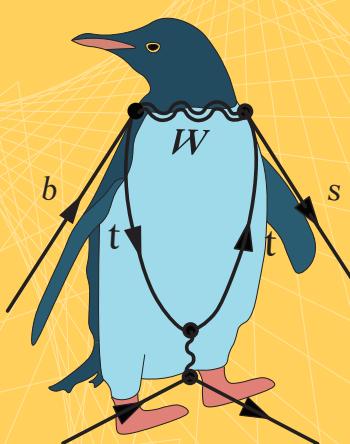


Bufan Zheng

Metaphysics

I don't know which Edition



Revised and modernized edition by

LATEX

网络版

从未修订，将来也不会

编译日期: 2024-04-28

本书已由 Dinner 教育出版社发行
(2004 年 4 月第 10 版)

ISBN: 4210xxxxxxxxxxxxxx

three generations of matter (fermions)			three generations of antimatter (antifermions)			interactions / forces (bosons)	
mass charge spin	I u up	II c charm	III t top	I ū antiup	II cc̄ anticharm	III t̄ antitop	0 0 1 g gluon
QUARKS	~ 2.2 MeV +2/3 1/2	~ 1.3 GeV +2/3 1/2	~ 173 GeV +2/3 1/2	~ 2.2 MeV -2/3 1/2	~ 1.3 GeV -2/3 1/2	~ 173 GeV -2/3 1/2	~ 125 GeV 0 0 0 H Higgs
LEPTONS	~ 4.7 MeV -1/3 1/2 d down	~ 96 MeV -1/3 1/2 s strange	~ 4.2 GeV -1/3 1/2 b bottom	~ 4.7 MeV +1/3 1/2 đ antidown	~ 96 MeV +1/3 1/2 đ̄ antistrange	~ 4.2 GeV +1/3 1/2 đ̄ antibottom	0 0 1 γ photon
	~ 0.511 MeV -1 1/2 e- electron	~ 106 MeV -1 1/2 μ- muon	~ 1.777 GeV -1 1/2 τ- tau	~ 0.511 MeV +1 1/2 e+ electron	~ 106 MeV +1 1/2 μ+ muon	~ 1.777 GeV +1 1/2 τ+ tau	~ 91.2 GeV 0 1 Z⁰ Z boson
	< 1.0 eV 0 1/2 ν_e electron neutrino	< 0.17 eV 0 1/2 ν_μ muon neutrino	< 18.2 MeV 0 1/2 ν_τ tau neutrino	< 1.0 eV 0 1/2 ν̄_e electron antineutrino	< 0.17 eV 0 1/2 ν̄_μ muon antineutrino	< 18.2 MeV 0 1/2 ν̄_τ tau antineutrino	~ 80.4 GeV -1 1 W⁻ W boson
							~ 80.4 GeV +1 1 W⁺ W boson

郑卜凡

个人 Github 主页: [WHUZBF](https://github.com/WHUZBF)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可. 访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议.

目 录

导言	1
第一部分 物理	3
第一章 流体/引力对偶	5
第二章 量子纠缠与散射振幅	7
第三章 黑洞	9
第四章 AdS/CFT 对偶	11
4.1 大 N 极限	11
4.1.1 复习规范场	11
4.1.2 大 N 极限下的 Yang-Mills 理论	12
4.1.3 大 N 极限量子色动力学	14
第五章 超对称	15
5.1 标准模型	15
5.1.1 标准模型拉氏量	15
5.1.2 为什么需要超对称?	17
5.2 超 Poincaré 代数与超空间	18
5.3 Wess-Zumino 模型	18
第二部分 数学	19
第六章 p-adic	21

第七章 量子力学与 Morse 理论	23
7.1 量子力学基础	23
7.1.1 Wyle 算符	23
7.1.2 一维散射问题	24
第三部分 附录	27
附录 A 物理疑难杂症	29
A.1 真空态与绘景	29
A.2 轴子和伸缩子	29
A.2.1 轴子 (Axion)	29
A.2.2 轴子电动力学	29
A.2.3 伸缩子 (Dilaton)	29
A.3 费曼规则	29
A.3.1 标量场和矢量场	29
A.3.2 Dirac 和 Majorana 费米子	31
A.3.3 拉氏量顶点项中含有偏导数	34
附录 B 数学疑难杂症	39
B.1 直积 · 张量积 · 直和	39
B.2 Grassmann 几何	42
B.2.1 外代数	42
B.3 李超代数	44
B.4 切矢, 微分, 子流形和 Frobenius 定理	46
B.4.1 切矢和微分	46
B.5 中心极限定理与随机矩阵模型	47
B.5.1 一些关于概率论的常识	47
B.5.2 0 + 0 维 QFT	48
B.5.3 所以什么是正统的费曼图?	52
B.5.4 随机矩阵模型	53
B.5.5 戴森气体	57
B.6 复叠空间	60
B.6.1 Erlangen 纲领	60
B.7 纤维丛和规范场	60
B.8 $SO(N)$ 旋量表示	60
参考文献	61

导言

简要说明

旨趣 有趣的文章和科研课题都在这里了，算是一个新坑，记录一下阅读过的有趣的一些东西，和一些漫无边际的 idea，最后附录存放一些微妙的问题。

致谢

提示〉 我是真的会谢

第一部分

物理

第一章 流体/引力对偶

第二章 量子纠缠与散射振幅

第三章 黑洞

第四章 AdS/CFT 对偶

4.1 大 N 极限

本节的主要思想在B.5中已经介绍不少了，本节目的是把目光局限在 $SU(N)$ Y-M 理论，这一话题的绝佳参考资料是David Tong 的规范场论讲义对应章节。

4.1.1 复习规范场 首先随便¹选一个规范群 G 。然后再加入一些标量场或者旋量场，它们处于 G 的某个表示之中，也就是说，在：

$$\phi_i(x) \mapsto U_{ij}\phi_j(x), \quad U_{ij} \in G \quad (4.1)$$

的场位形变换下 ϕ_i (略去了旋量指标) 的作用量应该保持不变，理论具有 G 的内禀对称性。现在我们把 U_{ij} 换成一个 local 的东东，也就是把每个元素都换成一个和空间位置有关的函数。显然我们利用 ϕ_i 构造的拉氏量 $\mathcal{L}(\partial\phi, \phi)$ 不一定在 local 的规范群下是不变的，罪魁祸首就是 ∂ ，现在还要多出 ∂U 的项。可以考虑引入一个规范场 A^μ ，在规范群的作用下如此变换：²

$$A_\mu(x) \mapsto U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \quad (4.2)$$

注意这里 A_μ 是一个 $N \times N$ 的矩阵形式的场，我们略去了矩阵指标，它也可以在生成元 T^a 基底下展开为 $A^a T^a$ 。如果我们做下面的替换：

$$\mathcal{L}(\partial\phi, \phi) \mapsto \mathcal{L}(D\phi, \phi), \quad D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu \quad (4.3)$$

那么可以证明 \mathcal{L} 就在 local 规范群的作用下也是不变的，也就是说对场位形进行变换4.1和4.2导致的物理是不变的，而场位形本身不是可测的，我们关心的是场的激发导致的散射振幅。这意味着场位形空间是存在冗余的，这些由规范群联系起来的场位形应该看作是同一个场，路径积分也只用积一次，这直接导致了鬼场作为一个辅助场的存在。³

注记 4.1.1 说到这里还是要多说一点，global 的对称性和 local 的规范对称性看起来都是对场操作一下后 \mathcal{L} 不变，或者差个全导数。但是前者是真正的动力学对称性，也就是说可以用 Noether 定理推出非平

¹实际上这一选取不能是随便的，需要有些限制，详见 Gelis[7]。

²其实就是在说其处于自伴表示下

³这里有点微妙， ϕ_i 路径积分里面还是需要积分所有场位形，因为我们应该把4.1看作是规范场变换4.2诱导出来的一个被动的变换，所以一旦我们通过 FP 量子化方法取定了 A 的一个规范，那么用 U 联系的 ϕ 也要看成不同。就像是现在把 A 当成横轴， ϕ 当纵轴，把 $y = kx, k \in \mathbb{R}$ 线上的 (A, ϕ) 看成等同，为了消除冗余，可以先固定 A ，那么 ϕ 依然是自由的，每个 ϕ 给出一个物理上独立的场位形 (A, ϕ) 。

凡守恒荷的，但是后者仅仅只是数学上描述的冗余，why？因为我们讲动力学对称性，话题的主角不是场位形本身，而是场的激发产生的物理态，动力学对称性就是说对态进行变换后得到一个新的态，两者的运动方程形式完全一致，物理上可区分这两个不同的态，但是它们遵循相同的演化方程，运动方程的这种对称性就定义为动力学对称性。而 local 的规范对称性只是数学上的冗余，只是拉氏量本身的对称性，没有任何的动力学意义，也就是说变换前后两个态就是物理上无法区分的，而且不会带来非平凡守恒荷。所以前者我们场位形需要全积，后者我们只需要积某个特定规范下的场位形。当然，在无穷远处不归 0 的规范变换实际上是真正的对称性，即所谓渐近对称性，这个就不多谈了，具体可见 A.Strominger 的工作。

4.1.2 大 N 极限下的 Yang-Mills 理论 规范场有两种视角来看，第一种就是因为我们要求的散射振幅是 $\langle A^a A^b \dots \rangle$ 这些带色指标的分量场构成的关联函数（前面还要乘上对应的极化矢量）。所以可以直接用 A^a 来写费曼规则。第二种就是由于 $A^a = \text{tr}(AT^a)$ ，所以我们可以先把 A^μ 就看作一个独立的矩阵，直接从矩阵来写费曼规则，最后原则上散射振幅就能用 $\langle A_{\mu i}^i A_{\nu l}^k \dots \rangle$ 求迹得到。类似于 B.5 中的 double line 表示，考虑纯的 YM 理论：⁴

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{ tr } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

为了理论的 UV 行为良定义，耦合常数在 $N \rightarrow \infty$ 的过程中必须跟着变，t’Hooft 定义 $\lambda \equiv g^2 N$ ，我们所说的 $N \rightarrow \infty$ 的理论是指 λ 保持不变， $N \rightarrow \infty$ ：

$$S_{\text{YM}} = -\frac{N}{2\lambda} \int d^4x \text{ tr } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

首先计算自由胶子传播子：

$$\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle = \Delta_{\mu\nu}(x-y) \left(\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{N} \delta_j^i \delta_l^k \right) \sim \Delta_{\mu\nu}(x-y) \delta_l^i \delta_j^k \quad (4.6)$$

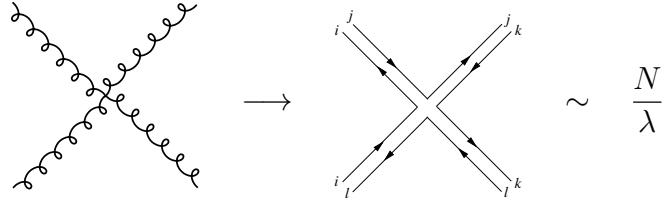
这一步就已经做了近似，实际上是在把 $SU(N)$ 理论近似为 $U(N)$ 的理论。利用 double line 表示，费曼图为：

$$\text{wavy line} \rightarrow \text{double line with arrows} \sim \frac{\lambda}{N}$$

我们仅仅关心费曼图关于 N 的幂次，具体形式可以从色因子形式的费曼图结构看出来，后面也不会真正去计算一个 double line 的费曼图。这里忽略了鬼场的影响，不过就后面讨论的目的而言问题不大。另外还有下面胶子子相互作用顶点：

$$\text{wavy line loop} \rightarrow \text{double line vertex with indices } i, j, k \sim \frac{N}{\lambda}$$

⁴也完全可以考虑和费米子耦合的理论，只是需要加上单线表示费米子，加入新的顶点，稍稍复杂一些，后面再讨论。



根据B.5的经验，每个圈代表一个指标缩并，带来额外的 N :

$$\text{diagram} \sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{\#\text{propagators}} \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{\#\text{vertices}} N^{\#\text{loops}} \quad (4.7)$$

完整的带源的配分函数或许很难求，但是作为归一化因子的真空泡泡图研究起来还是相对简单，稍微画画就能知道不是所有的图都能在平面上画出来还没有交叉，或者说在球面上画不出来。注意二维曲面分类定理，这个定理说的是任何二维闭流形都可以用其是否可定向和 Euler 数来分类，费曼图肯定都是嵌入可定向的流形里面，对应的 Euler 数就是数这个流形有几个洞，也就是亏格 g :⁵

$$\chi(g) = V + F - E = 2 - 2g \quad (4.8)$$

而一个费曼图最少需要几个洞洞的流形来承载就告诉了我们这个图在大 N 极限下的行为:

$$\text{diagram} \sim N^\chi \lambda^{E-V} \quad (4.9)$$

λ 是一个固定的数，不用关心。比如:



所以在 $N \rightarrow \infty$ ，只有 $\chi = 2$ 的平面图有贡献。

看似这一节讲的东西和 AdS/CFT 没有半毛钱关系，虽然 YM 在树图阶是共形不变的，AdS 呢？或者说引力在哪里？前面这一堆我们按照拓扑结构一级一级将真空图的贡献按照 N 进行展开，首先这一点就不同于通常的 QFT，通常的 QFT 就是按照图的顶点数目进行展开，没有涉及到拓扑结构，但这一点在弦论里面非常重要，弦论结果的微扰展开就是根据拓扑结构进行展开的！比如最低阶对应的就是球面，subleading 阶就是甜甜圈造型。这暗示着或许大 N 极限下的 YM 理论和弱耦合的弦论有某种对应（这样弦论微扰展开就只需要考虑球面那一阶）。事实确实如此：⁶

$$N \sim g_s^{-1}, \quad \alpha' \longleftrightarrow \lambda \quad (4.10)$$

这里 g_s 是弦论里面的耦合常数， α' 和弦上的张力有关。而弱耦合的弦论又会直接对应到 Einstein 引力，所以似乎可以直接从 Yang-Mills 理论里面得到量子引力！这是 AdS/CFT 最早的线索，不过即使是加入了超对称的超弦理论也得生活在 $9+1$ 维时空，远大于 $3+1$ 维时空，至少目前为止，没有从纯 YM 理论出发来建立引力对偶，毕竟对应的玻色弦要生活在 26 维时空，这差的就太远了。从超弦理论，已经严格建立起来了 $AdS_5 \times S^5$ 的量子引力理论与 $\mathcal{N} = 4$ 的 SYM 理论之间的对偶，SYM 理论生活在

⁵ 反正我学拓扑记的最深刻的就是这个极为优美的定理了，虽然表述起来只需要点集拓扑，但是最简单的证明是通过代数拓扑计算基本群得到的！

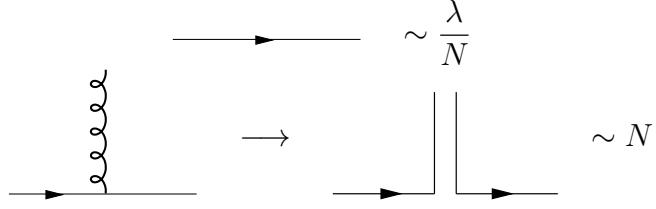
⁶ 下面式子刻画的比较粗糙，但够用。

AdS_5 的 $3+1$ 维边界上。这也兴起了 AdS/CFT 研究的浪潮！不过这二十年来，唯一严格建立起来的对偶只有这一个，其它的各种对偶只是两头算出来的结果能对上，所以猜测对偶是存在的，后面要介绍的一些对偶工具也属于此类。

4.1.3 大 N 极限量子色动力学 这一小节的目的就是把费米子单线加进去看看大 N 展开的形式，严格来说偏离主线。

$$S_{QCD} = N \int d^4x \left(-\frac{1}{2\lambda} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi} D\psi \right) \quad (4.11)$$

为了得到上面的作用量，对费米子做了 rescale， $\psi \mapsto \sqrt{N}\psi$ 。需要加入下面的单线：



依然考虑真空图，依旧可以根据拓扑结构展开：

$$\text{diagram} \sim N^\chi \lambda^{E-V} \quad (4.12)$$

唯一的差别是由于单线的引入，现在的费曼图不能看成是一个闭流形，而要看成一个带边流形，每个费米子线是一个边界连通分支 B ，带边（紧致）流形同样有分类定理，这个时候除了可定向性和亏格，还需要边界连通分支数目 B ，可定向带边（紧致）二维流形 Euler 数为：

$$\chi = 2 - 2g - B \quad (4.13)$$

注记 4.1.2 亏格为 g 的不带边曲面 gT^2 可以看作是一个球面和 g 个甜甜圈的连通和（粘起来，然后把重叠的区域那块墙打通），而还带有 B 个边界连通分支的带边紧致曲面可以看作是在 fT^2 的基础上挖去 B 个圆盘的内部（这样圆盘的边界就剩下来了）。

