电动力学复习小册子

expe
我想喝红茶玛奇朵

Latest Update : 2024 年 6 月 21 日

前言与色卡

1. 这是我第一次写复习向 LaTeX, 颜色调了小波奇的粉粉配色 (这学期没看动画片, 感觉迟早要开除二籍了) 我平常乱写 markdown 写习惯了，所以各个细节完全不会注意，可以逼死强迫症
2. 模板来自 https://github.com/ShevonKuan/Probability-and-Mathematical-Statistics, 原作者是关舒文
3. 知识点范围主要来自廖凯老师划的重点, 并加入很多我自己的理 (fei) 解 (hua)
4. 使用教材:< 电动力学 > 郭硕鸿 (第三版)
5. 虽然没人看但是还是放个我的 163 邮箱在这:ee 下划线 mikusuki
6. 我的知乎主页:https://www.zhihu.com/people/expe-94(小心，我喜欢点赞些没有营养的东西)
7. 友情链接 https://whuzbf.github.io/ ← 物理品味很好，值得访问

Color #9485c5

Color #995989

Color #984063

Color #cf6988

Color #d8b64e

Color #488de1

Color #cd2769

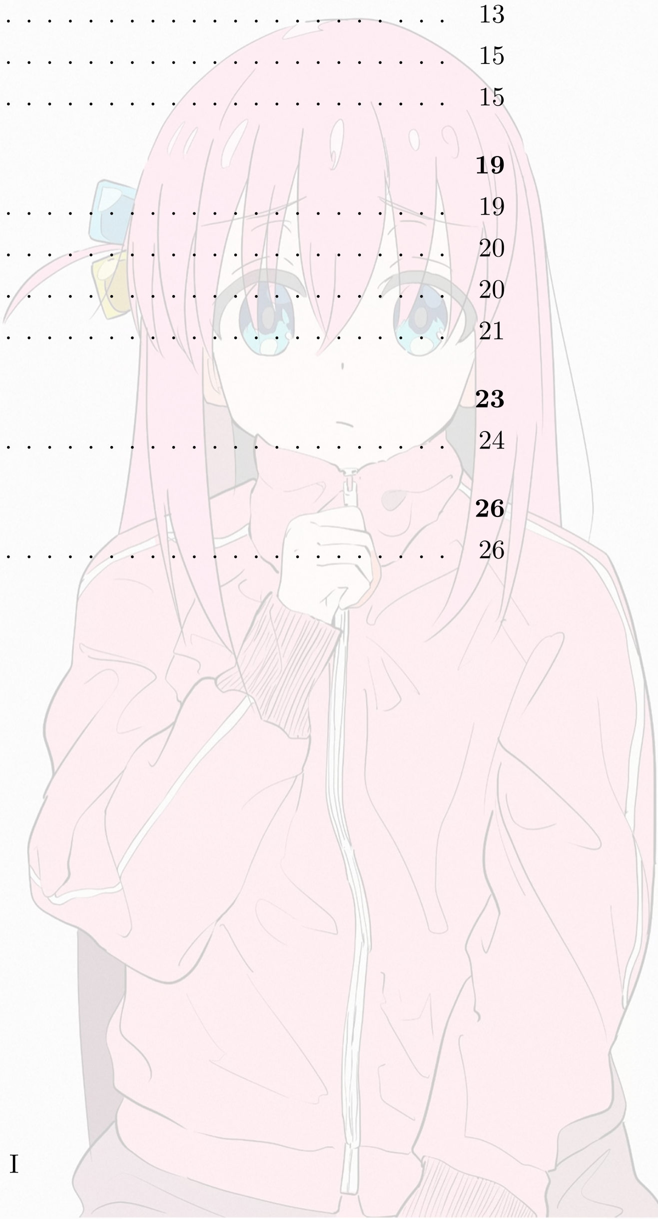
Color #bf0040

Color #c873a4

Color #ae3e6a

Color #77408e

目录



第 1 章 麦克斯韦方程组

1.1 真空麦克斯韦方程组

定理 1.1.1 麦克斯韦方程组

注意这是真空有源的麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.1.4}$$

出自书 P16，其中第一个是电磁感应定律（变化的磁场激发电场）；第二个是位移电流假设（变化电场激发磁场）这些系数你别记错了啊；第三个是高斯定理；第四个是磁场无旋（无磁单极子）

性质 1.1.1 电场与磁场的性质

静电场有源无旋，磁场有旋无源

定理 1.1.2 真空电磁场其他方程

1. **电流密度与电流关系** (P8):

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

2. **电流密度微观形式** (P9):

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

3. **电荷守恒方程** (P9):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

恒定电流条件即为上式左右侧 =0 时的特殊情况

4. **洛伦兹力公式** (P17):

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times B$$

1.2 介质中的麦克斯韦方程组

定义 1.2.1 电极化强度矢量

在外场作用下，介质内出现宏观电偶极矩分布，用电极化强度矢量 $\vec{P}$ 描述，等于电偶极矩的体积密度：

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$，由负电荷指向正电荷

由于 p 由负电指向正电，所以当负电在肚子里，正电跑出去的时候，P 指向区域外，面积分为正，但是留在区域内的束缚电荷体现出负电，也就是说 P 的散度和束缚电荷体密度 ρ_P 差一个负号，也即：

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

把散度写开：

$$\rho_P = -(\partial_1 P^1 + \partial_2 P^2 + \partial_3 P^3)$$

现在假设 x^i 代表介质的厚度方向，令束缚电荷面密度 $d\sigma_P = \rho_P dx^1$，$P|_{x=a} = P_1; P|_{x=b} = P_2$ 上式对 x^1 方向的薄层 $a \leq x^1 \leq b$ 积分，可得

$$\begin{aligned}\sigma_P = \int_a^b \rho_P dx^1 &= -\int_a^b \frac{\partial P^1}{\partial x^1} dx^1 - \int_a^b \frac{\partial P^2}{\partial x^2} dx^1 - \int_a^b \frac{\partial P^3}{\partial x^3} dx^1 \\ &\xlongequal{b-a\to 0^+} -(P^1|_{x=b} - P^1|_{x=a}) = -\hat{x}\cdot(P_2 - P_1)\end{aligned}$$

