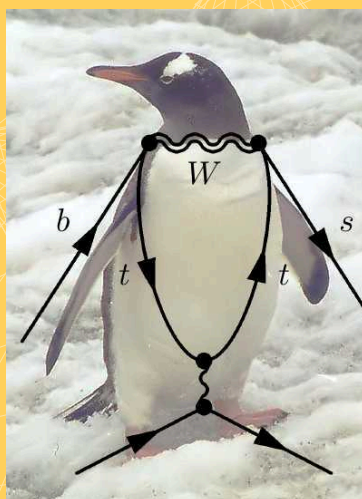


Bufan Zheng

Metaphysics

I don't know which Edition



Revised and modernized edition by



\LaTeX

网络版
从未修订，将来也不会

编译日期: 2024-03-20

本书已由 Dinner 教育出版社发行
(2004 年 4 月第 10 版)

ISBN: 4210xxxxxxxxxxxxxxx

three generations of matter (fermions)						three generations of antimatter (antifermions)			interactions / forces (bosons)				
I		II		III		I		II		III			
mass charge spin	$\approx 2.2 \text{ MeV}$ $+2/3$ $1/2$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$ $+2/3$ $1/2$	$\approx 173 \text{ GeV}$ $+2/3$ $1/2$	$\approx 2.2 \text{ MeV}$ $-2/3$ $1/2$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$ $-2/3$ $1/2$	$\approx 173 \text{ GeV}$ $-2/3$ $1/2$	0 0 1		0 0 0	$\approx 125 \text{ GeV}$ 0 0	SCALAR BOSONS		
	u up	c charm	t top	\bar{u} antiup	\bar{c} anticharm	\bar{t} antitop	g gluon	H Higgs					
QUARKS	$\approx 4.7 \text{ MeV}$ $-1/3$ $1/2$	$\approx 96 \text{ MeV}$ $-1/3$ $1/2$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$ $-1/3$ $1/2$	$\approx 4.7 \text{ MeV}$ $+1/3$ $1/2$	$\approx 96 \text{ MeV}$ $+1/3$ $1/2$	$\approx 4.2 \text{ GeV}$ $+1/3$ $1/2$	0 0 1		GAUGE BOSONS VECTOR BOSONS				
	d down	s strange	b bottom	\bar{d} antidown	\bar{s} antistrange	\bar{b} antibottom	γ photon						
LEPTONS	$\approx 0.511 \text{ MeV}$ -1 $1/2$	$\approx 106 \text{ MeV}$ -1 $1/2$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$ -1 $1/2$	$\approx 0.511 \text{ MeV}$ $+1$ $1/2$	$\approx 106 \text{ MeV}$ $+1$ $1/2$	$\approx 1.777 \text{ GeV}$ $+1$ $1/2$	0 0 1	$\approx 91.2 \text{ GeV}$ 0 1	Z^0 Z boson	SCALAR BOSONS			
	e^- electron	μ^- muon	τ^- tau	e^+ electron	μ^+ muon	τ^+ tau	Z^0 Z boson						
LEPTONS	$< 1.0 \text{ eV}$ 0 $1/2$	$< 0.17 \text{ eV}$ 0 $1/2$	$< 18.2 \text{ MeV}$ 0 $1/2$	$< 1.0 \text{ eV}$ 0 $1/2$	$< 0.17 \text{ eV}$ 0 $1/2$	$< 18.2 \text{ MeV}$ 0 $1/2$	$\approx 80.4 \text{ GeV}$ -1 1	$\approx 80.4 \text{ GeV}$ $+1$ 1	W^- W boson	W^+ W boson	SCALAR BOSONS		
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	$\bar{\nu}_e$ electron antineutrino	$\bar{\nu}_\mu$ muon antineutrino	$\bar{\nu}_\tau$ tau antineutrino	W^- W boson	W^+ W boson					

郑卜凡

个人 Github 主页: [WHUZBF](https://github.com/WHUZBF)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> 查看该许可协议。

目 录

导言	1
第一部分 物理	3
第一章 流体/引力对偶	5
第二章 量子纠缠与散射振幅	7
第二部分 数学	9
第三部分 附录	11
附录 A 物理疑难杂症	13
附录 B 数学疑难杂症	15
B.1 直积 · 张量积 · 直和	15