比如下面这个例子：

胶子介子衰变还有 OZI 压低，这部分还很重要，未完待续

第五章 超对称

5.1 标准模型

这本质上是唯象学的内容，但是超对称的提出很大程度上就是为了寻找超出标准模型的物理。标准模型从群论上看由三个规范群描述：

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.1)$$

传递相互作用的规范玻色子在其自伴表示下，而参与构成物质的费米子处于其基本表示下，其实这一点就很不自然，我们是从为了解释实验数据而要求费米子处于基本表示，原则上来说理论允许费米子处于任意其他表示之中。

规范玻色子本身是没有质量的，但是 W^\pm/Z^0 玻色子有质量，这可以通过引入一个复标量场，Higgs，通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ 的对称性自发破缺带来质量项，还剩下一个实标量场自由度和矢量场自由度没有破缺，它们构成 Higgs 粒子和光子。其它费米子质量的起源也可以通过和 Higgs 引入 Yukawa 相互作用项耦合，自发破缺后带来质量项。注意 QCD 中费米子 quark 的质量项是可以直接通过在 \mathcal{L}_{QCD} 中添加正定的质量项得到，但是由于电弱规范理论是一个手征理论（注意 $SU(2)_L$ 下标 L ），所以直接添加质量项会破缺手征性，质量项只能通过 Higgs 机制得到，详细的推导可见[余钊煥老师的讲义](#)。也正是因为有这么个更大的群到子群的对称性自发破缺，所以电弱理论已经统一，但是 QCD 还单独落在外面，大统一理论 (GUT) 的目标就是找到更大的群如 $SU(5)$ ，让它自发破缺到 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ ，自然得到三种基本相互作用。

5.1.1 标准模型拉氏量 我们先给出一份网上流传甚广的“物理学最复杂公式”，也就是标准模型的 Lagrangian，首先是 QCD 部分，动力学为：¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad q = u, d, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8 \\ &= \sum_q [\bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q + g_s G_\mu^a \bar{q}\gamma^\mu t^a q] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\nu G^{a\mu}) - (\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\mu G^{a\nu})] \\ &\quad - g_s f^{abc}(\partial_\mu G_\nu^a)G^{b\mu}G^{c\nu} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}G_\mu^b G_\nu^c G^{d\mu}G^{e\nu}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹选取规定

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s G_\mu^a t^a, \quad G^{a\mu\nu} \equiv \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} + g_s f^{abc} G^{b\mu} G^{c\nu}$$

然后需要引入 FP 鬼场量子化方法固定规范，还要加入两项：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (5.3)$$

和鬼场：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,FP}} = -\bar{\eta}_g^a \left(g_s \frac{\delta G^a}{\delta \alpha^c} \right) \eta_g^c = -\bar{\eta}_g^a (\delta^{ac} \partial^2 + g_s f^{abc} \partial^\mu G_\mu^b) \eta_g^c \rightarrow -\bar{\eta}_g^a \delta^{ab} \partial^2 \eta_g^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \eta_g^a) G_\mu^b \eta_g^c. \quad (5.4)$$

这里鬼场是 Grassmannian。电弱规范理论就麻烦很多，自发破缺后得到真正和粒子对应的场要由自发破缺前的场通过适当的线性组合得到，这里只给最终结论。首先是希格斯机制带来的规范玻色子质量项

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = m_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \quad (5.5)$$

然后是 Yukawa 耦合带来的 Higgs 粒子和费米子质量项：

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i \quad (5.6)$$

这里 i 隐含对三代 quark 求和。费米子和规范场之间通过协变导数项引入相互作用，或者说等价于和一堆 $U(1)$ 的流耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + Z_\mu J_Z^\mu + W_\mu^+ J_W^{+, \mu} + W_\mu^- J_W^{-, \mu} \quad (5.7)$$

其中：

$$\begin{aligned} J_{\text{EM}}^\mu &\equiv \sum_f Q_f e \bar{f} \gamma^\mu f \\ J_Z^\mu &\equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f = \frac{g}{c_W} \sum_f (g_L^f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R) \\ J_W^{+, \mu} &\equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL}), \quad J_W^{-, \mu} \equiv (J_W^{+, \mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL} + \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

这里 f 表示任意的费米子， ℓ 表示轻子， u, d 表示夸克， ν 是中微子。 $SU(2) \times U(1)$ 的规范场自相互作用可以由动能项：

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

来导出，注意这里的 W^a, B 都是未破缺之前的场，破缺后的场需要线性组合得到 $W^\pm/Z^0, A^\mu$ ，经过贼复杂的计算后得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EWG}} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu)] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu Z_\nu) (\partial^\nu Z^\mu) - (\partial_\mu Z_\nu) (\partial^\mu Z^\nu)] \\ & + (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\nu W^{-\mu}) - (\partial_\mu W_\nu^+) (\partial^\mu W^{-\nu}) + \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{+\mu} W_\nu^- W^{-\nu} - W_\mu^+ W^{+\nu} W_\nu^- W^{-\mu}) \\ & + i e [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} A^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} A^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\mu \\ & \quad + W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu A_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu A_\nu)] \\ & + i g c_W [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} Z^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\mu \\ & \quad + W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu Z_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu Z_\nu)] \\ & + e^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu A^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu A^\nu) + g^2 c_W^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} Z_\nu Z^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu Z^\nu) \\ & + e g c_W (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu Z^\mu + W_\mu^+ W^{-\nu} A^\mu Z_\nu - 2 W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu Z^\nu) \end{aligned} \quad (5.10)$$

把前面讨论的这一堆拉氏量全部凑在一堆就是标准模型了！但实际计算上我们不会真的取考虑全部的标准模型，往往是对一部分模型积掉实验能标上更高能的自由度得到一个有效理论，比如 π 介子理论，但是也够难算的了。

5.1.2 标准模型的局限以及引入超对称的必然性 虽然标准模型在解释实验现象上取得了巨大的成功，但是仍有非常多的问题亟待解决，关于唯象上新物理的寻找的更多内容可见书籍 [1] 的前两章。

参数过多 即使是标准模型本身，就需要用 19 个实验参数去描述，而实验参数越多意味着这个理论本身越想是一个没搞清楚内部结构的黑箱。况且冯诺依曼也说过：“四个参数画大象，五个参数鼻子动” [14]

没有引力 引力可以量子化，至少在平直时空背景下我们可以微扰地去做量子化。对于任何一个量子场论，都可以在有效场论的框架下写成 $\mathcal{L} = \sum_i c_i \mathcal{O}_i$ 的形式，这些 c_i 是需要计算散射振幅后通过实验拟合得到的，或者说理论的自由度。在低能标下绝大部分的自由度都是看不到的，而实验能标越高，我们也愈发要往里面加新的参数，做新的实验，对于 QED, QCD，在 Λ_{QCD} 能标以下做实验确定的参数可以通过重整化群流方法得到高能标下的其它自由度，一直推到紫外也可以，意味着我们不用每个能标都做一次实验去确定参数，只用在特定能标以下确定有限多个参数就行了，这样的理论是紫外完备的，也就是可重整的。但是引力理论并不是可重整的，也就是说每当升高能标，理论中就会不断出现新的自由度，而且不能用前面的实验来确定，只能做新的实验，这样每个能标我们都要确定一次参数来确定这个能标下的量子引力理论。而且引力量子化之后的引力子目前实验上也没有探测到。当然，目前来说在特定能标下我们还是能半经典地去量子化引力，并且去计算引力子的散射，注意，不可重整化不是意味着圈图的计算我们无法处理无穷大，我们仍旧可以用正规化重整化的套路去掩盖无穷大并且与实验观测拟合，只是在 Wilson 有效场论的框架下引力的量子理论目前不完备，必须不断地去做实验，每个能标有一套自己的量子引力理论，不能用重整化群流联系。

没有暗物质 即使你去考虑 Einstein 引力本身，你也缺了点东西，天文观测有充足的表明暗物质存在，特别是冷暗物质。但标准模型中没有任何一个粒子对应暗物质。目前暗物质从粒子物理角度的解释就是去造各种新奇的粒子。见综述 [6, 18, 2]。而超对称给了暗物质非常自然的候选者。

中微子震荡 从前面的 5.6 可以看到即便是引入对称性破缺，中微子仍然是没有质量的。这在很长的一段时间内被认为是完全正确的，知道中微子震荡的发现，暗示着中微子有质量，而且三代中微子质量顺序以及中微子是 Majorana 还是 Dirac 质量项目前都有待研究，而且直接往标准模型里面添加中微子质量项又是非常不自然的。有关更多粒子物理历史方面的论述可见 Griffiths 的书籍 [11]

规范等级问题 虽然 Higgs 机制的引入成功解释了对称性自发破缺，还给费米子赋予了质量。但是它的引入仍旧非常刻意，没有很好的微观解释，终究只是个唯象理论。更要命的是，实验发现其质量约为 125GeV ²，非常轻，但是计算质量为 m_f 的粒子对 Higgs 的自能修正时，有限大的部分正比于 m_f^2 ，和一般的粒子重整化自能修正很不一样，这其实来源于 Higgs 是标量场。这意味着如果 f 非常重，修正可以变得非常大，甚至远大于其物理质量。目前的标准模型参与修正的 m_f 都是三代轻子质量，这一点问题不大。但是标准模型一定不完备，我们不能保证后面加入的自由度依旧有 m_f 非常小，意味着这些很大的修正必须非常仔细地抵消才能给出 $m_H \approx 125\text{GeV}$ 。但是如果我们将超对称，每一个费米子都会带来一个玻色子伙伴，它们两个对 m_H 的修正由于费米子圈和玻色子圈正好差个符号相互抵消，这直接保护了 Higgs 粒子质量不受到大质量粒子辐射修正。

强 CP 问题 中子电偶极矩远小于理论预言值，这部分更多内容见 §A.2。TASI 讲座 [10] 也非常好。

超弦 玻色弦只是一个玩具模型，其没有费米子激发，为了引入费米子就需要加入超对称得到超弦。

²本 Note 所有数据来源于 PDG

Coleman-Mandula 定理 \mathcal{S} 矩阵的最大时空对称群只能是 Poincaré 对称性，这阻止了人们把 Poincaré 群嵌入更大的对称群 [5]。但是这个定理证明假定了所有生成元之间的李代数关系都只能是对易子，这是李代数的要求，但实际上我们完全可以去考虑所谓李超代数 [20]，生成元之间不仅可以是对易关系，还可以是反对易关系。考虑李超代数就可以把 Poincaré 代数扩充为超对称代数 [8]。这一做法物理上和数学上都没有任何禁闭，而且超对称代数和 Poincaré 代数一样用不等价不可约表示给出了所有基本粒子的定义。

.....

总之，目前人类已知的自然界可以用下面的配分函数大致描绘出来：

$$W = \overbrace{\int_{k < \Lambda} [Dg] [DA] [D\psi] [D\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R \right.}^{\text{量子力学}} \left. - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i\bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + (\bar{\psi}_L^i V_{ij} \phi \psi_R^j + h.c.)}_{\text{其他力}} - \underbrace{|D_\mu \phi|^2 - V(\phi)}_{\text{Higgs}} \right] \right\}$$

目前的实验表明 TeV 能标上必然有新物理，但是我们完全不清楚新物理以怎样的方式出现，超对称就在这样一个历史背景下产生了。不过后面会看到，把超对称加入标准模型后问题会变得更糟。

5.2 超 Poincaré 代数与超空间

5.3 Wess-Zumino 模型

这只是一个玩具模型，可以认为是最简单的超对称实现，但是用玩具模型可以讲清楚很多物理，比如 QFT 里面一般上来就会讲 φ^4 理论。

第二部分

数学

第六章 p-adic

第七章 量子力学与 Morse 理论

Morse 理论是几何上的重要定理，微分几何中对一个流形我们可以考虑上面的标量场，其微分的定义也是十分自然的。如果在某点 $p \in M$, $(df)|_p = 0$, 而且这样的点都是孤立点且 Hessian 矩阵非退化，那么就称这样的函数是 Morse 函数。而 Morse 定理是一组不等式，告诉我们这些微分为 0 的点的个数看似是流形局部的性质，其实是由流形的整体拓扑决定的。后面会详细介绍这一理论，我们先考虑一个最简单的例子。考虑一个可定向二维闭曲面 gT^2 , Hessian 矩阵不退化，那么可以根据 Hessian 矩阵正负本征值个数把函数微分为 0 的点分类为极大值、极小值和鞍点。Morse 定理告诉我们：

$$\begin{cases} \text{极大值点的个数} & \geq 1 \\ \text{极小值点的个数} & \geq 1 \\ \text{鞍点的个数} & \geq 2g \end{cases} \quad (7.1)$$

前面两个不等式其实是在说流形的连通分支个数是 1，也是流形整体的性质。这个定理显然是可以从纯数学的角度来证明的，但是 Witten 在 1982 年对这一理论给出了（超对称）量子力学版本的证明 [17]，这一角度十分之有趣，后面讲会从比较偏重于数学的角度来考虑这一证明。

7.1 量子力学基础

本节的目的差不多是量子力学补遗，看下数学家思考量子力学的角度。

7.1.1 Wyle 算符 量子力学里面所谓量子化就是把力学量从函数变成算符：

$$\{f, g\} \Rightarrow \{\hat{f}, \hat{g}\}_q = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (7.2)$$

这里 $\{\cdot\}$ 是经典 Poisson 括号，下标 q 表示对应量子化后的量子泊松括号，它和对易子成正比。当我们用哈密顿形式，把动力学方程完全用 Possion 括号的形式写出来，然后全部做了这样的替换之后量子化也就完成了。而量子力学基本假设里面很重要的一条是量子化之后位置和动量算符不对易，这导致在涉及到 $f(x, p) = x^m p^n$ 的力学量量子化时会出现定义模糊。实际上这一问题解决有很多种方案，我们采取从数学角度上讲比较好的方法。

在位置表象下考虑，这时 $\hat{x} \rightarrow x, \hat{p} \rightarrow -i\hbar\partial_x$ ，考虑力学量 $f(x, p) = \sum_m f_m(x)p^m$ ，尝试下面两种

极端的量子化方案，作用在任意一个函数 $v(x)$ 上为：

$$\begin{aligned} f^+v &= \sum_m f_m(x) (-i\hbar\partial_x)^m v(x) = \sum_m (-i\hbar\partial_x)^m f_m(y)v(x)|_{y=x} \\ f^-v &= \sum_m (-i\hbar\partial_x)^m [f_m(x)v(x)] = \sum_m (-i\hbar\partial_x)^m f_m(x)v(x)|_{y=x} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wyle 算符就定义称折中的方案：

$$\hat{f}_{\text{Wyle}}v \equiv \sum_m (-i\hbar\partial_x)^m f_m\left(\frac{x+y}{2}\right)v(x)\Big|_{y=x} \quad (7.4)$$

这样做量子化会让半经典极限，也就是 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限性质比较好。

定理 7.1.1 (半经典极限) $\hbar \rightarrow 0$, 有：

$$\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg} + \mathcal{O}(\hbar), \quad \{\hat{f}, \hat{g}\}_q = \widehat{\{f, g\}} + \mathcal{O}(\hbar) \quad (7.5)$$

证明 使用数学归纳法进行证明，□

7.1.2 一维散射问题 考虑一个在 $[x_1, x_2]$ 内才不为 0 的势场，入射波能量 $E > 0$ 。量子力学对这个问题已经充分的研究过了，我们只需在平面波边界条件下求解下面的薛定谔方程就好：

$$?? - \frac{\hbar^2}{2}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \quad (7.6)$$

其中我们已经选取合适的量纲使得 $m = 1$ 。数学上并不是解方程这么玩的，下面我们就来欣赏一下数学家的做法，数学家或许不能告诉你这个微分方程具体的解，但是他却能告诉你非常多的解的性质。首先假设方程??的解空间为 L ，这是一个二维的函数线性空间。现在考虑 $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 上的薛定谔方程：

$$?? - \frac{\hbar^2}{2}\psi'' = E\psi \quad (7.7)$$

对应的解空间设为 $L_0 = \text{span}\{e_1 = \sin(kx), e_2 = \cos(kx)\}$ 。则可以定义单值化算子：

定义 7.1.2 (单值化算子) $B_\pm : L \rightarrow L_0, u(x) \in L, u_0(x) \in L_0$ 定义：

$$\begin{aligned} B_- u(x) &= u_0(x), \quad u = u_0|_{x < x_1} \\ B_+ u(x) &= u_0(x), \quad u = u_0|_{x > x_2} \end{aligned} \quad (7.8)$$

根据 ode 的解唯一存在性定理，可知 B_\pm 是同构，下面的单值化算子是 well-defined 的：

$$M \equiv B_+ B_-^{-1} \quad (7.9)$$

熟悉高等量子散射理论的我们立刻就可以看出这里的 B_\pm 其实就是 Moller 算符 Ω_\pm ，而这里的 M 其实就是散射矩阵 $S \equiv \Omega_-^\dagger \Omega_+$ 。

在 L_0 中选取正弦余弦作为基底，设 $\eta, \xi \in L_0$ ，定义下面的楔积，用对易子符号表示¹：

$$[\xi, \eta] \equiv \xi \wedge \eta = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \quad (7.10)$$

¹有点符号混用

定理 7.1.3 M 保 $[\cdot, \cdot]$ 不变。 $[M(\xi), M(\eta)] = [\xi, \eta]$

为了证明这个定理我们先证个引理，其中遇到的概念后面也会非常有用。

定义 7.1.4 (斜积)

$$\{\psi, \phi\} \equiv \psi' \phi - \psi \phi' \quad (7.11)$$

这其实就是朗斯基行列式的定义，而且不难证明其不依赖于 x ，是一个常数，也即 $\partial_x \{\psi, \phi\} = 0$ 。

引理 7.1.5

$$\{\psi, \phi\} = -k [B_{\pm} \psi, B_{\pm} \phi] \quad (7.12)$$

证明

$$1 \quad (7.13) \\ \square$$

现在来证明定理 7.1.3：

证明

推论 7.1.6 $\det M = 1$

注意我们到现在为止讨论的都是实值函数空间，实际上量子力学里面更方便的做法是考虑 L_0, L_1 的复化，这样做会方便很多。

定义 7.1.7 (复化)

注记 7.1.8 这其实涉及到量子力学为什么需要复数，能否构造纯粹在实数空间上定义的量子力学？近年来潘建伟老师组的实验工作否定了这一点 [16, 4]，我从文章 [13] 的角度来稍微提一下。

第三部分

附录

附录 A

物理疑难杂症

A.1 真空态与绘景

A.2 轴子和伸缩子

文献里经常会碰到这俩概念，虽然是作为暗物质的候选者，应当是唯象的关注对象，但形式理论中也处处见他们的身影。

A.2.1 轴子 (Axion) 为了解释轴子的概念，先介绍强 CP 问题。这首先要从 QCD 的手征反常说起，后面会用到其中建立起来的一些工具。

A.2.2 轴子电动力学

A.2.3 伸缩子 (Dilaton) 不少人也把它翻译成胀子。

A.3 费曼规则

这一节我不想讨论任何有关费曼规则推导的问题，只是通过拉氏量看出费曼规则，重点在对常用费曼规则的整理。本节讨论的都是动量空间的费曼规则，也就是把顶点的动量守恒都已经积成 δ 函数了，计算上大家都是用的动量空间，因为更方便。

A.3.1 标量场和矢量场 这部分的费曼规则是基操，非常简单没有任何需要多说的，除了复标量场，由于和费米子又有点想，留到下一小节再进行讨论。整体的费曼规则见图A.3.1 (不包含顶角)。

1. 正标量玻色子入射外线: $\phi \xrightarrow[p]{\longrightarrow} \bullet = 1$.

