

# 利用分数统计刻画海森堡自旋链的量子临界性

刘维佳  
2025 年四月

## 目录

<b>1 背景</b>	<b>1</b>
<b>2 反铁磁海森堡自旋-1/2 XXX 链</b>	<b>2</b>
2.1 XXX 链的 Bethe ansatz 解	2
2.2 弦假设	4
2.3 热力学 Bethe ansatz 方程	6
2.4 元激发行为	8
<b>3 分数统计</b>	<b>11</b>
3.1 分数统计	11
3.2 海森堡自旋链的非互易统计	13
3.3 量子临界区内分数统计的数值解	16
<b>4 量子临界性</b>	<b>17</b>
4.1 与快度无关的分数统计和量子临界性的自由费米子图像	17
4.2 与 Lieb-Liniger 气体的映射	20

## 1 背景

准粒子是凝聚态物理中的一个核心概念，最早由朗道提出——准粒子由自由粒子经绝热演化而来。相比于朗道准粒子，目前准粒子的内涵更加丰富——准粒子是具有确定能量、动量、自旋、电荷等物理量的元激发。

对于反铁磁海森堡自旋-1/2 XXX 链，在零温下，随着外加磁场逐渐增大，体系发生从反铁磁相到铁磁相的量子相变。其中元激发对应的准粒子从无能隙的自旋子 (spinon) 变为有能隙的

磁振子 (magnon)。零温下，量子相变存在一个相变点，体系的行为在这个点发生突变。但在有限温，如图 1 所示，量子相变张成一个 V 形区，称为量子临界区。研究这个临界区内准粒子的行为是极有意义的。理解了临界区，我们便能理解自旋子是如何过渡到磁振子的。

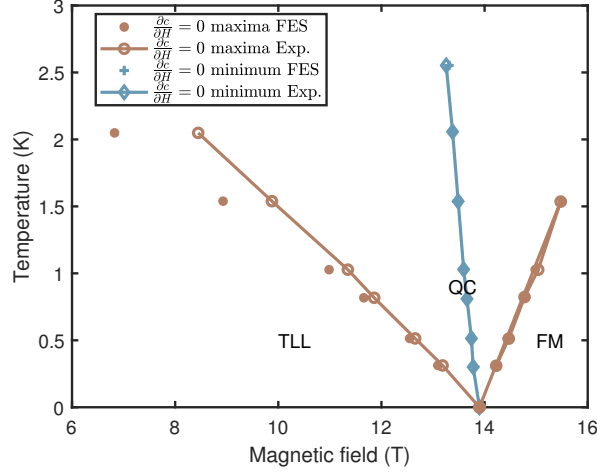


图 1: 反铁磁 XXX 链的相图 [1]。V 形区左侧是 Tomonaga-Luttinger 液体，右侧是铁磁相 (ferromagnetic phase)，中间是量子临界区 (Quantum critical region)。

## 2 反铁磁海森堡自旋-1/2 XXX 链

### 2.1 XXX 链的 Bethe ansatz 解

一维海森堡自旋 1/2 XXX 链的哈密顿量为 [2]

$$\mathcal{H} = 2J \sum_{j=1}^N \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - \frac{g\mu_B H}{\hbar} M^z, \quad (1)$$

其中  $J$  是自旋-自旋相互作用常数， $N$  是自旋格点个数， $g$  和  $\mu_B$  分别是朗德  $g$  因子和玻尔磁矩， $H$  是外加磁场， $M^z = \sum_{j=1}^N S_j^z$  是磁化强度。为了简化计算，我们设置  $\hbar = g\mu_B = 1$ 。如果定义  $M$  为自旋翻转向下（假设磁场方向向上）的个数，则平均磁化强度可以写为

$$m^z \equiv \frac{M^z}{N} = \frac{1}{2} - \frac{M}{N} \equiv \frac{1}{2} - m. \quad (2)$$

其中,  $m$  是向下自旋的数密度。1931 年 Bethe 最早求解该哈密顿量本征态 [2], 并提出著名的 Bethe Ansatz (BA)。这里我们简要指出其核心思想与步骤, 具体求解过程可参见文献 [3] (也可以参考[知乎](#))。

考虑一个基准态, 其自旋全部沿磁场方向, 记为  $|0\rangle$ 。将哈密顿量作用到该态上, 有

$$\mathcal{H}|0\rangle = J \sum_j (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+ + 2S_j^z S_{j+1}^z) |0\rangle - H \sum_j S_j^z |0\rangle = \frac{N}{2} (J - H) |0\rangle. \quad (3)$$

因此该基准态是哈密顿量的本征态, 其本征值为  $E_0 = N(J - \frac{H}{2})$ 。因为  $|0\rangle$  没有向下的自旋<sup>1</sup>, 所以也其称为真空态。对于铁磁相, 基态就是真空态。在真空态基础上, 考虑一个自旋翻转向下的子空间  $M = 1$ 。例如, 第  $x$  个格点自旋翻转向下的态  $|x\rangle = S_x^- |0\rangle$ , 但是它不是哈密顿量的本征态。将其变换到动量空间, 有  $|k\rangle = \sum_x A e^{ikx} |x\rangle$ 。可以验证它是哈密顿量的本征态, 相应的本征方程为

$$\mathcal{H}|k\rangle = [-2J(1 - \cos k) + H + E_0] |k\rangle = E_1(k) |k\rangle. \quad (4)$$

为了看出解的物理图像, 我们把本征态写在坐标表象中, 即  $\psi_k(x) = \langle x | k \rangle = A e^{ikx}$ 。可以看到一个自旋翻转向下对应的哈密顿量本征态就是自由粒子的平面波。利用周期性边界条件  $\psi_k(x + N) = \psi_k(x)$ , 可证明动量可取  $N$  个值:  $k = \frac{2\pi I}{N}$ ,  $I = 1, 2, \dots, N$ 。

考虑两个自旋翻转向下的子空间  $M = 2$ 。可以想象, 此时哈密顿量的本征态是二粒子态, 但由于相互作用的存在, 它不是平面波。Bethe 假设波函数的形式为 ( $x_1 < x_2$ )

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2) &= A_{12} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_{21} e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)} \\ &= A_{12} [e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + S_{12} e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)}]. \end{aligned} \quad (5)$$

如果我们将第一项  $e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$  视为入射平面波, 那么第二项是两体散射的散射波函数, 其中系数  $S_{12} = A_{21}/A_{12}$  表示散射矩阵 (振幅)。利用哈密顿量本征方程, 得到散射矩阵以及本征能量分别为

$$S_{12} = -\frac{e^{i(k_1 + k_2)} + 1 - 2e^{ik_2}}{e^{i(k_1 + k_2)} + 1 - 2e^{ik_1}} \quad (6)$$

$$E(k_1, k_2) = -2J(2 - \cos k_1 - \cos k_2) + 2H + E_0. \quad (7)$$

---

<sup>1</sup>具体指  $\langle 0 | S_j^z | 0 \rangle = 1/2$ 。

利用周期性边界条件，可以得到

$$S_{12}^{-1} = e^{ik_1 N}, \quad S_{21}^{-1} = e^{ik_2 N}. \quad (8)$$

上式被称为两体 Bethe ansatz 方程。通过求解它们，可得到  $k_1, k_2$  所有可能取值。

考虑  $M$  个自旋向下的子空间，Bethe 假设解的形式为  $(x_1 < x_2 < \cdots < x_M)$

$$\psi(x_1, \cdots, x_M) = \sum_P A_P e^{i \sum_j k_j x_{P_j}}, \quad (9)$$

此式即为著名的 Bethe ansatz。代入本征方程得到散射矩阵和本征能量

$$S_{jl} = -\frac{e^{i(k_j+k_l)} + 2 - e^{ik_l}}{e^{i(k_j+k_l)} + 2 - e^{ik_j}}, \quad (10)$$

$$E(k_1, \cdots, k_M) = -2J \sum_j (1 - \cos k_j) + MH + E_0. \quad (11)$$

周期性边界条件给出

$$\prod_{l \neq j} S_{jl}^{-1} = e^{ik_j N}, \quad j = 1, \cdots, M. \quad (12)$$

