

武汉大学

本科毕业论文（设计）

纯旋量超弦

姓 名：郑卜凡
学 号：2021302022016
专 业：物理学
学 院：物理科学与技术学院
指导教师：杜一剑

二〇二五年四月

**BACHELOR' S DEGREE THESIS
OF WUHAN UNIVERSITY**

Pure Spinor Superstring Theory

School(Department): School of Physics and Technology

Major: Physics

Candidate: BUFAN ZHENG

Supervisor: . YI-JIAN DU



WUHAN UNIVERSITY

Apr, 2025

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文（设计），是本人在指导教师的指导下，严格按照学校和学院有关规定完成的。除文中已经标明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已发表及撰写的研究成果。对本论文（设计）做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承诺在论文（设计）工作过程中没有伪造数据等行为。若在本论文（设计）中有侵犯任何方面知识产权的行为，由本人承担相应的法律责任。

作者签名： 指导教师签名：
日 期： 年 月 日

版权使用授权书

本人完全了解武汉大学有权保留并向有关部门或机构送交本论文（设计）的复印件和电子版，允许本论文（设计）被查阅和借阅。本人授权武汉大学将本论文的全部或部分内容编入有关数据进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本论文（设计）。

作者签名： 指导教师签名：
日 期： 年 月 日

摘 要

论文的摘要是对论文研究内容和成果的高度概括。摘要应对论文所研究的问题及其研究目的进行描述，对研究方法和过程进行简单介绍，对研究成果和所得结论进行概括。摘要应具有独立性和自明性，其内容应包含与论文全文同等量的主要信息。使读者即使不阅读全文，通过摘要就能了解论文的总体内容和主要成果。

论文摘要的书写应力求精确、简明。切忌写成对论文书写内容进行提要的形式，尤其要避免“第 1 章……；第 2 章……；……”这种或类似的陈述方式。

关键词是为了文献标引工作、用以表示全文主要内容信息的单词或术语。关键词不超过 5 个，每个关键词中间用分号分隔。

关键词：超弦理论；散射振幅；旋量；色运动学对偶；量子场论

ABSTRACT

An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summary of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Keywords are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 keywords, with semicolons used in between to separate one another.

Keywords: Superstring Theory; Scattering Amplitudes; Spinor; Color-Kinematic Duality; Quantum Field Theory

目 录

摘要	I
ABSTRACT	III
1 引言	1
2 玻色弦及其量子化	3
2.1 正则量子化	3
2.1.1 Nambu-Goto 作用量	3
2.1.2 光锥量子化	4
2.1.3 协变量子化	6
2.2 路径积分量子化	7
2.2.1 Polyakov 路径积分	7
2.2.2 弦振幅	9
2.2.3 顶角算符	10
2.3 BRST 量子化	10
2.4 鬼场的真空	13
2.5 *BV 形式	13
3 Ramond-Neveu-Schwarz 超弦	15
3.1 世界面超场	15
3.2 正则量子化	17
3.3 GSO 投影	18
3.4 RNS 超弦顶角算符	20
3.4.1 超鬼场真空	20
3.5 * 弦理论之间的对偶关系	20
4 弦微扰论	21
5 Berkovits 超弦	23
6 BCJ 分子的构造	25
6.1 色-运动学对偶	25
6.2 利用纯旋量超弦构造 Yang-Mills 理论的树图 BCJ 分子	25
本论文主要使用到的 OPE	27
1 自由 CFT	27

1.1	自由玻色 CFT	27
1.2	bc 鬼场	27
2	$\mathcal{N} = 1$ SCFT	27
2.1	自由费米 CFT	27
2.2	$\beta\gamma$ 鬼场	27
	参考文献	29
	致谢	31

1 引言

测试下引用^[1]

2 玻色弦及其量子化

本章简要回顾玻色弦的量子化, 虽然玻色弦有诸如真空不稳定以及没有费米子激发等问题, 但对玻色弦的研究有助于理解超弦的相关问题。这里只做简要的回顾, 更多相关细节读者可以参考^[2-4], 另外我们将使用更现代的共形场论的语言, 相关细节可以在^[5-6]中找到。

2.1 正则量子化

弦论量子化其实是约束体系量子化问题, 利用正则量子化并不能很好地解决, 但是正则量子化的好处是能看出弦论的粒子谱。

2.1.1 Nambu-Goto 作用量

自由点粒子的作用量正比于其世界线场, 受此启发可以立刻写下弦的作用量:

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (\det h_{ab})^{1/2}, \quad h_{ab} := \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (2.1)$$

由于作用量中包含根号, 更利于量子化的方式是引入辅助场 γ_{ab}

$$S_{\text{P}}[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (2.2)$$

上述作用量有全局庞加莱对称性:

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau, \sigma) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.3)$$

以及局域规范对称性 $\text{diff} \times \text{Weyl}$:

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau', \sigma') &= X^\mu(\tau, \sigma), \\ \frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{cd}(\tau', \sigma') &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau, \sigma) &= X^\mu(\tau, \sigma), \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= \exp(2\omega(\tau, \sigma)) \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.5)$$

由于 γ_{ab} 没有动力学, 其运动方程将在量子化时作为约束引入:

$$\frac{\delta S_{\text{P}}}{\delta \gamma_{ab}} \sim T^{ab} = 0 \quad (2.6)$$

同时不难验证弦经典运动方程为一维波动方程:

$$\frac{\delta S_{\text{P}}}{\delta X^\mu} \sim \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0 \quad (2.7)$$

由于一维弦的非平凡拓扑，若加入周期性边界条件则为闭弦：

$$X^\mu(\tau, \sigma + \ell) = X^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.8)$$

而开弦端点上可以引入两种不同的边界条件：

$$\begin{aligned} n^a \partial_a X_\mu|_{\partial M} &= 0 \quad (\text{Neumann}) \\ X^\mu(\tau, 0) &= X^\mu(\tau, \ell) = x_0 \quad (\text{Dirichlet}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

表面上看似乎只有第一种边界条件才不会破坏庞加莱对称性，Dirichlet 边界条件其实相当于要求开弦端点依附于 D 膜上。而超弦中 D 膜其实可以作为 BPS 态稳定存在，所以 D 膜作为靶空间的非平凡缺陷也应当看作弦论自由度的一部分，这意味着 Dirichlet 边界条件也是可行的。

弦论中可以通过 Chan-Paton 因子引入 $U(N)$ 规范对称性^①，具体体现在开弦端点带上 $U(1) \times \bar{U}(1)$ 荷，其可以解释为开弦端点依附的 D 膜指标：

$$|N; k; a\rangle = \sum_{i,j=1}^n |N; k; ij\rangle \lambda_{ij}^a, \quad \lambda \in \mathfrak{u}(N) \quad (2.10)$$

