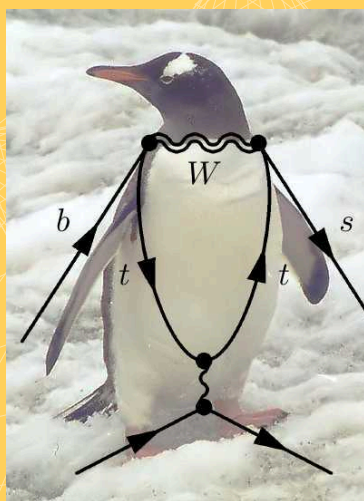


Bufan Zheng

Metaphysics

I don't know which Edition



Revised and modernized edition by

L^AT_EX

网络版
从未修订，将来也不会

编译日期: 2024-03-23

本书已由 Dinner 教育出版社发行
(2004 年 4 月第 10 版)

ISBN: 4210xxxxxxxxxxxxxxx

three generations of matter (fermions)						three generations of antimatter (antifermions)						interactions / forces (bosons)									
I			II			III			I			II			III						
mass charge spin	$\approx 2.2 \text{ MeV}$ $+\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$ $+\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 173 \text{ GeV}$ $+\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 2.2 \text{ MeV}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 173 \text{ GeV}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 0 1	$\approx 125 \text{ GeV}$ 0 0													
	u up	c charm	t top	\bar{u} antiup	\bar{c} anticharm	\bar{t} antitop	g gluon	H Higgs													
	$\approx 4.7 \text{ MeV}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 96 \text{ MeV}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 4.7 \text{ MeV}$ $+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 96 \text{ MeV}$ $+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$ $+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 0 1	γ photon													
QUARKS	d down	s strange	b bottom	\bar{d} antidown	\bar{s} antistrange	\bar{b} antibottom															
	$\approx 0.511 \text{ MeV}$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 106 \text{ MeV}$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 0.511 \text{ MeV}$ +1 $\frac{1}{2}$	$\approx 106 \text{ MeV}$ +1 $\frac{1}{2}$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$ +1 $\frac{1}{2}$	$\approx 91.2 \text{ GeV}$ 0 1														
	e^- electron	μ^- muon	τ^- tau	e^+ electron	μ^+ muon	τ^+ tau	Z^0 Z boson														
LEPTONS	$< 1.0 \text{ eV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 0.17 \text{ eV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 18.2 \text{ MeV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 1.0 \text{ eV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 0.17 \text{ eV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 18.2 \text{ MeV}$ 0 $\frac{1}{2}$	$\approx 80.4 \text{ GeV}$ -1 1	$\approx 80.4 \text{ GeV}$ +1 1													
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	$\bar{\nu}_e$ electron antineutrino	$\bar{\nu}_\mu$ muon antineutrino	$\bar{\nu}_\tau$ tau antineutrino	W^- W boson	W^+ W boson													
													SCALAR BOSONS								
												GAUGE BOSONS VECTOR BOSONS									

郑卜凡

个人 Github 主页: [WHUZBF](https://github.com/WHUZBF)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议。

目录

导言	1
第一部分 物理	3
第一章 流体/引力对偶	5
第二章 量子纠缠与散射振幅	7
第三章 黑洞	9
第四章 AdS/CFT 对偶	11
第五章 超对称	13
5.1 标准模型	13
5.1.1 标准模型拉氏量	13
5.1.2 标准模型的局限	15
5.2 Wess-Zumino 模型	16
第二部分 数学	17
第六章 p-adic	19
第三部分 附录	21
附录 A 物理疑难杂症	23
附录 B 数学疑难杂症	25
B.1 直积 · 张量积 · 直和	25

B.2 Grassmann 几何	28
参考文献	29

导言

简要说明

旨趣 有趣的文章和科研课题都在这里了，算是一个新坑，记录一下阅读过的有趣的一些东西，和一些漫无边际的 idea，最后附录存放一些微妙的问题。

致谢

提示 我是真的会谢

第一部分

物理

第一章

流体/引力对偶

第二章

量子纠缠与散射振幅

第三章

黑洞

第四章

AdS/CFT 对偶

第五章

超对称

5.1 标准模型

这本质上是唯象学的内容，但是超对称的提出很大程度上就是为了寻找超出标准模型的物理。标准模型从群论上看由三个规范群描述：

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.1)$$

传递相互作用的规范玻色子在其自伴表示下，而参与构成物质的费米子处于其基本表示下，其实这一点就很不自然，我们是从为了解释实验数据而要求费米子处于基本表示，原则上来说理论允许费米子处于任意其他表示之中。

