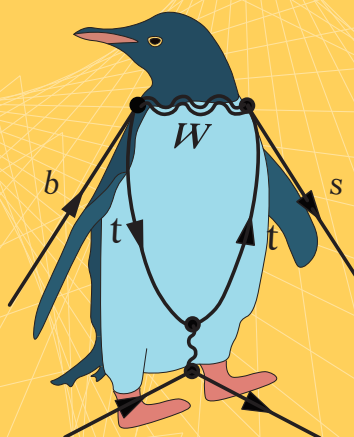


Bufan Zheng

Metaphysics

I don't know which Edition



Revised and modernized edition by

L^AT_EX

网络版
从未修订，将来也不会

编译日期: 2024-03-28

本书已由 Dinner 教育出版社发行
(2004 年 4 月第 10 版)

ISBN: 4210xxxxxxxxxxxxxxx

three generations of matter (fermions)						three generations of antimatter (antifermions)						interactions / forces (bosons)			
I		II		III		I		II		III					
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$	$\approx 173 \text{ GeV}$	$\approx 2.2 \text{ MeV}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$	$\approx 173 \text{ GeV}$	$\approx 2.2 \text{ MeV}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$	$\approx 173 \text{ GeV}$				$\approx 125 \text{ GeV}$		
	$+2/3$	$+2/3$	$+2/3$	$-2/3$	$-2/3$	$-2/3$	$-2/3$	$-2/3$	$-2/3$				0	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$				1	0	
charge	u	c	t	\bar{u}	\bar{c}	\bar{t}	d	s	b	\bar{d}	\bar{s}	\bar{b}	g	H	
	up	charm	top	antiup	anticharm	antitop	down	strange	bottom	antidown	antistrange	antibottom	gluon	Higgs	
spin	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$+1/3$	$+1/3$	$+1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	0	0	
	d	s	b	\bar{d}	\bar{s}	\bar{b}	e⁻	μ^-	τ^-	e⁺	μ^+	τ^+	γ	Z⁰	
	down	strange	bottom	antidown	antistrange	antibottom	electron	muon	tau	electron	muon	tau	photon	Z boson	
mass	$\approx 4.7 \text{ MeV}$	$\approx 96 \text{ MeV}$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$	$\approx 4.7 \text{ MeV}$	$\approx 96 \text{ MeV}$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$	$\approx 0.511 \text{ MeV}$	$\approx 106 \text{ MeV}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$	$\approx 0.511 \text{ MeV}$	$\approx 106 \text{ MeV}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$	$\approx 91.2 \text{ GeV}$		
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$+1/3$	$+1/3$	$+1/3$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	1	
charge	e⁻	μ^-	τ^-	e⁺	μ^+	τ^+	ν_e	ν_μ	ν_τ	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	W⁻	W⁺	
	electron	muon	tau	electron	muon	tau	electron neutrino	muon neutrino	tau neutrino	electron antineutrino	muon antineutrino	tau antineutrino	W boson	W boson	
mass	$\approx 0.511 \text{ MeV}$	$\approx 106 \text{ MeV}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$	$\approx 0.511 \text{ MeV}$	$\approx 106 \text{ MeV}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$	$< 1.0 \text{ eV}$	$< 0.17 \text{ eV}$	$< 18.2 \text{ MeV}$	$< 1.0 \text{ eV}$	$< 0.17 \text{ eV}$	$< 18.2 \text{ MeV}$	$\approx 80.4 \text{ GeV}$	$\approx 80.4 \text{ GeV}$	
	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	0	0	0	0	0	-1	+1	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	1	
charge	ν_e	ν_μ	ν_τ	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$							W⁻	W⁺	
	electron neutrino	muon neutrino	tau neutrino	electron antineutrino	muon antineutrino	tau antineutrino							W boson	W boson	

郑卜凡

个人 Github 主页: [WHUZBF](https://github.com/WHUZBF)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议。

目录

导言	1
第一部分 物理	3
第一章 流体/引力对偶	5
第二章 量子纠缠与散射振幅	7
第三章 黑洞	9
第四章 AdS/CFT 对偶	11
4.1 大 N 极限	11
第五章 超对称	13
5.1 标准模型	13
5.1.1 标准模型拉氏量	13
5.1.2 为什么需要超对称?	15
5.2 超 Poincaré 代数与超空间	16
5.3 Wess-Zumino 模型	16
第二部分 数学	17
第六章 p-adic	19
第三部分 附录	21
附录 A 物理疑难杂症	23
A.1 真空态与绘景	23

附录 B	数学疑难杂症	25
B.1	直积 · 张量积 · 直和	25
B.2	Grassmann 几何	28
B.2.1	外代数	28
B.3	李超代数	30
B.4	切矢, 微分, 子流形和 Frobenius 定理	32
B.4.1	切矢和微分	32
B.5	中心极限定理与随机矩阵模型	33
B.5.1	一些关于概率论的常识	33
B.5.2	$0+0$ 维 QFT	34
参考文献		37

导言

简要说明

旨趣 有趣的文章和科研课题都在这里了，算是一个新坑，记录一下阅读过的有趣的一些东西，和一些漫无边际的 idea，最后附录存放一些微妙的问题。

致谢

提示 我是真的会谢

第一部分

物理

第一章

流体/引力对偶

第二章

量子纠缠与散射振幅

第三章

黑洞

第四章

AdS/CFT 对偶

4.1 大 N 极限

第五章

超对称

5.1 标准模型

这本质上是唯象学的内容，但是超对称的提出很大程度上就是为了寻找超出标准模型的物理。标准模型从群论上看由三个规范群描述：

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.1)$$

传递相互作用的规范玻色子在其自伴表示下，而参与构成物质的费米子处于其基本表示下，其实这一点就很不自然，我们是从为了解释实验数据而要求费米子处于基本表示，原则上来说理论允许费米子处于任意其他表示之中。

规范玻色子本身是没有质量的，但是 W^\pm/Z^0 玻色子有质量，这可以通过引入一个复标量场，Higgs，通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ 的对称性自发破缺带来质量项，还剩下一个实标量场自由度和矢量场自由度没有破缺，它们构成 Higgs 粒子和光子。其它费米子质量的起源也可以通过和 Higgs 引入 Yukawa 相互作用项耦合，自发破缺后带来质量项。注意 QCD 中费米子 quark 的质量项是可以直接通过在 \mathcal{L}_{QCD} 中添加正定的质量项得到，但是由于电弱规范理论是一个手征理论（注意 $SU(2)_L$ 下标 L ），所以直接添加质量项会破缺手征性，质量项只能通过 Higgs 机制得到，详细的推导可见[余钊焕老师的讲义](#)。也正是因为有这么个更大的群到子群的对称性自发破缺，所以电弱理论已经统一，但是 QCD 还单独落在外面，大统一理论（GUT）的目标就是找到更大的群如 $SU(5)$ ，让它自发破缺到 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ ，自然得到三种基本相互作用。

