

霍尔效应

刘蔚韬

2025 年 3 月

目录

1 引言	1
2 经典霍尔效应	1
3 量子霍尔效应	2
3.1 朗道规范	2
3.2 霍尔电导的计算	2
3.3 对称规范	4
4 Disorder	6
5 Berry Phase	7
5.1 绝热演化定理	7
5.2 贝里相位	8
5.3 陈数	10
6 霍尔电导再谈	11
7 分数量子霍尔效应	14
7.1 双电子的尝试	15
7.2 Laughlin 态	15
7.3 Laughlin 态是相互作用场的 (近似) 基态	16
7.4 excitation	17
7.5 Berry Phase	18

- 7.6 计算 18
 - 7.6.1 1 18
 - 7.6.2 2 18
- 7.7 分数统计 20
- 7.8 分数电导 20
- 8 Chern Simons 理论简要介绍 21
 - 8.1 规范不变性 22
 - 8.2 S 的形式 23
 - 8.3 分数量子霍尔效应 24
 - 8.4 作用量的流形不变形 25
 - 8.5 准粒子 (空穴) 激发 26
 - 8.6 流形上的 Chern Simons 理论: 以环面 T^2 为例 27

1 引言

本学期我有幸来参加这次以凝聚态理论为主题的讨论班的讨论活动。由于我自己做的方向是霍尔效应和拓扑这块内容，郑卜凡学长就询问我是否有意愿来组织一次讨论。从凝聚态理论的学习角度出发将霍尔效应作为它的第一个实践领域并不是很合适，因为霍尔效应本质上是一个强关联电子系统，与固体物理有很大的不同，要用一种全新的范式来描述物理现象。

因此本文你将见到：1、莫名其妙的结论；2、想当然的物理解释；3、省略所有数学的证明过程。

你可能需要的前置知识：四大力学，量子力学，（固体物理）。

由于考虑到有 23 级及以下的学生，因此量子力学的部分我会讲得比较详细。当然，作为笔者我也不能保证自己写的所有内容都正确，如有错误还请指出，望各位海涵。

2 经典霍尔效应

这部分可能一部分人高中就已经学过，但是因为它能直接过渡到量子情形下的物理图像，所以我还是会详细描述。

考虑一个磁场中的二维电子系统，很显然电子会在内部做圆周运动，半径为

$$R = \frac{mv}{eB}$$

我们可以认为每个电子被限制在一个 $S \sim R^2$ 的区域，如果我们在 x 方向加上电场，则电子会在一个 $v_x = \frac{E}{B}$ 的匀速运动基础上叠加一个圆周运动。

那按高中知识我们就能得到

$$j_y = nev_y = \frac{ne}{B} E_x$$

霍尔电导 σ 满足

$$\sigma = \frac{j_y}{E_x} = \frac{ne}{B}$$

考虑角动量子化，也就是

$$mvR = \hbar$$

，我们得到 $\pi R^2 \propto \frac{h}{eB}$ ，也就是说每个电子被束缚在尺度为 $\frac{h}{eB}$ 的范围内。

3 量子霍尔效应

3.1 朗道规范

同样是一个磁场中的二维电子系统, 我们不考虑电子之间的相互作用, 只考虑电子在这样一个体系中的能级。求解能级我们只要写出哈密顿量然后求解定态薛定谔方程。

$$H = \frac{1}{2m}((p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2)$$

其中 $\hbar = 1$, 矢势 A 我们取朗道规范, $A_x = 0, A_y = Bx$ 。

这样哈密顿量就为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y - eBx)^2)$$

注意到 p_y 是好的物理量 (与 H 对易), 在能量本征态下 p_y 也可以拥有确定的取值。因此我们将 $p_y = k_y$ 作为标记本征态的一个参数, 哈密顿量此时变为 $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (k_y - eBx)^2)$, 这是一个描述 x 方向的谐振子的哈密顿量。并且振子的平衡位置由 k_y 决定。

联系谐振子的能量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, 我们不难得到 $\omega = \frac{eB}{m}$ 。谐振子的能级为 $E = (n + \frac{1}{2})\omega$

因此在朗道规范下这个系统的本征态可以由两个参量描述: $|n, k_y\rangle$, n 是能级, 取 $0, 1, \dots$; k_y 是 y 方向动量, 同时也决定了 x 的平衡位置。

如果是在一个无限大的二维平面, 那电子的简并度当然没有限制, 因为 k_y 可以取无穷多个, 并且没有周期性给它的限制。

如果是一个长为 L_x , 宽为 L_y 的样品, 情况就会有所不同。我们把这个样品视为 x 和 y 方向的两个一维无限深势阱。 k_y 会被势阱所限制, $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ 。对 k_y 的限制也会影响到平衡位置的取值, $\Delta x = \Delta \frac{k_y}{eB} = \frac{2\pi}{eBL_y}$ 。

在 x 方向上的势阱也会限制能级的取值。实际上这是一个一维无限深势阱内的谐振子的运动图像, 笔者自己不会, 也没有找到任何一篇论文描述这个。我们采用想当然的物理解释, 保留平衡位置处于 L_x 内的态, 丢掉 L_x 之外的态, 那么剩下的态的个数只有 $n = \frac{L_x}{\Delta x} = \frac{eBL_x L_y}{2\pi}$ 。(实际上我们通常会把一个长为 L_x , 宽为 L_y 的二维体系对边相接形成一个环面 T^2 , 也能解释能级的简并度问题) 对于整数量子霍尔效应, 电子会把从基态开始的 g 个能级全部填满, 此时就需要 ng 个电子, 填充数为 g , g 是一个整数。

而且在真实体系中势能并不严格满足一维无限深方势阱的形式, 它在边界上瞬变得没有那么快, 因此我们丢掉的态其实并没有消失。它会以边缘态的形式保留下来。

3.2 霍尔电导的计算

计算霍尔电导的方法有很多种, 我们只介绍通过线性响应理论来计算霍尔电导的方法。

我们在 x 方向加上电场，可以认为是对哈密顿量加了一个 eEx 的微扰项。此时基态应当发生相应的变化，新的基态 $\{|n, k\rangle'\}$ 应当为原先 $\{|n, k\rangle\}$ 的线性组合。

$$|0, k_y\rangle' = |0, k_y\rangle + E \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle$$

$$\langle 0, k_y|' = \langle 0, k_y| + \langle 0, k_y| E \left(\frac{\partial}{\partial E}\right)^\dagger$$

y 方向的电流可以直接计算：

$$\langle J_y \rangle = \langle 0, k_y| J_y |0, k_y\rangle = \langle 0, k_y| \frac{e}{m} (p_y - eBx) |0, k_y\rangle = \langle 0, k_y| \frac{e}{m} P_y |0, k_y\rangle$$