2. 反标量玻色子入射外线: $\bar{\phi} \xrightarrow[p]{\longleftarrow} \bullet = 1$.

3. 正标量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\longrightarrow} \phi = 1$.

4. 反标量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\longleftarrow} \bar{\phi} = 1$.

5. 复标量玻色子传播子: $\bullet \xrightarrow[p]{\longrightarrow} \bullet = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$.

6. 有质量实矢量玻色子入射外线: $A, \lambda; \mu \xrightarrow[p]{\sim} \bullet = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$.

7. 有质量实矢量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\longrightarrow} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$.

8. 有质量实矢量玻色子传播子: $\nu \bullet \xrightarrow[p]{\sim} \bullet \mu = \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + i\epsilon}$.

9. 无质量实矢量玻色子入射外线: $A, \lambda; \mu \xrightarrow[p]{\sim} \bullet = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$.

10. 无质量实矢量玻色子出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\sim} A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda)$.

11. 无质量实矢量玻色子传播子: $\nu \bullet \xrightarrow[p]{\sim} \bullet \mu = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$ (Feynman 规范).

图 A.1: 一般内外线费曼规则

A.3.2 Dirac 和 Majorana 费米子 这应该是费曼规则里最麻烦的部分，主要就是要分清三个箭头：动量箭头、 $U(1)$ 箭头和费米子流箭头。很多教科书写费曼规则总是引入更多的箭头，反而搞一堆正负号规则，如果讨论的是标量场或者是矢量场，这没太大问题，但是对于旋量场，我认为最清楚的方式就是多画一些箭头。我们考虑下面的具有 CP 对称性的复标量场和 Dirac 场 ψ 以及 Majorana 场 χ 的耦合：¹

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} \bar{\chi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\chi) \chi + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (\text{A.1})$$

从拉氏量可以看出我们选取的是 $(+, -, -, -)$ 的度规²，原因是本节费曼规则的图全部是抄的余钊煥老师讲义。这里相互作用项为：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa \phi^\dagger \bar{\chi} P_R \psi + \kappa^* \phi \bar{\psi} P_L \chi \quad (\text{A.2})$$

选取 $\kappa \in \mathbb{R}$ ，并引入记号 $\Gamma_1 = P_R$, $\Gamma_2 = P_L$ ，这时为了突出下面的结果与 $\Gamma_{1,2}$ 具体形式无关：

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \kappa (\phi^\dagger \bar{\chi} \Gamma_1 \psi + \phi \bar{\psi} \Gamma_2 \chi) \quad (\text{A.3})$$

其费曼规则如图 A.2 所示。下面我们来逐一解释每一项，并给出一些例子。

首先注意到图中出现了三种箭头，最上面的是动量箭头，标记的是粒子动量的正方向，根据这一点去要求每个顶点动量守恒，另外它还标记了粒子是入射还是出射，如果箭头流入节点，就是入射，流出就是出射；中间的是 $U(1)$ 箭头，这是因为 Dirac 有正反两种不同的粒子所特有的，Majorana 粒子就没有，这个箭头和动量箭头一起用来标记是正粒子还是反粒子，如果同向则为正，反向为反。这样做的好处是你不需要引入一个时间轴，来区分哪些粒子是正，哪些是反，哪些是出射，哪些是入射；最下面的箭头是费米子流，注意这个箭头是画在一整个费米子线段构成的折线上的，也就是说在每个费米子流线上，每个小段的流向一致，这是由于理论中有 Majorana 费米子，由于 Majorana 正反粒子相同，但是计算又必须引入一个方向所特别引入的一个附加规则。最后注意到有些图上我们把动量箭头和 $U(1)$ 箭头合二为一了，这意味着两者是同向的，比如费米子内线我们就把两者取成一个方向。

再看顶角，这种复标量场和旋量场，根据耦合项读费曼规则，始终记住指向节点的表示 $\phi \backslash \psi$ ，指出节点的是 $\phi^\dagger \backslash \bar{\psi}$ 。Majorana 耦合要根据费米子流来，复杂一点。复标量场的内外线规则可见 A.3.1，除了是玻色子，不需要引入费米子流来分清共轭、相对符号这些，其它和上一段讲的都一样。

费曼规则中还涉及到了电荷反演，下面是一些公式总结：

$$\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}, \quad \Gamma^C \equiv \mathcal{C}^{-1} \Gamma^T \mathcal{C}, \quad v(\mathbf{p}, \lambda) = \mathcal{C} \bar{u}^T(\mathbf{p}, \lambda), \quad u(\mathbf{p}, \lambda) = \mathcal{C} \bar{v}^T(\mathbf{p}, \lambda) \quad (\text{A.4})$$

另外我们这都是对树图的，对于圈图，还有一些来自圈的对称因子没有抵消殆尽，而且每个圈动量都要带来积分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ ，然后用维数正规化这些进行计算。而且费米子圈会带来一个额外的符号， γ 矩阵也要随之取迹。下面以 $\chi \chi \rightarrow \psi \bar{\psi}$ 的计算为例。只考虑树图阶的贡献，首先第一步是根据费曼规则含有的顶点绘制出所有的不等价的费曼图，有全同粒子要对全同粒子动量标号后绘制，如图 A.3

注意，我们并没有绘制费米子流，实际上图 A.3.1 给出的是两套等价的费曼规则，计算时我们需要人为地指定费米子流方向，然后逆着每个费米子流去写相应的项，无论怎么选费米子流，得到的结果都是一样的³。这可以从费曼规则里面的顶点看出来。观察 A.3.1 的第九项第一列，动量箭头假设都是从左到右。如果我们反转某个费米子流箭头，其它两个箭头不变，那么顶点项会从 $\bar{u}_\chi \Gamma_1 u_\psi \rightarrow \bar{v}_\psi \Gamma_1^C v_\chi$ ，根据下面的式子：

$$\bar{u}_\chi \Gamma_1 u_\psi = v_\chi^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \Gamma_1^T \mathcal{C} \mathcal{C} \bar{v}_\psi^T = - (v_\chi^T \Gamma_1^T \bar{v}_\psi^T)^T = - \bar{v}_\psi \Gamma_1^C v_\chi \quad (\text{A.5})$$

所以改变一个费米子流和加上一个负号是等价的，这在后面考虑相对符号时非常有用，把相对符号

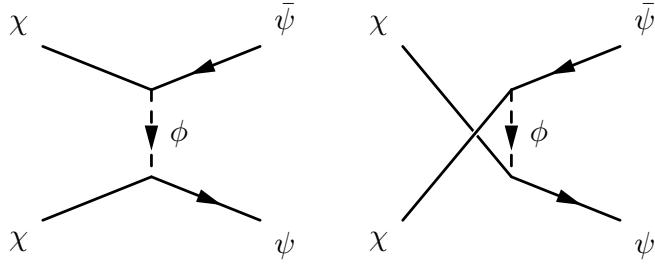
¹这类费曼图构造可以更加复杂，尤其是涉及到费米子数破坏的理论。

²无论什么度规选取，都要保证对时间偏导的哪一个动能项是正的

³也就是说费米子流本身并不带来任何拓扑不等价的图，他只是为了计算的方便性引入的。

1. Dirac 正费米子 ψ 入射外线: $\psi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$, $\psi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$.
2. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线: $\bar{\psi}, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bar{\psi}, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$.
3. Dirac 正费米子 ψ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \psi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$.
4. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \bar{\psi}, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$.
5. Majorana 费米子 χ 入射外线: $\chi, \lambda \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = u(\mathbf{p}, \lambda)$, $\chi, \lambda \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda)$.
6. Majorana 费米子 χ 出射外线: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \chi, \lambda = v(\mathbf{p}, \lambda)$.
7. Dirac 费米子传播子: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$, $\bullet \xleftarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$.
8. Majorana 费米子传播子: $\bullet \xrightarrow[p]{\text{---}} \bullet = \frac{i(\not{p} + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon}$.
9. Yukawa 相互作用顶点:
-

图 A.2: A.1 的费曼规则

图 A.3: $\chi\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ 散射树图

考虑进来后会发现无论你怎么取费米子流方向，最终把所有的图加起来后，只会整体让振幅差个正负号，这是无所谓的。

比如下面的选取：

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_t &= \text{Diagram with red dashed lines and arrows, showing } \chi \text{ and } \bar{\psi} \text{ with momenta } k_1, k_2, p_1, p_2. \\ &= \bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_1)\frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2}\bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2}\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_u &= \text{Diagram with red dashed lines and arrows, showing } \chi \text{ and } \psi \text{ with momenta } k_1, k_2, p_1, p_2. \\ &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2)\frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2}\bar{u}(p_1)(i\kappa\Gamma_2)u(k_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2}\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

费米子还有一个非常麻烦的地方就是不同费曼图贡献存在相对符号，如果一个过程只有一个图有贡献倒无所谓，但是多个图贡献就会导致干涉。这种符号的处理可以按照下面的规则：

相对符号判断：我们要做的事情就是把所有的费曼图按照标准画法重新画一遍，可以理解成把顶点转动一下，由于我们的记号不需要引入时间轴来区分正反粒子和出入射粒子，所以不用担心弄混。首先把费曼图画成所有的费米子线都在水平方向，而且费米子流都是从左到右，左端的粒子从上到下都是一样的标号（随便取一个为标准，不同的选取只会导致振幅整体差一个正负号），这里标号就是说的动量的标号。最后看右端的粒子标号，如果两个图右端粒子的标号相差一个奇置换，则相对符号为负，否则为正。

比如上面两个式子的费曼图画成标准形式为 A.4，注意无论你怎么画都不能把两个图的左端粒子变成一样的，所以这个时候就要引入反转费米子流箭头等价于把原先的图加个正负号。所以我们可以选择同时反转两幅图最上面的费米子流，由于都加个负号所以相对符号仍旧为正。这个时候就可以把图画成标准形式了，不难发现两幅图的右端相差一个奇置换，所以相对负号为负。

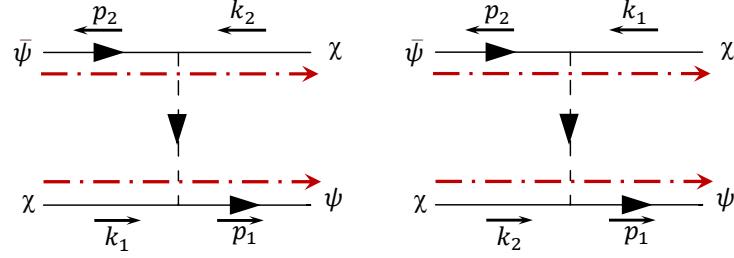


图 A.4: 费曼图的标准画法

所以容易判断上面的两项应该相减, $i\mathcal{A} = i\mathcal{A}_t - i\mathcal{A}_u$ 。还有下面的费米子流选取方式:

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{A}}_t &= \text{Diagram with } k_2 \text{ up, } p_2 \text{ down, } k_1 \text{ up, } p_1 \text{ down, } \bar{\psi} \text{ up, } \psi \text{ down.} \\ &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \frac{i}{(p_1 - k_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p_2)(i\kappa\Gamma_1^C)u(k_2) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{t - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_2^C v(p_1) \bar{u}(p_2)\Gamma_1^C u(k_2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{A}}_u &= \text{Diagram with } k_2 \text{ up, } p_2 \text{ down, } k_1 \text{ down, } p_1 \text{ up, } \bar{\psi} \text{ up, } \psi \text{ down.} \\ &= \bar{v}(k_1)(i\kappa\Gamma_1)v(p_2) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \bar{v}(k_2)(i\kappa\Gamma_2^C)v(p_1) \\ &= -\frac{i\kappa^2}{u - m_\phi^2} \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2) \bar{v}(k_2)\Gamma_2^C v(p_1) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

显然这两个的相对符号为正, 根据前面的思路 A.5 不难证明两种计算方式得到的结果是等价的。

对于只有 Dirac 旋量, 不含 Majorana 旋量的费曼规则, 上面的所有方法完全适用, 只是这个时候就把费米子流取为和 $U(1)$ 流同向, 不用额外画出来。

A.3.3 拉氏量顶点项中含有偏导数 原则上所有的费曼规则的构造都可以回到路径积分或者正则量子化本身上去导出, 我们不 care 这些原理, 直接给结论怎么通过拉氏量看出来。从现在开始, 度规约定回到 $(- +++)$ 。

含有偏导数的理论的代表是标量 QED, 这是复标量场 (实标量场没有 $U(1)$ 流来耦合) 和电磁场的耦合:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ieA^\mu[(\partial_\mu\varphi^\dagger)\varphi - \varphi^\dagger\partial_\mu\varphi] - e^2A^\mu A_\mu\varphi^\dagger\varphi - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 \quad (\text{A.10})$$

以及非阿贝 YM 理论, 我们以标量 QED 为例, 显然有下面的三个顶点: 由于费曼规则与光子外线无关,

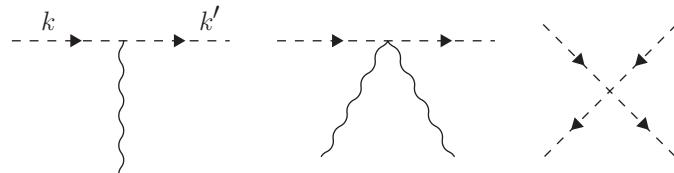


图 A.5: 标量 QED 顶点

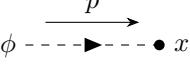
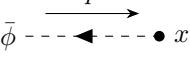
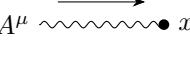
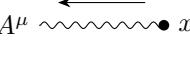
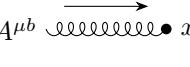
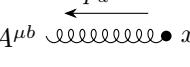
费曼图	缩并规则
	$\langle 0 \overline{\phi(x)} \mathbf{p}^+ \rangle = \langle 0 \phi^{(+)}(x) \mathbf{p}^+ \rangle = e^{+ip \cdot x}$
	$\langle 0 \overline{\phi^\dagger(x)} \mathbf{p}^- \rangle = \langle 0 \phi^{\dagger(+)}(x) \mathbf{p}^- \rangle = e^{+ip \cdot x}$
	$\langle \overline{\mathbf{p}^+} \phi^\dagger(x) 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^+ \phi^{\dagger(-)}(x) 0 \rangle = e^{-ip \cdot x}$
	$\langle \overline{\mathbf{p}^-} \phi(x) 0 \rangle = \langle \mathbf{p}^- \phi^{(-)}(x) 0 \rangle = e^{-ip \cdot x}$
	$\langle 0 \overline{A^\mu(x)} \mathbf{p}, \lambda \rangle = \langle 0 A^{\mu(+)}(x) \mathbf{p}, \lambda \rangle = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{+ip \cdot x}$
	$\langle \overline{\mathbf{p}, \lambda} A^\mu(x) 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda A^{\mu(-)}(x) 0 \rangle = \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$
	$\langle 0 \overline{A^{\mu b}(x)} \mathbf{p}, \lambda, a \rangle = \langle 0 A^{\mu(+)}(x) \mathbf{p}, \lambda \rangle = \delta^{ab} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) e^{+ip \cdot x}$
	$\langle \overline{\mathbf{p}, \lambda, a} A^{\mu b}(x) 0 \rangle = \langle \mathbf{p}, \lambda A^{\mu(-)}(x) 0 \rangle = \delta^{ab} \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x}$

表 A.1: 一般的外线缩并, 这里上标 (\pm) 表示正反粒子, $p_a^{(\lambda)}$ 表示色指标为 a , 螺旋度为 λ . 图中没有的缩并项表明缩并后为 0.