5.1.1 标准模型拉氏量 我们先给出一份网上流传甚广的“物理学最复杂公式”，也就是标准模型的 Lagrangian，首先是 QCD 部分，动力学为：¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad q = u, d, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8 \\ &= \sum_q [\bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q + g_s G_\mu^a \bar{q}\gamma^\mu t^a q] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\nu G^{a\mu}) - (\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\mu G^{a\nu})] \\ &\quad - g_s f^{abc}(\partial_\mu G_\nu^a)G^{b\mu}G^{c\nu} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}G_\mu^b G_\nu^c G^{d\mu}G^{e\nu}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹选取规定

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a, \quad G^{a\mu\nu} \equiv \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} + g_s f^{abc} G^{b\mu} G^{c\nu}$$

然后需要引入 FP 鬼场量子化方法固定规范，还要加入两项：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (5.3)$$

和鬼场：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,FP}} = -\bar{\eta}_g^a \left(g_s \frac{\delta G^a}{\delta \alpha^c} \right) \eta_g^c = -\bar{\eta}_g^a (\delta^{ac} \partial^2 + g_s f^{abc} \partial^\mu G_\mu^b) \eta_g^c \rightarrow -\bar{\eta}_g^a \delta^{ab} \partial^2 \eta_g^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \eta_g^a) G_\mu^b \eta_g^c. \quad (5.4)$$

这里鬼场是 Grassmannian。电弱规范理论就麻烦很多，自发破缺后得到真正和粒子对应的场要由自发破缺前的场通过适当的线性组合得到，这里只给最终结论。首先是希格斯机制带来的规范玻色子质量项

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = m_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \quad (5.5)$$

然后是 Yukawa 耦合带来的 Higgs 粒子和费米子质量项：

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i \quad (5.6)$$

这里 i 隐含对三代 quark 求和。费米子和规范场之间通过协变导数项引入相互作用，或者说等价于和一堆 $U(1)$ 的流耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + Z_\mu J_Z^\mu + W_\mu^+ J_W^{+,\mu} + W_\mu^- J_W^{-,\mu} \quad (5.7)$$

其中：

$$\begin{aligned} J_{\text{EM}}^\mu &\equiv \sum_f Q_f e \bar{f} \gamma^\mu f \\ J_Z^\mu &\equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f = \frac{g}{c_W} \sum_f (g_L^f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R) \\ J_W^{+,\mu} &\equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL}), \quad J_W^{-,\mu} \equiv (J_W^{+,\mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL} + \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

这里 f 表示任意的费米子， ℓ 表示轻子， u, d 表示夸克， ν 是中微子。 $SU(2) \times U(1)$ 的规范场自相互作用可以由动能项：

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

来导出，注意这里的 W^a, B 都是未破缺之前的场，破缺后的场需要线性组合得到 $W^\pm/Z^0, A^\mu$ ，经过贼复杂的计算后得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EWG}} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu)] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu Z_\nu) (\partial^\nu Z^\mu) - (\partial_\mu Z_\nu) (\partial^\mu Z^\nu)] \\ &+ (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{-\mu}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{-\nu}) + \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{+\mu} W_\nu^- W^{-\nu} - W_\mu^+ W^{+\nu} W_\nu^- W^{-\mu}) \\ &+ ie [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} A^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} A^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\mu \\ &+ W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu A_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu A_\nu)] \\ &+ igc_W [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} Z^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\mu \\ &+ W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu Z_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu Z_\nu)] \\ &+ e^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu A^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu A^\nu) + g^2 c_W^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} Z_\nu Z^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu Z^\nu) \\ &+ egc_W (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu Z^\mu + W_\mu^+ W^{-\nu} A^\mu Z_\nu - 2W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu Z^\nu) \end{aligned} \quad (5.10)$$

把前面讨论的这一堆拉氏量全部凑在一堆就是标准模型了！但实际计算上我们不会真的取考虑全部的标准模型，往往是对一部分模型积掉实验能标上更高能的自由度得到一个有效理论，比如 π 介子理论，但是也够难算的了。

5.1.2 标准模型的局限以及引入超对称的必然性 虽然标准模型在解释实验现象上取得了巨大的成功，但是仍有非常多的问题亟待解决，关于唯象上新物理的寻找的更多内容可见书籍 [1] 的前两章。

参数过多 即使是标准模型本身，就需要用 19 个实验参数去描述，而实验参数越多意味着这个理论本身越想是一个没搞清楚内部结构的黑箱。况且冯诺依曼也说过：“四个参数画大象，五个参数鼻子动” [8]

没有引力 引力可以量子化，至少在平直时空背景下我们可以微扰地去做量子化。对于任何一个量子场论，都可以在有效场论的框架下写成 $\mathcal{L} = \sum_i c_i \mathcal{O}_i$ 的形式，这些 c_i 是需要计算散射振幅后通过实验拟合得到的，或者说理论的自由度。在低能标下绝大部分的自由度都是看不到的，而实验能标越高，我们也愈发要往里面加新的参数，做新的实验，对于 QED, QCD, 在 Λ_{QCD} 能标以下做实验确定的参数可以通过重整化群流方法得到高能标下的其它自由度，一直推到紫外也可以，意味着我们不用每个能标都做一次实验去确定参数，只用在特定能标以下确定有限多个参数就行了，这样的理论是紫外完备的，也就是可重整的。但是引力理论并不是可重整的，也就是说每当升高能标，理论中就会不断出现新的自由度，而且不能用前面的实验来确定，只能做新的实验，这样每个能标我们都要确定一次参数来确定这个能标下的量子引力理论。而且引力量子化之后的引力子目前实验上也没有探测到。当然，目前来说在特定能标下我们还是能半经典地去量子化引力，并且去计算引力子的散射，注意，不可重整化不是意味着圈图的计算我们无法处理无穷大，我们仍旧可以用正规化重整化的套路去掩盖无穷大并且与实验观测拟合，只是在 Wilson 有效场论的框架下引力的量子理论目前不完备，必须不断地去做实验，每个能标有一套自己的量子引力理论，不能用重整化群流联系。

没有暗物质 即使你去考虑 Einstein 引力本身，你也缺了点东西，天文观测有充足的表明暗物质存在，特别是冷暗物质。但标准模型中没有任何一个粒子对应暗物质。目前暗物质从粒子物理角度的解释就是去造各种新奇的粒子。见综述 [4, 10, 2]。而超对称给了暗物质非常自然的候选者。

中微子震荡 从前面的 5.6 可以看到即便是引入对称性破缺，中微子仍然是没有质量的。这在很长的一段时间内被认为是完全正确的，知道中微子震荡的发现，暗示着中微子有质量，而且三代中微子质量顺序以及中微子是 Majorana 还是 Dirac 质量项目前都有待研究，而且直接往标准模型里面添加中微子质量项又是非常不自然的。有关更多粒子物理历史方面的论述可见 Griffiths 的书籍 [6]