上式称为为 Bethe ansatz 方程 (BAE)。

## 2.2 弦假设

动量  $k_j$  的取值区间大小为  $2\pi$ 。方便起见，引入自旋快度 (spin rapidity)  $\lambda_j$

$$k_j = \pi - 2 \arctan 2\lambda_j. \quad (13)$$

可以看到自旋快度的取值区间为整个实数域。这样，BAE 可以用自旋快度写为

$$e^{ik_j N} = - \prod_{l=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_l - i}{\lambda_j - \lambda_l + i}. \quad (14)$$

本征能量为

$$E(\lambda_1, \cdots, \lambda_M) = -J \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}} \right) + MH + E_0 = \sum_{j=1}^M \varepsilon_1^0(\lambda_j) + E_0. \quad (15)$$

其中  $\varepsilon_1^0(\lambda)$  是裸准粒子能量。对于基态，所有的快度  $\{\lambda_j\}$  都取实数。但是在有限温，Takahashi 发现在热力学极限下 ( $M, N \rightarrow \infty$ ,  $M/N$  为有限值)，方程 (14) 中的准动量或快度可以为复数 [4]：

$$\lambda_{\alpha,j}^n = \lambda_\alpha^n + \frac{i}{2}(n+1-2j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \nu_n. \quad (16)$$

这里的  $\lambda_\alpha^n$  和  $\nu_n$  分别表示  $n$  弦的实部和  $n$  弦的个数。式 (16) 也被称为弦假设。

在弦假设下，方程 (14) 两边取对数，得到

$$\theta_n(\lambda_\alpha^n) = \frac{2\pi I_\alpha^n}{N} + \frac{1}{N} \sum_{m,\beta} \Theta_{mn}(\lambda_\alpha^n - \lambda_\beta^m), \quad (17)$$

其中  $\theta_n(x) = \pi - 2 \arctan(2x/n)$ ,

$$\Theta_{mn}(x) = \theta_{m+n}(x) + 2\theta_{m+n-2}(x) + \dots + 2\theta_{|m-n|+2}(x) + (1 - \delta_{mn})\theta_{|m-n|}(x). \quad (18)$$

当  $N - \nu_n$  是奇数 (偶数) 时， $I_\alpha^n$  是整数 (半整数)。并且它满足 [4]

$$|I_\alpha^n| \leq \frac{1}{2} \left( N - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} \nu_m \right), \quad t_{nm} \equiv 2\min(n, m) - \delta_{nm}. \quad (19)$$

如果把这个区间 (19) 内被  $I_\alpha^n$  占据的称为准粒子，未占据的整数 (半整数) 称为准空穴，那么  $n$  弦海中准粒子和准空穴的总数量为  $N - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} \nu_m$ 。方程 (17) 中量子数  $I_\alpha^n$  和自旋快度  $\lambda_\alpha^n$  是一一对应的 [5]，因而量子数  $\{I_\alpha^n\}$  可以刻画系统所有的状态，包括基态和激发态。定义函数  $h_n(x)$

$$h_n(x) \equiv \theta_n(x) - \frac{1}{N} \sum_{m,\beta} \Theta_{mn}(x - \lambda_\beta^m). \quad (20)$$

我们用量子数  $\{J_\alpha^n\}$  表示准空穴 ( $J_\alpha^n$  也是整数或半整数)，于是  $n$  弦海中的准空穴满足方程

$$\frac{2\pi J_\alpha^n}{N} = h_n(\lambda_\alpha^n). \quad (21)$$

在热力学极限下， $n$  弦海中的准粒子和准空穴的密度分布函数分别被定义成  $\rho_n(\lambda)$  和  $\rho_n^h(\lambda)$ 。在区间  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  中准粒子和准空穴的数量分别为  $N\rho_n(\lambda)d\lambda$  和  $N\rho_n^h(\lambda)d\lambda$ 。因此方程 (17) 转化为

$$\rho_n^h(\lambda) = a_n(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} * \rho_m(\lambda), \quad (22)$$

其中  $a_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{n^2/4 + \lambda^2}$ ,  $a_0(\lambda) = \delta(\lambda)$ 。卷积核为

$$A_{mn}(\lambda) = a_{m+n}(\lambda) + 2a_{m+n-2}(\lambda) + \dots + 2a_{|m-n|+2}(\lambda) + a_{|m-n|}(\lambda). \quad (23)$$

对于任意两个函数  $a(x)$  和  $b(x)$ ，我们用记号  $a * b(x)$  表示卷积  $\int_{-\infty}^{\infty} a(x-y)b(y)dy$ 。

### 2.3 热力学 Bethe ansatz 方程

基于杨振宁和杨振平的工作，他们发展了 Yang-Yang 热力学方法，用于研究具有 delta 函数势的玻色气体的热力学平衡性质 [6]。一维 Lieb-Liniger 模型的 Yang-Yang 热力学性质已经在实验上被观察到了 [7]。在这里，我们利用 Yang-Yang 热力学 Bethe ansatz (TBA) 方法得到自旋链的热力学量。首先定义  $\varepsilon_n \equiv T \ln \rho_n^h / \rho_n \equiv T \ln w_n$ ，在后面我们能看到  $\varepsilon_n(\lambda)$  是  $n$  弦准粒子的缀饰能。系统的熵通过 Boltzmann 关系式确定

$$\begin{aligned} S &= \int dS = \sum_n \int \ln \frac{[N(\rho_n(\lambda) + \rho_n^h(\lambda))d\lambda]!}{[N\rho_n(\lambda)d\lambda]![N\rho_n^h(\lambda)d\lambda]!} \\ &\approx N \sum_n \int \left[ \rho_n(\lambda) \ln \left( 1 + \frac{\rho_n^h(\lambda)}{\rho_n(\lambda)} \right) + \rho_n^h(\lambda) \ln \left( 1 + \frac{\rho_n(\lambda)}{\rho_n^h(\lambda)} \right) \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (24)$$

最后一步使用了斯特林公式  $\ln N! \approx N \ln N - N$ 。自由能为

$$F = E - TS, \quad (25)$$

$$E = N \sum_n \int \varepsilon_n^0(\lambda) \rho_n(\lambda) d\lambda + E_0. \quad (26)$$

其中  $\varepsilon_n^0(\lambda) = -2\pi J a_n(\lambda) + nH$  是  $n$  弦裸准粒子的能量。我们定义平均相对自由能  $f = (F - E_0)/N$ 。在不引起混淆的情况下，后文所说的热力学量均是平均后的热力学量。热力学平衡态对应平均 Gibbs 自由能最小的态，即  $\delta f = 0$ ，从而得到自旋 XXX 链的 TBA 方程

$$\varepsilon_n^+ = \varepsilon_n^0 - \sum_m A_{mn} * \varepsilon_m^-. \quad (27)$$

其中  $\varepsilon_n^\pm = \pm T \ln(1 + e^{\pm \varepsilon_n/T})$  是一种简化符号。于是，自由能和能量分别可以表示为

$$f = \sum_n \int a_n(\lambda) \varepsilon_n^-(\lambda) d\lambda, \quad (28)$$

$$e = \sum_n \int \varepsilon_n^0(\lambda) \rho_n(\lambda) d\lambda. \quad (29)$$

其他热力学量可以通过标准的热力学关系计算

$$m^z = \frac{\partial f}{\partial H}, \quad s = \frac{\partial f}{\partial T}, \quad \chi = \frac{\partial^2 f}{\partial H^2}, \quad c_H = T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \quad (30)$$

根据  $\rho_n(\lambda)$  的定义，磁化强度或向下自旋的数密度可以通过  $\rho_n(\lambda)$  来计算

$$m = \sum_n n \int \rho_n(\lambda) d\lambda. \quad (31)$$

磁化率是磁化强度关于磁场的导数，即  $\chi = -\partial m / \partial H$ 。于是磁化率也可以通过  $\rho_n(\lambda)$  来计算。