所以没有把光子的动量箭头标出来, 另外我们选取了动量箭头和 $U(1)$ 箭头相同, 也可以不同, 适当的地方加个负号就好。后面的两个图都不含有偏导数项, 我们着重考虑第一个图。搞清楚这一构造最简单的方法其实是从正则量子化, 从位置空间的费曼规则出发, 总结为表 A.1, 其中光子和胶子是一样的, 只需要加个色因子就好⁴。表中给的都是对外线在壳情况的缩并, 不在壳情况要替换成传播子, 不过就推导顶点规则而言, 我们完全可以假设所有外线都是在壳的。

费曼图顶点的本质其实就是在 $\langle \text{out} |$ 和 $| \text{in} \rangle$ 之间插入 $e^{i \int d^4x \mathcal{H}_I}$ 后展开带来的那些“抱团”的场算符。第一个图按照我们的箭头约定是 $|k\rangle$ 的正粒子到 $|k'\rangle$ 的正粒子的顶角修正, 而且关注的是最低阶的树图顶角, 所以考虑 e 指数展开的线性项就好了, 也就是下面两项修正, 计算所有可能的场与外线的缩并:

$$\begin{aligned} \langle k' | (\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi | k \rangle &= \partial_\mu e^{-ik' x} \cdot e^{ikx} = -ik'_\mu e^{-i(k'-k)x} \\ \langle k' | \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi | k \rangle &= e^{-ik' x} \cdot \partial_\mu e^{ikx} = +ik_\mu e^{-i(k'-k)x} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

把两者相减, 并且去掉本身外线会带来的那些 e 指数的项, 我们就得到了纯的顶点的贡献: $i(ie)[(-ik'_\mu) - (ik_\mu)] = ie(k + k')_\mu$ 。⁵

而且上面的缩并和对应的表 A.1 中的费曼图构造出来的顶点图恰好就是图 A.5 第一幅图。所以上面的

⁴ A^μ 不带螺旋度指标, 因为正则量子化框架下它是 a_λ^\dagger 的求和, 但是 QCD 里 $A^{\mu a}$ 要带色指标, 带哪个色指标就负责产生湮灭哪个色指标的胶子。但是外线规则与带的哪个色无关, 因为极化矢量都是一样的。

⁵ 按照惯例, 顶角函数多乘了个 i

构造方法是有效的，而且一定程度上我们也说明了这种方法的原因。注意到上面的推导中我们完全可以在入射或者出射态中加入 $|\gamma\rangle$ ，也就是光子项，拉氏量里 A^μ 和它缩并的作用就是单纯的一个 e 指数配上极化矢量，这没有任何的顶点贡献，纯粹来自于粒子在壳的贡献，所以印证了前面所说的不需要 care 光子。这也说明了为何构造 feynman 图顶点项时，在不含导数项的时候，就是把所有的场全部抽走，前面的对称因子也抽走带来的项。可见虽然我们这里讨论的只是含偏导项的 feynman 图顶点构造，但这完全是一般的做法，某种程度上说，虽然从路径积分看出费曼图本身数学上非常清晰舒服，但构造费曼规则而言，正则量子化这种形式更直观。

如果把左边的粒子也改成出射，也就是说把动量箭头反向，这个时候是一个出射的动量为 k 的反粒子 $\langle \bar{k} |$ ，对应的费曼规则由下式计算：

$$\begin{aligned}\langle k', \bar{k} | (\partial_\mu \varphi^\dagger) \varphi | 0 \rangle &= \partial_\mu e^{-ik'x} \cdot e^{-ikx} = -ik'_\mu e^{-i(k'+k)x} \\ \langle k', \bar{k} | \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi | 0 \rangle &= e^{-ik'x} \cdot \partial_\mu e^{-ikx} = -ik_\mu e^{-i(k'+k)x}\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

两式相减就得到结果 $i e(k' - k)_\mu$ 。从上面的推导可以看出，确实就是前面说的把 $k \rightarrow -k$ ，也确实是动量参考方向变了，而且上面公式对应的图表示也是和 A.5 对应的。

例 A.3.1 QCD 的三胶子顶点是个完美的练习，对应的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} \supset -g f^{abe} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^e \quad (\text{A.13})$$

正确答案如下：

$$= g f^{abc} [(q - r)_\mu g_{\nu\rho} + (r - p)_\nu g_{\rho\mu} + (p - q)_\rho g_{\mu\nu}] \quad (\text{A.14})$$

同样也是用场进行缩并就好，主要要计算所有可能的缩并，详细计算过程如下：

$$\begin{aligned}& -ig \langle p^a, q^b, r^c | f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f | 0 \rangle \\&= -ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle - ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle \\&\quad - ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle - ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle \\&\quad - ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle - ig \langle p^a, q^b, r^c | \overbrace{f^{def} A^{d\mu} A^{e\nu} \partial_\mu A_\nu^f}^{\text{缩并}} | 0 \rangle \\&= -ig f^{def} \delta^{ad} \delta^{be} \delta^{cf} (-ir_\mu) \epsilon_{\lambda^a}^{*\mu} \epsilon_{\lambda^b}^{*\nu} \epsilon_{\lambda^c}^{*\rho} e^{i(p+q+r)\cdot x} - ig f^{def} \delta^{ad} \delta^{bf} \delta^{ce} (-iq_\mu) \epsilon_{\lambda^a}^{*\mu} \epsilon_{\lambda^c}^{*\nu} \epsilon_{\lambda^b}^{*\rho} e^{i(p+q+r)\cdot x} \\&\quad - ig f^{def} \delta^{ae} \delta^{bd} \delta^{cf} (-ir_\mu) \epsilon_{\lambda^b}^{*\mu} \epsilon_{\lambda^a}^{*\nu} \epsilon_{\lambda^c}^{*\rho} e^{i(p+q+r)\cdot x} + \dots \\&= g f^{abc} [(q - r)_\mu g_{\nu\rho} + r_\nu g_{\rho\mu} \dots] \cdot [\epsilon_{\lambda^a}^{*\mu} \epsilon_{\lambda^b}^{*\nu} \epsilon_{\lambda^c}^{*\rho} e^{i(p+q+r)\cdot x}]\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

根据外线本身就固有的因子 $\epsilon_{\lambda^a}^{*\mu} \epsilon_{\lambda^b}^{*\nu} \epsilon_{\lambda^c}^{*\rho} e^{i(p+q+r)\cdot x}$ ，合理对哑指标进行操作后就不难得到上面这个式子，其中还用到了 $SU(3)$ 的结构常数是全反对称的。去掉外线带来的因子后就得到了顶点项，显然与 A.14 一致。

还有一个费曼规则疑难杂症，就是矩阵模型的费曼规则，要使用所谓的 double line 表示，这部分有两种想法，一是回到色因子的图规则构造，然后配以 T^a 得到 A_{ij}^a 的费曼规则。第二种方法就是直接从

矩阵模型本身出发，注意到 double line 配对与矩阵乘法关系，还是按照前面的缩并的思想，把每个矩阵元 A^i_j 单独看成一个场来构造费曼规则。

附录 B 数学疑难杂症

B.1 直积·张量积·直和

物理人在这些概念上往往非常模糊，胡乱使用，现在我们使用物理人的思想来区分下这几个概念。由于这几个概念的使用场景是在量子力学，所以我们在向量空间上讨论这三个运算。

直积和张量积是紧密相连的，这两个概念一起介绍。直积从定义上讲就是给两个集合，然后把两个集合简单的并在一起构成一个更大的集合， $A \times B$ ，仅此而已。但我们一般会在上面进一步定义内积和加法数乘使得其成为一个线性空间：

加法 $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

数乘 $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{F}$

内积 $(a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$

这样构成的空间称为 \mathbb{F} 上的自由向量空间：

$$\mathcal{F}(V, W; \mathbb{F}) \equiv \left\{ \sum_{(v,w) \in V \times W} k_{v,w}(v, w), k_{v,w} \in \mathbb{F} \right\} \quad (\text{B.1})$$

这个向量空间非常大，就是把每个 $(u, v) \in V \times W$ 都拿来作为基底张成的线性空间。张量积的初衷是想去找 $V \times W \rightarrow Z$ 上的双线性函数 f ，双线性函数一定满足下面的条件：

$$\begin{aligned} (k_1 v_1 + k_2 v_2, w) &\sim k_1(v_1, w) + k_2(v_2, w) \\ (v, k_1 w_1 + k_2 w_2) &\sim k_1(v, w_1) + k_2(v, w_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

\sim 表示它们作用 f 得到的值一样。这么来看原先的那个 $V \times W$ 还是太大了，无法自然地蕴含上面的等价关系，所以我们干脆把上面的两条等价关系给摸掉，得到一个更合适的线性空间 Y ：

$$Y \equiv \mathcal{F}(V, W) / \sim \quad (\text{B.3})$$

数学人更喜欢用的不是上面两条，而是和它们等价的下面四条：

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) &\sim (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) &\sim (v, w_1) + (v, w_2) \\ (kv, w) &\sim k(v, w) \\ (v, kw) &\sim k(v, w) \end{aligned} \tag{B.4}$$

从 $V \times W$ 到 Y 的线性映射我们记为 h ，则 f 就自然诱导出来了 $Y \rightarrow Z$ 的线性映射 g ，而且 Y 也小多了，我们也没必要去强调 g 的双线性性质，现在 Y 自己就蕴含了线性映射的双线性。我们把这个新的空间叫做 $V \otimes W$ ，即张量积空间。物理上我们把里面的元素写为 $|\psi\rangle|\phi\rangle$ ，而且前面的四条性质就蕴含在我们物理上对张量积的普遍共识，物理上对于张量积的应用一般是体系有多个自由度，比如多个粒子或者一个粒子但是有自旋这种自由度，那么整个希尔伯特空间就看作是每个自由度的希尔伯特空间的张量积。而且在每个自由度上的矢量加法满足 \otimes 的分配律。

由于任何一个映射 f 都可以诱导出映射 g ，所以很多时候我们不会额外区分两者，事实上可以证明双线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W; Z)$ 和 $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ 是同构的。在物理上我们考虑的线性空间都是内积空间¹，根据里斯表示定理，每个向量空间中的元素都可以和其对偶空间中的元素通过内积双线性性建立一一对应，也即所谓 ket 和 bra 的概念。如果取：

$$(\langle\psi_1| \otimes \langle\phi_1|) \cdot (|\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{B.5}$$

那么很容易说明 $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$ 。当然，这一点的成立并不依赖于上面的内积选取²，只是量子力学里面都是这么取的。

上面的定义是构造性的，但数学上更喜欢的是泛性质的定义，直接用下面的交换图就好了：

定义 B.1.1 张量积空间是某个向量空间 Y 配以双线性映射 $h : V \times W \rightarrow Y$ ，使得对于任意双线性映射 $f : V \times W \rightarrow Z$ ，存在唯一的线性映射 $g : Y \rightarrow Z$ ，使 $f = g \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{h} & Y = V \otimes W \\ & \searrow f & \downarrow \exists! g \\ & & Z \end{array}$$

上面交换图中虚线的意思是存在且唯一存在一个映射使得图标交换。

直和和直积在数学上真的不怎么区分，我先给出泛性质的定义你就知道它们之间的区别有多么微妙了。

定义 B.1.2 直积在数学上指的是积范畴，即对于范畴 \mathcal{C} 中的一族对象 $X_i (i \in I)$ ，若存在一个对象，通常记为 $\prod_{i \in I} X_i$ ，以及一族态射 $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 使得对任意对象 X 和一族态射 $f_j : X \rightarrow X_j$ ，都存在唯一的态射 $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ 使得对任意 $i \in I$ 都有 $\pi_i \circ f = f_i$ 那么对象 $\prod_{i \in I} X_i$ 连同态射族 $\{\pi_i : i \in I\}$ 称为对象族 $\{X_i : i \in I\}$ 的积 (product)。画出交换图如下：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_j & \downarrow \pi_j \\ & & X_j \end{array}$$

¹尽管张量积的定义不需要内积，对偶空间也不需要，这里我们只看有内积的简单情况。

²毕竟它的定义就不需要内积，这里局限在内积空间上讨论感觉从物理直观上更容易说清楚，用严谨的 general 的数学反而迷糊。

定义 B.1.3 直和在数学上指的是余积范畴 (coproduct)，交换图上的定义只需要把上面图的箭头全部反转就好了，文字定义不难相应写出：

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\exists! f} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \swarrow f_j & \uparrow \iota_j \\ & X_j & \end{array}$$

可见两者定义上差的只是一个投影 π ，一个是嵌入 ι_i 。

从范畴的角度看它们差的仅仅只是一个积一个是余积，把箭头反过来罢了！所以数学上真的不怎么区分，特别是对于线性空间范畴，这个定义真的就是等价的！从维数上也能看出这一点 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ，但是前面的张量积 $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mn}$ 。但是这里说的是外直和，后面还会讲到内直和。

回到物理一些的想法，翻阅喀兴林老师的高量课本，第一章就给出来直和的三条性质：

$$\text{数乘分配 } \lambda(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle) = \lambda|\psi\rangle \oplus \lambda|\phi\rangle$$

$$\text{加法 } |\psi\rangle \oplus |\phi\rangle + |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle = (|\psi\rangle + |\psi'\rangle) \oplus (|\phi\rangle + |\phi'\rangle)$$

$$\text{内积 } (|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle, |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle + \langle\psi'|\phi'\rangle$$

这不和自由向量空间的定义一模一样么！所以在线性空间范畴上真看不出啥区别。我们再看直和和一般的向量的和有啥区别。注意我们定义主打的就是两个希尔伯特空间是互相分开的，互相不影响，我们在定义两个向量空间的外直和时，我们并不要求两个向量空间的元素之间有加法定义，而是定义直和来把多个自由度强行直接并起来。这其实有某种选择定则在里面，当我们把两个态加起来的时候，我们认为它们处于同一个线性空间，可以叠加得到混合态。但是你绝对不会把一个自旋为 0 和一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的态直接叠加起来，因为这意味着一个单粒子态一会儿是费米子，一会儿是玻色子，尽管理论上这种禁闭没有严格证明（见 Weinberg 场论第一卷相关部分），但是我们从实验上可以相信这种禁闭是存在的，而这个时候考虑总的体系希尔伯特空间，最好的方式就是用直和了，也就是直接直积并起来罢了。

量子力学里面更多的去讲直和是讲巨正则系综构造 Fock 空间。由于非相对论性的量子力学是个粒子数不变的体系，所以也存在上面与自旋类似的选择定则，也就是说你不会把两个粒子数不同的态直接加起来构造一个混合态，这是没有物理意义的。要用的时候就直接把他们看作是处于完全不同的希尔伯特空间，有自己的一套加法数乘规则，而且互不影响，最后再把它们通过直和直接并起来，构成一个系综，是一个混合态。

内直和就完全不一样了，内直和我们首先是有很大的向量空间，然后想去考虑他的分解，但是我们比较关注“正交分解”，也就是说希望把 V 分解为一系列子空间 V_1, V_2, \dots ，这些子空间互相除了零元素没有公共元素，但它们之间的元素是有子空间自然诱导的加法的。如果对于 V 中的任意一个元素 v ，都存在且唯一一组 (v_1, v_2, \dots) 使得 $v = \sum_i v_i$ ，则称 V 是 V_1, V_2, \dots 的（内）直和，也记为：

$$V = \bigoplus_{i=1} V_i \tag{B.6}$$

在讨论群表示的时候涉及到群表示的分解，那个分解实际上就是在把群表示空间分解为一系列更小的空间的内直和，每个最小的不能再分的块就是不可约表示。在纯粹考虑矩阵理论的时候也会谈及张量积和直和的概念，矩阵的直和应该对应到内直和，而张量积就是前面讨论的张量积（把矩阵看成是线性算符， $V \otimes W$ 看成是 $(V^* \otimes W^*)^*$ ），只是把前面的理论用线性算符重写了一遍，并选取了一组基底写成矩阵形式。不少文献也把矩阵的张量积叫克罗内克积。

总结一下，这一节定义 $V \otimes W$ 的目的就是把 $V \times W$ 上的双重线性映射提升为新的空间 $V \otimes W$ 上的线性映射来研究。而且 $V \otimes W$ 的本质其实就是 $\mathcal{L}(V^*, W^*, F)$ ，也就是对偶空间上的双重线性泛函，