2.1.2 光锥量子化

正则量子化的核心是将力学量量子化为算符，泊松括号替换为狄拉克括号。但是量子化还要满足约束2.6。光锥量子化思路是取光锥规范定下 $\text{diff} \times \text{Weyl}$ 规范对称性，类似在库伦规范下量子化 $U(1)$ Yang-Mills 理论得到量子电动力学：

$$\begin{aligned} X^\pm &= 2^{-1/2}(X^0 \pm X^1), \quad X^i, i = 2, \dots, D-1 \\ X^+ &= \tau, \quad \partial_\sigma \gamma_{\sigma\sigma} = 0, \quad \det \gamma_{ab} = -1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

在这一规范选取下， X^+ 不再拥有动力学演化，而 X^- 可以完全由横向 α^i 模展开，所以 α^- 也不用考虑。以 Neumann 边界条件开弦为例，只剩下非平凡的 X^i 模展开：

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp\left(-\frac{\pi i n \tau}{\ell}\right) \cos \frac{\pi n \sigma}{\ell} \quad (2.12)$$

^① 非定向弦对应 $SO(N)$ 和 $Sp(N)$ 对称性

这里 x 可以理解为弦的质心动量, p, Π 是相应的共轭动量:

$$\begin{aligned}
 x^-(\tau) &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^-(\tau, \sigma) \\
 p_- = -p^+ &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau x^-)} = -\frac{\ell}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \\
 \Pi^i &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^i)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i = \frac{p^+}{\ell} \partial_\tau X^i x^i(\tau) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^i(\tau, \sigma), \\
 p^i(\tau) &= \int_0^\ell d\sigma \Pi^i(\tau, \sigma) = \frac{p^+}{\ell} \int_0^\ell d\sigma \partial_\tau X^i(\tau, \sigma)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

然后取等时对易子进行标准正则量子化操作:

$$\begin{aligned}
 [x^-, p^+] &= i\eta^{-+} = -i, & [x^i, p^j] &= i\delta^{ij}, \\
 [X^i(\sigma), \Pi^j(\sigma')] &= i\delta^{ij}\delta(\sigma - \sigma') & [\alpha_m^i, \alpha_n^j] &= m\delta^{ij}\delta_{m, -n}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

不难看出上面模展开具有谐振子代数, 所以弦的粒子谱可以看作不同振动模式激发:

$$|N; k\rangle = \left[\prod_{i=2}^{D-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{-n}^i)^{N_{in}}}{(n^{N_{in}} N_{in}!)^{1/2}} \right] |0; k\rangle \tag{2.15}$$

其中 $|0, k\rangle$ 是真空态, 且由于 p^i 为好量子数而带有背景动量。利用黎曼 Zeta 正规化 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ 可以推出点粒子激发质量谱为:

$$m_{\text{op}}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(N + \frac{2-D}{24} \right), \quad N := \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{n=1}^{\infty} n N_{in} \tag{2.16}$$

但是光锥量子化方法明显地破坏了庞加莱对称性, 为了理论自洽, 必须要求玻色弦定义在 26 维靶空间:

$$\boxed{D_{\text{boson}} = 26} \tag{2.17}$$

这其实是第一激发态处于 $SO(D-2)$ 小群表示的必然结果。注意到弦真空是质量平方负定的快子态:

$$|0; k\rangle \Leftrightarrow m^2 = -\frac{1}{\alpha'} \tag{2.18}$$

闭弦也可以同样处理, 只是分为左右模, 而开弦左右模叠加成为驻波^{2.12}, 闭弦有如下模展开:

$$\begin{aligned}
 X^i(\tau, \sigma) &= x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \\
 &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n^i}{n} \exp \left[-\frac{2\pi i n(\sigma + \tau)}{\ell} \right] + \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{n} \exp \left[\frac{2\pi i n(\sigma - \tau)}{\ell} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

可以看到相当于两个开弦谱的叠合。同样正则量子化得到弦激发粒子谱：

$$|N, \tilde{N}; k\rangle = \left[\prod_{i=2}^{D-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{-n}^i)^{N_{in}} (\tilde{\alpha}_{-n}^i)^{\tilde{N}_{in}}}{(n^{N_{in}} N_{in}! n^{\tilde{N}_{in}} \tilde{N}_{in}!)^{1/2}} \right] |0, 0; k\rangle \quad (2.20)$$

闭弦周期性边界条件要求左右模满足 $N = \tilde{N}^{\textcircled{1}}$ 。同样可以得到闭弦质量谱：

$$m_{\text{cl}}^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) = \frac{4}{\alpha'}(N - 1) \quad (2.21)$$

本论文主要考察无质量激发态，也就是开弦闭弦第一激发态，事实上更高激发态在 $\alpha' \rightarrow 0$ 的场论极限下会被压低。从上面的弦粒子谱不难看出开弦第一激发态对应无质量规范玻色子，而闭弦第一激发态对应引力子，伸缩子以及 B -场。

2.1.3 协变量子化

光锥量子化相当于先取规范使用约束条件后量子化，协变量子化相当于先量子化后使用约束条件，好处是明显地保留了庞加莱对称性。下面仍以开弦为例，好处是左右模重合。

要求 $T_{ab} = 0$ 从物理上看应当是要求其作用于量子化后的希尔伯特空间上是零算子：

$$T_{ab} = 0 \xrightarrow{\text{量子化}} T_{ab} |\psi\rangle = 0 \Rightarrow L_n^m |\psi\rangle \sim 0 \quad (2.22)$$

其中 L_n 是能动张量模展开后的 Virasoro 代数生成元：

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad (2.23)$$

上述条件相当于要求物理态为 Virasoro 最高权态^②：

$$(L_n^m + A\delta_{n,0})|\psi\rangle = 0 \quad \text{for } n \geq 0 \quad (2.24)$$

由于不用选取光锥规范，2.122.19中模展开应当将指标 i 替换为一般的 μ ，现在态空间由 α^μ 生成。2.24的限制并不够，因为 $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ 中还包含一些零模态，与物理态均正交，张成的希尔伯特空间记为 $\mathcal{H}_{\text{null}}$ ，所以和物理过程是解耦的，应当看作是规范变换的生成元，所以应当有下面的等价关系：

$$|\psi\rangle \sim |\psi\rangle + |\chi\rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{\text{phys}}, \chi \in \mathcal{H}_{\text{null}} \quad (2.25)$$

^① 注意这一条件并非总是满足，对于 T 紧致化后的靶空间，左右模间可以相差缠绕数。

^② A 是待定常数，不少文献称为正规排序常数，计算上来源于 NOP 序和产生湮灭算符排序之间相差的常数。本质上来源于真空能贡献。

最终我们得到协变微扰论的态空间：

$$\mathcal{H}_{\text{CQ}} \simeq \frac{\mathcal{H}_{\text{phys}}}{\mathcal{H}_{\text{null}}} \quad (2.26)$$