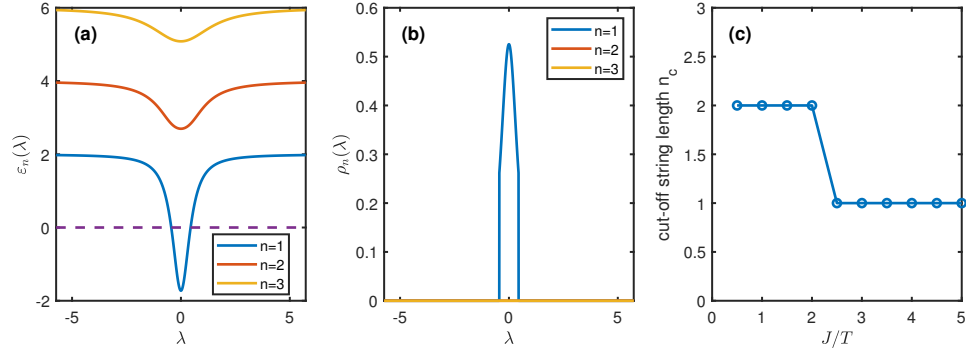


图 2: 零温 (a) 缀饰能和 (b) 密度分布函数, (c) 有限温下弦的截断。(a) 缀饰能随速度  $|\lambda|$  单调递增。这里的数值参数被设为  $J = 1, H = 2J$ 。可以看到只有 1 弦会存在费米海  $(-Q, Q)$ , 满足  $\varepsilon_1(\lambda) < 0$ 。还可以看到  $n$  弦的缀饰能的极限存在, 即  $\lambda \rightarrow \infty, \varepsilon_n(\lambda) \rightarrow nH$ 。(b) 零温下, 只有 1 弦的分布函数不为零, 即零温下 BAE 的解全为实数。其中, 分布函数通过方程 (22) 和 (27) 的数值计算给出。(c) 弦的截断  $n_c$  和相互作用强度  $J/T$  的图像。其中我们使用了文献 [8] 中的截断方法和截断精度  $10^{-6}$ 。为了确保体系状态处于量子临界区, 设置数值磁场  $H = 4J$ 。图中展示相互作用  $J/T$  越弱, 或者说温度越高, 会出现更长的弦。

在零温  $T = 0$ ,  $\varepsilon_n^\pm$  变为

$$\varepsilon_n^+(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon_n(\lambda), & \text{当 } \varepsilon_n(\lambda) \geq 0 \\ 0, & \text{当 } \varepsilon_n(\lambda) < 0, \end{cases} \quad (32)$$

$$\varepsilon_n^-(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \varepsilon_n(\lambda) \geq 0 \\ \varepsilon_n(\lambda), & \text{当 } \varepsilon_n(\lambda) < 0. \end{cases} \quad (33)$$

通过 TBA 方程 (27) 可以证明, 当  $n \geq 2$  时,  $\varepsilon_n \geq 0$ 。因此在零温下, 只有 1 弦有贡献, 这也可以通过图 2 看出。基于这一观察, 在零温下, TBA 方程简化为

$$\varepsilon_1^{(0)}(\lambda) = -2\pi J a_1(\lambda) + H - \int_{-Q}^Q a_2(\lambda - \mu) \varepsilon_1^{(0)}(\mu) d\mu. \quad (34)$$

其中  $Q$  是费米点, 由  $\varepsilon_1^{(0)}(\pm Q) = 0$  决定。从  $\varepsilon_1^{(0)}(\lambda)$  所满足的积分方程来看, 它就是 1 弦准粒子的缀饰能。我们注意到,  $Q = 0$  或  $\varepsilon_1^{(0)}(0) = 0$  对应于体系恰好完全磁化, 所有的自旋翻转向上。此时称为临界点, 对应的临界磁场为  $H_c = 4J$ 。在零温下, 当磁场从零增加到大于临界磁场时, 系统经历从反铁磁态到铁磁态的量子相变, 临界磁场为  $H_c = 4J$ 。

## 2.4 元激发行为

一维海森堡自旋 XXX 链的元激发行为由方程 (17) 和量子数 (19) 描述。一般而言, 因为弦结构, 自旋链的元激发行为非常复杂。体系在有无磁场时, 也会有不同的弦结构。简单起见, 我们仅考虑一弦的激发。

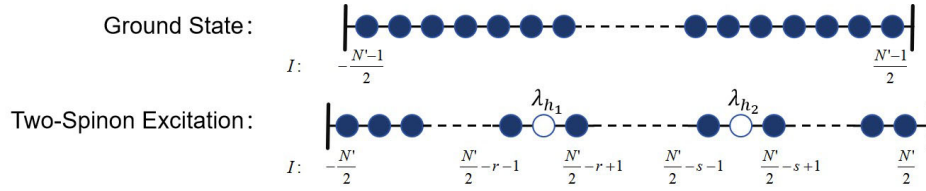


图 3: 元激发示意图

在无外磁场时, 体系的基态是反铁磁态。若  $N$  是奇数, 基态二重简并。若  $N$  是偶数, 基态则无简并。这里仅讨论  $N$  为偶数的情况, 此时基态自旋向上和自旋向下的数目相同, 即  $M = N/2$ 。根据式 (19), 基态的量子数是全满的:

$$I: -\frac{N'-1}{2}, -\frac{N'-3}{2}, \dots, \frac{N'-3}{2}, \frac{N'-1}{2}, \quad N' = \frac{N}{2}. \quad (35)$$

此时对应图 3 中基态的示意图。对于元激发, 我们考虑一个向下的自旋翻转向上, 即  $M = N' - 1$ 。量子数长度变为  $N' + 1$ , 但只会占据其中的  $N' - 1$  个。因此  $\lambda$  海中会产生两个空穴, 如图 3 中的元激发示意图所示。这种元激发的其中一种量子数构型为:

$$I: -\frac{N'}{2}, \dots, \frac{N'}{2} - r - 1, \frac{N'}{2} - r + 1, \dots, \frac{N'}{2} - s - 1, \frac{N'}{2} - s + 1, \dots, \frac{N'}{2}. \quad (36)$$

记空穴量子数  $r, s$  对应的自旋速度分别为  $\lambda_r$  和  $\lambda_s$ 。元激发的能量和动量分别为

$$\Delta E = -\varepsilon^{(0)}(\lambda_r) - \varepsilon^{(0)}(\lambda_s) = \pi J(|\sin q_r| + |\sin q_s|), \quad (37)$$

$$\Delta K = q_r + q_s = 2 \arctan e^{-\pi \lambda_r} + 2 \arctan e^{-\pi \lambda_s}. \quad (38)$$



可以看到，该元激发具有确定的动量和能量，可以认为元激发是某种准粒子。对于磁性系统，通过翻转自旋得到的准粒子一般被称为磁振子 (magnon)，它携带自旋 1。但对于此时的元激发，存在两个自由度，将导致磁振子分解成为两个自旋子 (spinon)，每个自旋子携带自旋 1/2。

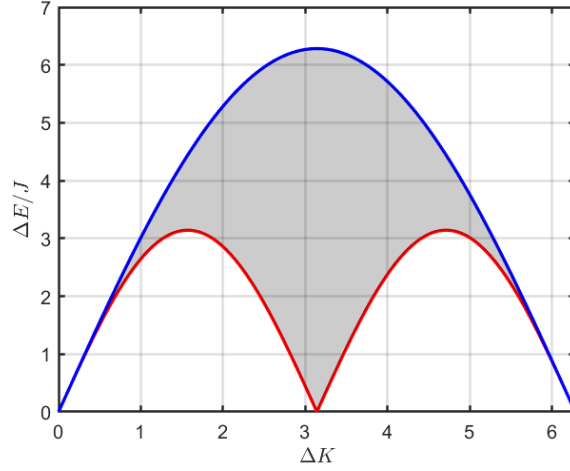


图 4: 一维海森堡自旋 XXX 链的无能隙元激发图像

从元激发的能动量 (37) (38) 可以看出体系存在无能隙的激发，我们将其绘制于图 4 中。激发谱的能量上边界由  $q_e = q_s = \Delta K/2$  给出

$$\Delta E_{max} = 2\pi J \left| \sin \frac{\Delta K}{2} \right|. \quad (39)$$

能量下边界由  $q_r$  取 0 或  $\pi$  给出

$$\Delta E_{min} = \pi J |\sin \Delta K|. \quad (40)$$

在长波极限下，自旋子的声速是常数：

$$u = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{d\Delta E}{d\Delta K} = \pi J. \quad (41)$$

因而激发谱在长波极限下可以对应自旋子的线性色散关系： $\Delta E = u\Delta K$ ，XXX 链的低能物理便可由 TLL 理论描述。

以上讨论在无外磁场的情况下成立。在零温条件下，当外磁场逐渐增大至超过临界磁场时，元激发的准粒子色散关系从无能隙转化为有能隙，体系发生从反铁磁态到铁磁态的量子相变。对