这一点可以从下面的等式看出来：

$$V \otimes W \cong \mathcal{L}((V \otimes W)^*, F) \cong \mathcal{L}(V^* \otimes W^*, F) \cong \mathcal{L}(V^*, W^*, F) \quad (\text{B.7})$$

牢记这一本质，我们可以把 $V \otimes W$ 具体构造出来。首先对于 $f \in V^*, g \in W^*$ ，可以定义这两个线性泛函的张量积为：

$$(f \otimes g)(v, w) \equiv f(v) \cdot g(w) \quad (\text{B.8})$$

不难发现通过张量积 \otimes 运算，我们从 V, W 中的线性泛函出发得到了一个 $V \times W \rightarrow F$ 的双重线性泛函，也就是 $V^* \otimes W^*$ 中的一个元素。同样，假设 V 的基底为 $\{e_i | i \in I\}$ ， W 的基底为 $\{f_j | j \in J\}$ ，把他们看成是 V^* 和 W^* 中的线性泛函，那么 $V \otimes W$ 的基底就可以构造为：

$$V \otimes W = \text{span} \{e_i \otimes f_j | (i, j) \in I \times J\} \quad (\text{B.9})$$

这样我们就找到了 $h : V \times W \rightarrow V \otimes W$ 。我们这里都是集中在两个线性空间的基础上讨论，这一构造可以轻易推广到有限个向量空间的张量积上面去，而且不难证明满足结合律， $V \otimes W \otimes Z$ 是良定义的。

B.2 Grassmann 几何

B.2.1 外代数 接着上面一节继续讨论，前面的张量积空间对任意向量空间 V, W 都是可以进行构造的，现在我们把范围搞窄一点，假设只考虑 V 和他的对偶 V^* 构成的张量积空间：

定义 B.2.1 ((r, s) 阶张量空间)

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^s \quad (\text{B.10})$$

这称为 (r, s) 阶张量空间，其中的 r 叫逆变阶数， s 叫协变阶数。特别地定义 $V_0^0 \equiv F$

注记 B.2.2 实际上这些 V, V^* 完全可以交替排列，不过我们总可以让他们排列成这样整齐的方式便于记号书写方便。

再来解释一下为什么要叫逆变反变，根据前面说的，我们记 $V = \{e_i\}, V^* = \{e^{*j}\}$ ，那么 V_s^r 中的任意一个向量都可以展开为下面的形式：

$$x = x_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s} \quad (\text{B.11})$$

注记 B.2.3 注意一上一下表示求和，不但能帮助我们分清求和指标，还能帮我们分清协变逆变。

由于 V 中基底 $\{e_i\}$ 的选取是完全任意的，可以差一个线性变换，对应的 $\{e^{*j}\}$ 的选取也就可以差一个线性变换，而且是对应的逆矩阵， x 本身在基底变换下是绝对的，但是其在不同基底下的分量会差个线性变换，可以证明如果选取 $A_i^j e_j$ 作为新基底， x^i 会利用 A 的逆矩阵变换，所以对应 V 的基底 e_i 叫逆变的（尽管本身 e_i 用 A 来变）；同样的 x_j 会利用 A 矩阵本身来变换，所以对应 V^* 的基底 e^{*j} 叫协变的（尽管本身 e^{*j} 用 A^{-1} 来变）。

V_s^r 中的元素除了可以用张量积运算生成更大的张量以外，还可以利用缩并这个运算生成更小的张量，数学上严格定义为：

定义 B.2.4 (缩并) 张量 x 的缩并定义为：

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu}(x) = & \langle v_\lambda, v^{*\mu} \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_\lambda \otimes \cdots \otimes v_r, \\ & \otimes v^{*1} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{*\mu} \otimes \cdots \otimes v^{*s}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

其中[^]表示去掉这个因子。

不过物理人口中更关心张量的分量，而不是其本身，毕竟分量是用来真正做计算的，那么缩并其实就是把某个上指标和某个下指标去成一样的然后求和，类似于矩阵取 trace。

无论是缩并还是张量积，最终得到的元素都不会在原空间里面，这引导我们去利用直和构造 Fock 空间一样来构造更加大的空间，使得这些运算是封闭的。我们现在只考虑 V_0^r 或 V_s^0 ，也就是不考虑 V 和 V^* 的混合：

定义 B.2.5 (张量代数) 由所有 $T^r(V) \equiv V_0^r (r \geq 0)$ 的直和构成的空间记为：

$$T(V) \equiv \bigoplus_{r=0} V_0^r \quad (\text{B.13})$$

显然这个空间没有缩并运算，但是在张量积运算下是封闭的，构成了一个代数，称为**张量代数**。

T^r 空间作为线性空间可以考虑两类子空间，考虑下面两个投影算子：

$$\begin{aligned} S_r(x) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \sigma x, \\ A_r(x) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma x \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

这里 \mathfrak{S}_r 表示 r 阶置換群，上面的两个算子把 $T^r(V)$ 分别投影到全体全对称张量的集合 $P^r(V)$ 和全反对称张量的集合 $\Lambda^r(V)$ 。从指标上看就是那些全对称和全反对称的张量构成的向量空间。显然这个时候如果继续把 $P_r(V)$ 或者 $\Lambda^r(V)$ 直接对所有 r 直和起来的空间在张量积运算下并不构成一个代数，所以要对乘法进行修正，下面具体来考虑反对称部分。

注记 B.2.6 约定 $\Lambda^1(V) = V, \Lambda^0(V) = F$ 。

定义 B.2.7 (外积)

$$\xi \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}(\xi \otimes \eta), \quad \xi \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V) \quad (\text{B.15})$$

其中 A_{k+l} 是前面定义的反对称化算子。不难验证 $\xi \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ 。

外积运算有如下性质：

- 分配律：

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta, \quad \xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2$$

- 反变换律： $\xi \wedge \eta = (-1)^k \eta \wedge \xi$

- 结合律： $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

定义 B.2.8 (外代数) 在上面外积的定义下

$$\Lambda(V) \equiv \bigoplus_{r=0} \Lambda^r(V)$$

构成一个代数，称为**外代数**，或**Grassmann 代数**。

B.3 李超代数

物理人群环域模体格这些代数结构真正关心的就是群，而且很多情况下只关心它的表示，为了更好地数学上刻画李超代数，我们从环和域开始讲起。

回忆群的定义，是在集合上定义了一个乘法结构，而且封闭、结合、存在幺元且元素都可逆，现在考虑把这四条性质一条条加上去。如果只有封闭性，则称为原群 (Magama)，考虑继续加性质：

定义 B.3.1 (半群与幺半群) 带有二元运算的非空集 S 若满足结合律，则称之为半群。存在幺元的半群称为幺半群 (Monoid)。若 M 是幺半群，而子集 $M' \subset M$ 满足 (i) M'' 对乘法封闭，(ii) $1 \in M'$ ，则称 M' 为 M 的子幺半群。

如果在幺半群的基础上加上所有元素都可逆，那就得到了群的定义。

定义 B.3.2 (含幺) 环是一组资料 $(R, +, \cdot)$ ，其中

1. $(R, +)$ 是交换群，二元运算用加法符号记作 $(a, b) \mapsto a + b$ ，加法幺元记为 0，称之为 R 的加法群；
2. 乘法运算 $\cdot : R \times R \rightarrow R$ 简记为 $a \cdot b = ab$ ，满足下述性质：对所有 $a, b, c \in R$ ， $\diamond a(b + c) = ab + ac$ ， $(b + c)a = ba + ca$ （分配律，或曰双线性）， $\diamond a(bc) = (ab)c$ （乘法结合律）；
3. 存在元素 $1 \in R$ 使得对所有 $a \in R$ 皆有 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ ，称作 R 的（乘法）幺元。

后面两点其实蕴含了 (R, \cdot) 是一个幺半群。除去和幺元相关性质得到的 $(R, +, \cdot)$ 称作无幺环。若子集 $S \subset R$ 对 $(+, \cdot)$ 也构成环，并且和 R 共用同样的乘法幺元 1，则称 S 为 R 的子环，或称 R 是 S 的环扩张或扩环。

例 B.3.3 后面用的比较多的是 \mathbb{Z}_n 环，它的元素由整数关于 n 的模得到，比如 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ，加法和乘法就是自然数的加法乘法取模 n 。全体整数也构成一个环，称为自由环 \mathbb{Z} 。

定义 B.3.4 域是一组资料 $(K, +, \cdot)$ ，其中

1. $(R, +)$ 是交换群；
2. (R, \cdot) 是交换群；
3. $\forall a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = ab + ac$ 。

这个定义和环颇有些相似，实际上域可以看作是环上的乘法幺半群附加交换性，这时候环变成一个交换环，再要求乘法意义上环中除了加法零元每个元素都有逆，这环变成除环 (体)。域就是一个交换可除环。

简单点说就是一个集合上面定义了加减乘除，满足通常的结合律、交换律和分配律等等。但是有一个地方和小学学的数域有点不一样，若干个相同的不为 0 的数求和可以为 0。比如 \mathbb{Z}_2 也可以看作一个域，其中 $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ ！

定义 B.3.5 一个域只可能出现两种情况：

特征 0: 任何元自己和自己加法无论多少次都不会得到零元（零元自己除外）；

特征 p: $\exists p \in \text{Prime}$ 满足任何数自己和自己相加 p 次后总是得到零元。

后面的讨论在特征为 0 的域上进行。

回忆李代数首先是一个代数，生活在一个线性空间，李超代数首先是一个超代数，和代数的区别是其生活在阶化之后的线性空间上。

定义 B.3.6 (Z_n 阶化向量空间) 若一个向量空间可以直和分解为 $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_n} V_\alpha$, 则称 V 为 Z_n 阶化向量空间。 V_α 子空间中的元素称为 α 阶齐次元。

这个定义只要求这样的分解存在就行, 并不需要搞清楚 V_α 到底谁是谁。

定理 B.3.7 若 V, W 都是 Z_n 阶化向量空间则它们上面的线性算子 $\mathcal{L}(V, W)$ 也是一个 Z_n 阶化向量空间。张量积空间亦然。

考虑 V 上的双线性函数 $f : V \times V \rightarrow K$, 可以有下面几种形式:

相容的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(X, y) \propto \delta_{\alpha\beta}$

超对称的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(X, y) = (-1)^{\alpha \cdot \beta} f(y, x)$

反超对称的: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, f(X, y) = -(-1)^{\alpha \cdot \beta} f(y, x)$

定义 B.3.8 超代数是一个 \mathbb{Z}_2 阶化的代数

原先的李代数的代数乘法只有对易子, 现在李超代数的目的就是把反对易子也加进来, 而前面先定义阶化的目的就是分清楚哪些元素之间反对易关系, 哪些之间是对易关系。

定义 B.3.9 李超代数是一个超代数, 且乘法 (\cdot, \cdot) 满足:

双线性: $(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1(\alpha, \beta_1) + k_2(\alpha, \beta_2)$ $(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta)$

阶化反对易: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, (x, y) = -(-1)^{\alpha \cdot \beta} (y, x)$

阶化 Jacobi 恒等式: $\forall x \in V_\alpha, y \in V_\beta, ((x, y), z) = (x, (y, z)) - (-1)^{\alpha \cdot \beta} (y, (x, z))$

超代数是代数直接阶化, 但是李超代数并非直接把李代数阶化。和李代数一样, 李超代数的李超括号可以直接由超代数的乘法诱导:

$$[x, y] = xy - yx, \quad \{x, y\} = xy + yx$$

超李代数的生成元分为两组 $x_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, 则对易关系可以写为:

$$[x_i, x_j] = f_{ij}^k x_k, \quad [x_i, y_\alpha] = F_{i\alpha}^\beta y_\beta, \quad \{y_\alpha, y_\beta\} = A_{\beta\alpha}^i x_i \quad (\text{B.16})$$

且结构常数满足:

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k, \quad F_{i\alpha}^\beta = -F_{\alpha i}^\beta, \quad A_{\beta\alpha}^i = A_{\alpha\beta}^i \quad (\text{B.17})$$

实际物理上考虑的是它们的射影表示, 所以就跟 CFT 里面的 Virasoro 代数一样可以有个中心扩张。虽然 Poincaré 代数的中心扩张总可以消除, 但是超 Poincaré 代数在 $\mathcal{N} > 1$ 时可以有非平庸的中心荷。李超代数的中心扩张定义和李代数完全一致, 只是 c 和其他生成元不是对易, 而是超对易, 也就是 $(c, x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ 。

例 B.3.10 (一般线性李超代数) 李代数比较重要的是考虑其到 $\mathfrak{gl}(n)$ 的子代数的同态, 也就是考虑其线性表示。李超代数这边同样也会考虑表示, 这个时候对应的是 $\mathfrak{pl}(m, n)$ 的子代数。考虑任意一个 $\mathfrak{gl}(m+n)$ 中的元素, 在某个基底下:

$$\begin{pmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times n} \\ C_{n \times m} & D_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m \times m} & 0 \\ 0 & D_{n \times n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{m \times n} \\ C_{n \times m} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

这实际上就已经把 $\mathfrak{gl}(m+n)$ 进行了 \mathbb{Z}_2 阶化，分块对角的是 $\mathfrak{pl}(m,n)_{\bar{0}}$ ，斜分块对角的是 $\mathfrak{pl}(m,n)_{\bar{1}}$ 。然后在矩阵乘法诱导的 $[,]$ 和 $\{\}$ 下构成李超代数。注意到对于同样一个 $\mathfrak{gl}(m+n)$ ，可以有不同的 \mathbb{Z}_2 阶化方法，所以对于李超代数线性表示空间的维数需要用两个指标 m, n 来标记。

常常对于 $\mathfrak{pl}(m,n)$ 中的元素定义超迹：

$$\text{str } x \equiv \text{tr } A - \text{tr } D \quad (\text{B.19})$$

它与基底选取无关，而且超迹自然诱导出一个 $\mathfrak{pl}(m,n) \times \mathfrak{pl}(m,n) \rightarrow K$ 的双线性 $\langle x, y \rangle \equiv \text{str } (xy)$ ，而且它是相容的，还是不变的，也就是说 $\langle (x, y), z \rangle = \langle x, (y, z) \rangle$ 。超对易子的超迹必然是 0， $\text{str } (x, y) = 0$ 。利用超迹还可定义出 $\mathfrak{pl}(m,n)$ 的子代数 $\mathfrak{spl}(m,n) \equiv \{x \in \mathfrak{pl}(m,n) | \text{str } x = 0\}$

李超代数和李代数有许多相似之处，比如同样可以定义单李超代数，可以考虑上面的 Killing 型和伴随表示，还可以考虑典型代数，用 Dynkin 图和 Cartan 子代数方法找最高权表示或是对单李超代数进行分类。但是它又有不少不同点需要注意，比如 Schur 引理不再成立：

定理 B.3.11 (超 Schur 引理) 设 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{pl}(V)$ 是李超代数的一个不可约表示，则与全部 $\rho(\mathfrak{g})$ 可超交换的线性变换，

$$C(\rho) = \{a \in pl(V) | (a, p(\mathfrak{g})) = 0\}$$

只可能是 $C(\rho) = cI$ ，或

$$C(\rho) = c \begin{pmatrix} I_{n \times n} & b \\ b^{-1} & I_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad c \in K$$

这种情况要求 $n = \dim V_{\bar{0}} = \dim V_{\bar{1}}$

再比如李代数的李定理也不再成立。更多有关李超代数表示论的内容请见 [20, 19, 12]。

B.4 切矢，微分，子流形和 Frobenius 定理

这些都是微分几何最基础的概念，物理人一般就是凭感觉去定义，这种定义方式一般没问题，我们来看数学人是怎么严格理解这件事情的。为此首先看物理人是如何定义的，引入 David Tong 讲义上面的讲法。

B.4.1 切矢和微分

B.5 中心极限定理与随机矩阵模型

本节说白了就是在玩 $0+0$ 维的量子场论，为讨论大 N 极限做准备。

B.5.1 一些关于概率论的常识 下文中我们用大写字母表示随机变量，用对应的小写字母表示随机变量的取值，后面讨论的都是连续型随机变量。

设随机变量的 PDF (概率密度函数) 为 $p(x)$ ，定义其特征函数为傅里叶变换：

$$\hat{p}(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} p(x) \quad (\text{B.20})$$

利用它在 $k=0$ 处做形式幂级数可以得到：

$$\begin{aligned} \hat{p}(k) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n M_n \\ M_n &= \langle X^n \rangle = \int dx x^n p(x) = \left(\frac{\partial}{i\partial k} \right)^n \hat{p}(k) \Big|_{k=0} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

还有一个很有用的概念叫 cumulants，或者说叫集团 (cluster) n 阶矩 K_n ：

$$\hat{p}(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n K_n \right) \quad (\text{B.22})$$

实际计算中需要计算 M_n ，也就是 n 点关联函数，可以把他表示成集团的和的形式：

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1, \\ M_2 &= K_2 + K_1^2, \\ M_3 &= K_3 + 3K_1 K_2 + K_1^3, \\ M_4 &= K_4 + 4K_3 K_1 + 3K_2^2 + 6K_2 K_1^2 + K_1^4 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