导言

简要说明

旨趣 有趣的文章和科研课题都在这里了，算是一个新坑，记录一下阅读过的有趣的一些东西，和一些漫无边际的 idea，最后附录存放一些微妙的问题。

致谢

提示 我是真的会谢

第一部分

物理

第一章

流体/引力对偶

第二章

量子纠缠与散射振幅

第二部分

数学

第三部分

附录

附录 A

物理疑难杂症

附录 B

数学疑难杂症

B.1 直积 · 张量积 · 直和

物理人在这些概念上往往非常模糊，胡乱使用，现在我们使用物理人的思想来区分下这几个概念。由于这几个概念的使用场景是在量子力学，所以我们在向量空间上讨论这三个运算。

直积和张量积是紧密相连的，这两个概念一起介绍。直积从定义上讲就是给两个集合，然后把两个集合简单的并在一起构成一个更大的集合， $A \times B$ ，仅此而已。但我们一般会在上面进一步定义内积和加法数乘使得其成为一个线性空间：

$$\text{加法 } (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\text{数乘 } \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\text{内积 } (a, b) \cdot (a', b') = a \cdot a' + b \cdot b'$$

这样构成的空间称为 \mathbb{F} 上的自由向量空间：

$$\mathcal{F}(V, W; \mathbb{F}) \equiv \left\{ \sum_{(v, w) \in V \times W} k_{v, w}(v, w), k_{v, w} \in \mathbb{F} \right\} \quad (\text{B.1})$$

这个向量空间非常大，就是把每个 $(u, v) \in V \times W$ 都拿来作为基底张成的线性空间。张量积的初衷是去找 $V \times W \rightarrow Z$ 上的双线性函数 f ，双线性函数一定满足下面的条件：

$$\begin{aligned} (k_1 v_1 + k_2 v_2, w) &\sim k_1(v_1, w) + k_2(v_2, w) \\ (v, k_1 w_1 + k_2 w_2) &\sim k_1(v, w_1) + k_2(v, w_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

\sim 表示它们作用 f 得到的值一样。这么来看原先的那个 $V \times W$ 还是太大了，无法自然地蕴含上面的等价关系，所以我们干脆把上面的两条等价关系给模掉，得到一个更合适的线性空间 Y ：

$$Y \equiv \mathcal{F}(V, W) / \sim \quad (\text{B.3})$$

数学人更喜欢用的不是上面两条，而是和它们等价的下面四条：

$$\begin{aligned}
 (v_1 + v_2, w) &\sim (v_1, w) + (v_2, w) \\
 (v, w_1 + w_2) &\sim (v, w_1) + (v, w_2) \\
 (kv, w) &\sim k(v, w) \\
 (v, kw) &\sim k(v, w)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

从 $V \times W$ 到 Y 的线性映射我们记为 h ，则 f 就自然诱导出来了 $Y \rightarrow Z$ 的线性映射 g ，而且 Y 也小多了，我们也没必要去强调 g 的双线性性质，现在 Y 自己就蕴含了线性映射的双线性性。我们把这个新的空间叫做 $V \otimes W$ ，即张量积空间。物理上我们把里面的元素写为 $|\psi\rangle|\phi\rangle$ ，而且前面的四条性质就蕴含在我们物理上对张量积的普遍共识，物理上对于张量积的应用一般是体系有多个自由度，比如多个粒子或者一个粒子但是有自旋这种自由度，那么整个希尔伯特空间就看作是每个自由度的希尔伯特空间的张量积。而且在每个自由度上的矢量加法满足 \otimes 的分配律。

由于任何一个映射 f 都可以诱导出映射 g ，所以很多时候我们不会额外区分两者，事实上可以证明双线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W; Z)$ 和 $\mathcal{L}(V \otimes W; Z)$ 是同构的。在物理上我们考虑的线性空间都是内积空间¹，根据里斯表示定理，每个向量空间中的元素都可以和其对偶空间中的元素通过内积双线性性建立一一对应，也即所谓 ket 和 bra 的概念。如果取：

$$(\langle\psi_1| \otimes \langle\phi_1|) \cdot (|\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{B.5}$$

那么很容易说明 $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$ 。当然，这一点的成立并不依赖于上面的内积选取²，只是量子力学里面都是这么取的。

上面的定义是构造性的，但数学上更喜欢的是泛性质的定义，直接用下面的交换图就好了：

定义 B.1.1 张量积空间是某个向量空间 Y 配以双线性映射 $h: V \times W \rightarrow Y$ ，使得对于任意双线性映射 $f: V \times W \rightarrow Z$ ，存在唯一的线性映射 $g: Y \rightarrow Z$ ，使 $f = g \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{h} & Y = V \otimes W \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! g \\
 & & Z
 \end{array}$$

上面交换图中虚线的意思是存在且唯一存在一个映射使得图标交换。

直和和直积在数学上真的不怎么区分，我先给出泛性质的定义你就知道它们之间的区别有多么微妙了。

定义 B.1.2 直积在数学上指的是**积范畴**，即对于范畴 \mathcal{C} 中的一族对象 $X_i (i \in I)$ ，若存在一个对象，通常记为 $\prod_{i \in I} X_i$ ，以及一族态射 $\pi_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 使得对任意对象 X 和一族态射 $f_j: X \rightarrow X_j$ ，都存在唯一的态射 $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ 使得对任意 $i \in I$ 都有 $\pi_i \circ f = f_i$ 那么对象 $\prod_{i \in I} X_i$ 连同态射族 $\{\pi_i: i \in I\}$ 称为对象族 $\{X_i: i \in I\}$ 的积 (product)。画出交换图如下：

