利用前面的约束方程，得到：

$$\begin{aligned} Q_f^+ &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}} f\left[T_{uu} - \frac{1}{4}\left(D_z^2N^{zz} + D_{\bar{z}}^2N^{\bar{z}\bar{z}}\right)\right] \\ Q_f^- &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z\gamma_{z\bar{z}} f\left[T_{vv} + \frac{1}{4}\left(D_z^2N^{zz} + D_{\bar{z}}^2N^{\bar{z}\bar{z}}\right)\right] \end{aligned} \tag{19.30}$$

然后再是 superrotation 部分：

$$Q_Y^+ \equiv \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{I}_-^+} d^2z(Y_{\bar{z}}N_z + Y_zN_{\bar{z}}) = \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{I}_+^-} d^2z(Y_{\bar{z}}N_z + Y_zN_{\bar{z}}) \equiv Q_Y^- \tag{19.31}$$

如果 Y^z 取为 $\mathcal{S}^2$ 上共形 Killing 场的那六个分量，上式在说明 AMD 角动量和 BORT center-of-mass[28]的守恒律。依旧是利用 Stokes 方程：[29]

$$\begin{aligned} Q_Y^+ &= Q_H^+ + Q_S^+, \\ Q_S^+ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z[D_z^3Y^zuN^z{}_{\bar{z}} + D_{\bar{z}}^3Y^{\bar{z}}uN_z^{\bar{z}}], \\ Q_H^+ &= \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z(Y_{\bar{z}}T_{uz} + Y_zT_{u\bar{z}} + u\partial_zY_{\bar{z}}T_{uu} + u\partial_{\bar{z}}Y_zT_{uu}) \end{aligned} \tag{19.32}$$

我们到后面再聊它们的确是 Supertranslations 和 Suprtrotations 的生成元。

[27] 这里的 $d^2z\gamma_{z\bar{z}}$ 其实就是 $\mathcal{S}^2$ 上的测度 $d^2z\sqrt{\gamma}$

[28] 可以见文献 [40] 中的定义

[29] 与文献 [21] 中的形式稍有不同，注意到 $\gamma_{z\bar{z}}D_zY^z = \partial_zY_{\bar{z}}$ 可以证明等价性

PART

V

Soft Theorem

Section 20

Review on the quantization of gravity

本节采用 [41] 中的记号简要回顾引力量子化以及树图顶点项。众所周知微扰量子引力是不可重整化的，所以只能看作是一个有效理论，但好就好在它的低能极限是可以用于计算引力波振幅的 [42–44]。

取自由引力场拉式量为：

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R, \quad \kappa = \sqrt{32\pi G} \tag{20.1}$$

然后在平直度规附近做微扰：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{20.2}$$

代入到 $\mathcal{L}_{EH}$ 进行计算得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = &\partial_\alpha h \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \partial_\alpha h_{\beta\gamma}\partial^\beta h^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}(\partial_\alpha h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\gamma h_{\alpha\beta})^2 \\ &+ \text{total derivatives} + \mathcal{O}\left(\kappa, h^3\right).\end{aligned} \tag{20.3}$$

其中 $h \equiv h^\alpha_\alpha$。这一堆都是 $(\partial h)^2$ 项，对应动能项，显然由于没有 h^2 项，所以引力子质量为 0。后面的高阶项意味着引力子之间是有自相互作用的。

由于广义相对论是微分同胚不变的，所以他其实也是个规范理论，不同的坐标系就意味着不同的规范，度规分量的变换正对应于场的规范变换。那么我们对 $h_{\mu\nu}$ 进行路径积分时就必须在规范下进行，这可以使用 F-P 鬼场方法来系统的处理。比较常用的规范选取是下面的 de-Donder 规范：

$$G_\mu \equiv \partial^\nu h_{\mu\nu}\frac{1}{2}\partial_\mu h = 0 \tag{20.4}$$

这导致规范固定项：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} = G_\mu G^\mu = \partial^\nu h_{\mu\nu}\partial^\rho h^\mu{}_\rho + \frac{1}{4}(\partial_\mu h)^2 - \partial^\nu h_{\mu\nu}\partial^\mu h \tag{20.5}$$

以及鬼场：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GH}} = -\bar{b}^\mu\left(\kappa\frac{\delta G_\mu}{\delta\xi^\nu}\right)b^\nu \tag{20.6}$$

de-Donder 规范下：

$$\kappa\frac{\delta G_\mu}{\delta\xi^\nu} = \eta_{\mu\nu}\partial^2 + \kappa\left[\partial^\rho h_{\mu\nu}\partial_\rho + \partial^\rho h_{\nu\rho}\partial_\mu + \partial^\rho(\partial_\nu h_{\mu\rho}) - \partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\rho - \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_\nu h)\right] \tag{20.7}$$

进行路径积分时，就不必再考虑规范，取而代之 $\mathcal{L}_{EH} \mapsto \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{GH}$，由于树图

鬼场无贡献，所以这里只考虑前两项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{EH}}|_{h^2}+\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial^2 h_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}h\partial^2 h \\ &= -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\underbrace{\left[\eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\delta)\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\right]}_{I^{\alpha\beta,\gamma\delta}}\partial^2 h_{\gamma\delta}\end{aligned} \tag{20.8}$$

给出费曼图顶点和传播子项：

$$\alpha\beta \;\text{\textasciitilde\textasciitilde\textasciitilde}\; \gamma\delta = \frac{\mathrm{i}P_{\alpha\beta,\gamma\delta}}{p^2-\mathrm{i}0^+} \quad \text{with} \quad P_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\eta_{\alpha(\gamma}\eta_{\delta)\beta}-\frac{1}{D-2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} \tag{20.9}$$

其中 $I^{\alpha\beta,\gamma\delta}P_{\gamma\delta,\rho\kappa}=\delta^{\alpha}_{(\rho}\delta^{\beta}_{\kappa)}$。高阶自相互作用顶点可以在 [45] 中找到。

引力子自旋为 2，但由于规范的限制，其仍然如光子一样只有两个独立的极化矢量（张量），对应引力波的两种偏振模式，只不过这个时候其实是个二阶对称极化张量。满足下面的条件：

$$p_\mu \epsilon^{\mu\nu}_{++/--}(p)=0, \quad \eta_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}_{++/--}(p)=0 \tag{20.10}$$

利用光子的极化矢量，可以构造出一组非常方便的 $\epsilon^{\mu\nu}_{++/--}$ 选取：

$$\epsilon^{\mu\nu}_{\pm\pm}=\epsilon^{\mu}_{\pm}\epsilon^{\nu}_{\pm} \tag{20.11}$$

现在考虑引力场与其他场的耦合，耦合项拉式量为：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=\frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{20.12}$$

这里 $T_{\mu\nu}$ 是场的能动张量，可以使用下式进行计算：[1]

$$T_{\mu\nu}(x)=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \tag{20.13}$$

S_M 是物质场的作用量，但是是在弯曲时空中的，可以使用最小耦合方法得到 [2]。以自旋为 0 对应的实标量场为例。

$$S_M=\int d^4x\sqrt{-\eta}\left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-V(\phi)\right) \tag{20.14}$$

这里我们把所有暗含 η 的地方都显式的写出来了，弯曲时空中的作用量只需要将 $\eta\mapsto g,\partial\mapsto\nabla$ 即可，得到：

$$\tilde{S}_M=\int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi-V(\phi)\right) \tag{20.15}$$

当然，对称性允许我们在后面添加正比于 Ricci 标量的项等等，但所谓我们要的就是“最小”耦合。不过在微扰引力框架下，我们其实只需要利用 20.14 对 η 求变分导数就好了，对于无质量的自由标量场（对应不动点处的理论），我们得到 [3]：

$$T_{\mu\nu}=\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi \tag{20.16}$$

[1] 平直时空中能动量张量是根据 *Poincaré* 不变性引入的 *Noether current*，可以说明 (见 *19.9*) 实际上等价于

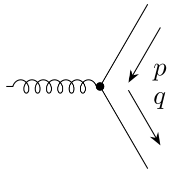
$$T_{\mu\nu}|_{flat}=-2\left.\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right|_{g^{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$$

GR 里面的能动量张量就是这个的推广。

[2] 玻色场可以这么做，费米场复杂些

[3] 实际上，考虑弯曲背景时空之后，多出了一些可重整的项可以加入到作用量中，比如 $R\phi$，对于平直时空 $R=0$，这一项不用考虑

对应的顶点项为：



$$= i\kappa p_\mu q_\nu + \text{正比于}\eta_{\mu\nu}\text{的项} \tag{20.17}$$

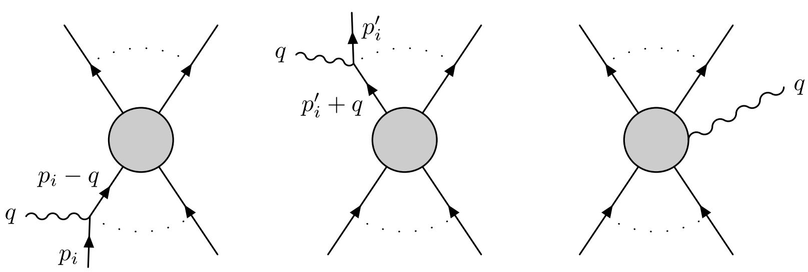
Section 21

Soft theorem from feynman diagrams

所谓软粒子，指的就是动量趋于 0 的无质量粒子，因为无质量 $E = cp$，所以能量也会趋于 0，任意过程都会辐射出期望值为无限多个的软粒子。本节使用费曼图方法讨论辐射软粒子的振幅修正 [46]。

首先考虑辐射一个软光子，理论背景为旋量 QED，散射过程为 $ne^- \to me^- + \gamma$，注意考虑的是一般的旋量 QED，可以有不同味的电子，电荷为 Q_i。这里考虑的是电子，正电子的讨论也类似，最终结论是一样的。

辐射软光子可以从入射外线辐射，也可以从出射外线辐射，还可以从内线辐射：



(a) (b) (c)

图 7. 辐射软光子的三种情况

我们使用 $\mathcal{A}(p, q)$ 表示辐射一个软光子后的振幅 $\mathcal{A}(p)$ 表示没有辐射软光子的振幅（所有阶费曼图求和）。用 $T(p_i - q)$ 表示原先没有辐射软光子的费曼图砍掉一个 p_i 外线但保留外线动量为非在壳的 $p_i - q$ 得到的费曼图振幅，显然 $T(p_i)u(p_i) = \mathcal{A}(p)$。

首先计算入射外线辐射软光子：

$$Q_i T(p_i - q)\frac{(-\not{p}_i' + \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2}u(p_i) = -Q_i T(p_i - q)\Big[\frac{\epsilon(q)\cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q\cdot p_i + \mathrm{i}0^+}\Big]u(p_i) \tag{21.1}$$

其中利用了 $\not{a}\not{b} = -2a\cdot b - \not{b}\not{a}$，$q\cdot\epsilon_\pm(q) = 0$ 以及狄拉克方程 $(\not{p} + m)u(p) = 0$。其中 $S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$。唯一做近似的地方就是分母里面的 q^2 我们略去了，这对后面的高阶修正也不会影响。这一注意到 $q = 0$ 实际上是一个极点，这是因为在光子无线“软”的时候，多出来的那条内线传播子会无线趋于在壳，导致分母为 0。

对于出射粒子辐射软光子也是类似的计算得到：

$$Q_i'\bar{u}(p_i')\frac{(-\not{p}_i' - \not{q} + m)\not{\epsilon}(q)}{(p_i - q)^2 + m^2}\bar{T}(p_i + q) = Q_i'\bar{u}(p_i')\Big[\frac{\epsilon(q)\cdot p_i + i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q\cdot p_i - \mathrm{i}0^+}\Big]\bar{T}(p_i - q) \tag{21.2}$$

至于内线发射光子，我们用 $N^\mu(p,q)$ 表示，而且注意到 $q\to 0$ 时 N 非奇异，而且内线本身就是不在壳的，所以可以认为 $N^\mu(p,q)\sim\mathcal{O}(q^0)$。三项加起来得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p,p',q)=&\sum_{\text{incoming}}-Q_iT(p_i-q)\frac{\epsilon(q)\cdot p_i+i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q\cdot p_i+\mathrm{i}0^+}u(p_i)\\&+\sum_{\text{outgoing}}Q_i'\bar{u}(p_i')\frac{\epsilon(q)\cdot p_i'+i\epsilon(q)_\mu q_\nu S^{\mu\nu}}{q\cdot p_i'-\mathrm{i}0^+}\bar{T}(p_i'+q)\\&+\epsilon(q)_\mu N^\mu(p,p',q)\end{aligned}\tag{21.3}$$

考虑最低阶修正，也就是只保留极点，得到：

$$\boxed{\mathcal{A}(p,q)=\left[\sum_i\eta_iQ_i\frac{\epsilon(q)\cdot p_i}{q\cdot p_i}\right]\mathcal{A}(p)}+\mathcal{O}(1)\tag{21.4}$$

其中对于入射粒子 $\eta_i=-1$，出射粒子为 $+1$。QED 中辐射出光子的振幅都可以拆分成 $\epsilon(q)_\mu\mathcal{M}^\mu$，振幅是相对论不变量，但是我们虽然常说 $\epsilon(q)_\mu$ 是极化矢量，但它并不是真正意义上的矢量，因为其在 lorentz 变换下并不协变，而是会多出来一个正比于 q 的项 [4][1]。为了让振幅是相对论不变量，必须有：

[4] 我们是在 *Lorentz* 变换的意义下理解，其实矢量的这种变换完全可以理解为规范选取不同，从而从振幅的规范不变性导出结果。*[33]*

$$\boxed{q_\mu\mathcal{M}^\mu=0}\tag{21.5}$$

也就是 Ward 恒等式，也可以从 Ward-高桥恒等式在 U(1) 对称性下导出它，实际上也就是利用电荷守恒导出它，但是前面我们的导出仅仅依赖于 Lorentz 不变性。现在把 21.4 中的 $\epsilon(q)$ 替换为 q 我们得到：

$$\left[\sum_i\eta_iQ_i\right]\mathcal{A}(p)=0\tag{21.6}$$

也就是说，如果散射过程不被禁闭，也就是 $\mathcal{A}(p)\neq 0$，那么这个过程必然要电荷守恒！另外说一句，我们这里的推导得到的 21.4 对于任意自旋的场都适用，比如对于标量 QED，只需要把 $S^{\mu\nu}$ 替换为 0 就好，不同的自旋对应 $S^{\mu\nu}$ 的不同表示。

现在继续考虑两个光子的情况，两个光子由不同外线发射，在最低阶近似下只是乘上了 21.4 中两个因子，但是由相同外线发射就要考虑发射的先后顺序，因子形式会变化：

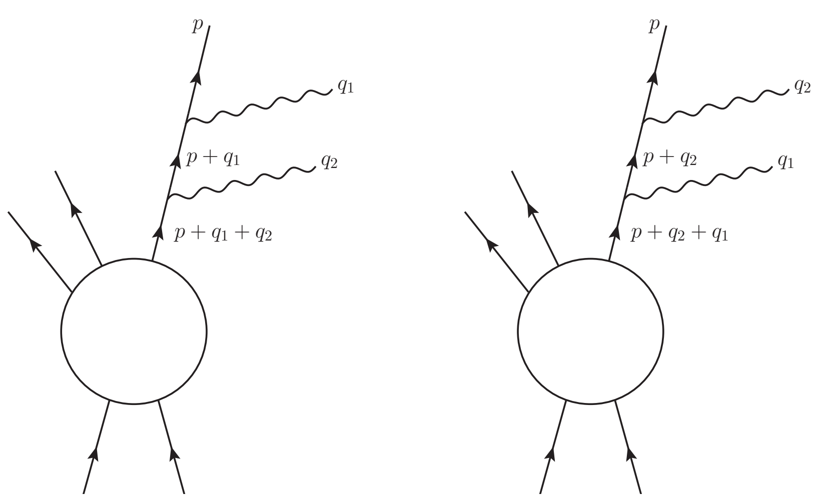


图 8. 同一外线辐射两个软光子

把两幅图贡献的因子加起来得到：

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1)\cdot p}{p\cdot q_1-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2)\cdot p}{p\cdot(q_2+q_1)-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]+\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2)\cdot p}{p\cdot q_2-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1)\cdot p}{p\cdot(q_1+q_2)-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]\\
=&\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_1)\cdot p}{p\cdot q_1-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]\left[\frac{\eta Q\epsilon(q_2)\cdot p}{p\cdot q_2-\mathrm{i}\eta 0^+}\right]
\end{aligned}
\tag{21.7}
$$

得到的结果就是不同外腿上面的辐射两个软光子得到的因子，利用数学归纳法可以证明这一结论对于辐射任意数量的软光子都是适用的，那么最终我们只需要把因子乘起来，然后对所有外腿求和就好了，用式子表示如下：

$$
\boxed{\mathcal{A}(p,q_1,\ldots,q_m)=\prod_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_i\eta_i\frac{\epsilon(q_j)\cdot p_i}{q_j\cdot p_i}\right]\mathcal{A}(p)++\mathcal{O}(1)}
\tag{21.8}
$$