计算此商空间便得到弦的激发态，而且自洽性自然要求 $A = -1, D = 26$ ，开弦快子态和无质量激发态构造如下：

$$\begin{aligned} |0; k\rangle, \quad m^2 &= -\frac{1}{\alpha'}; \\ e_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle, \quad m^2 &= 0, k^\mu e_\mu = 0, \\ e_\mu &\cong e_\mu + ck_\mu. \end{aligned} \quad (2.27)$$

同时叠合关系给出闭弦激发态为：

$$\begin{aligned} |0; k\rangle, \quad m^2 &= -\frac{4}{\alpha'}; \\ e_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; k\rangle, \quad m^2 &= 0, k^\mu e_{\mu\nu} = k^\nu e_{\mu\nu} = 0, \\ e_{\mu\nu} &\cong e_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu + k_\mu b_\nu, a \cdot k = b \cdot k = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

好处是态的构造明显保留庞加莱对称性，从而为计算 Lorentz 不变的弦振幅带来了方便。

2.2 路径积分量子化

不同于量子场论，弦论的相互作用并不需要在作用量中引入新的项来实现，而是直接由不同的世界面拓扑来实现。

2.2.1 Polyakov 路径积分

为了使路径积分良定，先利用 Wick 转动将世界面度规从 $(-, +)$ 的二维闵氏度规 γ_{ab} 转为 $(+, +)$ 的二维欧式度规 g_{ab} 。单纯从 $\text{diff} \times \text{Weyl}$ 不变性出发可以在 2.2 基础上额外引入一项正比于：

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma g^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} dsk \quad (2.29)$$

其中 k 是测地曲率，利用 Gauss-Bonnet 定理不难看出这一项正是欧拉示性数。由于二维几何均共形平坦，所以可以选取等温坐标使得：

$$g = e^{2\omega} dz d\bar{z} \quad (2.30)$$

再利用 Weyl 不变性可以将其变为平坦欧氏度规，也即选取共形规范。在这一规范下^①，利用 Faddeev-Popov 方法引入费米统计的 b, c 鬼场消去 $\text{diff} \times \text{Weyl}$ 规范

^① 用 \hat{g} 表示对应的规范固定选取。

冗余, 弦论配分函数可以写作:

$$Z[\hat{g}] = \sum_{\text{worldsheet topologies}} \frac{1}{V_{\text{CKG}}} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}[b\tilde{b}] \mathcal{D}[c\tilde{c}] \exp(-S_m - S_g) \quad (2.31)$$

这里物质场和鬼场作用量分别为:

$$S_m = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu, \quad S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \tilde{b}\partial\tilde{c}) \quad (2.32)$$

注意 $\text{diff} \times \text{Weyl}$ 规范固定后其实还剩下共形规范自由度没有消去^①, 所以这时 S_m 和 S_g 都对应二维共形场论。所以弦论问题就被转化为了二维共形场论问题。而且可以看到弦论中的展开不同于量子场论中按照顶点数目展开, 弦论是按照拓扑展开, 相互作用系数有如下关系:

$$g_0^2 \sim g_c \sim e^\lambda \quad (2.33)$$

注意, 对于开弦, 由于端点的世界线会构成世界面的边界, 所以开弦实际上需要使用边界共形场论进行研究。此时左右模均定义在上半复平面上, 而且 **Neumann** 边界条件^②体现在实轴上左右模的对应:

$$T(z) = \tilde{T}(\bar{z}), \quad c(z) = \tilde{c}(\bar{z}), \quad b(z) = \tilde{b}(\bar{z}), \quad \text{Im } z = 0 \quad (2.34)$$

这时只能在上复平面讨论共形场论, 不过可以用加倍技巧将上复平面右模的信息转移到下复平面左模场的定义:

$$T(z) := \tilde{T}(\bar{z}'), \quad b(z) := \tilde{b}(\bar{z}'), \quad c(z) := \tilde{c}(\bar{z}') \quad z' = \bar{z}, \text{Im } z < 0 \quad (2.35)$$

对左模场延拓^③之后左模场已然包含右模场的所有信息, 所以可以转换为在整个复平面上仅仅讨论左模场的共形场论。下面的简单例子便能说明加倍技巧:

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(dz z^{m+1} T(z) - d\bar{z} \bar{z}^{m+1} \tilde{T}(\bar{z}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+1} T(z) \end{aligned} \quad (2.36)$$

开弦左右模重叠, 围道积分由于边界的限制只能在上复平面进行。利用加倍技巧将右模的信息转换为左模在下复平面上的信息, 从而将边界共形场论转换为一

① 对高亏格曲面其实还会有额外的零模鬼场插入, 这里留待第4章讨论

② 鬼场也会有类似的限定

③ 这种延拓技巧在数学上依赖于 Schwarz 反射原理

般的共形场论，而且只剩下左模场参与计算。所以闭弦和开弦的计算是一样的，只需要注意开弦只保留左模，或者简单认为左右模场此时相等^①。

另外，根据二维闭曲面分类定理，对世界面拓扑求和也可以是不可定向曲面，对不可定向曲面求和意味着我们将世界面宇称 $\sigma' = \ell - \sigma^2$ 作为规范对称性引入。这时的弦论成为不可定向弦。考虑世界面宇称变换由 Ω 算符生成，对于开弦有：

$$\Omega \alpha_n^\mu \Omega^{-1} = (-1)^n \alpha_n^\mu \quad (2.37)$$

而对于闭弦则会左右模互换：

$$\Omega \alpha_n^\mu \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_n^\mu, \quad \Omega \tilde{\alpha}_n^\mu \Omega^{-1} = \alpha_n^\mu \quad (2.38)$$

且假设真空态 $\Omega = +1$ ，在这一约定下，自洽的弦相互作用要求不可定向弦只剩下 $\Omega = +1$ 的激发态。本论文主要考虑可定向弦的树级振幅计算。

2.2.2 弦振幅

类似量子场论中振幅依赖于渐进态的定义，弦论中我们提到振幅都是指无穷远处的弦激发态演化后的相互作用关联函数。取等温坐标后，利用共形场论的态算符对应，无穷远处的激发态相当于世界面某个点上插入对应的顶角算符 \mathcal{V} ，用图示来看这个过程相当于图2.1。受前面配分函数的启发，由此可以写下弦振

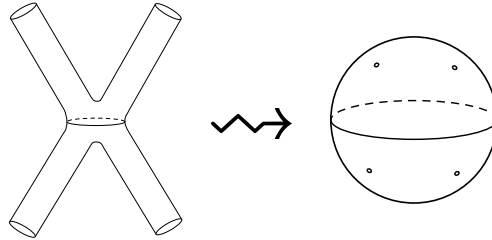


图 2.1 态算符对应与弦振幅

幅^②：

$$\begin{aligned} S_{j_1 \dots j_n}(k_1, \dots, k_n) &= \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^n \int d^2 \sigma_i g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \right\rangle \right\rangle \\ &= \sum_{\text{worldsheet topologies}} e^{-\lambda \chi} \int \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} e^{-S_m} \prod_{i=1}^n \int d^2 \sigma_i g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i) \end{aligned} \quad (2.39)$$