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\exists! f} & \prod_{i \in I} X_i \\
 & \searrow f_j & \downarrow \pi_j \\
 & & X_j
 \end{array}$$

¹尽管张量积的定义不需要内积，对偶空间也不需要，这里我们只看有内积的简单情况。

²毕竟它的定义就不需要内积，这里局限在内积空间上讨论感觉从物理直观上更容易说清楚，用严谨的 general 的数学反而迷糊。

定义 B.1.3 直和在数学上指的是**余积范畴** (coproduct)，交换图上的定义只需要把上面图的箭头全部反转就好了，文字定义不难相应写出：

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\exists! f} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_j & \uparrow \iota_j \\ & & X_j \end{array}$$

可见两者定义上差的只是一个投影 π ，一个是嵌入 ι_i 。

从范畴的角度看它们差的仅仅只是一个积一个是余积，把箭头反过来罢了！所以数学上真的不怎么区分，特别是对于线性空间范畴，这个定义真的就是等价的！从维数上也能看出这一点 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ ，但是前面的张量积 $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mn}$ 。但是这里说的是外直和，后面还会讲到内直和。

回到物理一些的想法，翻阅喀兴林老师的高量课本，第一章就给出直和的三条性质：

数乘分配 $\lambda(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle) = \lambda|\psi\rangle \oplus \lambda|\phi\rangle$

加法 $|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle + |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle = (|\psi\rangle + |\psi'\rangle) \oplus (|\phi\rangle + |\phi'\rangle)$

内积 $(|\psi\rangle \oplus |\phi\rangle, |\psi'\rangle \oplus |\phi'\rangle) = \langle\psi|\psi'\rangle + \langle\phi|\phi'\rangle$

这不和自由向量空间的定义一模一样么！所以在线性空间范畴上真看不出啥区别。我们再看**直和**和一般的**向量的和**有啥区别。注意我们定义主打的就是两个希尔伯特空间是互相分开的，互相不影响，我们在定义两个向量空间的外直和时，我们并不要求两个向量空间的元素之间有加法定义，而是定义直和来把多个自由度强行直接并起来。这其实有某种选择定则在里面，当我们把两个态加起来的时候，我们认为它们处于同一个线性空间，可以叠加得到混合态。但是你绝对不会把一个自旋为 0 和一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的态直接叠加起来，因为这意味着一个单粒子态一会儿是费米子，一会儿是玻色子，尽管理论上这种禁闭没有严格证明（见 Weinberg 场论第一卷相关部分），但是我们从实验上可以相信这种禁闭是存在的，而这个时候考虑总的体系希尔伯特空间，最好的方式就是用直和了，也就是直接直积并起来罢了。

量子力学里面更多的去讲直和是讲巨正则系综构造 Fock 空间。由于非相对论性的量子力学是个粒子数不变的体系，所以也存在上面与自旋类似的选择定则，也就是说你不会把两个粒子数不同的态直接加起来构造一个混合态，这是没有物理意义的。要用的时候就直接把他们看作是处于完全不同的希尔伯特空间，有自己的一套加法数乘规则，而且互不影响，最后再把它们通过直和直接并起来，构成一个系综，是一个混合态。

内直和就完全不一样了，内直和我们首先是有一个很大的向量空间，然后想去考虑他的分解，但是我们比较关注“正交分解”，也就是说希望把 V 分解为一系列子空间 V_1, V_2, \dots ，这些子空间互相除了零元素没有公共元素，但它们之间的元素是有子空间自然诱导的加法的。如果对于 V 中的任意一个元素 v ，都存在且唯一一组 (v_1, v_2, \dots) 使得 $v = \sum_i v_i$ ，则称 V 是 V_1, V_2, \dots 的（内）直和，也记为：

$$V = \bigoplus_{i=1} V_i \quad (\text{B.6})$$

在讨论群表示的时候涉及到群表示的分解，那个分解实际上就是在把群表示空间分解为一系列更小的空间的内直和，每个最小的不能再分的块就是不可约表示。在纯粹考虑矩阵理论的时候也会谈及张量积和直和的概念，矩阵的直和应该对应到内直和，而张量积就是前面讨论的张量积（把矩阵看成是线性算符， $V \otimes W$ 看成是 $(V^* \otimes W^*)^*$ ），只是把前面的理论用线性算符重写了一遍，并选取了一组基底写成矩阵形式。不少文献也把矩阵的张量积叫克罗内积。