我们计算 $\frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle$ ，由于 $\frac{\partial}{\partial E}$ 是通过作用在哈密顿量上导致基态变化的，计算这个最好的方法是以哈密顿量为跳板。

$$\frac{\partial}{\partial E} (H |0, k_y\rangle) = \frac{\partial H}{\partial E} |0, k_y\rangle + H \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle$$

同时，左边还等于

$$\frac{\partial E_0}{\partial E} |0, k_y\rangle + E_0 \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle$$

我们建立等号，并左乘 $\langle m, k_y|$ ，可以得到：

$$\langle m, k_y| \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle = \frac{\langle m, k_y| \partial H / \partial E |0, k_y\rangle}{E_0 - E_m} = \langle m, k_y| \frac{ex}{E_0 - E_m} |0, k_y\rangle$$

取复共轭：

$$\langle 0, k_y| \left(\frac{\partial}{\partial E}\right)^\dagger |m, k_y\rangle = \langle 0, k_y| \frac{ex}{E_0 - E_m} |m, k_y\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle J_y + \delta J_y \rangle &= \frac{e}{m} \langle 0, k_y|' P_y |0, k_y\rangle' \\ &= \frac{e}{m} (\langle 0, k_y| + \langle 0, k_y| E \left(\frac{\partial}{\partial E}\right)^\dagger) P_y (\langle 0, k_y| + E \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle) \\ \langle \delta J_y \rangle &= \frac{eE}{m} (\langle 0, k_y| \left(\frac{\partial}{\partial E}\right)^\dagger P_y + P_y \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle) \\ &= \frac{eE}{m} \sum_n (\langle 0, k_y| \left(\frac{\partial}{\partial E}\right)^\dagger |n, k_y\rangle \langle n, k_y| P_y |0, k_y\rangle + \langle 0, k_y| P_y |n, k_y\rangle \langle n, k_y| \frac{\partial}{\partial E} |0, k_y\rangle) \end{aligned}$$

我们忽略了 $\langle 0, k_y | (\frac{\partial}{\partial E})^\dagger | 0, k_y \rangle \langle 0, k_y | P_y | 0, k_y \rangle + \langle 0, k_y | P_y | 0, k_y \rangle \langle 0, k_y | \frac{\partial}{\partial E} | 0, k_y \rangle$, 是因为其结果应当为

$$2 \langle 0, k_y | P_y | 0, k_y \rangle \langle 0, k_y | \frac{\partial}{\partial E} | 0, k_y \rangle$$

其对所有的 k_y 求和应当为 0。

所以

$$\langle \delta J_y \rangle = \frac{eE}{m} \sum_n (\langle 0, k_y | (\frac{\partial}{\partial E})^\dagger | n, k_y \rangle \langle n, k_y | P_y | 0, k_y \rangle + \langle 0, k_y | P_y | n, k_y \rangle \langle n, k_y | \frac{\partial}{\partial E} | 0, k_y \rangle)$$

$$= \frac{eE}{m} \sum_n (\langle 0, k_y | \frac{ex}{E_0 - E_n} | n, k_y \rangle \langle n, k_y | k_y - eBx | 0, k_y \rangle + \langle 0, k_y | k_y - eBx | n, k_y \rangle \langle n, k_y | \frac{ex}{E_0 - E_n} | 0, k_y \rangle)$$

在这里我们要利用谐振子 x 算符的性质: $x = \frac{p_y}{eB} + \sqrt{\frac{1}{2eB}}(a^\dagger + a)$ 。它只会将 $|0\rangle$ 激发到 $|1\rangle$, 因此求和内只有 $n=1$ 是参与最终结果的。

$$\langle \delta J_y \rangle = \frac{eE}{m} (\langle 0, k_y | \frac{ex}{-\hbar\omega} | 1, k_y \rangle \langle 1, k_y | (-eBx) | 0, k_y \rangle + \langle 0, k_y | (-eBx) | 1, k_y \rangle \langle 1, k_y | \frac{ex}{-\hbar\omega} | 0, k_y \rangle)$$

$$= e^2 E \langle 0, k_y | 2x^2 | 0, k_y \rangle$$

把谐振子的结果代入, 即可得到

$$\langle \delta J_y \rangle = e \frac{E}{B}$$

这个结果是与经典霍尔效应相吻合的。把所有基态考虑进来, 我们可以得到 $J_y = e \frac{E}{B} \times \frac{ng}{L_x L_y} = g \frac{e^2}{2\pi} E$

$$\sigma = g \frac{e^2}{2\pi}$$

可见电导是以 $\frac{e^2}{2\pi}$ 为单位量子化的

3.3 对称规范

对称规范, 是取 $A_x = -\frac{1}{2}By, A_y = \frac{1}{2}Bx$ 的规范。它的解一定和朗道规范一样, 但是形式上比朗道能级更好看一点。

我们用复平面描述该二维体系, $z = x + iy$, 对称规范可以写成 $A_x + iA_y = \frac{1}{2}iBz$, 根据复数形式我们定义动量

和复矢势 $p_z = -i\partial_z, p_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}}$ 。

$$p_z = -\frac{i}{2}(\partial_x - i\partial_y), p_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

$$A_z = \frac{1}{2}(A_x - iA_y) = -\frac{i}{4}B\bar{z}, A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(A_x + iA_y) = \frac{i}{4}Bz$$

代入原哈密顿量，省略数学步骤，我们可以得到

$$H = \frac{1}{m}((p_z - eA_z)(p_{\bar{z}} - eA_{\bar{z}}) + (p_{\bar{z}} - eA_{\bar{z}})(p_z - eA_z))$$

如果定义

$$P_z = p_z - eA_z = -i\partial_z + \frac{i}{4}eB\bar{z}, P_{\bar{z}} = p_{\bar{z}} - eA_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}} - \frac{i}{4}eBz$$

则有 $[P_z, P_{\bar{z}}] = -\frac{1}{2}eB$ ，可见 $P_z, P_{\bar{z}}$ 是一对升降算符。

$$H = \frac{1}{m}(P_z P_{\bar{z}} + P_{\bar{z}} P_z) = \frac{2}{m}P_z P_{\bar{z}} + \frac{eB}{2m}$$

取

$$a = \sqrt{\frac{2}{eB}}P_z, a^\dagger = \sqrt{\frac{2}{eB}}P_{\bar{z}}$$

则

$$H = \frac{eB}{m}(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

是谐振子相同的能级。为了求解出能级在坐标表象的波函数，我们先求解基态： $a|\psi\rangle = 0$ ，也就是 $P_{\bar{z}}|\psi\rangle = 0$ ，化成我们熟知的常微分方程的形式： $(\partial_{\bar{z}} + \frac{e}{4}Bz)\psi(z, \bar{z}) = 0$ 这是一个一阶线性微分方程，按照通常的做法是做代换 $\psi(z, \bar{z}) = \phi(z, \bar{z})e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$ (为了防止电荷的 e 和自然常数 e 分不清楚我把电荷换成 q 了)，然后求解 $\partial_{\bar{z}}\phi(z, \bar{z}) = 0$ ，只需让 $\phi(z, \bar{z})$ 解析就可以了。

$$\psi(z, \bar{z}) = \phi(z)e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$$