于铁磁相，因准粒子的色散关系具有能隙，TLL 理论失效，该能隙大小由缀饰能最小值决定，其值为

$$\varepsilon_1^{(0)}(0) = H - 4J = \Delta_g. \quad (42)$$

从元激发准粒子有无能隙的角度，我们也能得到量子相变的临界磁场  $H_c = 4J$ 。

利用玻色化技术 [9]，可以求出自旋链的 Wilson 比率 (WR)

$$R_W = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\chi}{c_v/T} = 4K. \quad (43)$$

其中， $K$  是 TLL 理论的相互作用参数。WR 是磁化率与热容的比值，反映了自旋涨落和热涨落之间的竞争关系。在铁磁相，体系完全磁化， $R_W = 0$ 。WR 在两相之间的差异，意味着可以根据 WR 确定量子相变的相图。文献 [8] 给出了这一相图，如图 5 所示。可以看到 WR 能明确给出两个不同的相，然而无法给出明确的量子临界区边界。

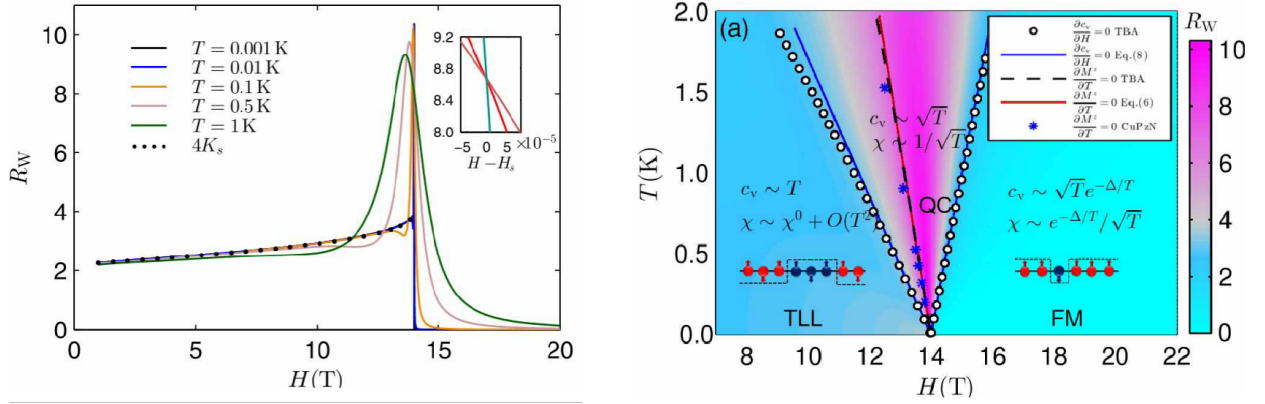


图 5: (a) WR 随温度磁场的变化图和 (b) 由 WR 确定的量子相变相图 [8]。 (a) 在铁磁相， $R_W$  大致与磁场  $H$  成线性关系。在反铁磁相， $R_W = 0$ 。中间的过渡区域是量子临界区。 (b) 通过 WR 的分布，可以看到  $T - H$  图像大致有一个 V 形区，它对应量子临界区。

### 3 分数统计

#### 3.1 分数统计

1991 年, Haldane 推广了费米统计和玻色统计, 并发展了分数统计理论 [10]。在这种理论框架下, 第  $i$  类 (species) 中可占据单粒子态数 (available single-particle states) 的变化由系统中已占据粒子数的变化完全决定, 也就是说

$$\Delta D_i = - \sum_j g_{ij} \Delta N_j. \quad (44)$$

其中  $N_j$  是第  $j$  类的粒子数。  $D_i$  是在  $\{N_j\}$  固定的条件下, 第  $i$  类的可占据单粒子态数。  $g_{ij}$  是第  $i$  类与第  $j$  类之间的相互统计系数。这里的类不仅可以指单粒子的量子态, 也可以指其他任何可以标记不同粒子的参量。显然, 按照此定义, 当用量子态标记不同类的粒子时,  $g_{ij} = g\delta_{ij}$  且  $g = 1$  或  $0$ , 分数统计分别对应费米子和玻色子。

固定  $\{N_i\}$  时, 体系的微观状态数为

$$W(\{N_i\}) = \prod_i \frac{(D_i + N_i - 1)!}{N_i!(D_i - 1)!}, \quad (45)$$

这涵盖了玻色-爱因斯坦和费米-狄拉克统计的情况。我们注意到方程 (44) 是分数统计的一种微分形式, 还需要一个附加的初始条件。我们用  $G_i$  衡量第  $i$  类的容量 (dimension), 即系统中没有粒子时, 第  $i$  类的可占据单粒子态数。也就是说, 当  $\{N_j\} = 0$  时  $D_i = G_i$ 。由此方程 (44) 变为

$$D_i + \sum_j g_{ij} N_j = G_i, \quad (46)$$

这就是分数统计的一般形式。之后, 吴咏时为一维可积的 Lieb-Liniger 气体在准动量空间中建立了分数统计的通用公式 [11]。实际上, 这样的推广在二维和三维的相互作用多体系统中也同样适用。这一点对于未来从分数统计的角度研究高维量子系统具有重要意义。

接下来我们用分数统计理论描述自旋 XXX 链。如果我们把动量在区间  $(k_i - \Delta k/2, k_i + \Delta k/2)$  中的粒子视为第  $i$  类, 那么  $G_i = L\Delta k/(2\pi)$ 。其中  $L$  是体系长度。自旋 XXX 链中, 体系长度是自旋个数  $N$ 。为了应用分数统计理论, 我们的任务是确定自旋 XXX 链的统计因子  $g_{ij}$ 。注意到, 在分数统计理论框架内,  $n$  弦可以被视为统计的准粒子。要构建分数统计, 我们需要将准动量空

间转换为自旋链中的快度空间  $\lambda$ ，二者通过雅可比因子相关联。利用准动量参数化和弦假设， $n$  弦的总动量由以下公式给出

$$k_\alpha^n = \frac{1}{i} \sum_j \ln \frac{2\lambda_{\alpha,j}^n - i}{2\lambda_{\alpha,j}^n + i} = 2 \operatorname{arccot} \left( \frac{2}{n} \lambda_\alpha^n \right). \quad (47)$$

虽然弦解 (16) 是复数，但它们的总动量仍然是实数，这启发我们在动量空间  $k$  用总动量  $k_\alpha^n$  标记  $n$  弦，在  $\lambda$  海中使用实部  $\lambda_\alpha^n$  标记。由此， $n$  弦裸态的可占据单粒子态数  $G_\alpha^n$  可以通过乘以一个雅可比行列式确定

$$G_\alpha^n = \frac{N}{2\pi} \frac{dk_n}{d\lambda_n} \Delta\lambda_n = N a_n(\lambda_\alpha^n) \Delta\lambda_n. \quad (48)$$

对于自旋 XXX 链来说，量子态由量子数  $I_\alpha^n$  来标记，而一个量子数只能对应一个准粒子（自旋快度）。因此第  $i$  类的可占据单粒子态数等于第  $i$  类的空穴数。这与费米子的统计性质类似。然而，能谱的复杂结构 (14) 使得分数统计形式不是平庸的。定义  $n$  弦的准粒子数密度  $\rho_n$ 、准空穴数密度  $\rho_n^h$  和总数密度  $\rho_n^t$

$$\begin{aligned} N\rho_n(\lambda_\alpha^n)\Delta\lambda &= \text{区间}(\lambda_\alpha^n - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_\alpha^n + \frac{\Delta\lambda}{2})\text{内的准粒子数} = N_\alpha^n, \\ N\rho_n^h(\lambda_\alpha^n)\Delta\lambda &= \text{区间}(\lambda_\alpha^n - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_\alpha^n + \frac{\Delta\lambda}{2})\text{内的准空穴数} \\ &= \text{区间}(\lambda_\alpha^n - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_\alpha^n + \frac{\Delta\lambda}{2})\text{内的可占据单粒子态数} = D_\alpha^n(\{N_\beta^m\}), \\ N\rho_n^t(\lambda_\alpha^n)\Delta\lambda &= \text{区间}(\lambda_\alpha^n - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_\alpha^n + \frac{\Delta\lambda}{2})\text{内的所有准粒子和准空穴数} \\ &= I_n(\lambda_\alpha^n + \frac{\Delta\lambda}{2}) - I_n(\lambda_\alpha^n - \frac{\Delta\lambda}{2}) \equiv \tilde{D}_\alpha^n(\{N_\beta^m\}). \end{aligned}$$

