

电动力学复习册

expe
我想喝红茶玛奇朵

Latest Update : 2024 年 6 月 23 日

前言与色卡

- 1 这是我第一次写复习向 L^AT_EX, 颜色调了小波奇的粉粉配色 (这学期没看动画片, 感觉迟早要开除二籍了) 我平常乱写 markdown 写习惯了, 所以各个细节完全不会注意, 可以逼死强迫症
- 2 模板来自 <https://github.com/ShevonKuan/Probability-and-Mathematical-Statistics>, 原作者是关舒文
- 3 知识点范围主要来自廖恺老师划的重点, 并加入很多我自己的理 (fei) 解 (hua)
- 4 使用教材:< 电动力学 > 郭硕鸿 (第三版)
- 5 虽然没人看但是还是放个我的 163 邮箱在这:ee 下划线 mikusuki
- 6 我的知乎主页:[https://www.zhihu.com/people/expe-94\(小心, 我喜欢点赞些没有营养的东西\)](https://www.zhihu.com/people/expe-94(小心, 我喜欢点赞些没有营养的东西))
- 7 友情链接 <https://whuzbf.github.io/> ← 物理品味很好, 值得访问

- Color #9485c5
- Color #995989
- Color #984063
- Color #cf6988
- Color #d8b64e
- Color #488de1
- Color #cd2769
- Color #bf0040
- Color #c873a4
- Color #ae3e6a
- Color #77408e





目录

| | |
|---------------------------|----|
| 前言与色卡 | i |
| 1 麦克斯韦方程组 | 1 |
| 1.1 真空麦克斯韦方程组 | 1 |
| 1.2 介质中的麦克斯韦方程组 | 2 |
| 1.3 电磁场边值关系 | 4 |
| 1.4 电磁场能量能流 | 7 |
| 2 静电场 | 9 |
| 2.1 静电场方程 | 9 |
| 2.2 唯一性定理 | 10 |
| 2.3 解静电场拉普拉斯方程 | 10 |
| 2.4 镜像法 | 15 |
| 2.5 格林函数 | 17 |
| 2.6 电多极矩 | 17 |
| 3 静磁场 | 21 |
| 3.1 矢势 | 21 |
| 3.2 解磁标势 | 22 |
| 3.3 磁多极矩 | 24 |
| 3.4 AB 效应、超导体 | 26 |
| 4 电磁波的传播 | 27 |
| 4.1 平面电磁波 | 28 |
| 4.2 平面电磁波的反射折射 | 30 |
| 4.3 导体中的电磁波 | 32 |
| 4.4 谐振腔 | 35 |
| 4.5 波导 | 36 |
| 5 电磁波的辐射 | 37 |
| 5.1 矢势、标势及其规范 | 37 |
| 5.2 推迟势 | 39 |
| 5.3 时谐远场下矢势辐射展开 | 40 |
| 5.4 电磁波的衍射 | 43 |
| 5.5 电磁场动量 | 43 |
| 6 狹义相对论 | 47 |
| 6.1 伽利略变换到洛伦兹变换 | 47 |
| 6.2 旋转到洛伦兹变换 | 49 |
| 6.3 洛伦兹变换的应用 | 50 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 6.4 进入张量语言的物理世界 | 52 |
| 6.5 相对论力学 | 55 |
| 附录 | 57 |
| 梯度散度旋度拉普拉斯算子在不同坐标系下的形式 | 57 |
| 参考书目 | 58 |
| 索引 | 59 |





第 1 章 麦克斯韦方程组

1.1 真空麦克斯韦方程组

| 定理 1.1.1 麦克斯韦方程组

注意这是真空有源的麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1.4)$$

出自书 P16, 其中第一个是电磁感应定律 (变化的磁场激发电场); 第二个是位移电流假设 (变化电场激发磁场) **这些系数你别记错了啊**; 第三个是高斯定理; 第四个是磁场无旋 (无磁单极子)

| 性质 1.1.1 电场与磁场的性质

静电场有源无旋, 磁场有旋无源

| 定理 1.1.2 真空电磁场其他方程

1. 电流密度与电流关系(P8):

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

2. 电流密度微观形式(P9):

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

3. 电荷守恒方程(P9):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

恒定电流条件即为上式左右侧 =0 时的特殊情况

4. 洛伦兹力公式(P17):

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \\ \vec{F} &= q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

1.2 介质中的麦克斯韦方程组

定义 1.2.1 电极化强度矢量

在外场作用下，介质内出现宏观电偶极矩分布，用电极化强度矢量 \vec{P} 描述，等于电偶极矩的体积密度：

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ ，由负电荷指向正电荷

由于 p 由负电指向正电，所以当负电在肚子里，正电跑出去的时候， P 指向区域外，面积分为正，但是留在区域内的束缚电荷体现出负电，也就是说 **P 的散度和束缚电荷体密度 ρ_P 差一个负号**，也即：

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

把散度写开：

$$\rho_P = -(\partial_1 P^1 + \partial_2 P^2 + \partial_3 P^3)$$

现在假设 x^i 代表介质的厚度方向，令束缚电荷面密度 $d\sigma_P = \rho_P dx^1$ ， $P|_{x=a} = P_1$ ； $P|_{x=b} = P_2$ 上式对 x^1 方向的薄层 $a \leq x^1 \leq b$ 积分，可得

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \int_a^b \rho_P dx^1 = - \int_a^b \frac{\partial P^1}{\partial x^1} dx^1 - \int_a^b \frac{\partial P^2}{\partial x^2} dx^1 - \int_a^b \frac{\partial P^3}{\partial x^3} dx^1 \\ &\stackrel{b-a \rightarrow 0^+}{=} -(P^1|_{x=b} - P^1|_{x=a}) = -\hat{x} \cdot (P_2 - P_1) \end{aligned}$$

你应该提醒自己，任意拿到一个散度公式都可以做这些操作，比如说像流体力学推潜水波方程的过程也涉及到了以散度为被积函数，对某个方向积分

利用 \vec{e}_n 代表从介质 1 指向介质 2 的单位法向矢量，我们将这一规律写作

$$\sigma_P = -\vec{e}_n \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

定义 1.2.2 位移矢量

由于介质内不只有自由电荷，也有极化产生的束缚电荷，对 E 做散度时得到的是总电荷，所以为了方便我们直接定义一个矢量只包含自由电荷的信息，定义位移矢量 \vec{D} 为

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

对上式左右两侧作散度得：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_f + \rho_P - \rho_P = \rho_f$$

性质 1.2.1 各向同性线性介质的电性质

对于一般各向同性线性介质， P 、 D 、 E 之间有简单线性关系

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

定义 1.2.3 磁化强度

分子电流可以用磁偶极矩描述，等于电流乘围住面积， $\vec{m} = i\vec{a}$ ，方向按照环电流方向和右手原则

电动力学

在外磁场作用下，分子电流出现有规则取向，用磁化强度 \vec{M} 描述，等于磁偶极矩的体积密度：

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

还是和电那边的操作差不多，我们对 M 进行环路积分，再由斯托克斯定理改成旋度后可得磁化电流密度与 M 的关系

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

定义 1.2.4 四大电流密度及其定义 (P22)

1. **自由电流密度**: \vec{J}_f , 没啥好说的
2. **磁化电流密度**: \vec{J}_M , 介质分子内的运动构成微观分子电流，在外磁场作用下分子电流出现有规则取向，它满足

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

3. **位移电流密度**: 麦克斯韦发现变化的电场可以激发磁场，并且 \dot{E} 配上 ϵ_0 之后恰好与电流同量纲，所以就把它也叫做一种电流了

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. **极化电流密度**: 当电场变化时，介质的极化强度 P 也发生变化，这种变化称为极化电流

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_P$$

也就是说这四个电流中，一个是外来的自由电流，一个是磁场诱导的电流，变化电场诱导两个电流 (E 自己诱导一个， P 诱导一个)，这个得记，说不定面试还会问这种呢 (lk 说的)

于是我们介质中的磁场旋度写作

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \vec{J}_P + \vec{J}_D$$

最后两项 J_D 和 J_P 可以用 D 捏在一起，然后把 J_M 移到左边去，塞到旋度里面，就有了

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

定义 1.2.5 磁场强度

把 B 和 (B 诱导的) M 合在一起，这样能使上面那个方程右侧全部是电相关的量，左边是磁相关的量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

这样 B 的旋度那个方程可以写作

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

性质 1.2.2 各向同性非铁磁物质的磁特性

对于各向同性非铁磁物质,M、H、B之间有简单线性关系

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M$$

| 定理 1.2.1 介质中的麦克斯韦方程组

你看到有 D、H 的地方
就应当把 ρ, J 自动视作自由
电荷密度和自由电流密度

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2.4)$$

| 推论 1.2.1 介质中的麦克斯韦方程组, 但是积分形式

就不停用斯托克斯和高
斯呗

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.2.5)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.2.6)$$

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (1.2.7)$$

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.2.8)$$

| 定理 1.2.2 简单介质的电磁性质方程

1. 电性质:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

2. 磁性质:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

3. 微分形式欧姆定律:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

其中 σ 是电导率

1.3 电磁场边值关系

喜报: 本节的可移植性很好, 碰到其他不是电磁场但是类似的矢量也可以这么处理

首先对于两个散度式, 在界面处做一个薄饼干盒^①
这是原方程

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

^①饼干盒是 lk 原话, 萌

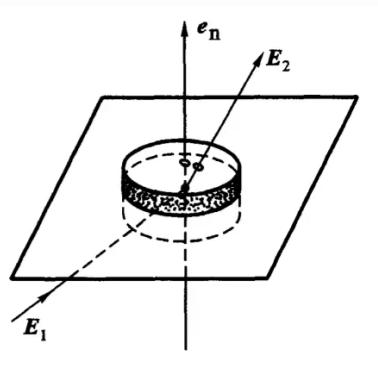


图 1.1: 饼干盒

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对饼干盒所有面积分，并令饼干盒厚度趋于 0，就只有上下两个面有贡献，即

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

现在再看两个旋度式

其实也是将散度对厚度积分，和前面的操作一样的

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

就像咬一口拉面一样，用环路积分把几根拉面围住，并且嘴巴不能张太大了，恰好吃进拉面是好的

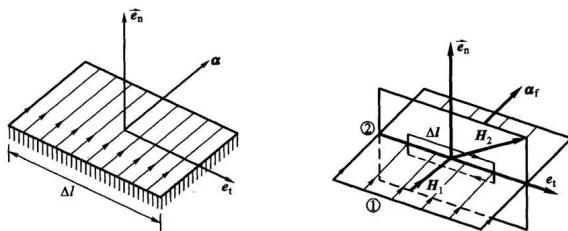


图 1.2: 拉面

在这样小环路上作环路积分，就可以把场相关的项去掉了，用斯托克斯定理，得

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}$$

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

可以归纳出总的边界条件组了

推论 1.3.1 电磁场边界条件

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \quad (1.3.1)$$

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \quad (1.3.3)$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.3.4)$$

拓展 1.3.1 时谐电磁波麦克斯韦、边界条件可以互推

只要有了时谐条件 $\partial_t = iw$, 就可以用麦克斯韦方程组中两个旋度关系推出两个散度关系; 而麦克斯韦方程组与边界条件是一推一关系, 也就是说这四个边值关系只有两个是独立的

$$1. \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0:$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -iw\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{i}{w}\nabla \times \vec{E} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} &= \frac{i}{w}\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

$$2. \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho:$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + iw\vec{D} \Rightarrow \vec{D} = \frac{1}{iw}\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{iw}\vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -iw\rho \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \frac{1}{iw}\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{iw}\nabla \cdot \vec{J} = \rho \end{aligned}$$

$$3. \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0:$$

$$\vec{B} = \frac{i}{w}\nabla \times \vec{E}$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \frac{i}{w}\vec{e}_n \cdot \nabla \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\frac{i}{w}\nabla \cdot \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

打字好累, 我懒得写矢

量标了, 自己加吧

$$4. \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma:$$

下面带 d 的量都是薄层两侧之差

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= -\vec{e}_n \cdot \nabla \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \\ &= -\vec{e}_n \cdot (J_2 - J_1 + iw(D_2 - D_1)) \\ &= -dJ_n - iwe_n \cdot (D_2 - D_1) \\ &= \nabla \cdot \vec{\alpha} \\ &= \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial J_x}{\partial x} dn + \frac{\partial J_y}{\partial y} dn \\ \Rightarrow -iwe_n \cdot (D_2 - D_1) &= \frac{\partial J_x}{\partial x} dn + \frac{\partial J_y}{\partial y} dn + \frac{\partial J_n}{\partial n} dn \\ &= \nabla \cdot J dn \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dn \\ &= -iw\rho dn \\ &= -iw\sigma \\ \Rightarrow e_n \cdot (D_2 - D_1) &= \sigma \end{aligned}$$

例题 1.3.1 无穷大平行板电容器

如图，中间有两层不同介质，求电场和束缚电荷分布 看到自由电荷密度首先想到

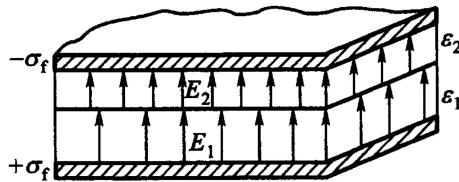


图 1.3: 平行板电容器

D, 然后又是无穷大, 方向肯定是垂直于平面的, 完美, 我们用关于 D 的边界条件, 有

$$D_1 = D_2 = \sigma_f$$

D 在两个介质中是连续的, 再求 E 也简单, 直接除 ε

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

介质间的束缚电荷即为 E 的差乘 ε_0

$$\sigma_{P12} = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\sigma_f$$

不要忘了求介质与板之间的束缚电荷

$$\sigma_{P1} = \varepsilon_0 E_1 - \sigma_f = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right)\sigma_f$$

$$\sigma_{P2} = -\varepsilon_0 E_2 + \sigma_f = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right)\sigma_f$$

例题 1.3.2 同心介质球

内外半径分别为 r_1, r_2 , 夹层中电容率为 ε , 其他地方是真空; 夹层带静止 ρ_f

求: 空间各点电场、极化体电荷和极化面电荷分布

写下思路: 看到自由电荷密度先拿 D, 用 D 的高斯定理环面积分和球对称性很轻松能求出 D, 然后你就有 E 了; 第二问用 $D = P + \varepsilon_0 E$ 拿出 ρ_f 与 ρ_P 的比例关系 注意 P 的散度和 ρ_f 差个负号!, 最后是面密度, 用边界条件, 只有在最外壳才会 E 突变, D 不突变, 此时就有 ΔP , 然后就可以算极化电荷面密度了