所以求关联函数归结为求 cumulants，而且上面的公式也可以用图的形式表示出来。比如 M_3 ：

$$M_3 = \boxed{\bullet \bullet \bullet} + C_3^2 \boxed{\bullet \bullet} \bullet + \bullet \bullet \bullet$$

用圈起来的代表一个 cluster，里面 n 个球就代表是 K_n ，最终结果就是把所有的分组方法对应的图加起来，每个图又是集团的乘积。这其实就是在考虑 n 个不同的球如何用完全一样的盒子进行分类 (容量相同的视为完全相同的盒子，不同容量盒子依旧不同)。

现在考虑 N 个独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$ ，且设 $X = \sum_{i=1}^N X_i$ ，那么 X 的 PDF 就可以表达为：

$$\begin{aligned} q(x) &= \int \left[\prod_i dx_i \right] \delta(x - \sum_i x_i) p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \int \left[\prod_i dx_i \right] e^{ik \sum_i x_i} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \left[\int dx' e^{ikx'} p(x') \right]^N \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \hat{p}^N(k) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

利用特征的定义，设随机变量的方差为 σ ，平均值为 μ ，则有：

$$\hat{p}(k) = \exp\left(ik\mu - \frac{1}{2}k^2\sigma^2 + \dots\right) \quad (\text{B.25})$$

则最终得到：

$$q(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-N\mu)-N\frac{1}{2}\sigma^2k^2+N\mathcal{O}(k^3)} \quad (\text{B.26})$$

N 有限时这个式子很复杂，但是积分换元把 Nk 当整体，不难发现 $N \rightarrow \infty$ 后上式中的 $\mathcal{O}(k^3)$ 完全可以丢掉得到：

$$q(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-N\mu)^2}{N\sigma^2}\right) \quad (\text{B.27})$$

这正是中心极限定理说的事情，这也让我们第一次看到了很多理论在取 $N \rightarrow \infty$ 后反倒会变得简单。

B.5.2 0+0 维 QFT 我们的讨论从上一节简化后的大 N 极限下的情况开始，假设 $\mu = 0$ ，这个时候随机变量 Φ 遵从高斯分布：

$$P(\phi) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right) \quad (\text{B.28})$$

这里 Z 是归一化系数，遵从统计力学的术语，我们叫他配分函数。但是真正能用于计算的配分函数定义是 $P(\phi)$ 的特征：

$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{1}{Z} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{J^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

显然 $Z = Z[J=0]$ ，这其实就相当于把 PDF 形变一下，加一个流 J ，我们一般把这个叫配分函数³。按照前面的讨论，只需要把这个配分函数在 $J=0$ 处做形式幂级数就能得到任意点关联函数，对于高斯情况配分函数可以严格计算出来，所以很简单可以得到：

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{1}{m^{2n}} \quad (\text{B.30})$$

真实世界的概率模型不可能是如此简单的高斯分布，但是一般非高斯的我们又不会解，退而求其次，我们考虑一个小扰动：

$$P(\phi) = \frac{1}{Z[g]} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right), \quad g \ll 1 \quad (\text{B.31})$$

即使如此简单的扰动就算是计算归一化系数都很困难。注定只能做微扰展开求解，也就是把最终答案写成关于 g 的幂级数。这其实涉及到收敛半径这一比较微妙的问题，高维 QFT 比如 QED, QCD 这些模型，展开半径都是 $0!$ 微扰展开实际上只能理解为渐近展开！但是我们考虑的 0+0 维 QFT 其实就是微扰方法算一元函数积分，我们不需要 care 所谓非微扰效应，圈图发散，重整化这些玩意儿。但是这个玩具模型能很好地帮助理解费曼图是怎么来的。

考虑生成泛函：

$$Z[g, J] = \frac{1}{Z[g]} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + iJ\phi\right) \quad (\text{B.32})$$

显然 $Z[g, J=0] = 1$ ，如果微扰地计算出了这个函数。那么直接根据 $M_n = \left(\frac{\partial}{\partial J}\right)^n Z[g, J=0]$ 就可以得到任意阶关联函数的微扰解。我们记未受到扰动的 Gauss 型随机变量的配分函数为 $Z_0[J]$ ：

$$Z_0[J] \equiv \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \quad (\text{B.33})$$

³或者按照高维 QFT 的叫法叫生成泛函

注记 B.5.1 注意这里定义去掉了归一化因子 \mathcal{Z} 。

则：

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \exp \left[-\frac{1}{4!} g \left(\frac{\partial}{i\partial J} \right)^4 \right] \mathcal{Z}_0[J] \quad (\text{B.34})$$

虽然 $\mathcal{Z}_0[J]$ 可以严格求解，但是我们还是写下他的级数形式，将上面的配分函数写为：

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{Z[g]} \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left[\frac{1}{4!} -g \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^4 \right]^V \times \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left[\frac{1}{2} (-J) \frac{-1}{m^2} (-J) \right] \quad (\text{B.35})$$

我们对因子的 -1 相位进行了合理排布，没那么神秘，只是为了后面计算稍微方便一些，正统 QFT，这些相位不是以 -1 给出，而是以 i 的形式给出。费曼图也没那么神秘，无非就是现在想算这个配分函数，每次都一项项展开分析太麻烦了，然后就想了个办法把这些求和中的项用图的形式写出来而已。⁴

首先看下求和里面有些啥，首先有 J ，而且很容易求出剩下 $E = 2P - 4V$ 个，这也直接给出限制 $E \geq 0$ 。其次有 $\frac{-1}{m^2}$ 和 $-g$ ，而且一个 $-g$ 的出现总是意味着四个 $-1/m^2$ ，还有一个归一化因子 $\mathcal{Z}[g]$ ，我们先不管它。这样我们就得到了三个拼图：

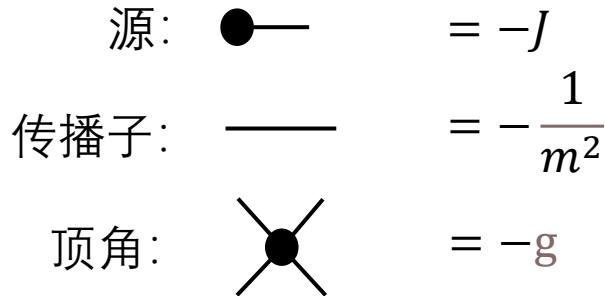


图 B.1: 费曼图拼图

唯一要做的事情就是把这些拼图拼起来得到一个闭合的图，所谓闭合，我的意思是说顶点和源或者源和源之间都用传播子粘好了，不存在还剩下半截传播子露在外面的情况，图是连通的还是非连通的倒无所谓。首先从符号上我们知道应该有 $(-1)^{P-V}$ 因子，用这些拼图拼好的闭合的图正好有这样的因子。还有一个问题是为啥引入微扰的时候系数要加个 $1/4!$ ，这也不神秘，首先注意到 V 个顶点 P 个传播子的项数理论上来说由 $\partial/\partial J$ 淹灭 J 的方式决定，总共有 $(2P)!/(2P - 4V)!$ 种不同的淹没方式，不过这里绝大部分所对应的图的拓扑结构都是一样的，也就会对应一样的代数项，当然也有拓扑结构不一样的，所以微扰展开里面的每一项都要用几个拓扑结构不同的图来表示，也就是那些所有具有 P 个传播子， V 个顶点的图。那些拓扑结构相同的图我们当然只用画一次，然后在前面乘上个系数就好，但是我们并不希望这个系数特别大，即使是泰勒展开前面就有的系数也不能完全把他们消除为 1，所以我们预先在 ϕ^4 前面乘上了一个 $1/4!$ 。但是事与愿违，这还是不能保证每个图前面的系数都为 1，但是幸运的是，这个系数只和图的拓扑结构有关，有系统的方法数出来，只是数起来非常麻烦罢了。我这里不打算讲怎么数这些不同的对称因子，袁野老师的讲义上写得很清楚，关于 ϕ^4 理论，文献 [15] 中还给出了公式。

继续发挥注意力，注意到求关联函数的时候要对配分函数关于 J 求导，所以 n 点函数肯定不会有 $E < n$ 的贡献，而且最后还要取 $J = 0$ ， $E > n$ 的贡献也没有，所以我们只需要画出那些 $E = n$ 的图。图是正必须 g^V 的，所以从微扰论角度看我们只需要画出少顶点的图。但即使是这样图原则上来说也有

⁴ 严格来说是费曼图的毛胚版本，正统的费曼图要 cut 掉外源得到关联函数，然后用 LSZ 公式使外线在壳，最后发现动量守恒只有那些连通图有贡献，那些图再用波浪线表示光子，实线表示费米子等等美化记号，就得到了通常我们看到的费曼图。

无限多，我们画出 $V \leq 2$ 的前面几个，对称因子已经写出来了：

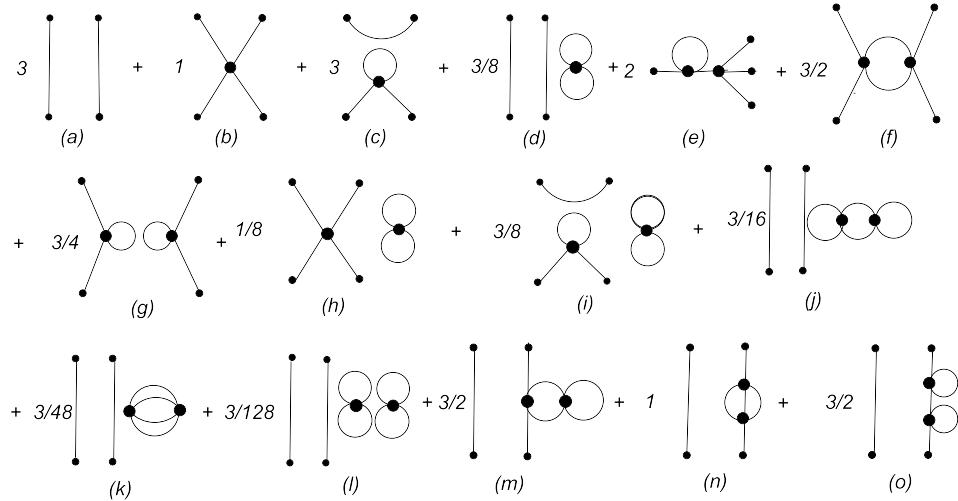


图 B.2: $\langle \Phi^4 \rangle$ 直到 $g * 2$ 阶

就算这样也有无穷多项，罪魁祸首是那些不带源的图，它们总是有无穷多项，可以和带源的图结合起来得到一个非连通图，而且不增加 E 。但是注意到上面的这些图可以因式分解为下面两个部分：

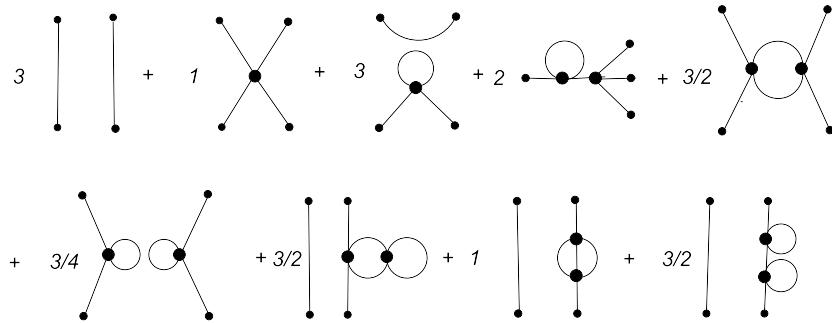


图 B.3: 不含真空图的费曼图

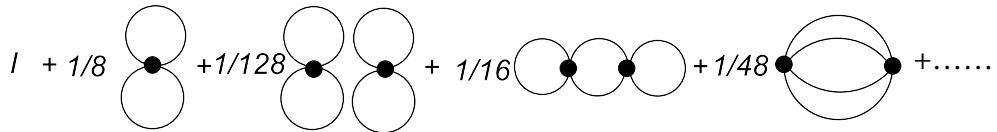


图 B.4: 真空图求和

设想我们对 $Z[g, J]$ 已经微扰地画出了所有图，我们把 J 取成 0，那些带源地图全部都会变成零，剩下的就只剩下真空图求和了！所以归一化系数 $Z[g]$ 其实就是真空图的求和！注意，我们所有的到现在的讨论都有一个前提，我们忽略了 $Z[g, J]$ 前面带的 $Z[g]$ ，结合起来真空图就被自然消除了！其实这是非常自然的，因为归一化系数总是可以吸收进积分测度里面，所以我们甚至可以直接把那些真空图求和归一化为 1，不少 QFT 教材就是直接这么做的，这里是为了让你更直观的看到这些真空图求和怎么被消去的。所以我们只需要考虑那些不带真空图的图，这使得计算得到了大幅简化，不难计算得到（别忘了

最后要对 iJ 偏导，这相当于砍掉外源但是保留相连的传播子，仍然离壳）：⁵

$$\langle \Phi^4 \rangle = 3 \frac{1}{m^4} - 4g \frac{1}{m^8} + \frac{33}{4} g^2 \frac{1}{m^{12}} \quad (\text{B.36})$$

计算 M_n 我们依旧要画很多图，我们来看下 K_n 的计算会有哪些不一样， M_n 都可以用 K_n 集团展开表示出来，按理说应该会简单一些。如果一个非连通图可以拆分成几个连通分支，有 n 个不同拓扑结构的连通分支，且每个拓扑构型有 m_i 个子图，那么就会对对称因子有贡献 $\frac{1}{m_1! \dots m_n!}$ ，这一简单的排列组合的想法可以帮助我们把所有费曼图的求和（已经把真空图去掉了）化为一堆连通图的求和（对应的对称因子不变，依旧看拓扑结构），不难证明⁶：

$$\mathcal{Z}(g, J) = e^{W_c[J]} \quad (\text{B.37})$$

这里 W_c 意思是所有除去真空图的连通费曼图的求和（带对称因子），显然 $W_c[J=0] = 0$ 。把它关于 iJ 展开：

$$W_c[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (iJ)^n \left(\frac{\partial}{i\partial J} \right)^n W_c[J=0] \quad (\text{B.38})$$

根据 $W_c[J]$ 的定义，他是我们计算 M_n 的时候的费曼图的那些连通图构成的集合，那显然 $\left(\frac{\partial}{i\partial J} \right)^n W_c[J=0]$ 的意义就是计算 M_n 的时候的连通费曼图的贡献！这一下子要画的图就少了许多，不难看出最后得到的结果就是 K_n ！也就是说 K_n 实际上是 M_n 中那些连通图的贡献，所以很多时候我们也记 $K_n = \langle \Phi^n \rangle_C$ 。比如对于 K_4 ：

$$K_4 = -g \frac{1}{m^8} + \frac{7}{2} g^2 \frac{1}{m^{12}} \quad (\text{B.39})$$

计算的时候最烦人的应该就是图前面的对称因子了，但是可以证明，在计算 K_n 时，也就是计算连通图贡献时，虽然每个图前面都有对称因子，但是由于最终结果是要对 iJ 求偏导得到的，也就是砍去外腿不同的方式又会贡献一个因子，可以和图前面的对称因子相抵消，而且树图这种抵消是精确的！这在上面 K_4 的表达式上也有体现。

注记 B.5.2 你可能会觉得 M_n 才是真正要关心的， K_n 算出来了只是原则上可以组合得到 M_n 。事实上在量子场论中，由于最终的可观测量不是关联函数本身，而是加上 LSZ 公式后得到的散射振幅，而 LSZ 公式干的第一件事情就是让外腿在壳（回忆用 $\partial/\partial J$ 只是砍掉了外源没有扔掉传播子），第二步就是因为每个顶角动量守恒，所以真正有贡献的只有那些连通图！也就是说对散射振幅有贡献的是 $\langle \Phi^n \rangle_C \subset \langle \Phi^n \rangle$ ，前者只需要画出连通图求得 K_n 再对 iJ 求导，后者需要求出 K_n ，然后放到 e 指数上面，然后再对 iJ 求导，等价于对所有图（连通或者非连通）求和后求导。

这里我们只考虑了实的随机变量，实际上也可以考虑复随机变量，仍旧可以绘制费曼图求解，但是由于概率必须是实数，所以对图的绘制做了一些要求，这其实类似于费米子费曼图的绘制，或者说复标量场的费曼图绘制，这部分核心思想就是前面那些，只是为了满足一些特定的配对规则多引入了一些规矩而已，也没必要再花时间讲了。

⁵ 注意到我们还能画出一些只有一个源的图的求和，这些图我们称为 tadpole，它们求和会对 $\langle \Phi \rangle$ 的计算有贡献，在 Φ^4 理论中由于积分的对称性可以直接看到它们必然为 0，但是 Φ^3 就会出问题，这在我们这里考虑的微积分问题倒没太大问题，但量子场论散射的 LSZ 框架下必须要求 $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = 0$ ！所以我们需要在原先的拉氏量中引入 $Y\Phi$ 重整化项来消除 tadpole。