前面的因子称为 **eikonal 因子**。推广到 non-Abelian Y-M 场的软定理也早有人计算过了 [47–50]，软定理更多更一般的推广见 [46] 的文献索引。

现在来考虑辐射一个软引力子的情况，考虑第一节引入的标量场模型，传播子为：

$$
-\frac{i}{(p+\eta q)^2+m^2}
\tag{21.9}
$$

顶点由 21.2 给出，但是由于 20.16，要与 $\epsilon^{\mu\nu}$ 缩并，正比于 $\eta_{\mu\nu}$ 的项没有贡献。以出射外线辐射软引力子为例，给出因子：

$$
i\sqrt{32\pi G}\varepsilon^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\frac{-i}{(p+q)^2+m^2}\to\sqrt{8\pi G}\frac{\varepsilon^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}{p\cdot q}
\tag{21.10}
$$

求和后得到：

$$
\boxed{\mathcal{A}(p,q)=\left[\sum_i\frac{\kappa_i}{2}\eta_i\frac{\epsilon_{\mu\nu}(q)p_i^\mu p_i^\nu}{q\cdot p_i}\right]\mathcal{A}(p)+\mathcal{O}(1)}
\tag{21.11}
$$

引力子同样有类似于 21.5 的恒等式，由此我们可以得到所有的 κ_i 都是相等的 [5]，也就是等效原理！而自旋大于二的软粒子的软定理沿用上面的方法给出的限制就太强了，以至于散射 $\mathcal{S}$ 矩阵必须 trivial，所以一般认为自旋大于二的无质量粒子在“变软”的时候就脱耦合了。

[5] 这里有点循环论证了，因为前面为了推导的方便我们同一取 $\kappa_i=\sqrt{32\pi G}$

SECTION 22

Subleading and subsubleading order soft theorem

考虑动量为 $\delta q,\delta\to 0$ 的软光子辐射，$\pm$ 表示软光子的螺旋度，而 ℓ_i 表示其它粒子的螺旋度，则更一般的软定理可以用洛朗展开写成：

$$
\mathcal{A}_{\ell_1,\ldots,\ell_n,\pm}(p,\delta q)=\left[\sum_{a=0}^{\infty}\delta^{-1+a}S_{\pm}^{(a)}\right]\mathcal{A}_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(p)
\tag{22.1}
$$

次领头阶的计算可以从 21.5 式出发，将 21.3 中所有的 ϵ 替换为动量，保留到 $\mathcal{O}(\delta^0)$，并且令等式左边为 0。注意到这一阶近似下可以有 $N^\mu(p,q)\approx N^\mu(p,0)$，得到：

$$
-q^\mu N_\mu(p,0)=\cancelto{0}{\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\eta_i Q_i\mathcal{A}(p)}+q^\mu\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial}{\partial p_i^\mu}\mathcal{A}(p)
\tag{22.2}
$$

其中第一项为 0 是因为电荷守恒 21.6，第二项中的 ∂_{p_i} 只作用于 $\mathcal{A}$ 中的 T，不作用于 u[6]。这样就确定出了 N^{μ}[7]，再带回到 21.3 得到：

$$A^{\mu}=\sum_{i=1}^{n}Q_i\left[\frac{\eta_i p_i^{\mu}}{\delta q\cdot p_i}+\frac{q^{\nu}p_i^{\mu}}{q\cdot p_i}\frac{\partial}{\partial p_i^{\nu}}-\frac{iq_{\nu}S_i^{\mu\nu}}{q\cdot p_i}-\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}}\right]\mathcal{A}(p)+\mathcal{O}(\delta) \tag{22.3}$$

这个式子里面的 ∂_{p_i} 就是作用于整个 $\mathcal{A}$ 了。定义：

$$L_i^{\mu\nu}=i\left(p_i^{\mu}\frac{\partial}{\partial p_{i\nu}}-p_i^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}}\right),\quad J_i^{\mu\nu}+S_i^{\mu\nu} \tag{22.4}$$

这里 $S_i^{\mu\nu}$ 要根据第 i 个粒子的自旋去选取对应的 Lorentz 群不可约表示，比如 $s=0,S^{\mu\nu}=0;s=\frac{1}{2},S^{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$。这样我们就得到了包含 subleading 修正的软定理（LBK 定理 [51, 52]）：

$$S_{\pm}^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}Q_i\eta_i\frac{\epsilon_{\pm\mu}(q)p_i^{\mu}}{q\cdot p_i},\quad \text{and}\quad S_{\pm}^{(1)}\;=-i\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\epsilon_{\pm\mu}(q)q_{\nu}J_i^{\mu\nu}}{q\cdot p_i} \tag{22.5}$$

同样的方法可以推导出软引力子定理的 subleading 和 subsubleading 的修正项[8][54–57]：

$$\begin{gathered}S_{\pm}^{(0)}=\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q)p_i^{\mu}p_i^{\nu}}{q\cdot p_i},\quad S_{\pm}^{(1)}=-i\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q)p_i^{\mu}q_{\lambda}J_i^{\nu\lambda}}{q\cdot p_i},\\ S_{\pm}^{(2)}=-\frac{\kappa}{4}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\epsilon_{\pm\mu\nu}(q)q_{\rho}q_{\sigma}J_i^{\mu\rho}J_i^{\nu\sigma}}{q\cdot p_i}\end{gathered} \tag{22.6}$$

Section 23

Massless QED

本章用天球的视角来看 QED 理论，为下一节做准备，本节的讨论都局限于比较简单的，不含磁荷而且电子没有质量的 QED 理论，但是基于此推出的许多结论实际上是普适的，可以推广到有质量 QED 上 [14]。

Subsection 23.1

Classical

弯曲时空中 QED 作用量：

$$S_{EM}=-\frac{1}{2e^2}\int F\wedge\star F+S_M=-\frac{1}{4e^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}F_{\mu]nu}F^{\mu\nu}+S_M \tag{23.1}$$

其中 S_M 由 $j^{\nu}A_{\nu}$ 形式给出相互作用项，即 $j^{\nu}=-\frac{\delta S_M}{\delta A^{\nu}}$。Maxwell 场方程有下面简洁形式：

$$\begin{cases}dF=0 & \Rightarrow\nabla_{\mu}F_{\nu\rho}+\nabla_{\nu}F_{\rho\mu}+\nabla_{\rho}F_{\mu\nu}=0\\ d\star F=e^2\star j & \Rightarrow\nabla_{\mu}F_{\mu\nu}=e^2 j_{\nu}\end{cases} \tag{23.2}$$

下式给出了整个空间内的净电荷/磁荷[9]：

$$Q_E=\frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{S}^2_{\infty}}\star F=\int_{\Sigma}\star j,\quad Q_M=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{S}^2_{\infty}}F \tag{23.3}$$

[6] 因为这个式子的导出，是对 $T(p\pm q)$ 展开得到的。

[7] 其实只能确定到某个与 q 无关的矢量 v，满足 $q\cdot v=0$，但是这样的 v 实际上不存在。

[8] 软定理已经使用不同的方法推了很多遍，文献 [46, 53] 中有不同证明方法的文献索引，而且还有对于更复杂的非阿贝尔规范理论的软定理讨论。

[9] 后文 $\star,*$ 指的都是 *Hodge dual*

它们是量子化的，只能取整数。QED 是 $U(1)$ 规范理论，在 $A \mapsto A + d\varepsilon$ 的规范变换下理论不变，后文不加说明都在所谓 **retarded radial 规范**下进行计算 [58, 59]：

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^+ &: A_r = 0, \quad A_u|_{\mathcal{I}^+} = 0 \\ \mathcal{I}^- &: A_r = 0, \quad A_v|_{\mathcal{I}^-} = 0 \end{aligned} \tag{23.4}$$

在 $\mathcal{I}^\pm$ 附近可以把 A, F 展开成 $\mathcal{O}(1/r)$ 的形式，用 $A^{(i)}, F^{(i)}$ 表示 r^{-i} 项前的系数，那么在这一规范下有 [10]：

[10] 各项系数都只和 $(u, z, \bar{z})$ 相关了

$$F_{ur}^{(0)} = A_u^{(0)}, F_{z\bar{z}}^{(0)} = \partial_z A_{\bar{z}}^{(0)} - \partial_{\bar{z}} A_z^{(0)}, F_{uz}^{(0)} = \partial_u A_z^{(0)}, F_{rz}^{(0)} = -A_z^{(1)} \tag{23.5}$$

而且我们所关心的场位形在 $\mathcal{I}_+^+$ 处为真空，即满足：

$$F_{ur}|_{\mathcal{I}_+^+} = F_{uz}|_{\mathcal{I}_+^+} = 0 \tag{23.6}$$

$\mathcal{I}^-$ 处类似。但这个规范选取就如库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 一样没有完全确定规范，$A_z^{(0)}$ 还可以进行下面的所谓 Large gauge transformation：

$$A_z^{(0)} \mapsto A_z^{(0)} + \partial_z \varepsilon(z, \bar{z}), \quad \forall \varepsilon \in C^\infty \left[C\mathcal{S}^2\right] \tag{23.7}$$

规范变换是一种冗余，但是这里的 Large gauge transformations 最大的特点就是在无穷远处不归零，这导致很多时候分部积分的边界项不能丢去，确确实实的成为了一个对称性，后面马上会看到会对应无穷多个守恒荷。

运动电荷激发的电磁场即所谓 Liénard-Wiecher 势 [60]。这里我们在天球坐标下将 advanced 和 retarded 势统一写为：

$$F_{rt}(\vec{x}, t) = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k \left(r - t\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k\right)}{\left|\gamma_k^2 \left(t - r\hat{x} \cdot \vec{\beta}_k\right)^2 - t^2 + r^2\right|^{3/2}}, \quad r^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} = r\hat{x} \tag{23.8}$$

其中我们假设所有电荷之间匀速运动，而且相互作用可忽略，这个假设有点强，但是请**相信**后面导出的结论是可以推广到一般情形的。现在计算在天球上的极限：

$$\begin{aligned} F_{rt}|_{\mathcal{I}^+} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 - \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2} \\ F_{rt}|_{\mathcal{I}^-} &= \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 + \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k)^2} \end{aligned} \tag{23.9}$$

取极限，得到：

$$\boxed{F_{rt}|_{\mathcal{I}_-^+} \neq F_{rt}|_{\mathcal{I}_+^-}} \tag{23.10}$$

正是这个式子说明了要严格区分 $\mathcal{I}_-^+, \mathcal{I}_+^-$ 和 i^0。但是，因为 $F_{ru} = F_{rt} = F_{rv}$：

$$\boxed{\lim_{r \to \infty} r^2 F_{ru}(\hat{x})\Big|_{\mathcal{I}_-^+} = \lim_{r \to \infty} r^2 F_{rv}(-\hat{x})\Big|_{\mathcal{I}_+^-}} \tag{23.11}$$

也就是说场在两个天球上是对径认同的，这也是为什么前面 $\mathcal{I}^\pm$ 天球的角向选取是 antipodal 的，上边的式子可以写成下面很简洁的形式：

$$\boxed{F_{ru}^{(2)}(z, \bar{z})\Big|_{\mathcal{I}_-^+} = F_{rv}^{(2)}(z, \bar{z})\Big|_{\mathcal{I}_+^-}} \tag{23.12}$$

这个式子是普适的，而且非常重要，是后面散射问题的核心。现在考虑任意一个天球上的对径认同的函数：

$$\varepsilon(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = \varepsilon(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} \tag{23.13}$$

定义下面的 future charges 和 past charges：

$$\boxed{Q^+_\varepsilon = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+_-} \varepsilon * F, \quad Q^-_\varepsilon = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^-_+} \varepsilon * F} \tag{23.14}$$

由于 Hodge 对偶后出来的体积元 $\propto r^2$，所以在天球上 $r\to\infty$，$F\to F^{(2)}$，再根据对径认同的条件，这样对于任意一个函数 ε，我们都给出了一个“电荷”守恒律：

$$\boxed{Q^+_\varepsilon = Q^-_\varepsilon} \tag{23.15}$$

对于 ε 是常函数情形，就得到了一般的电荷守恒律。利用 Stokes 公式 [11]可以改写 $Q^\pm_\varepsilon$ 为 [12]：

[11] $\int_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega d\omega$

[12] Q^-_ε 只用把 $+\mapsto -$

$$Q^+_\varepsilon = \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+} \mathrm{d}\varepsilon\wedge *F + \int_{\mathcal{I}^+}\varepsilon * j + \cancelto{0}{\frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+_+}\varepsilon * F} \tag{23.16}$$

最后一项为 0 是因为我们假设电子是无质量的，这样电子就是从 $\mathcal{I}^-\to\mathcal{I}^+$，而不是 $i^-\to i^+$，所以 $F|_{\mathcal{I}^+_+}=0$。第一项是 Soft term Q^+_S 与软光子的产生湮灭有关，第二项由于是与流耦合，所以叫 Hard term Q^+_H 与带电实物粒子有关。将上面的微分形式写成分量形式 [13]：

[13] 其中使用了 *Bianchi* 恒等式：$\partial_u F^{(2)}_{ru} + D^z F^{(0)}_{uz} + D^{\bar{z}} F^{(0)}_{u\bar{z}} + e^2 j^{(2)}_u = 0$

$$Q^+_\varepsilon = \underbrace{-\frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{I}^+} du d^2z\left(\partial_z\varepsilon F^{(0)}_{u\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\varepsilon F^{(0)}_{uz}\right)}_{Q^+_S} + \underbrace{\int_{\mathcal{I}^+} du d^2z\varepsilon\gamma_{z\bar{z}} j^{(2)}_u}_{Q^+_H} \tag{23.17}$$

定义 Soft photon mode N_z：

$$N_z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} du F^{(0)}_{uz} = \lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} du F^{(0)}_{uz} e^{i\omega u} \tag{23.18}$$

再次看到 N_z 对应的是电磁场的零频部分，也就是软光子部分，而且有：

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}} N_z - \partial_z N_{\bar{z}} &= \int_{-\infty}^{\infty} du\left[\partial_{\bar{z}} F^{(0)}_{uz} - \partial_z F^{(0)}_{u\bar{z}}\right] \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} du\, \partial_u F^{(0)}_{z\bar{z}} = -F^{(0)}_{z\bar{z}}\Big|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} = 0\end{aligned} \tag{23.19}$$

最后等于 0 是因为 $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}^\pm_+}=0$，本质上是因为没有磁单极子，磁场不是 long-range 的，在无穷远处为 0[14]。所以 N_z 无旋，可以由此引申出一个实标量场 N 作为其原函数：

[14] 因为 $F_{z\bar{z}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z}\frac{\partial x^\nu}{\partial\bar{z}}F_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial z}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{z}}F_{ij}$，而规范场强的空间分量 F_{ij} 只和磁场有关。

$$N_z \equiv e^2\partial_z N = \int_{-\infty}^{\infty} du F^{(0)}_{uz} = A^{(0)}_z|_{\mathcal{I}^+_+} - A^{(0)}_z|_{\mathcal{I}^+_-} \tag{23.20}$$

利用 N，future charges 可以写成下面简洁形式：

$$Q^+_\varepsilon = 2\int_{\mathcal{S}^2_\infty} d^2z N\partial_z\partial_{\bar{z}}\varepsilon + \int_{\mathcal{I}^+} du d^2z\varepsilon\gamma_{z\bar{z}} j^{(2)}_u \tag{23.21}$$

对 past charge 也可以来上面的这一套：

$$Q_{\varepsilon}^{-}=-2\int_{\mathcal{S}_{\infty}^{2}}d^{2}zN^{-}\partial_{z}\partial_{\bar{z}}\varepsilon+\int_{\mathcal{I}^{-}}dvd^{2}z\varepsilon\gamma_{z\bar{z}}j_{v}^{(2)} \tag{23.22}$$

Subsection 23.2

Quantization

上面讨论的都是经典场，现在进行量子化，目的是说明前面定义的 future charge 和 past charges 都是 Large gauge transformations 对应的生成元算符。量子化方案选用正则量子化方案，这里使用的方法不需要事先对时空进行 3+1 分解，是协变的方法 [61–65]。

经典力学的正则形式是建立在辛几何上的，也就是给相流形上配备了一个非退化的、闭的二形式 [66]：

$$\Omega=\frac{1}{2}\omega_{IJ}dx^{I}\wedge dx^{J} \tag{23.23}$$

而且可以证明，可以通过选取不同的广义坐标局部的将 ω_{IJ} 化为下面的矩阵：

$$\omega_{IJ}=\begin{bmatrix}0 & 1_{N\times N}\\ -1_{N\times N} & 0\end{bmatrix} \tag{23.24}$$