利用 $\vec{e}_n$ 代表从介质 1 指向介质 2 的单位法向矢量，我们将这一规律写作

你应该提醒自己，任意拿到一个散度公式都可以做这些操作，比如说像流体力学推潜水波方程的过程也涉及到了以散度为被积函数，对某个方向积分

$$\sigma_P = -\vec{e}_n \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

定义 1.2.2 电位移矢量

由于介质内不只有自由电荷，也有极化产生的束缚电荷，对 E 做散度时得到的是总电荷，所以为了方便我们直接定义一个矢量只包含自由电荷的信息, 定义电位移矢量 $\vec{D}$ 为

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

对上式左右两侧作散度得：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_f + \rho_P - \rho_P = \rho_f$$

性质 1.2.1 各向同性线性介质的电性质

对于一般各向同性线性介质,P、D、E 之间有简单线性关系

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

定义 1.2.3 磁化强度

在外磁场作用下，分子电流出现有规则取向，用磁化强度 $\vec{M}$ 描述，等于磁偶极矩的体积密度：

分子电流可以用磁偶极矩描述，等于电流乘围住面积，$\vec{m} = i\vec{a}$，方向按照环电流方向和右手原则

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

还是和电那边的操作差不多，我们对 M 进行环路积分，再由斯托克斯定理改成旋度后可得磁化电流密度与 M 的关系

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

定义 1.2.4　四大电流密度及其定义 (P22)

1. **自由电流密度**:$\vec{J}_f$, 没啥好说的
2. **磁化电流密度**:$\vec{J_M}$, 介质分子内的运动构成微观分子电流，在外磁场作用下分子电流出现有规则取向，它满足

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

3. **位移电流密度**: 麦克斯韦发现变化的电场可以激发磁场，并且 $\dot{E}$ 配上 ε_0 之后恰好与电流同量纲，所以就把它也叫做一种电流了

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. **极化电流密度**: 当电场变化时，介质的极化强度 P 也发生变化，这种变化称为极化电流

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_P$$

也就是说这四个电流中，一个是外来的自由电流，一个是磁场诱导的电流，变化电场诱导两个电流（E 自己诱导一个，P 诱导一个），这个得记，说不定面试还会问这种呢（lk 说的）

于是我们介质中的磁场旋度写作

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = \vec{J}_f + \vec{J_M} + \vec{J_P} + \vec{J_D}$$

最后两项 J_D 和 J_P 可以用 D 捏在一起，然后把 J_M 移到左边去，塞到旋度里面，就有了

$$\nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

定义 1.2.5　磁场强度

把 B 和 (B 诱导的)M 合在一起，这样能使上面那个方程右侧全部是电相关的量，左边是磁相关的量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

这样 B 的旋度那个方程可以写作

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

性质 1.2.2　各向同性非铁磁物质的磁特性

对于各向同性非铁磁物质,M、H、B 之间有简单线性关系

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M$$

定理 1.2.1 介质中的麦克斯韦方程组

你看到有 D、H 的地方就应当把 ρ, J 自动视作自由电荷密度和自由电流密度

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.2.1}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.2.2}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{1.2.3}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2.4}$$

推论 1.2.1 介质中的麦克斯韦方程组, 但是积分形式

就不停用斯托克斯和高斯呗

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{1.2.5}$$
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} \tag{1.2.6}$$
$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \tag{1.2.7}$$
$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.2.8}$$

定理 1.2.2 简单介质的电磁性质方程

1. **电性质**:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

2. **磁性质**:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

3. **微分形式欧姆定律**:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

其中 σ 是电导率

1.3 电磁场边值关系

喜报：本节的可移植性很好，碰到其他不是电磁场但是类似的矢量也可以这么处理

首先对于两个散度式，在界面处做一个薄饼干盒[1]

这是原方程

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

[1]饼干盒是 lk 原话，萌

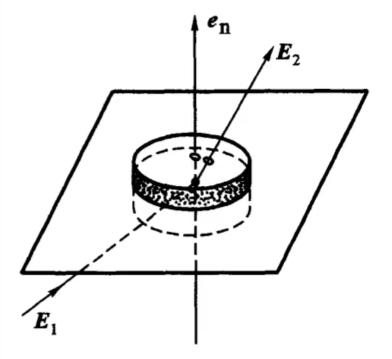


图 1.1: 饼干盒

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对饼干盒所有面积分，并令饼干盒厚度趋于 0，就只有上下两个面有贡献，即

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$
$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

现在再看两个旋度式

其实也是将散度对厚度积分，和前面的操作一样的

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

就像咬一口拉面一样，用环路积分把几根拉面围住，并且嘴巴不能张太大了，恰好吃进拉面是好的

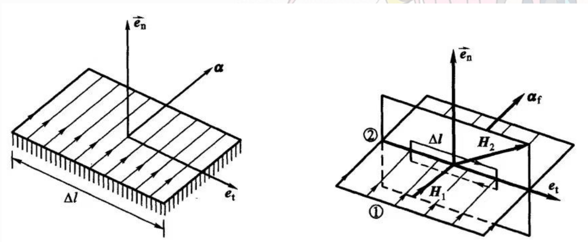


图 1.2: 拉面

在这样小环路上作环路积分，就可以把场相关的项丢掉了，用斯托克斯定理，得

$$\vec{e_n} \times (\vec{H_2} - \vec{H_1}) = \vec{\alpha}$$
$$\vec{e_n} \times (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = 0$$

可以归纳出总的边界条件组了

推论 1.3.1　电磁场边界条件

$$\vec{e_n} \times (\vec{H_2} - \vec{H_1}) = \vec{\alpha} \tag{1.3.1}$$

$$\vec{e_n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0 \tag{1.3.2}$$

$$\vec{e_n}\cdot(\vec{D_2}-\vec{D_1})=\sigma \tag{1.3.3}$$

$$\vec{e_n}\cdot(\vec{B_2}-\vec{B_1})=0 \tag{1.3.4}$$

拓展 1.3.1　时谐电磁波麦克斯韦、边界条件可以互推

只要有了时谐条件 $\partial_t=iw$，就可以用麦克斯韦方程组中两个旋度关系推出两个散度关系；而麦克斯韦方程组与边界条件是一推一关系，也就是说这四个边值关系只有两个是独立的

1. $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{B}=0$:

$$\nabla\times\vec{E}=-iw\vec{B}\Rightarrow\vec{B}=\frac{i}{w}\nabla\times\vec{E}$$
$$\Rightarrow\nabla\cdot\vec{B}=\frac{i}{w}\nabla\cdot\nabla\times\vec{E}=0$$

2. $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{D}=\rho$:

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+iw\vec{D}\Rightarrow\vec{D}=\frac{1}{iw}\nabla\times\vec{H}-\frac{1}{iw}\vec{J}$$
$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=-iw\rho$$
$$\nabla\cdot\vec{D}=\frac{1}{iw}\nabla\cdot\nabla\times\vec{H}-\frac{1}{iw}\nabla\cdot\vec{J}=\rho$$

3. $\vec{e_n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0\Rightarrow\vec{e_n}\cdot(\vec{B_2}-\vec{B_1})=0$:

$$\vec{B}=\frac{i}{w}\nabla\times\vec{E}$$

$$\vec{e_n}\cdot(\vec{B_2}-\vec{B_1})=\frac{i}{w}\vec{e_n}\cdot\nabla\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=-\frac{i}{w}\nabla\cdot\vec{e_n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0$$

打字好累，我懒得写矢量标了，自己加吧

4. $\vec{e_n}\times(\vec{H_2}-\vec{H_1})=\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{e_n}\cdot(\vec{D_2}-\vec{D_1})=\sigma$:

下面带 d 的量都是薄层两侧之差

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{e_n}\times(H_2-H_1)&=-\vec{e_n}\cdot\nabla\times(H_2-H_1)\\&=-e_n\cdot(J_2-J_1+iw(D_2-D_1))\\&=-dJ_n-iwe_n\cdot(D_2-D_1)\\&=\nabla\cdot\alpha\\&=\frac{\partial\alpha_x}{\partial x}+\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\\&=\frac{\partial J_x}{\partial x}dn+\frac{\partial J_y}{\partial y}dn\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow-iwe_n\cdot(D_2-D_1)&=\frac{\partial J_x}{\partial x}dn+\frac{\partial J_y}{\partial y}dn+\frac{\partial J_n}{\partial n}dn\\&=\nabla\cdot Jdn\\&=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dn\\&=-iw\rho dn\\&=-iw\sigma\\\Rightarrow en\cdot(D_2-D_1)&=\sigma\end{aligned}$$

例题 1.3.1 无穷大平行板电容器

如图，中间有两层不同介质，求电场和束缚电荷分布 看到自由电荷密度首先想到

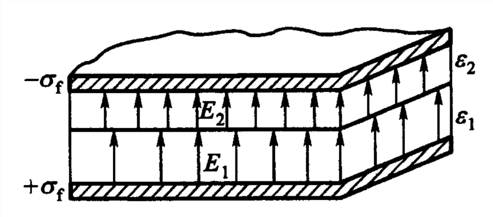


图 1.3: 平行板电容器

D，然后又是无穷大，方向肯定是垂直于平面的，完美，我们用关于 D 的边界条件，有

$$D_1 = D_2 = \sigma_f$$

D 在两个介质中是连续的，再求 E 也简单，直接除 ε

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

介质间的束缚电荷即为 E 的差乘 ε_0

$$\sigma_{P12} = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1})\sigma_f$$

不要忘了求介质与板之间的束缚电荷

$$\sigma_{P1} = \varepsilon_0 E_1 - \sigma_f = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1)\sigma_f$$

$$\sigma_{P2} = -\varepsilon_0 E_2 + \sigma_f = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1)\sigma_f$$

例题 1.3.2 同心介质球

内外半径分别为 r_1,r_2，夹层中电容率为 ε，其他地方是真空；夹层带静止 ρ_f

求：空间各点电场、极化体电荷和极化面电荷分布

写下思路：看到自由电荷密度先拿 D，用 D 的高斯定理环面积分和球对称性很轻松能求出 D，然后你就有 E 了；第二问用 $D = P + \varepsilon_0 E$ 拿出 ρ_f 与 ρ_P 的比例关系 注意 P 的散度和 ρ_f 差个负号！，最后是面密度，用边界条件，只有在最外壳才会有 E 突变，D 不突变，此时就有 ΔP，然后就可以算极化电荷面密度了

例题 1.3.3 同心乌冬面

就是上一题的磁版，内外半径分别为 r1 与 r2 的无穷长中控导体圆柱，沿轴向有恒定均匀自由电流 Jf，磁导率为 μ，求磁感应强度和磁化电流体密度、面密度

我突然想起一个事，要记清楚磁感应强度是 B，磁场强度是 H，免得题目都读不懂

1.4 电磁场能量能流

定义 1.4.1 基本能量关系

有点像雷诺输运或者 D/Dt 那种感觉，只是现在发工资的人变成洛伦兹力做工。洛伦兹力做控制体做工 = 控制体内能量增加 + 能量输出

$$-\vec{f} \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

注意你的 f · v 是控制体朝外做工！现在考虑的是场的能量不是带电粒子的动能；或者直接记这个能量守恒式是 A+B+C=0 的形式，放到同一侧就同号

性质 1.4.1 洛伦兹力做功

洛伦兹力

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

则其功率为 (注意到带电粒子运动的方向 v 正是电流密度 J 的方向)

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

然后你用麦克斯韦方程组把 J 代换掉可以继续往下推能量，这里我就不推了，直接写

定义 1.4.2 Poynting 矢量 (能流密度矢量)

能流密度的面积分即为单位时间内该面上通过的能量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

以及能量密度变化率

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

形式上很像乘积求导，但是能量他是一个非常点乘的关系，所以注意每一项都是同一个场（电或磁）两个量的点乘，带系数的那个求时间导数

定理 1.4.1 电磁场能量密度

真空中

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

线性介质中

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

第 2 章 静电场

2.1 静电场方程

利用“静”的条件，将麦克斯韦方程组中所有偏 t 项全部 kill 掉，然后非常开心地发现 E 是保守场了，引入电势 φ，使得

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

这个负号代表着，一般一个势函数的梯度都是指向上升的方向，但是电势不同，正电处电势高，负电处电势较低，电场由正指向负（和电偶极矩是相反的），也就是说方向沿着势函数下降方向

计算中常常取无穷远处电势为 0，则有点电荷激发出的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

定义 2.1.1 静电势满足的泊松方程

把电势代入麦克斯韦方程组后可得

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

右式只需要上或者下体现介质性质即可，即要么是上自由下介电常数，或者上总电荷下真空介电常数

定理 2.1.1 静电场边值关系

1. **电势连续**: 因为电势与 E 差了个积分关系，且大多数遇到的情况 E 有界，所以取极限时可以得到界面两侧电势相等

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

2. **电势法向偏导**: 是由电荷密度和 D 的差值之间的边值关系推出来的，而且要注意电势梯度与 E 差个负号，写作

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma$$

由于 ε 体现出介质性质了，所以右侧是自由电荷面密度

推论 2.1.1 导体边界条件

1. 导体内部不带静电荷，电荷只能分布在导体表面;