规范等级问题 虽然 Higgs 机制的引入成功解释了对称性自发破缺，还给费米子赋予了质量。但是它的引入仍旧非常刻意，没有很好的微观解释，终究只是个唯象理论。更要命的是，实验发现其质量约为 125GeV^2 ，非常轻，但是计算质量为 m_f 的粒子对 Higgs 的自能修正时，有限大的部分正比于 m_f^2 ，和一般的粒子重整化自能修正很不一样，这其实来源于 Higgs 是标量场。这意味着如果 f 非常重，修正可以变得非常大，甚至远大于其物理质量。目前的标准模型参与修正的 m_f 都是三代轻子质量，这一点问题不大。但是标准模型一定不完备，我们不能保证后面加入的自由度依旧有 m_f 非常小，意味着这些很大的修正必须非常仔细地抵消才能给出 $m_H \approx 125\text{GeV}$ 。但是如果引入超对称，每一个费米子都会带来一个玻色子伙伴，它们两个对 m_H 的修正由于费米子圈和玻色子圈正好差个符号相互抵消，这直接保护了 Higgs 粒子质量不受到大质量粒子辐射修正。

超弦 玻色弦只是一个玩具模型，其没有费米子激发，为了引入费米子就需要加入超对称得到超弦。

²本 Note 所有数据来源于 PDG

Coleman-Mandula 定理 S 矩阵的最大时空对称群只能是 Poincaré 对称性，这阻止了人们把 Poincaré 群嵌入更大的对称群 [3]。但是这个定理证明假定了所有生成元之间的李代数关系都只能是对易子，这是李代数的要求，但实际上我们完全可以去考虑所谓李超代数 [12]，生成元之间不仅可以是对易关系，还可以是反对易关系。考虑李超代数就可以把 Poincaré 代数扩充为超对称代数 [5]。这一做法物理上和数学上都没有任何禁闭，而且超对称代数和 Poincaré 代数一样用不等价不可约表示给出了所有基本粒子的定义。

... ..

目前的实验表明 TeV 能标上必然有新物理，但是我们完全不清楚新物理以怎样的方式出现，超对称就在这样一个历史背景下产生了。不过后面会看到，把超对称加入标准模型后问题会变得更糟。

5.2 超 Poincaré 代数与超空间

5.3 Wess-Zumino 模型

这只是一个玩具模型，可以认为是最简单的超对称实现，但是用玩具模型可以讲清楚很多物理，比如 QFT 里面一般上来就会讲 φ^4 理论。

第二部分

数学

第六章

p-adic

第三部分

附录

附录 A

物理疑难杂症

A.1 真空态与绘景

附录 B

数学疑难杂症

B.1 直积 · 张量积 · 直和

物理人在这些概念上往往非常模糊，胡乱使用，现在我们使用物理人的思想来区分下这几个概念。由于这几个概念的使用场景是在量子力学，所以我们在向量空间上讨论这三个运算。

直积和张量积是紧密相连的，这两个概念一起介绍。直积从定义上讲就是给两个集合，然后把两个集合简单的并在一起构成一个更大的集合， $A \times B$ ，仅此而已。但我们一般会在上面进一步定义内积和加法数乘使得其成为一个线性空间：

$$\text{加法 } (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\text{数乘 } \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\text{内积 } (a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$$

这样构成的空间称为 \mathbb{F} 上的自由向量空间：

$$\mathcal{F}(V, W; \mathbb{F}) \equiv \left\{ \sum_{(v, w) \in V \times W} k_{v, w}(v, w), k_{v, w} \in \mathbb{F} \right\} \quad (\text{B.1})$$

这个向量空间非常大，就是把每个 $(u, v) \in V \times W$ 都拿来作为基底张成的线性空间。张量积的初衷是去找 $V \times W \rightarrow Z$ 上的双线性函数 f ，双线性函数一定满足下面的条件：

$$\begin{aligned} (k_1 v_1 + k_2 v_2, w) &\sim k_1(v_1, w) + k_2(v_2, w) \\ (v, k_1 w_1 + k_2 w_2) &\sim k_1(v, w_1) + k_2(v, w_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

\sim 表示它们作用 f 得到的值一样。这么来看原先的那个 $V \times W$ 还是太大了，无法自然地蕴含上面的等价关系，所以我们干脆把上面的两条等价关系给模掉，得到一个更合适的线性空间 Y ：

$$Y \equiv \mathcal{F}(V, W) / \sim \quad (\text{B.3})$$

数学人更喜欢用的不是上面两条，而是和它们等价的下面四条：

$$\begin{aligned}
 (v_1 + v_2, w) &\sim (v_1, w) + (v_2, w) \\
 (v, w_1 + w_2) &\sim (v, w_1) + (v, w_2) \\
 (kv, w) &\sim k(v, w) \\
 (v, kw) &\sim k(v, w)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

从 $V \times W$ 到 Y 的线性映射我们记为 h ，则 f 就自然诱导出来了 $Y \rightarrow Z$ 的线性映射 g ，而且 Y 也小多了，我们也没必要去强调 g 的双线性性质，现在 Y 自己就蕴含了线性映射的双线性性。我们把这个新的空间叫做 $V \otimes W$ ，即张量积空间。物理上我们把里面的元素写为 $|\psi\rangle|\phi\rangle$ ，而且前面的四条性质就蕴含在我们物理上对张量积的普遍共识，物理上对于张量积的应用一般是体系有多个自由度，比如多个粒子或者一个粒子但是有自旋这种自由度，那么整个希尔伯特空间就看作是每个自由度的希尔伯特空间的张量积。而且在每个自由度上的矢量加法满足 \otimes 的分配律。

由于任何一个映射 f 都可以诱导出映射 g ，所以很多时候我们不会额外区分两者，事实上可以证明双线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W; Z)$ 和 $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ 是同构的。在物理上我们考虑的线性空间都是内积空间¹，根据里斯表示定理，每个向量空间中的元素都可以和其对偶空间中的元素通过内积双线性性建立一一对应，也即所谓 ket 和 bra 的概念。如果取：

$$(\langle\psi_1| \otimes \langle\phi_1|) \cdot (|\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{B.5}$$

那么很容易说明 $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$ 。当然，这一点的成立并不依赖于上面的内积选取²，只是量子力学里面都是这么取的。

上面的定义是构造性的，但数学上更喜欢的是泛性质的定义，直接用下面的交换图就好了：

定义 B.1.1 张量积空间是某个向量空间 Y 配以双线性映射 $h: V \times W \rightarrow Y$ ，使得对于任意双线性映射 $f: V \times W \rightarrow Z$ ，存在唯一的线性映射 $g: Y \rightarrow Z$ ，使 $f = g \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{h} & Y = V \otimes W \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! g \\
 & & Z
 \end{array}$$