① 但是注意严谨来讲边界条件只给出实轴上相等，是利用加倍技巧之后才在复平面上等同，而且这种分析技巧只适用于复平面，对于本文主要讨论的树级振幅已足够。

② 也称作弦的 S 矩阵。

上式中我们使用 $\langle\bullet\rangle$ 是为了提醒读者规范固定时可能的零模鬼场插入。而且上式我们并没有利用鬼场进行规范固定，这个问题我们留待到第4章解决。

2.2.3 顶角算符

利用前面正则量子化得到的激发态，只需要做如下替换便可以得到对应的顶角算符：

$$\alpha_{-m}^\mu \rightarrow i \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{1/2} \frac{1}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0), \quad |0; k\rangle \rightarrow e^{ik \cdot X(0,0)} \quad (2.40)$$

由于算符乘积展开（OPE）在插入点相同时奇异，所以替换完成后还需要对算符取正规排序乘积（NOP）保证非奇异。这其实相当于一种重整化的选取，本论文均采用共形场论的 NOP 技术来重整化。

一般我们把上述构造的算符与世界面上积分 $\int d\sigma^{2\oplus}$ 共同称作积分顶角算符，记作 U ，积分的存在使得顶角算符整体共形权为 0，从而最终的振幅具有共形不变性。

2.3 BRST 量子化

本节的核心目标是使用 BRST 量子化方法给出后续振幅计算中规范固定需要引入的无积分顶角算符。

考虑关于物质场 ϕ_i 的某个一般性量子理论， i 以及后续讨论涉及到的指标可以连续或离散，连续部分标记场的坐标依赖，离散部分则标记场的种类。假设所考虑体系的规范对称性生成元 δ_α 具有类似李代数的结构：

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma \quad (2.41)$$

利用 FP 方法引入鬼场进行规范固定，规范选取为：

$$F^A(\phi) = 0 \quad (2.42)$$

则配分函数计算为：

$$\int \frac{[d\phi_i]}{V_{\text{gauge}}} \exp(-S_1) \rightarrow \int [d\phi_i dB_A db_A dc^\alpha] \exp(-S_m - S_g - S_f) \quad (2.43)$$

这里新引入了鬼场 S_g 和规范固定项 S_f ：^②

$$S_g = b_A c^\alpha \delta_\alpha F^A(\phi), \quad S_f = -i B_A F^A(\phi) \quad (2.44)$$

① 注意开弦由于插入点在边界上，所以积分在边界上进行。

② 前面2.31没有 S_f 是因为规范选取完全消除了 g 的规范冗余，不难看到 B_A 积分后的效果是引入 $\delta(F^A(\phi))$ ，所以对 g 再次进行路径积分便完全移除了这一项。

以上无非是 FP 鬼场的一般做法，重点在于上述体系存在一个全局对称性：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{B}}\phi_i &= -i\epsilon c^\alpha \delta_\alpha \phi_i, & \delta_{\mathbf{B}}B_A &= 0, \\ \delta_{\mathbf{B}}b_A &= \epsilon B_A, & \delta_{\mathbf{B}}c^\alpha &= \frac{i}{2}\epsilon f^\alpha_{\beta\gamma} c^\beta c^\gamma.\end{aligned}\quad (2.45)$$

对应的 Noether 荷记作 Q_B ，其中 ϵ 是格拉斯曼变量。 c 的鬼数为 +1， b 和 ϵ 鬼数为 -1。所以 Q_B 具有 +1 的鬼数，而且具有幂零性：

$$Q_B^2 = 0 \quad (2.46)$$

考虑物质场和鬼场共同生成的希尔伯特空间，以鬼数为分次可以立即写下 BRST 上链复形 C_{BRST}^\bullet ：

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{g-1} \xrightarrow{Q_{g-1}} \mathcal{H}_g \xrightarrow{Q_g} \mathcal{H}_{g+1} \longrightarrow \cdots \quad (2.47)$$

BRST 量子化则是要求物理态处于鬼数为 0 的上同调群中^①，这其实是要求可观测量具有 BRST 不变性：

$$\mathcal{H}_{\text{BRST}} \cong H^0(C_{\text{BRST}}^\bullet) \quad (2.48)$$

接下来我们将上面一般性的方法应用到弦论中，BRST 荷有如下形式：

$$Q_B = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j_B - d\bar{z} \tilde{j}_B), \quad j_B := cT^m + :bc\partial c: + \frac{3}{2}\partial^2 c \quad (2.49)$$

$Q_B^2 = 0$ 要求 $\{Q_B, Q_B\} = 0$ ，这对应 j_B OPE 的一阶奇点：^②

$$j_B(z)j_B(w) \sim -\frac{c^m - 18}{2(z-w)^3} c\partial c(w) - \frac{c^m - 18}{4(z-w)^2} c\partial^2 c(w) - \frac{c^m - 26}{12(z-w)} c\partial^3 c(w) \quad (2.50)$$

由此可以看出自洽量子化要求 $c^m = 26$ ，也即靶空间维数为 26。另外，物理态在壳要求：

$$L_0|\psi\rangle = \{Q_B, b_0\}|\psi\rangle = 0 \Rightarrow b_0|\psi\rangle = 0 \quad (2.51)$$

为了构造无质量态无积分顶角算符，首先使用 bc 鬼场物质场 $\partial^n X$ 以及平面波 $e^{ip\cdot X}$ 构造出最一般的共形权为 0 的顶角算符：^③

$$V_{\text{general}} =: (\alpha \partial c + \beta c \partial^2 c + \gamma c \partial c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \zeta_\mu c \partial c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip\cdot X} : \quad (2.52)$$

① 对于无积分顶角算符则是要求在鬼数为 1 的上同调群中，而且额外要求是共形不变的，也就是限制在共形权为 0 的子复形中讨论上同调。

② 这些复杂的 OPE 计算可以使用笔者编写的程序完成：<https://github.com/WHUZF/MMA/tree/main/OPE>

③ 注意我们这里忽视了鬼数为 1 这个条件，后面会在求 BRST 恰当项中引入。也可以先引入这个条件使得计算更加简便，但我们这里考虑最一般的构造帮助读者熟悉 OPE 计算。

上述对态的要求可以转化为对算符的要求:

$$Q_B |\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow [Q_B, V] = 0 \Leftrightarrow Q_B V \sim 0 \quad (2.53)$$