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sigma$$

2. 导体内部电场为 0;

3. 导体表面上电场沿法向，导体表面为等势面，导体为等势体

$$\varphi = const$$

定理 2.1.2 静电场能量

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\rho\varphi$$

其中，ρ 是自由电荷面密度，φ 是这些自由电荷激发的电势

2.2 唯一性定理

了解就行了，有了泊松方程之后，边界上只要给出电势值或电势法向偏导 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，则区域内电场被唯一确定

含导体的唯一性定理：除了边界要照给以外，每个导体还要给总电荷

2.3 解静电场拉普拉斯方程

重头戏来了，要考大题所以好好练练

定理 2.3.1 球坐标拉普拉斯通解

不要和我提柱坐标非齐次拉普拉斯通解

方程：

$$\nabla^2\varphi = 0$$

无任何对称性通解 (JJJ 讲义 P311):

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)})P_l^{[m]}(cos\theta)e^{im\varphi}$$

具有绕某个轴的旋转对称性，也即与 φ 无关，此时通解为：

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(cos\theta)$$

具有球对称时，也即和两个角度均无关时，通解为

$$u(r) = A + \frac{B}{r}$$

性质 2.3.1 勒让德多项式 (JJJ 讲义 P290)

勒让德多项式下标的奇偶性直接代表函数的奇偶性，前 2 个勒让德多项式要记

$$P_0(cos\theta) = 1$$

$$P_1(cos\theta) = cos\theta$$

拓展 2.3.1 勒让德多项式的母函数 (JJJ 讲义 P294)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad (r<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-(l+1)} P_l(x), \quad (r>1)$$

现在就看第一个式子，把 x 改成 $cos\theta$，可以解读他的物理意义：虚构一个半径 <1 的球，点电荷 Q 距球心距离 1，则球内任何一点的电势可以写作

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-2rcos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}r^lP_l(cos\theta),\quad (r<1)$$

左侧是我们熟知的点电荷激发电势的形式，右侧可以看作拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 给出的通解经过 $\theta=0$ 的已知形式 + 广义傅里叶展开确定下系数的形式；这也从另一个方面联系了平方反比 $\rightarrow r^{-1}$ 势 $\rightarrow$ 拉普拉斯方程

性质 2.3.2　解静电场拉普拉斯方程的一般流程

1. 列方程，以及边界条件;
2. 判断对称性写通解;
3. 利用边界条件定系数

例题 2.3.1　仅含 r 的情形 (P48)

内径 R2 外径 R3 的导体球壳，带电荷 Q，同心包住一个半径 R1(<R2) 的接地小导体球，求空间各点电势和小球的感应电荷

1. 列方程，以及边界条件: 可以看出导体将非导体部分分为两个区域，我们设两个导体所夹区域是 φ_1，导体外部电势是 φ_2

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \nabla^2\varphi_2=0$$

   至于边界条件，建议按照一个顺序，从内往外写，以免遗漏

   最里面是接地条件

$$\varphi_1|_{R_1}=0$$

   再往外利用球壳的利用等势体条件，有

$$\varphi_1|_{R_2}=\varphi_2|_{R_3}$$

   再往外用上球壳电荷条件

$$\oiint_{R_3}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}dS-\oiint_{R_3}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}dS=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

   这个负号写的看着很丑，但是我只是想说 $\partial_r\varphi$ 和 E 是差负号的

   最外面的无穷远条件不要忘记写了

$$\varphi_2|_{\infty}=0$$

2. 判断对称性写通解

   这题非常基础，球对称，只和 r 有关，可以写出

$$\varphi_1(r)=A_1+\frac{B_1}{r}$$

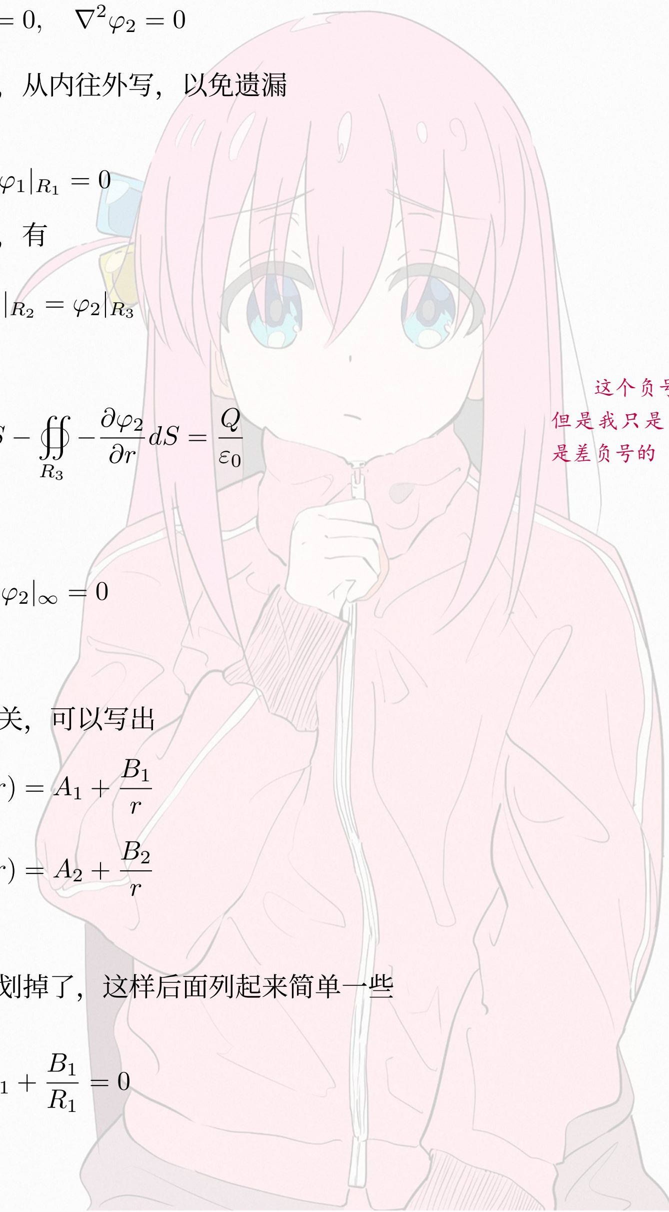
$$\varphi_2(r)=A_2+\frac{B_2}{r}$$

3. 利用边界条件定系数

   首先看到无穷远处的 0 直接把 A_2 划掉了，这样后面列起来简单一些

   小球接地:

$$A_1+\frac{B_1}{R_1}=0$$



球壳等势:

$$A_1 + \frac{B_1}{R_2} = \frac{B_2}{R_3}$$

高斯定理:

$$4\pi B_2 - 4\pi B_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

然后解得:

在这里可以多用 R^{-1} 的形式，看起来整洁

$$A_1 = -\frac{B_1}{R_1}, \quad B_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}}, \quad B_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} + B_1$$

$$\varphi_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}}(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1})$$

$$\varphi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}} + 1)\frac{1}{r}$$

小球感应电荷:

$$Q' = 4\pi B_1 = \frac{QR_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}}$$

例题 2.3.2 泡在小河里的玻璃球

电容率为 ε，半径为 R_0 的介质球置于均匀外电场 E_0 中，求电势 那我们还是按

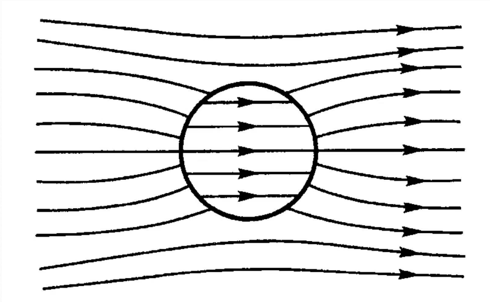


图 2.1: 在匀强电场中极化的介质球

照步骤来

1. 列方程，以及边界条件;

   这里也是电势分为两个区域考虑，介质内 φ_1 与介质外 φ_2

   $$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

   其实这些有界条件有点马后炮了，他出现在这里只是为了把通解奇异的一半砍掉

   边界条件先列最里面的

   $$\varphi_1|_{r=0} \in \mathbb{R}$$

   介质球表面, 他不是导体所以没有自由电荷面密度

   $$\varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0}, \quad \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$$

   无穷远处

   $$\varphi_2|_{r\to\infty} = E_0 r cos\theta$$

2. 判断对称性写通解;

   只和 r、θ 有关，再联系之前的球心有界就可以 kill 掉半个部分，写出

   $$\varphi_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(cos\theta)$$

   $$\varphi_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(cos\theta)$$

3. 利用边界条件定系数

   这次从无穷远边界条件开始定，这样能快速把 l 固定下来

$$\varphi_2|_{r\to\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(cos\theta) = E_0 rcos\theta$$

   对比两侧勒让德多项式下标，右侧只有第一个勒让德多项式，且上式对 θ 恒成立，故左侧也仅有第一个勒让德多项式，即

$$\varphi_2(r,\theta) = (E_0 r + B_1 r^{-2})cos\theta$$

   现在来使用电势连续条件

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R_0^l P_l(cos\theta) = (E_0 R_0 + \frac{B_1}{R_0^2})cos\theta$$

   还是跟上面一样，你一对发现只有第一个勒让德多项式，所以

$$A_1 R_0 = E_0 R_0 + \frac{B_1}{R_0^2}$$

   界面无自由电荷 (D 连续条件):

$$\varepsilon A_1 = \varepsilon_0(E_0 - 2\frac{B_1}{R_0^3})$$

   用上面两个就可以把 B_1, A_1 定出来了，最后得到结果

$$\varphi_1 = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 rcos\theta$$

$$\varphi_2 = E_0(r + \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{R_0^3}{r^2})cos\theta$$

例题 2.3.3　泡在小河里的导体球

半径 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 E_0 中，求电势和导体上电荷面密度 (就是上面那题的导体球版)

1. 列方程，以及边界条件: 这次只有一个电势了

$$\nabla^2\varphi = 0$$

$$\varphi|_{r\to\infty} = E_0 rcos\theta, \quad \varphi|_{r=R_0} = 0$$

2. 这里就不按部就班写了，因为就像上面一样操作就好了，通过无穷远和表面 0 电势条件可以得出解

$$\varphi(r,\theta) = E_0(r - \frac{R_0^3}{r^2})cos\theta$$

3. 然后就可以求出 E、D 了，就可以得到电荷面密度了

$$\sigma = D_n|_{R_0} = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{R_0} = -3\varepsilon_0 E_0 cos\theta$$

2.4 镜像法

本节只考三个基本模型

例题 2.4.1　无限大平板镜像法

接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q，求空间中的电场 导体边界上电场线

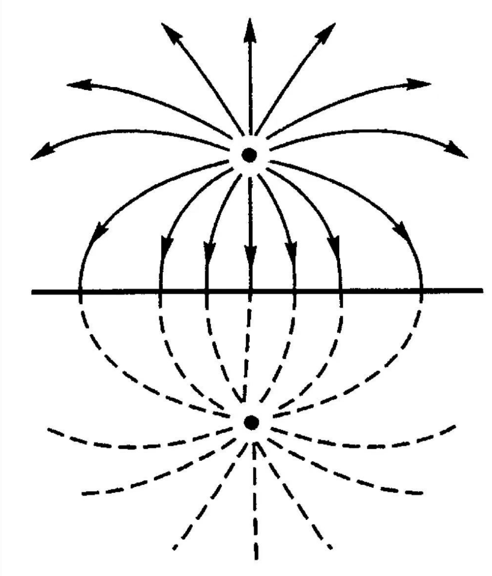


图 2.2: 平板镜像法模型

一定沿法相，所以就可以等效为下面还有一个相反的电荷，求这一对电荷激发的电势就好

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'})$$

在直角坐标系下

$$\varphi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}})$$

例题 2.4.2　接地导体球镜像法

真空中有一半径 R0 的接地导体球，距球心为 a(>R0) 处有一点电荷 Q，求空间中电势

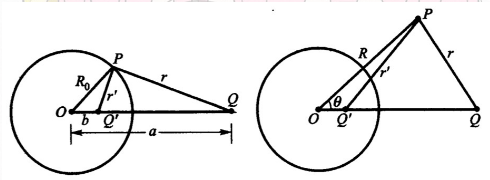


图 2.3: 导体球镜像法

那么你也是假装球内有一个电荷，使得电场线能垂直于球体表面，且球面 0 电势在球面上 0 电荷意味着

$$\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} = 0 \Rightarrow \frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = const$$

那么发挥惊人的注意力，只需使 $\Delta OQ'P \sim \Delta OPQ$，即可

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \frac{R_0}{a}$$

此时

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q, \quad b = \frac{R_0^2}{a}$$