观察这个基态解的形式，一个很自然的想法就是 $P_z \rightarrow e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}P'_z e^{\frac{q}{4}B\bar{z}z}, P_z^\dagger \rightarrow e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}P_z'^\dagger e^{\frac{q}{4}B\bar{z}z}$ ，此时我们不就可以直接求解 $a'\phi(z, \bar{z}) = 0$ 了吗？我们得到的新的“升降算符”可以直接算出来， $P_{\bar{z}}' = -i\partial_{\bar{z}}, P_z' = -i\partial_z + \frac{i}{2}eB\bar{z}$

$$H = e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}\frac{qB}{m}(a'^\dagger a' + \frac{1}{2})e^{\frac{q}{4}B\bar{z}z}$$

这样，我们就能写出对称规范下二维磁场内电子的本征能级：

$$\text{基态； } \psi(z, \bar{z}) = \phi(z)e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$$

$$\text{第一激发态： } \psi(z, \bar{z}) = (\partial_z - \frac{q}{2}B\bar{z})\phi(z)e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$$

第二激发态: $\psi(z, \bar{z}) = (\partial_z - \frac{q}{2}B\bar{z})^2\phi(z)e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$

我们将 $\phi(z)$ 泰勒展开, 定义 $\psi_n(z, \bar{z}) = z^n e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$ (并未归一化), 这样展开的每一项是有确定的角动量的:

$$\int \psi_n^\dagger(z, \bar{z}) L \psi_n(z, \bar{z}) dz d\bar{z} = n\hbar$$

则单电子波函数为 $\psi(z, \bar{z}) = \sum_n a_n \psi_n(z, \bar{z})$, $\psi_n(z, \bar{z})$ 对应的角动量为 $n\hbar$

如果电子填满从 1 开始的 n 个最低朗道能级, 总的波函数应该长成

$$\begin{aligned} \psi(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) &= \det \begin{bmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) & \dots & \psi_n(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) & \dots & \psi_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(z_n) & \psi_2(z_n) & \dots & \psi_n(z_n) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} z_1^1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ z_2^1 & z_2^2 & \dots & z_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n^1 & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{bmatrix} e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)} \\ &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^n e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)} \end{aligned}$$

最终的波函数变成了一个比较好看的形式, 因为我们取了对称规范。

我们还可以形而上的对 $\psi_n(z, \bar{z})$ 做一些想当然的物理解释。求解 $\frac{d}{d|z|}(|z|^n e^{-\frac{q}{4}B|z|^2}) = 0$, 我们得到电子在 $r_n = \sqrt{\frac{2n}{qB}}$ 时能取到最大的概率。

相邻两个能级的面积差 $S = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \frac{2\pi}{qB} = \frac{h}{qB}$, 我们就认为在朗道能级全填充的情况下每个电子占据了 $\frac{h}{qB}$ 的面积。

回想我们在经典霍尔效应里所算的

4 Disorder

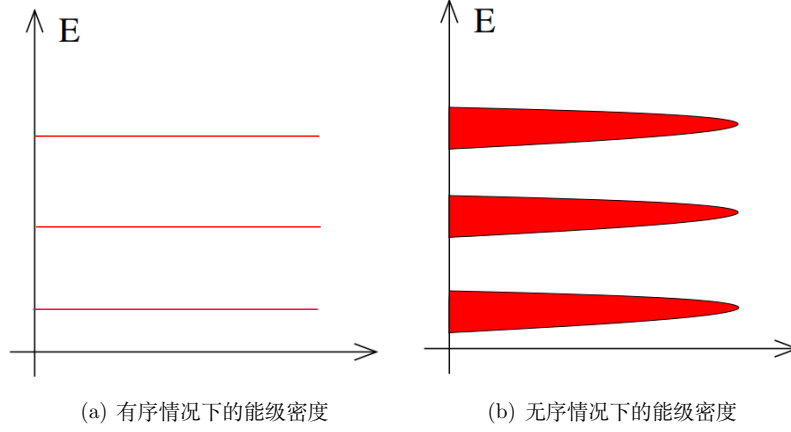
对于整数量子霍尔效应, 我们一般研究的是它的最低朗道能级 (Lowest-Landau-Level, 简称为 LLL)。

LLL 有个非常重要的特性, 就是其高度简并性。如果把它的能带画出来, 就应该是一条平的能带。任何的微扰都会破坏它的简并。对于真实的体系, 无序性就显得尤为重要, 因为它会破坏朗道能级的简并。

浅浅回顾一下微扰论的知识。假定 H_0 存在一个简并能级, 那么如果作用一微扰 δH , 该能级很有可能发生退

简并。微扰后的基态满足 $\delta H |\psi_i\rangle = (E_i - E_0) |\psi_i\rangle$ ，是关于 δH 对角化的。

无序性导致的一个重要结果，就是原本平的能带变得不平整。[1] 用这种比较奇怪的表达，是为了方便后面讨论



数量子霍尔效应的解释。

5 Berry Phase

5.1 绝热演化定理

在介绍贝里相位之前要先介绍绝热演化定理。“绝热”的意思是系统演化的足够缓慢，以至于如果我们将演化过程分成足够多的小段，每一个小段系统都有足够多的时间演化到稳态。

定理 5.1: 绝热演化定理

考虑哈密顿量 H 的绝热演化，从 H_i 演化 H_f ，则如果系统一开始处于 H_i 的第 n 个本征态，那么其最终也将演化到 H_f 的第 n 个本征态。

从物理直觉上还是比较好理解的。如果要证明的话直接使用量子力学的微扰论。

考虑哈密顿量在 $t=0$ 的时刻从 H_0 瞬变为 $H_0 + \delta H$ ，之后经过足够长时间 t (t 关于波函数的演化是一段很长的时间，但是相比于整个绝热过程是一个小量)， δH 是一个小量。则在相互作用绘景下 $|\psi\rangle$ 的时间演化为 $|\psi(t)\rangle = e^{-i \int \delta H_I(t') dt'} |\psi(0)\rangle = (1 - i \int \delta H_I(t') dt') |\psi\rangle$ 。

$$\delta H_I(t') = e^{-iH_0 t'} \delta H_I(0) e^{iH_0 t'} = |m\rangle \delta H_{Imn}(0) e^{-i(E_m - E_n)t'} \langle n|$$