力学量的 Possion 括号由下式给定：

$$\{A,B\}=\Omega^{IJ}\partial_{I}A\partial_{J}B \tag{23.25}$$

相空间是运动方程的解，可以与初始值一一对应。

到了场论这边，相空间我们可以选取为某一个柯西面 Σ 上的场位形。场 ϕ 本身是流形上的微分形式，??中的 dx 应该替换为 $\delta\phi$，这里 δ 是场位形的在壳变分，也就是说 $\phi+\delta\phi$ 仍然是场方程的解。场本身是定义在某个纤维丛上的，可以粗浅的理解为两个流形拼起来，而 d 是底流形上的微分形式算子，δ 事实上是另一个正交的微分形式算子，所以 $\delta\phi$ 在 δ 的意义上是 1-form，在 d 的意义上 δ 的作用不会改变其是几形式，这样 Ω 形如 $\delta\phi\wedge\delta\varphi$ 从 δ 的意义上看就是个二形式。构建的微分形式还应当满足规范不变性，闭且非退化，而且还要对柯西面的不同选取一致，利用 [65] 中方法可以得到 $U(1)$ 规范场的辛形式为：

$$\Omega_{\Sigma}=-\frac{1}{e^{2}}\int_{\Sigma}\delta(*F)\wedge\delta A \tag{23.26}$$

将柯西面选取为 $\mathcal{I}^{\pm}$，得到分量为：

$$\begin{aligned}\omega_{uz\bar{z}}|_{\mathcal{I}}+&=-\frac{1}{e^{2}}\left[\delta(*F)_{uz}\wedge\delta A_{\bar{z}}+\delta(*F)_{\bar{z}u}\wedge\delta A_{z}+\delta(*F)_{z\bar{z}}\wedge\delta A_{u}\right]_{\mathcal{I}^{+}}\\&=-\frac{i}{e^{2}}\left[\delta F_{uz}^{(0)}\wedge\delta A_{\bar{z}}^{(0)}+\delta F_{u\bar{z}}^{(0)}\wedge\delta A_{z}^{(0)}\right],\end{aligned} \tag{23.27}$$

其中利用了：[15]

$$(*F)_{uz}=i\left(F_{uz}-F_{rz}\right),\quad(*F)_{z\bar{z}}=ir^{2}\gamma_{z\bar{z}}F_{ru} \tag{23.28}$$

最终得到辛形式：

$$\Omega_{\mathcal{I}^{+}}=\frac{1}{e^{2}}\int dud^{2}z\left[\delta F_{uz}^{(0)}\wedge\delta A_{\bar{z}}^{(0)}+\delta F_{u\bar{z}}^{(0)}\wedge\delta A_{z}^{(0)}\right] \tag{23.29}$$

总是可以把 A_z 的 $u\to\pm\infty$，也就是 $\mathcal{I}_{\pm}^{+}$ 的与 u 无关的部分分离出去，这一部分又总是可以写成某个天球上标量场的导数，因为要求 $F_{z\bar{z}}|_{\mathcal{I}_{+}^{\pm}}=0$：

$$A_{z}^{(0)}(u,z,\bar{z})=\hat{A}_{z}(u,z,\bar{z})+\partial_{z}\phi(z,\bar{z}),\quad\partial_{z}\phi\equiv\frac{1}{2}\left[A_{z}^{(0)}\Big|_{\mathcal{I}_{+}^{+}}+A_{z}^{(0)}\Big|_{\mathcal{I}_{-}^{+}}\right] \tag{23.30}$$

[15] 注意到 *Levi-Civita* 符号不是张量，而是张量密度，$\sqrt{-g}\epsilon$ 才是张量，然后利用 *Hodge dual* 定义爆算即可

利用上面的分解以及 soft photon mode 重写 23.29：

$$\Omega_{\mathcal{I}^+}=\frac{2}{e^2}\int dud^2z\partial_u\delta\hat{A}_z\wedge\delta\hat{A}_{\bar{z}}-2\int d^2z\partial_z\delta\phi\wedge\partial_{\bar{z}}\delta N \tag{23.31}$$

现在考虑正则量子化，场变成算符，而 Poisson 括号换成 Dirac 括号：[16]

[16] $\{\ ,\ \}\mapsto\frac{1}{i}[\ ,\ ]$

$$\begin{aligned}-\frac{2}{e^2}\left[\partial_u\hat{A}_z(u,z,\bar{z}),\hat{A}_{\bar{w}}(u',w,\bar{w})\right]&=i\delta(u-u')\delta^2(z-w),\\ 2\left[\partial_z\phi(z,\bar{z}),\partial_{\bar{w}}N(w,\bar{w})\right]&=i\delta^2(z-w).\end{aligned} \tag{23.32}$$

积分得到：[17]

[17] 这里
$$\Theta(u)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{d\omega}{\omega}e^{i\omega u}=\begin{cases}+1 & ,u>0\\ -1 & ,u<0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}_z(u,z,\bar{z}),\hat{A}_{\bar{w}}(u',w,\bar{w})\right]&=-\frac{ie^2}{4}\Theta(u-u')\delta^2(z-w),\\ \left[\phi(z,\bar{z}),N(w,\bar{w})\right]&=-\frac{i}{4\pi}\log|z-w|^2+f(z,\bar{z})+g(w,\bar{w}).\end{aligned} \tag{23.33}$$

Subsection 23.3

Large guage symmetry

利用上面发展的对易式可以去计算 $Q_\varepsilon^\pm$ 与场算符的对易关系，注意到物质场部分 Q_H 始终和规范场 A 对易，所以：

$$\begin{aligned}\left[Q_\varepsilon^+,A_z^{(0)}(u,z,\bar{z})\right]&=i\partial_z\varepsilon(z,\bar{z}),\\ \left[Q_\varepsilon^-,A_z^{(0)}(v,z,\bar{z})\right]&=i\partial_z\varepsilon(z,\bar{z}).\end{aligned} \tag{23.34}$$

所以前面定义的守恒荷其实就是对径认同的 Large gauge transformation 的生成元，自然就是一个守恒荷！前面的讨论一直忽略了流耦合项 S_M，加入后对前面的结论不会有影响，注意到 Q_S 与物质场对易，根据 Noether 定理：

$$\left[j_u^{(2)}(u',w,\bar{w}),\Phi_k(u,z,\bar{z})\right]=-Q_k\Phi_k(u,z,\bar{z})\gamma^{z\bar{z}}\delta^2(z-w)\delta(u-u') \tag{23.35}$$

这意味着：

$$\left[Q_\varepsilon^+,\Phi_k(u,z,\bar{z})\right]=\left[\int_{\mathcal{I}^+}\varepsilon*j,\Phi_k(u,z,\bar{z})\right]=-Q_k\varepsilon(z,\bar{z})\Phi_k(u,z,\bar{z})\equiv i\delta_\varepsilon\Phi_k(u,z,\bar{z}) \tag{23.36}$$

所以 Q_S 生成规范场的规范变换，Q_H 生成费米场规范变换，合起来 Q_ε 生成 $\mathcal{I}^+$ 上的 local 规范变换。

Section 24

Ward indentity = Soft theorem

Subsection 24.1

Ward indentity of $\mathcal{S}$-Matrix

量子力学里面就知道守恒意味着与哈密顿量对易，而 $\mathcal{S}\sim\exp\{iHT\}$，所以前面的守恒荷会和 $\mathcal{S}$ 对易：[18]

[18] 初末态基底选取平面波。

$$\boxed{\langle\text{out}|\left(Q_\varepsilon^+\mathcal{S}-\mathcal{S}Q_\varepsilon^-\right)|\text{in}\rangle=0} \tag{24.1}$$

这样一个简单的式子就是 $\mathcal{S}$-Matrix 的 Ward identity。利用 23.21 和 23.22 得到：

$$
\begin{aligned}
Q_\varepsilon^-|\text{in}\rangle &= -2\int d^2z\partial_{\bar z}\varepsilon\partial_z N^-(z,\bar z)|\text{in}\rangle + \sum_{k=1}^m Q_k^{\text{in}}\varepsilon(z_k^{\text{in}},\bar z_k^{\text{in}})|\text{in}\rangle \\
\langle\text{out}|Q_\varepsilon^+ &= 2\int d^2z\partial_z\partial_{\bar z}\varepsilon\langle\text{out}|N(z,\bar z) + \sum_{k=1}^n Q_k^{\text{out}}\varepsilon(z_k^{\text{out}},\bar z_k^{\text{out}})\langle\text{out}|
\end{aligned}
\tag{24.2}
$$

第一项没啥好说的，后面会讨论其物理含义，第二项的计算稍微提一下。首先我们假设入射态是 m 个 hard particles，而且来自于天球上的点 z_k^{in}，23.36 给出了守恒荷与物质场之间的对易关系，实际上，不难证明守恒荷和产生湮灭算符也满足同样的对易关系 [19]。以两个入射粒子为例：

[19] 比如标量场 [33]

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = -i\int d^3x e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x)$$

$$
\begin{aligned}
Q_\varepsilon^-|\text{in}\rangle &\sim Q_\varepsilon^- a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle \\
&\sim \left[Q_\varepsilon^-, a_1^\dagger a_2^\dagger\right]|0\rangle + \cancelto{0}{a_1^\dagger a_2^\dagger Q_\varepsilon^-|0\rangle} \\
&\sim \left[Q_\varepsilon^-, a_1^\dagger\right]a_2^\dagger|0\rangle + a_1^\dagger\left[Q_\varepsilon^-, a_2^\dagger\right]|0\rangle \\
&\sim Q_1\varepsilon_1|\text{in}\rangle + Q_2\varepsilon_2|\text{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{24.3}
$$

第二行我们利用了真空态一定是没荷的。现在可以把 24.1 写为：

$$
\begin{aligned}
&2\int d^2z\partial_z\partial_{\bar z}\varepsilon\langle\text{out}|\left(N(z,\bar z)\mathcal{S} - \mathcal{S}N^-(z,\bar z)\right)|\text{in}\rangle \\
&\qquad = \left[\sum_{k=1}^m Q_k^{\text{in}}\varepsilon(z_k^{\text{in}},\bar z_k^{\text{in}}) - \sum_{k=1}^n Q_k^{\text{out}}\varepsilon(z_k^{\text{out}},\bar z_k^{\text{out}})\right]\langle\text{out}|\mathcal{S}|\text{in}\rangle
\end{aligned}
\tag{24.4}
$$

取 $\varepsilon(z,\bar z) = \frac{1}{w-z}$，则上式可以写为如下形式：[20]

[20]
$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z-w} = 2\pi\delta^2(z-w)$$

$$4\pi\langle\text{out}|\left(\partial_z N\mathcal{S} - \mathcal{S}\partial_z N^-\right)|\text{in}\rangle = \left[\sum_{k=1}^m \frac{Q_k^{\text{in}}}{z - z_k^{\text{in}}} - \sum_{k=1}^n \frac{Q_k^{\text{out}}}{z - z_k^{\text{out}}}\right]\langle\text{out}|\mathcal{S}|\text{in}\rangle \tag{24.5}$$

这个等式其实就是带有 U(1) Kăc-Moody current 的 CFT_2 的 Ward 恒等式 [67–70]。

SUBSECTION 24.2

Mode expansion

本部分的终极目标是证明 Ward 恒等式可以联系渐近对称性和软定理，前文从相空间角度给出了 Ward 恒等式，在动量空间给出了软定理，是时候在动量空间重写 Ward 恒等式了，重点就是将场算符用平面波展开，也就是正则量子化的过程。free mode expansion 弯曲时空量子力学领域已经不少人算过了，U(1) 规范理论结果如下：

$$A_\nu(x) = e\sum_{\alpha=\pm}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_q}\left[\varepsilon_\nu^{*\alpha}(\vec q)a_\alpha^{\text{out}}(\vec q)e^{iq\cdot x} + \varepsilon_\nu^\alpha(\vec q)a_\alpha^{\text{out}}(\vec q)^\dagger e^{-iq\cdot x}\right] \tag{24.6}$$

q 是平面波在壳动量 $q^2=0$，$\varepsilon_\mu^\pm$ 是极化矢量，常常取为：

$$\varepsilon^{+\mu}(\vec q) = \frac{1}{\sqrt2}(\bar z, 1, -i, -\bar z), \quad \varepsilon^{-\mu}(\vec q) = \frac{1}{\sqrt2}(z, 1, i, -z), \quad q_\mu\varepsilon^{\pm\mu}(\vec q) = 0, \quad \varepsilon_\alpha^\mu\varepsilon_{\beta\mu}^* = \delta_{\alpha\beta} \tag{24.7}$$

产生湮灭算符之间满足对易关系：

$$\left[a_\alpha^{\text{out}}(\vec q), a_\beta^{\text{out}}(\vec q\,')^\dagger\right] = \delta_{\alpha\beta}(2\pi)^3(2\omega_q)\delta^3(\vec q - \vec q\,') \tag{24.8}$$

定义内积：

$$(A, A') = -i\int d\Sigma^{\mu}[A^{\nu}(\nabla_{\mu}A'^{*}_{\nu} - \nabla_{\nu}A'^{*}_{\mu}) - (A \leftrightarrow A'^{*})] \tag{24.9}$$

这样定义的内积与类空超曲面 Σ 的选取是无关的。这样一来产生湮灭算符可以写成：

$$a_{\pm}(q) = i(A, (\epsilon^{\pm}e^{iq\cdot x})^{*}) \tag{24.10}$$

对于 $\mathcal{I}^{-}$ 类似讨论，结果只是把 out 改成 in。下面计算 $A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) \equiv \lim_{r\to\infty} A_z(u, r, z, \bar{z})$ 的模式展开：[21]

[21] 这里 $\hat{q}, \hat{x}$ 都是指其空间部分

$$\begin{aligned}
A_{\mu}(x) =& e\sum_{\alpha=\pm}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_q}\Big[\varepsilon^{*\alpha}_{\mu}(\vec{q})a_{\alpha}(\vec{q})e^{-i\omega_q u - i\omega_q r(1-\hat{q}\cdot\hat{x})} \\
&+\varepsilon^{\alpha}_{\mu}(\vec{q})a^{\dagger}_{\alpha}(\vec{q})e^{i\omega_q u + i\omega_q r(1-\hat{q}\cdot\hat{x})}\Big] \\
=& \frac{e}{8\pi^2}\sum_{\alpha=\pm}\int_0^{\infty} d\omega_q\omega_q\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\Big[\varepsilon^{*\alpha}_{\mu}(\vec{q})a_{\alpha}(\vec{q})e^{-i\omega_q u - i\omega_q r(1-\cos\theta)} \\
&+\varepsilon^{\alpha}_{\mu}(\vec{q})a^{\dagger}_{\alpha}(\vec{q})e^{i\omega_q u + i\omega_q r(1-\cos\theta)}\Big].
\end{aligned} \tag{24.11}$$

这里 θ 是 $\hat{q}$ 和 $\hat{x}$ 之间的夹角，利用数学公式 [22]：

[22] 来源是鞍点近似

$$\lim_{r\to\infty}\sin\theta e^{i\omega_q r(1-\cos\theta)} = \frac{i}{\omega_q r}\delta(\theta) + \mathcal{O}((r)^{-2}) \tag{24.12}$$

代入得到：

$$A_{\mu}(x) = -\frac{ie}{8\pi^2 r}\sum_{\alpha=\pm}\int_0^{\infty} d\omega_q\left[\varepsilon^{*\alpha}_{\mu}(\omega_q\hat{x})a_{\alpha}(\omega_q\hat{x})e^{-i\omega_q u} - c.c.\right] + \mathcal{O}(r^{-2}) \tag{24.13}$$

我们要求的玩意儿是 $A_z = \partial_z x^{\mu}A_{\mu}$，注意到：

$$\partial_z x^{\mu}\varepsilon^{+}_{\mu}(\omega_q\hat{x}) = 0, \quad \partial_z x^{\mu}\varepsilon^{-}_{\mu}(\omega_q\hat{x}) = \frac{\sqrt{2}r}{1+z\bar{z}}$$

最终求得：[23]

[23] 下文中的 ω 指 ω_q，即 q^0

$$A_z^{(0)}(u, z, \bar{z}) = -\frac{i}{8\pi^2}\frac{\sqrt{2}e}{1+z\bar{z}}\int_0^{\infty} d\omega\left[a_{+}^{\text{out}}(\omega\hat{x})e^{-i\omega u} - a_{-}^{\text{out}}(\omega\hat{x})^{\dagger}e^{i\omega u}\right] \tag{24.14}$$

把定义式**??**改写为厄米的形式：

$$\partial_z N = \frac{1}{2e^2}\lim_{\omega\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} du\left(e^{i\omega u} + e^{-i\omega u}\right)F_{uz}^{(0)} \tag{24.15}$$