首先作用在壳条件得到:

$$\begin{aligned} b_0 V_{\text{general}} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z b : (\alpha \partial c + \beta c \partial^2 c + \gamma c \partial c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \zeta_\mu c \partial c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left(\frac{\alpha}{z} - \frac{\gamma c \partial^2 c}{z} - \frac{\zeta_\mu (c \partial X^\mu)}{z} \right) e^{ip \cdot X} : = 0 \\ &\Rightarrow \alpha, \gamma, \zeta^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

剩下的可能的顶角算符形式为:

$$V_{\text{general}} \rightarrow V_1 = : (\beta c \partial^2 c + \epsilon_\mu c \partial X^\mu + \lambda) e^{ip \cdot X} : \quad (2.55)$$

继续作用式2.49, 注意这里考虑开弦, 只有左模:

$$\begin{aligned} Q_B V_1 &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[-\frac{i\alpha'}{4z} \epsilon \cdot : \partial^2 c e^{ip \cdot X} c : + \frac{\lambda}{z} c \partial e^{ip \cdot X} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0, \quad \epsilon \cdot p = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

注意到 BRST 算符并不改变共形权, 所以 BRST 恰当部分应当也由 V_{general} 中的项生成, 另外注意到鬼数为 1 的恰当项应当由鬼数为 0 的部分生成, 而鬼数为零的算符只有平面波, 所以我们立刻写下:

$$Q_B \lambda : e^{ip \cdot X} := i\lambda : c p \cdot \partial X e^{ip \cdot X} : \quad (2.57)$$

这给出限制 $\epsilon \cong \epsilon + p$, 另外回到我们所关注的鬼数 1 上同调群, $c \partial^2 c$ 鬼数为 2 可以扔掉^①, 最终得到顶角算符:

$$V_{\text{phys}} = : \epsilon_\mu c \partial X^\mu e^{ip \cdot X} :, \quad \epsilon \cdot p = 0, \epsilon^\mu \cong \epsilon^\mu + p^\mu \quad (2.58)$$

上述计算推广到一般的态是显然的, 开弦态只使用了左模场, 闭弦态只需要额外使用右模场构造 V 即可。另外, 虽然看似无积分顶角算符关联函数明显依赖于世界面坐标, 后面会发现这一点被 V_{CKG} 消除。

不难看出无积分顶角算符和积分顶角算符的联系为 $V = cU$ ^②, 这是 bc 鬼场的性质, 即便是 RNS 超弦这一点也成立, 更重要的是这一联系也可以用 BRST

① 凑巧它其实也是 BRST 恰当的

② 如果是闭弦则是 $V = c\bar{c}U$

荷表述为：

$$Q_B U = \partial V \quad (2.59)$$

这在后面构造纯旋量超弦的积分顶角算符中非常重要。

2.4 鬼场的真空

现在我们来简要讨论上述结果的物理意义，这对后面构造 RNS 超弦顶角算符具有很大的意义。首先我们需要区分一下共形场论中的 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变真空 $|1\rangle$ 。以及物理上关注的真空 $|0\rangle$ 。对于共形权为 h 的主场，其 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变真空定义为：

$$\phi_{n>-h} |1\rangle = 0 \quad (2.60)$$

而物理上真空态要求能量最低， $H \sim L_0$ 而且注意到 $[L_n, \phi_m] = [(h-1)n-m]\phi_m$ ，所以一切 $\phi_{m>0}$ 都会降低能量（共形权），所以：

$$\phi_{n>0} |0\rangle = 0 \quad (2.61)$$

不难看出两者一般而言是不同的，这一点对于鬼场这种中心荷为负数的奇异系统尤为显著。

2.5 *BV 形式

BRST 量子化方法适用的前提是规范对称性满足 2.41 的结构，但如果这一结构不满足，比如结构常数不再是常数，而与场本身有关，而且不再是李代数闭的。BRST 量子化就需要被扩充为更一般的 Batalin-Vilkovisky 量子化。更多细节可以在 [7-9] 中找到。

现在考虑下面更一般的规范对称性满足的代数：

$$[\delta_a, \delta_b] = F_{ab}^c(\phi) \delta_c + \lambda_{ab}^i \frac{\delta S_m}{\delta \phi^i} \quad (2.62)$$

后面一项意味着在壳情况下规范对称性还是闭的，这是物理上的要求，要求在壳时对称性构成一个群。BV 形式的核心思想是把鬼场不单单看作是人为引入的消去规范的场，而是看作与物质场同等地位。因为对于更复杂的规范对称性的情况，可能 δ_a （第零级规范）之间不是独立的，也就是说 2.62 是一个可约代数^①。也就是说即便是规范对称性的参数之间仍有规范不变性（第一级规范），这意味

^① p -形式规范对称性就是个很好的例子，因为 $d^2 = 0$ ，所以规范参数之间亦有规范不变性，而 Yang-Mills 理论是 1-形式的理论，所以用 BRST 方法就能很好地处理。

着为了消去规范对称性引入鬼场，而为了消去规范对称性参数之间的对称性又要引入鬼场的鬼场，如此循环往复，直到消到第 ℓ 级规范时 2.62 不可约。上述过程可以用图表 2.1 描述。

level 0	$\delta\phi^i = \epsilon_0^{a_0} R_{a_0}^i(\phi^i)$	$c_0^{a_0}$
level 1	$\delta c_0^{a_0} = \epsilon_1^{a_1} R_{a_1}^{a_0}(\phi^i, c_0^{a_0})$	$c_1^{a_1}$
...
level $n+1$	$\delta c_n^{a_n} = \epsilon_{n+1}^{a_{n+1}} R_{a_{n+1}}^{a_n}(\phi^i, c_0^{a_0}, \dots, c_n^{a_n})$	$c_{n+1}^{a_{n+1}}$

表 2.1 BV 形式的鬼场

现在把所有的鬼场和物质场看作同等地位：

$$\psi^r = \{c_n^{a_n}\}_{n=-1, \dots, \ell}, \quad c_{-1} := \phi \quad (2.63)$$

第 0 级物质场鬼数为 0，且格拉斯曼偶宇称，每向上一级鬼数增加 1，且格拉斯曼反宇称。同时引入对应的反场 $\psi_r^{*\textcircled{1}}$ 。和对应的“正”场之间格拉斯曼宇称相反，且鬼数相加为 -1 ，反场由反括号诱导的对偶空间定义：

$$(A, B) = \frac{\partial_R A}{\partial \psi^r} \frac{\partial_L B}{\partial \psi_r^*} - \frac{\partial_R A}{\partial \psi_r^*} \frac{\partial_L B}{\partial \psi^r}, \quad \partial_R := \vec{\partial}, \partial_L := \overleftarrow{\partial} \quad (2.64)$$

量子化后的路径积分表示为：

$$Z = \int d\psi^r d\psi_r^* e^{-W[\psi^r, \psi_r^*]/\hbar} \quad (2.65)$$

推广的 BRST 对称性由下式生成：

$$\delta_\epsilon F = \epsilon Q_B F = (W, F) - \hbar \Delta F, \quad \Delta := \frac{\partial_R}{\partial \psi_r^*} \frac{\partial_L}{\partial \psi^r} \quad (2.66)$$