规范玻色子本身是没有质量的，但是 W^\pm/Z^0 玻色子有质量，这可以通过引入一个复标量场，Higgs，通过 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ 的对称性自发破缺带来质量项，还剩下一个实标量场自由度和矢量场自由度没有破缺，它们构成 Higgs 粒子和光子。其它费米子质量的起源也可以通过和 Higgs 引入 Yukawa 相互作用项耦合，自发破缺后带来质量项。注意 QCD 中费米子 quark 的质量项是可以直接通过在 \mathcal{L}_{QCD} 中添加正定的质量项得到，但是由于电弱规范理论是一个手征理论（注意 $SU(2)_L$ 下标 L ），所以直接添加质量项会破缺手征性，质量项只能通过 Higgs 机制得到，详细的推导可见[余钊焕老师的讲义](#)。也正是因为有这么个更大的群到子群的对称性自发破缺，所以电弱理论已经统一，但是 QCD 还单独落在外面，大统一理论（GUT）的目标就是找到更大的群如 $SU(5)$ ，让它自发破缺到 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ ，自然得到三种基本相互作用。

5.1.1 标准模型拉氏量 我们先给出一份网上流传甚广的“物理学最复杂公式”，也就是标准模型的 Lagrangian，首先是 QCD 部分，动力学为：¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad q = u, d, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8 \\ &= \sum_q [\bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q + g_s G_\mu^a \bar{q}\gamma^\mu t^a q] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\nu G^{a\mu}) - (\partial_\mu G_\nu^a)(\partial^\mu G^{a\nu})] \\ &\quad - g_s f^{abc}(\partial_\mu G_\nu^a)G^{b\mu}G^{c\nu} - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}G_\mu^b G_\nu^c G^{d\mu}G^{e\nu}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹选取规定

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a, \quad G^{a\mu\nu} \equiv \partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu} + g_s f^{abc} G^{b\mu} G^{c\nu}$$

然后需要引入 FP 鬼场量子化方法固定规范，还要加入两项：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (5.3)$$

和鬼场：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD,FP}} = -\bar{\eta}_g^a \left(g_s \frac{\delta G^a}{\delta \alpha^c} \right) \eta_g^c = -\bar{\eta}_g^a (\delta^{ac} \partial^2 + g_s f^{abc} \partial^\mu G_\mu^b) \eta_g^c \rightarrow -\bar{\eta}_g^a \delta^{ab} \partial^2 \eta_g^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \eta_g^a) G_\mu^b \eta_g^c. \quad (5.4)$$

这里鬼场是 Grassmannian。电弱规范理论就麻烦很多，自发破缺后得到真正和粒子对应的场要由自发破缺前的场通过适当的线性组合得到，这里只给最终结论。首先是希格斯机制带来的规范玻色子质量项

$$\mathcal{L}_{\text{GBM}} = m_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \quad (5.5)$$

然后是 Yukawa 耦合带来的 Higgs 粒子和费米子质量项：

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i \quad (5.6)$$

这里 i 隐含对三代 quark 求和。费米子和规范场之间通过协变导数项引入相互作用，或者说等价于和一堆 $U(1)$ 的流耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + Z_\mu J_Z^\mu + W_\mu^+ J_W^{+,\mu} + W_\mu^- J_W^{-,\mu} \quad (5.7)$$

其中：

$$\begin{aligned} J_{\text{EM}}^\mu &\equiv \sum_f Q_f e \bar{f} \gamma^\mu f \\ J_Z^\mu &\equiv \frac{g}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f = \frac{g}{c_W} \sum_f (g_L^f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma^\mu f_R) \\ J_W^{+,\mu} &\equiv \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL}), \quad J_W^{-,\mu} \equiv (J_W^{+,\mu})^\dagger = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_{jL} V_{ji}^\dagger \gamma^\mu u_{iL} + \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