显然，恒等式  $\rho_n^t = \rho_n + \rho_n^h$  和  $\tilde{D}_\alpha^n(\{N_\beta^m\}) = N_\alpha^n + D_\alpha^n(\{N_\beta^m\})$  始终成立。

在弦假设下，方程 (46) 可以写成

$$\tilde{D}_\alpha^n(\{N_\beta^m\}) = G_\alpha^n + N_\alpha^n - \sum_m \sum_\beta g_{\alpha\beta}^{mn} N_\beta^m. \quad (49)$$

在热力学极限下，上述方程变为

$$\rho_n^h(\lambda) + \sum_m \int g_{mn}(\lambda - \mu) \rho_m(\mu) d\mu = a_n(\lambda). \quad (50)$$

与 BAE (22) 对比, 相互统计因子  $g_{mn}(\lambda - \mu)$  可以写为

$$g_{mn}(\lambda - \mu) = A_{mn}(\lambda - \mu). \quad (51)$$

应当指出, 与精确 Bethe ansatz 相比, 分数统计理论并未提供新的结果。然而, 它提供了一种不同于 Bethe ansatz 的视角, 给予数学结构以物理诠释, 并且对高维量子多体系统的热力学行为产生了重要影响。分数统计形式的热力学方程更适合刻画来自不同准粒子 (如磁振子束缚态) 的贡献。重要的是, 分数统计揭示出粒子的相互作用可以转化为粒子的量子统计, 而统计因子确定了不同粒子之间的相互作用。

在量子相变点附近, 坐标空间的等时关联函数有如下形式 [12]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, 0) = A e^{-|x|/\xi}, \quad (52)$$

其中  $\xi$  是关联长度。对上式做傅里叶变换可得到动量空间的关联长度  $\xi_k$  与  $\xi$  成反比 [13]。在临界区, 坐标  $\mathbf{r}$  空间中的关联长度  $\xi$  趋于无穷大, 而准动量  $\mathbf{k}$  空间或自旋快度  $\lambda$  空间的关联长度中几乎接近于零, 分数统计方程 (50) 变成局域形式, 从而在准动量空间或快度空间产生了非互易分数统计 (non-mutual fractional exclusion statistics)。这深刻反映了量子临界性的统计特性。

### 3.2 海森堡自旋链的非互易统计

基于上述分析, 在量子临界区, 一般形式的分数统计可以转化为非互易统计, 即统计参数应该是局域的  $g_{mn}(\lambda - \mu) = g_n(\lambda) \delta_{mn} \delta(\lambda - \mu)$ 。因此, 方程 (50) 可以改写为

$$\rho_n^h(\lambda) + g_n(\lambda) \rho_n(\lambda) = a_n(\lambda). \quad (53)$$

这导致  $\delta \rho_n$  和  $\delta \rho_n^h$  之间的关系更为简洁, 即

$$\delta \rho_n^h = -g_n \delta \rho_n. \quad (54)$$

现在我们的目标是利用非互易统计推导热力学量。体系的熵为

$$s = \sum_n \int [(\rho_n + \rho_n^h) \ln(\rho_n + \rho_n^h) - \rho_n \ln \rho_n - \rho_n^h \ln \rho_n^h] d\lambda. \quad (55)$$

热力学平衡态下自由能  $f = e - Ts$  最小，其条件是  $\delta f / \delta \rho_n = 0$ ，即

$$\begin{aligned} 0 &= \delta f = \delta e - T \delta s \\ &= \sum_n \int d\lambda [\varepsilon_n^0 - T(1 - g_n) \ln(\rho_n + \rho_n^h) + T \ln \rho_n - T g_n \ln \rho_n^h] \delta \rho_n, \end{aligned} \quad (56)$$

由此得到

$$(1 - g_n) \ln(\rho_n + \rho_n^h) - \ln \rho_n + g_n \ln \rho_n^h = \frac{\varepsilon_n^0}{T}. \quad (57)$$

令  $w_n(\lambda) = \rho_n^h(\lambda) / \rho_n(\lambda)$ ，上式可化为著名的 Haldane 和 Wu 的分数统计方程 [14]

$$(1 + w_n)^{1-g_n} w_n(\lambda)^{g_n} = e^{\varepsilon_n^0(\lambda)/T}. \quad (58)$$

该方程是分数统计的热力学方程，与自旋链的 TBA 方程有相同的意义。所有热力学量均可用  $w_n(\lambda)$  表示，例如自由能

$$f = -T \sum_n \int a_n(\lambda) \ln \left( \frac{1 + w_n}{w_n} \right) d\lambda. \quad (59)$$

$n$  弦对其他热力学量的贡献也可以在分数统计框架内进行分析。

从图 2(c) 中可以看到，在有限温度下，具体来说当  $J/T \gtrsim 10$  时，分数统计方程 (53) 和 (58) 仅需考虑长度为 1 的弦，

$$\rho_1^h(\lambda) + \rho_1(\lambda) = a_1(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} a_2(\lambda - \mu) \rho_1(\mu) d\mu, \quad (60)$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = \varepsilon_1^0(\lambda) + T \int_{-\infty}^{\infty} a_2(\lambda - \mu) \ln [1 + e^{-\varepsilon_1(\mu)/T}] d\mu. \quad (61)$$

此外，在临界区域，磁场  $H$  满足  $|H - H_c|/T \ll 1$ 。温度和磁场的约束要求密度分布函数的截断快度  $\lambda_c$ （即  $\rho(\pm\lambda_c) < 10^{-6}$ ）趋近于 0，这在图 6 中有详细阐述。基于以上论述，我们将积分核  $a_2(\lambda - \mu)$  在  $\mu = 0$  附近展开为

$$a_2(\lambda - \mu) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1 + \lambda^2} + \frac{2\lambda\mu}{(1 + \lambda^2)^2} + \frac{(3\lambda^2 - 1)\mu^2}{(1 + \lambda^2)^3} + O(\mu^3) \right]. \quad (62)$$

将其代入方程 (60)，得到

$$\rho_1^h(\lambda) + \rho_1(\lambda) = a_1(\lambda) - \frac{m}{\pi(1 + \lambda^2)} + O(\lambda_c^3), \quad (63)$$

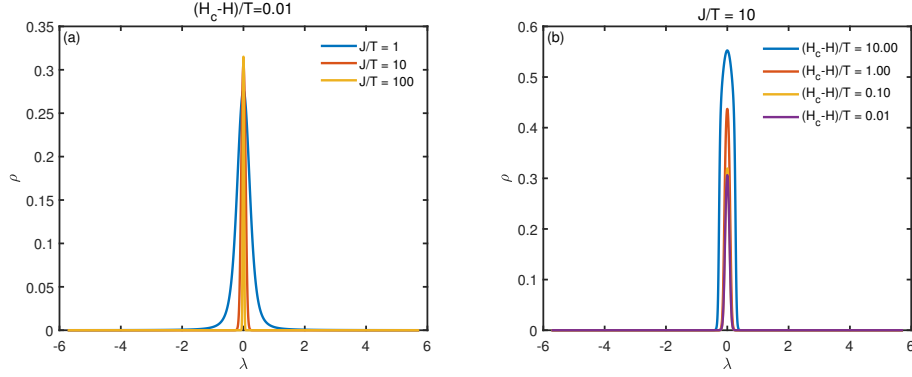


图 6: 密度分布函数在不同 (a) 相互作用强度和 (b) 磁场强度下的图像。图中可以看到在临界区, 即  $|H_c - H|/T \ll 1$  且  $J/T \gtrsim 10$ , 分布函数的快速截断  $\lambda_c$  趋于零。

其中  $m = M/N$  需要通过解分数统计方程确定。现在, 我们将其转换为非互易统计形式 (53)。将上式整理为

$$a_1(\lambda) = \frac{1}{1 - \frac{m}{\pi(1+\lambda^2)a_1(\lambda)}}(\rho_1^h + \rho_1) \\ \approx \rho_1^h(\lambda) + \left\{ \left[ \frac{m}{2-m} + \frac{6m\lambda^2}{(2-m)^2} \right] w_1(\lambda) + \frac{2}{2-m} + \frac{6m\lambda^2}{(2-m)^2} \right\} \rho_1(\lambda). \quad (64)$$