利用 $A_z^{(0)}$ 重写上式为：

$$\partial_z N = -\frac{1}{8\pi e}\frac{\sqrt{2}}{1+z\bar{z}}\lim_{\omega\to 0^+}\left[\omega a_{+}^{\text{out}}(\omega\hat{x}) + \omega a_{-}^{\text{out}}(\omega\hat{x})^{\dagger}\right] \tag{24.16}$$

在 $\mathcal{I}^-$ 上也有类似式子，只需要把 $N \to N^-$,out→in 就好。现在可以看出来为啥要叫 soft photon mode 了。根据前面的铺垫，24.5 终于可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\lim_{\omega\to 0}\left\lfloor\omega\langle\text{out}|\left(a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x})\mathcal{S}\ \ -\mathcal{S}a_-^{\text{in}}(\omega\hat{x})^\dagger\right)|\text{in}\rangle\right.\\&\qquad\qquad=\sqrt{2}e(1+z\bar{z})\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k^{\text{out}}}{z-z_k^{\text{out}}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{Q_k^{\text{in}}}{z-z_k^{\text{in}}}\right]\langle\text{out}|\mathcal{S}|\text{in}\rangle\end{aligned} \tag{24.17}$$

Subsection 24.3
Soft photon & graviton

前面用费曼图导出的软定理可以用 $\mathcal{S}$ 矩阵写成如下形式：

$$\lim_{\omega\to 0}\left[\omega\langle\text{out}|a_+^{\text{out}}(\vec{q})\mathcal{S}|\text{in}\rangle\right]=e\lim_{\omega\to 0}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\omega Q_k^{\text{out}}p_k^{\text{out}}\cdot\varepsilon^+}{p_k^{\text{out}}\cdot q}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega Q_k^{\text{in}}p_k^{\text{in}}\cdot\varepsilon^+}{p_k^{\text{in}}\cdot q}\right]\langle\text{out}|\mathcal{S}|\text{in}\rangle \tag{24.18}$$

这里出射和入射态都是平面波为基，而且我们把元电荷作为公因子提出，$Q\in\mathbb{Z}$，出入射动量用 Embedding 的形式写出来，前面第三部分写过，这里再写一遍：

$$\begin{aligned}q^\mu&=\frac{\omega}{1+z\bar{z}}\left(1+z\bar{z},z+\bar{z},-i(z-\bar{z}),1-z\bar{z}\right),\\p_k^\mu&=\frac{E_k}{1+z_k\bar{z}_k}\left(1+z_k\bar{z}_k,z_k+\bar{z}_k,-i(z_k-\bar{z}_k),1-z_k\bar{z}_k\right)\end{aligned} \tag{24.19}$$

注意到：

$$\varepsilon_+^\mu(q)=\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z\left[(1+z\bar{z})\,q^\mu\right],\quad\varepsilon_-^\mu(q)=\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_{\bar{z}}\left[(1+z\bar{z})\,q^\mu\right] \tag{24.20}$$

带进去一通暴力计算，软定理被我们写成了：

$$\lim_{\omega\to 0^+}\left[\omega\langle\text{out}|\,a_+^{\text{out}}(\omega\hat{x})\mathcal{S}\,|\text{in}\rangle\right]\ =\frac{e}{\sqrt{2}}(1+z\bar{z})\left[\sum_{k\in\text{out}}\frac{Q_k}{z-z_k}-\sum_{k\in\text{in}}\frac{Q_k}{z-z_k}\right]\langle\text{out}|\,\mathcal{S}\,|\text{in}\rangle \tag{24.21}$$

根据 $\mathcal{CPT}$ 不变性：[24]

$$\langle\text{out}|a_+^{\text{out}}(\vec{q})\mathcal{S}|\text{in}\rangle=-\langle\text{out}|\mathcal{S}a_-^{\text{in}\dagger}(\vec{q})|\text{in}\rangle \tag{24.22}$$

结合上面两个式子就证明了 Ward 恒等式和软定理是一回事，或者说通过 Ward 恒等式，软定理和 Large gauge symmetry 是一回事。这其实反过来说明了我们找到的 Large gauge symmetry 是 non-trivial 的，确实得看作是一个渐近对称性。这种 non-trivial 从记忆效应也能体现出来，后面会详细讨论。

回到引力这边，这边的证明思路上差不多，但是有很多比较微妙的点。首先就是守恒荷的量子化，虽然也可以按照 QED 那边的方法一样做，但是技术细节上微妙许多。不过我们可以猜测它们应当有如下形式：

$$\boxed{\left[Q_f^+,\cdots\right]=i\delta f,\quad\left[Q_f^-,\cdots\right]=i\delta Y} \tag{24.23}$$

至于 δ_f 和 δ_Y 的形式前面已经算过了，而且它们都是和哈密顿量对易的，这也是利用 Ward 恒等式的基础。第一个式子证明相对简单，可以看文献 [71]，第二个等式要复杂许

[24] ?

多，首先是需要下面几个式子 [61, 72–74]：

$$
\begin{aligned}
\left[N_{\bar z\bar z}(u,z,\bar z), C_{ww}(u',w,\bar w)\right] &= 16\pi G i\gamma_{z\bar z}\delta^2(z-w)\delta(u-u') \\
[Q_S^+, C_{zz}] &= -iuD_z^3Y^z, \\
[Q_H^+, C_{zz}] &= \frac{iu}{2}D\cdot YN_{zz} + iY\cdot DC_{zz} - \frac{i}{2}D\cdot YC_{zz} + 2iD_zY^zC_{zz}
\end{aligned}
\tag{24.24}
$$

而且 Superrotation 对应的相空间也更加复杂 [75]。这些都只能先 argue 一下，细说太麻烦。同样也可以给出模式展开，这个时候 $g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+\kappa h^{\mu\nu}$，$h^{\mu\nu}$ 满足 linearized Einstein equation：

$$\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{24.25}$$

Mode expansion 为：

$$h_{\mu\nu}(x) = \kappa\sum_{\alpha\in\pm}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k^0}\left[\epsilon^{\alpha*}_{\mu\nu}a_\alpha e^{ik\cdot x} + \epsilon^{\alpha}_{\mu\nu}a^\dagger_\alpha e^{-ik\cdot x}\right] \tag{24.26}$$

若 $h=0$，内积定义为：

$$(h,h') = -i\int d\Sigma^\rho[h^{\mu\nu}(\nabla_\rho h'^*_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu h'^*_{\rho\nu}) - (h\leftrightarrow h'^*)] \tag{24.27}$$

同样也可以用鞍点近似去求度规里的那些参数的模式展开，然后去证明软引力子定理，详细的计算移步至文献 [22, 71]。

SUBSECTION 24.4

Asymptotic analysis on QED

这一节的主要目的是讲一下历史进程，文献最早是通过类似于 BMS 的渐近分析得到守恒荷这些 [58, 69]。分析渐近对称性的第一步就是指定边界条件，从而找到允许的对称性。由于 T_{uu} 是能动张量 T_{00} 和 T_{0i} 的线性组合，所以它现在代表能流，由于天球半径按照 r^2 增大，所以为了让能量有限大，$T_{uu}\sim\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$，根据 Noether 定理：

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho \tag{24.28}$$

进行对称化操作得到：[25]

$$T_S^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\partial_\rho\left(F^{\rho\mu}A^\nu\right) = \frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho \tag{24.29}$$

改到 Bondi 坐标下：

$$T_{uu}\sim F_{uz}F_{u\bar z}\frac{\gamma^{z\bar z}}{r^2}+\dots \tag{24.30}$$

这个式子意味着 $F_{uz}\sim\mathcal{O}(1)$，再根据 F_{ru},F_{rz} 是电磁场分量，所以渐近行为均为 $\mathcal{O}(1/r^2)$。下面的一组 A 的渐近行为选取就满足这几个条件：[26,27]

$$A_z\sim\mathcal{O}(1),\quad A_r\sim\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad A_u\sim\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{24.31}$$

而满足这一边界条件的规范变换只能是：

$$\varepsilon = \varepsilon(z,\bar z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{24.32}$$

[25] 这样子做最大的好处是现在不显含 A，与规范无关了

[26] 这一节我们并不取定规范

[27] 这个条件充分但不必要，但是根据文献 *[76–78]* 的讨论，选别的理论会变得不是很自然。

无穷远（天球）处不归零，就是前面说的 Large gauge transformations。类似于引力散射问题的分析，QED 这边散射问题为了 well-define，也必须把对径认同的要求看作是散射问题定义的一部分。

Section 25
Massive QED

Section 26
Further Progress

Subsection 26.1
Subleading order

Subsection 26.2
Non-Abelian gauge theory

Subsection 26.3
Higher dimensions

PART

VI

A Crush Course on CFT

Celestial Amplitudes & CCFT

PART VII

Section 27

Conformal basis

QFT 中利用费曼图计算散射振幅都是在动量空间下进行的，也就是选取在平面波为基底，这样做最大的好处是可以显现出平移对称性。但是在考虑天球上的散射问题时，很显然我们应当最大化利用共性对称性，所以基底应该选取为类似 CFT 中初级场的形式，称之为“Conformal Primary Wave Function”，这样 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的散射振幅就有希望在这个基底下类似于 CFT_d 中的 n 点关联函数，Clifford Cheung 很早就利用这个基底对一些特殊情形进行了研究 [79][1]。现在顺着文献 [81] 的思路来介绍这一组基底。

[1] 历史上最早可以追溯到 *Dirac*[80]

Subsection 27.1

Massive Scalar

Definition 1 (Massive Scalar Conformal Primary Wave Function) 自旋为 0 的标量场既没有 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 上的 $SO(d+1,1\uparrow$ 指标，也没有 spinning CFT 特有的张量指标，或者说处于 $SO(d)$ 的标量表示。对于平面波，我们使用在壳动量来标记基底，现在我们使用 $\Delta\in\mathbb{C},\vec{w}$ 来标记基底。

- 在壳：
$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\nu}\frac{\partial}{\partial X_\nu}-m^2\right)\phi_\Delta\left(X^\mu;\vec{w}\right)=0 \tag{27.1}$$
- 在共形变换和 $SO(d+1,1)$ 下协变：
$$\phi_\Delta\left(\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu;\vec{w}'(\vec{w})\right)=\left|\frac{\partial\vec{w}'}{\partial\vec{w}}\right|^{-\Delta/d}\phi_\Delta\left(X^\mu;\vec{w}\right) \tag{27.2}$$

  这里 $\vec{w}\to\vec{w}'$ 是共形变换 [a]，$\Lambda^\mu{}_\nu$ 是诱导的 Lorentz 变换。

[a] 注意，对于 $d=2$ 的情形，对应的是全局共形变换，更类似于准初级场。

后面的讨论使用 Embedding 形式将 $\mathbb{R}^d$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 的光锥，再次写下这个嵌入：

$$q^\mu(\vec{w})=\left(1+|\vec{w}|^2,2\vec{w},1-|\vec{w}|^2\right),\quad q^\mu(\vec{w}')=\left|\frac{\partial\vec{w}'}{\partial\vec{w}}\right|^{\frac{1}{d}}\Lambda^\mu{}_\nu q^\nu(\vec{w}) \tag{27.3}$$

粒子在壳动量 $p^2=-m^2$，由于质量是固定的，抽出动量方向得到 $\hat{p}^2=-1$，而这其实就说明 $\hat{p}$ 位于 unit hyperboloid space $\mathbb{H}_{d+1}$ 上 [2]。可以利用 Poincaré half-plane 对 $\mathbb{H}_{d+1}$ 进行参数化：

$$ds^2_{\mathbb{H}_{d+1}}=\frac{dy^2+d\vec{z}\cdot d\vec{z}}{y^2},\quad y>0,\vec{z}\in\mathbb{R}^d \tag{27.4}$$

[2] $\mathbb{H}_{d+1}$ 表示 $d+1$ 维截面曲率恒为 -1 的超曲面，*Killing-Hopf* 定理保证这样的曲面只有这一种

$y=0$ 对应 $\partial\mathbb{H}_{d+1}$。$ds^2_{\mathbb{H}_{d+1}}$ 天然是 $SO(d+1,1)$ 不变的，也就是在下面的变换下不变：

- $\mathbb{R}^d$ translation : $\quad y'=y,\quad \vec{z}'=\vec{z}+\vec{a},$

- $SO(d)$ rotation : $y' = y, \quad \vec{z}' = M \cdot \vec{z},$

- dilation : $\quad y' = \lambda y, \quad \vec{z}' = \lambda \vec{z}$

- special conformal transformation : $y' = \frac{y}{1+2\vec{b}\cdot\vec{z}+|\vec{b}|^2(y^2+|\vec{z}|^2)}, \quad \vec{z}' = \frac{\vec{z}+\left(y^2+|\vec{z}|^2\right)\vec{b}}{1+2\vec{b}\cdot\vec{z}+|\vec{b}|^2(y^2+|\vec{z}|^2)}$

任意在在壳动量 $m\hat{p}$ 可以参数化为：

$$\hat{p}(y, \vec{z}) = \left(\frac{1+y^2+|\vec{z}|^2}{2y}, \frac{\vec{z}}{y}, \frac{1-y^2-|\vec{z}|^2}{2y}\right) \tag{27.5}$$

这其实就是在将 $\mathbb{H}_{d+1}$ 嵌入到 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ 的未来光锥部分 [3]，比如 $\mathbb{R}^{3,1}$ 的时空图就可以分层为：

[3] 因为 $\hat{p}^0 > 0$

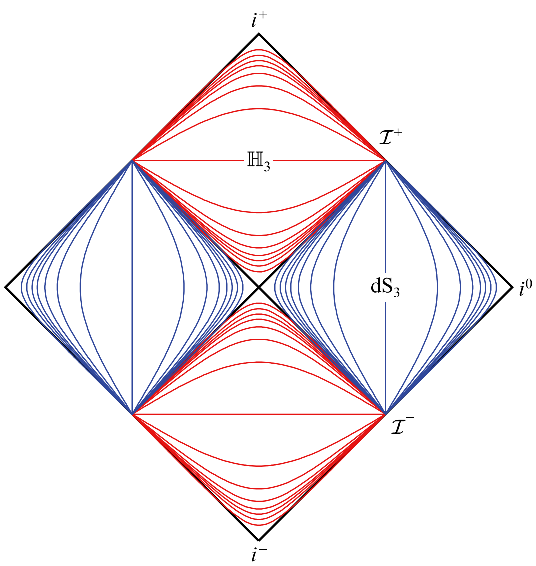


图 9. $Mink_4$ 时空的叶状结构

我们只使用 unit 的那一层。AdS/CFT 对偶里面有一个 bulk-to-boundary 传播子，在前面的参数化下定义为 [82]：

$$\boxed{G_\Delta(\hat{p}; \vec{w}) = \left(\frac{y}{y^2+|\vec{z}-\vec{w}|^2}\right)^\Delta = G_\Delta(\hat{p}; q) = \frac{1}{(-\hat{p}\cdot q)^\Delta}} \tag{27.6}$$

这个传播子在共形变换 $q \to q'$，以及所诱导的 Lorentz 变换 $\hat{p} \to \hat{p}'$ 下变换性质为：

$$G_\Delta(\hat{p}'; q') = \left|\frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}}\right|^{-\Delta/d} G_\Delta(\hat{p}; q) \tag{27.7}$$

最终的基底肯定是用平面波 $\exp\left[\pm i m \hat{p}\cdot X\right]$ 线性组合得到的，这里 $+$ 表示 out 态，$-$ 表示 in 态。而且线性组合要对所有在壳动量构成的平面波求和，所以积分是在 $\mathbb{H}_{d+1}$ 上进行的，积分测度是上面的不变测度：

$$\int_{\mathbb{H}_{d+1}} [d\hat{p}] \equiv \int_0^\infty \frac{dy}{y^{d+1}} \int d^d\vec{z} = \int_{\hat{p}^2=-1} \frac{d^{d+1}\hat{p}^i}{\hat{p}^0} \tag{27.8}$$

由于 KG 方程是一个线性方程，所以线性组合之后的结果都是 KG 方程的解 [4]。由于 G_Δ 在共形变换下刚好出来我们需要的共形变换因子，而诱导的 Lorentz 变换本身不贵改变 $\hat{p}\cdot X$ 和积分测度，所以下面的积分就是满足条件的 conformal basis：

[4] 只要线性组合的系数与 X 无关就好

$$\boxed{\phi_\Delta^{\pm}(X^\mu;\vec{w})=\int_{\mathbb{H}_{d+1}}[d\hat{p}]G_\Delta(\hat{p};\vec{w})\exp\left[\pm im\hat{p}\cdot X\right]} \tag{27.9}$$