例题 1.3.3 同心乌冬面

就是上一题的磁版, 内外半径分别为 r_1 与 r_2 的无穷长中控导体圆柱, 沿轴向有恒定均匀自由电流 J_f , 磁导率为 μ , 求磁感应强度和磁化电流体密度、面密度

我突然想起一个事, 要记清楚磁感应强度是 B , 磁场强度是 H , 免得题目都读不懂

1.4 电磁场能量能流

定义 1.4.1 能量守恒的微分形式

有点像雷诺输运或者 D/Dt 那种感觉, 只是现在发工资的人变成洛伦兹力做工。洛伦兹力做控制体做工 = 控制体内能量增加 + 能量输出

$$-\vec{f} \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

注意你的 $f \cdot v$ 是控制体朝外做工! 现在考虑的是场的能量不是带电粒子的动能; 或者直接记这个能量守恒式是 $A+B+C=0$ 的形式, 放到同一侧就同号

性质 1.4.1 洛伦兹力做功

洛伦兹力

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

则其功率为 (注意到带电粒子运动的方向 v 正是电流密度 J 的方向)

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

然后你用麦克斯韦方程组把 J 代换掉可以继续往下推能量, 这里我就不推了, 直接写

定义 1.4.2 Poynting 矢量 (能流密度矢量)

能流密度的面积分即为单位时间内该面上通过的能量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

以及能量密度变化率

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

形式上很像乘积求导, 但是能量他是一個非常点乘的关系, 所以注意每一项都是同一个场 (电或磁) 两个量的点乘, 带系数的那个求时间导数

定理 1.4.1 电磁场能量密度

真空中

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

线性介质中

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$



第 2 章 静电场

2.1 静电场方程

利用“静”的条件，将麦克斯韦方程组中所有偏 t 项全部 kill 掉，然后非常开心地发现 E 是保守场了，引入电势 φ ，使得

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

计算中常常取无穷远处电势为 0，则有点电荷激发出的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

这个负号代表着，一般一个势函数的梯度都是指向上升的方向，但是电势不同，正电处电势高，负电处电势较低，电场由正指向负（和电偶极矩是相反的），也就是说方向沿着势函数下降方向

定义 2.1.1 静电势满足的泊松方程

把电势代入麦克斯韦方程组后可得

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

右式只需要上或者下体现介质性质即可，即要么是上自由下介电常数，或者上总电荷下真空介电常数



定理 2.1.1 静电场边值关系

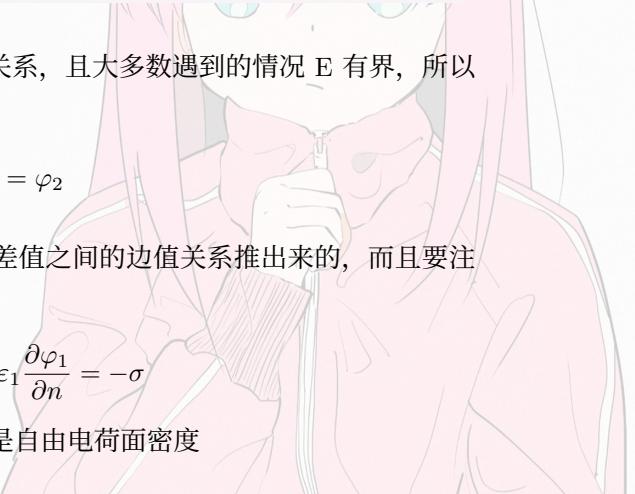
1. **电势连续**: 因为电势与 E 差了个积分关系，且大多数遇到的情况 E 有界，所以取极限时可以得到界面两侧电势相等

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

2. **电势法向偏导**: 是由电荷密度和 D 的差值之间的边值关系推出来的，而且要注意电势梯度与 E 差个负号，写作

$$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma$$

由于 ϵ 体现出介质性质了，所以右侧是自由电荷面密度



推论 2.1.1 导体边界条件

1. 导体内部不带静电荷，电荷只能分布在导体表面；

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sigma$$

2. 导体内部电场为 0；

3. 导体表面上电场沿法向, 导体表面为等势面, 导体为等势体

$$\varphi = \text{const}$$

| 定理 2.1.2 静电场能量

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \rho \varphi$$

其中, ρ 是自由电荷面密度, φ 是这些自由电荷激发的电势

2.2 唯一性定理

了解就行了, 有了泊松方程之后, 边界上只要给出电势值或电势法向偏导 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, 则区域内电场被唯一确定

含导体的唯一性定理: 除了边界要照给以外, 每个导体还要给总电荷

2.3 解静电场拉普拉斯方程

重头戏来了, 要考大题所以好好练练

| 定理 2.3.1 球坐标齐次拉普拉斯通解

方程:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

无任何对称性通解 (JJJ 讲义 P311):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) P_l^{[m]}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

具有绕某个轴的旋转对称性, 也即与 φ 无关, 此时通解为:

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)$$

具有球对称时, 也即和两个角度均无关时, 通解为

$$u(r) = A + \frac{B}{r}$$

| 性质 2.3.1 勒让德多项式 (JJJ 讲义 P290)

勒让德多项式下标的奇偶性直接代表函数的奇偶性, 前 2 个勒让德多项式要记

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

| 拓展 2.3.1 勒让德多项式的母函数 (JJJ 讲义 P294)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad (r < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^{-(l+1)} P_l(x), \quad (r > 1)$$

现在就看第一个式子，把 x 改成 $\cos\theta$ ，可以解读他的物理意义：虚构一个半径 <1 的球，点电荷 Q 距球心距离 1，则球内任何一点的电势可以写作

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-2rcos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} r^l P_l(\cos\theta), \quad (r < 1)$$

左侧是我们熟知的点电荷激发电势的形式，右侧可以看作拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 给出的通解经过 $\theta = 0$ 的已知形式 + 广义傅里叶展开确定下系数的形式；这也从另一个方面联系了平方反比 $\rightarrow r^{-1}$ 势 \rightarrow 拉普拉斯方程

拓展 2.3.2 电势 (齐次拉普拉斯方程的解) 的性质

电势的定义：从一个以确定的点进行路径积分

1. 单连通区域电势单值，不可能存在封闭的电场线；
2. 双连通区域中，不可缩周线上速度环量相等，速度势多值（正好相差速度环量的倍数）；
3. 电势不能在区域内有极大或极小值

证明过程使用到条件 $\nabla^2\varphi = 0$ ，也即 E 无散；你在极小值附近做很小的环路积分，有

$$0 = \iiint \nabla \cdot E dV = \iint E \cdot dS = \iint -\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

然而极小值周围的偏导理应全部大于 0，这就矛盾了，证毕

性质 2.3.2 解静电场拉普拉斯方程的一般流程

1. 列方程，以及边界条件；
2. 判断对称性写通解；
3. 利用边界条件定系数

例题 2.3.1 仅含 r 的情形 (P48)

内径 R_2 外径 R_3 的导体球壳，带电荷 Q ，同心包住一个半径 $R_1 (< R_2)$ 的接地小导体球，求空间各点电势和小球的感应电荷

1. 列方程，以及边界条件：可以看出导体将非导体部分分为两个区域，我们设两个导体所夹区域是 φ_1 ，导体外部电势是 φ_2

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

至于边界条件，建议按照一个顺序，从内往外写，以免遗漏

最里面是接地条件

$$\varphi_1|_{R_1} = 0$$

再往外利用球壳的利用等势体条件，有

$$\varphi_1|_{R_2} = \varphi_2|_{R_3}$$

再往外用上球壳电荷条件

$$\iint_{R_3} -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} dS - \iint_{R_3} -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

最外面的无穷远条件不要忘记写了

$$\varphi_2|_{\infty} = 0$$

这个负号写的看着很丑，但是我只是想说 $\partial_r \varphi$ 和 E 是差负号的

2. 判断对称性写通解

这题非常基础，球对称，只和 r 有关，可以写出

$$\varphi_1(r) = A_1 + \frac{B_1}{r}$$

$$\varphi_2(r) = A_2 + \frac{B_2}{r}$$

3. 利用边界条件定系数

首先看到无穷远处的 0 直接把 A_2 划掉了，这样后面列起来简单一些

小球接地：

$$A_1 + \frac{B_1}{R_1} = 0$$

球壳等势：

$$A_1 + \frac{B_1}{R_2} = \frac{B_2}{R_3}$$

高斯定理：

$$4\pi B_2 - 4\pi B_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

然后解得：

在这里可以多用 R^{-1}
的形式，看起来整洁

$$A_1 = -\frac{B_1}{R_1}, \quad B_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}}, \quad B_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} + B_1$$

$$\varphi_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\varphi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{R_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}} + 1 \right) \frac{1}{r}$$

小球感应电荷：

$$Q' = 4\pi B_1 = \frac{QR_3^{-1}}{R_2^{-1} - R_1^{-1} - R_3^{-1}}$$

例题 2.3.2 泡在小河里的玻璃球

电容率为 ε ，半径为 R_0 的介质球置于均匀外电场 E_0 中，求电势。那我们还是按

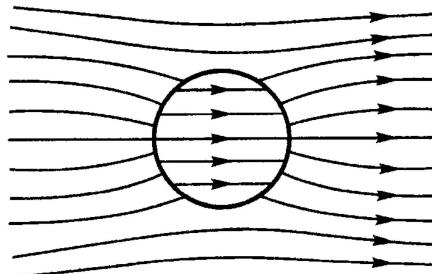


图 2.1: 在匀强电场中极化的介质球

照步骤来

有界条件的出现作用是
为了把通解奇异的一半砍掉，
大大简化计算

1. 列方程，以及边界条件；

这里也是电势分为两个区域考虑，介质内 φ_1 与介质外 φ_2

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

边界条件先列最里面的

$$\varphi_1|_{r=0} \in \mathbb{R}$$

介质球表面，他不是导体所以没有自由电荷面密度

$$\varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

无穷远处^①

$$\varphi_2|_{r \rightarrow \infty} = E_0 r \cos \theta$$

2. 判断对称性写通解；

只和 r, θ 有关，再联系之前的球心有界就可以 kill 掉半个部分，写出

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ \varphi_2(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (C_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)\end{aligned}$$

3. 利用边界条件定系数

这次从无穷远边界条件开始定，这样能快速把 1 固定下来

$$\varphi_2|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta) = E_0 r \cos \theta$$

对比两侧勒让德多项式下标，右侧只有第一个勒让德多项式，且上式对 θ 恒成立，故左侧也仅有第一个勒让德多项式，即

$$\varphi_2(r, \theta) = (E_0 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta$$

现在来使用电势连续条件

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R_0^l P_l(\cos \theta) = (E_0 R_0 + \frac{B_1}{R_0^2}) \cos \theta$$

还是跟上面一样，你一对发现只有第一个勒让德多项式，所以

$$A_1 R_0 = E_0 R_0 + \frac{B_1}{R_0^2}$$

界面无自由电荷 (D 连续条件)：

$$\varepsilon A_1 = \varepsilon_0 (E_0 - 2 \frac{B_1}{R_0^3})$$

用上面两个就可以把 B_1, A_1 定出来了，最后得到结果

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos \theta \\ \varphi_2 &= E_0 \left(r + \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{R_0^3}{r^2} \right) \cos \theta\end{aligned}$$

例题 2.3.3 泡在小河里的导体球

半径 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 E_0 中，求电势和导体上电荷面密度（就是上面那题的导体球版）

1. 列方程，以及边界条件：这次只有一个电势了

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = E_0 r \cos \theta, \quad \varphi|_{r=R_0} = 0$$

^①准确来说，我的建系恰好和外电场相反，所以这里没有负号；他的缺点就是最后写答案无法回到矢量式，否则会出现两套方向定义互相不兼容的情况；下面例题的情况与此类似。

2. 这里就不按部就班写了，因为就像上面一样操作就好了，通过无穷远和表面0电势条件可以得出解

$$\varphi(r, \theta) = E_0 \left(r - \frac{R_0^3}{r^2} \right) \cos\theta$$

3. 然后就可以求出 E 、 D 了，就可以得到电荷面密度了

$$\sigma = D_n|_{R_0} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{R_0} = -3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

例题 2.3.4 泡在小河里的带电导体球

均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球，求电势分布
模型和上面一体一样，只是给的条件从给定电势变为给带电量了

1. 列方程，以及边界条件：电势条件改为电通量条件

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos\theta, \quad \varphi|_{r=0} \in \mathbb{R}$$

$$q = -\varepsilon_0 \iint_{R_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS, \quad \varphi|_{r=R_0} = \text{const}$$

2. 判断对称性写通解：

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos\theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2} \cos\theta$$

3. 利用边界条件定系数

注意到对 \cos 函数环面积分是 0，所以实际上电通量环面积分其实就是在对一个常数积分而已，非常轻松

$$\iint_{R_0} dS = R_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow \iint_{R_0} \cos\theta dS = 0$$

$$q = -\varepsilon_0 \iint_{R_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 4\pi\varepsilon_0 b_0$$

所以顺利拿到了 b_0

$$B_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

现在利用等势体条件， R_0 上电势与角度无关，可以得到 b_1

$$B_1 = E_0 R_0^3$$

最后得到电势

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{E_0 R_0^3}{r^2} \cos\theta$$

例题 2.3.5 泡在小河里的带电绝缘球

在均匀外场 \vec{E}_0 中置入一带均匀自由电荷密度为 ρ_f 的绝缘介质球（电容率为 ε ）求空间各点的电势

1. 列方程，以及边界条件：

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\rho_f / \varepsilon, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1|_{r=0} \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_1|_{R_0} = \varphi_2|_{R_0}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}|_{R_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{R_0}$$

2. 计算齐次时的通解;

这是一个非齐次微分方程，先解出齐次时的通解为

$$\varphi_1^* = -\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_2^* = -E_0 r \cos\theta - \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \frac{R_0^3}{r^2} \cos\theta$$

3. 根据外源分布猜测非齐次时的解，并叠加

对于球外，仅需考虑 $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f$ 点电荷所激发的电场

$$\varphi_2' = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_f \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{R_0^3 \rho_f}{3\varepsilon_0 r}$$