这样就确定了假想电荷的位置和大小

最后，用柱坐标和余弦定理表示任意一点的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2Racos\theta}} - \frac{R_0/a}{\sqrt{R^2+b^2-2Rbcos\theta}})$$

推论 2.4.1 足够近同电荷金属球与点电荷可能相吸

如上例题，但是导体球不是接地而是带电荷 Q_0 求球外电势和电荷 Q 受力

继承上一题，在球内按照规矩放一个假想电荷 Q' 之后，可以使导体变成 0 电势等势体；再在球心放一个假想电荷 $Q_0 - Q'$, 这样保持导体球带总电荷 Q_0 的同时球面仍为等势面，任意一点的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{Q_0 + R_0 Q/a}{R})$$

求外面那个点电荷受力就直接算两个假想的点电荷对他的作用力

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}F = \frac{Q_0}{a^2} - \frac{QR_0^3(2a^2 - R_0^2)}{a^3(a^2 - R_0^2)^2}$$

如果金属球与点电荷带同种电，则第一项表现为斥力，第二项表现为吸引力；在 a 较大时，由第一项的斥力主宰，并且逐渐趋向双点电荷的理想情况；在 a 较小时，由第二项的吸引力主宰，这就是为什么同种电荷，但是非点电荷理想情况时，可能会相吸

例题 2.4.3 垂直双平板镜像法

有一点电荷 q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内，他到两个平面的距离为 a 和 b，求空间电势

把两个互相垂直的平面画作 x 轴和 y 轴，现有的这个电荷在第一象限，坐标为 (a,b)；然后现在引入三个假想电荷，使得总共这四个电荷构成以原点为对称中心的矩形，且二四象限电荷-q，一三象限电荷 q，然后随便算电势就行

2.5 格林函数

虽然这玩意在物理确实很多用，但是这次电动只考理解，就大概抄下定义吧

定义 2.5.1 静电场格林函数

一个处于 x' 点上的单位点电荷所激发出的电势 $\psi(x)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2\psi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(x - x')$$

若有边界条件

$$\psi|_{\partial V} = 0$$

则满足该边界条件的方程解称为第一类边值格林函数

若有边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial V} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$$

(其中 S 是边界面积)，相当于说边界上均匀带电，则满足该边界条件的方程解称为第二类边值格林函数

从数学上看，格林函数可以视作线性算子的左逆；从物理上来看，格林函数描述了点电荷激发的电势，欲求任意一堆电荷激发的电势仅需对 dq 积分即可；从解静电问题上来看，格林函数包括了边界信息，把格林函数代到一个式子里和区域内电荷信息运作一下就可以得到终解 (第一类边值问题公式在 P61，第二类在 P62)

2.6 电多极矩

给定区域中电荷密度分布，就可以求这一块区域激发的电势了

$$\varphi(x) = \iiint \frac{\rho(x')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

注意到带电体离探测点的距离 R，探测点距积分微元距离 r，带电体基准点到积分点距离 x 构成三角形；当 R 很远，或带电体尺寸较小时，可以把 x 看作一个“微扰”[1]，然后对变量 x 在 R 处进行泰勒展开，即

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{|\vec{R}-\vec{x}|}=\frac{1}{R}-\vec{x}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum x_i x_j\partial_i\partial_j\frac{1}{R}+...$$

代入电势式中

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho(x')[\frac{1}{|\vec{R}-\vec{x}|}=\frac{1}{R}-\vec{x}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum x_i x_j\partial_i\partial_j\frac{1}{R}+...]dV'$$

下面把这个展开式一项一项拿出来看并赋予物理意义

定义 2.6.1 电多极矩

令

对标质量

$$Q=\iiint\rho(x')dV'$$

对标质心

$$\vec{p}=\iiint\rho(x')x'dV'$$

对标转动惯量

$$D_{ij}=\iiint 3x_i'x_j'\rho(x')dV'$$

则电势的展开式写作

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}D^{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{R}+...)$$

可以看到，展开式的第一项是点电荷激发电势，看作第一级近似

展开式的第二项是电偶极矩 p 产生的电势

电偶极矩 p 激发的电势
这个式子要记，我喜欢用 hat 代表单位向量

$$\varphi_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}=\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\hat{R}$$

如果一个体系电荷分布对原点对称，那么电偶极矩为 0

展开式的第三项是电四极矩产生的电势

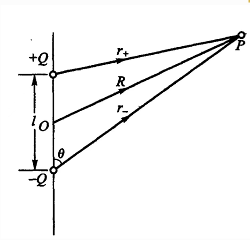
$$\varphi_D=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}D^{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{R}$$

其中 Dij 是对称张量，只有 5 个量是独立的 (迹有说法)，他体现了 (最简单的情况) 四个电荷，两正两负，围成矩形的“不均匀程度”。球对称分布没用电四极矩，一旦偏离球对称就有电四极矩了（例如椭球）

迹有关系的特性使得他还有一个表达式，这个表达式和上面的不等价，是专门扣掉一个 I 使得无迹的；这里我就不打撇了

$$D_{ij}=\iiint(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})\rho(x)dV$$

例题 2.6.1 电偶极矩激发电势



$p=Ql$，向上，那么带公式

$$\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\hat{R}$$

可得

$$\varphi\approx\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{z}{R}$$

其中 z 是 R 在 p 方向上的投影，在图中表示为向上的距离

例题 2.6.2 长方形的电四极矩

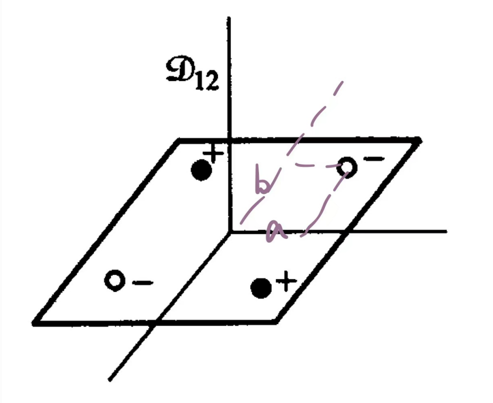


图 2.4: 长方形的电四极矩

直接带公式，点电荷就用离散形式

$$D_{ij}=\sum 3x_ix_jq$$

这里只计算 D12

$$D_{12}=3\sum xyq=-12qab$$

例题 2.6.3 椭球的电四极矩

均匀带电的长形旋转椭球体半长轴为 a，半短轴为 a，带总电荷 Q，求电四极矩和远处电势取椭球方程

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\leq 1$$

列电四极矩公式

$$D_{ij}=\iiint(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})\rho(x)dV$$