由于 t 关于波函数的演化是一段足够长的时间， $\int e^{-i(E_m - E_n)t'} dt'$ 在 $m \neq n$ 的情况下是趋于 0 的，我们有 $\int \delta H_{Imn}(t') dt' \ll \int \delta H_{Inn}(t') dt' \ll 1$ ，只保留一阶小量，我们可以认为 $|\psi_n\rangle$ 最终演化到 $H_0 + \delta H$ 的基态 $|\psi'_n\rangle$ 。

所以绝热演化定理成立。

看起来是在瞎扯，但这实际上是在说明绝热演化过程的“绝热”条件是比较苛刻的。如果哈密顿量的变化不满足绝热条件，那么这个定理就不适用。

5.2 贝里相位

考虑一段哈密顿量 H 随着参数 λ 改变的绝热过程 $H(\lambda(0)) \rightarrow H(\lambda(t))$ ， T 为整个过程的时间，绝热过程满足 $T \frac{\partial \lambda}{\partial t} \ll \lambda$ 。此时绝热过程就可以微分成很多小段，每一小段都可以用 4.1 来描述。

在 dt 时间内， $|\psi\rangle$ 从 $H(\lambda(t))$ 的本征态演化到 $H(\lambda(t+dt))$ 的本征态，相位变化可以直接用内积来描述：

$$|E_n(t+dt)\rangle = |E_n(t)\rangle + d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} |E_n(t)\rangle$$

同时

$$|\psi(t+dt)\rangle = (1 - iH_{Inn}dt) |\psi(t)\rangle$$

相位从 $\langle E(t)|\psi(t)\rangle$ 变化到 $\langle E(t+dt)|\psi(t+dt)\rangle$ ，变化量为

$$\langle E(t+dt)|\psi(t+dt)\rangle \langle \psi(t)|E(t)\rangle$$

化简，得到

$$1 - iH_{Inn}dt - d\lambda \langle E_n(t) | \frac{\partial}{\partial \lambda} | E_n(t) \rangle$$

$$1 - i(H_{Inn}dt - d\lambda \langle E_n(t) | i \frac{\partial}{\partial \lambda} | E_n(t) \rangle)$$

$i \frac{\partial}{\partial \lambda}$ 一定是一个厄米算符，可以直接厄米算符的定义导出。

因此这一时间微元，相位产生的变化为 $-H_{Inn}dt + d\lambda \langle E_n(t) | i \frac{\partial}{\partial \lambda} | E_n(t) \rangle$ ，其中第一项为能量所导致的演化，第二项即为贝里相位。

定义 5.1: 贝里相位

一段绝热演化 ($\lambda(0) \rightarrow \lambda(t)$) 会导致态增加一个额外的相位 $\gamma_n = i \int \langle E_n(t) | \frac{\partial}{\partial \lambda} | E_n(t) \rangle d\lambda$

不过我们一般只考虑最终演化到原来的态的情况，相当于 λ 转了一个圈。

定义 5.2: 贝里势 (联络)

$$A_{(n)\lambda} = \langle E_n(t) | i \frac{\partial}{\partial \lambda} | E_n(t) \rangle$$

可见贝里势是厄米的。这和我们电动力学里的磁矢势非常像。

然而磁矢势是会随规范改变的，贝里矢势也会因 $|E_n(\lambda)\rangle \rightarrow e^{if(\lambda)} |E_n(\lambda)\rangle$ 发生规范变换： $A_\lambda \rightarrow A_\lambda - \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda)$ ，这说明两者的确是有共通性的，也就是说，贝里势就是参数空间中的“磁矢势”。

而磁矢势的物理效应通常由磁场来体现，我们非常想知道这个磁矢势对应的磁场究竟是什么。因此我们考虑哈密顿量随多个参量改变的情况 $H(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，并且只考虑一个能级 $|E(t)\rangle$ 。此时参数空间上应当有多个变量所对应的贝里势

$$A_n = \langle E(t) | i \frac{\partial}{\partial \lambda_n} | E(t) \rangle$$

(因为 A_{λ_n} 太别扭了我就换成了 A_n)

我们把贝里势所对应的“磁场”称作贝里曲率。

定义 5.3: 贝里曲率

$$F_{ij}(\lambda) = \frac{\partial A_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}$$



例题 5.1 考虑哈密顿量 $H = -\vec{B} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B}$ ， \vec{B} 是定值。计算在 S^2 空间上的贝里曲率。(S^2 空间可以作为自旋态的参数空间)

我们首先要考虑的是“ S^2 上的贝里曲率”究竟是什么意思。遍历自旋态的方向，我们可以得到一个自旋态的 S^2 表示空间。而这个过程是否对应哈密顿量的绝热演化呢？答案是可以的。我们只要改变 \vec{B} 的方向，让其遍历球坐标内的所有 (θ, φ) 即可。

对于 (θ, φ) 方向的 \vec{B} ,

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \sin \theta \cos \varphi \\ B \sin \theta \sin \varphi \\ B \cos \theta \end{pmatrix}$$

此时自旋本征态为

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \sin \theta \\ -\frac{1}{2} \cos \theta \end{pmatrix}, |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \cos \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

我们设置初态为 $|\downarrow\rangle$, 考虑 \vec{B} 的绝热演化, 有

$$A_\theta = \langle \downarrow | i \frac{\partial}{\partial \theta} | \downarrow \rangle = 0, A_\varphi = \langle \downarrow | i \frac{\partial}{\partial \varphi} | \downarrow \rangle = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$F_{\theta\varphi} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \sin \theta$$

5.3 陈数

我们直接给出陈数的定义:

定义 5.4: Chern Number

$$C = \frac{1}{2\pi} \int F_{ij} dS_{ij}$$

在一个物理体系中, 它通常是一个整数。当然, 在分数量子霍尔效应中会有“不通常”的情况。

至于它为什么是一个整数, 数学家有严格证明, 但物理也可以有自己的解释 (笔者主观的解释)。

以例题 4.1 为例,

$$C = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2} \sin \theta (d\theta \sin \theta d\varphi) = 1$$

是正确的。

我们考虑改变 (θ, φ) 的任意一段绝热演化, 并要求其最终回到起点。此时这段绝热过程应当在 S^2 上勾勒出一段闭合回路, 包住 S^2 上的一块区域 A 。

相位变化可以表示为:

$$\gamma = \int_A F_{ij} dS_{ij}$$

同时我们也可以认为这段闭合回路包裹住的是 $S^2 \setminus A$:

$$\gamma = - \int_{S^2 \setminus A} F_{ij} dS_{ij} = -2\pi C + \int_A F_{ij} dS_{ij}$$