对于球内，同样考虑纯均匀带电荷时的情况，体系有球对称性

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f, \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Delta\varphi_1' = \int_{R_0}^r Edl = \frac{\rho_f}{6\varepsilon} (R_0^2 - r^2)$$

还要考虑电势连续条件，最后算得球内电势的通解

$$\varphi_2'|_{r=R_0} = \frac{R_0^2 \rho_f}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \varphi_1' = \frac{\rho_f}{6\varepsilon} (R_0^2 - r^2) + \frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0}$$

叠加获得最终解

$$\varphi_1 = \frac{\rho_f}{6\varepsilon} (R_0^2 - r^2) + \frac{\rho_f R_0^2}{3\varepsilon_0} - \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_2 = \frac{R_0^3 \rho_f}{3\varepsilon_0 r} - E_0 r \cos\theta - \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \frac{R_0^3}{r^2} \cos\theta$$

2.4 镜像法

本节只考三个基本模型

例题 2.4.1 无限大平板镜像法

接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q ，求空间中的电场 导体边界上电场线

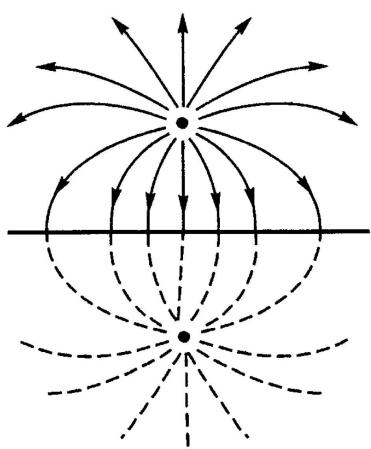


图 2.2: 平板镜像法模型

一定沿法相，所以就可以等效为下面还有一个相反的电荷，求这一对电荷激发的电势就好

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

在直角坐标系下

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right)$$

例题 2.4.2 接地导体球镜像法

真空中有一半径 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(>R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求空间中电势

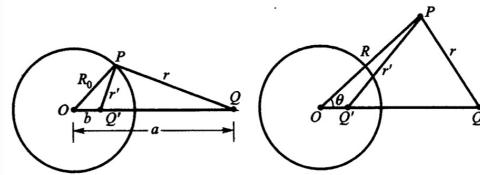


图 2.3: 导体球镜像法

那么你也是假装球内有一个电荷，使得电场线能垂直于球体表面，且球面上 0 电势在球面上 0 电荷意味着

$$\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} = 0 \Rightarrow \frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \text{const}$$

那么发挥惊人的注意力，只需使 $\Delta OQ'P \sim \Delta OPQ$ ，即可

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \frac{R_0}{a}$$

此时

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q, \quad b = \frac{R_0^2}{a}$$

这样就确定了假想电荷的位置和大小

最后，用柱坐标和余弦定理表示任意一点的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rac\cos\theta}} - \frac{R_0/a}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rbc\cos\theta}} \right)$$

推论 2.4.1 足够近同电荷金属球与点电荷可能相吸

如上例题，但是导体球不是接地而是带电荷 Q_0 求球外电势和电荷 Q 受力

继承上一题，在球内按照规矩放一个假想电荷 Q' 之后，可以使导体变成 0 电势等势体；再在球心放一个假想电荷 $Q_0 - Q'$ ，这样保持导体球带总电荷 Q_0 的同时球面仍为等势面，任意一点的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{Q_0 + R_0 Q/a}{R} \right)$$

求外面那个点电荷受力就直接算两个假想的点电荷对他的作用力

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{Q} F = \frac{Q_0}{a^2} - \frac{Q R_0^3 (2a^2 - R_0^2)}{a^3 (a^2 - R_0^2)^2}$$

如果金属球与点电荷带同种电，则第一项表现为斥力，第二项表现为吸引力；在 a 较大时，由第一项的斥力主宰，并且逐渐趋向双点电荷的理想情况；在 a 较小时，由第二项的吸引力主宰，这就是为什么同种电荷，但是非点电荷理想情况时，可能会相吸

例题 2.4.3 垂直双平板镜像法

有一点电荷 q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内，他到两个平面的距离为 a 和 b ，求空间电势

把两个互相垂直的平面画作 x 轴和 y 轴，现有的这个电荷在第一象限，坐标为 (a,b) ；然后现在引入三个假想电荷，使得总共这四个电荷构成以原点为对称中心的矩形，且二四象限电荷 $-q$ ，一三象限电荷 q ，然后随便算电势就行

2.5 格林函数

虽然这玩意在物理确实很多用，但是这次电动只考理解，就大概抄下定义吧

定义 2.5.1 静电场格林函数

一个处于 x' 点上的单位点电荷所激发出的电势 $\psi(x)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \psi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(x - x')$$

若有边界条件

$$\psi|_{\partial V} = 0$$

则满足该边界条件的方程解称为第一类边值格林函数

若有边界条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial V} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}$$

(其中 S 是边界面积)，相当于说边界上均匀带电，则满足该边界条件的方程解称为第二类边值格林函数

从数学上看，格林函数可以视作线性算子的左逆；从物理上来看，格林函数描述了点电荷激发的电势，欲求任意一堆电荷激发的电势仅需对 dq 积分即可；从解静电问题上来看，格林函数包括了边界信息，把格林函数代到一个式子里和区域内电荷信息运作一下就可以得到终解 (第一类边值问题公式在 P61，第二类在 P62)

2.6 电多极矩

给定区域中电荷密度分布，就可以求这一块区域激发的电势了

$$\varphi(x) = \iiint \frac{\rho(x') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

注意到带电体离探测点的距离 R ，探测点距积分微元距离 r ，带电体基准点到积分点距离 x 构成三角形；当 R 很远，或带电体尺寸较小时，可以把 x 看作一个“微扰”^①，然后对变量 x 在 R 处进行泰勒展开，即

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\vec{R} - \vec{x}|} = \frac{1}{R} - \vec{x} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum x_i x_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots$$

代入电势式中

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(x') \left[\frac{1}{|\vec{R} - \vec{x}|} = \frac{1}{R} - \vec{x} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum x_i x_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots \right] dV'$$

下面把这个展开式一项一项拿出来看并赋予物理意义

定义 2.6.1 电多极矩

令

$$Q = \iiint \rho(x') dV'$$

$$\vec{p} = \iiint \rho(x') x' dV'$$

对标质量

对标质心

$$D_{ij} = \iiint 3x'_i x'_j \rho(x') dV'$$

则电势的展开式写作

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} D^{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots \right)$$

可以看到，展开式的第一项是点电荷激发电势，看作第一级近似
展开式的第二项是电偶极矩 \vec{p} 产生的电势

电偶极矩 \vec{p} 激发的电势
这个式子要记，我喜欢用 hat
代表单位向量

$$\varphi_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$

如果一个体系电荷分布对原点对称，那么电偶极矩为 0
以及球心处一电偶极子激发电势所满足的拉普拉斯方程（要记）

$$\nabla^2 \varphi = (\vec{p} \cdot \nabla) \delta(\vec{x}) / \epsilon_0$$

但是 E_p 这个式子是不完整的，注意到对球心处有电偶极子 \vec{p} 的球积分可得

$$\iiint E(x) dV = -\frac{p}{3\epsilon_0}$$

$$\iiint E(x) dV = \frac{4\pi R^3}{3} E(0)$$

这意味着在原点处的电场非 0，上面的表达式不再适用，还得补上一个 δ 函数

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} p \delta^3(\vec{r}) \right]$$

展开式的第三项是电四极矩产生的电势

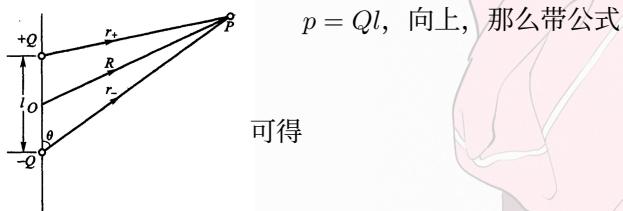
$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} D^{ij} \partial_i \partial_j \frac{1}{R}$$

其中 D_{ij} 是对称张量，只有 5 个量是独立的（迹有说法），他体现了（最简单的情况）四个电荷，两正两负，围成矩形的“不均匀程度”。球对称分布没用电四极矩，一旦偏离球对称就有电四极矩了（例如椭球）

迹有关系的特性使得他还有一个表达式，这个表达式和上面的不等价，是专门扣掉一个 I 使得无迹的；这里我就不打撇了

$$D_{ij} = \iiint (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x) dV$$

例题 2.6.1 电偶极矩激发电势



$p = Ql$, 向上, 那么带公式

可得

$$\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \hat{R}$$

$$\varphi \approx \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{z}{R}$$

其中 z 是 R 在 p 方向上的投影，在图中表示为向上的距离

例题 2.6.2 长方形的电四极矩

^①我自己说的词，可能不准确

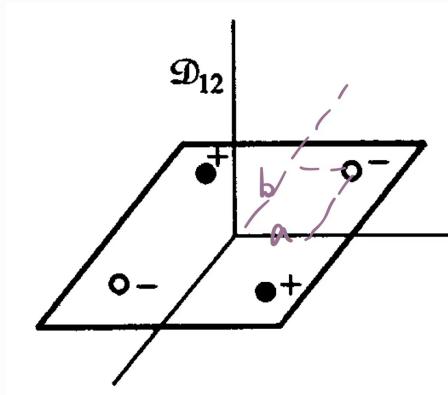


图 2.4: 长方形的电四极矩

直接带公式，点电荷就用离散形式

$$D_{ij} = \sum 3x_i x_j q$$

这里只计算 D_{12}

$$D_{12} = 3 \sum xyq = -12qab$$

例题 2.6.3 椭球的电四极矩

均匀带电的长形旋转椭球体半长轴为 a , 半短轴为 b , 带总电荷 Q , 求电四极矩和远处电势

取椭球方程

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1$$

列电四极矩公式

$$D_{ij} = \iiint (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x) dV$$

先观察非对角项, 注意到

$$\int xydV = \int yzdV = \int zxdV = 0$$

因此

$$D_{12} = D_{23} = D_{31} = 0$$

下面求对角项也要巨大注意对称性, 否则很难积

令 $x^2 + y^2 = s^2$, 则

$$\int x^2 dV = \int y^2 dV = \frac{1}{2} \int s^2 dV$$

后面那个积分反正我是把椭球剥成很多和 xoy 平面平行的片, 每一个片上就是圆内对半径平方积分, 用极坐标即可; 然后再对 z 积分, 最后算出来

$$\int x^2 dV = \frac{4\pi}{15} ab^4$$

对 z 的积分也好办, 还是按上面的方法切成片, 每个圆形片的面积可以用 z 表示, 再对 z 积分, 得到

$$\int z^2 dV = \frac{4\pi}{15} a^3 b^2$$

所以

$$D_{33} = \rho_0 \int (3z^2 - r^2) dV = \rho_0 \int (2z^2 - 2x^2) dV = \frac{2}{5} (a^2 - b^2) Q$$

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{5}(a^2 - b^2)Q$$

最后求电势，注意到 $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left(D_{11} \frac{\partial}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial}{\partial y^2} + D_{33} \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} D_{33} \frac{\partial}{\partial z^2} \frac{1}{R} = \frac{Q}{40\pi\epsilon_0} (a^2 - b^2) \frac{3z^2 - R^2}{R^5} \end{aligned}$$





第3章 静磁场

3.1 矢势

恒定电流磁场基本方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

定义 3.1.1 矢势

由于磁场无旋，所以可以引入矢势 \vec{A} ，使得

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

则磁通量有了两种表述，还可以用 \vec{A} 的环路积分

$$\iint B \cdot dS = \oint A \cdot dl$$

可以把 \vec{A} 的环量理解为 \vec{B} 的磁通量

可以对标涡旋感生无粘不可压速度场，为了描述有旋无源的速度场 v ，引入了矢势 B (我也很烦这个 B 碰瓷磁场的符号，还不是对应的)

定义 3.1.2 矢势的规范

对于相差一个标量函数梯度的矢势，他们对应着同一个 \vec{B} ，也即

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \psi$$

这样的规范变换下 \vec{B} 是不变的

所以现在人为规定

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

即可把 \vec{A} 与 \vec{B} 一一对应

定理 3.1.1 矢势微分方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

写成分量式的话，就是每个分量单独满足泊松方程

类比静电场，它也有一个积分形式的特解

$$A(x) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J(x)dV}{r}$$

这个式子可以继续导出 \vec{B} 的解 (注意 $JdV=Idl$)

性质 3.1.1 矢势边值关系

若取无散规范，则矢势在两介质分界面上连续

$$A_1 = A_2$$

性质 3.1.2 静磁场能量

$$w = \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$$

现在用无下标代表控制体内的物理量，下表 e 代表外磁场的矢势、外磁场的电流分布，则

$$w = \frac{1}{2} (J + J_e)(A + A_e)$$

那么控制体在外场中的相互作用能为

$$w_i = \frac{1}{2} (J \cdot A_e + J_e \cdot A) = J \cdot A_e$$

3.2 解磁标势

注意我们引入磁标势的时候需要放弃 B 与 H 的简单线性关系，转而使用原始定义 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ ，所以 $\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M$

在一个局部区域内，如果所有回路均不链环着电流（例如：本来有个环电流，把这个电流环住的区域去掉，这样剩下的区域就不可能有路环住这个电流了），就可以把 B 视作即无旋又无源了

引入磁标势 φ_m ，使得

$$H = -\nabla \varphi_m$$

引入分子电流磁矩带来的磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M$$

则静磁场磁标势方程写作

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

然后就可以照搬静电场那一套了，只是静电场会给你电荷密度，而磁场这边一般不会直接给你磁荷密度，需要通过对 M 求散度来得到

性质 3.2.1 解磁标势方程的一般流程

1. 求磁荷密度 ρ_m
2. 列方程，以及边界条件；
3. 判断对称性写通解；
4. 利用边界条件定系数
5. (可选) 回到磁场

只是因为磁标势很多时候要回到 B 、 H 上来，所以写了最后一点防止遗漏

例题 3.2.1 里面装着小河的铁球

求磁化矢量为 M_0 的半径为 R_0 的均匀磁化铁球产生的磁场

1. 求磁荷密度 ρ_m

分为两个区域，铁球内与铁球外。铁球外肯定是没有磁荷的，对于铁球内，由于均匀极化可得

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M_0 = 0$$

也即，磁荷只分布在球体表面

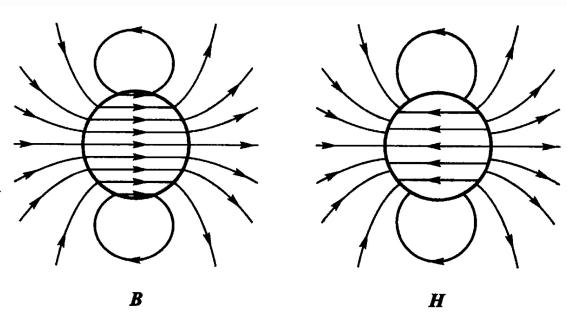


图 3.1: 均匀磁化的铁球

2. 列方程, 以及边界条件

设铁球内磁标势为 φ_1 , 铁球外磁标势为 φ_2 , 他们满足

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

有界性条件

$$\varphi_1|_{r=0} \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2|_{r \rightarrow \infty} \in \mathbb{R}$$