为了自洽地量子化，必须要求 $\delta_\epsilon W = 0$ ，这相当于：

$$(W, W) - 2\hbar \Delta W = 0 \quad (2.67)$$

上式常被称为量子主方程，此方程用于将 S_m 扩充为更一般的满足推广的 BRST 对称性的作用量 W 从而进行量子化。 Q_B 依旧是幂零算符，计算其上同调便可得到可观测量，这一点与 BRST 形式是一致的。

^① 注意这里我们使用 \bullet^* 而不是 $\tilde{\bullet}$ ，因为前面 \tilde{b} 虽然我们称为“反鬼场”，但其实只是鬼场的右模部分。

3 Ramond-Neveu-Schwarz 超弦

本章使用超对称共形场论 (SCFT) 的方法介绍世界面超对称的 RNS 超弦理论。更多细节详见^[10-11]。

3.1 世界面超场

考虑世界面超对称, Polyakov 作用量 2.2 中为 X 引入世界面自旋 $\frac{1}{2}$ 超伴场 Ψ , 为 γ 引入世界面自旋 $\frac{3}{2}$ 超伴场 χ , 他们都是世界面上的二维旋量。在世界面 Wick 转动后, RNS 超弦作用量为^①:

$$S_{\text{RNS}}[X, \Psi, g, \chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{\alpha'} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \bar{\Psi}^\mu \rho^\alpha \nabla_\alpha \Psi_\mu + (\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \Psi^\mu) \left(\frac{1}{\sqrt{2}\alpha'} \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{8} \bar{\chi}_\beta \Psi_\mu \right) \right] \quad (3.1)$$

对于闭弦, 上述作用量的超对称荷有左右模部分, 所以实际上是 $\mathcal{N} = 2$ 超对称, 而超弦只有左模有贡献, 所以是 $\mathcal{N} = 1$ 超对称。后面将会看到他们低能极限下的谱分别是 $\mathcal{N} = 2$ 超引力以及 $\mathcal{N} = 1$ 超对称 Yang-Mills 理论。

现在 $\text{diff} \times \text{Weyl}$ 不变性被提升为 $\text{Super-diff} \times \text{Super-Weyl}$ 不变性, 类似 2.30 取等温坐标到共形规范下消去 g , 这里我们可以取超共形规范消去 χ , 并且将 Majorana 旋量^② Ψ 分解成左右手 Weyl 旋量 $\psi/\bar{\psi}$ 。最终得到世界面上的超对称共形场论的物质项:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \partial \bar{\psi}_\mu \right) \quad (3.2)$$

同时可以引入玻色鬼场 bc 以及费米鬼场 $\beta\gamma$:

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \bar{b} \partial \bar{c} + \beta \bar{\partial} \gamma + \bar{\beta} \partial \bar{\gamma}) \quad (3.3)$$

共形变换以及相应的超共形变换的能动张量为:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_m}{\delta g} \sim T^m(z) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X : - \frac{1}{2} : \psi \cdot \partial \psi : \\ \frac{\delta S_m}{\delta \chi} \sim G^m(z) &= i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

① ρ 是二维 gamma 矩阵。

② 二维情况下总可以选取 ρ 的实表示从而要求 Ψ 为实的, 这在二维情况下意味着是 Majorana 旋量

由于 g, χ 都没有动力学, T^m, G^m 应当为 0 类似 2.22 作为约束出现。另外 $bc\beta\gamma$ 鬼场总共对中心荷贡献 -15 , 而玻色场贡献 D , 费米场贡献 $\frac{D}{2}$, 所以共形反常消去必须要求:

$$\boxed{D_{\text{super}} = 10} \quad (3.5)$$

后面的讨论主要针对左模。类似开弦边界条件 2.9 的边界条件选取消去作用量泛函导数的边界项贡献, 最终加倍技巧后体现为左右模相等 2.35。而对 RNS 超弦, 类似的条件会导致世界面超场左右模之间相差正负号, 从而给出两种不同的超场模展开:

$$\psi_{\text{NS}}^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_r^\mu z^{-r - \frac{1}{2}}, \quad \psi_{\text{R}}^\mu(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^\mu z^{-n - \frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

世界面超场应当看作是在复平面的双覆盖黎曼面上定义。世界面超流 G 以及 $\beta\gamma$ 鬼场同样可以分为 NS 和 R 两个部分, 只是 z 的指数依赖要根据共形权重写。后面会看到 R 部分负责产生费米子, NS 部分负责产生玻色子。对于闭弦, 边界条件 2.8 变化为超场可以满足周期性或者反周期性。左右模部分可以分别处于 NS, R 部分, 所以总共有四个部分。

最后来讨论一下费米物质场的真空。玻色场的真空由 $\alpha_{n \geq 1}^\mu$ 湮灭的 $|0; p^\mu\rangle$ 生成, 其中 $p^\mu \propto \alpha_0^\mu$ 用来标记真空动量 p^μ 。类似的, 费米物质场真空也由对应的湮灭算符产生:

$$\psi_{r \geq \frac{1}{2}}^\mu |0, p\rangle_{\text{NS}} = 0, \quad \psi_{n \geq 1}^\mu |0, p\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (3.7)$$

ψ_0 类似 α_0 既不是产生也不是湮灭算符, 而是用于标记简并的真空态。不过 ψ_0 只存在于 R 部分真空, 所以 NS 部分的真空依旧直接是 $|0\rangle_{\text{NS}}$, 而且这也正是 $\frac{1}{2}$ 共形权的 ψ 场的 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变真空。注意到 ψ_0 之间满足:

$$[\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = \eta^{\mu\nu} \xrightarrow{\Gamma \sim \sqrt{2}\psi_0} [\Gamma^\mu, \Gamma^\mu] = 2\eta^{\mu\nu} \quad (3.8)$$

也就是说 R 部分真空应当处于 $SO(9, 1)$ 的旋量表示也就是十维 Clifford 代数表示中, 是具有 $2^5 = 32$ 个分量的 Dirac 旋量 $|A'\rangle_{\text{R}} = |A\rangle \oplus |\dot{A}\rangle$, 现在考虑 $G^m = 0$ 的限制要求, 类似 2.24, 对 R 部分有:

$$G_{n \geq 0}^m |\text{phys}\rangle_{\text{R}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \cdot \psi_{m-n} |\text{phys}\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (3.9)$$

这个时候由于3.4中 G^m 部分 ψ 与 ∂X 之间 OPE 正则, 所以不需要引入类似2.24的正规排序常数^①。考虑 $n = 0$ 时类似 $L_0 = 0$ 的质量在壳条件, 物质场超流要求的在壳条件可以改写为下面的 Dirac-Ramond 方程:

$$\left(p \cdot \Gamma + \frac{2\sqrt{2}}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \psi_n + \psi_{-n} \cdot \alpha_n) \right) |\text{phys}\rangle_R = 0 \quad (3.10)$$