要求 $-2\pi C$ 是 2π 的整数倍, 因此 C 是整数。

至于某些情况下 C 不是一个整数, 因为参数空间可能并不是一个球面, 甚至可能长得很奇怪。

6 霍尔电导再谈

接下来我们讨论的内容会和之前非常的不一样。我们考虑晶格内的整数量子霍尔效应，电场对磁场中的二维电子体系作用产生的线性响应。

$$H = \frac{1}{2m}((p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2) = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2)$$

不考虑磁场时， $A_x = A_y = 0$ ，此时第一布里渊区内的 k_x, k_y 都应当是好量子数。 k_x, k_y 的取值范围必须不超过 $\frac{2\pi}{a_x}, \frac{2\pi}{a_y}$ 。

如果考虑磁场，原先的 p_x, p_y 并非与哈密顿量对易。但整个系统仍然是具有平移对称性的，所以其必然具有与哈密顿量对易的守恒量。

定义 $P_x = p_x - eA_x, P_y = p_y - eA_y$ ，则 $H_0 = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2)$ 。根据对易关系，我们有

$$[P_x, P_y] = ieB$$

同时，我们有

$$[x, P_x] = i, [y, P_y] = i$$

因此我们可以构造出

$$[P_x - eBy, P_y] = 0, [P_x, P_y + eBx] = 0$$

我们找到了与哈密顿量对易的“动量” $q_x = P_x - eBy, q_y = P_y + eBx$ 。然而，这两个量并不对易。

对于晶格模型， x 以 a_x 为周期， y 以 a_y 为周期，我们所要求的布洛赫条件为： $\psi(r+T) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{T}}\psi(r)$ ， T 为空间周期，满足 $T = n_x a_x + n_y a_y, n_x, n_y$ 是整数。

即要求解为平移算符 $e^{i\vec{p}\cdot\vec{T}}$ 的本征态，平移算符的谱即为布里渊区。然而，由于 $[q_x, q_y] = -ieB$ ，我们构造出的平移算符 $T_x = e^{ia_x q_x}$ 和 $T_y = e^{ia_y q_y}$ 也是不对易的。但是它差一点点就对易了：

$$T_x T_y = T_y T_x e^{ieBa_x a_y}$$

这里利用了 BCH 公式 $e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$

如果有 $eBa_x a_y = 2n\pi$ ，那么平移算符就对易了，这就是整数量子霍尔效应的晶格版本。我们就能把 $\{T_x, T_y\}$ 的所有本征值张成布里渊区，此时就可以用 $|k_x, k_y\rangle$ 对态进行标记。(这里的 k_x, k_y 不是 q_x, q_y 的本征值，而是 $e^{ia_x q_x}, e^{ia_y q_y}$ 的本征值的指数项里的一个系数)

从 $t=0$ 开始，在 $|\psi\rangle = |k_x, k_y\rangle$ 的初态，我们在晶格中加入 x 方向的电场 $E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t}$ ，在相互作用绘景下求

出电子速度 $v_y = \frac{\partial H}{\partial p_y}$ 的线性响应。要注意，我们加的不是静电场，因为静电场的标势会破坏平移对称性。我们采用的是交流电场 $A(t) = \frac{iE_0}{\omega} e^{i\omega t}$ ，通过取 $\omega \rightarrow 0$ 极限求出线性响应。

$$\begin{aligned}\langle v_y(t) \rangle &= \langle \psi_I(t) | v_{yI}(t) | \psi_I(t) \rangle \\ &= \langle k_x, k_y | e^{\int iH_I(t)dt} v_{yI}(t) e^{-\int iH_I(t)dt} | k_x, k_y \rangle \\ &= \langle k_x, k_y | v_{yI}(0) + \int_0^t i[H_I(t'), v_{yI}(t)] dt' | k_x, k_y \rangle\end{aligned}$$

第一项是 0，我们要求第二项在 $t \rightarrow \infty$ 时正比于 $e^{i\omega t}$

$$\text{而 } H_I(t') = e^{-iH_0 t'} H_I(0) e^{iH_0 t'} = e^{-iH_0 t'} \left(-e \frac{P_x A_x}{m}\right) e^{iH_0 t'} = e^{-iH_0 t'} \frac{eE_0 P_x e^{i\omega t'}}{im\omega} e^{iH_0 t'} = \frac{eE_0 P_x(t') e^{i\omega t'}}{im\omega}$$

$$\int_0^t i[H_I(t'), v_{yI}(t)] dt' = \frac{eE_0}{m\omega} \int_0^t e^{i\omega t'} [P_x(t'), v_{yI}(t)] dt' = \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{\omega} \int_{-t}^0 e^{i\omega(t'-t)} [v_{xI}(t + (t' - t)), v_{yI}(t)] d(t' - t)$$

我们知道， $\langle [v_{xI}(t + (t' - t)), v_{yI}(t)] \rangle$ 的值应当至于 $(t'-t)$ 有关，所以可以替换为 $\langle [v_{xI}(t' - t), v_{yI}(0)] \rangle$

$$\begin{aligned}\langle k_x, k_y | \int_0^t i[H_I(t'), v_{yI}(t)] dt' | k_x, k_y \rangle &= \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{\omega} \int_{-t}^0 e^{-i\omega t''} [v_{xI}(-t''), v_{yI}(0)] dt'' \\ &= \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{\omega} \int_0^t e^{i\omega t''} \langle [v_{yI}(0), v_{xI}(t'')] \rangle dt''\end{aligned}$$

由于响应是线性的，我们要求 $t \rightarrow \infty$ 时， $\int_0^t e^{i\omega t''} \langle [v_{yI}(0), v_{xI}(t'')] \rangle dt''$ 的结果应当是常数。霍尔电导的结果应为：

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{ev_y}{E_0 e^{i\omega t}} = \frac{e^2}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t'} \langle [v_{yI}(0), v_{xI}(t')] \rangle dt' \\ &= \frac{e^2}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t'} \sum_n (\langle 0 | v_{yI}(0) | n \rangle \langle n | v_{xI}(t') | 0 \rangle - \langle 0 | v_{xI}(t') | n \rangle \langle n | v_{yI}(0) | 0 \rangle) \\ &= \frac{e^2}{\omega} \int_0^\infty e^{i\omega t'} \sum_n (\langle 0 | v_{yI}(0) | n \rangle \langle n | v_{xI}(0) | 0 \rangle e^{-i(E_n - E_0)t'} - \langle 0 | v_{xI}(0) | n \rangle \langle n | v_{yI}(0) | 0 \rangle e^{i(E_n - E_0)t'}) \\ &= \frac{e^2}{\omega} \sum_n \frac{\langle 0 | v_{yI}(0) | n \rangle \langle n | v_{xI}(0) | 0 \rangle}{i(\omega + E_0 - E_n)} - \frac{\langle 0 | v_{xI}(0) | n \rangle \langle n | v_{yI}(0) | 0 \rangle}{i(\omega + E_n - E_0)}\end{aligned}$$