注意 Δ 和 $\vec{w}$ 是用来标记基底的，与 m 无关。但是上面的式子只是形式上的定义，第一不便于计算，第二上式对于 $m\in\mathbb{R}_+$ 是发散的，只有对于 $m\in -i\mathbb{R}_+$ 才收敛，所以上式应当看作是先把 m 变成纯虚数积分，然后延拓到实轴。所以考虑直接去找满足条件的 KG 方程的解，设试探解为：

$$\phi_\Delta(X^\mu;\vec{w})=\frac{f(X^2)}{(-q\cdot X)^\Delta} \tag{27.10}$$

代入方程得到：

$$0=4X^2f''(X^2)-2(2\Delta-d-2)f'(X^2)-m^2f(X^2) \tag{27.11}$$

这是虚宗量 Bessel 方程，考虑 $X\to\infty$ 收敛的解，解正比于第二类修正 Bessel 函数：

$$f(X^2)\propto\left(\sqrt{-X^2}\right)^{\Delta-\frac{d}{2}}K_{\Delta-\frac{d}{2}}\left(m\sqrt{X^2}\right)$$

前面的比例系数可以从积分表达式 27.9 积分后最终对比得到：

$$\phi_\Delta^{\pm}(X^\mu;\vec{w})=\frac{2^{\frac{d}{2}+1}\pi^{\frac{d}{2}}}{(im)^{\frac{d}{2}}}\frac{(\sqrt{-X^2})^{\Delta-\frac{d}{2}}}{(-q(\vec{w})\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}K_{\Delta-\frac{d}{2}}(m\sqrt{X^2}) \tag{27.12}$$

$\mathcal{A}\equiv\langle\mathbf{out}|\,\mathcal{S}\,|\mathrm{in}\rangle$，那么在 conformal 基底下的散射振幅和原先动量空间散射振幅之间关系为：

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\Delta_i,\vec{w}_i)\equiv\prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{H}_{d+1}}[d\hat{p}_k]G_{\Delta_k}(\hat{p}_k;\vec{w}_k)\mathcal{A}(\pm m_i\hat{p}_i^\mu) \tag{27.13}$$

显然其具有 CFT 中 n 点关联函数性质：

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\Delta_i,\vec{w}_i'(\vec{w}_i))=\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\vec{w}_k'}{\partial\vec{w}_k}\right|^{-\Delta_k/d}\widetilde{\mathcal{A}}(\Delta_i,\vec{w}_i) \tag{27.14}$$

前面一直在讲基底，但前面不对 Δ 进行限制，构造出来的 $\{\phi^{\pm}_{\Delta,\vec{w}}\}$ 极有可能是超完备的。下面我们要干的事情是在构造出来的这些基底里面选某一簇构造正交完备归一基底。

Definition 2 (shadow transformation) 对于一个共形维数为 Δ 的（准）初级场 $\mathcal{O}_\Delta(\vec{w})$，其 **shadow** 的定义为 [83–86]：

$$\widetilde{\mathcal{O}}_\Delta(\vec{w})\equiv\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}\int d^d\vec{w}'\frac{1}{|\vec{w}-\vec{w}'|^{2(d-\Delta)}}\mathcal{O}_\Delta(\vec{w}') \tag{27.15}$$

不难发现，场的 shadow 变成了共形维数为 $d-\Delta$ 的（准）初级场。

由于 $K_\alpha = K_{-\alpha}$，以及下面的恒等式 [87]：

$$\int d^d\vec{z}\frac{1}{|\vec{z}-\vec{w}|^{2(d-\Delta)}}\frac{1}{(-q(\vec{z})\cdot X)^\Delta} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)}\frac{(-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta}}{(-q(\vec{w})\cdot X)^{d-\Delta}} \tag{27.16}$$

得到了一个核心等式：

$$\boxed{\widetilde{\phi^\pm_\Delta}(X;\vec{w}) = \phi^\pm_{d-\Delta}(X;\vec{w})} \tag{27.17}$$

这实际上直接把空间一分为二，分成某个子空间和它的 shadow，我们只用取其中一个构成基就好，因为它的 shadow 是其线性组合。

在考虑 $SO(d+1,1)$ 的无限维表示 [5]时会出现所谓 **principal continuous series** 的概念：

$$\boxed{\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}} \tag{27.18}$$

后面构造 conformal basis 就是用这一 series 里面的 Δ 或其子集进行构造，这一点不加证明，后面只是去说明这样确实能得到正确的基底。

首先注意到关于 G_Δ 的几个正交完备性关系 [91]：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\mu(\nu)\int d^d\vec{w}G_{\frac{d}{2}+i\nu}(\hat{p}_1;\vec{w})G_{\frac{d}{2}-i\nu}(\hat{p}_2;\vec{w}) = \delta^{(d+1)}(\hat{p}_1,\hat{p}_2) \tag{27.19}$$

这里 δ 函数是定义在 $\mathbb{H}_{d+1}$ 上也就是 $SO(d+1,1)$ 不变的，积分测度 $\mu(\nu)$：

$$\mu(\nu) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu)}{4\pi^{d+1}\Gamma(i\nu)\Gamma(-i\nu)} \tag{27.20}$$

还有一个

$$\int_{H_{d+1}}[d\hat{p}]G_{\frac{d}{2}+i\nu}(\hat{p};\vec{w}_1)G_{\frac{d}{2}+i\bar{\nu}}(\hat{p};\vec{w}_2) = \\ 2\pi^{d+1}\frac{\Gamma(i\nu)\Gamma(-i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu)}\delta(\nu+\bar{\nu})\delta^{(d)}(\vec{w}_1-\vec{w}_2) + 2\pi^{\frac{d}{2}+1}\frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)}\delta(\nu-\bar{\nu})\frac{1}{|\vec{w}_1-\vec{w}_2|^{2(\frac{d}{2}+i\nu)}}. \tag{27.21}$$

利用这些关系可以得到 27.9 的逆变换：

$$\boxed{e^{\pm im\hat{p}\cdot X} = 2\int_0^\infty d\nu\mu(\nu)\int d^d\vec{w}G_{\frac{d}{2}-i\nu}(\hat{p};\vec{w})\phi^\pm_{\frac{d}{2}+i\nu}(X^\mu;\vec{w})} \tag{27.22}$$

由于平面波基底完备，逆变换的存在性立刻就说明了利用 principal continuous series 构造出来的 $\{\phi^\pm_{\Delta,\vec{w}}\}$ 也完备，而且注意到我们这里利用 27.17 将 ν 限制在了 $\mathbb{R}_+$ 上，所以：

$$\boxed{\Delta \in \frac{d}{2} + i\mathbb{R}_{\geq 0}} \tag{27.23}$$

这佐证了前面提到的只需要在空间和其 shadow 里面取一个就好了。正交性依赖于内积的定义，这里自然的定义 KG 内积：

$$(\Phi_1,\Phi_2) = -i\int_\Sigma d^{d+1}X^i\left[\Phi_1(X)\partial_{X^0}\Phi_2^*(X) - \partial_{X^0}\Phi_1(X)\Phi_2^*(X)\right] \tag{27.24}$$

[5] *[88, 89]* 这两篇文章比较易读，而且重在比较新，文章 *[90]* 的 §2.2 是对此内容的一个简短 *review*，更多的阅读材料可以在那里找到。

这个定义是 Poincaré 不变的，是与 Cauchy 面选取无关的。计算得到：

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_1}(X^\mu;\vec{w}_1)\,,\phi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_2}(X^\mu;\vec{w}_2)\right)\\
&\qquad=\pm\frac{2^{d+3}\pi^{2d+2}}{m^d}\frac{\Gamma(i\nu_1)\Gamma(-i\nu_1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu_1)\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu_1)}\delta(\nu_1-\nu_2)\delta^{(d)}(\vec{w}_1-\vec{w}_2)\\
&\qquad\quad\pm\frac{2^{d+3}\pi^{\frac{3d}{2}+2}}{m^d}\frac{\Gamma(i\nu_1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu_1)}\underbrace{\delta(\nu_1+\nu_2)}_{\to 0}\frac{1}{|\vec{w}_1-\vec{w}_2|^{2(\frac{d}{2}+i\nu_1)}}
\end{aligned}
\tag{27.25}
$$

第二项为 0 是因为 27.23。总结一下，我们得到了 $|\mathrm{in}\rangle$ 和 $|\mathrm{out}\rangle$ 态的基底为：

$$
\boxed{\mathcal{B}^{\pm}=\left\{\phi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}(X;\vec{w})\middle|\nu\geq 0,\vec{w}\in\mathbb{R}^d\right\}}
\tag{27.26}
$$

它的 shadow 同样是一组基底：

$$
\boxed{\widetilde{\mathcal{B}}^{\pm}=\left\{\phi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}(X;\vec{w})\middle|\nu\leq 0,\vec{w}\in\mathbb{R}^d\right\}}
\tag{27.27}
$$

Subsection 27.2

Massless Scalar

无质量情况看作是有质量情况的极限，作换元 $\omega\equiv\frac{m}{2y}$，积分核有如下渐近行为：

$$
G_\Delta(y,\vec{z};\vec{w})\xrightarrow{m\to 0}\pi^{\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}{\Gamma(\Delta)}y^{d-\Delta}\delta^{(d)}(\vec{z}-\vec{w})+\frac{y^\Delta}{|\vec{z}-\vec{w}|^{2\Delta}}+\cdots
\tag{27.28}
$$

计算得到：

$$
\begin{aligned}
\phi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}(X;\vec{w})\xrightarrow{m\to 0}&\left(\frac{m}{2}\right)^{-\frac{d}{2}-i\nu}\frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)}\int_0^\infty d\omega\omega^{\frac{d}{2}+i\nu-1}e^{\pm i\omega q(\vec{w})\cdot X}\\
&+\left(\frac{m}{2}\right)^{-\frac{d}{2}+i\nu}\int d^d\vec{z}\frac{1}{|\vec{z}-\vec{w}|^{2(\frac{d}{2}+i\nu)}}\int_0^\infty d\omega\omega^{\frac{d}{2}-i\nu-1}e^{\pm i\omega q(\vec{z})\cdot X}
\end{aligned}
\tag{27.29}
$$

上面的极限不是 well-define 的，因为 $m^{\pm i\nu}$，但这是个相位，不妨先丢掉, 而第二项是第一项的 shadow，所以猜测最终应该是下面的形式：

$$
\boxed{\varphi^{\pm}_{\Delta}(X^\mu;\vec{w})\equiv\int_0^\infty d\omega\omega^{\Delta-1}e^{\pm i\omega q\cdot X-\epsilon\omega}=\frac{(\mp i)^\Delta\Gamma(\Delta)}{(-q(\vec{w})\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}}
\tag{27.30}
$$

其中 $\Delta\in\mathbb{C}$，需要重新去找寻。这个式子的形式就是所谓 **Mellin 变换** [6]，可以解释成对未来光锥上的某一条射线积分，也就是把所有同“方向”，不同“能量”的平面波组合。注意这个式子有个非常明显的特征，在除去一个归一化因子的意义下，上式结果与 G_Δ 将 q 替换为 X 得到的结果完全一致。上面变换的逆变换为：

$$
e^{\pm i\omega q\cdot X-\epsilon\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{2\pi}\omega^{-\Delta}\frac{(\mp i)^\Delta\Gamma(\Delta)}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta},\quad\omega>0,\mathrm{Re}(\Delta)>0
\tag{27.31}
$$

这说明了 $\mathrm{Re}(\Delta)>0$ 就能保证完备性，而且这组基底张成的空间中很重要的一点是不含零动量的平面波解 [7]。如果选取 $\mathrm{Re}(\Delta)=\frac{d}{2}$，$\mathrm{Im}(\Delta)\in\mathbb{R}$，则：

[6] 数学上 *Mellin* 变换定义为：

$$
\widetilde{f}(\Delta)=\int_0^\infty d\omega\omega^{\Delta-1}f(\omega)
$$

其逆变换为：

$$
f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}d\Delta\omega^{-\Delta}\widetilde{f}(\Delta),c\in\mathbb{R}
$$

[7] 这一点是必须的，因为他是 *KG* 方程没有物理意义的解，要抛弃掉

$$\left(\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_1}(X^\mu;\vec{w}_1),\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_2}(X^\mu;\vec{w}_2)\right)=\pm 8\pi^{d+2}\delta(\nu_1-\nu_2)\delta^{(d)}(\vec{w}_1-\vec{w}_2) \tag{27.32}$$

这个时候注意 shadow：

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}}(X^\mu;\vec{w})&=\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(i\nu)}\int d^d\vec{z}\frac{1}{|\vec{z}-\vec{w}|^{2(\frac{d}{2}-i\nu)}}\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}(X^\mu;\vec{z})\\&=(\mp i)^{\frac{d}{2}+i\nu}\Gamma(\frac{d}{2}+i\nu)\frac{(-X^2)^{-i\nu}}{(-q(\vec{w})\cdot X\mp i\epsilon)^{\frac{d}{2}-i\nu}}\end{aligned}$$

$$\left(\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_1}(X^\mu;\vec{w_1}),\ \widetilde{\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu_2}}(X^\mu;\vec{w_2})\right)=\pm 8\pi^{\frac{d}{2}+2}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-i\nu_1)}{\Gamma(-i\nu_1)}\delta(\nu_1-\nu_2)\frac{1}{|\vec{w_1}-\vec{w_2}|^{2(\frac{d}{2}+i\nu_1)}} \tag{27.33}$$

其 shadow 当然也是一组基底，但并不是 $\nu\to-\nu$ 这么简单了，这导致 ν 的取值范围也拓宽到了所有实数。总结一下，我们得到了 Massless scalar 的 conformal basis：

$$\boxed{\mathcal{B}^{\pm}_{m=0}=\left\{\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}(X^\mu;\vec{w})\Big|\nu\in\mathbb{R},\vec{w}\in\mathbb{R}^d\right\}} \tag{27.34}$$

其 shadow 也可以作为一组基：

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{B}}^{\pm}_{m=0}=\left\{\widetilde{\varphi^{\pm}_{\frac{d}{2}+i\nu}}(X^\mu;\vec{w})\Big|\nu\in\mathbb{R},\vec{w}\in\mathbb{R}^d\right\}} \tag{27.35}$$

Subsection 27.3

photon & Graviton

这两个除了自旋不为 0，还有一个比较麻烦的点是需要取定规范。由于自旋不为 0，所以基底除了在壳动量、初末态的 $\pm$，以及极化矢量带来的 $SO(1,d+1)$ 矢量指标，还需要一个指标用来标记自旋，这里考虑的是无质量玻色子，所以这个指标标记的是粒子的螺旋度，体现为 CFT_d 上的一个 $\mathbb{R}^d$ 张量指标，$a=1,2,\dots,d$。令在壳动量 $k=\omega q$，在 Loren 规范下可以把平面波基底写为下面的形式：[8]：

$$\partial_a q_\mu e^{\pm i\omega q\cdot X} \tag{27.36}$$

注意 Lorenz 规范只能将前面的极化矢量确定到一个正比于 k 的项，选取这样的形式相当于完全取定了规范。不难验证 $d=2$ 时，上面的选取就对应 24.7 的选取。

Definition 3 (Spin-1 Massless Boson, $d\geq 1$)

- 在壳：[a]
$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\sigma}\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\delta^\mu_\nu-\frac{\partial}{\partial X^\nu}\frac{\partial}{\partial X_\mu}\right)A^{\Delta\pm}_{\mu a}(X^\rho;\vec{w})=0 \tag{27.37}$$

- 协变：
$$A^{\Delta\pm}_{\mu a}\left(\Lambda^\rho{}_\nu X^\nu;\vec{w}'(\vec{w})\right)=\frac{\partial w^b}{\partial w'^a}\left|\frac{\partial\vec{w}'}{\partial\vec{w}}\right|^{-(\Delta-1)/d}\Lambda_\mu{}^\sigma A^{\Delta\pm}_{\sigma b}(X^\rho;\vec{w}) \tag{27.38}$$

[a] 满足的是 Proca 方程

$\mathbb{H}_{d+1}$ 上面的 Spin-1 bulk-to boundary 传播子为 $G^\Delta_{\mu;q}$[9]，计算上更常用的是其 **uplift** $G^\Delta_{\mu;\nu}$，定义为：[10]

$$G^\Delta_{\mu;q}=\frac{\partial q^\nu}{\partial w^a}G^\Delta_{\mu;\nu}(\hat{p};q) \tag{27.39}$$

[8] $\partial_a q^\mu\equiv\frac{\partial}{\partial w^a}q^\mu(\vec{w})=2(w^a,\delta^{ba},-w^a)$

[9] 后面只要是 a,b,c 指标就是 $\mathbb{R}^d$ 上的，在只要是 μ,ν,σ 指标就是 $\mathbb{R}^{1,d+1}$ 上的

[10] 其实就是拉回映射

$$G^{\Delta}_{\mu;\nu}(\hat{p};q)=\frac{(-q\cdot\hat{p})\eta_{\mu\nu}+q_\mu\hat{p}_\nu}{(-q\cdot\hat{p})^{\Delta+1}} \tag{27.40}$$

uplift 之后，$G^{\Delta}_{\mu;\nu}$ 就是一个标量 CFT_d，而且是 $\mathbb{R}^{1,d+1}$ 上的 2-tensor：

$$G^{\Delta}_{\mu;\nu}(\Lambda\hat{p};\Lambda q)=\left|\frac{\partial\vec{w}'}{\partial\vec{w}}\right|^{-\Delta/d}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu G^{\Delta}{}_{\rho;\sigma}(\hat{p};q) \tag{27.41}$$