先观察非对角项，注意到

$$\int xydV=\int yzdV=\int zxdV=0$$

因此

$$D_{12}=D_{23}=D_{31}=0$$

下面求对角项也要巨大注意对称性，否则很难积

令 $x^2+y^2=s^2$, 则

$$\int x^2dV=\int y^2dV=\frac{1}{2}\int s^2dV$$

后面那个积分反正我是把椭球剁成很多和 xoy 平面平行的片，每一个片上就是圆内对半径平方积分，用极坐标即可；然后再对 z 积分，最后算出来

$$\int x^2dV=\frac{4\pi}{15}ab^4$$

对 z 的积分也好办，还是按上面的方法切成片，每个圆形片的面积可以用 z 表示，再对 z 积分，得到

$$\int z^2dV=\frac{4\pi}{15}a^3b^2$$

所以

$$D_{33}=\rho_0\int(3z^2-r^2)dV=\rho_0\int(2z^2-2x^2)dV=\frac{2}{5}(a^2-b^2)Q$$

---

①我自己说的词，可能不准确

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{5}(a^2 - b^2)Q$$

最后求电势，注意到 $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}(D_{11}\frac{\partial}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial}{\partial y^2} + D_{33}\frac{\partial}{\partial z^2})\frac{1}{R} \\
=&\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2}D_{33}\frac{\partial}{\partial z^2}\frac{1}{R} = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0}(a^2 - b^2)\frac{3z^2 - R^2}{R^5}
\end{aligned}$$

第 3 章 静磁场

3.1 矢势

恒定电流磁场基本方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

定义 3.1.1 矢势

由于磁场无旋，所以可以引入矢势 A，使得

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

可以对标涡旋感生无粘不可压速度场，为了描述有旋无源的速度场 v，引入了矢势 B(我也很烦这个 B 碰瓷磁场的符号，还不是对应的)

则磁通量有了两种表述，还可以用 A 的环路积分

$$\iint B \cdot dS = \oint A \cdot dl$$

可以把 A 的环量理解为 B 的磁通量

定义 3.1.2 矢势的规范

对于相差一个标量函数梯度的矢势，他们对应着同一个 B，也即

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\psi$$

这样的规范变换下 B 是不变的

所以现在人为规定

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

即可把 A 与 B 一一对应

定理 3.1.1 矢势微分方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

写成分量式的话，就是每个分量单独满足泊松方程

类比静电场，它也有一个积分形式的特解

$$A(x) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J(x)dV}{r}$$

这个式子可以继续导出 B 的解 (注意 JdV=Idl)

性质 3.1.1 矢势边值关系

若取无散规范，则矢势在两介质分界面上连续

$$A_1 = A_2$$

性质 3.1.2 静磁场能量

$$w = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}$$

现在用无下标代表控制体内的物理量，下表 e 代表外磁场的矢势、外磁场的电流分布，则

$$w = \frac{1}{2}(J + J_e)(A + A_e)$$

那么控制体在外场中的相互作用能为

$$w_i = \frac{1}{2}(J\cdot A_e + J_e\cdot A) = J\cdot A_e$$

3.2 解磁标势

注意我们引入磁标势的时候需要放弃 B 与 H 的简单线性关系，转而使用原始定义 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, 所以 $\nabla\cdot H = -\nabla\cdot M$

在一个局部区域内，如果所有回路均不链环着电流（例如：本来有个环电流，把这个电流环住的区域去掉，这样剩下的区域就不可能有路环住这个电流了），就可以把 B 视作即无旋又无源了

这里对标电场与电势

引入磁标势 φ_m, 使得

$$H = -\nabla\varphi_m$$

引入分子电流磁矩带来的磁荷密度

对标电场中的束缚电荷，由于没有磁单极子，所以自由电荷无法对应到磁这边来

$$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot M$$

则静磁场磁标势方程写作

$$\nabla^2\varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

然后就可以照搬静电场那一套了，只是静电场会给好电荷密度，而磁场这边一般不会直接给你磁荷密度，需要通过对 M 求散度来得到

性质 3.2.1 解磁标势方程的一般流程

1. 求磁荷密度 ρ_m
2. 列方程，以及边界条件;
3. 判断对称性写通解;
4. 利用边界条件定系数
5. (可选) 回到磁场

只是因为磁标势很多时候要回到 B、H 上来，所以写了最后一点防止遗漏

例题 3.2.1 泡在小河里的铁球

待施工

3.3 磁多极矩

这节只要求写出表达式，好的

定理 3.3.1 矢势的多极展开

还是一样的展开 1/r，和电势展开一个套路

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(x')dV'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int J(x')(\frac{1}{R} - x'\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{2}x^i x^j\partial_i\partial_j\frac{1}{R} + ...)dV'$$

观察第一项，JdV=Idl，化为 I 的环路积分，而恒定电流条件说明 I 都是在打转转的，对于每个 I 回路，环路积分均为 0，所以上式第一项必然为 0，这也对应着无磁单极子

展开式的第二项可以写作

$$A_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int J(x')x' \cdot \nabla\frac{1}{R}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{R^2} \times \hat{R}$$

对标电偶极矩产生的电势

其中磁矩定义为

$$m = \frac{I}{2}\oint x' \times dl'$$

若小电流圈围住的面积 S 已知，则

$$m = IS$$

是我们熟知的形式

推论 3.3.1　磁偶极矩激发的磁场和磁荷密度

通用

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi}(m \cdot \nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}$$

在电流分布以外的空间中

$$B = -\mu_0 \nabla \varphi_m$$

$$\varphi_m = \frac{m \cdot \hat{R}}{4\pi R^2}$$

对比电偶极矩产生的磁场 $\varphi_p = \frac{\vec{p} \cdot \hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$，一个小电流线圈可以看作一对正负磁荷组成的磁偶极子

3.4　AB 效应、超导体

定义 3.4.1　AB 效应

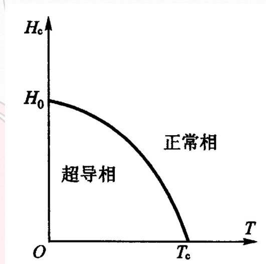
在量子力学中，矢势 A 具有可观测效应，可以通过电子双缝衍射装置观测到干涉条纹在 A 变化时发生移动