这里 f 表示任意的费米子， ℓ 表示轻子， u, d 表示夸克， ν 是中微子。 $SU(2) \times U(1)$ 的规范场自相互作用可以由动能项：

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

来导出，注意这里的 W^a, B 都是未破缺之前的场，破缺后的场需要线性组合得到 $W^\pm/Z^0, A^\mu$ ，经过贼复杂的计算后得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EWG}} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu Z_\nu)(\partial^\nu Z^\mu) - (\partial_\mu Z_\nu)(\partial^\mu Z^\nu)] \\ &+ (\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\nu W^{-\mu}) - (\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\mu W^{-\nu}) + \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{+\mu} W_\nu^- W^{-\nu} - W_\mu^+ W^{+\nu} W_\nu^- W^{-\mu}) \\ &+ ie [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} A^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} A^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) A^\mu \\ &+ W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu A_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu A_\nu)] \\ &+ igc_W [(\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\mu} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+) W^{-\nu} Z^\mu - W^{+\mu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\nu + W^{+\nu} (\partial_\mu W_\nu^-) Z^\mu \\ &+ W^{+\mu} W^{-\nu} (\partial_\mu Z_\nu) - W^{+\nu} W^{-\mu} (\partial_\mu Z_\nu)] \\ &+ e^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu A^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu A^\nu) + g^2 c_W^2 (W_\mu^+ W^{-\nu} Z_\nu Z^\mu - W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu Z^\nu) \\ &+ egc_W (W_\mu^+ W^{-\nu} A_\nu Z^\mu + W_\mu^+ W^{-\nu} A^\mu Z_\nu - 2W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu Z^\nu) \end{aligned} \quad (5.10)$$

把前面讨论的这一堆拉氏量全部凑在一堆就是标准模型了！但实际计算上我们不会真的取考虑全部的标准模型，往往是对一部分模型积掉实验能标上更高能的自由度得到一个有效理论，比如 π 介子理论，但是也够难算的了。

5.1.2 标准模型的局限 虽然标准模型在解释实验现象上取得了巨大的成功，但是仍有非常多的问题亟待解决，关于唯象上新物理的寻找的更多内容可见书籍 [1] 的前两章。

参数过多 即使是标准模型本身，就需要用 19 个实验参数去描述，而实验参数越多意味着这个理论本身越想是一个没搞清楚内部结构的黑箱。况且冯诺依曼也说过：“四个参数画大象，五个参数鼻子动” [5]

没有引力 引力可以量子化，至少在平直时空背景下我们可以微扰地去做量子化。对于任何一个量子场论，都可以在有效场论的框架下写成 $\mathcal{L} = \sum_i c_i \mathcal{O}_i$ 的形式，这些 c_i 是需要计算散射振幅后通过实验拟合得到的，或者说理论的自由度。在低能标下绝大部分的自由度都是看不到的，而实验能标越高，我们也愈发要往里面加新的参数，做新的实验，对于 QED, QCD, 在 Λ_{QCD} 能标以下做实验确定的参数可以通过重整化群流方法得到高能标下的其它自由度，一直推到紫外也可以，意味着我们不用每个能标都做一次实验去确定参数，只用在特定能标以下确定有限多个参数就行了，这样的理论是紫外完备的，也就是可重整的。但是引力理论并不是可重整的，也就是说每当升高能标，理论中就会不断出现新的自由度，而且还不能用前面的实验来确定，只能做新的实验，这样每个能标我们都要确定一次参数来确定这个能标下的量子引力理论。而且引力量子化之后的引力子目前实验上也没有探测到。当然，目前来说在特定能标下我们还是能半经典地去量子化引力，并且去计算引力子的散射，注意，不可重整化不是意味着圈图的计算我们无法处理无穷大，我们仍旧可以用正规化重整化的套路去掩盖无穷大并且与实验观测拟合，只是在 Wilson 有效场论的框架下引力的量子理论目前不完备，必须不断地去做实验，每个能标有一套自己的量子引力理论，不能用重整化群流联系。

没有暗物质 即使你去考虑 Einstein 引力本身，你也缺了点东西，天文观测有充足的表明暗物质存在，特别是冷暗物质。但标准模型中没有任何一个粒子对应暗物质。目前暗物质从粒子物理角度的解释就是去造各种新奇的粒子。见综述 [3, 6, 2]

中微子震荡 从前面的 5.6 可以看到即便是引入对称性破缺，中微子仍然是没有质量的。这在很长的一段时间内被认为是完全正确的，知道中微子震荡的发现，暗示着中微子有质量，而且三代中微子质量顺序以及中微子是 Majorana 还是 Dirac 质量项目前都有待研究，而且直接往标准模型里面添加中微子质量项又是非常不自然的。有关更多粒子物理历史方面的论述可见 *Griffiths* 的书籍 [4]

.....