上面交换图中虚线的意思是存在且唯一存在一个映射使得图标交换。

直和和直积在数学上真的不怎么区分，我先给出泛性质的定义你就知道它们之间的区别有多么微妙了。

定义 B.1.2 直积在数学上指的是**积范畴**，即对于范畴 \mathcal{C} 中的一族对象 $X_i (i \in I)$ ，若存在一个对象，通常记为 $\prod_{i \in I} X_i$ ，以及一族态射 $\pi_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 使得对任意对象 X 和一族态射 $f_j: X \rightarrow X_j$ ，都存在唯一的态射 $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ 使得对任意 $i \in I$ 都有 $\pi_i \circ f = f_i$ 那么对象 $\prod_{i \in I} X_i$ 连同态射族 $\{\pi_i: i \in I\}$ 称为对象族 $\{X_i: i \in I\}$ 的积 (product)。画出交换图如下：

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\
 & \searrow f_j & \downarrow \pi_j \\
 & & X_j
 \end{array}$$

¹尽管张量积的定义不需要内积，对偶空间也不需要，这里我们只看有内积的简单情况。

²毕竟它的定义就不需要内积，这里局限在内积空间上讨论感觉从物理直观上更容易说清楚，用严谨的 general 的数学反而迷糊。

定义 B.1.3 直和在数学上指的是**余积范畴** (coproduct)，交换图上的定义只需要把上面图的箭头全部反转就好了，文字定义不难相应写出：

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\exists! f} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_j & \uparrow \iota_j \\ & & X_j \end{array}$$

可见两者定义上差的只是一个投影 π ，一个是嵌入 ι_i 。

从范畴的角度看它们差的仅仅只是一个积一个是余积，把箭头反过来罢了！所以数学上真的不怎么区分，特别是对于线性空间范畴，这个定义真的就是等价的！从维数上也能看出这一点 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ，但是前面的张量积 $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mn}$ 。但是这里说的是外直和，后面还会讲到内直和。

回到物理一些的想法，翻阅喀兴林老师的高量课本，第一章就给出直和的三条性质：

数乘分配 $\lambda(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle) = \lambda|\psi\rangle \oplus \lambda|\phi\rangle$

加法 $|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle + |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle = (|\psi\rangle + |\psi'\rangle) \oplus (|\phi\rangle + |\phi'\rangle)$

内积 $(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle, |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle + \langle\psi'|\phi'\rangle$

这不和自由向量空间的定义一模一样么！所以在线性空间范畴上真看不出啥区别。我们再看**直和**和一般的**向量的和**有啥区别。注意我们定义主打的就是两个希尔伯特空间是互相分开的，互相不影响，我们在定义两个向量空间的外直和时，我们并不要求两个向量空间的元素之间有加法定义，而是定义直和来把多个自由度强行直接并起来。这其实有某种选择定则在里面，当我们把两个态加起来的时候，我们认为它们处于同一个线性空间，可以叠加得到混合态。但是你绝对不会把一个自旋为 0 和一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的态直接叠加起来，因为这意味着一个单粒子态一会儿是费米子，一会儿是玻色子，尽管理论上这种禁闭没有严格证明（见 Weinberg 场论第一卷相关部分），但是我们从实验上可以相信这种禁闭是存在的，而这个时候考虑总的体系希尔伯特空间，最好的方式就是用直和了，也就是直接直积并起来罢了。

量子力学里面更多的去讲直和是讲巨正则系综构造 Fock 空间。由于非相对论性的量子力学是个粒子数不变的体系，所以也存在上面与自旋类似的选择定则，也就是说你不会把两个粒子数不同的态直接加起来构造一个混合态，这是没有物理意义的。要用的时候就直接把他们看作是处于完全不同的希尔伯特空间，有自己的一套加法数乘规则，而且互不影响，最后再把它们通过直和直接并起来，构成一个系综，是一个混合态。

内直和就完全不一样了，内直和我们首先是有一个很大的向量空间，然后想去考虑他的分解，但是我们比较关注“正交分解”，也就是说希望把 V 分解为一系列子空间 V_1, V_2, \dots ，这些子空间互相除了零元素没有公共元素，但它们之间的元素是有子空间自然诱导的加法的。如果对于 V 中的任意一个元素 v ，都存在且唯一一组 (v_1, v_2, \dots) 使得 $v = \sum_i v_i$ ，则称 V 是 V_1, V_2, \dots 的（内）直和，也记为：

$$V = \bigoplus_{i=1} V_i \quad (\text{B.6})$$

在讨论群表示的时候涉及到群表示的分解，那个分解实际上就是在把群表示空间分解为一系列更小的空间的内直和，每个最小的不能再分的块就是不可约表示。在纯粹考虑矩阵理论的时候也会谈及张量积和直和的概念，矩阵的直和应该对应到内直和，而张量积就是前面讨论的张量积（把矩阵看成是线性算符， $V \otimes W$ 看成是 $(V^* \otimes W^*)^*$ ），只是把前面的理论用线性算符重写了一遍，并选取了一组基底写成矩阵形式。不少文献也把矩阵的张量积叫克罗内积。

总结一下，这一节定义 $V \otimes W$ 的目的就是把 $V \times W$ 上的双重线性映射提升为新的空间 $V \otimes W$ 上的线性映射来研究。而且 $V \otimes W$ 的本质其实就是 $\mathcal{L}(V^*, W^*, F)$ ，也就是对偶空间上的双重线性泛函，

这一点可以从下面的等式看出来：

$$V \otimes W \cong \mathcal{L}((V \otimes W)^*, F) \cong \mathcal{L}(V^* \otimes W^*, F) \cong \mathcal{L}(V^*, W^*, F) \quad (\text{B.7})$$

牢记这一本质，我们可以把 $V \otimes W$ 具体构造出来。首先对于 $f \in V^*, g \in W^*$ ，可以定义这两个线性泛函的张量积为：

$$(f \otimes g)(v, w) \equiv f(v) \cdot g(w) \quad (\text{B.8})$$

不难发现通过张量积 \otimes 运算，我们从 V, W 中的线性泛函出发得到了一个 $V \times W \rightarrow F$ 的双重线性泛函，也就是 $V^* \otimes W^*$ 中的一个元素。同样，假设 V 的基底为 $\{e_i | i \in I\}$ ， W 的基底为 $\{f_j | j \in J\}$ ，把他们看成是 V^* 和 W^* 中的线性泛函，那么 $V \otimes W$ 的基底就可以构造为：

$$V \otimes W = \text{span} \{e_i \otimes f_j | (i, j) \in I \times J\} \quad (\text{B.9})$$

这样我们就找到了 $h: V \times W \rightarrow V \otimes W$ 。我们这里都是集中在两个线性空间的基础上讨论，这一构造可以轻易推广到有限个向量空间的张量积上面去，而且不难证明满足结合律， $V \otimes W \otimes Z$ 是良定义的。