而且关于两个自变量还满足横向条件：

$$\hat{p}^\mu G^{\Delta}_{\mu;\nu}(\hat{p};q)=0,\quad q^\nu G^{\Delta}_{\mu;\nu}(\hat{p};q)=0 \tag{27.42}$$

根据前面的标量场经验，不难猜测 A 的形式就是 G 把 q 换成 X：

$$\boxed{\begin{aligned}A^{\Delta,\pm}_{\mu a}(X^\mu;\vec{w})=&\frac{\partial_a q_\mu}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}+\frac{\partial_a q\cdot X}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^{\Delta+1}}q_\mu\\=&-\frac{1}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^{\Delta-1}}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\frac{\partial}{\partial w^a}\log(-q\cdot X\mp i\epsilon)\end{aligned}} \tag{27.43}$$

证明略。下面计算其 shadow。

Definition 4 (shadow for spinning fields) 对于自旋为 J 的场，其会导致带有 J 个 $\mathbb{R}^d$ 上的指标 $a_1,\ldots,a_J$，而且这些指标是无迹且全对称的，或者说 $\mathcal{O}^{\Delta}_{a_1\cdots a_J}(\vec{w})$ 是 $SO(d)$ 的无迹对称张量表示，即 Spin-J 表示。计算其 shadow 最简单的方式是使用其 uplift 计算，然后再投影回来，uplift 与其自身的关系为:

$$\mathcal{O}^{\Delta}_{a_1\cdots a_J}(\vec{w})=\frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial w^{a_1}}\cdots\frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial w^{a_J}}\mathcal{O}^{\Delta}_{\mu_1\cdots\mu_J}(\vec{w}) \tag{27.44}$$

uplift 与其自变量之间存在类似 27.42 的横向关系。

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{O}^{\Delta}}_{\mu_1\cdots\mu_J}(\vec{w})=\frac{\Gamma(\Delta+J)}{\pi^{\frac{d}{2}}(\Delta-1)_J\Gamma(\Delta-\frac{d}{2})}\int d^d\vec{w}'\frac{\prod_{n=1}^J\left[\delta^{\nu_n}_{\mu_n}(-\frac{1}{2}q\cdot q')+\frac{1}{2}q'_{\mu_n}q^{\nu_n}\right]}{(-\frac{1}{2}q\cdot q')^{d-\Delta+J}}\mathcal{O}^{\Delta}_{\nu_1\cdots\nu_J}(\vec{w}')} \tag{27.45}$$

这里 $(a)_J\equiv\Gamma(a+J)/\Gamma(a)$，称为 Pochhammer 符号，而且不难发现上面的定义对于某些 Δ 不是 well-define 的，所以需要解析延拓到全部复平面。

利用上面定义计算得到：

$$\boxed{\widetilde{A^{\Delta,\pm}_{\mu a}}(X^\mu;\vec{w})=(-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta}A^{d-\Delta,\pm}_{\mu a}(X^\mu;\vec{w})} \tag{27.46}$$

和无质量标量场一样，不是正比于 $A^{d-\Delta,\pm}_{\mu a}$。现在还没有讨论我们的计算是在哪个规范下进行的，但其实前面对 $A^{\Delta,\pm}_{\mu a}$ 那些在壳协变的要求就已经为我们完全取定了规范，是 Lorenz 和 radial 规范同时加上去：[11]

$$X^\mu A^{\Delta,\pm}_{\mu a}(X^\mu;\vec{w})=0,\quad \partial^\mu A^{\Delta,\pm}_{\mu a}(X^\mu;\vec{w})=0. \tag{27.47}$$

下表总结了 $A^{\Delta,\pm}_{\mu a}$ 及其 shadow 为 pure gauge[12]的条件：

[11] 这两个规范是可以同时取的，见 [92]

[12] *pure gauge*就是说可以从 $A=0$ 通过规范变换变过来，所以场强张量为 0，A 可以写为 $\frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger$ 的形式

	$d=2$	$d\neq 2$
$A^{\Delta,\pm}_{\mu a}$	$\Delta=1$	$\Delta=1$
$\widetilde{A}^{d-\Delta,\pm}_{\mu a}$	$\Delta=1$	$\times$

回顾一些前面给的平面波基底是在 Lorenz 规范下给的，不一定满足 radial 规范，所以 A 不能写成平面波基底的积分变换形式，但是：

$$\boxed{\varphi^{\Delta,\pm}_{\mu a}(X^\mu;\vec{w}) = \int_0^\infty d\omega\omega^{\Delta-1}\left(\partial_a q_\mu e^{\pm i\omega q\cdot X-\epsilon\omega}\right) = (\mp i)^\Delta\Gamma(\Delta)\frac{\partial_a q_\mu}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}} \tag{27.48}$$

和 $A^{\Delta,\pm}_{\mu a}$ 之间只差一个规范变换 [13]，那么在计算散射振幅这种与规范选取无关的物理量的时候，用两组基底都能得到同样的结果，但是注意用 $\varphi^{\Delta,\pm}_{\mu a}$ 做基底的时候就没有协变的条件了，但是好处在两基底振幅之间是 Mellin 变换的形式。在下面的内积定义下：

[13] $\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial_a q\cdot X}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}\right)$

$$(A_\mu, A'_{\mu'}) = -i\int_\Sigma d^{d+1}X^i\left[A^\rho F'^*_{0\rho} - A'^{\rho*}F_{0\rho}\right] \tag{27.49}$$

当选取 $\boxed{\Delta\in\frac{d}{2}+\mathrm{i}\mathbb{R}}$ 时构成完备基底，其 shadow 亦然。

这组基底虽说是 photon 的，但实际上非阿贝尔情形也完全适用，因为每个色指标的场满足相同的方程，相同的协变条件，所以上面的推导完全不变，这是很容易接受的，因为平面波基底对于 photon 和 gluon 都是一样通用的。

现在来看引力子的情况，首先在 Lorenz[14]、无迹规范下平面波基底可以写为：

[14] $\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\rho{}_\rho = 0$,

$$g^{\pm}_{\mu\nu;a_1a_2}(X;\omega,q) = P^{b_1b_2}_{a_1a_2}\partial_{b_1}q_\mu\partial_{b_2}q_\nu e^{\pm i\omega q\cdot X} \tag{27.50}$$

这里：

$$P^{b_1b_2}_{a_1a_2} \equiv \delta^{b_1}_{(a_1}\delta^{b_2}_{a_2)} - \frac{1}{d}\delta_{a_1a_2}\delta^{b_1b_2} \tag{27.51}$$

Definition 5 (Graviton, $d\geq 2$)

- 指标约束：
$$\begin{aligned} h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2} &= h^{\Delta,\pm}_{\mu_2\mu_1;a_1a_2}, \\ h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2} &= h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_2a_1}, \quad \delta^{a_1a_2}h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2} = 0 \end{aligned} \tag{27.52}$$
第一个约束是几何上要求度规对称，第二个是要求 $\mathbb{R}^d$ 指标无迹且对称。
- 在壳：[a]
$$\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_{\mu;a_1a_2} + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_{\nu;a_1a_2} - \partial_\mu\partial_\nu h^\sigma{}_{\sigma;a_1a_2} - \partial^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu;a_1a_2} = 0 \tag{27.53}$$
- 协变：
$$h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}\left(\Lambda^\rho_\nu X^\nu;\vec{w}'(\vec{w})\right) = \frac{\partial w^{b_1}}{\partial w'^{a_1}}\frac{\partial w^{b_2}}{\partial w'^{a_2}}\left|\frac{\partial\vec{w}'}{\partial\vec{w}}\right|^{-(\Delta-2)/d}\Lambda^{\sigma_1}_{\mu_1}\Lambda^{\sigma_2}_{\mu_2}h^{\Delta,\pm}_{\sigma_1\sigma_2;b_1b_2}(X^\rho;\vec{w}) \tag{27.54}$$

[a] 满足的是 Linearized Einstein 方程

利用 $\mathbb{H}_{d+1}$ 上面的 Spin-2 bulk-to boundary 传播子：

$$\boxed{\begin{aligned} h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}(X;\vec{w}) &= P^{b_1b_2}_{a_1a_2}\frac{[(-q\cdot X)\partial_{b_1}q_{\mu_1}+(\partial_{b_1}q\cdot X)q_{\mu_1}]\,[(-q\cdot X)\partial_{b_2}q_{\mu_2}+(\partial_{b_2}q\cdot X)q_{\mu_2}]}{(-q\cdot X)^{\Delta+2}} \\ &= P^{b_1b_2}_{a_1a_2}\frac{1}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^{\Delta-2}}\partial_{b_1}\partial_{\mu_1}\log(-q\cdot X\mp i\epsilon)\partial_{b_2}\partial_{\mu_2}\log(-q\cdot X\mp i\epsilon)\end{aligned}} \tag{27.55}$$

其 shadow：

$$\widetilde{h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}}(X;\vec{w}) = (-X^2)^{\frac{d}{2}-\Delta}h^{d-\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}(X;\vec{w}) \tag{27.56}$$

前面实际上选取了规范：

$$\eta^{\mu_1\mu_2}h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}=0,\quad \partial^\mu h^{\Delta,\pm}_{\mu\mu_2;a_1a_2}=0,\quad X^\mu h^{\Delta,\pm}_{\mu\mu_2;a_1a_2}=0 \tag{27.57}$$

有 Pure gauge 条件：[15]

[15] 可以写为 $\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$ 的形式

	$d=2$	$d\geq 2$
$h^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}$	$\Delta=1$; $\Delta=0$	$\Delta=0,1$
$\widetilde{h^{d-\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}}$	$\Delta=1$; $\Delta=2$	$\times$

同样，前面的平面波基底不满足 radial 规范，但利用 Mellin 变换后得到的：

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}(X^\mu;\vec{w}) &= \int_0^\infty d\omega\omega^{\Delta-1}g^{\Delta,\pm}_{\mu_1\mu_2;a_1a_2}(X^\mu;\omega,q^\mu) \\ &= (\mp i)^\Delta\Gamma(\Delta)P^{b_1b_2}_{a_1a_2}\frac{\partial_{b_1}q_{\mu_1}\partial_{b_2}q_{\mu_2}}{(-q\cdot X\mp i\epsilon)^\Delta}\end{aligned}} \tag{27.58}$$

Because:

$$\frac{\partial_b q_{(\mu_1}q_{\mu_2)}}{(-q\cdot X)^\Delta} = \frac{\partial_{(\mu_1}}{\Delta-1}\left(\frac{\partial_b q_{\mu_2)}}{(-q\cdot X)^{\Delta-1}}\right)$$

$$\frac{q_{\mu_1}q_{\mu_2}}{(-q\cdot X)^\Delta} = \frac{\partial_{(\mu_1}}{\Delta-1}\left(\frac{q_{\mu_2)}}{(-q\cdot X)^{\Delta-1}}\right)$$

与 27.55 只差一个规范变换。在下面的内积意义下：

$$\begin{aligned}(h_{\mu\nu},h'_{\mu'\nu'}) = -i\int d^{d+1}X^i\Big[&h^{\mu\nu}\partial_0 h'^*_{\mu\nu}-2h^{\mu\nu}\partial_\mu h'^*_{0\nu}+h\partial^\mu h'^*_{0\mu}-h\partial_0 h'^*+h_{0\mu}\partial^\mu h'^* \\ &-(h\leftrightarrow h'^*)\Big]\end{aligned} \tag{27.59}$$

$\boxed{\Delta\in\frac{d}{2}+i\mathbb{R}}$ 时构成完备基底，其 shadow 亦然。

Remark

$SO(1,d+1)$ 群的无限维不可约幺正表示由共形维数 $\Delta\in\mathbb{C}$ 和 $SO(d)$ 的表示去标记(或者说取决于对应的 $SO(d)$ 是哪个自旋表示)。前面找的基底就是在找表示，Δ 和 J 之间是有约束的，具体来说有下面几个 Series：

- Principal Series $\mathcal{P}$: $\forall J\in\mathbb{N}$, $\quad\Delta\in\frac{d}{2}+i\mathbb{R}$
- Complementary Series $\mathcal{C}$: $\Delta=\frac{d}{2}+c$，其中 $J=0$ 时 $0<|c|\leq\frac{d}{2}$，$J\geq 1$ 时 $0<|c|\leq\frac{d}{2}-1$
- Discrete Series $\mathcal{D}$: 对于奇数维数 d，任意 J，Δ 可取半整数或者整数

表示 $[\Delta,J]$ 的 shadow 就是表示 $[d-\Delta,J]$，这两个表示是等价表示。

Subsection 27.4

Restrict to Mink$_4$

根据前面的一系列一般性讨论，回到 Mink$_4$ 情况很简单，这里只是用文献中比较常用的记号重新写一遍。[16]

标量场：

$$\phi_{\Delta,m}\left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}X^{\nu};\frac{aw+b}{cw+d},\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}}\right)=|cw+d|^{2\Delta}\phi_{\Delta,m}(X^{\mu};w,\bar{w}) \tag{27.60}$$

无质量规范玻色子：

$$A^{\Delta;\pm}_{\mu;a}\left(\Lambda^{\rho}{}_{\nu}X^{\nu};\frac{aw+b}{cw+d},\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}}\right)=(cw+d)^{2h}(\bar{c}\bar{w}+\bar{d})^{2\bar{h}}\Lambda_{\mu}{}^{\sigma}A^{\Delta;\pm}_{\sigma;a}(X^{\rho};w,\bar{w}) \tag{27.61}$$

无质量规范玻色子只有两种螺旋度选取，对应这里 $a=w,\bar{w}$，分别有 $J=+1$，-1。

引力子：

$$h^{\Delta;\pm}_{\mu\nu;a}\left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}X^{\nu};\frac{aw+b}{cw+d},\frac{\bar{a}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}+\bar{d}}\right)=(cw+d)^{\Delta+J}(\bar{c}\bar{w}+\bar{d})^{\Delta-J}\Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}h^{\Delta;\pm}_{\rho\sigma,a}(X^{\mu};w,\bar{w}) \tag{27.62}$$

同样的引力子也只有两种螺旋度选取，对应 $a=ww,\bar{w}\bar{w}$，分别对应 $J=+2,-2$。不难看出这些情况共形权 $(h,\bar{h})=\frac{1}{2}(\Delta+J,\Delta-J)$，$h-\bar{h}$ 确实就对应自旋。后面考虑有质量玻色子这里的 J 的取值范围就会从 $-s\sim s$。

Subsection 27.5

Conformally Soft photon & Graviton

Subsection 27.6

Massive Bosons

文献 [94] 率先给出了有质量玻色子的分析。而且利用这一基底计算了一些振幅。为了总结结论，首先要介绍 [95] 中的 Polynomial Encoding。

27.6.1 Polynomial encoding of symmetric traceless transverse tensors

对于 $\mathbb{H}_3$ 上定义的任意一个 spin-s 的对称无迹 transverse 张量 $H_{\mu_1\cdots\mu_s}(\hat{p})$，可以在下面的辅助矢量定义的子流形上：

$$\hat{p}^2+1=Y^2=\hat{p}\cdot Y=0$$

将张量编码进在此子流形上定义的多项式上：[17]

$$H(\hat{p},Y)=H_{\mu_1\cdots\mu_s}(\hat{p})Y^{\mu_1}\cdots Y^{\mu_s} \tag{27.63}$$

利用下面定义的微分算符：[18]

$$\begin{aligned}K_\mu=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Y^\mu}+\hat{p}_\mu\left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)\right)+\left(Y\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)\frac{\partial}{\partial Y^\mu}\\&+\hat{p}_\mu\left(Y\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)-\frac{Y_\mu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial Y\cdot\partial Y}+\left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right)\right)\end{aligned} \tag{27.64}$$

可以将多项式还原成张量本身：[19]

[16] [93]§2 基本上是很好的总结

[17] 后面对此多项式的一切操作都要记得是在这个子流形上完成的

[18] $K_\mu K_\nu=K_\nu K_\mu,\hat{p}^\mu K_\mu=0,K_\mu K^\mu=0$

[19] 有点像配分函数，这里 $(\cdot)_s$ 是 *Pochhammer* 符号

$$H_{\mu_1\cdots\mu_s}(\hat{p}) = \frac{1}{s!\left(\frac{1}{2}\right)_s} K_{\mu_1}\cdots K_{\mu_s} H(\hat{p}, Y) \tag{27.65}$$

对 $\hat{p}$ 的协变导数定义为：[20]

$$\nabla_{\hat{p}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} + \hat{p}_\mu \left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial \hat{p}}\right) + Y_\mu \left(\hat{p}\cdot\frac{\partial}{\partial Y}\right) \tag{27.66}$$