上述方程对真空态退化为 $p \cdot \Gamma |0\rangle = 0$ 即 Dirac 方程。这一方程将每个 Weyl 分量从 16 缩减到 8。后面 GSO 投影会对这一自由度再次进行修正。

NS 真空是 $SL(2, \mathbb{C})$ 不变真空, 而 R 真空实际上可以看作是 NS 真空的激发态, 自旋场将这两个真空联系起来:

$$|A'\rangle_R = \lim_{z \rightarrow 0} S_{A'}(z) |0\rangle_{NS}, \quad {}_R\langle A'| = \lim_{z \rightarrow \infty} {}_{NS}\langle 0| S_{A'}(z) z^{D/8} \quad (3.11)$$

$z^{D/8}$ 的出现是 BPZ 共轭的要求^[12], S_A 的共形权为 $\frac{D}{16} = \frac{5}{8}$, 其来自于 R 部分物质场真空能贡献, 相应的 NS 部分物质场真空能贡献为 0:

$$a_R^m = \frac{1}{24} c^m + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) D = \frac{1}{16} D \quad (3.12)$$

能动张量非主场, 共形变换贡献
玻色场贡献 费米场贡献

3.2 正则量子化

本节使用光锥量子化处理 RNS 超弦, 好处是规范完全固定, 只用讨论物质场, 能方便看出粒子谱的超对称性^②。后面再使用 BRST 量子化来构造协变的顶角算符, 后面的讨论以开弦为例。

玻色场的光锥规范依旧和第2章的讨论相同, 费米场 NS 部分的光锥规范有如下的简单形式:

$$\psi^+ = 0 \quad (3.13)$$

R 部分同上式一样, 唯一不同是保留零模, 用于生成简并 R 真空。而 ψ^- 部分同样也可以用横向振动激发描述。所以 ψ^\pm 不再拥有动力学, 我们只需要关注横向振动激发。粒子谱由 $\psi_\bullet^i, \alpha_\bullet^i$ 作用在 R 和 NS 真空上得到。

^① 这其实也是因为鬼场和物质场对 R 真空的总真空能贡献为 0。

^② 协变量子化可见 Oliver Schlotter 的在线讲义。

NS 部分的质量谱可以从 L_0^m 最高权限制给出的在壳条件推出：

$$\alpha' m_{NS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r \psi_{-r}^i \psi_r^i - \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

这里 $-\frac{1}{2}$ 来源于3.12类似的计算，注意还要加上鬼场的贡献，同理 R 部分有：

$$\alpha' m_R^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \psi_{-n}^i \psi_n^i \quad (3.15)$$

不过从3.14能看出 NS 部分依旧存在快子态。

3.3 GSO 投影

RNS 形式只保证了世界面上的超对称性，而我们更应当要求保留十维靶空间的超对称性。这一点需要在量子化的基础上剔除一些态。定义如下的 G 宇称算符：

$$\begin{aligned} G_{NS} &= (-1)^{F+1} = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} \psi_{-r}^i \psi_r^i + 1} \\ G_R &= \Gamma_{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{-n}^i \psi_n^i} \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $\Gamma_{11} = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_9$ 。GSO 投影要求 NS 部分的态满足 $G_{NS} = +1$ ，显然快子态不满足这一要求，所以被剔除了，基态变为无质量矢量玻色子激发 $\psi_{-1/2}^i |0\rangle_{NS}$ 。对于 R 部分，为了要求处于 G_R 本征态，则是要求剔除掉一般的手征。也就是说如果我们选取 $|\alpha; +\rangle_R$ ^① 作为基态，那么投影到 $G_R = +1$ ，反之投影到 $G_R = -1$ 。也就是说在 GSO 投影下，R 部分基态从 $8 \oplus 8$ 破缺成了仅含一个手征 8。对于开弦来说，取左右手征完全只是人为约定。

但是对于闭弦，左右模的 R 部分真空完全可以取相同或者相反手征，然后再把两部分 GSO 投影后的谱拼起来，这就得到了表3.1所示两种不同的自洽的闭弦构造。

	Type IIA	Type IIB
$m^2 = 0$	$ \dot{\alpha}; -\rangle_R \otimes \alpha; +\rangle_R$	$ \alpha; +\rangle_R \otimes \alpha; +\rangle_R$
	$\tilde{\psi}_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes \psi_{-1/2}^j 0\rangle_{NS}$	$\tilde{\psi}_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes \psi_{-1/2}^j 0\rangle_{NS}$
	$\tilde{\psi}_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes \alpha; +\rangle_R$	$\tilde{\psi}_{-1/2}^i 0\rangle_{NS} \otimes \alpha; +\rangle_R$
	$ \dot{\alpha}; -\rangle_R \otimes \psi_{-1/2}^i 0\rangle_{NS}$	$ \alpha; +\rangle_R \otimes \psi_{-1/2}^i 0\rangle_{NS}$

表 3.1 Type IIA/B 超弦

① 其实记号 α 就已经表明了 $\Gamma_{11} = +1$ ，这里后面加个 + 只是为了符号更加清晰。

他们是可定向的闭弦理论，本身构造是不包含超弦的，为了引入开弦可以通过额外引入 D 膜。现在来观察无质量谱构成的超多重态：

$$\text{type IIA: } (8_v + 8_c) \otimes (8_v + 8_s), \quad \text{type IIB: } (8_v + 8_c) \otimes (8_v + 8_c) \quad (3.17)$$

- NS-NS 部分：A/B 型弦论都是 $8_v \otimes 8_v = 1 + 28 + 35 = \phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus G_{\mu\nu}$ ，分解为伸缩子，反对称 B -场以及引力子
- NS-R 和 R-NS 部分：注意到 $8_v \otimes 8_s = 8_c \oplus 56_s$ 以及 $8_v \otimes 8_c = 8_s \oplus 56_c$ 。所以 A/B 型弦论的两个部分都给出伸缩超伴子和引力超伴子。但是 A 型超弦 NS-R 和 R-NS 的手性不一样，B 型则相同
- R-R 部分：对于 A 型超弦 $8_c \otimes 8_s = 8_v \oplus 56_t$ ，分解为 1-形式（矢量场）规范场和 3-形式规范场；对于 B 型超弦 $8_c \otimes 8_c = 1 + 28 + 35_+$ ，分解为 0-形式（标量场）、2-形式和 4-形式规范场。这些场统称为 R-R 形式场，类似 Yang-Mills 场作为 1-形式场 A^μ 在世界线上的拉回与点粒子相互作用，高形式场可以与更高维带 R-R 荷的 D 膜相互作用，这是 D 膜作为 BPS 态在超弦中稳定存在的关键。