⁶ 这个是真的不难，画一画就好了，详细说明可以见 Kerson Huang 统计力学的集团展开部分

B.5.3 所以什么是正统的费曼图？ 这里考虑的是最简单的 $0+0$ 的 QFT，如果随机变量随时间演化，从概率模型变成了随机过程，那么考虑的就是 $0+1$ 维 QFT，就是量子力学！那些 Φ 就可以解释为波函数。

进一步如果 Φ 还和空间位置有关，成为了一个场，那么我们就得到了 $d+1$ 维 QFT，在正则量子化框架下是把这些场看作算符然后加上对易关系，这一做法是必要的，能更好解释粒子态，散射理论这些。不过我们一旦知道我们要计算的其实就是关联函数之后，就好说了，从路径积分的语言来看，要算的关联函数其实就是 n 阶矩，而路径积分算的就是配分函数。只是积分测度从 $d\phi$ 变成了无穷维的 $\mathcal{D}\phi$ ，被积函数 e 指数上面的东东变成了 e^{iS} ， S 是作用量，对于自由场就是高斯函数的积分。从配分函数得到关联函数同样是求导，只是这个时候求的是泛函导数。总之区别不大，但是费曼图里面的顶点，传播子这些都不是一个单纯的数了，而是一个对空间的积分，而这将意味着圈图带来发散，所以需要做重整化抵消这个发散。然后出来一个 Wilson 去解释大家这么胡乱地做，去抵消发散到底是有啥物理上的考量，给了个很好地物理图像，然后我们就可以安心地去用 Wilson 之前大家就发明地维数正规化，PV 正规化等等去处理发散问题了。

当然，就像前面说的，我们画的费曼图和经常看到的很不一样，因为我们是带着源的，实际最终还要 cut 掉源然后代入 LSZ 公式求散射振幅，这个过程实际上可以打包处理，只要我们升级一下前面画的费曼图，把所有外源提前 cut 掉，然后 LSZ 公式外线在壳。再引入一些费曼规则，这样就得到了位置空间的费曼图，顶点传播子这些都是要对空间积分的，但是这依旧很麻烦，毕竟要做积分。事实上我们可以做个傅里叶变换，在动量空间看这些玩意儿，每个顶点的动量守恒自然就从对空间的积分给出来了，而且会消掉很多东西，最后把总体外线的动量守恒 $i\delta(\sum_i p_i)$ 抽出来，就直接得到了动量空间的费曼规则，把每个线用一些特定的符号画的美观一点，就成了一般大家口中的费曼图。

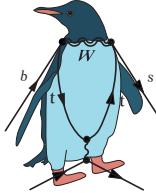


图 B.5: 老百姓口中的费曼图

常用的那些模型大家都帮你把费曼规则给弄出来了。但是这些费曼规则会非常复杂，要求和的图也非常多，所以现代微扰量子场论（pQFT）重要分支——散射振幅的目标就是脱离费曼图，直接从拉氏量出发，甚至从理论的一些基本假设出发 bootstrap 出散射振幅。

注记 B.5.3 本节玩的一整套内容都是微扰场论，真空态的定义，粒子的定义，LSZ 散射形式种种其实都暗含一些不那么显然的微扰场论假设。从数学上看微扰场论做的一切都是在微扰地解场方程，也就是先解自由场方程，搞出自由传播子，然后把传播子和相互作用带来的顶点项组合起来得到场方程的近似微扰解，可想而知这其中是丢掉了不少微扰论无法看出来的非微扰贡献的。或者从物理一点的角度想，这相当于在做路径积分时，都只是在真空场位形（这必定是场方程的经典解，所以是一个暗点）附近做鞍点近似进行计算。但是经典场方程的解可能还有一些能量不是最低的非平凡拓扑的解，比如孤子解、瞬子解，这些也是鞍点，微扰场论直接扔掉了它们的贡献，虽然在欧氏场论里面它们根据因子 e^{-S} 被压低。非微扰场论就是去考虑这些拓扑场构型的贡献，而微扰论是很难看出非微扰效应的，非微扰场论的研究需要脱离 pQFT 的框架，所以是很难的一个方向。

B.5.4 随机矩阵模型

再来看一个 $0+0$ 维量子场论的例子，随机矩阵模型，他的大 N 极限形式和 QCD 的非常相似。

随机矩阵模型就是把一堆矩阵作为系综，比如我们下面考虑 $N \times N$ 的厄米矩阵，矩阵作为随机变量的概率分布为：

$$P(\phi) = \frac{1}{Z} \exp\{-N \text{Tr} V(\phi)\} \quad (\text{B.40})$$

假设现在不断地从矩阵空间中选取一个矩阵，选完之后记录下它的特征值，随着选取的矩阵数目越来越多，画出的特征值分布的柱状图越来越趋近于一个光滑曲线 $\rho_N(E)$ ，显然这个 PDF 可以严格定义为：

$$\rho_N(E) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \delta(E - \Phi) \rangle = \frac{1}{N} \langle \sum_i \delta(E - E_i) \rangle \quad (\text{B.41})$$

下面我们就是要研究随着 $N \rightarrow \infty$, $\rho_N(E)$ 将趋近于怎样的一个函数。定义：

$$G(z) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle \quad (\text{B.42})$$

然后利用数学公式：

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\frac{1}{x + i\epsilon} \right) = -\pi \delta(x) \quad (\text{B.43})$$

得到：

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} G(E + i\epsilon) \quad (\text{B.44})$$

为了进一步简化计算，我们先来看一下矩阵空间的测度 $[d\phi]$ 。可观测量 $\text{Tr}(\mathcal{O}(\phi))$ 利用概率分布计算式为：

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) e^{-N \text{Tr} V(\phi)} \quad (\text{B.45})$$

可以把测度自然的定义为 $[d\phi] \equiv \prod_{p,q} d\phi_q^p$ ，这个测度在幺正变换下是不变的，而且幺正变换下 $P(\phi)$ 和 $\text{Tr}(\mathcal{O}(\phi))$ 都不变，所以整个理论是具有 $SU(N)$ 对称性的。我们改写一下测度使其更明显一些，考虑把测度中的每个 ϕ 用某个幺正矩阵 U 对角化为 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ，则测度一定可以重写为：⁷

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{Z} \int_{SU(N)} [dU] \int J \prod_i d\lambda_i \sum_j (\mathcal{O}(\lambda_j)) e^{-N \sum_k V(\lambda_k)} \quad (\text{B.46})$$

这里 $[dU]$ 是 $SU(N)$ 上的 Haar 测度，而 J 是变换的雅可比行列式。从这个式子可以看出来 $[dU]$ 是可以单独积出来的，结果是 $SU(N)$ 流形的体积，我们完全可以把他归一化为 1，得到：⁸

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{Z} \int J \prod_i d\lambda_i \sum_j (\mathcal{O}(\lambda_j)) e^{-N \sum_k V(\lambda_k)} \quad (\text{B.47})$$

现在理论的自由度从原先的 N^2 个减少到了 N 个，也就是说我们只需要关心矩阵的本征值！而不是矩阵本身，我们把矩阵的 PDF 变成了所有矩阵的谱的 PDF！这也是很好理解的，因为矩阵模型一直在强调取 trace，而且我们还明白了 $SU(N)$ 对称性是这个理论的数学描述上的冗余！这也是为什么前面说矩阵模型和 QCD 非常像，实际上 QCD 完全可以用矩阵的形式去写，不像 QCD 一样需要引入 FP 鬼场去消除冗余，矩阵模型的冗余非常容易因子话出来并扔掉。实际上这里还剩下个雅可比行列式，这玩意

⁷这一节我把它放在了数学附录，但实际上处理的方法优势物理学家所习惯的，但讨论的確確實只是数学问题。

⁸实际计算当然是前面对测度自然的定义更舒服

儿其实就是在 QCD 里面鬼场出来的项，也可以用加鬼的方法来物理地求出这个 J ，这里直接给出结果：

$$J = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (\text{B.48})$$

我们后面再回过头继续看这个，我们现在先局限于 $V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2$ ，也就是先考虑最简单的高斯型，上面的分析告诉我们幺正变换不会改变矩阵元的关联函数：

$$\langle U^\dagger \phi U \rangle = \langle \phi \rangle \quad (\text{B.49})$$

利用这一点可得：

$$\begin{aligned} G_j^i(z) &\equiv \left\langle \left(\frac{1}{z - \Phi} \right)_j^i \right\rangle = \left\langle \left(U^\dagger \frac{\delta}{z - \lambda_i} U \right)_j^i \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\delta_j^i}{z - \lambda_i} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{z - \Phi} \right\rangle \delta_j^i = \delta_j^i G(z) \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

这里倒数第二个等号利用了在平均的意义下矩阵的 λ_N 都是相等的，所以都等于 trace 的均值再除掉 N 去做平均。现在计算 $\rho(E)$ 约化为计算 $G_j^i(z)$ ，而这一函数可以利用泰勒展开写成：

$$G_j^i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} \langle (\Phi^{2n})_j^i \rangle = \delta_j^i \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \langle (\Phi^2)_j^i \rangle + \frac{1}{z^5} \langle (\Phi^4)_j^i \rangle + \dots \quad (\text{B.51})$$

说白了就是要求关联函数，然后你可能想着去给 PDF 加源得到配分函数，然后用前面展开的方法得到费曼规则。但是实际上矩阵模型的费曼规则这样做很复杂，带源的矩阵模型可以参见 [3]，矩阵模型的费曼规则其实是直接“看”出来的。我们首先看两点关联函数：

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi_j^i \phi_l^k \exp \left(-N \frac{1}{2} m^2 \sum_{p,q} \phi_q^p \phi_p^q \right) = \delta_l^i \delta_j^k \frac{1}{Nm^2} \quad (\text{B.52})$$

由于 Gauss 型矩阵模型类似于自由场，有类似的 Wick 定理，可以把多点关联函数转换为两点关联函数之间的组合⁹

定理 B.5.4 (矩阵模型的 Wick 定理)

$$\langle \Phi_j^i \cdots \rangle = \text{所有可能的缩并} \quad (\text{B.53})$$

比如：

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \Phi_n^m \Phi_t^h \rangle = \overline{\Phi}_j^i \overline{\Phi}_l^k \overline{\Phi}_n^m \overline{\Phi}_t^h + \overline{\Phi}_j^i \overline{\Phi}_l^k \overline{\Phi}_n^m \overline{\Phi}_t^h + \overline{\Phi}_j^i \overline{\Phi}_l^k \overline{\Phi}_n^m \overline{\Phi}_t^h \quad (\text{B.54})$$

这里 $\overline{\Phi}\Phi$ 的意思是 $\langle \Phi\Phi \rangle$ 。这也暗示了所有的 n 为奇数的关联函数都得到 0，这从积分的对称性也能看出来。

这个定理证明起来并不复杂，看些 N 比较小的例子就能相信他的正确性了。我们再来看一下 G_j^i 的展开式里面有什么，首先注意到每项都可以提出来一个 δ_j^i ，其次是 $1/z$ 可以理解为传播子，然后是 Φ 的关联函数，利用前面的 Wick 定理得知其可以看作是一堆两两配对的组合，为了更好地体现具体是哪两个 Φ 场配对，我们可以引入所谓 double line 记号：

⁹笑，前面几节都在用路径积分的方法算东西，现在回到正则量子化的数学工具反而更舒服。

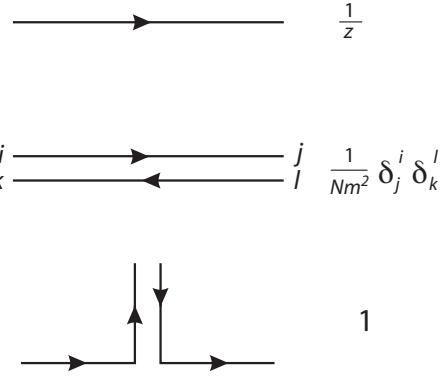
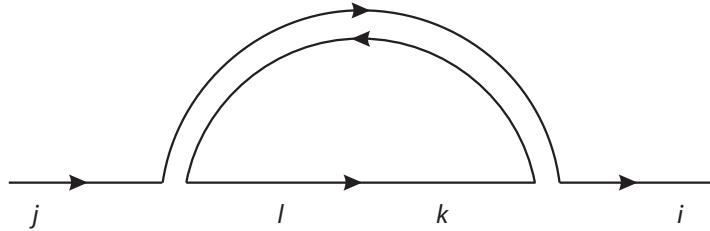


图 B.6: 矩阵模型的费曼图

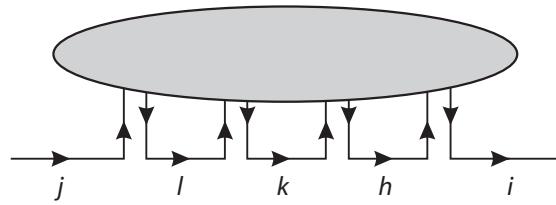
上图中第一个是标记两个矩阵配对的，带来一个传播子，在 QCD 里面这实际上对应胶子传播子，而且注意到两个箭头相反，都是下指标指向右指标。第二个在 QCD 里面可以理解为夸克传播子¹⁰，毕竟规范场才是带两个指标的矩阵场（因为和生成元结合），夸克场都只带一个指标。实操一下你就懂了。

例 B.5.5 比如 $\frac{1}{z^3} \langle \Phi_k^i \Phi_j^k \rangle$ 可以用下面的图表示为：



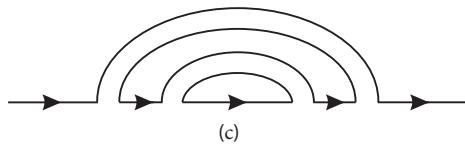
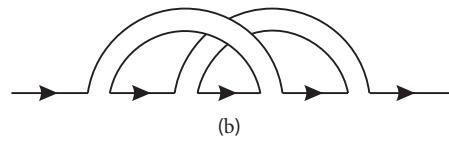
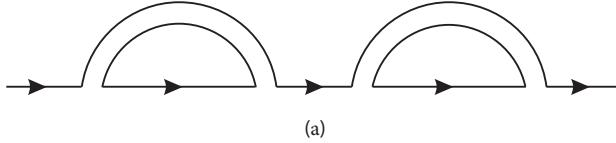
这里一个圈代表指标取相同进行求和并缩并，所以这里 $k = l$ 。由于要进行求和，所以理论里面的一个圈就会带来一个 N ，注意，这里说的圈是选取某个单线，沿着箭头走，能回到原点的单线个数。然后由于两边各有一个单外线，所以给一个因子 δ_j^i ，再看双线有一条，所以给一个双线传播子 $\frac{1}{Nm^2}$ ，最后再看水平方向有几根单线，这里显然有三段单线，所以给传播子 $1/z^3$ 。最终结果为 δ_j^i/m^2 。

再看一个复杂点的例子 $\frac{1}{z^5} \langle \Phi^4 \rangle$ ，首先先画四根柱子：



然后再考虑怎么连柱子，也就相当于在考虑如何用 Wick 定理，找不同的缩并方式，事实证明有下面三种：

¹⁰ 这一个指标在图上我们没有画出来，也就是说原则上你可以让第二幅图作用分别带指标 i, j ，然后传播子变为 $1/z\delta_j^i$ ，实际上所有的 QFT 里面的费曼图都可以这么做，把指标完全写出来，只是由于目前没有哪个理论会让某个粒子传播之后自动变成另一个“味”的粒子，所以都会有个 δ_j^i 。

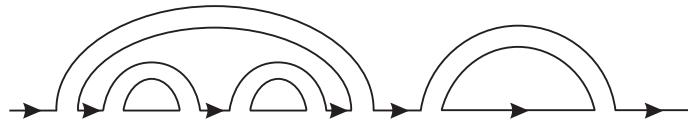


把这三种加起来就得到总的值，注意，(a) 和 (c) 两个图是平面图，它们给出的项是高于 $\mathcal{O}(1/N)$ 的，因为含有额外的圈，而 (b) 这种画在平面上一定有交叉的图，圈为 0，给出的项会在 $N \rightarrow \infty$ 时被压低！这是大 N 极限理论的普遍性质，只需要考虑那些平面图！

定理 B.5.6 (魏格纳半圆定律) 在 $N \rightarrow \infty$ 时，Gauss 型随机矩阵模型本征值 PDF 有如下简单形式：

$$\rho(E) = \frac{m^2}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{m^2} - E^2}, \quad E \in [-2/m, +2/m] \quad (\text{B.55})$$

证明 考虑一个典型的图：



显然它可以分解为两个更小的图，中间用一个 $1/z$ 传播子连起来，这些最小的不能再分的图，也就是所谓的单粒子不可约图都是用嵌套一个双线或者重复相连多个图得到的。所谓单粒子不可约，就是不能通过剪短一个传播子使得图变成非连通图。略去 δ_j^i ， $G(z)$ 就是所有图的叠加，可以用单粒子不可约图的求和表示为：

$$G(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \Sigma(z) \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \Sigma(z) \frac{1}{z} \Sigma(z) \frac{1}{z} + \dots = \frac{1}{z - S(z)} \quad (\text{B.56})$$