下面考虑光锥（正则部分）上面的 spin-J 的对称无迹 transverse 张量 $F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q)$，可以把它看作是天球上的 spin-J 对称无迹张量 $f_{a_1\cdots a_J}(w,\bar{w})$ 的 uplift。对称无迹已经把 f 限制成只有两个不为 0 的分量了：[21]

$$f_J(w,\bar{w}) = f_{w\cdots w}(w,\bar{w}) \quad \text{and} \quad \tilde{f}_J(w,\bar{w}) = f_{\bar{w}\cdots\bar{w}}(w,\bar{w}) \tag{27.67}$$

所以

$$f_J(w,\bar{w}) = \frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial w}\cdots\frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial w} F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q) \quad \text{and} \quad \tilde{f}_J(w,\bar{w}) = \frac{\partial q^{\mu_1}}{\partial \bar{w}}\cdots\frac{\partial q^{\mu_J}}{\partial \bar{w}} F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q) \tag{27.68}$$

利用

$$v^\mu \equiv -\frac{1}{2}\partial_w\partial_{\bar{w}} q^\mu = (-1/2, 0, 0, 1/2) \tag{27.69}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q^\mu}{\partial w}\frac{\partial q^\nu}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial q^\mu}{\partial \bar{w}}\frac{\partial q^\nu}{\partial w}\right) + q^\mu v^\nu + v^\mu q^\nu \tag{27.70}$$

计算 $F^{\cdots\mu_i\cdots}$ 会出现 $q^\mu\left(v^\nu F_{\cdots\nu\cdots}(q)\right)$，不如直接取定规范 $v^{\mu_i}F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q)=0$，这样由于 $q_\mu\partial_w q^\mu = q_\mu\partial_{\bar{w}} q^\mu = 0$，并不会对 27.68 产生任何影响。利用下面子流形上的辅助矢量 Z：

$$v^2 = q^2 = q\cdot v - 1 = Z^2 = q\cdot Z = v\cdot Z = 0. \tag{27.71}$$

可以编码 F 为:

$$F(q,Z) = F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q) Z^{\mu_1}\cdots Z^{\mu_J} = \mathcal{F}_{\mu_1\cdots\mu_J}(q) Z^{\mu_1}\cdots Z^{\mu_J} = \mathcal{F}(q,Z) \tag{27.72}$$

这里 $\mathcal{F}$ 的意思是把 F 中 $\propto q,\eta$ 这些与后面 Z 点乘为 0 的项丢掉后形成的新张量 [22]。而且计算表明把 27.68 中的 F 替换为 $\mathcal{F}$ 没有任何影响。同样定义微分算子：[23]

$$\begin{aligned} R_\mu =& \frac{d-2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Z^\mu} - v_\mu\left(q\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right) - q_\mu\left(v\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) + \left(Z\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\frac{\partial}{\partial Z^\mu} \\ &- q_\mu\left(Z\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\left(v\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right) - v_\mu\left(Z\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\left(q\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right) \\ &- \frac{Z_\mu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial Z\cdot\partial Z} - 2\left(v\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\left(q\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\right) \end{aligned} \tag{27.73}$$

d 的意思是天球维数，所以意味着在计算的最后要取 $d\to 2$ 极限。

$$F_{\mu_1\cdots\mu_J}(q) = \frac{1}{J!\left(\frac{d-2}{2}\right)_J} R_{\mu_1}\cdots R_{\mu_J} F(q,Z) = \frac{1}{J!\left(\frac{d-2}{2}\right)_J} R_{\mu_1}\cdots R_{\mu_J}\mathcal{F}(q,Z) \tag{27.74}$$

利用这一形式还可计算天球上两张量之间的缩并：[24]

[20] 满足 $Y\cdot\nabla_{\hat{p}} = Y\cdot\partial_{\hat{p}}$

[21] *In general* $\tilde{f}_J \neq f_J^*$

[22] 类似于做了一个规范变换，这样一来 $\mathcal{F}$ 对称但不一定无迹

[23] $R_\mu R_\nu = R_\nu R_\mu, q^\mu R_\mu = 0, v^\mu R_\mu = 0, R_\mu R^\mu = 0$

[24] $\mathcal{F}_1$ 理解为作用于后面的微分算符

$$
\begin{aligned}
(f_1,f_2)_C &= g^{a_1b_1}\cdots g^{a_Jb_J} f_{1a_1\cdots a_J} f_{2b_1\cdots b_J} = \frac{f_{1J}\tilde{f}_{2J}+\tilde{f}_{1J}f_{2J}}{2^J} \\
&= F_1^{\mu_1\cdots\mu_J}F_{2\mu_1\cdots\mu_J} = \frac{1}{J!\left(\frac{d-2}{2}\right)_J}\mathcal{F}_1(q,R)\mathcal{F}_2(q,Z) \\
&= \frac{1}{J!\left(\frac{d-2}{2}\right)_J}\mathcal{F}_1(q,D_Z)\mathcal{F}_2(q,Z)
\end{aligned} \tag{27.75}
$$

其中

$$
D_{Z^\mu} = \left(\frac{d}{2}-1+Z\cdot\frac{\partial}{\partial Z}\right)\frac{\partial}{\partial Z^\mu} - \frac{1}{2}Z_\mu\frac{\partial^2}{\partial Z\cdot\partial Z}
$$

27.6.2 Conformal basis of massive bosons

有质量玻色子平面波基底为：

$$
\phi^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\pm,m,b}(X) = \epsilon_b^{\mu_1\cdots\mu_s}e^{\pm im\hat{p}^\nu X_\nu} \tag{27.76}
$$

这里 b 可以从 $-s$ 取到 s。Conformal basis 可以一般的写为下面的形式：

$$
\phi^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\pm,\Delta,m,J}(X;w,\bar{w}) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3}\int dz d\bar{z}\sum_{b=-s}^{s}G^{(s)}_{Jb}(w,\bar{w};y,z,\bar{z})\epsilon_b^{\mu_1\cdots\mu_s}e^{\pm im\hat{p}^\nu X_\nu} \tag{27.77}
$$

$s\leq 2$ 的玻色子对应的 G 显式表达式为：

$$
G^{(0)}_{Ja} = (-q\cdot\hat{p})^{-\Delta} \tag{27.78}
$$

$$
G^{(1)}_{J_a} = (-q\cdot\hat{p})^{-\Delta-1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}(w-z)^2}{y} & -2(w-z) & -\sqrt{2}y \\ \sqrt{2}(w-z) & \frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y}-y & \sqrt{2}\left(\bar{w}-\bar{z}\right) \\ \sqrt{2}y & 2\left(\bar{w}-\bar{z}\right) & -\frac{\sqrt{2}(\bar{w}-\bar{z})^2}{y} \end{pmatrix} \tag{27.79}
$$

$$
\begin{gathered}
G^{(2)}_{Ja} = (-q\cdot\hat{p})^{-\Delta-2}\times \\
\begin{pmatrix}
\frac{2(w-z)^4}{y^2} & \frac{4i(w-z)^3}{y} & 2\sqrt{6}(w-z)^2 & 4iy(w-z) & 2y^2 \\
\frac{2(w-z)^3}{y} & i(w-z)^2\left(3-\frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y^2}\right) & \frac{\sqrt{6}(w-z)\left(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right)}{y} & i\left(y^2-3(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right) & 2y(\bar{z}-\bar{w}) \\
2(w-z)^2 & \frac{2i(w-z)\left(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right)}{y} & \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\left((w-z)(\bar{w}-\bar{z})\left((w-z)(\bar{w}-\bar{z})-4y^2\right)+y^4\right)}{y^2} & \frac{2i(\bar{z}-\bar{w})\left(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right)}{y} & 2(\bar{z}-\bar{w})^2 \\
2y(w-z) & i\left(y^2-3(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right) & \frac{\sqrt{6}(\bar{z}-\bar{w})\left(y^2-(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\right)}{y} & i(\bar{z}-\bar{w})^2\left(3-\frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{y^2}\right) & \frac{2(\bar{z}-\bar{w})^3}{y} \\
2y^2 & 4iy(\bar{z}-\bar{w}) & 2\sqrt{6}(\bar{z}-\bar{w})^2 & \frac{4i(\bar{z}-\bar{w})^3}{y} & \frac{2(\bar{z}-\bar{w})^4}{y^2}
\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{27.80}
$$

对于更高自旋，可以利用 encode 之后的 $G^{(s)}_{J,\Delta}(\hat{p},Y;w,\bar{w})$：[25]

$$
G^{(s)}_{J,\Delta}(\hat{p},Y;w,\bar{w}) = (-1)^{|J|\theta(-J)}\frac{(Y\cdot q)^{s-|J|}((\hat{p}\cdot q)(Y\cdot Dq)-(\hat{p}\cdot Dq)(q\cdot Y))^{|J|}}{(-\hat{p}\cdot q)^{\Delta+s}} \tag{27.81}
$$

利用 K 导数可以提取 G：

$$
\sum_b G^{(s)}_{Jb}\epsilon_b^{\mu_1\cdots\mu_s} = \frac{1}{s!(\frac{1}{2})_s}K^{\mu_1}\ldots K^{\mu_s}G^{(s)}_{J,\Delta}(\hat{p},Y;w,\bar{w}) \tag{27.82}
$$

[25] θ 是 *Heviside* 阶跃函数

$$
Dq^\mu = \begin{cases} \partial_{\bar{w}}q^\mu & for\ J>0 \\ \partial_w q^\mu & for\ J<0 \end{cases}
$$

encode 之后的 conformal basis 可以很容易地写为：

$$\phi^{\pm,m,s}_{J,\Delta}(X,Y;w,\bar{w})=\int_0^\infty\frac{dy}{y^3}\int dzd\bar{z}G^{(s)}_{J,\Delta}(\hat{p},Y;w,\bar{w})e^{\pm im\hat{p}^\nu X_\nu} \tag{27.83}$$

利用 27.82 形式的 K 导数就可以提取出 ϕ 了 [26]。可以证明 $\boxed{\Delta=1+i\mathbb{R}_{\geq 0}}$ 时构成正交完备归一基底。目前更高维以及其 Shadow 还未被计算过。

[26] 按理说对 ϕ 进行 *encode* 应该使用 Z，这里更应当看作是从 27.77 和 27.82 导出的定义

Subsection 27.7
Fermions

首先介绍高维空间中旋量的概念，主要参考 Polchinski[96] 附录 A，Weinberg[97] 附录以及 [98]。另外，A.Zee[6] 使用 Clifford 代数详细地构造了 SO(n) 群的旋量表示。

27.7.1 Spinors in arbitrary dimensions

考虑 $d=t+s$ 维时空中的旋量，其中 t 表示类时坐标个数，s 表示类空坐标个数，也就是：

$$\eta_{ab}=\mathrm{diag}(\underbrace{-,\cdots,-}_{t},\underbrace{+,\cdot,+}_{s}) \tag{27.84}$$

Clifford 代数是指满足：[27]

$$\{\Gamma_a,\Gamma_b\}=2\eta_{ab} \tag{27.85}$$

[27] 由于考虑一般维数，所以这里 a,b 指标从 *1* 开始

的 d 个 Γ 构成的代数，如果我们找到了上面代数的表示，那么令：

$$\mathscr{I}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{4\mathrm{i}}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu]=-\mathscr{I}_{\nu\mu} \tag{27.86}$$

显然 $\mathscr{I}_{\mu\nu}$ 满足 $\mathfrak{so}(t,s)$ 李代数：

$$\mathrm{i}[\mathscr{J}_{\mu\nu},\mathscr{J}_{\rho\sigma}]=\eta_{\nu\rho}\mathscr{J}_{\mu\sigma}-\eta_{\mu\rho}\mathscr{J}_{\nu\sigma}-\eta_{\sigma\mu}\mathscr{J}_{\rho\nu}+\eta_{\sigma\nu}\mathscr{J}_{\rho\mu} \tag{27.87}$$

所以我们间接找到了 $SO(t,s)$ 的表示，但通常来说是可约表示。对于 Clifford 的表示我们需要偶数维和奇数维分开来看。

首先是比较简单的偶数维，如果 $t=0$，利用三个泡利矩阵可以得到 $2^{\frac{d}{2}}$ 维表示：[28]

[28] 根据 d 的具体大小选择省略号在何处截断。

$$\begin{aligned}\Gamma_1&=\sigma_1\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\dots\\ \Gamma_2&=\sigma_2\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\dots\\ \Gamma_3&=\sigma_3\otimes\sigma_1\otimes\mathbb{1}\otimes\dots\\ \Gamma_4&=\sigma_3\otimes\sigma_2\otimes\mathbb{1}\otimes\dots\\ \Gamma_5&=\sigma_3\otimes\sigma_3\otimes\sigma_1\otimes\dots\end{aligned} \tag{27.88}$$

$t\neq 0$ 只需要把上面公式中前面 t 个 Γ 改成 $\mathrm{i}\Gamma$ 即可。显然有：

$$\Gamma_a^\dagger=(-1)^tA\Gamma_aA^{-1},\qquad A\equiv\Gamma_1\dots\Gamma_t \tag{27.89}$$

而且所有的 $2^{\frac{d}{2}}\times 2^{\frac{d}{2}}$ 矩阵都可以用基底 $\{\Gamma^{(n)}\}$ 进行展开：

$n=\{0,\dots,d\}$
$\Gamma^{(0)}=\mathbb{1}$

$$\Gamma^{(n)}=\Gamma_{a_1\dots a_n}\equiv\Gamma_{[a_1}\Gamma_{a_2}\dots\Gamma_{a_n]} \tag{27.90}$$

最后一个矩阵 $\Gamma^{(d)}$ 格外重要，一般归一化为：

$$\Gamma_*=(-\mathrm{i})^{d/2+t}\Gamma_1\dots\Gamma_d,\quad \Gamma_*\Gamma_*=1 \tag{27.91}$$

这个矩阵对于 $d=1+3$ 的情况就是 γ_5，这里由于定义的 Γ_* 与其它所有的 Γ_a 都反对易，所以实际上可以把它作为 $d+1$ 维 [29]的 Γ_{d+1}，其它的 Γ_a 不变，这样我们就得到了 $d+1$ 维的表示。所以奇数维度的表示需要通过比他第一维度的偶数维来构造，构造出来的是 $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ 维表示，同样可以去构造 $\Gamma^{(n)}$ 那些。

[29] 注意 d 是偶数，所以下一维度是奇数

在任意维度都可以找到所谓电荷共轭算符 $\mathcal{C}$，满足：

$$\mathcal{C}^T=-\varepsilon\mathcal{C},\quad \Gamma_a^T=-\eta\mathcal{C}\Gamma_a\mathcal{C}^{-1} \tag{27.92}$$

这里 $\varepsilon=\pm1,\eta=\pm1$，但是具体怎么取与维数有关。

$$\left(\mathcal{C}\Gamma^{(n)}\right)^T=-\epsilon(-1)^{n(n-1)/2}(-\eta)^n\mathcal{C}\Gamma^{(n)} \tag{27.93}$$

下表给出了 $\mathcal{C}\Gamma^{(n)}$ 对称性以及 ε,η 选取与维数之间的关系：[30]

[30] S 和 A 是在找对称/反对称的 $\mathcal{C}\Gamma^{(n)}$ 对应的 $n \mod 4$

d (mod 8)	S	A	ε	η
0	$0,3$	$2,1$	-1	$+1$
	$0,1$	$2,3$	-1	-1
1	$0,1$	$2,3$	-1	-1
2	$1,0$	$3,2$	-1	-1
	$1,2$	$3,0$	$+1$	$+1$
3	$1,2$	$0,3$	$+1$	$+1$
4	$2,1$	$0,3$	$+1$	$+1$
	$2,3$	$0,1$	$+1$	-1
5	$2,3$	$0,1$	$+1$	-1
6	$3,2$	$1,0$	$+1$	-1
	$3,0$	$1,2$	-1	$+1$
7	$0,3$	$1,2$	-1	$+1$

从上表可以看出奇数维只有一种可能的 ε,η 取值。

前面讲的表示在任意维都存在，称为 Dirac 旋量表示，但是一般来说这个表示是可约表示，存在更小的旋量。比如对于**任意偶数维**，都可以用下面的方式约化为两个 Weyl 旋量：

$$\lambda_L=\frac{1}{2}\left(1+\Gamma_*\right)\lambda,\quad \lambda_R=\frac{1}{2}\left(1-\Gamma_*\right)\lambda \tag{27.94}$$

这是根据“手性”来分，还可以根据“虚实”来分。注意到：

$$\Gamma_a^*=-\eta(-)^tB\Gamma_aB^{-1},\quad B^T=\mathcal{C}A^{-1} \tag{27.95}$$

如果旋量满足下面的 reality 条件，那我们就称为 **Majorana 旋量**：[31]