目前的实验表明 TeV 能标上必然有新物理，但是我们完全不清楚新物理以怎样的方式出现，超对称就在这样一个历史背景下产生了。不过后面会看到，把超对称加入标准模型后问题会变得更糟。

5.2 Wess-Zumino 模型

这只是一个玩具模型，可以认为是最简单的超对称实现，但是用玩具模型可以讲清楚很多物理，比如 QFT 里面一般上来就会讲 φ^4 理论。

第二部分

数学

第六章

p-adic

第三部分

附录

附录 A

物理疑难杂症

附录 B

数学疑难杂症

B.1 直积 · 张量积 · 直和

物理人在这些概念上往往非常模糊，胡乱使用，现在我们使用物理人的思想来区分下这几个概念。由于这几个概念的使用场景是在量子力学，所以我们在向量空间上讨论这三个运算。

直积和张量积是紧密相连的，这两个概念一起介绍。直积从定义上讲就是给两个集合，然后把两个集合简单的并在一起构成一个更大的集合， $A \times B$ ，仅此而已。但我们一般会在上面进一步定义内积和加法数乘使得其成为一个线性空间：

$$\text{加法 } (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\text{数乘 } \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\text{内积 } (a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$$

这样构成的空间称为 \mathbb{F} 上的自由向量空间：

$$\mathcal{F}(V, W; \mathbb{F}) \equiv \left\{ \sum_{(v, w) \in V \times W} k_{v, w}(v, w), k_{v, w} \in \mathbb{F} \right\} \quad (\text{B.1})$$

这个向量空间非常大，就是把每个 $(u, v) \in V \times W$ 都拿来作为基底张成的线性空间。张量积的初衷是去找 $V \times W \rightarrow Z$ 上的双线性函数 f ，双线性函数一定满足下面的条件：

$$\begin{aligned} (k_1 v_1 + k_2 v_2, w) &\sim k_1(v_1, w) + k_2(v_2, w) \\ (v, k_1 w_1 + k_2 w_2) &\sim k_1(v, w_1) + k_2(v, w_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

\sim 表示它们作用 f 得到的值一样。这么来看原先的那个 $V \times W$ 还是太大了，无法自然地蕴含上面的等价关系，所以我们干脆把上面的两条等价关系给模掉，得到一个更合适的线性空间 Y ：

$$Y \equiv \mathcal{F}(V, W) / \sim \quad (\text{B.3})$$

数学人更喜欢用的不是上面两条，而是和它们等价的下面四条：

$$\begin{aligned}
 (v_1 + v_2, w) &\sim (v_1, w) + (v_2, w) \\
 (v, w_1 + w_2) &\sim (v, w_1) + (v, w_2) \\
 (kv, w) &\sim k(v, w) \\
 (v, kw) &\sim k(v, w)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

从 $V \times W$ 到 Y 的线性映射我们记为 h ，则 f 就自然诱导出来了 $Y \rightarrow Z$ 的线性映射 g ，而且 Y 也小多了，我们也没必要去强调 g 的双线性性质，现在 Y 自己就蕴含了线性映射的双线性性。我们把这个新的空间叫做 $V \otimes W$ ，即张量积空间。物理上我们把里面的元素写为 $|\psi\rangle|\phi\rangle$ ，而且前面的四条性质就蕴含在我们物理上对张量积的普遍共识，物理上对于张量积的应用一般是体系有多个自由度，比如多个粒子或者一个粒子但是有自旋这种自由度，那么整个希尔伯特空间就看作是每个自由度的希尔伯特空间的张量积。而且在每个自由度上的矢量加法满足 \otimes 的分配律。