边界条件继承电磁场那一套, 也即在无自由电流面密度的情况下, B 法向连续, H 切向连续

$$B_{1R}|_{R_0} = B_{2R}|_{R_0}$$

$$H_{1\theta}|_{R_0} = H_{2\theta}|_{R_0} \Leftrightarrow \varphi_1|_{R_0} = \varphi_2|_{R_0}$$

这个磁标势连续意思就是沿着边缘走, 无论是在哪一侧, 上升或下降的势都是一样的, 所以可以视作连续

3. 判断对称性写通解;

体系具有一个轴的旋转对称性, 再结合球内外的有界性条件, 可写出通解

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

4. 利用边界条件定系数

要用到关于 B 的边界条件, 所以必须找出 B 与 φ 之间的关系。通式为

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

球内的 M 已经由条件给出, 故

$$B_{1R} = \mu_0 H_{1R} + \mu_0 M_{0R} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \mu_0 M_0 \cos\theta$$

球外没有 M , 即

$$B_{2R} = \mu_0 H_{2R} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

并且这个条件要和 φ 连续这个条件一起考虑, 对比勒让德多项式的系数; 当勒让德多项式的某一个 l 给出的方程使得 φ 导数和 φ 自身两个条件都没有外来项时, 解的这一项系数必定为 0(否则两个方程都是系数的线性关系, 且不等价, 会导出矛盾)

那么在这里就只有 $l=1$ 有外来项 $M_0 \cos\theta$, 只需要解 $l=1$ 的一方程组, 解得

$$A_1 = \frac{M_0}{3}, \quad B_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}$$

代回得到 φ 的表达式

$$\varphi_1 = \frac{M_0 r}{3} \cos\theta = \frac{1}{3} M_0 \cdot r$$

$$\varphi_2 = \frac{M_0 R_0^3}{3r^2} \cos\theta = \frac{R_0^3}{3} \cdot \frac{M_0}{r^2} \cdot \hat{r}$$

5. 回到磁场

球内磁场为

$$H_1 = -\nabla\varphi_1 = -\frac{1}{3} M_0$$

$$B_1 = \mu_0(H_1 + M_0) = \frac{2}{3} \mu_0 M_0$$

球外磁场为

$$B_2 = -\mu_0 \nabla\varphi_2 = -\frac{\mu_0}{3} R_0^3 (M_0 \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

书上就写到这里，但是这个梯度显然是没有算完的，我将这个式子转化为直角坐标继续化简下去了。取 M_0 的方向为 x 轴，为了让表达式不算复杂还是取 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，则

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{3} R_0^3 M_0 \left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \frac{-3xy}{r^5}, \frac{-3xz}{r^5} \right)^T$$

3.3 磁多极矩

这节只要求写出表达式，好的

定理 3.3.1 矢势的多极展开

还是一样的展开 $1/r$ ，和电势展开一个套路

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x') dV'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J(x') \left(\frac{1}{R} - x' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2} x^i x^j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots \right) dV'$$

观察第一项， $J dV = Idl$ ，化为 I 的环路积分，而恒定电流条件说明 I 都是在打转转的，对于每个 I 回路，环路积分均为 0，所以上式第一项必然为 0，这也对应着无磁单极子展开式的第二项可以写作

$$A_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int J(x') x' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^2} \times \hat{R}$$

其中磁矩定义为

$$m = \frac{I}{2} \oint x' \times dl'$$

若小电流圈围住的面积 S 已知，则

$$m = IS$$

是我们熟知的形式

推论 3.3.1 磁偶极矩激发的磁场和磁荷密度

通用

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \frac{\hat{R}}{R^2}$$

在电流分布以外的空间中

$$B = -\mu_0 \nabla \varphi_m$$

$$\varphi_m = \frac{m \cdot \hat{R}}{4\pi R^2}$$

对标电偶极矩产生的电
势

对比电偶极矩产生的磁
场 $\varphi_p = \frac{\vec{p} \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ，一个小电
流线圈可以看作一对正负磁
荷组成的磁偶极子

例题 3.3.1 泡在小河里的磁球

将一磁导率为 μ , 半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 H_0 中, 求总磁感应强度 B 和诱导磁矩 m (放入球之后外场多感受到的磁矩)

- 求磁荷密度 ρ_m

恭喜你不用求; 对球内, 可以用简单线性关系 $B = \mu H$; 球外没有磁荷, $B = \mu_0 H$

- 列方程, 以及边界条件;

设球内磁标势为 φ_1 , 球外磁标势为 φ_2 , 因为无磁荷所以方程齐次

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

一共四个边界条件, 一个在球心, 两个在介质交界处, 一个在无穷远处

$$\varphi_1|_{r=0} \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2|_{r \rightarrow \infty} = -H_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_1|_{R_0} = \varphi_2|_{R_0}, \quad \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}|_{R_0} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{R_0}$$

- 判断对称性写通解;

除了球心有界的条件帮我们直接 kill 掉一半以外, 无穷远处的条件引入了一个外来的非齐次项, 使我们可以断定只有 $l=1$ 这一项是非 0 的, 否则会和两个齐次边界条件引发矛盾

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$\varphi_2 = (-H_0 r \cos \theta + B_1 r^{-2}) \cos \theta$$

- 利用边界条件定系数

通过介质交界处的两个边界条件, 正好列出了关于 $l=1$ 这一项系数的 2 元 2 个方程组

$$-H_0 R_0 + B_1 / R_0^2 = A_1 R_0$$

$$\mu_0 (-H_0 - 2B_1 / R_0^3) = \mu A_1$$

解出系数

$$A_1 = \frac{-3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0, \quad B_1 = \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 R_0^3$$

然后就可以得到磁标势的解了, 尽量换成矢量式便于下面使用

$$\varphi_1 = \frac{-3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 r \cos \theta = \frac{-3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 \cdot \vec{r}$$

$$\varphi_2 = -H_0 r \cos \theta + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 \frac{R_0^3}{r^2} \cos \theta = -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} R_0^3 \frac{\vec{H}_0 \cdot \hat{r}}{r^2}$$

- 回到磁场

与位矢点乘的式子作梯度就直接把位矢点乘这一部分拿掉就好了

$$\vec{B}_1 = -\mu \nabla \varphi_1 = \frac{3\mu_0 \mu}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0$$

计算 B_2 需要用到球坐标的梯度算符, 可以查阅附录

$$\vec{B}_2 = -\mu_0 \nabla \varphi_2 = \mu_0 \vec{H}_0 - \frac{\mu_0 (\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} R_0^3 H_0 \nabla \frac{\cos \theta}{r^2} = \mu_0 \vec{H}_0 + \frac{\mu_0 (\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \frac{R_0^3}{r^3} H_0 (2 \cos \theta, \sin \theta, 0)^T$$

对比磁矩激发的磁标势, 可以得到诱导磁矩 m

$$\varphi_m = \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{m} = 4\pi \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} R_0^3 \vec{H}_0$$

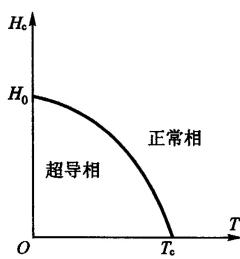
3.4 AB 效应、超导体

定义 3.4.1 AB 效应

在量子力学中，矢势 A 具有可观测效应，可以通过电子双缝衍射装置观测到干涉条纹在 A 变化时发生移动

性质 3.4.1 超导体的基本现象

要记



1. **超导电性** 低于临界温度后，电阻消失；

2. **临界磁场** 将处于超导态的材料至于外磁场中，当外磁场超过一定值后超导性会丢失；

3. **迈斯纳效应** 超导体内部 $B=0$ ，磁场只能存在表面薄层内，有完全抗磁性。

理想迈斯纳态下超导体表面电流密度会在内部产生一个与外磁场相反的磁场，把外磁场抵消掉，所以屏蔽掉外场；

4. **临界电流** 超导体内电流超过某个临界值时，产生的磁场高于临界磁场，转为正常态；

5. **第一类第二类超导体** 元素超导体多属于第一类，合金和化合物超导体多数第二类。

第一类超导体有一个临界磁场，第二类超导体有下临界磁场和上临界磁场，当 H 小于两者时，材料完全超导；当 H 介于两者之间时，磁场以量子化磁通线进入材料，使其处于超导与正常的混合态；当 H 大于两者时，材料变为正常态。

第二类超导体的临界温度和临界磁场一般较高；

6. **磁通量子化** 第一类复连通超导体和连通第二类超导体的磁通量只能是基本值 $\frac{h}{2e}$ 的整数倍。

定理 3.4.1 二流体模型

这是对于超导体的伦敦唯象理论的一部分

当材料处于超导态时，一部分传导电子凝聚于量子态中并作完全有序运动，不受晶格散射因而没有电阻效应，其余传导电子仍属正常电子



第 4 章 电磁波的传播

定理 4.0.1 从齐次真空麦克斯韦方程组到波动方程

真空中的齐次麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.0.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.0.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.0.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.0.4)$$

(1) 式左右两侧取 rot 并将 (2) 式代入可得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

再用到矢量恒等式

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$$

所以有

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

跟他类似的还有一个恒等式也是联系起了 grad、rot、div，在由 NS 方程推导兰姆-葛罗米柯方程时用到了， $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$

现在再对 (2) 式作旋度，并将 (1) 式代入可得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

也即

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

令 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ ，则真空波动方程写作

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.0.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.0.6)$$

定理 4.0.2 介质中的时谐电磁波

时谐条件： \vec{E} 与 \vec{B} 对时间的依赖可以提出来，写作^①

$$E(x, t) = E(x) e^{-i\omega t} \quad (4.0.7)$$

$$B(x, t) = B(x) e^{-i\omega t} \quad (4.0.8)$$

^①在本节中，因为我偷懒，所以把 ω 全部打成 w 了

时谐情况下，所有算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 退化为标量 $-iw$ ，并取简单线性各向同性介质，此时介质中齐次麦克斯韦方程组写作（仅包含了空间依赖部分）

$$\nabla \times \vec{E} = iw\mu \vec{H} \quad (4.0.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -iw\varepsilon \vec{E} \quad (4.0.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.0.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (4.0.12)$$

对(1)式取旋度并将(2)代入后得

$$\nabla^2 E = -w^2 \mu \varepsilon E$$

亥姆霍兹方程常常由含时拉普拉斯方程分离时间变量后得到

令 $k = w\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，则上式写作亥姆霍兹方程的形式

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0$$

亥姆霍兹方程附加上 E 无散条件 $\nabla \cdot E = 0$ 后得到的 E 才是真实的物理解出 E 后，按照这样的方式计算 B ：

$$B = -\frac{i}{w} \nabla \times E$$

对于 B ，亥姆霍兹方程和无散条件照抄，从 B 计算 E 的式子为

$$E = \frac{i}{w\mu\varepsilon} \nabla \times B$$

4.1 平面电磁波

平面电磁波的情况下，电磁场的空间依赖部分是单参依赖的，亥姆霍兹方程化为

$$\frac{d^2}{dx^2} E(x) + k^2 E(x) = 0$$

解得

$$E(x) = E_0 e^{ikx}$$

把时间项合起来，得到了

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - wt)}$$

无散条件要求传播方向上没有电场，也即电场与传播方向垂直，平面电磁波是横波

对于实际存在的场强应该取 Re ，也即

$$E(x, t) = E_0 \cos(kx - wt)$$

定义 4.1.1 相速度与群速度



图 4.1: 波与其包络线

相速度：电磁波恒定相位点的传播速度，以平面电磁波为例，令

$$kx - wt = \varphi_0$$

可得

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi_0}{k} + \frac{wt}{k} \\ \dot{x} &= \frac{w}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

群速度：调制波（非单色波）的包络线在空间中的传播速度。一个较明显的例子是频率相近的两个简谐波的叠加，会形成拍的现象；拍的节传播的速度即为群速度，定义为

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k}$$

作 $w-k$ 图，若 w 对 k 线性齐次，则相速度 = 群速度；

若 w 是 k 的齐次下凹函数，则群速度 > 相速度，并且完全可以在相速度 \leq 光速的限制下使得群速度超光速，但是讯号速度始终不能超光速；

若 w 是 k 的齐次上凸函数，则群速度 < 相速度

进一步地，群速度和相速度方向可能相反

将平面电磁波扩展到三维空间的情况，给 $k = w\sqrt{\mu\varepsilon}$ 赋予沿着波传播的方向，使其成为一个矢量，此时空间中的平面电磁波写作

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - wt)}$$

波矢与波长有如下关系

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

在平面电磁波中， ∇ 算符退化为矢量 $i\vec{k}$ ，使用无散条件

$$\nabla \cdot E = ik \cdot E = 0$$

也即 k 与 E 垂直，电场是横波，且对于每一个波矢，有两个独立的偏振波

并且可以解出 B 来

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}$$

传播方向， E , B ，按照这个顺序成右手正交坐标系，在该单位制下， E 的大小是 B 的大小乘上传播速度 v （高斯单位制下 $c=1$ ，真空电场大小与磁场大小相等）

性质 4.1.1 平面电磁波特点

1. 电磁波为横波， E 和 B 都与传播方向垂直
2. E 和 B 互相垂直， $E \times B$ 沿波矢 k 方向
3. E 和 B 同相，振幅比为 v