通过比较方程 (53), 我们可以读出非互易统计因子

$$g_1(\lambda) = \left[ \frac{m}{2-m} + \frac{6m\lambda^2}{(2-m)^2} \right] w_1(\lambda) + \frac{2}{2-m} + \frac{6m\lambda^2}{(2-m)^2} \\ = 1 + \frac{m}{2-m} \left( 1 + \frac{6\lambda^2}{2-m} \right) (1 + w_1(\lambda)) \\ \approx 1 + \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{m}{2} \right) (1 + w_1(\lambda)). \quad (65)$$

然后, 非互易统计因子  $g_1(\lambda)$  可以通过数值解得出, 它通过分数统计方程 (58) 与  $w_1(\lambda)$  相互耦合

$$(1 + w_1)^{1-g_1} w_1(\lambda)^{g_1} = e^{\varepsilon_1^0(\lambda)/T}. \quad (66)$$

这里  $\varepsilon_1^0(\lambda) = -2\pi J a_1(\lambda) + H$ 。而自旋向下的数量  $m$  由式 (31) 中  $n = 1$  的积分确定

$$m = \int \rho_1(\lambda) d\lambda = \int \frac{a_1(\lambda)}{w_1(\lambda) + g_1(\lambda)} d\lambda. \quad (67)$$

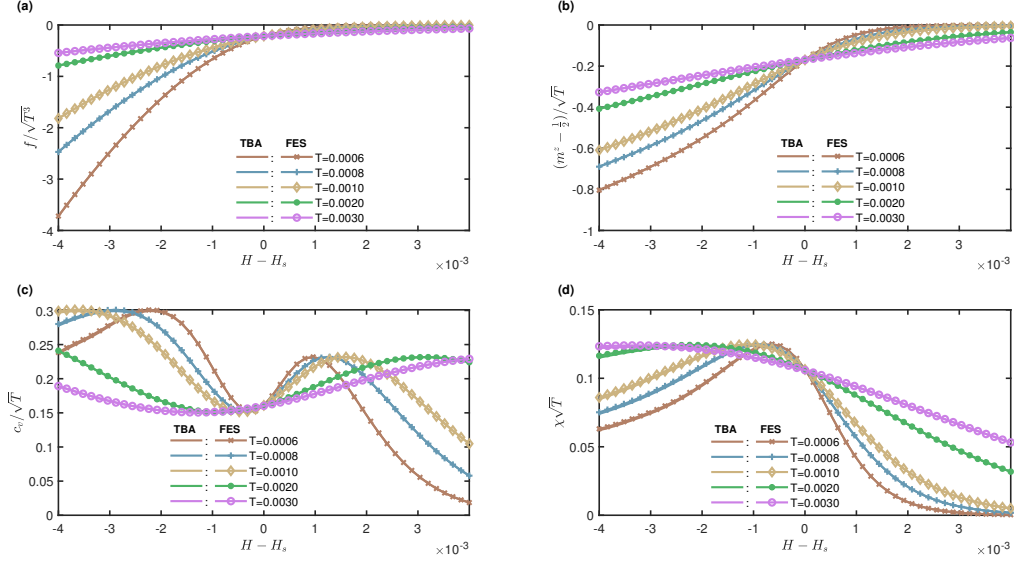


图 7: 量子临界区的标度函数: (a) 自由能, (b) 磁化强度, (c) 热容和 (d) 磁化率。在临界点附近, 非互易分数统计的数值结果和 TBA 符合得很好。这里的数值参数设为  $J = 1$ 。

理论上, 我们可以通过迭代求解这三个方程 (65) (66) (67), 从而得到临界区内所有的热力学性质。

### 3.3 量子临界区内分数统计的数值解

在这一部分中, 我们展示自旋 XXX 链的量子临界性可以通过非互易分数统计求解。为简化符号, 接下来的内容中将省略下标, 除了  $a_1(\lambda)$  和  $a_2(\lambda)$ 。

需要指出的是,  $g(\lambda)$ 、 $w(\lambda)$  和  $m$  可以通过迭代求解方程 (65)、(66)、(67) 得到。磁化强度  $m^z$  与向下自旋的数密度  $m$  之间的关系由式 (2) 给出。 $m^z$  作为  $H$  的函数绘制在图 7(b) 中。随后, 自由能可以利用  $w(\lambda)$  直接计算出来并绘制在图 7(a) 中

从方程 (29) 和 (67) 中可以看出, 比热和磁化率分别是能量和磁化强度关于温度和磁场的导



数

$$c_v = \frac{\partial e}{\partial T} = - \int \frac{\varepsilon_0(\lambda) a_1(\lambda)}{(w+g)^2} \left( \frac{\partial w}{\partial T} + \frac{\partial g}{\partial T} \right) d\lambda, \quad (68)$$

$$\chi = - \frac{\partial m}{\partial H} = \int \frac{a_1(\lambda)}{(w+g)^2} \left( \frac{\partial w}{\partial H} + \frac{\partial g}{\partial H} \right) d\lambda. \quad (69)$$

以计算比热为例，还需要通过求解三个耦合方程的导数方程来计算  $\frac{\partial g}{\partial T}$  和  $\frac{\partial w}{\partial T}$ 。这些偏导数方程由方程 (65)、(66)、(67) 对  $T$  求偏导数给出

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{1}{2}(1+m)(1+w) \frac{\partial m}{\partial T} + \frac{m}{2} \left( \frac{m}{2} + 1 \right) \frac{\partial w}{\partial T}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} \ln \left( 1 + \frac{1}{w} \right) + \left( \frac{g-1}{1+w} - \frac{g}{w} \right) \frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\varepsilon_0}{T^2}, \quad (71)$$

$$\frac{\partial m}{\partial T} = - \int \frac{a_1(\lambda)}{(w+g)^2} \left( \frac{\partial w}{\partial T} + \frac{\partial g}{\partial T} \right) d\lambda. \quad (72)$$

通过上述步骤，可以得到所有热力学量。比热和磁化率分别展示在图 7(c) 和图 7(d) 中。从图 7(c) 和图 7(d) 中可以看到，比热存在两个最大值和一个最小值，而磁化率存在一个最大值。比热的最大值清晰地标记了从临界点散开的交叉临界温度。比热的三个极值在量子相变临界点附近汇聚，对应于一维自旋 XXX 链的临界点。通过比热双峰确定临界区边界的方法最早由文献 [8] 给出。相比于 WR，比热能给出明确的临界区边界，但是也缺少了一定的物理意义。自旋 XXX 链量子临界点附近的相图如图 1 所示，其中我们将非互易 FES 的数值结果与 CuPzN 的实验结果 [15] 进行了比较。可以看出，随着磁场的增强，系统表现出从 TLL 相到铁磁相的量子相变，量子临界区域从临界点向外扩展。该图表明非互易 FES 在低温或强场下表现得极为有效。

## 4 量子临界性

### 4.1 与快度无关的分数统计和量子临界性的自由费米子图像

对于自旋 XXX 链的量子临界性中呈现的稀疏磁子的研究非常困难 [16, 17, 18, 19]。在此我们发现，非互易统计参数  $g(\lambda)$  在临界区域可以简单表示为  $g_0 = g(\lambda = 0)$ ，如图 8 所示。同时，在非互易分数统计框架下，我们更容易发现量子临界性存在自旋子。

我们注意到, 通过求解热力学的分数统计方程 (58), 可以得到统计参数  $g_0$ , 进一步计算出热力学量。根据图 8(a), 在  $J/T > 1$  时, 方程 (58) 的左侧可以在  $g_0 \approx 1$  附近展开为

$$\left\{ 1 + (1 - g_0) \ln \left[ 1 + \frac{1}{w(\lambda)} \right] + O((1 - g_0)^2) \right\} w(\lambda) = e^{\varepsilon_0(\lambda)/T}, \quad (73)$$

其领头项的解为  $w(\lambda) = e^{\varepsilon_0(\lambda)/T}$ 。非互易分数统计的密度分布也被简化为

$$\rho(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{e^{\varepsilon_0(\lambda)/T} + g_0} \approx \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^{[16J\lambda^2 - (4J - H)]/T} + g_0}, \quad (74)$$