B.2 Grassmann 几何

B.2.1 外代数 接着上面一节继续讨论，前面的张量积空间对任意向量空间 V, W 都是可以进行构造的，现在我们把范围搞窄一点，假设只考虑 V 和他的对偶 V^* 构成的张量积空间：

定义 B.2.1 ((r, s) 阶张量空间)

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^s \quad (\text{B.10})$$

这称为 (r, s) 阶张量空间，其中的 r 叫逆变阶数， s 叫协变阶数。特别地定义 $V_0^0 \equiv F$

注记 B.2.2 实际上这些 V, V^* 完全可以交替排列，不过我们总可以让他们排列成这样整齐的方式便于记号书写方便。

再来解释一下为什么要叫逆变反变，根据前面说的，我们记 $V = \{e_i\}, V^* = \{e^{*j}\}$ ，那么 V_s^r 中的任意一个向量都可以展开为下面的形式：

$$x = x_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s} \quad (\text{B.11})$$

注记 B.2.3 注意一上一下表示求和，不但能帮助我们分清求和指标，还能帮我们分清协变逆变。

由于 V 中基底 $\{e_i\}$ 的选取是完全任意的，可以差一个线性变换，对应的 $\{e^{*j}\}$ 的选取也就可以差个线性变换，而且是对应的逆矩阵， x 本身在基底变换下是绝对的，但是其在不同基底下的分量会差个线性变换，可以证明如果选取 $A_i^j e_j$ 作为新基底， x^i 会利用 A 的逆矩阵变换，所以对应 V 的基底 e_i 叫逆变的（尽管本身 e_i 用 A 来变）；同样的 x_j 会利用 A 矩阵本身来变换，所以对应 V^* 的基底 e^{*j} 叫协变的（尽管本身 e^{*j} 用 A^{-1} 来变）。

V_s^r 中的元素除了可以用张量积运算生成更大的张量以外，还可以利用缩并这个运算生成更小的张量，数学上严格定义为：

定义 B.2.4 (缩并) 张量 x 的缩并定义为：

$$C_{\lambda\mu}(x) = \langle v_\lambda, v^{*\mu} \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_\lambda \otimes \cdots \otimes v_r, \\ \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{*\mu} \otimes \cdots \otimes v^{*s}, \quad (\text{B.12})$$

其中 $\hat{}$ 表示去掉这个因子。

不过物理人口中更关心张量的分量，而不是其本身，毕竟分量是用来真正做计算的，那么缩并其实就是把某个上指标和某个下指标去成一样的然后求和，类似于矩阵取 trace。

无论是缩并还是张量积，最终得到的元素都不会在原空间里面，这引导我们去利用直和构造 Fock 空间一样来构造更加大的空间，使得这些运算是封闭的。我们现在只考虑 V_0^r 或 V_s^0 ，也就是不考虑 V 和 V^* 的混合：

定义 B.2.5 (张量代数) 由所有 $T^r(V) \equiv V_0^r (r \geq 0)$ 的直和构成的空间记为：

$$T(V) \equiv \bigoplus_{r=0} V_0^r \quad (\text{B.13})$$

显然这个空间没有缩并运算，但是在张量积运算下是封闭的，构成了一个代数，称为**张量代数**。

T^r 空间作为线性空间可以考虑两类子空间，考虑下面两个投影算子：

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sigma x, \\ A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn } \sigma \cdot \sigma x \quad (\text{B.14})$$

这里 \mathfrak{S}_r 表示 r 阶置换群，上面的两个算子把 $T^r(V)$ 分别投影到全体全对称张量的集合 $P^r(V)$ 和全反对称张量的集合 $\Lambda^r(V)$ 。从指标上看就是那些全对称和全反对称的张量构成的向量空间。显然这个时候如果继续把 $P_r(V)$ 或者 $\Lambda^r(V)$ 直接对所有 r 直和起来的空间在张量积运算下并不构成一个代数，所以要对乘法进行修正，下面具体来考虑反对称部分。

注记 B.2.6 约定 $\Lambda^1(V) = V, \Lambda^0(V) = F$ 。

定义 B.2.7 (外积)

$$\xi \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}(\xi \otimes \eta), \quad \xi \in \Lambda^k(V), \eta \in \xi \in \Lambda^l(V) \quad (\text{B.15})$$

其中 A_{k+l} 是前面定义的反对称化算子。不难验证 $\xi \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ 。

外积运算有如下性质：

- 分配律：

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta, \quad \xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2$$

- 反变换律： $\xi \wedge \eta = (-1)^k \eta \wedge \xi$
- 结合律： $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

定义 B.2.8 (外代数) 在上面外积的定义下

$$\Lambda(V) \equiv \bigoplus_{r=0} \Lambda^r(V)$$

构成一个代数，称为**外代数**，或 **Grassmann 代数**。

B.3 李超代数

物理人群环域模体格这些代数结构真正关心的就是群，而且很多情况下只关心它的表示，为了更好地数学上刻画李超代数，我们从环和域开始讲起。

回忆群的定义，是在集合上定义了一个乘法结构，而且封闭、结合、存在幺元且元素都可逆，现在考虑把这四条性质一条条加上去。如果只有封闭性，则称为**原群 (Magama)**，考虑继续加性质：

定义 B.3.1 (半群与幺半群) 带有二元运算的非空集 S 若满足结合律，则称之为**半群**。存在幺元的半群称为**幺半群 (Monoid)**。若 M 是幺半群，而子集 $M' \subset M$ 满足 (i) M' 对乘法封闭，(ii) $1 \in M'$ ，则称 M' 为 M 的子幺半群。

如果在幺半群的基础上加上所有元素都可逆，那就得到了群的定义。

定义 B.3.2 (含幺) 环是一组资料 $(R, +, \cdot)$ ，其中

1. $(R, +)$ 是交换群，二元运算用加法符号记作 $(a, b) \mapsto a + b$ ，加法幺元记为 0 ，称之为 R 的加法群；
2. 乘法运算 $\cdot : R \times R \rightarrow R$ 简记为 $a \cdot b = ab$ ，满足下述性质：对所有 $a, b, c \in R$ ， $\diamond a(b + c) = ab + ac$ ， $(b + c)a = ba + ca$ (分配律，或曰双线性)， $\diamond a(bc) = (ab)c$ (乘法结合律)；
3. 存在元素 $1 \in R$ 使得对所有 $a \in R$ 皆有 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ ，称作 R 的 (乘法) 幺元。

后面两点其实蕴含了 (R, \cdot) 是一个幺半群。除去和幺元相关性性质得到的 $(R, +, \cdot)$ 称作无幺环。若子集 $S \subset R$ 对 $(+, \cdot)$ 也构成环，并且和 R 共用同样的乘法幺元 1 ，则称 S 为 R 的子环，或称 R 是 S 的环扩张或扩环。

例 B.3.3 后面用的比较多的是 \mathbb{Z}_n 环，它的元素由整数关于 n 的模得到，比如 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ，加法和乘法就是自然数的加法乘法取模 n 。全体整数也构成一个环，称为自由环 \mathbb{Z} 。