定理 4.1.1 平面电磁波能量和能流

各向同性均匀介质中电磁场能量密度通式为

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

在平面电磁波情形， $\varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$ ，因此能量密度

$$w = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

其实有点像总成本-产量图中的平均成本和边际成本的关系，我不知道说的对不对

同理可以计算能流密度

$$S = vw\hat{k}$$

其中 v 是传播速度

推论 4.1.1 平面电磁波能量和能流的时间平均值

对上式取时间平均，还要注意总结出的式子可以直接代复数表达式使用，所以得到了

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu}B_0^2 \quad (4.1.1)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}Re(E^* \times H) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\hat{k} \quad (4.1.2)$$

注意带下标 0 的都是表示振幅，或视作最大值

4.2 平面电磁波的反射折射

在第一章-电磁场边值关系中已经证明过时谐情况下的边界条件只有两个是独立的，把这两个取出来

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \alpha \quad (4.2.2)$$

在平面电磁波中，优先研究 E 与 H 这两个物理量。可以看出， E 的切向分量连续， H 的切向分量跃变取决于电流面密度

定理 4.2.1 平面电磁波折射的角度关系

设入射不打撇，反射打一个撇，折射打两个撇，由 E 在不同介质切向分量连续得

$$\vec{e}_n \times (E_0 e^{ik \cdot x} + E'_0 e^{ik' \cdot x'}) = \vec{e}_n \times E''_0 e^{ik'' \cdot x''}$$

然后经过了一番漫长的仔细推导，确实有下面这个结果

$$k \cdot x = k' \cdot x = k'' \cdot x''$$

用介质中传播的速度来表达 k 的大小

$$k = k' = \frac{w}{v_1}, \quad k'' = \frac{w}{v_2}$$

可以推出入射角、折射角、反射角的关系

$$\theta = \theta', \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

定理 4.2.2 菲涅耳公式 (振幅关系)

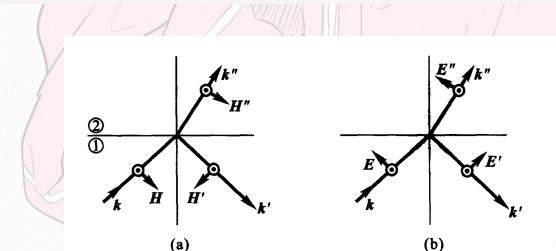


图 4.2: 两种偏振模式

分界面上电流面密度全部为 0

先推导 (a) 图情况, 即 E 平行于介质分界面, 由 E 、 H 切向连续可得

$$E + E' = E'' \quad (4.2.3)$$

$$H \cos\theta - H' \cos\theta' = H'' \cos\theta'' \quad (4.2.4)$$

假设两介质均非铁磁性, 则有 $H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E$, 并且代入入射角 = 反射角后得

$$E + E' = E'' \quad (4.2.5)$$

$$\sqrt{\epsilon_1}(E - E')\cos\theta = \sqrt{\epsilon_2}E''\cos\theta'' \quad (4.2.6)$$

有了这两个方程, 就可以解出 E'/E 和 E''/E 了

后面一个等号代入了角度关系, 即 $\sin\theta/\sin\theta'' = \sqrt{\epsilon_2}/\sqrt{\epsilon_1}$, 有

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta''} = \frac{\sin(\theta'' - \theta)}{\sin(\theta'' + \theta)} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (4.2.8)$$

再推导 (b), H 与分界面垂直的情况

$$E + E' = E'' \quad (4.2.9)$$

$$\sqrt{\epsilon_1}(E - E')\cos\theta = \sqrt{\epsilon_2}E''\cos\theta'' \quad (4.2.10)$$

可得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \quad (4.2.11)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')\cos(\theta - \theta'')} \quad (4.2.12)$$

定理 4.2.3 布儒斯特定律

当入射角和折射角的和为 90° 时, H 与分界面平行的情况, 如图 (b)

$$\tan(\theta + \theta'') \rightarrow \infty, \quad \frac{E'}{E} \rightarrow 0$$

此时折射光中只可能 E 平行于介质分界面, 变为线偏光

性质 4.2.1 产生线偏光的方法

1. 布儒斯特角
2. 一堆平行的玻璃板
3. 偏振片或 $1/4$ 波片
4. 双折射晶体分光

推论 4.2.1 半波损失

当 E 与分界面平行时, 如图 (a), 此时若由光疏入射光密, 则 $E'/E < 0$, 反射波电场与入射波反相, 称为半波损失

定理 4.2.4 全反射

折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

当光密入射光疏时, $n_{21} < 1$, 此时若 $\sin\theta > n_{21}$, 则会出现 $\sin\theta'' > 1$, 无法定义实数折射角了。这时候退回折射时关于 k 的方程

$$k_x'' = k_x = k \sin\theta \quad (4.2.13)$$

$$k'' = \frac{v_1}{v_2} k = k n_{21} \quad (4.2.14)$$

有点像改度规了, 因为半正度规下分量长度一定是不超过总长度的
现在给度规添点负号, 使得他不再半正定, 或者说给某一分量复化 (加 i), 比如说闵氏度规中 ct 项就和其他空间项要反号
这样向量长度和其分量长度之间就没有必然的不小于关系了

折射角 \sin 值大于 1 意味着**折射波矢 x 分量的长度大于总长度**, 此时我们引入复波矢就可以解决这个问题, 使得折射波矢 z 分量是纯虚数, 即

$$k_z'' = ik \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

这样就可以保持

$$k_x''^2 + k_z''^2 = k''^2, \quad |k_x''| > |k''|$$

令 $\kappa = k \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$

则折射波电场表示为

$$E'' = E_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k_x'' x - wt)}$$

这是只存在于半空间中的局域亥姆霍兹解, z 表示进入折射介质的深度。这种波传播方向沿介质表面, 场强沿着深度指数衰减。可以认为这种电磁波只存在于界面附近的薄层, 薄层厚度 $\sim \kappa^{-1}$

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}$$

也即进入折射介质中的深度与入射介质中的波长同数量级

全反射的复表示也可以回到非全反射的公式中, 只需作对应

$$\sin\theta'' \rightarrow \frac{\sin\theta}{n_{21}}$$

$$\cos\theta'' \rightarrow i \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1}$$

性质 4.2.2 全反射时的能流

考虑 E 平行于分界面, 也即 (a) 图的情况, 则折射波平均能流密度只有 x 分量, 沿 z 轴透入第二介质的平均能流密度为 0, 不过 z 方向上的能流密度瞬时值不为 0, 它表现为半周期内能量流入薄层, 储存起来, 在下半个周期又释放给入射介质

全反射时的反射波和入射波振幅相同, 只是有相位差, 可以理解为电磁能量被全部反射出去了

4.3 导体中的电磁波

导体内电磁波的传播过程是交变电磁场与自由电子运动相互制约的过程

自由电荷密度激发电场

$$\epsilon \nabla \cdot E = \rho$$

又由欧姆定律

$$J = \sigma E$$

联立可得

$$\nabla \cdot J = \frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

它表明了导体内部有一堆电荷的时候, 就会有电流往外流出, 这是因为电荷之间的斥力(吸力)导致的; 从另一方面来看, 电流的流出又会降低该点的电荷密度, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

解得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

也即电荷密度随指数衰减，衰减的特征时间为

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

定义 4.3.1 良导体条件

当电磁波的频率足够小，导体内的电荷变化缓冲时间很短，也就是外场让你的电子怎么做电子马上就照做了，导体内无电荷积聚，这就是良导体条件：

$$w \ll \tau^{-1} = \sigma/\varepsilon \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon w} \gg 1$$

电荷只能分布在良导体表面上

定理 4.3.1 导体内时谐电磁波方程组

良导体内部 $\rho = 0, J = \sigma E$ ，并且对于一定频率 w 的时谐电磁波，线性各向同性导体中的麦克斯韦方程组写作

$$\nabla \times \vec{E} = iw\mu \vec{H} \quad (4.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -iw\varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} \quad (4.3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (4.3.4)$$

和不导电介质中的时谐电磁波方程组相比

$$\nabla \times \vec{E} = iw\mu \vec{H} \quad (4.3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -iw\varepsilon \vec{E} \quad (4.3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.3.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (4.3.8)$$

就是第二个式子右侧多加了个电流项 σE ，我们可以通过在导体中引入复电容率来将两者统一为一种形式

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{w}$$

这样导体中的时谐电磁波完全可以用上面介质那一套，使用时换掉介电常数 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i\frac{\sigma}{w}$ 即可

良导体时谐电磁波的这个方程

$$\nabla \times \vec{H} = -iw\varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E}$$

右侧代表位移电流和传导电流，位移电流和 E 有 90° 相位差，所以不消耗功率；但是传导电流和 E 同相，会耗散功率

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \sigma E_0^2$$

所以复电容率的实数部分可以理解为位移电流的贡献，不耗散功率；虚部代表着电场推动电荷运动的过程，会耗散功率

定理 4.3.2 导体内的时谐平面电磁波表达式

亥姆霍兹方程照写，只是 k 中的介电常数发生了变化

$$k = w\sqrt{\mu\varepsilon'} \Rightarrow k^2 = w^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{w})$$

我们不直接处理这个根号下带复数的形式，而是设出实虚部后列方程，设 $\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$ ，利用 k 的平方这个复方程可以得到两个实方程

$$\beta^2 - \alpha^2 = w^2 \mu \varepsilon \quad (4.3.9)$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} w \mu \sigma \quad (4.3.10)$$

这就是你解题时对于 α, β 要用到的所有方程组了，前面的都可以不管

推论 4.3.1 良导体简化

k^2 的虚部与实部之比为 $\sigma/w\varepsilon$ ，恰好可以代良导体条件 $\sigma/w\varepsilon \ll 1$ ，也即良导体中 k^2 的虚部远大于实部；在简化计算时，可以视作 k^2 只有虚部

推论 4.3.2 空间入射导体

空间中的波矢是实矢量，直接用波矢的切向连续关系，有

$$k_x = \beta_x + i\alpha_x$$

也即在切向上， $\alpha_x = 0, \beta_x$ 延续了原波矢的切向分量；换一种方法说就是 α 只能垂直于分界面，而且 α 也是代表着损耗，就很像全反射那里振幅随着进入介质的深度指数下降，举个例子当垂直入射为，折射波可写作

$$E = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - wt)}$$

定义 4.3.2 趋肤效应和穿透深度

还是只考虑垂直入射情形，可以直接从 α, β 满足的方程组解出 α, β ；为了简化计算我们带入良导体条件，将 k^2 视作纯虚，则

$$k^2 = iw\mu\sigma \quad (4.3.11)$$

$$k = \sqrt{iw\mu\sigma} = \beta + i\alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} \quad (4.3.12)$$

电磁波随着进入导体深度而指数衰减的特征长度被称为穿透深度 δ ，表达式为

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{w\mu\sigma}}$$

注意了，这个式子能写出来的前提是良导体条件，也即电磁波频率足够小到导体内部视作无自由电荷；在这个前提下，频率越大，电磁波能进入导体的深度越浅

对于高频电磁波，电磁场以及和它相互作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内，这种现象叫做**趋肤效应**

定理 4.3.3 垂直入射导体表面的反射

反射系数 R 定义为反射能流与入射能流之比，可以算得

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2w\varepsilon_0}{\sigma}}$$

对于波长较长的微波或无线电入射电导率较高的导体时，反射系数接近于 1，绝大部分能量被反射出去，只有很小一部分进入导体内部被吸收掉，可以近似看作某种全反射

例题 4.3.1 垂直入射金属的电磁波

平面电磁波垂直入射到金属表面上，试证明：透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热

设入射波矢为 \vec{k}_1 ，透射波矢为 $\vec{k}_2 = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$ ，则由波矢切向连续可知透射波矢垂直出射，所以下面仅需用 α, β 表示这两个向量的长度

不用担心，实验数据告诉我们良导体条件实际上是个非常弱的假设，大多数导体通过相当高频率 ($\ll 10^{17} Hz$) 的电磁场时仍可以视作良导体

折射系数也有类似的定义，电场模方的比值，做题可能会涉及到

列方程

$$\beta^2 - \alpha^2 = w^2 \mu \epsilon \quad (4.3.13)$$

$$\alpha \beta = \frac{1}{2} w \mu \sigma \quad (4.3.14)$$

$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha y} e^{i \beta y}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu w} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\beta + i \alpha}{\mu w} \hat{y} \times \vec{E}$$

能流密度

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{\beta + i \alpha}{\mu w} (\vec{E}^* \times (\hat{y} \times \vec{E}))\right)$$

由平面电磁波可得 \vec{E}^* 与 \vec{H} 垂直, 叉乘出的方向沿传播方向 \hat{y} , 所以只需要算模长

$$\vec{E} = \frac{\beta}{2 \mu w} |E|^2 \hat{y}$$

金属内部电流及其热功率为

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \bar{p} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{J}^* \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{2} |E|^2$$

取金属体内深度为 y $y+dy$, 面积为 dS 的微元, 判断其上的功率净流入和热功率消耗

$$p_{in} = \frac{\alpha \beta}{\mu w} |E|^2 dy dS, \quad p_r = \frac{\sigma}{2} |E|^2 dy dS$$

而又有 $\alpha \beta = \frac{1}{2} w \mu \sigma$, 故

$$p_{in} = p_r$$

透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热

4.4 谐振腔

之前研究的无界空间平面电磁波都是横波, 也被称为 TEM 波, 下面讨论有界空间中的电磁波

定理 4.4.1 导体-介质电磁波边界条件

将导体内部的电磁场视作 0, 并在时谐条件下使用电磁场边界条件中独立的那两个, 即

$$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \quad (4.4.1)$$

$$\vec{e}_n \times \vec{H} = \alpha \quad (4.4.2)$$

第一个式子说明了在导体边界电场线垂直于导体面; 为了直观分析, 再拿出另一个可以被导出的式子

$$\vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0$$

可见磁场与导体界面相切

下面再考虑另一个限制 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$; 在边界上, 设 x, y 在切向, n 在法向; 由于边界上 E 只有法向分量, 故无散条件化为

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0$$

解谐振腔内的电磁振荡不过是解三个方向上加了边界条件的亥姆霍兹方程 (波导是两个方向封闭, 一个方向无界), 仍然是通过分离各个方向的变量之后用傅里叶展开的思想分别解, 最后叠加, 这个算是物理很基础的题了, 不过这次不会考计算。我们来看看一些很典型的模型