其中  $a_n(\lambda) \approx \frac{2}{n\pi}(1 - \frac{4}{n^2}\lambda^2 + \dots)$ 。当  $g_0 = 1$  时, 这恰好是自由费米子的费米-狄拉克统计, 此时  $16J\lambda^2$  是动能,  $4J - H$  是化学势。向下自旋的数密度  $m$  由下式给出

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^{[16J\lambda^2 - (4J - H)]/T} + g_0} d\lambda = -\frac{T^{\frac{1}{2}}}{2g_0\sqrt{\pi J}} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-g_0 e^{\frac{4J - H}{T}}). \quad (75)$$

其中  $\text{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$  是多重对数函数。磁化率是  $m$  对磁场  $H$  的导数

$$\chi = -\frac{\partial m}{\partial H} = -\frac{1}{2g_0\sqrt{\pi J T}} \text{Li}_{-\frac{1}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}). \quad (76)$$

这里记  $\Delta = 4J - H$ 。体系的能量为

$$\begin{aligned} e &= \int \varepsilon_0(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \approx \frac{2}{\pi} \int \frac{16J\lambda^2 - (4J - H)}{e^{[16J\lambda^2 - (4J - H)]/T} + g_0} d\lambda \\ &= \sqrt{\frac{T}{\pi J}} \left[ \frac{T}{4g_0} \text{Li}_{\frac{3}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}) + \frac{\Delta}{2g_0} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}) \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

比热为

$$c_v = \frac{\partial e}{\partial T} = \sqrt{\frac{T}{\pi J}} \left[ -\frac{3}{8g_0} \text{Li}_{\frac{3}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}) + \frac{1}{2g_0} \left( \frac{\Delta}{T} \right) \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}) - \frac{1}{2g_0} \left( \frac{\Delta}{T} \right)^2 \text{Li}_{-\frac{1}{2}}(-g_0 e^{\frac{\Delta}{T}}) \right]. \quad (78)$$

在临界点  $T = 0$ , 有  $g_0 = 1$ , 准粒子的统计行为表现为费米-狄拉克统计。热力学量的解析解 (75)、(76) 和 (78) 在  $g_0 = 1$  极限下与文献 [8] 中给出的结果一致。在图 8(b) 中, 我们把与快度无关的 FES 的数值表达式 (67) 和解析表达式 (75) 的结果与 TBA 的计算结果进行了比较。可以看到, 只要满足量子临界区的条件, 即  $J/T > 2$ ,  $|H - H_c|/T \ll 1$ , 具有统计参数  $g_0$  的无相互作用

用准粒子的图像就是合理的，此时对热力学量的贡献仅来自长度为 1 的弦。解析表达式 (75) 在量子临界区的低温范围内都是有效的。

通过观察方程 (75)、(76)、(77) 和 (78)，可以发现如果将相互作用强度和磁场分别替换为有效相互作用强度和有效磁场

$$J^* = Jg_0^2, \quad H_c - H^* = H_c - H + T \ln g_0. \quad (79)$$

这些热力学量就等价于无自旋自由费米子的热力学量 [8]。上述公式揭示了自旋-自旋相互作用的具体细节在临界区域内并不重要，统计参数仅改变相互作用强度。因此在量子临界区，自旋 XXX 链仍可以映射为无自旋自由费米子，温度仅对相互作用强度和磁场产生修正。其中，相互作用强度对应费米子的质量，而外场则对应化学势。

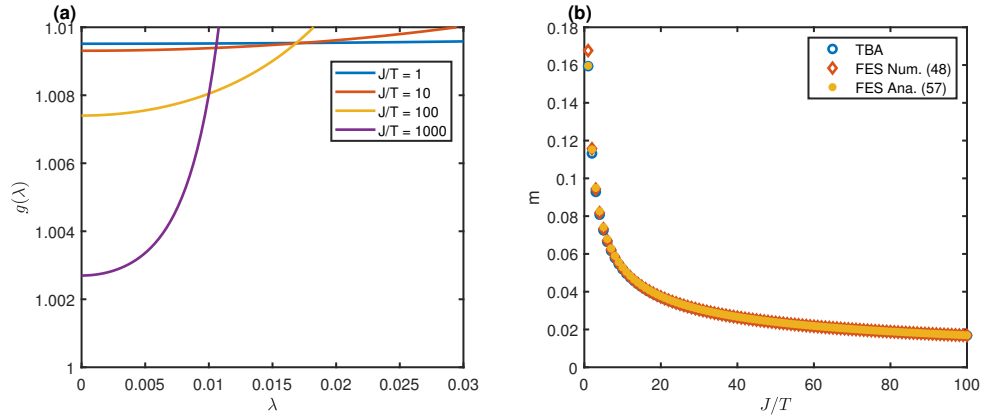


图 8: (a) 非互易统计参数和 (b) 磁化强度与相互作用强度的关系。(a) 图中表明，当相互作用强度减小时，或者等价地说，当温度升高时，非互易统计参数  $g(\lambda)$  随快度  $\lambda$  的变化变得更加平滑，但是逐渐远离 1。此外，较大的  $J$  对应较小的快度截断（见图 6 (a)），因此只需要考虑较小的  $\lambda$ ，这意味着  $g(\lambda) \approx g(\lambda = 0)$  的近似是合理的。(b) 利用 TBA 方法、FES 数值方程 (67)、与快度无关的 FES 解析方程 (75) 得到磁化强度作为相互作用强度的函数。TBA 和 FES 的结果在  $J/T = 1$  时差异显著，这源于 2 弦的出现。这两个子图均表明，对于  $J/T > 1$ ，与快度无关的非互易统计参数是有效的。

## 4.2 与 Lieb-Liniger 气体的映射

我们注意到，自旋-1/2 XXX 链和  $\delta$  函数相互作用玻色气体的相图在临界区域表现出惊人的一致性，这启发我们尝试从分数统计的角度建立这两个系统之间的映射关系。

在临界区域，且相互作用强度满足  $c/\sqrt{T} \gtrsim 10$  时，一维 Lieb-Liniger 玻色气体等价于具有恒定统计参数  $g_0$  的一维无相互作用准粒子系统 [13]。可以观察到，类似于自旋-1/2 XXX 链，玻色气体中的  $g_0$  也接近 1，只不过  $g_0 < 1$ 。在图 9(a) 中，我们绘制了自旋链和玻色气体的恒定统计参数  $g_S$  和  $g_B$  随温度变化的行为，并与虚线所示的自由费米子的统计参数进行比较。结果显示在零温下  $g_S = g_B = 1$ ，这表明两个系统在临界点都可以映射为无自旋自由费米子。还可以看到，随着温度升高， $g_S$  和  $g_B$  逐渐远离，表明自旋 XXX 链和玻色气体对应于具有不同统计参数  $g_0$  的无相互作用准粒子。在上一节中，我们证明了在临界区域的有限温度下， $g_0$  仅仅修改了有效相互作用强度和有效外场的表达式。因此，这两个系统之间的对应关系仍然可以使用无自旋自由费米子的图像及其有效参数来建立。

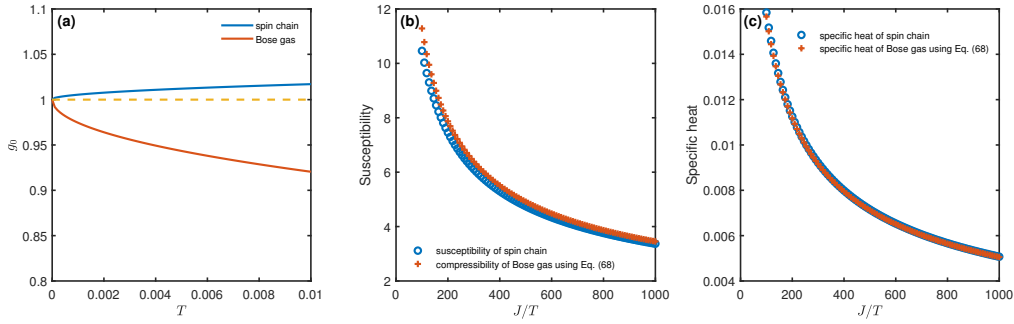


图 9: (a) 自旋链和玻色气体的恒定统计参数  $g_0$  与温度的关系，自旋链和玻色气体在强相互作用下的 (b) 磁化率和 (c) 热容。(a) 虚线表示自由费米子的统计参数。图中表明在量子临界点，这两个模型中相互作用的具体细节变得无关紧要，它们的统计特性是相同的，与自由费米子的图像一致。在临界区域内，随着温度的升高，这两个系统中准粒子的统计特性逐渐发生偏离。这里的参数为  $J = c = 1$ ， $H = 4J$  和  $\mu = 0$ 。(b) (c) 在临界区域内，自旋链和玻色气体仍然可以对应于具有有效  $g_0$  的无自旋自由费米子。基于这两个模型之间的映射关系 (86)，我们绘制出两个模型的热力学量。这两个子图 (b) (c) 表明，当更接近量子临界点时 ( $J/T \gg 1$ )，映射关系 (86) 更有效。这里的参数设置为  $H_c - H = 0.01T$  以确保这两个系统位于临界区域内。