定义 B.3.4 域是一组资料 $(K, +, \cdot)$ ，其中

1. $(R, +)$ 是交换群；
2. (R, \cdot) 是交换群；
3. $\forall a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = ab + ac$ 。

这个定义和环颇有些相似，实际上域可以看作是环上的乘法幺半群附加交换性，这时候环变成一个**交换环**，再要求乘法意义上环中除了加法零元每个元素都有逆，这环变成**除环 (体)**。**域就是一个交换可除环**。

简单点说就是一个集合上面定义了加减乘除，满足通常的结合律、交换律和分配律等等。但是有一个地方和小学学的数域有点不一样，若干个相同的不为 0 的数求和可以为 0 。比如 \mathbb{Z}_2 也可以看作一个域，其中 $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ ！

定义 B.3.5 一个域只可能出现两种情况：

特征 0: 任何元自己和自己加法无论多少次都不会得到零元 (零元自己除外)；

特征 p : $\exists p \in \mathbf{Prime}$ 满足任何数自己和自己相加 p 次后总是得到零元。

后面的讨论在特征为 0 的域上进行。

回忆李代数首先是一个代数，生活在一个线性空间，李超代数首先是一个超代数，和代数的区别是其生活在阶化之后的线性空间上。

定义 B.3.6 (Z_n 阶化向量空间) 若一个向量空间可以直和分解为 $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} V_\alpha$, 则称 V 为 Z_n 阶化向量空间。 V_α 子空间中的元素称为 α 阶齐次元。

这个定义只要求这样的分解存在就行, 并不需要搞清楚 V_α 到底谁是谁。

定理 B.3.7 若 V, W 都是 Z_n 阶化向量空间则它们上面的线性算子 $\mathcal{L}(V, W)$ 也是一个 Z_n 阶化向量空间。张量积空间亦然。

考虑 V 上的双线性函数 $f: V \times V \rightarrow K$, 可以有下面几种形式:

相容的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(x, y) \propto \delta_{\alpha\beta}$

超对称的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(x, y) = (-1)^{\alpha\beta} f(y, x)$

反超对称的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(x, y) = -(-1)^{\alpha\beta} f(y, x)$

定义 B.3.8 超代数是一个 \mathbb{Z}_2 阶化的代数

原先的李代数的代数乘法只有对易子, 现在李超代数的目的就是把反对易子也加进来, 而前面先定义阶化的目的就是分清楚哪些元素之间反对易关系, 哪些之间是对易关系。

定义 B.3.9 李超代数是一个超代数, 且乘法 (\cdot, \cdot) 满足:

双线性: $(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1(\alpha, \beta_1) + k_2(\alpha, \beta_2)$ $(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta)$

阶化反对易: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, (x, y) = -(-1)^{\alpha\beta} (y, x)$

阶化 Jacobi 恒等式: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, ((x, y), z) = (x, (y, z)) - (-1)^{\alpha\beta} (y, (x, z))$

超代数是代数直接阶化, 但是李超代数并非直接把李代数阶化。和李代数一样, 李超代数的李超括号可以直接由超代数的乘法诱导:

$$[x, y] = xy - yx, \quad \{x, y\} = xy + yx$$

超李代数的生成元分为两组 $x_i \in \mathfrak{g}_0, y_\alpha \in \mathfrak{g}_1$, 则对易关系可以写为:

$$[x_i, x_j] = f_{ij}^k x_k, \quad [x_i, y_\alpha] = F_{i\alpha}^\beta y_\beta, \quad \{y_\alpha, y_\beta\} = A_{\beta\alpha}^i x_i \quad (\text{B.16})$$

且结构常数满足:

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k, \quad F_{i\alpha}^\beta = -F_{\alpha i}^\beta, \quad A_{\beta\alpha}^i = A_{\alpha\beta}^i \quad (\text{B.17})$$

实际物理上考虑的是它们的射影表示, 所以就跟 CFT 里面的 Virasoro 代数一样可以有个中心扩张。虽然 Poincaré 代数的中心扩张总可以消除, 但是超 Poincaré 代数在 $\mathcal{N} > 1$ 时可以有非平庸的中心荷。李超代数的中心扩张定义和李代数完全一致, 只是 c 和其他生成元不是对易, 而是超对易, 也就是 $(c, x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ 。

例 B.3.10 (一般线性李超代数) 李代数比较重要的是考虑其到 $\mathfrak{gl}(n)$ 的子代数的同态, 也就是考虑其线性表示。李超代数这边同样也会考虑表示, 这个时候对应的是 $\mathfrak{pl}(m, n)$ 的子代数。考虑任意一个 $\mathfrak{gl}(m+n)$ 中的元素, 在某个基底下:

$$\begin{pmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times n} \\ C_{n \times m} & D_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m \times m} & 0 \\ 0 & D_{n \times n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{m \times n} \\ C_{n \times m} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

这实际上就已经把 $\mathfrak{gl}(m+n)$ 进行了 \mathbb{Z}_2 阶化, 分块对角的是 $\mathfrak{pl}(m, n)_{\bar{0}}$, 斜分块对角的是 $\mathfrak{pl}(m, n)_{\bar{1}}$ 。然后在矩阵乘法诱导的 $[\cdot, \cdot]$ 和 $\{\cdot, \cdot\}$ 下构成李超代数。注意到对于同样一个 $\mathfrak{gl}(m+n)$, 可以有不同的 \mathbb{Z}_2 阶化方法, 所以对于李超代数线性表示空间的维数需要用两个指标 m, n 来标记。

常常对于 $\mathfrak{pl}(m, n)$ 中的元素定义超迹:

$$\text{str } x \equiv \text{tr } A - \text{tr } D \quad (\text{B.19})$$

它与基底选取无关, 而且超迹自然诱导出一个 $\mathfrak{pl}(m, n) \times \mathfrak{pl}(m, n) \rightarrow K$ 的双线性 $\langle x, y \rangle \equiv \text{str } (xy)$, 而且它是相容的, 还是不变的, 也就是说 $\langle (x, y), z \rangle = \langle x, (y, z) \rangle$ 。超对易子的超迹必然是 0, $\text{str } (x, y) = 0$ 。利用超迹还可定义出 $\mathfrak{pl}(m, n)$ 的子代数 $\mathfrak{spl}(m, n) \equiv \{x \in \mathfrak{pl}(m, n) | \text{str } x = 0\}$

李超代数和李代数有许多相似之处, 比如同样可以定义单李超代数, 可以考虑上面的 Killing 型和伴随表示, 还可以考虑典型代数, 用 Dynkin 图和 Cartan 子代数方法找最高权表示或是对单李超代数进行分类。但是它又有不少不同点需要注意, 比如 Schur 引理不再成立:

定理 B.3.11 (超 Schur 引理) 设 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{pl}(V)$ 是李超代数的一个不可约表示, 则与全部 $\rho(\mathfrak{g})$ 可超交换的线性变换,

$$C(\rho) = \{a \in \mathfrak{pl}(V) | (a, \rho(\mathfrak{g})) = 0\}$$

只可能是 $C(\rho) = cI$, 或

$$C(\rho) = c \begin{pmatrix} I_{n \times n} & b \\ b^{-1} & I_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad c \in K$$

这种情况要求 $n = \dim V_{\bar{0}} = \dim V_{\bar{1}}$

再比如李代数的李定理也不再成立。更多有关李超代数表示论的内容请见 [12, 11, 7]。

B.4 切矢, 微分, 子流形和 Frobenius 定理

这些都是微分几何最基础的概念, 物理人一般就是凭感觉去定义, 这种定义方式一般没问题, 我们来看数学人是怎么严格理解这件事情的。为此首先看物理人是如何定义的, 引入 David Tong 讲义上面的讲法。

B.4.1 切矢和微分

B.5 中心极限定理与随机矩阵模型

本节说白了就是在玩 0 + 0 维的量子场论，为讨论大 N 极限做准备。

B.5.1 一些关于概率论的常识 下文我们用大写字母表示随机变量，用对应的小写字母表示随机变量的取值，后面讨论的都是连续型随机变量。

设随机变量的 PDF（概率密度函数）为 $p(x)$ ，定义其特征函数为傅里叶变换：

$$\hat{p}(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} p(x) \quad (\text{B.20})$$

利用它在 $k = 0$ 处做形式幂级数可以得到：

$$\begin{aligned} \hat{p}(k) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n M_n \\ M_n &= \langle X^n \rangle = \int dx x^n p(x) = \left(\frac{\partial}{i\partial k} \right)^n \hat{p}(k) \Big|_{k=0} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

还有一个很有用的概念叫 cumulants，或者说叫集团（cluster） n 阶矩 K_n ：

$$\hat{p}(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n K_n \right) \quad (\text{B.22})$$

实际计算中需要计算 M_n ，也就是 n 点关联函数，可以把他表示成集团的和的形式：

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1, \\ M_2 &= K_2 + K_1^2, \\ M_3 &= K_3 + 3K_1 K_2 + K_1^3, \\ M_4 &= K_4 + 4K_3 K_1 + 3K_2^2 + 6K_2 K_1^2 + K_1^4 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

所以求关联函数归结为求 cumulants，而且上面的公式也可以用图的形式表示出来。比如 M_3 ：

$$M_3 = \boxed{\bullet \bullet \bullet} + \textcolor{brown}{C}_3^2 \boxed{\bullet \bullet} \bullet + \bullet \bullet \bullet$$

用圈圈起来的代表一个 cluster，里面 n 个球就代表是 K_n ，最终结果就是把所有的分组方法对应的图加起来，每个图又是集团的乘积。这其实就是在考虑 n 个不同的球如何用完全一样的盒子进行分类（容量相同的视为完全相同的盒子，不同容量盒子依旧不同）。

现在考虑 N 个独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$ ，且设 $X = \sum_{i=1}^N X_i$ ，那么 X 的 PDF 就可以表达为：

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \left[\prod_i dx_i \right] \delta(x - \sum_i x_i) p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \int \left[\prod_i dx_i \right] e^{ik \sum_i x_i} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \left[\int dx' e^{ikx'} p(x') \right]^N \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \hat{p}^N(k) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

利用特征的定义，设随机变量的方差为 σ ，平均值为 μ ，则有：

$$\hat{p}(k) = \exp\left(ik\mu - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 + \dots\right) \quad (\text{B.25})$$

则最终得到：

$$q(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-N\mu) - N\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + N\mathcal{O}(k^3)} \quad (\text{B.26})$$

N 有限时这个式子很复杂，但是积分换元把 Nk 当整体，不难发现 $N \rightarrow \text{infy}$ 后上式中的 $\mathcal{O}(k^3)$ 完全可以丢掉得到：

$$q(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - N\mu)^2}{N\sigma^2}\right) \quad (\text{B.27})$$

这正是中心极限定理说的事情，这也让我们第一次看到了很多理论在取 $N \rightarrow \infty$ 后反倒会变得简单。

B.5.2 0+0 维 QFT 我们的讨论从上一节简化后的大 N 极限下的情况开始，假设 $\mu = 0$ ，这个时候随机变量 Φ 遵从高斯分布：

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right) \quad (\text{B.28})$$

这里 \mathcal{Z} 是归一化系数，遵从统计力学的术语，我们叫他配分函数。但是真正能用于计算的配分函数定义是 $P(\phi)$ 的特征：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{J^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

显然 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}[J = 0]$ ，这其实就相当于把 PDF 形变一下，加一个流 J ，我们一般把这个叫**配分函数**³。按照前面的讨论，只需要把这个配分函数在 $J = 0$ 处做形式幂级数就能得到任意点关联函数，对于高斯情况配分函数可以严格计算出来，所以很简单可以得到：

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{1}{m^{2n}} \quad (\text{B.30})$$

真实世界的概率模型不可能是如此简单的高斯分布，但是一般非高斯的我们又不会解，退而求其次，我们考虑一个小扰动：

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right), \quad g \ll 1 \quad (\text{B.31})$$

即使是如此简单的扰动就算是计算归一化系数都很困难。注定只能做微扰展开求解，也就是把最终答案写成关于 g 的幂级数。这其实涉及到收敛半径这一比较微妙的问题，高维 QFT 比如 QED, QCD 这些模型，展开半径都是 0！微扰展开实际上只能理解为渐近展开！但是我们考虑的 0+0 维 QFT 其实就是微扰方法算一元函数积分，我们不需要 care 所谓非微扰效应，圈图发散，重整化这些玩意儿。但是这个玩具模型能很好地帮助理解费曼图是怎么来的。

考虑生成泛函：

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + iJ\phi\right) \quad (\text{B.32})$$

显然 $\mathcal{Z}[g] = \mathcal{Z}[g, J = 0]$ ，如果微扰地计算出了这个函数。那么直接根据 $M_n = \left(\frac{\partial}{i\partial J}\right)^n \mathcal{Z}[g, J = 0]$ 就可以得到任意阶关联函数的微扰解。我们记未受到扰动的 Gauss 型随机变量的配分函数为 $\mathcal{Z}_0[J]$ ：

$$\mathcal{Z}_0[J] \equiv \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \quad (\text{B.33})$$

³或者按照高维 QFT 的叫法叫**生成泛函**

注记 B.5.1 注意这里定义丢掉了归一化因子 \mathcal{Z} 。

则：

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \exp \left[-\frac{1}{4!} g \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^4 \right] \mathcal{Z}_0[J] \quad (\text{B.34})$$