例题 4.4.1 长方体谐振腔

E 的每个分量均满足的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

每个方向满足的边界条件：切向为 0，法向导数为 0，这正对应着分离变量后切向 \sin 函数，法向 \cos 函数；在直角坐标系下，每个方向的 E 可以被写作振幅 $\cdot \cos$ 自己方向 $\cdot \sin$ 切向 $\cdot \sin$ 切向，具体来说比如

$$E_x = A_1 \cdot \cos \frac{m\pi}{L_1} x \cdot \sin \frac{n\pi}{L_2} y \cdot \sin \frac{p\pi}{L_3} z$$

其中， L_1, L_2, L_3 分别是 x, y, z 方向上长方体的长度

并且还要考虑电场无散条件，即

$$\frac{m\pi}{L_1} A_1 + \frac{n\pi}{L_2} A_2 + \frac{p\pi}{L_3} = 0$$

这不仅意味着当一组 (mnp) 确定时，振幅只有两个独立方向；更意味着如果 (mnp) 中有两个为 0，则电场为 0，所以最简单的谐振模式为 (110)，其频率为

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

相应的电磁波波长为

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}$$

可以看出该波长与谐振腔的线度同一量级

4.5 波导

解波导电磁波即为在两个方向封闭，一个方向无界这样的边界条件下去解亥姆霍兹方程。和上面的谐振腔的解由三个三角函数相乘比起来就是传播方向替换为 e^{ikz} 的形式即可，例如

$$E_x = A_1 \cdot \cos \frac{m\pi}{L_1} x \cdot \sin \frac{n\pi}{L_2} y \cdot e^{ik_z z}$$

磁场由下式给出

$$H = -\frac{i}{w\mu} \nabla \times E$$

计算可得，若 $E_z = 0$ (E 是横波)，则 $H_z \neq 0$ ，所以 E 和 H 不能同时为横波。 H 也可以是横波，我们称**横电波为 TE，横磁波为 TM**

性质 4.5.1 截止频率与 TE_{10}

若激发频率很低使得 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ，则 k_z 为虚数，传播因子变为衰减因子，电磁波变为不断衰减的电磁振荡。能在波导中传播的最低频率称为该波的截止频率

计算可得 $(mn)=(10)$ 或 (01) 的波模具有最低的截止频率，最容易在波导内传播；由于 mn 的对称性，我们把这种最低截止频率的横电波模统称为 TE_{10} 波

设非传导方向上的最大线度为 a ，则真空中 TE_{10} 波的截止波长为

$$\lambda_{10} = 2a$$



第 5 章 电磁波的辐射

5.1 矢势、标势及其规范

在本节中，我们用 (φ, \vec{A}) 这一套物理量去描述电磁场

性质 5.1.1 势与电磁场之间的关系

之前虽然引入过矢势和标势，但是或多或少都是在一些简化条件之下；这里我们力求维护麦克斯韦方程组的一般性再去引入矢势和标势

由 B 的无散性，引入矢势 A

$$B = \nabla \times A$$

由麦克斯韦方程组其一

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0$$

这种无旋性可以引入标势来描述，即

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \varphi \Rightarrow E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

注意这里的 φ 已经不是先前的那个 φ 了（悲）

拓展 5.1.1 势与洛伦兹力之间的关系

洛伦兹力写作

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} = -e\nabla \varphi - e\frac{\partial A}{\partial t} + e\vec{q} \times (\nabla \times A)$$

在这里用 e 代表电荷量；为了给下一个拓展做铺垫，坐标用广义坐标 q 来表示

拓展 5.1.2 经典电磁场的哈密顿量

这个就属于有非保守的外力，但是我希望把他塞到哈密顿量里面的情况。先回忆一下有广义力的情况怎么处理

带有广义力的拉格朗日方程写作

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F$$

我们希望右侧的广义力可以有这样的形式

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

这样就可以塞到拉格朗日方程里，变为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(L-U)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial(L-U)}{\partial q} = 0$$

利用矢量恒等式

$$C \times (\nabla \times A) = \nabla(C \cdot A) - (C \cdot \nabla)A$$

将洛伦兹力最后一项展开一下可得

$$\vec{F}/e = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla(A \cdot \dot{\vec{q}}) - (\dot{\vec{q}} \cdot \nabla)A$$

注意到 $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\dot{\vec{q}} \cdot \nabla)A$, 所以把第二项和第四项合在一起, 得

$$\vec{F}/e = -\nabla\varphi - \frac{dA}{dt} + \nabla(A \cdot \dot{\vec{q}})$$

可以看到, 第一项和第三项将广义坐标的梯度项提供了, 我们还要把第二项凑成先对广义速度求梯度再对 t 求全导的形式, 即

$$\vec{F}/e = \nabla(A \cdot \dot{\vec{q}} - \varphi) - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\vec{q}}}(A \cdot \dot{\vec{q}})$$

非常好, 这样就可以提出洛伦兹力对应的广义势能了

$$U = e\varphi - e\vec{A} \cdot \dot{\vec{q}}$$

那么拉格朗日量写作

$$L = T - U = \frac{m\dot{\vec{q}}^2}{2} - e\varphi + e\vec{A} \cdot \dot{\vec{q}}$$

再来通过求广义动量来求哈密顿量

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = m\dot{\vec{q}} + e\vec{A}$$

算出这个备用

$$m^2\dot{\vec{q}}^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2$$

来算哈密顿量

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi$$

性质 5.1.2 规范变换

将标势矢势统一为 4-矢量后, 有更加简练的规范变换形式

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

他是满足 $U(1)$ 对称性的

在这样的变换下, E、B 等物理量不会发生变化

$$A \rightarrow A + \nabla\psi \quad (5.1.1)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (5.1.2)$$

正是因为不同的势可以描述同一组 E、B, 所以我们需要引入额外的限制将这些势固定下来, 有两种常用的规范

定义 5.1.1 库伦规范

$$\nabla \cdot A = 0$$

这使得 A 是无源场 (横场); 考虑 E

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

也就是说, E 被自然地分为了两部分, 前一部分是纵场, 后一部分为横场

定义 5.1.2 洛伦兹规范

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

这种规范在解决辐射问题中可以将方程简化为对称形式

定义 5.1.3 达朗贝尔方程

现在将麦克斯韦方程组用矢势、标势来描述
洛伦兹变换下的势表述电动力学基本方程组写作

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad (5.1.3)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.1.4)$$

使用洛伦兹规范时，方程组化为相似的两个非齐次波动方程，其自由项为电流密度和电荷密度，这两个方程被称为达朗贝尔方程

洛伦兹规范可以让形式简单化，所以在下面未经声明均默认使用洛伦兹规范

另外，还有库伦规范下的势表述电动力学基本方程组

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi &= -\mu_0 J \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

这个第二个式子就是在静电场那里解来解去的那个方程了，其解是库伦势，解出来了之后代入第一式即可得到 A

5.2 推迟势

假设原点处有一点电荷，下面来解标势的达朗贝尔方程，确定变化的点电荷激发的标势变化

由于球对称性，使用球坐标；在原点处

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta(x)$$

非原点处可以齐次化

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (r \neq 0)$$

对于球坐标表述的波动方程，有一个很常用的代换可以让方程形式简化：

$$\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$$

你可以理解为球面波的能流 $|S| \sim E^2 \sim \varphi^2$ 而面积 $S \sim r^2$ ^①，在能量守恒要求下 $\varphi \sim \frac{1}{r}$ ；当然这是一个相当粗糙的估算，或许可以辅助记忆，这个代换的主要目的还是为了简化方程形式。另外，这样的代换在解氢原子波函数的径向方程中也用到了，毕竟也有 $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r})$

好的，换掉之后方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

这是一维空间的波动方程，我们使用算符的因式分解（行波法）可以求出解的形式为

$$u(r, t) = f(t - \frac{r}{c}) + g(t + \frac{r}{c})$$

所以球面外的通解为

$$\varphi(r, t) = f(t - \frac{r}{c})/r + g(t + \frac{r}{c})/r$$

通过观察等相位点随着 t 的增大的移动情况，辨认出 f 是向外发射的波，g 是向内收缩的波；在研究辐射问题时通常只有向外发射的波，所以把第二项 kill 掉

$$\varphi(r, t) = f(t - \frac{r}{c})/r$$

^①为什么都是 S 啊，撞衫了，前面是能流后面是面积

对于静电场激发的电势我们是明白的，要使得上面的解能在静电时回到 $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ ，可以猜解

$$\varphi(r, t) = Q(t - \frac{r}{c})/4\pi\varepsilon_0 r$$

下面代回验证就行了，原点以外满足齐次波动方程，原点处奇异，为了迎合 δ 函数，我们特做小球并在球内积分

$$\int_0^{\eta} 4\pi r^2 dr (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{Q(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在这里用到了一个很重要的公式

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$$

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

推广到非原点处的一般电荷分布，有

$$\boxed{\varphi(x, t) = \iiint \frac{\rho(x', t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r} dV'}$$

矢势类似的有

$$\boxed{A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x', t - r/c)}{r} dV'}$$

并且这一组解自动满足洛伦兹规范。推迟势的物理意义在于，信息的传输是需要时间的。

到现在为止我们给出了从源到源激发的电磁场这一完整计算路径

$$(\rho, J) \rightarrow (\varphi, A) \rightarrow (E, B)$$

其中箭头连接的方向都已经算出公式了。但是要注意了，电磁场本身也会影响源的分布，所以还有可以研究的地方。

5.3 时谐远场下矢势辐射展开

在本节中，做了两个简化：

1. **时谐**: 源对时间的依赖化为 e^{-iwt} ，算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 退化为 $-iw$

考虑推迟势后，矢势写作

$$A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x') e^{i(kr - wt)}}{r} dV'$$

2. **远场**: 源的线度足够小，远小于观测距离，同时也远小于波长，即

$$l \ll r, \quad l \ll \lambda$$

观测距离 r 与波长 λ 有三种关系。当观察距离很近，远小于 λ 时称作 **近区**，电磁场近似恒场；观测距离与 λ 同量级时称为 **感应区**，是一个过渡区域；当观测距离很远，远大于 λ 时称作 **远区或辐射区**，下面主要讨论远区的场

定理 5.3.1 远场矢势展开

还是和之前多极展开的思路一样，当观察距离远大于源的线度时，将源内的积分坐标视作微扰，进行泰勒展开。但是注意了，这里展开的不是 $1/r$ ，而是分子的相位因子，在下面可以看到

坐标原点取在源内，设坐标原点到观测者距离为 R ，方向从原点指向观测者，源内某一微元的坐标为 \vec{x}' ，则该微元到观测者的距离 r 可近似写作

$$r \approx R - \hat{R} \cdot \vec{x}'$$

代入时谐条件下的矢势后得

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x')e^{ik}}{R - \hat{R} \cdot \vec{x}'} dV'$$

经过一番极限计算后发现 x' 带来的扰动，在分子相因子中比在分母中更加主导，所以我们略去分母的 x' ，对 $\exp(-ik\hat{R} \cdot \vec{x}')$ 进行展开（太好啦，对 \exp 的展开是再熟悉不过的啦）

$$A(x) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int J(x')(1 - ik\hat{R} \cdot \vec{x}' + \dots) dV'$$

定义 5.3.1 电偶极辐射

对于上述矢势展开的第一项

$$A(x) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int J(x') dV'$$

注意到

$$JdV = Idl = d\dot{q}dl = d\dot{p}$$

所以积分部分可以换做电偶极矩的时间导数，即

$$A(x) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{p}$$

它代表着震荡的电偶极子产生的辐射。然后就可以计算 E 、 B 了，如下

$$\vec{B} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \hat{R} \times \dot{p} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{p} \times \hat{R} \quad (5.3.1)$$

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi \epsilon_0 c^2 R} (\ddot{p} \times \hat{R}) \times \hat{R} = c \vec{B} \times \hat{R} \quad (5.3.2)$$

其中用到了 $\ddot{p} = -iw\dot{p}$, $k = w\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

不用担心，恺恺承诺考到会给这两个公式

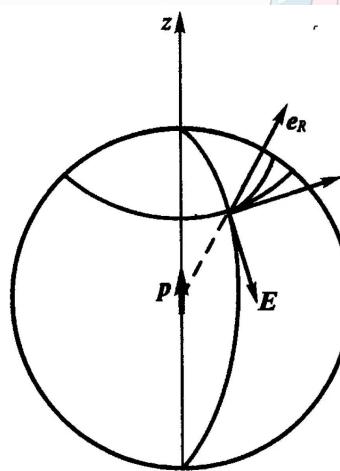


图 5.1: 球心震荡的电偶极子

若震荡的电偶极子在球心且有南北朝向，则球面上的 E 沿经线， B 沿纬线，现在把这种情况下的 B 重组写出来并且理解一下^①

$$\vec{B} = \left(\frac{w^2 p_0}{4\pi \epsilon_0 c^3 R} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) \cdot (e^{i\pi} e^{ikR}) \cdot (e^{-iwt})$$

对比推迟波动的一般形式

$$\vec{B} = B(x) e^{i\phi(x)} e^{-iwt}$$

^①是恺恺上课讲的理解方式

他们的意义分别为：空间振幅、空间相位、时谐；所以球面上的 B 也可以看作是这三部分的组合，其中 $e^{i\pi}$ 代表半波损

性质 5.3.1 电偶极辐射中平均能流密度

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E^* \times H) = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 \hat{R} = \frac{|\vec{p}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \hat{R}$$

可以看出他对角度的依赖表现为 $\sin^2 \theta$ ，也即在赤道上辐射最强，在南北极辐射为 0

性质 5.3.2 电偶极辐射总功率

$$P = \iint |\bar{S}| R^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}|^2}{3c^2}$$

可以看出辐射功率正比于 w^4 ，随着频率的变快辐射功率增大很快

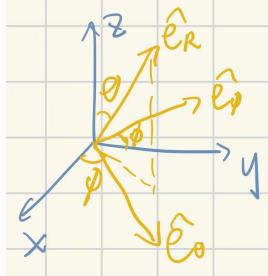
例题 5.3.1 电荷转圈激发的辐射

带电粒子 e 做半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋角频率为 w ，只考虑电偶极辐射（他也有磁偶极和电四极辐射，但是相比起来是小量），求远处的辐射电磁场和辐射能流

电偶极矩震荡的振幅为 $p_0 = ea$ ，为了方便对时间求导，电偶极矩在直角坐标下写成复数形式为

$$\vec{p} = ea(\hat{x} + i\hat{y})e^{-iwt} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = -iwp, \ddot{\vec{p}} = -w^2\vec{p}$$