由于任何一个映射 f 都可以诱导出映射 g ，所以很多时候我们不会额外区分两者，事实上可以证明双线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W; Z)$ 和 $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ 是同构的。在物理上我们考虑的线性空间都是内积空间¹，根据里斯表示定理，每个向量空间中的元素都可以和其对偶空间中的元素通过内积双线性性建立一一对应，也即所谓 ket 和 bra 的概念。如果取：

$$(\langle\psi_1| \otimes \langle\phi_1|) \cdot (|\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{B.5}$$

那么很容易说明 $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$ 。当然，这一点的成立并不依赖于上面的内积选取²，只是量子力学里面都是这么取的。

上面的定义是构造性的，但数学上更喜欢的是泛性质的定义，直接用下面的交换图就好了：

定义 B.1.1 张量积空间是某个向量空间 Y 配以双线性映射 $h: V \times W \rightarrow Y$ ，使得对于任意双线性映射 $f: V \times W \rightarrow Z$ ，存在唯一的线性映射 $g: Y \rightarrow Z$ ，使 $f = g \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{h} & Y = V \otimes W \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! g \\
 & & Z
 \end{array}$$

上面交换图中虚线的意思是存在且唯一存在一个映射使得图标交换。

直和和直积在数学上真的不怎么区分，我先给出泛性质的定义你就知道它们之间的区别有多么微妙了。

定义 B.1.2 直积在数学上指的是**积范畴**，即对于范畴 \mathcal{C} 中的一族对象 $X_i (i \in I)$ ，若存在一个对象，通常记为 $\prod_{i \in I} X_i$ ，以及一族态射 $\pi_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 使得对任意对象 X 和一族态射 $f_j: X \rightarrow X_j$ ，都存在唯一的态射 $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ 使得对任意 $i \in I$ 都有 $\pi_i \circ f = f_i$ 那么对象 $\prod_{i \in I} X_i$ 连同态射族 $\{\pi_i: i \in I\}$ 称为对象族 $\{X_i: i \in I\}$ 的积 (product)。画出交换图如下：

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\
 & \searrow f_j & \downarrow \pi_j \\
 & & X_j
 \end{array}$$

¹尽管张量积的定义不需要内积，对偶空间也不需要，这里我们只看有内积的简单情况。

²毕竟它的定义就不需要内积，这里局限在内积空间上讨论感觉从物理直观上更容易说清楚，用严谨的 general 的数学反而迷糊。

定义 B.1.3 直和在数学上指的是**余积范畴** (coproduct)，交换图上的定义只需要把上面图的箭头全部反转就好了，文字定义不难相应写出：

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\exists! f} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_j & \uparrow \iota_j \\ & & X_j \end{array}$$

可见两者定义上差的只是一个投影 π ，一个是嵌入 ι_i 。

从范畴的角度看它们差的仅仅只是一个积一个是余积，把箭头反过来罢了！所以数学上真的不怎么区分，特别是对于线性空间范畴，这个定义真的就是等价的！从维数上也能看出这一点 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ，但是前面的张量积 $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mn}$ 。但是这里说的是外直和，后面还会讲到内直和。

回到物理一些的想法，翻阅喀兴林老师的高量课本，第一章就给出直和的三条性质：

数乘分配 $\lambda(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle) = \lambda|\psi\rangle \oplus \lambda|\phi\rangle$

加法 $|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle + |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle = (|\psi\rangle + |\psi'\rangle) \oplus (|\phi\rangle + |\phi'\rangle)$

内积 $(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle, |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle) = \langle\psi|\psi'\rangle + \langle\phi|\phi'\rangle$

这不和自由向量空间的定义一模一样么！所以在线性空间范畴上真看不出啥区别。我们再看**直和**和一般的**向量的和**有啥区别。注意我们定义主打的就是两个希尔伯特空间是互相分开的，互相不影响，我们在定义两个向量空间的外直和时，我们并不要求两个向量空间的元素之间有加法定义，而是定义直和来把多个自由度强行直接并起来。这其实有某种选择定则在里面，当我们把两个态加起来的时候，我们认为它们处于同一个线性空间，可以叠加得到混合态。但是你绝对不会把一个自旋为 0 和一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的态直接叠加起来，因为这意味着一个单粒子态一会儿是费米子，一会儿是玻色子，尽管理论上这种禁闭没有严格证明（见 Weinberg 场论第一卷相关部分），但是我们从实验上可以相信这种禁闭是存在的，而这个时候考虑总的体系希尔伯特空间，最好的方式就是用直和了，也就是直接直积并起来罢了。