虽然 $\mathcal{Z}_0[J]$ 可以严格求解，但是我们还是写下他的级数形式，将上面的配分函数写为：

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left[\frac{1}{4!} -g \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^4 \right]^V \times \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left[\frac{1}{2}(-J) \frac{-1}{m^2}(-J) \right] \quad (\text{B.35})$$

我们对因子的 -1 相位进行了合理排布，没那么神秘，只是为了后面计算稍微方便一些，正统 QFT，这些相位不是以 -1 给出，而是以 i 的形式给出。费曼图也没那么神秘，无非就是现在想算这个配分函数，每次都一项项展开分析太麻烦了，然后就想了个办法把这些求和中的项用图的形式写出来而已。⁴

首先看下求和里面有些啥，首先有 J ，而且很容易求出剩下 $E = 2P - 4V$ 个，这也直接给出限制 $E \geq 0$ 。其次有 $\frac{-1}{m^2}$ 和 $-g$ ，而且一个 $-g$ 的出现总是意味着四个 $-1/m^2$ ，还有一个归一化因子 $\mathcal{Z}[g]$ ，我们先不管它。这样我们就得到了三个拼图：

唯一要做的事情就是把这些拼图拼起来得到一个闭合的图，所谓闭合，我的意思是说顶点和源或者源和源之间都用传播子粘好了，不存在还剩下半截传播子露在外面的情况，图是连通的还是非连通的倒无所谓。首先从符号上我们知道应该有 $(-1)^{P-V}$ 因子，用这些拼图拼好的闭合的图正好有这样的因子。还有一个问题是为啥引入微扰的时候系数要加个 $1/4!$ ，这也不神秘，首先注意到 V 个顶点 P 个传播子的项数理论上来说由 $\partial/\partial J$ 湮灭 J 的方式决定，总共有 $(2P)!/(2P-4V)!$ 种不同的湮灭方式，不过这里绝大部分所对应的图的拓扑结构都是一样的，也就会对应一样的代数项，当然也有拓扑结构不一样的，所以微扰展开里面的每一项都要用几个拓扑结构不同的图来表示，也就是那些所有具有 P 个传播子， V 个顶点的图。那些拓扑结构相同的图我们当然只用画一次，然后在前面乘上个系数就好，但是我们并不希望这个系数特别大，即使是泰勒展开前面就有的系数也不能完全把他们消除为 1，所以我们预先在 ϕ^4 前面乘上了一个 $1/4!$ 。但是事与愿违，这还是不能保证每个图前面的系数都为 1，但是幸运的是，这个系数只和图的拓扑结构有关，有系统的方法数出来，只是数起来非常麻烦罢了。我这里不打算讲怎么数这些不同的**对称因子**，[袁野老师的讲义](#)上写的很清楚，关于 ϕ^4 理论，文献 [9] 中还给出了公式。

继续发挥注意力，注意到求关联函数的时候要对配分函数关于 J 求导，所以 n 点函数肯定不会有 $E < n$ 的贡献，而且最后还要取 $J = 0$ ， $E > n$ 的贡献也没有，所以我们只需要画出那些 $E = n$ 的图。图是正必须 g^V 的，所以从微扰论角度看我们只需要画出少顶点的图。但即使是这样图原则上来说也有无限多，我们画出 $V \leq 2$ 的前面几个，对称因子已经写出来了：

⁴严格来说是费曼图的毛胚版本，正统的费曼图要 cut 掉外源得到关联函数，然后用 LSZ 公式使外线在壳，最后发现动量守恒只有那些连通图有贡献，那些图再用波浪线表示光子，实线表示费米子等等美化记号，就得到了通常我们看到的费曼图。

参考文献

- [1] Howard Baer and Xerxes Tata. *Weak scale supersymmetry: from superfields to scattering events*. OCLC: ocm62307700. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2006. 537 pp. ISBN: 978-0-521-85786-4 (引用于 p. 15).
- [2] Martin Bauer and Tilman Plehn. *Yet another introduction to dark matter: the particle physics approach*. Lecture notes in physics volume 959. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 180 pp. ISBN: 978-3-030-16234-4 978-3-030-16233-7 (引用于 p. 15).
- [3] Sidney Coleman and Jeffrey Mandula. “All Possible Symmetries of the S Matrix”. 刊于: *Phys. Rev.* 159 (5 1967), pp. 1251–1256. DOI: [10.1103/PhysRev.159.1251](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.1251). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.1251> (引用于 p. 16).
- [4] Joshua A. Frieman et al. “Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration”. 刊于: *AIP Conf. Proc.* GRADUATE SCHOOL IN ASTRONOMY: XII Special Courses at the National Observatory of Rio de Janeiro. Vol. 1057. Rio de Janeiro (Brazil): AIP, Oct. 6, 2008, pp. 87–124. DOI: [10.1063/1.3000000](https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1057/1/87-124/830368). URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1057/1/87-124/830368> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 15).
- [5] Rudolf Haag, Jan T. Lopuszanski, and Martin Sohnius. “All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix”. 刊于: *Nucl. Phys. B* 88 (1975), p. 257. DOI: [10.1016/0550-3213\(75\)90279-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90279-5) (引用于 p. 16).
- [6] *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley, 1987. ISBN: 9783527618460 (引用于 p. 15).
- [7] V. G. Kac. “Lie Superalgebras”. 刊于: *Adv. Math.* 26 (1977), pp. 8–96. DOI: [10.1016/0001-8708\(77\)90017-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90017-2) (引用于 p. 32).
- [8] Jürgen Mayer, Khaled Khairy, and Jonathon Howard. “Drawing an elephant with four complex parameters”. 刊于: *American Journal of Physics* 78.6 (June 2010), pp. 648–649. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.3254017](https://doi.org/10.1119/1.3254017). eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/78/6/648/10082021/648_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1119/1.3254017> (引用于 p. 15).
- [9] C. D. Palmer and M. E. Carrington. “A General expression for symmetry factors of Feynman diagrams”. 刊于: *Can. J. Phys.* 80 (2002), pp. 847–854. DOI: [10.1139/p02-006](https://doi.org/10.1139/p02-006). arXiv: [hep-th/0108088](https://arxiv.org/abs/hep-th/0108088) (引用于 p. 35).

- [10] Bing-Lin Young. “A survey of dark matter and related topics in cosmology”. 刊于: *Frontiers of Physics* 12.2 (Oct. 13, 2016), p. 121201. ISSN: 2095-0462, 2095-0470. DOI: [10.1007/s11467-016-0583-4](https://doi.org/10.1007/s11467-016-0583-4). URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11467-016-0583-4> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 15).
- [11] 韩其智 孙洪洲. “李超代数综述”. 刊于: *物理学进展* 01 (1983), pp. 81–125. ISSN: 1000-0542 (引用于 p. 32).
- [12] 孙洪洲, 韩其智. *李代数李超代数及在物理中的应用*. 北京大学出版社, 1999. ISBN: 9787301041291 (引用于 pp. 16, 32).