还需要把平面直角坐标换到复球坐标上，使用正交归一基底的换基关系



$$|x\rangle = \sum |e_i\rangle \langle e_i|x\rangle$$

求出球坐标基底在直角坐标下的投影即可，这是好求的，得到

$$|x\rangle = \sin\theta \cos\phi |e_R\rangle + \cos\theta \cos\phi |e_\theta\rangle - \sin\phi |e_\phi\rangle \quad (5.3.3)$$

$$|y\rangle = \sin\theta \sin\phi |e_R\rangle + \cos\theta \sin\phi |e_\theta\rangle - \cos\phi |e_\phi\rangle \quad (5.3.4)$$

代入可得

$$\ddot{\vec{p}} = eae^{i(\phi-wt)} (\sin\theta \hat{e}_R + \cos\theta \hat{e}_\theta + i\hat{e}_\phi)$$

然后直接带电偶极辐射场公式

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\vec{p}} \times \hat{R} = \frac{w^2 ea}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{i(kR+\phi-wt)} (\cos\theta \hat{e}_\phi - i\hat{e}_\theta) \quad (5.3.5)$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{R} = \frac{w^2 ea}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{i(kR+\phi-wt)} (\cos\theta \hat{e}_\theta - i\hat{e}_\phi) \quad (5.3.6)$$

以及辐射能流

$$\bar{S} = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 \hat{e}_R = \frac{c}{2\mu_0} \left(\frac{w^2 ea}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \right)^2 (\cos^2\theta + 1) \hat{e}_R$$

例题 5.3.2 短天线的辐射

了解即可。当天线的长度远小于波长时，可以算得当电流不变时辐射功率

$$P = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

把辐射功率想作电流通过一个等效电阻消耗的焦耳热功率，即

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

解得

$$R_r = 197 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

要提高辐射能力，必须提高辐射电阻，也即要增大天线长度，这也会使得超出短天线假设的范围

定义 5.3.2 磁偶极矩和电四极矩辐射

矢势展开的第二项

$$A(x) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int J(x') (\hat{R} \cdot \vec{x}') dV'$$

这一项包括了电荷分布的贡献和磁矩分布的贡献 如图所示，(a) 图代表着纯磁多极辐射

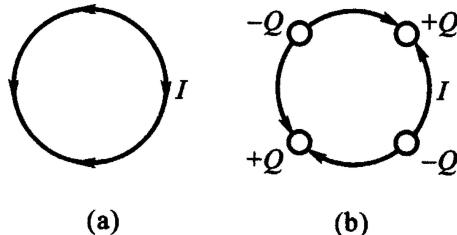


图 5.2: 矢势展开第二项包括的两种模式

射，图 (b) 是震荡的电四极矩，是纯电多级辐射

所以现在把矢势展开第二项分离为磁偶极矩贡献和电四极矩贡献，可以算得

$$A(x) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (-\hat{R} \times \vec{m} + \frac{1}{6} \hat{R} \cdot \vec{D})$$

由此可见，从量级上来看，电偶极辐射 > 磁偶极辐射 ≈ 电四极辐射

5.4 电磁波的衍射

定义 5.4.1 基尔霍夫公式

电磁场的任一直角分量满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

我们可以借用格林函数法，求出算子 $\nabla^2 + k^2$ 的核空间，给出 ψ 的表达式如下

$$-\frac{1}{4\pi} \oint \oint \frac{e^{ikr}}{r} \hat{e}_n \cdot [\nabla' \psi + (ik - \frac{1}{r}) \hat{r} \psi] dS'$$

这被称作基尔霍夫公式，他是惠更斯原理（所有次级光源发射的子波的叠加）的数学表示。需要注意的是，在先前静电场的格林方法时，我们仅需给出边界电势值或法向导数二选一，但是在图中这里是两者均需确定才可以计算出任一点的 ψ

5.5 电磁场动量

定义 5.5.1 动量流密度张量

对于控制体中的微元，三个方向上均会有动量交换，且每个动量都是有三个分量的矢量，这个整体构成了一个二阶张量。设从第 i 个面流出的动量为 \vec{T}_i ，设其第 j 个分量为 T_{ij} ，则可以用分量形式写作

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

对于任意的一块面积微元，均有其对应的矢量 $\Delta \vec{S}$ ，大小即为面积，方向沿着法线方向，那么从这个面积微元上流出的动量可以写作

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{S} \cdot \vec{T}$$

通过闭合曲面流出的总动量为

$$\iint d\vec{S} \cdot \vec{T}$$

定义 5.5.2 动量守恒的微分形式

在前面我们推导了能量守恒的微分表达式（找不到在哪了可以去看最后一页的索引），即外界向控制体做工转化为控制体内部能量增加以及能流从体内流出

$$-\vec{f} \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

在动量守恒这里也是一样的，只是左右两侧都是矢量的形式了

$$-\vec{f} = \nabla \cdot \vec{T} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

\vec{T} 代表着动量的流出，即为动量流密度张量

定理 5.5.1 电磁场的动量密度和动量流密度张量

通过洛伦兹力公式可以给出带电粒子在电磁场中的受力，进而粒子的动量会发生变化；由动量守恒定律，电磁场的动量也会发生变化。利用麦克斯韦方程组，可以将洛伦兹力改写为

$$\vec{f} = [\epsilon_0(\nabla \cdot E)E + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot B)B + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times B) \times B + \epsilon_0(\nabla \times E) \times E] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(E \times B)$$

和动量守恒的微分表达式相对比，方括号内代表着电磁场内部动量转移，最后一项代表电磁场动量密度改变率，所以电磁场动量密度和动量流密度张量为^①

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \\ \vec{T} &= -\epsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{I} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \end{aligned}$$

在电磁场语境下的 \vec{T} 被称作**电磁场的动量流密度张量**或**电磁场应力张量**

观察动量密度 \vec{g} ，你会发现他和能流密度 \vec{S} 的表达式很像

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad \vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{H}$$

所以动量密度和能流密度之间的关系为

$$\boxed{\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}}$$

推论 5.5.1 平面电磁波的动量密度

对于平面电磁波，有关系式

$$\boxed{\vec{S} = cw\hat{k}}$$

其中， c 是能量的传播速度（废话）， w 是能量密度， \hat{k} 是平面电磁波传播方向；代入动量密度和能流密度之间的关系后得到

$$\boxed{\vec{g} = \frac{w}{c} \hat{k}}$$

^①这样通过对照得出的表达式只拥有必要性，没有充分性，肯定是不严谨的，那我也没有办法

至此，我们在平面电磁波的情况下将 g, S, w 三者联系了起来。更好的是，最后一个式子在量子化之后的电磁场也适用。我们将光子能量 $w = \hbar w$ 代入上式得

$$g = \hbar \frac{w}{c} \hat{k} = \hbar \vec{k}$$

这正是光子动量

拓展 5.5.1 从狭义相对论角度理解动量、能流、能量之间关系

上面已经从电磁场角度给出了动量、能流、能量之间几乎相等的关系（只相差 c ）；下面从狭义相对论角度再次阐述他们三者的关系

取一小控制体，设其静质量为 m ，速度为 $\vec{u}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ，则其动量、能量、能流写作

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u} \quad (5.5.1)$$

$$E = \gamma mc^2 \quad (5.5.2)$$

$$\vec{S}V = \gamma mc^2 \vec{u} \quad (5.5.3)$$

在平面电磁波中，令 $\vec{u} = c \hat{k}$ ，代入可得

$$\vec{p} = \gamma m c \hat{k} \quad (5.5.4)$$

$$E = \gamma mc^2 \quad (5.5.5)$$

$$\vec{S}V = \gamma mc^3 \hat{k} \quad (5.5.6)$$

他们之间只相差几个 c ，完美对应到上面用经典电磁场推出的关系式

拓展 5.5.2 从光子在壳条件导出动量与能量关系式

4-动量写作

$$P^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

光子在壳条件

$$P^\mu P_\mu = 0$$

也即

$$E^2/c^2 = |\vec{p}|^2$$

设传播方向为 \hat{k} ，则有

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \hat{k}$$

恰好与场形式的 $\vec{g} = \frac{w}{c} \hat{k}$ 对应

推论 5.5.2 平面电磁波的动量流密度张量/电磁场应力张量

平面电磁波中 k, E, B 恰好组成右手直角坐标系，所以我们来试着用这三个方向将动量流密度张量写成分量的形式

$$\vec{E} \cdot \vec{T} = -\epsilon_0 E^2 \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{E} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

平面电磁波有 $\epsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0$ ，代入可得

$$\vec{E} \cdot \vec{T} = 0$$

同理可证

$$\vec{B} \cdot \vec{T} = 0, \quad \vec{T} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{T} \cdot \vec{B} = 0$$

故在该坐标系下， \vec{T} 只有 $e_k \otimes e_k$ 方向上的分量，所以用 e_k 做内积

$$e_k \cdot \vec{T} = \vec{T} \cdot e_k = we_k$$

故 \vec{T} 写作

$$\vec{T} = we_k \otimes e_k$$

由于迹是坐标变化不变量，所以平面电磁波的 $tr(\vec{T}) = w$ 恒成立。下面我们进一步从能动量张量的角度说明这件事。

拓展 5.5.3 用能动量张量理解动量流密度张量与能量密度

对于能动量张量 T_μ^ν ，有

$$T_\mu^\mu = w - tr(\vec{T})$$

下证电磁场能动张量无迹

由于电磁场在共形变换下作用量不变，即

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0$$

代入共形变换 $\delta g_{\mu\nu} = C(x)g_{\mu\nu}$ ，得

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} C(x) g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^d x T_\mu^\mu C(x) = 0$$

由于 $C(x)$ 是任意函数，故

$$T_\mu^\mu = 0$$

也即能动量张量无迹，这样就可以推出





第 6 章 狹義相對論

警告：我是数批，所以很多东西在数学想明白就完事了，禁止和我巨大讨论物理意义，因为我不知道。

有关“洛伦兹变换为什么是线性的”这个问题，可以参考这个回答^①

定义 6.0.1 间隔

对于两个事件，利用发生的时间和发生的空间坐标去描述，如 $P(t, x, y, z)$ ；则两个事件的间隔定义为

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

定理 6.0.1 间隔不变性

实验给出，所有的自然定律在所有惯性参考系中都是相同的；实验还给出在任意参考系中光速均是不变的。由这两点可以推出两事件的间隔不因参考系变化而改变，即

$$s^2 = s'^2$$

间隔不变性是洛伦兹变换的基石，而爱因斯坦相对性原理是基石的基石

下面给出几种不同的引入洛伦兹变换的方法

6.1 伽利略变换到洛伦兹变换

^② 为了简化只考虑 1 维空间的伽利略变换中的匀速换系过程

$$t' = t \tag{6.1.1}$$

$$x' = x + vt \tag{6.1.2}$$

我们把 t 和 x 写在一起，并用一个矩阵来表示这样的线性变换，有

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

然后你会指着他发现：啊咧，对称性没有噢，矩阵怪怪噢^③这是因为伽利略变换中时间与空间是割裂的，上述变换对应的生成元是

$$H = \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

那么洛伦兹变换的诞生就是为了和对称性相遇的，他的生成元是

$$K = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

^①<https://www.zhihu.com/question/26784931/answer/2776120229>

^②你得大概知道李群和李代数在物理里是个什么东西，因为我不可能把这些东西从头介绍一遍

^③伽利略变换：这是怎么回事儿！

现在把他 e 上去看看伽利略变换群元长什么样

$$L(\varphi) = e^{i\varphi K} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n (iK)^n / n! = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

当坐标系之间相对速度为 v 时, 上述双曲三角函数的表达式为

$$\cosh \varphi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (6.1.3)$$

$$\sinh \varphi = \beta \gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (6.1.4)$$

并且这个转角 φ 还有一个名字叫快度

$$\varphi = \operatorname{arctanh} \beta$$

也就是说: 洛伦兹变换数学上等同于双曲角旋转, 某个点在洛伦兹变换中快度连续取值的情况下, 扫过的轨迹恰好是双曲函数, 如图所示 双曲函数的渐近线恰好是 $x=ct$,

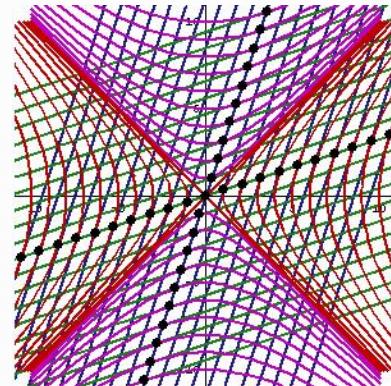


图 6.1: 双曲旋转

这也对应着光速不变性, 同时将 (到原点的间隔) 分为了类时、类光、类空这三大类, 这个分类是洛伦兹变换不变量

注: 下面所说的时空图都是 x(空间) 作为横坐标, ct(时间) 作为纵坐标

1. 类时:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 > 0$$

也就是说事件连线斜率绝对值在时空图中 >1 , 事件之间可以有因果律

2. 类光:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 = 0$$

也就是说事件连线斜率绝对值在时空图中 $=1$, 事件恰可以由一束光联系

3. 类空:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 < 0$$

也就是说事件连线斜率绝对值在时空图中 $=1$, 事件之间没有因果律, 发生的先后顺序不是洛伦兹变换不变量

类时、类光、类空这三大类与因果律联系紧密, 是相对性原理中比较绝对的地方所在了。

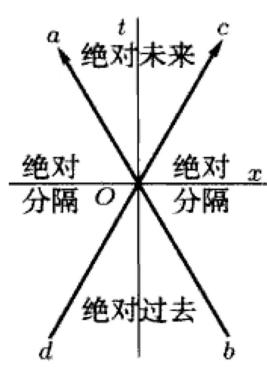


图 6.2: 光锥

6.2 旋转到洛伦兹变换

旋转是什么? 从直观上来看, 旋转是一个保了矢量长度以及任意两个矢量之间的夹角的线性变换。这两条可以被统称为保某个度规下的内积

$$x^i y_i = g_{ij} x^i y^j$$

现在对 \vec{x}, \vec{y} 进行线性变换 (矩阵变换), 即

$$x^i \rightarrow x^k = A_i{}^k x^i, \quad y^j \rightarrow y^l = A_j{}^l y^j$$

那么由新矢量的内积 = 原矢量的内积可得

$$g_{kl} x^k y^l = g_{kl} A_i{}^k x^i A_j{}^l y^j = g_{ij} x^i y^j$$

也即

$$g_{kl} A_i{}^k A_j{}^l = g_{ij}$$

这是最标准的写法, 但是或许有点不直观, 为了便于理解, 我们用矩阵乘法把上式再写一遍

$$A^T g A = g$$

这类特殊的线性变换叫做转动, 它使得变换下度规形式不变, 所以也称作保度规。当 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 时, 回到了经典的欧氏空间转动。三维欧氏空间实转动操作满足条件 $A^T A = I$, 构成李群 $O(3)$ 。