量子力学里面更多的去讲直和是讲巨正则系综构造 Fock 空间。由于非相对论性的量子力学是个粒子数不变的体系，所以也存在上面与自旋类似的选择定则，也就是说你不会把两个粒子数不同的态直接加起来构造一个混合态，这是没有物理意义的。要用的时候就直接把他们看作是处于完全不同的希尔伯特空间，有自己的一套加法数乘规则，而且互不影响，最后再把它们通过直和直接并起来，构成一个系综，是一个混合态。

内直和就完全不一样了，内直和我们首先是有一个很大的向量空间，然后想去考虑他的分解，但是我们比较关注“正交分解”，也就是说希望把 V 分解为一系列子空间 V_1, V_2, \dots ，这些子空间互相除了零元素没有公共元素，但它们之间的元素是有子空间自然诱导的加法的。如果对于 V 中的任意一个元素 v ，都存在且唯一一组 (v_1, v_2, \dots) 使得 $v = \sum_i v_i$ ，则称 V 是 V_1, V_2, \dots 的（内）直和，也记为：

$$V = \bigoplus_{i=1} V_i \quad (\text{B.6})$$

在讨论群表示的时候涉及到群表示的分解，那个分解实际上就是在把群表示空间分解为一系列更小的空间的内直和，每个最小的不能再分的块就是不可约表示。在纯粹考虑矩阵理论的时候也会谈及张量积和直和的概念，矩阵的直和应该对应到内直和，而张量积就是前面讨论的张量积（把矩阵看成是线性算符， $V \otimes W$ 看成是 $(V^* \otimes W^*)^*$ ），只是把前面的理论用线性算符重写了一遍，并选取了一组基底写成矩阵形式。不少文献也把矩阵的张量积叫克罗内积。

B.2 Grassmann 几何

参考文献

- [1] Howard Baer and Xerxes Tata. *Weak scale supersymmetry: from superfields to scattering events*. OCLC: ocm62307700. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2006. 537 pp. ISBN: 978-0-521-85786-4 (引用于 p. 15).
- [2] Martin Bauer and Tilman Plehn. *Yet another introduction to dark matter: the particle physics approach*. Lecture notes in physics volume 959. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 180 pp. ISBN: 978-3-030-16234-4 978-3-030-16233-7 (引用于 p. 15).
- [3] Joshua A. Frieman et al. “Lectures on Dark Energy and Cosmic Acceleration”. 刊于: *AIP Conf. Proc.* GRADUATE SCHOOL IN ASTRONOMY: XII Special Courses at the National Observatory of Rio de Janeiro. Vol. 1057. Rio de Janeiro (Brazil): AIP, Oct. 6, 2008, pp. 87–124. DOI: [10.1063/1.3000000](https://doi.org/10.1063/1.3000000). URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1057/1/87-124/830368> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 15).
- [4] “Historical Introduction to the Elementary Particles”. 刊于: *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley, 1987. Chap. 1, pp. 11–53. ISBN: 9783527618460. DOI: <https://doi.org/10.1002/9783527618460.ch1>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9783527618460.ch1>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9783527618460.ch1> (引用于 p. 15).
- [5] Jürgen Mayer, Khaled Khairy, and Jonathon Howard. “Drawing an elephant with four complex parameters”. 刊于: *American Journal of Physics* 78.6 (June 2010), pp. 648–649. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.3254017](https://doi.org/10.1119/1.3254017). eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/78/6/648/10082021/648_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1119/1.3254017> (引用于 p. 15).
- [6] Bing-Lin Young. “A survey of dark matter and related topics in cosmology”. 刊于: *Frontiers of Physics* 12.2 (Oct. 13, 2016), p. 121201. ISSN: 2095-0462, 2095-0470. DOI: [10.1007/s11467-016-0583-4](https://doi.org/10.1007/s11467-016-0583-4). URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11467-016-0583-4> (visited on 02/29/2024) (引用于 p. 15).