取 $\omega \rightarrow 0$ 极限，有

$$\frac{1}{\omega + E_n - E_0} = \frac{1}{E_n - E_0} - \frac{\omega}{(E_n - E_0)^2}$$

代回原式，我们发现第一项似乎是发散的。

遇到这种情况，我们一般是想方设法找到一种看似合理的解释来说服自己不考虑这个发散项。如果对 A 作规范变换 $A \rightarrow A + \partial f$ ，我们发现 σ 中的第一项 $\frac{2e^2}{\omega} \sum_n \frac{\langle 0 | v_{yI}(0) | n \rangle \langle n | v_{xI}(0) | 0 \rangle + \langle 0 | v_{xI}(0) | n \rangle \langle n | v_{yI}(0) | 0 \rangle}{i(E_0 - E_n)}$ 并不保持规范不变。如果做 $x \rightarrow y, y \rightarrow -x$ 的变换，发散项甚至会变号。因此这一项其实是没有太多物理的。

至于发散项为什么会出现，笔者个人认为是因为我们做了线性响应的近似，把更高阶的项忽略了，才导致这项非物理的结果。也有可能是我们并未考虑跃迁到简并基态的情况。

我们只考虑第二项代回原式的结果，得到 Kubo 公式：

$$\sigma = ie^2 \sum_n \frac{\langle 0 | v_x | n \rangle \langle n | v_y | 0 \rangle - \langle 0 | v_y | n \rangle \langle n | v_x | 0 \rangle}{(E_n - E_0)^2}$$

$$\text{而 } v = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\begin{aligned} v |m\rangle &= \frac{\partial H}{\partial p} |m\rangle = \frac{\partial}{\partial p} (H |m\rangle) - H \frac{\partial}{\partial p} |m\rangle \\ &= \frac{\partial E_m}{\partial p} |m\rangle + (E_m - H) \frac{\partial}{\partial p} |m\rangle \end{aligned}$$

代入原式有：

$$\sigma = ie^2 \left(\left\langle \frac{\partial 0}{\partial p_x} \left| \frac{\partial 0}{\partial p_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial 0}{\partial p_y} \left| \frac{\partial 0}{\partial p_x} \right\rangle \right)$$

由于我们现在考虑的只是 $|k_x, k_y\rangle$ 这一个态。对于真正的电导，我们应当对所有态求和，即

$$\sigma = ie^2 \int \left\langle \frac{\partial(k_x, k_y)}{\partial p_x} \left| \frac{\partial(k_x, k_y)}{\partial p_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial(k_x, k_y)}{\partial p_y} \left| \frac{\partial(k_x, k_y)}{\partial p_x} \right\rangle dk_x dk_y$$

这个结果，刚好就是陈数的表达式。

$$\sigma = -\frac{e^2}{2\pi} C = -\frac{e^2}{h} C$$

C 一定是整数，因此霍尔电导是量子化的。

如果对相关内容仍感兴趣，可以做下面这道题：



习题 6.1 已知某晶格模型的哈密顿量具有这样的形式：

$$H(k) = \vec{E}(k) \cdot \vec{\sigma} + \epsilon(k)\mathbf{1}$$

可见哈密顿量是已经在动量空间被对角化，但在自旋空间仍未被对角化。计算这个系统中可能出现的陈数。



提示:

我们在求每个 k 对应的自旋空间的对角化形式的时候, 实际上是将 T^2 做一个连续变换到 S^2 。只要确定这个连续的拓扑变换的性质和基本群的同态就可以了。

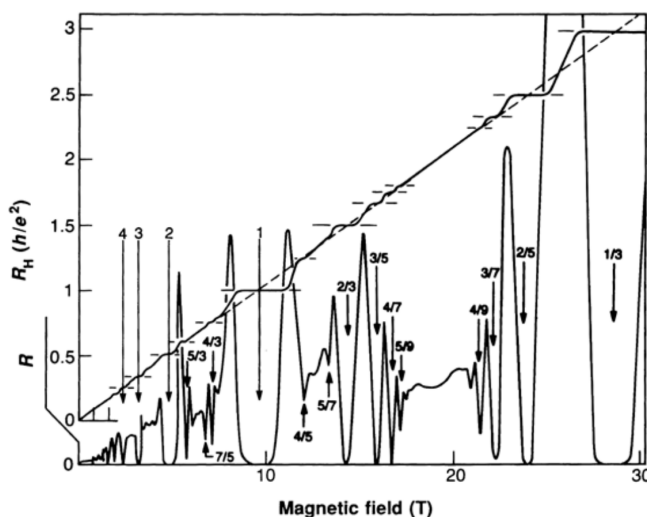
7 分数量子霍尔效应

事先说明, 本节会出现很多莫名其妙的物理解释, 笔者刚开始的时候也对许多地方的物理动机搞不明白, 并且这里涉及到的计算也比较少, 因此其实比较像科普。

所谓分数量子霍尔效应, 就是分数填充朗道能级所导致的霍尔效应。在这种情况下, 霍尔电导可能会出现诸如 $\frac{1}{3} \frac{e^2}{h}, \frac{1}{5} \frac{e^2}{h}$ 等值。

分数量子霍尔效应是在实验上发现的, 所以它本质上是一个经验理论。其本身的严谨性我觉得是有待讨论的。

最早是在晶格内的整数量子霍尔效应里发现了 $\frac{1}{3}$ 填充的能量平台, 这说明 $\frac{1}{3}$ 填充的朗道能级可能对应于一个低能量态。[1]



所以我们的目标, 或者说那一代物理学家的目标是找到分数填充所对应的态。很显然, 这个态是不能随便取的。如果在朗道能级中随意的选取 $\frac{1}{3}N$ 个能级, 其总共有 $C_N^{\frac{1}{3}N}$ 种方式。因此我们对选择的态是有要求的, 这个要求叫不可压缩性。也就是说, 如果我压缩空间, 一定会导致体系的能量增大, 某个电子从低能级跳到高能级。

还有一个问题。我们所说的分数填充对应与一个低能量的态, 是什么能量低? 因为所有电子都在最低朗道能级, 所以不可能是原先的哈密顿量。所以只可能是库伦相互作用。分数填充的态是使库伦场能量最低的态。

最终还有一个简单的要求, 就是波函数反对称, 因为电子是费米子。

我们的态要满足上述三个要求。

另外, 由于角动量算符和哈密顿量是对易的, 我们可以进一步找到角动量守恒的态。

7.1 双电子的尝试

晶格内电子波函数并不好处理，在 $V(x,y)$ 不知道的情况下我们甚至可能得不到一个确定的波函数。所以我们回到二维电子体系，并且使用对称规范。

我们来考虑只有两个电子的情况波函数的形式。由于电子都处于最低朗道能级，单电子的波函数一定是 $\psi(z, \bar{z}) = \phi(z)e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}z}$ 的形式。