拓展 6.2.1 一个比较邪门的理解方式

上面用指标写很容易眼花或者记错, 这里提供一种非主流的邪门理解, 看个乐呵就行

现在把度规 g 视作一个矩阵 (邪门) 任给两个矢量 \vec{x}, \vec{y} , 就不要考虑上下标了 (或者说全部当上标), 此时内积可以写作一个二次型的样子

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T g \vec{y}$$

对 x 和 y 同时施以一个矩阵变换 $A, \vec{x}' = A\vec{x}, \vec{y}' = A\vec{y}$, 变换后的内积为

$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x}^T A^T g A \vec{y}$$

要求任意矢量的内积不变, 也即有

$$A^T g A = g$$

感觉很多“变化视角”都有这个形式, 比如海森堡绘景下的算符、群的共轭类、相似变化、不可约张量算符的变化规律等。通常涉及到内积的就会是矩阵取 \top 形式, 涉及到换系的就会是矩阵取 -1 形式

回到主线，要使得间隔不变，仅需创造一个不同于我们已知的欧氏度规的度规，这个度规使得时空图中的任意两点距离表达式恰为间隔表达式

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(这个叫做闵氏度规) 然后找出那些保这个度规不变的线性变换即可

保闵氏度规不变的“转动”操作构成了洛伦兹群，他包括了三个已知的仅空间转动，以及三个方向上的洛伦兹变换(牵连到时间的换坐标系)；为了彰显后一类变换的特殊性，我们称他们为 boost(推动)，记为 Λ_μ^ν

我们先在 1 维空间中考虑，可以求出 boost 的形式为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

他的图像长这样 相当于把坐标轴向着一三象限角平分线挤压(或拉伸)了；它可以使

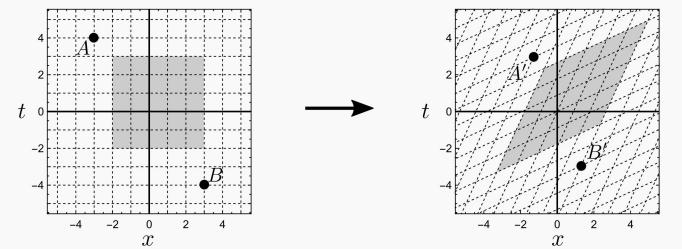


图 6.3: 闵氏度规下的伪转动，图取自高显

得 AB 的间隔在变换前后不变

6.3 洛伦兹变换的应用

我们主要用这个伪旋转矩阵，再结合几何直观来进行参考系之间的转换

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

性质 6.3.1 双曲函数运算基本法则

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (6.3.1)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y \quad (6.3.2)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y \quad (6.3.3)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y} \quad (6.3.4)$$

推论 6.3.1 两次洛伦兹变换之间的复合关系

我们当然可以连续作多次洛伦兹推动，并将其中某些项结合起来先复合，复合的运算关系如下

$$\Lambda(\alpha)\Lambda(\beta) = \Lambda(\alpha + \beta)$$

也即推动的乘积等于快度相加，推动的逆即为快度的相反数的推动。证明是简易的，只需利用上面的双曲函数运算基本法则

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha)\Lambda(\beta) &= \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y & \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y \\ \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y & \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\alpha + \beta) & \sinh(\alpha + \beta) \\ \sinh(\alpha + \beta) & \cosh(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \\ &= \Lambda(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

推论 6.3.2 两个运动坐标系之间的相对速度

若 A 系相对 L 系以速度 v 正向运动，B 系相对 L 系以速度 u 反向运动，则 A 与 B 之间的相对速度为

$$c \cdot \tanh(\alpha + \beta) = c \cdot \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 + \tanh\alpha \cdot \tanh\beta} = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}$$

其中 α, β 是 A 系与 B 系的快度 (以各自运动方向为正向)

特殊地，当两个参考系均相对地面参考系以同一速度大小 v 相向运动时，其相对速度为

$$v' = \frac{2v}{1 + (v/c)^2}$$

定义 6.3.1 固有时

对于时空坐标中的任意类时点，存在唯一的一个线性变换，使得空间坐标为 0，仅有时间分量。(换言之就是把原点到该点的连线视作一个粒子的运动世界线，然后把坐标系换到这个粒子身上，自己看自己当然是一直不动，只有时间的流逝的)

那么这个仅剩的时间分量就叫做固有时 τ

推论 6.3.3 钟慢效应

看图就行了

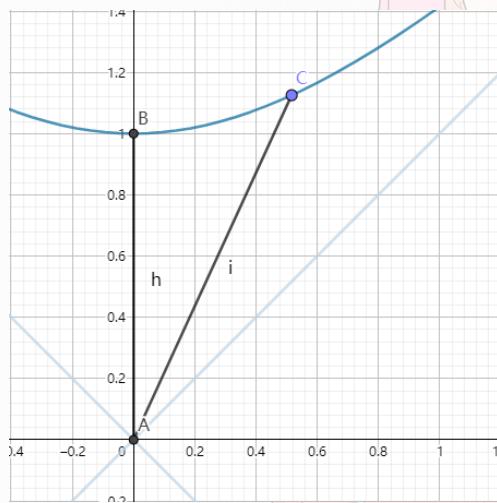


图 6.4: 钟慢效应

图中，AB 是钟自己的坐标系下自己的世界线，AC 是从地面观测高速运动的钟时钟的世界线； $|AB|$ 长度代表着钟的固有时，对应着测量时钟走了多少，而 C 的横坐标代表着测量时相对地面静止的同型号钟走了多少，根据双曲变换一定有 $|y_C| > |y_B|$

也就是说，明明是同时开始计时的，运动的时钟比地面上静止的时钟走的慢一些。下面利用洛伦兹推动定量计算。设钟的固有时为 τ ，下面来计算地面上的钟走了多久。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ct' = \cosh\varphi \cdot c\tau \Rightarrow t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} > \tau$$

例题 6.3.1 尺缩效应

继续看图

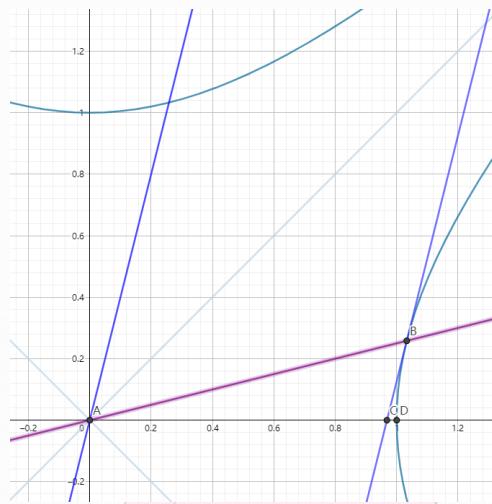


图 6.5: 尺缩效应

AD 是尺子静止时的长度，相对地面参考系运动时，他的两个端点的对应的世界线变为两条斜向上的蓝紫色平行直线；在地面参考系测量动尺长度意味着在同一地面时间测量这两条世界线的空间距离，在图中对应着作一条平行于 x 轴的直线，在动尺的两端世界线上截出的长度，即为 AC。

可以看出， $|AC| < |AD|$ ，也即动尺变短。

下面利用洛伦兹推动定量计算。设 $\vec{AD} = (0, l_0)^T$ ，则洛伦兹推动后的 \vec{AB} 为

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\varphi l_0 \\ \cosh\varphi l_0 \end{pmatrix}$$

$$|AC| = \cosh\varphi l_0 - \beta \sinh\varphi l_0 = \sqrt{1 - (v/c)^2} l_0 < l_0$$

6.4 进入张量语言的物理世界

为了和四维的洛伦兹变换相匹配，或者说是为了满足物理量的相对性原理，我们需要把物理量写作四维张量的形式。^①

个人习惯，未经声明时下面的度规全部取 $(-+++)$

定理 6.4.1 张量的变换关系

^①张量事什么？事两个交换环上的模的直积模掉四个双边线性关系生成的子模得到的代数结构，满足一个关于双边线性函数的泛性质；开玩笑的，他就是一个双边线性的对象，过度纠结没什么意思，建议还是在使用过程中多多体会吧。

1. 标量 (0 阶张量):

$$s'^2 = s^2$$

标量是洛伦兹不变量

2. 矢量 (1 阶张量):

$$V'^\mu = a_\nu{}^\mu V^\nu$$

完全就是熟知的矩阵变换

3. 2 阶张量:

$$T'_{\mu\nu} = a_\mu{}^\lambda a_\nu{}^\tau T_{\lambda\tau}$$

其实就是矩阵线性变换做了两次, 或者说是 $A^T T A$ 这样夹住的形式

下面是常用的四维形式物理量

定义 6.4.1 4-位移

这个之前就用过很多次了

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

定义 6.4.2 4-速度

4-速度定义为

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

由时间与固有时的关系

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \gamma$$

所以 4-速度写作

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma u^1 \\ \gamma u^2 \\ \gamma u^3 \end{pmatrix}$$

就是先把普通的速度配上 c , 然后再全部乘上 γ

定义 6.4.3 4-动量

定义为

$$P^\mu = m_0 U^\mu$$

写作

$$P^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

定义 6.4.4 4-波矢

在简谐波中, 相位是计数问题, 是一个洛伦兹不变量, 由此可得

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - wt$$

是不变量；然后正好我们取度规 $(-+++)$ ，和上面的正负恰好对应，凑出 4-波矢写作

$$K^\mu = \begin{pmatrix} w/c \\ k^1 \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix}$$

用它可以计算相对论性多普勒效应和光行差效应

| 定义 6.4.5 4-电流密度

定义为

$$J^\mu = \rho_0 U^\mu$$

写作

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix}$$

它意味着粒子运动时表现出有电流 J ，同时电荷密度亦相应地改变

对于电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

可以很方便的用 4-电流密度写作

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

| 定义 6.4.6 4-势矢量

对于 A 与 φ 满足的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad (6.4.1)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.4.2)$$

定义达朗贝尔算符

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu$$

则两个达朗贝尔方程写作

$$\square A = -\mu_0 J \quad (6.4.3)$$

$$\square \varphi = -\mu_0 c^2 \rho \quad (6.4.4)$$

右侧很接近 4-电流密度，这提醒我们势矢量可以被合写做

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

此时达朗贝尔方程被合写作

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

洛伦兹规范写作

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

| 定义 6.4.7 电磁场张量

定义一个反对称张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

可以计算得分量形式

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

以及左右夹度规升指标的形式

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

利用电磁场张量，可以将麦克斯韦方程组的这两个有源方程

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.4.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.4.6)$$

$$(6.4.7)$$

合写为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

另一组无源方程合写为

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$

拓展 6.4.1 电磁场作用量

$$S = -\frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

拓展 6.4.2 电磁场能动张量

一个无源电磁场的能动张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\delta\gamma} F^{\delta\gamma})$$

写成分量形式

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} E & S_1/c & S_2/c & S_3/c \\ cg_1 & -\sigma_{11} & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ cg_2 & -\sigma_{21} & -\sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ cg_3 & -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & -\sigma_{33} \end{pmatrix}$$

6.5 相对论力学

总能量表达式

$$E = T + m_0 c^2$$

由动能和静能构成

由4-动量模长不变可得一个不变量，取静止的特殊情况可以算出不变量就是静能

$$P^\mu P_\mu = p^2 - E^2/c^2 = m_0 c^2$$

由此导出一条巨大重要无比的式子^①

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

电动力学，堂堂完结！

感谢能看到这里哦



^①已被收录至 Srednicki 前言，所以真的很重要

梯度散度旋度拉普拉斯算子在不同坐标系下的形式

记度规为 g_{ij} , 度规的逆为 g^{ij} ; 对于正定对角度规 g_{ij} , 定义拉梅系数 $h_i = \sqrt{g_{ii}}$, 则正交坐标系下的梯度、散度、旋度分别为

$$\nabla f = (\sqrt{g^{ii}} \hat{e}_i \partial_i) f$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} \sqrt{g^{ii}} v^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1(v_1 h_2 h_3) + \partial_2(h_1 v_2 h_3) + \partial_3(h_1 h_2 v_3))$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}$$

拉普拉斯算符 (非正交坐标系仍适用)

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i g^{ij} \sqrt{g} \partial_j$$

下面给出常见坐标下的算符形式

1. 球坐标

度规为 $\text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \sqrt{g} = r^2 \sin \theta$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ v_1 & r v_2 & r \sin \theta v_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2$$

2. 柱坐标

度规为 $\text{diag}(1, r^2, 1), \sqrt{g} = r$

$$\nabla f = (\partial_r f) \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta f \right) \hat{e}_\theta + (\partial_z f) \hat{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \partial_r (r v_1) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_2 + \partial_z v_3$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ v_1 & r v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_z^2$$

参考书目

-
- [1] 郭硕鸿, 电动力学 (第三版)
 - [2] 郭硕鸿, 电动力学 (第三版) 学习辅导书
 - [3] 刘川, 经典电动力学
 - [4] 高显, 经典力学
 - [5] 朗道, 场论
 - [6] Zee, Group theory in a nutshell for physicists(2016)



索引

A

AB 效应, 26

B

半波损失, 31

布儒斯特定律, 31

C

磁场强度, 3

磁多极矩, 24

磁化强度, 2

穿透深度, 34

D

电磁场应力张量, 44

电磁场张量, 54

电多极矩, 17

电极化强度矢量, 2

达朗贝尔方程, 38

动量流密度张量, 43

动量守恒的微分形式, 44

电偶极辐射, 41

电位移矢量, 2

F

反射系数, 34

G

固有时, 51

J

基尔霍夫公式, 43

间隔, 47

K

库伦规范, 38

L

良导体条件, 33

洛伦兹规范, 38

M

迈斯纳效应, 26

N

能量守恒的微分形式, 7

P

Poynting 矢量, 8

Q

趋肤效应, 34

球坐标拉普拉斯通解, 10

S

矢势, 21