性质 3.4.1　超导体的基本现象

要记

1. **超导电性**　低于临界温度后，电阻消失；
2. **临界磁场**　将处于超导态的材料至于外磁场中，当外磁场超过一定值后超导性会丢失；
3. **迈斯纳效应**　超导体内部 B=0，磁场只能存在表面薄层内，有完全抗磁性。

   理想迈斯纳态下超导体表面电流密度会在内部产生一个与外磁场相反的磁场，把外磁场抵消掉，所以屏蔽掉外场；



4. **临界电流**　超导体内电流超过某个临界值时，产生的磁场高于临界磁场，转为正常态；
5. **第一类第二类超导体**　元素超导体多属于第一类，合金和化合物超导体多数第二类。

   第一类超导体有一个临界磁场，第二类超导体有下临界磁场和上临界磁场，当 H 小于两者时，材料完全超导；当 H 介于两者之间时，磁场以量子化磁通线进入材料，使其处于超导与正常的混合态；当 H 大于两者时，材料变为正常态。

   第二类超导体的临界温度和临界磁场一般较高；

6. **磁通量子化**　第一类复连通超导体和连通第二类超导体的磁通量只能是基本值 $\frac{h}{2e}$ 的整数倍.

定理 3.4.1　二流体模型

这是对于超导体的伦敦唯象理论的一部分

当材料处于超导态时，一部分传导电子凝聚于量子态中并作完全有序运动，不受晶格散射因而没有电阻效应，其余传导电子仍属正常电子

第 4 章 电磁波的传播

定理 4.0.1　从齐次真空麦克斯韦方程组到波动方程

真空中的齐次麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{4.0.1}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4.0.2}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \tag{4.0.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{4.0.4}$$

(1) 式左右两侧取 rot 并将 (2) 式代入可得

$$\nabla\times(\nabla\times E)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times B=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E$$

再用到矢量恒等式

$$\nabla^2E=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla\times(\nabla\times E)$$

跟他类似的还有一个恒等式也是联系起了 grad、rot、div，在由 NS 方程推导兰姆-葛罗米柯方程时用到了，$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\nabla\frac{v^2}{2}+(\nabla\times\vec{v})\times\vec{v}$

所以有

$$\nabla^2E=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2E}{\partial t^2}$$

现在再对 (2) 式作旋度，并将 (1) 式代入可得

$$\nabla\times(\nabla\times B)=-\nabla^2B=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B}{\partial t^2}$$

也即

$$\nabla^2B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2B}{\partial t^2}$$

令 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$，则真空波动方程写作

$$\nabla^2E=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2} \tag{4.0.5}$$

$$\nabla^2B=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2B}{\partial t^2} \tag{4.0.6}$$

定理 4.0.2　介质中的时谐电磁波

时谐条件：E 与 B 对时间的依赖可以提出来，写作[1]

$$E(x,t)=E(x)e^{-iwt} \tag{4.0.7}$$

$$B(x,t)=B(x)e^{-iwt} \tag{4.0.8}$$

[1] 在本节中，因为我偷懒，所以把 ω 全部打成 w 了

时谐情况下，所有算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 退化为标量 $-iw$, 并取简单线性各向同性介质，此时介质中齐次麦克斯韦方程组写作 (仅包含了空间依赖部分)

$$\nabla \times \vec{E} = iw\mu\vec{H} \tag{4.0.9}$$
$$\nabla \times \vec{H} = -iw\varepsilon\vec{E} \tag{4.0.10}$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{4.0.11}$$
$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{4.0.12}$$

对 (1) 式取旋度并将 (2) 代入后得

$$\nabla^2 E = -w^2\mu\varepsilon E$$

亥姆霍兹方程常常由含时拉普拉斯方程分离时间变量后得到

令 $k = w\sqrt{\mu\varepsilon}$，则上式写作亥姆霍兹方程的形式

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

亥姆霍兹方程附加上 E 无散条件 $\nabla \cdot E = 0$ 后得到的 E 才是真实的物理解解出 E 后，按照这样的方式计算 B:

$$B = -\frac{i}{w}\nabla \times E$$

对于 B，亥姆霍兹方程和无散条件照抄，从 B 计算 E 的式子为

$$E = \frac{i}{w\mu\varepsilon}\nabla \times B$$

4.1 平面电磁波

平面电磁波的情况下，电磁场的空间依赖部分是单参依赖的，亥姆霍兹方程化为

$$\frac{d^2}{dx^2}E(x) + k^2E(x) = 0$$

解得

$$E(x) = E_0 e^{ikx}$$

把时间项合起来，得到了

$$E(x,t) = E_0 e^{i(kx-wt)}$$

无散条件要求传播方向上没有电场，也即电场与传播方向垂直，平面电磁波是横波

对于实际存在的场强应该取 Re，也即

$$E(x,t) = E_0 cos(kx - wt)$$

定义 4.1.1 相速度与群速度

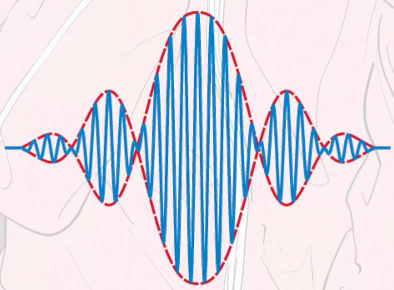


图 4.1: 波与其包络线

相速度：电磁波恒定相位点的传播速度，以平面电磁波为例，令

$$kx - wt = \varphi_0$$

可得

$$x = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{wt}{k}$$

$$\dot{x} = \frac{w}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

群速度：调制波（非单色波）的包络线在空间中的传播速度。一个较明显的例子是频率相近的两个简谐波的叠加，会形成拍的现象；拍的节传播的速度即为群速度，定义为

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k}$$

作 w-k 图，若 w 对 k 线性齐次，则相速度 = 群速度；

其实有点像总成本-产量图中的平均成本和边际成本的关系，我不知道说的对不对

若 w 是 k 的齐次下凹函数，则群速度 > 相速度，并且完全可以在相速度 <= 光速的限制下使得群速度超光速，但是讯号速度始终不能超光速；

若 w 是 k 的齐次上凸函数，则群速度 < 相速度

进一步地，群速度和相速度方向可能相反

将平面电磁波扩展到三维空间的情况, 给 $k = w\sqrt{\mu\varepsilon}$ 赋予沿着波传播的方向，使其成为一个矢量，此时空间中的平面电磁波写作

$$E(x,t) = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

索引