类似于自旋链的磁化强度 (75)，玻色气体的无量纲数密度可以表示为

$$\tilde{n} = \frac{n}{c} = -\sqrt{\frac{m_{BG}k_B T}{2\pi\hbar^2 c^2 g_B^2}} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-g_B e^{\mu_{BG}/k_B T}). \quad (80)$$

另一方面，我们补全方程 (75) 中省略的物理常数，重新写为

$$m = -\frac{(k_B T)^{1/2}}{2\sqrt{\pi\hbar^2 J g_S^2}} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-g_S e^{\mu_{Bg}(H_c-H)/k_B T}). \quad (81)$$

利用无自旋自由费米子的图像，我们可以自然地构建自旋链和玻色气体在临界区域的映射。对于长度为  $L$  的一维无自旋自由费米子系统，能谱为  $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{FG}}$ ，态密度为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2L}{2\pi} dk = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m_{FG}}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon. \quad (82)$$

因此，单位长度上的粒子数密度为

$$\frac{N_{FG}}{L} = \frac{1}{L} \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = -\sqrt{\frac{m_{FG}k_B T}{2\pi\hbar^2}} \text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\mu_{FG}/k_B T}). \quad (83)$$

其中  $f(\varepsilon) = 1/[e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1]$  是费米分布函数。比较方程 (80)、(81) 和 (83)，可以建立自旋链和玻色气体之间的映射：

$$A\sqrt{\frac{m_{FG}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{m_{BG}}{2\pi c^2 g_B^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi J g_S^2}}, \quad (84)$$

$$\mu_{FG} = \mu_{BG} + k_B T \ln g_B = \mu_{Bg}(H_c - H) + k_B T \ln g_S, \quad (85)$$

其中  $A$  是与  $1/c$  具有相同量纲的常数。如果考虑玻色气体的临界化学势  $\mu_c$  满足  $\mu_c = 0$ ，上述方程可重写为

$$\frac{g_S}{g_B} \sqrt{J} = c, \quad H_c - H + T \ln \frac{g_S}{g_B} = \mu, \quad (86)$$

在我们的计算中，参数设置为  $\hbar = k_B = 2m_{BG} = \mu_{Bg} = 1$ 。在量子临界区域内，方程 (86) 提供了一维自旋-1/2 XXX 链与  $\delta$  函数相互作用玻色气体之间的一个精确映射。利用此映射，我们可以得到玻色气体的相互作用强度和化学势。然后，我们可以绘制玻色气体的压缩率  $\tilde{\kappa} = \kappa/c$  和比热  $\tilde{c}_v = c_v/c$ ，以及自旋链的磁化率  $\chi$  和比热  $c_v$ ，如图 9 (b) 和 (c) 所示。从子图 (b)(c) 中可以看

出, 通过这种映射得到的玻色气体的压缩率 (比热) 与自旋链的磁化率 (比热) 在低温下吻合得更好, 这正好对应于量子临界区域。这种一致性表明, 映射 (86) 在量子临界点附近 ( $J/T \gg 1$ ) 是令人信服的。

上述分析的合理性基于以下物理讨论: 首先, 在这两个系统中, 磁场和化学势的作用是相反的, 前者减少了向下自旋的数目, 而后者增加了玻色子的数目, 这也解释了符号的不同 ( $H_c - H$  和  $\mu - \mu_c$ )。这个符号差异还反映了转变过程的不同: 自旋 XXX 链从 TLL 相转变为铁磁相, 而玻色气体从真空态转变为 TLL 相。其次, 自旋 XXX 链的自旋耦合常数  $J$  对应于玻色气体的相互作用常数  $c$ , 两者都代表两体相互作用。尽管自旋-自旋相互作用和玻色子-玻色子相互作用对分数统计的统计参数的影响方式不同, 如图 9 (a) 所示, 但它们的临界行为可以通过有效统计参数统一表征。这表明在量子临界区域内, 相互作用的微观细节变得不那么重要, 反映了量子相变的普适特性。

## 参考文献

- [1] Wei-Jia Liu, Jia-Jia Luo, and Xi-Wen Guan. Haldane fractional statistics for a one-dimensional heisenberg spin xxx chain. *Physical Review A*, 111(3):033319, 2025.
- [2] Hans Bethe. Zur theorie der metalle: I. Eigenwerte und eigenfunktionen der linearen atomkette. *Zeitschrift für Physik*, 71(3):205–226, 1931.
- [3] Minoru Takahashi. *Thermodynamics of one-dimensional solvable models*. Cambridge University Press Cambridge, 1999.
- [4] Minoru Takahashi. One-dimensional Heisenberg model at finite temperature. *Progress of Theoretical Physics*, 46(2):401–415, 1971.
- [5] Chen-Ning Yang and Chen-Ping Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. i. Proof of bethe’s hypothesis for ground state in a finite system. *Physical Review*, 150(1):321, 1966.
- [6] Chen-Ning Yang and Cheng P Yang. Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons

- with repulsive delta-function interaction. *Journal of Mathematical Physics*, 10(7):1115–1122, 1969.
- [7] AH Van Amerongen, JJP Van Es, P Wicke, KV Kheruntsyan, and NJ Van Druten. Yang-Yang thermodynamics on an atom chip. *Physical Review Letters*, 100(9):090402, 2008.
  - [8] Feng He, Yuzhu Jiang, Yi-Cong Yu, H-Q Lin, and Xi-Wen Guan. Quantum criticality of spinons. *Physical Review B*, 96(22):220401, 2017.
  - [9] Thierry Giamarchi. *Quantum physics in one dimension*, volume 121. Clarendon Press, 2003.
  - [10] F Duncan M Haldane. ‘‘Fractional statistics’’ in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle. *Physical Review Letters*, 67(8):937, 1991.
  - [11] Mo-lin Ge and Yong-shi Wu. *New developments of integrable systems and long-ranged interaction models*. World Scientific, 1995.
  - [12] Subir Sachdev. Quantum phase transitions. *Physics world*, 12(4):33, 1999.
  - [13] Xibo Zhang, Yang-Yang Chen, Longxiang Liu, Youjin Deng, and Xiwen Guan. Interaction-induced particle-hole symmetry breaking and fractional exclusion statistics. *National Science Review*, 9(12):nwac027, 2022.
  - [14] Yong-Shi Wu. Statistical distribution for generalized ideal gas of fractional-statistics particles. *Physical Review Letters*, 73(7):922, 1994.
  - [15] Oliver Breunig, Markus Garst, Andreas Klümper, Jens Rohrkamp, Mark M Turnbull, and Thomas Lorenz. Quantum criticality in the spin-1/2 Heisenberg chain system copper pyrazine dinitrate. *Science Advances*, 3(12):eaao3773, 2017.
  - [16] HJ Schulz. Critical behavior of commensurate-incommensurate phase transitions in two dimensions. *Physical Review B*, 22(11):5274, 1980.

- [17] VR Shaginyan, VA Stephanovich, AZ Msezane, P Schuck, JW Clark, M Ya Amusia, GS Japaridze, KG Popov, and EV Kirichenko. New state of matter: heavy fermion systems, quantum spin liquids, quasicrystals, cold gases, and high-temperature superconductors. *Journal of Low Temperature Physics*, 189:410–450, 2017.
- [18] Minki Jeong and Henrik M Rønnow. Quantum critical scaling for a Heisenberg spin-1/2 chain around saturation. *Physical Review B*, 92(18):180409, 2015.
- [19] Yoshitaka Maeda, Chisa Hotta, and Masaki Oshikawa. Universal temperature dependence of the magnetization of gapped spin chains. *Physical Review Letters*, 99(5):057205, 2007.