而且不难看出费米子自由度和玻色子自由度至少在 $m^2 = 0$ 层面上是吻合的。实际上 GSO 投影后，玻色子（NS 部分生成）和费米子（R 部分生成）生成函数为：

$$f_{\text{NS}}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}} \left[\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 - \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1-w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 \right] = \frac{\vartheta_3^4(\tau) - \vartheta_4^4(\tau)}{2\eta^{12}(\tau)}$$

$$f_{\text{R}}(w) = 8 \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^m}{1-w^m} \right)^8 = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{2\eta^{12}(\tau)} \quad (3.18)$$

其中 $\vartheta_k(\tau)|_{w:=e^{2\pi i\tau}}$ 是 Jacobi- θ 函数， $\eta(\tau)|_{w:=e^{2\pi i\tau}}$ 是 Dedekind- η 函数，定义可在^[3]中找到。利用 $\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4 = \vartheta_2^4$ ^[13]可立刻说明上述两生成函数等价，从而说明了在自由度层面靶空间超对称的保留。

本论文主要考虑开弦盘面振幅的计算，构造中即包含开弦谱的理论为 I 型超弦。其可以看作是由 IIB 型超弦将世界面宇称提升为规范对称性，从而取世界面 \mathbb{Z}_2 轨形投影得到，轨形不动点带来 $O9$ 平面自然使得靶空间存在 $D9$ 膜，而且由于需要消去引力反常，所以需要开弦带有 $SO(32)$ 或 $E_8 \times E_8$ 对称性^①，只有前者对应 I 型超弦，所以要求有 32 个 $D9$ 膜存在，后者可以在杂交弦中发挥作用。

^① 利用 Green-Schwarz 机制消去反常还允许 $E_8 \times U(1)^{248}$ 和 $U(1)^{496}$ ，不过^[14]指出这两个李群其实无法自治消去反常。

这样得到的超弦也可以称作 **IB** 型超弦, **IIA** 型超弦由于左右模手征不同, 不存在世界面宇称对称性, 所以无法直接通过轨形投影得到对应得 **I** 型超弦理论, 但是可以先通过 **T** 对偶将 **IIA** 型超弦转换为 **IIB** 型超弦, 再同时取世界面和靶空间 \mathbb{Z}_2 轨形投影得到 **IA** 型超弦。由于宇称作为规范对称性存在, 所以 **I** 型超弦是非定向超弦。

本论文并不详细讨论自洽弦理论的构造问题, 仅仅考虑弦论振幅本身的计算问题。

3.4 RNS 超弦顶角算符

3.4.1 超鬼场真空

由于 **BRST** 量子化中鬼场也会同样贡献产生算符, 前面玻色弦中 bc 鬼场真空存在一些问题, $\beta\gamma$ 鬼场则更加麻烦。

3.5 * 弦理论之间的对偶关系

4 弦微扰论

对所有黎曼曲面的嵌入求和

5 Berkovits 超弦

本节介绍靶空间超对称的纯旋量超弦，由 Berkovits 在 2000 年发现^[15]。从历史上看最早试图从靶空间超对称引入超弦的形式是 Green-Schwarz 超弦，但是只能在非协变的光锥坐标下量子化。后来 Siegle 改进了这一形式但存在共形反常且与 RNS 形式不等价等诸多问题。Berkovits 在 Siegle 的研究基础之上进行改进得到了纯旋量超弦。我们不打算沿用历史性的介绍（引用 `mafra`），而改用自上而下的方式。本节首先从更简单的超对称点粒子模型出发，然后推广得到纯旋量超弦的作用量，更多细节详见 [\[1\]](#)。

6 BCJ 分子的构造

6.1 色-运动学对偶

6.2 利用纯旋量超弦构造 Yang-Mills 理论的树图 BCJ 分子

本论文主要使用到的 OPE

本附录给出一些振幅计算中经常用到的 OPE，以供查阅。

1 自由 CFT

本节对应玻色弦世界面 CFT。

1.1 自由玻色 CFT

1.2 bc 鬼场

2 $\mathcal{N} = 1$ SCFT

本节对应 RNS 超弦世界面 CFT，玻色场 OPE 与上一节相同。

2.1 自由费米 CFT

2.2 $\beta\gamma$ 鬼场

参考文献

- [1] BERKOVITS N, D'HOKER E, GREEN M B, et al. Snowmass white paper: String perturbation theory[A/OL]. 2022. arXiv: 2203.09099. <https://arxiv.org/abs/2203.09099>.
- [2] POLCHINSKI J. Cambridge monographs on mathematical physics: String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string[M/OL]. Cambridge University Press, 2007. DOI: 10.1017/CBO9780511816079.
- [3] BLUMENHAGEN R, LÜST D, THEISEN S. Theoretical and mathematical physics: Basic concepts of string theory[M/OL]. Heidelberg, Germany: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-29497-6.
- [4] BECKER K, BECKER M, SCHWARZ J H. String theory and M-theory: A modern introduction[M/OL]. Cambridge University Press, 2006. DOI: 10.1017/CBO9780511816086.
- [5] DI FRANCESCO P, MATHIEU P, SENECHAL D. Graduate texts in contemporary physics: Conformal Field Theory[M/OL]. New York: Springer-Verlag, 1997. DOI: 10.1007/978-1-4612-2256-9.
- [6] BLUMENHAGEN R, PLAUSCHINN E. Introduction to conformal field theory: with applications to String theory: Vol. 779[M/OL]. 2009. DOI: 10.1007/978-3-642-00450-6.
- [7] WEINBERG S. The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications [M/OL]. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CBO9781139644174.
- [8] ERBIN H. Lecture notes in physics: Vol. 980 String Field Theory: A Modern Introduction[M/OL]. 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-65321-7.
- [9] HENNEAUX M, TEITELBOIM C. Quantization of Gauge Systems[M]. Princeton University Press, 1994.
- [10] GREEN M B, SCHWARZ J H, WITTEN E. Cambridge monographs on mathematical physics: Superstring Theory Vol. 1: 25th Anniversary Edition[M/OL]. Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139248563.
- [11] GREEN M B, SCHWARZ J H, WITTEN E. Cambridge monographs on math-

- ematical physics: Superstring Theory Vol. 2: 25th Anniversary Edition[M/OL]. Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139248570.
- [12] 伊藤克司. 共形場理論: 現代数理物理の基礎として[M]. サイエンス社, 2011.
- [13] 王竹溪郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京大学出版社, 2012.
- [14] ADAMS A, TAYLOR W, DEWOLFE O. String universality in ten dimensions [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 071601. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.071601>.
- [15] BERKOVITS N. Super Poincare covariant quantization of the superstring[J/OL]. JHEP, 2000, 04: 018. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/04/018.

致 谢

感谢女朋友产生算符的不存在性让我能专心完成这篇毕业论文。