我们先找到具有确定的角动量 l 的双电子态，其一定为：

$$\psi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \sum_n a_n z_1^n z_2^{l-n} e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}_1 z_1} e^{-\frac{q}{4}B\bar{z}_2 z_2}$$

进行对称化，结果应当为：

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_n a_n (z_1 + z_2)^{l-n} (z_1 - z_2)^n e^{-\frac{q}{4}B(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2)} \text{ (要求 } n \text{ 为奇数)}$$

基矢为 $(z_1 + z_2)^{l-n} (z_1 - z_2)^n e^{-\frac{q}{4}B(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2)}$

总角动量为 $l\hbar$ 。 $l-n$ 是质心的角动量， n 是绕质心的角动量。

一般来说，我们要求质心角动量为 0，否则系统可能有一个不平凡的旋转对称性。所以我们会取 $\psi(z, \bar{z}) = (z_1 - z_2)^n e^{-\frac{q}{4}B(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2)}$

这些态，与我们在整数量子霍尔效应中算的多电子态 $\psi(z, \bar{z}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^n e^{-\frac{q}{4}B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$ 一致。

7.2 Laughlin 态

我们直接给出对称规范时 $\frac{1}{3}$ 填充的二维电子体系的基态波函数：

$$\psi(z, \bar{z}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 e^{-\frac{q}{4}B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$$

这个态很明显是朗道能级的基态，并不是库伦场对应的本征态。但是凝聚态理论是一门实验理论，这个波函数在实验上有着非常良好的近似 (可以达到 99%)，并且这个态是有物理在里面的，所以我们一般通过研究 Laughlin 态来研究分数量子霍尔效应。

为什么说这个态有物理在里面呢？其实是因为它可以形而上的解释一些东西。比如填充数为什么是 $\frac{1}{3}$ ，我们找到 $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^3$ 里面有关 z_1 的最高次幂，很显然为 $3(n-1)$ ，其对应的面积为

$$S = \frac{2\pi \times 3(N-1)}{qB}$$

在这块面积中有能级数 $N = \frac{S}{h/qB} = 3(n-1)$ ，而电子数只有 n ，因此填充数为 $\frac{n}{N} = \frac{1}{3}$ 。

对于 $\frac{1}{m}$ 填充的态，其波函数应当长成

$$\psi(z, \bar{z}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$$

7.3 Laughlin 态是相互作用场的 (近似) 基态

如果没有相互作用的话，朗道能级应当是高度简并的，不会有所谓的 Laughlin 态出来。相互作用会导致高度简并的能级发生分裂，使能级密度变成如下形式：[1]

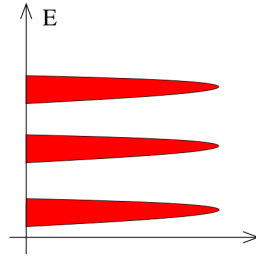


图 1: 相互作用导致的能级分裂

对于整数填充，由于能级被填满了，所以没有影响。而对于分数填充，相互作用会有很大的影响！能级填充会有如下的形式：[1]

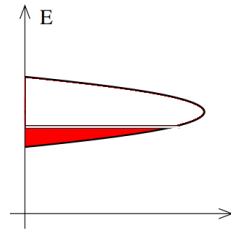


图 2: 分数填充时的能级

费米能位于朗道能级的能隙之内，Laughlin 态是满足如图能级填充的基态。具体可以看原始论文 “Anomalous quantum Hall effect: An Incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations”, Phys.Rev.Lett.50(1983)1395. 作者在里面用很暴力的计算验证了这一点。

要注意，电子在磁场和库伦相互作用下的多体态是繁琐的，甚至根本解不出来。Laughlin 态不是库伦相互作用的基态，只是一个近似基态，由于和实验符合的足够好所以我们就用了。当然，我们也可以算库伦相互作用在 Laughlin 态上的投影：

$$v_m = \frac{\langle \psi_m | V_{coulomb} | \psi_m \rangle}{\langle \psi_m | \psi_m \rangle}$$

其中 $\psi_m(z)$ 是二体态, 因为方便算库仑力。 $\psi_m(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^m e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)}$

7.4 excitation

从图中可见 Laughlin 态必然存在本能级中的激发。只要某些电子跃迁到费米面以上的能级, 其一定对应与 Laughlin 态的某个激发态。

Laughlin 态应当具有怎样的激发?

我们所希望的激发态的物理是这样的: 基态某个物理量满足高度对称性 (比如说电荷密度 $\rho(z)$), 我们人为破坏这个对称性, 使这个物理量在局域上发生巨变, 我们称这个系统在这个位置上有激发。

这个思路其实是量子场论里面的。我们如果从真空中生成一个粒子, 其一定会导致对称性破缺。如果在确定的位置 x 生成一个粒子, 其物理本质是场算符的值发生了对称性破缺, 在 x 处的值和其他位置不一样。

概括一下, 就是我们所考虑的激发是局域的激发。重要的不是波函数的形式, 而是物理量。

Laughlin 构建了一个最简单的激发态:

$$\psi(z, \bar{z}, \eta) = \prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)}$$

其中 η 是一个复参数。可以看到, 我们只是对原先的 Laughlin 态乘了一个 $\prod_i (z_i - \eta)$, 把 η 处的电荷全部排出去, 并把这样的操作命名为在 η 处放了一个准空穴。

把 $\psi(z, \bar{z}, \eta) = \prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)}$ 其中第 i 个电子绕位置 η 一圈, 会使原来的波函数增加 2π 的相位, $e\Phi = 2\pi\hbar$, 得到 $\Phi = \frac{h}{e}$ 。可见 η 处存在一个单位磁通 Φ 。

在 η 处放置 m 个准空穴, 波函数就长成 $\psi(z, \bar{z}, \eta) = \prod_i (z_i - \eta)^m \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4}B(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)}$ 。如果 η 不是一个参数, 而是一个变量, 那这个波函数就应当是 $N+1$ 个电子的 Laughlin 态。如果我们对 $N+1$ 电子的 Laughlin 态在 η 位置的电荷密度进行测量, 就会得到位于该位置的 m 个准空穴。因此每个准空穴的带电量为 $\frac{e}{m}$ 。

当然这个说法非常像诡辩。最直接的方法还是验证 η 附近的电荷密度。

$$\langle \psi | \phi^\dagger(z) \phi(z) | \psi \rangle = \frac{1}{m}$$

因此我们称准空穴携带 $\frac{e}{m}$ 的分数电荷, 和一个单位磁通。Laughlin 态的局域激发是电荷密度和磁通量的局域激发。

当然, 有一个很大的问题困扰了笔者非常久: 乘上 $\prod_i (z_i - \eta)$ 这个操作是哪里来的? 为什么要把这个操作特殊化为准空穴呢? 这个问题在共形场论中有一些看似合理的解答, Laughlin 态被描述成二维共形块。