[31] 已经利用了 *Lorentz* 不变性

$$\lambda^*=\alpha B\lambda,\quad |\alpha|=1,\quad B^*B=\mathbb{1} \tag{27.96}$$

但是这一条件存在对维数是有约束的。Majorana 条件还可以叙述为 Dirac 共轭和 Majorana 共轭相等。 如果 Majorana 和 Wyle 条件可以一起加，那就称为 Majorana-Wely 旋量。引入超对称后还可以引入 Sympletic Majorana 旋量的概念，要求：

$\bar{\lambda}\equiv\lambda^T\mathcal{C}$
$\bar{\lambda}^C\equiv\lambda^\dagger A\alpha^{-1}$

$$\lambda_i^*\equiv\left(\lambda^i\right)^*=B\Omega_{ij}\lambda^j \tag{27.97}$$

其中 Ω 是一个反对称的 $\Omega^*\Omega=-\mathbb{1}$ 的矩阵。下表总结了各个维数下这几个旋量的存在的可能性，以及对应的最小的 Spinor 的维数：

$\mathrm{M}^{\pm}$：Majorana 旋量，$\pm$ 表示 η 需要取的符号
MW：Majorana-Wely 旋量
SMW：Sympletic Majorana-Wely 旋量
表格对于横向 (t) 是 $\mod 4$ 的

d t	0	1	2	3
1	M 1	M 1		
2	M^- 2	MW 1	M^+ 2	
3	4	M 2	M 2	
4	SMW 4	M^+ 4	MW 2	M^- 4
5	8	8	M 4	M 4
6	M^+ 8	SMW 8	M^- 8	MW 4
7	M 8	16	16	M 8
8	MW 8	M^- 16	SMW 16	M^+ 16
9	M 16	M 16	32	32
10	M^- 32	MW 16	M^+ 32	SMW 32
11	64	M 32	M 32	64
12	SMW 64	M^+ 64	MW 32	M^- 64

文献 [99, 100] 给出了一些比较有用的公式：

$$\Gamma_{a_1\cdots a_i}\Gamma^{b_1\cdots b_j} = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} \frac{i!j!}{s!t!u!}\delta^{[b_1}_{[a_i}\cdots\delta^{b_s}_{a_{t+1}}\Gamma_{a_1\cdots a_t]}{}^{b_{s+1}\cdots b_j]}$$
$$s=\frac{1}{2}(i+j-k),\quad t=\frac{1}{2}(i-j+k),\quad u=\frac{1}{2}(-i+j+k) \tag{27.98}$$

$$\Gamma_{b_1\ldots b_k}\Gamma_{a_1\ldots a_\ell}\Gamma^{b_1\ldots b_k} = c_{k,\ell}\Gamma_{a_1\ldots a_\ell}$$
$$c_{k,\ell} = (-1)^{k(k-1)/2}k!(-1)^{k\ell}\sum_i^{\min(k,\ell)}\binom{\ell}{i}\binom{D-\ell}{k-i}(-1)^i \tag{27.99}$$

以及 Firez 恒等式：[32]

$$M_\alpha{}^\beta\Delta = \sum_{k=0}^{[D]}(-)^{k(k-1)/2}\frac{1}{k!}\left(\Gamma_{a_1\ldots a_k}\right)_\alpha{}^\beta\mathrm{Tr}(\Gamma^{a_1\ldots a_k}M) \tag{27.100}$$

这里 M 是任意的 $\Delta\times\Delta$ 矩阵。

32 $\Delta \equiv 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$

$$\begin{cases}[D]=D & \textit{for even } D\\ [D]=(D-1)/2 & \textit{for odd } D\end{cases}$$

27.7.2 Conformal basis of Dirac spinor

Subsection 27.8

Examples

APPENDIX

A

Appendix A: Surface Charge

前面介绍协变相空间量子化的时候直接使用结论，没有讲清楚他是什么，这里补上。

Fiber Bundle

to be continue . . .

参考文献

[1] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge University Press (6, 2005), 10.1017/CBO9781139644167.

[2] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, WORLD SCIENTIFIC (1985), 10.1142/0097, [https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/0097].

[3] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry I*, *Proc. Symp. Pure Maths.* **81** (2010) 65 [0909.0551].

[4] J.C. Baez and J. Huerta, *Division Algebras and Supersymmetry II*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **15** (2011) 1373 [1003.3436].

[5] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, *Annals of Mathematics* **59** (1954) 1.

[6] A. Zee, *Group Theory in A Nutshell*, Princeton University Press (2016).

[7] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer Cham, 2 ed. (2017), 10.1007/978-3-319-66631-0.

[8] 梁灿彬,《微分几何入门与广义相对论》, vol. 1, 科学出版社 (2006).

[9] R. Blumenhagen, D. Lüst and S. Theisen, *Basic concepts of string theory*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Heidelberg, Germany (2013), 10.1007/978-3-642-29497-6.

[10] S. Rychkov, *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in D>= 3 Dimensions*, SpringerBriefs in Physics (1, 2016), 10.1007/978-3-319-43626-5, [1601.05000].

[11] H. Osborn, *Lecture notes on Conformal Field Theories*, Cambridge (October, 2019), [https://www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/CFTNotes.pdf].

[12] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, Universität Bern (April, 2023), [http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html].

[13] B. Oblak, *From the Lorentz Group to the Celestial Sphere*, 8, 2015 [1508.00920].

[14] A. Strominger, *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory* (3, 2017), [1703.05448].

[15] 梁灿彬,《微分几何入门与广义相对论》, vol. 2, 科学出版社 (2006).

[16] G. Compère, *Advanced Lectures on General Relativity*, vol. 952, Springer, Cham, Cham, Switzerland (2, 2019), 10.1007/978-3-030-04260-8.

[17] M. Campiglia and A. Laddha, *Asymptotic symmetries of gravity and soft theorems for massive particles*, *JHEP* **12** (2015) 094 [1509.01406].

[18] M. Campiglia, *Null to time-like infinity Green's functions for asymptotic symmetries in Minkowski spacetime*, *JHEP* **11** (2015) 160 [1509.01408].

[19] H. Bondi, M.G.J. van der Burg and A.W.K. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **269** (1962) 21.

[20] R.K. Sachs, *Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **270** (1962) 103.

[21] S. Pasterski, *Lectures on celestial amplitudes*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 1062 [2108.04801].

[22] D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski and A. Strominger, *Semiclassical Virasoro symmetry of the quantum gravity $\mathcal{S}$-matrix*, *JHEP* **08** (2014) 058 [1406.3312].

[23] A.-M. Raclariu, *Lectures on Celestial Holography*, 2107.02075.

[24] D. Tong, *Lectures on General Relativity*, Cambridge (2019), [http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html].

[25] 赵柳,《相对论与引力理论导论》, 科学出版社 (2017).

[26] G. Barnich and C. Troessaert, *Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 111103 [0909.2617].

[27] G. Barnich and C. Troessaert, *Supertranslations call for superrotations*, PoS **CNCFG2010** (2010) 010 [1102.4632].

[28] G. Barnich and C. Troessaert, *BMS charge algebra*, JHEP **12** (2011) 105 [1106.0213].

[29] G. Barnich and C. Troessaert, *Aspects of the BMS/CFT correspondence*, JHEP **05** (2010) 062 [1001.1541].

[30] T. Banks, *A Critique of pure string theory: Heterodox opinions of diverse dimensions*, hep-th/0306074.

[31] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, New York (1997), 10.1007/978-1-4612-2256-9.

[32] A. Bilal, *Lectures on Anomalies*, 0802.0634.

[33] M. Srednicki, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1, 2007).

[34] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2, 2023), 10.1017/9781009253161.

[35] E. Witten, *A Simple Proof of the Positive Energy Theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1981) 381.

[36] T. Parker and C.H. Taubes, *On Witten's Proof of the Positive Energy Theorem*, Commun. Math. Phys. **84** (1982) 223.

[37] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space (PMS-41)*, Princeton University Press, Princeton (1994), doi:10.1515/9781400863174.

[38] D. Christodoulou, *Nonlinear nature of gravitation and gravitational-wave experiments*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1486.

[39] A. Strominger, *On BMS Invariance of Gravitational Scattering*, JHEP **07** (2014) 152 [1312.2229].

[40] P.-N. Chen and M.-T. Wang, *Conserved Quantities of harmonic asymptotic initial data sets*, 1409.5105.

[41] S. Badger, J. Henn, J. Plefka and S. Zoia, *Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory*, 2306.05976.

[42] W.D. Goldberger and I.Z. Rothstein, *An Effective field theory of gravity for extended objects*, Phys. Rev. D **73** (2006) 104029 [hep-th/0409156].

[43] Z. Bern, C. Cheung, R. Roiban, C.-H. Shen, M.P. Solon and M. Zeng, *Black Hole Binary Dynamics from the Double Copy and Effective Theory*, JHEP **10** (2019) 206 [1908.01493].

[44] G. Mogull, J. Plefka and J. Steinhoff, *Classical black hole scattering from a worldline quantum field theory*, JHEP **02** (2021) 048 [2010.02865].

[45] S. Sannan, *Gravity as the Limit of the Type II Superstring Theory*, Phys. Rev. D **34** (1986) 1749.

[46] T. McLoughlin, A. Puhm and A.-M. Raclariu, *The SAGEX review on scattering amplitudes chapter 11: soft theorems and celestial amplitudes*, J. Phys. A **55** (2022) 443012 [2203.13022].

[47] F.A. Berends and W.T. Giele, *Recursive Calculations for Processes with n Gluons*, Nucl. Phys. B **306** (1988) 759.

[48] F.A. Berends and W.T. Giele, *Multiple Soft Gluon Radiation in Parton Processes*, *Nucl. Phys. B* **313** (1989) 595.

[49] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Quark - Gluon Amplitudes in the Dual Expansion*, *Nucl. Phys. B* **299** (1988) 673.

[50] M.L. Mangano and S.J. Parke, *Multiparton amplitudes in gauge theories*, *Phys. Rept.* **200** (1991) 301 [hep-th/0509223].

[51] T.H. Burnett and N.M. Kroll, *Extension of the low soft-photon theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 86.

[52] F.E. Low, *Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions*, *Phys. Rev.* **110** (1958) 974.

[53] A. Brandhuber, J. Plefka and G. Travaglini, *The SAGEX Review on Scattering Amplitudes Chapter 1: Modern Fundamentals of Amplitudes*, *J. Phys. A* **55** (2022) 443002 [2203.13012].

[54] Z. Bern, S. Davies, P. Di Vecchia and J. Nohle, *Low-energy behavior of gluons and gravitons from gauge invariance*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 084035.

[55] R. Jackiw, *Low-energy theorems for massless bosons: Photons and gravitons*, *Phys. Rev.* **168** (1968) 1623.

[56] C.D. White, *Diagrammatic insights into next-to-soft corrections*, *Phys. Lett. B* **737** (2014) 216 [1406.7184].

[57] J. Broedel, M. de Leeuw, J. Plefka and M. Rosso, *Constraining subleading soft gluon and graviton theorems*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 065024 [1406.6574].

[58] T. He, P. Mitra, A.P. Porfyriadis and A. Strominger, *New Symmetries of Massless QED*, *JHEP* **10** (2014) 112 [1407.3789].

[59] D. Kapec, M. Pate and A. Strominger, *New Symmetries of QED*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **21** (2017) 1769 [1506.02906].

[60] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics, 3rd edition*, 1998, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119985144.

[61] A. Ashtekar, *Asymptotic quantization : based on 1984 naples lectures*, 1987, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:107226501.

[62] V.P. Frolov, *NULL SURFACE QUANTIZATION AND QUANTUM THEORY OF MASSLESS FIELDS IN ASYMPTOTICALLY FLAT SPACE-TIME*, *Gen. Rel. Grav.* **10** (1979) 833.

[63] S.W. Hawking and W. Israel, *Three Hundred Years of Gravitation*, Cambridge University Press (1989).

[64] J. Lee and R.M. Wald, *Local symmetries and constraints*, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 725.

[65] R.M. Wald and A. Zoupas, *A General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 084027 [gr-qc/9911095].

[66] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer New York, NY, 2 ed. (May, 1989).

[67] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to conformal field theory: with applications to String theory*, vol. 779 (2009), 10.1007/978-3-642-00450-6.

[68] T. He, P. Mitra and A. Strominger, *2D Kac-Moody Symmetry of 4D Yang-Mills Theory*, *JHEP* **10** (2016) 137 [1503.02663].

[69] A. Strominger, *Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory*, *JHEP* **07** (2014) 151 [1308.0589].

[70] A. Nande, M. Pate and A. Strominger, *Soft Factorization in QED from 2D Kac-Moody Symmetry*, *JHEP* **02** (2018) 079 [1705.00608].

[71] T. He, V. Lysov, P. Mitra and A. Strominger, *BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem*, *JHEP* **05** (2015) 151 [1401.7026].

[72] A. Ashtekar and R.O. Hansen, *A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I - Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity*, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1542.

[73] A. Ashtekar and M. Streubel, *Symplectic Geometry of Radiative Modes and Conserved Quantities at Null Infinity*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **376** (1981) 585.

[74] A. Ashtekar, *Asymptotic quantization of the gravitational field*, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 573.

[75] A. Strominger and A. Zhiboedov, *Superrotations and Black Hole Pair Creation*, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 064002 [1610.00639].

[76] M. Campiglia and A. Laddha, *Subleading soft photons and large gauge transformations*, *JHEP* **11** (2016) 012 [1605.09677].

[77] E. Conde and P. Mao, *Remarks on asymptotic symmetries and the subleading soft photon theorem*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 021701 [1605.09731].

[78] E. Conde and P. Mao, *BMS Supertranslations and Not So Soft Gravitons*, *JHEP* **05** (2017) 060 [1612.08294].

[79] C. Cheung, A. de la Fuente and R. Sundrum, *4D scattering amplitudes and asymptotic symmetries from 2D CFT*, *JHEP* **01** (2017) 112 [1609.00732].

[80] P.A.M. Dirac, *Wave equations in conformal space*, *Annals of Mathematics* **37** (1936) 429.

[81] S. Pasterski and S.-H. Shao, *Conformal basis for flat space amplitudes*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 065022 [1705.01027].

[82] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].

[83] S. Ferrara and G. Parisi, *Conformal covariant correlation functions*, *Nucl. Phys. B* **42** (1972) 281.

[84] S. Ferrara, A.F. Grillo and G. Parisi, *Nonequivalence between conformal covariant wilson expansion in euclidean and minkowski space*, *Lett. Nuovo Cim.* **5S2** (1972) 147.

[85] S. Ferrara, A.F. Grillo, G. Parisi and R. Gatto, *The shadow operator formalism for conformal algebra. Vacuum expectation values and operator products*, *Lett. Nuovo Cim.* **4S2** (1972) 115.

[86] S. Ferrara, A.F. Grillo, G. Parisi and R. Gatto, *Covariant expansion of the conformal four-point function*, *Nucl. Phys. B* **49** (1972) 77.

[87] D. Simmons-Duffin, *Projectors, Shadows, and Conformal Blocks*, *JHEP* **04** (2014) 146 [1204.3894].

[88] Z. Sun, *A group theoretical approach to quantum gravity in (A)dS*, Ph.D. thesis, Columbia U., 2021. 10.7916/d8-113p-mq30.

[89] Z. Sun, *A note on the representations of* $SO(1, d+1)$, 2111.04591.

[90] A. Bissi and S. Sarkar, *A constructive solution to the cosmological bootstrap*, *JHEP* **09** (2023) 115 [2305.08939].

[91] M.S. Costa, V. Gonçalves and J.a. Penedones, *Spinning AdS Propagators*, *JHEP* **09** (2014) 064 [1404.5625].

[92] E. Magliaro, C. Perini and C. Rovelli, *Compatibility of radial, lorenz, and harmonic gauges*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084013.

[93] L. Donnay, S. Pasterski and A. Puhm, *Asymptotic Symmetries and Celestial CFT*, *JHEP* **09** (2020) 176 [2005.08990].

[94] Y.T.A. Law and M. Zlotnikov, *Massive Spinning Bosons on the Celestial Sphere*, *JHEP* **06** (2020) 079 [2004.04309].

[95] M.S. Costa, J. Penedones, D. Poland and S. Rychkov, *Spinning Conformal Correlators*, *JHEP* **11** (2011) 071 [1107.3554].

[96] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (12, 2007), 10.1017/CBO9780511618123.

[97] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*, Cambridge University Press (6, 2013).

[98] A. Van Proeyen, *Tools for supersymmetry*, *Ann. U. Craiova Phys.* **9** (1999) 1 [hep-th/9910030].

[99] A.D. Kennedy, *Clifford Algebras in Two ω Dimensions*, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1330.

[100] J.W. van Holten and A. Van Proeyen, *N=1 Supersymmetry Algebras in D=2, D=3, D=4 MOD-8*, *J. Phys. A* **15** (1982) 3763.

[101] J. Ellis, *TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ*, *Comput. Phys. Commun.* **210** (2017) 103 [1601.05437].