反过来，在 $G(z)$ 上面嵌套一个双线又得到所有的单粒子不可约图求和：

$$S(z) = \frac{1}{m^2} G(z) \quad (\text{B.57})$$

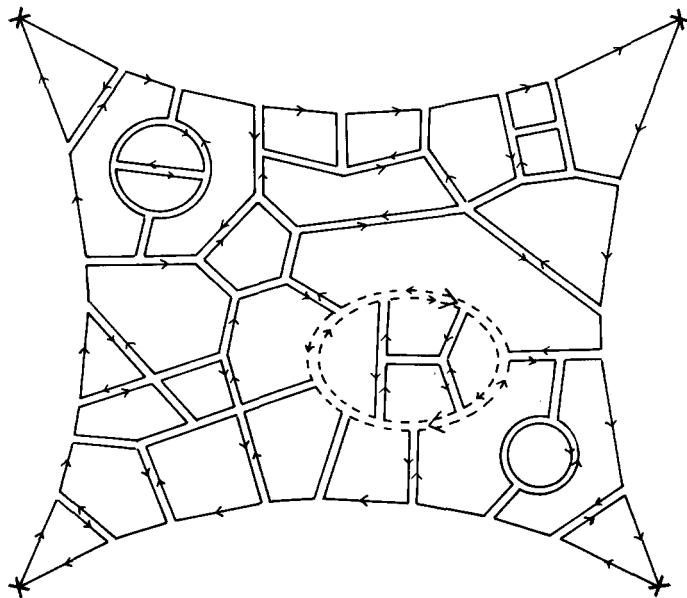
这两点可以用图形表示为：

$$\begin{aligned}
 G &= \text{---} + \Sigma \\
 &+ \Sigma \Sigma \\
 &+ \dots \\
 \Sigma &= G \Sigma
 \end{aligned}$$

联立方程求解得到：

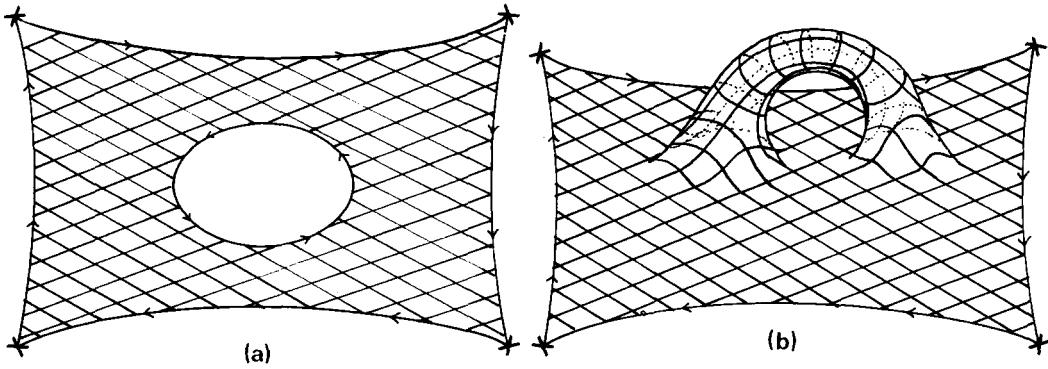
$$G(z) = \frac{m^2}{2}(z - \sqrt{z^2 - \frac{4}{m^2}}) \quad (\text{B.58}) \quad \square$$

B.5.5 戴森气体 Gauss 型随机矩阵模型还是较为简单，现在我们关注如果加入一个非 Gauss 的扰动项，大 N 极限会变成什么样子。还想用费曼图就难搞了，微扰项会加入一些顶点，这些图会变得难画（即使是平面图），而且顶点的费曼规则是 non-trivial 的，比如你将面对下面的图：¹¹



下面的拓扑结构：

¹¹这两个图都来自 t'Hooft 发现大 N 极限的原始论文 [9]



所以还想用费曼图微扰分析是不可能了，好在统计力学救了我们。现在回到B.47，这个公式将理论中冗余的自由度都提前去掉了，所以非常适合进行分析，随机取一个矩阵，也转化为了随机取一组数，这组数和矩阵的关系在于这组数实际上是矩阵的本征值。把雅可比矩阵形式代入得到：

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_i d\lambda_i \sum_j (\mathcal{O}(\lambda_j)) \exp [-NH(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)] \quad (\text{B.59})$$

其中：

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (\text{B.60})$$

如果我们把 N 看成是 β ，把 H 理解为哈密顿量，这不就是再说有 N 个粒子，坐标为 λ_i 处在 $V(\lambda)$ 的势阱里面，而且相互之间有个对数形式的相互作用势能的气体模型么？我们称为 Dyson 气体，而 $N \rightarrow \infty$ 就是在考虑这个模型的低温展开。

利用统计力学里面的鞍点近似法（王竹溪先生也叫最速下降法），只有在下列方程满足的时候的 $\{\lambda_i\}$ 才对均值有贡献：

$$V'(\lambda_i) = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (\text{B.61})$$

N 有限的时候 λ 还是离散取值的，但可以预想到 $N \rightarrow \infty$ 之后 λ 将会在实轴上一段连续的范围内取值，我们称为 A 。上式就可以写成积分形式：

$$V'(\lambda) = 2\mathcal{P} \int d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} \quad (\text{B.62})$$

\mathcal{P} 表示取主值部分，对应 $\sum_{i \neq j}$ 。由于现在本征值连续取值，所以最好用一个 PDF 来表示， $\rho(\mu)d\mu$ 的意思是本征值落在 $\mu \sim \mu + d\mu$ 之间的个数与总个数 N 之比。所以只有当 PDF 是上面的构型时才会对 $\text{Tr}(\mathcal{O}(\Phi))$ 的均值有贡献。原先B.59的积分你肯定是不会积的，但现在只要把这组特殊的 λ 带进去就好了：

$$\frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{N} \sum \mathcal{O}(\lambda_i) = \int d\lambda \rho(\lambda) \mathcal{O}(\lambda) \quad (\text{B.63})$$

这里加入 $1/N$ 因子是为了保证 $\rho(\lambda)$ 的解释不变，另外注意到 Z 和 \exp 因子抵消了，这是因为配分函数的归一化作用，把可观测量取成单位 1 就能看出来。

现在的核心目的就是看能不能把 $\rho(\lambda)$ 写出来，也就是找到 Wigner 定理的推广。首先本征值 λ 的分布范围 A 是一个有限的范围，不然B.62在 $\lambda \rightarrow \infty$ 的渐近行为为 $1/\lambda$ ，而左边至少有个 Gauss 项求导得到的线性项 λ ，两边不可能相等。类似前面 Gauss 型引入的 $G(z)$ ，这里我们可以引入除了在实轴 A

上有一条割线，其余地方解析的函数：

$$G(z) = \int_A d\mu \frac{\rho(\mu)}{z - \mu} \quad (\text{B.64})$$

类似有：

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} G(\lambda + i\epsilon) \quad (\text{B.65})$$

而 B.62 等价于：

$$\operatorname{Re} G(\lambda + i\epsilon) = \frac{1}{2} V'(\lambda), \quad \lambda \in A \quad (\text{B.66})$$

数学上可以说明，上面说的所有这些条件，加上渐近行为和解析性：

$$z \rightarrow \infty, \quad G(z) \sim \frac{1}{z} \quad (\text{B.67})$$

可以完全确定 $G(z)$ ，从而完全确定 $\rho(\lambda)$ 。

例 B.5.7 以 $V(\lambda) = \frac{1}{2}m^2\lambda^2 + g\lambda^4$ 为例，其导数是一个奇函数，直接得出 $\rho(\lambda)$ 是一个偶函数，对应的 A 也就应该关于原点对称为 $[-a, a]$ 。设试探解：

$$G(z) = \frac{1}{2}V'(z) - P(z)\sqrt{z^2 - a^2} \quad (\text{B.68})$$

其中 $P(z)$ 是一个多项式，

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi}P(\lambda)\sqrt{a^2 - \lambda^2} \quad (\text{B.69})$$

由于 ρ 是偶函数，所以 $P(z)$ 只含偶次幂，另外由于 $z \rightarrow \infty$ ， $G(z) \sim \frac{1}{z}$ ， $P(z)$ 最多包含 z^2 ，故 $P(z) = c + dz^2$ ，把 $G(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 处做洛朗展开，要求只剩下 $\mathcal{O}(1/z)$ 的项，最终得到方程：

$$\begin{cases} -d + 2g = 0 \\ -2c + a^2d + m^2 = 0 \\ 4a^2c + a^4d = 0 \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

联立求解得到：¹²

$$P(z) = \frac{1}{2}m^2 + 2gz^2, \quad a \rightarrow 0 \quad (\text{B.71})$$

这就相当于推广了 Wigner 定理。

¹²有三个解，但注意到 $a \in \mathbb{R}$

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^2$	\mathbb{Z}_2^2
S^3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^2$	\mathbb{Z}_2^2
S^4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2^2	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^3	$\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^3	$\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{60}	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2^3
S^7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0	\mathbb{Z}_2	Z_{120}	\mathbb{Z}_2^3
S^8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$	

表 B.1: 高维球面的高维基本群

B.6 复叠空间

本节是拓扑学补遗，基本是本科数学系拓扑学课程最后介绍的内容，我觉得很美妙。

B.6.1 Erlangen 纲领 Erlangen 纲领试图将所有的几何学用统一的框架去描述。

B.7 纤维丛和规范场

本节的内容主要是建立起来物理人和数学人看待同一件事情的术语表。规范场论有非常深刻的数学结构，但并不是学了它你就能对物理理解的多透彻，或者在场论计算方面有极大的提升。这部分内容类似于微分几何辛几何对拉格朗日力学和哈密顿力学的帮助一样，只是一套更加优美的看待问题的方式。

B.8 $SO(N)$ 旋量表示

提到 $SU(N)$ 表示，脑袋里想的估计就是 $SU(2)$ 的做法，去找那些上升下降算符，或者说 Cartan 子代数来得到最高权表示。而提起 $SO(N)$ 表示，一般都会想到张量表示，就是根据多个基本表示做张量积，但是这个表示空间一般是可约的，所以要把张量分解为对称无迹张量、反对称张量和单位张量，通过 Young 图详细分析张量指标的对称性就可以得到不可约表示¹³。上面的这些表示都是忠实表示，但是在研究 $SO(3)$ 表示的时候还有一条路子，就是去研究 $SU(2)$ 群的表示， $SU(2)$ 群的表示空间一般来说要比 $SO(3)$ 本身大，所以才有半整数是双值表示，整数是单值表示留下来。这种方法如果进一步扩展到 $SO(N)$ 群，关注那些双值表示，这就是我们本节要讲的旋量表示，它实际上是 $SO(N)$ 群的双覆盖群的表示。

¹³ $SO(3)$ 群的不等价不可约表示就是那些全对称无迹张量，所以由张量的 rank 来标记这些表示。物理上也确实非常关心这类由 rank-J 无迹全对称张量构成的表示，即 spin-J 表示，比如高维共形场论的 $s \neq 0$ 的初级场所处的表示，但是 $SO(N > 3)$ ，这些表示并不是所有的不等价不可约表示。

参 考 文 献

- [1] Howard Baer and Xerxes Tata. *Weak scale supersymmetry: from superfields to scattering events*. OCLC: ocm62307700. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2006. 537 pp. ISBN: 978-0-521-85786-4 (引用于 p. 17).
- [2] Martin Bauer and Tilman Plehn. *Yet another introduction to dark matter: the particle physics approach*. Lecture notes in physics volume 959. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 180 pp. ISBN: 978-3-030-16234-4 978-3-030-16233-7 (引用于 p. 17).
- [3] Edouard Brézin and Shinobu Hikami. *Random Matrix Theory with an External Source*. Vol. 19. SpringerBriefs in Mathematical Physics. Springer, 2016. ISBN: 978-981-10-3315-5, 978-981-10-3316-2. DOI: [10.1007/978-981-10-3316-2](https://doi.org/10.1007/978-981-10-3316-2) (引用于 p. 54).
- [4] Ming-Cheng Chen et al. “Ruling Out Real-Valued Standard Formalism of Quantum Theory”. 刊于: *Phys. Rev. Lett.* 128.4 (Jan. 24, 2022). 40 citations (INSPIRE 2024/4/28) 39 citations w/o self (INSPIRE 2024/4/28), p. 040403. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: [10.1103/PhysRevLett.128.040403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.040403). arXiv: [2103.08123\[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/2103.08123). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.040403> (visited on 04/27/2024) (引用于 p. 25).
- [5] Sidney Coleman and Jeffrey Mandula. “All Possible Symmetries of the S Matrix”. 刊于: *Phys. Rev.* 159 (5 1967), pp. 1251–1256. DOI: [10.1103/PhysRev.159.1251](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.1251). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.1251> (引用于 p. 18).
- [6] Joshua A. Frieman et al. “Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration”. 刊于: *AIP Conf. Proc.* GRADUATE SCHOOL IN ASTRONOMY: XII Special Courses at the National Observatory of Rio de Janeiro. Vol. 1057. Rio de Janeiro (Brazil): AIP, Oct. 6, 2008, pp. 87–124. DOI: [10.1063/1.3000000](https://doi.org/10.1063/1.3000000). URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1057/1/87-124/830368> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 17).
- [7] François Gelis. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, July 2019. ISBN: 978-1-108-48090-1, 978-1-108-57590-4 (引用于 p. 11).
- [8] Rudolf Haag, Jan T. Lopuszanski, and Martin Sohnius. “All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix”. 刊于: *Nucl. Phys. B* 88 (1975), p. 257. DOI: [10.1016/0550-3213\(75\)90279-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90279-5) (引用于 p. 18).

- [9] Gerard 't Hooft. “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions”. 刊于: *Nucl. Phys. B* 72 (1974). 编者为 J. C. Taylor, p. 461. DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90154-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90154-0) (引用于 p. 57).
- [10] Anson Hook. “TASI Lectures on the Strong CP Problem and Axions”. 刊于: *PoS TASI2018* (2019), p. 004. arXiv: [1812.02669 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1812.02669) (引用于 p. 17).
- [11] *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley, 1987. ISBN: 9783527618460 (引用于 p. 17).
- [12] V. G. Kac. “Lie Superalgebras”. 刊于: *Adv. Math.* 26 (1977), pp. 8–96. DOI: [10.1016/0001-8708\(77\)90017-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90017-2) (引用于 p. 46).
- [13] Ricardo Karam. “Why are complex numbers needed in quantum mechanics? Some answers for the introductory level”. 刊于: *American Journal of Physics* 88.1 (Jan. 1, 2020), pp. 39–45. ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: [10.1119/10.0000258](https://doi.org/10.1119/10.0000258). URL: <https://pubs.aip.org/ajp/article-88/1/39/1058093/Why-are-complex-numbers-needed-in-quantum> (visited on 04/26/2024) (引用于 p. 25).
- [14] Jürgen Mayer, Khaled Khairy, and Jonathon Howard. “Drawing an elephant with four complex parameters”. 刊于: *American Journal of Physics* 78.6 (June 2010), pp. 648–649. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.3254017](https://doi.org/10.1119/1.3254017). eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/78/6/648/10082021/648_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1119/1.3254017> (引用于 p. 17).
- [15] C. D. Palmer and M. E. Carrington. “A General expression for symmetry factors of Feynman diagrams”. 刊于: *Can. J. Phys.* 80 (2002), pp. 847–854. DOI: [10.1139/p02-006](https://doi.org/10.1139/p02-006). arXiv: [hep-th/0108088](https://arxiv.org/abs/hep-th/0108088) (引用于 p. 49).
- [16] Marc-Olivier Renou et al. “Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified”. 刊于: *Nature* 600.7890 (Dec. 15, 2021). 101 citations (INSPIRE 2024/4/26) 81 citations w/o self (INSPIRE 2024/4/26), pp. 625–629. ISSN: 0028-0836, 1476-4687. DOI: [10.1038/s41586-021-04160-4](https://doi.org/10.1038/s41586-021-04160-4). arXiv: [2101.10873\[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/2101.10873). URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04160-4> (visited on 04/26/2024) (引用于 p. 25).
- [17] Edward Witten. “Supersymmetry and Morse theory”. 刊于: *J. Diff. Geom.* 17.4 (1982), pp. 661–692 (引用于 p. 23).
- [18] Bing-Lin Young. “A survey of dark matter and related topics in cosmology”. 刊于: *Frontiers of Physics* 12.2 (Oct. 13, 2016), p. 121201. ISSN: 2095-0462, 2095-0470. DOI: [10.1007/s11467-016-0583-4](https://doi.org/10.1007/s11467-016-0583-4). URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11467-016-0583-4> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 17).
- [19] 韩其智 孙洪洲. “李超代数综述”. 刊于: 物理学进展 01 (1983), pp. 81–125. ISSN: 1000-0542 (引用于 p. 46).
- [20] 孙洪洲, 韩其智. 李代数李超代数及在物理中的应用. 北京大学出版社, 1999. ISBN: 9787301041291 (引用于 pp. 18, 46).