7.5 Berry Phase

与整数量子霍尔效应不同, 我们考虑的是激发态的贝里相位, 因此我们所关注的参数是 η 。然而 η 只是准空穴激发的一个近似, 甚至 Laughlin 态本身都只是库伦场本征态的一个近似。我们只能说 η 确定了一个激发态。

所有 η 构成的参数空间中的每一个点都代表 Laughlin 态的一个元激发, 我们在这样的参数空间研究 Berry Phase。

$$A_\eta = i \langle \psi_\eta | \frac{\partial}{\partial \eta} | \psi_\eta \rangle, A_{\bar{\eta}} = i \langle \psi_\eta | \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} | \psi_\eta \rangle$$

下面我们来计算这个式子。

7.6 计算

7.6.1 1

我们有 $\psi_\eta(z) = C \times \prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$ 其中 C 是归一化常数, 可能与 $\eta, \bar{\eta}$ 有关, 可以写成 $C(\eta, \bar{\eta})$ 。

$$\begin{aligned} A_\eta &= \int (C(\eta, \bar{\eta}) \prod_i (\bar{z}_i - \bar{\eta}) \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) i \frac{\partial}{\partial \eta} (\prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) dz d\bar{z} \\ &= i \frac{\partial}{\partial \eta} \int (C(\eta, \bar{\eta}) \prod_i (\bar{z}_i - \bar{\eta}) \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) \prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) dz d\bar{z} \\ &= \int i \frac{\partial}{\partial \eta} (C(\eta, \bar{\eta}) \prod_i (\bar{z}_i - \bar{\eta}) \prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) (\prod_i (z_i - \eta) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}) dz d\bar{z} \\ &= i \frac{\partial}{\partial \eta} \ln C \end{aligned}$$

同理有 $A_{\bar{\eta}} = i \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \ln C$, 因此 Berry Phase 的表达式被我们简化成了 $d\gamma = A_\eta d\eta + A_{\bar{\eta}} d\bar{\eta} = i(d\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} - d\eta \frac{\partial}{\partial \eta}) \ln C$

7.6.2 2

下面我们来计算 $\ln C \sim \eta$ 。有关这个的计算会利用 $N \rightarrow \infty$ 的近似, 并且涉及到一些大家没有接触过的结论。

观察没有归一化系数的 $\psi^\dagger \psi: \prod_i |z_i - \eta|^2 \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2m} e^{-\frac{q}{2} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$, 它的积分结果应当是 $\frac{1}{C^2}$ 。

我们把它写成

$$e^{\sum_i 2\ln|z_i - \eta| + \sum_{i < j} 2m\ln|z_i - z_j| - \frac{1}{2l_B^2}(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)} \text{ 其中 } l_B^2 = \frac{h}{qB}$$

它的形式，非常像某个相互作用体系的配分函数，在 $N \rightarrow \infty$ 时，我们可以采用统计力学近似。

那这个相互作用体系是一个什么样的体系呢？由我们构造出来的指数项决定。

$$-\beta V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_i 2\ln|z_i - \eta| + \sum_{i < j} 2m\ln|z_i - z_j| - \frac{1}{2l_B^2}(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)$$

$\ln|z_i - z_j|$ 是满足二维高斯定理的库仑势。

β 的值可以根据需要随便取。为了方便我们取 $\beta = \frac{2}{m}$ ，则

$$V = -\sum_i m\ln|z_i - \eta| - \sum_{i < j} m^2\ln|z_i - z_j| + \frac{m}{4l_B^2}(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n)$$

第一项，为位于 η 处带电量为 1 的电荷与其他所有位于 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 的带电量为 m 的电荷的相互作用势。

第二项为位于 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ，带电量为 m 的电荷的相互作用势。

而第三项，可以看作所有带电量为 m 的电荷与一个均匀的背景电荷相互作用势。根据高斯定理可以求得背景电荷密度为 $\sigma = \frac{1}{l_B^2}$

这是一个二维等离子体的相互作用势场。我们发现，少了位于 η 处的带电量为 1 的电荷与均匀背景电荷的相互作用势 $V(\eta) = \frac{\eta\bar{\eta}}{4l_B^2}$ 。因此我们在原先的势能中加上该项，并且希望加上了之后其与 η 无关。

事实上结果非常好，在 $N \rightarrow \infty$ 的时候 V 就是与 η 无关的，因为这个等离子体我们可以视为导体。

定理 7.1: 德拜屏蔽效应

一个粒子数非常大的等离子体，具有屏蔽外加电势的效应，因此 $\frac{\partial V}{\partial \eta} \rightarrow 0$

所以有

$$\frac{1}{C^2} \propto e^{\frac{2}{m} \frac{\eta\bar{\eta}}{4l_B^2}}$$

$$\ln C = -\frac{\eta\bar{\eta}}{4ml_B^2} + \text{const}$$

我们得到

$$A_\eta = \frac{i\bar{\eta}}{4ml_B^2}, A_{\bar{\eta}} = -\frac{i\eta}{4ml_B^2}$$

Berry Phase 的结果为 $d\gamma = \frac{i}{4ml_B^2}(\bar{\eta}d\eta - \eta d\bar{\eta})$

我们可以计算 η 作一闭合回路导致的贝里相位 $\oint d\gamma = \frac{i}{4ml_B^2} \oint (\bar{\eta}d\eta - \eta d\bar{\eta})$

化简得到

$$\frac{2\pi eBS}{m}$$

其中 S 是闭合回路所包含的面积。而该面积所包含的磁通为 BS ，我们就验证了准空穴带电量为 $\frac{e}{m}$

7.7 分数统计

我们下面来计算存在两个准空穴 η_1, η_2 时的贝里相位。还是用刚刚的方法，我们得到归一化常数

$$\frac{1}{C^2} \propto e^{\frac{\eta_1 \bar{\eta}_1}{2ml_B^2} + \frac{\eta_2 \bar{\eta}_2}{2ml_B^2} - \frac{2}{m} \ln|\eta_1 - \eta_2|}$$

$$\ln C = -\frac{\eta_1 \bar{\eta}_1}{4ml_B^2} - \frac{\eta_2 \bar{\eta}_2}{4ml_B^2} + \frac{\ln|\eta_1 - \eta_2|}{m}$$

前两项是由于磁通量导致的，只有最后一项是由于交换导致的。

我们固定 η_2 ，只算“有效贝里势”

$$A_{\eta_1} = -i \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{\ln|\eta_1 - \eta_2|}{m} \right) = -\frac{i \partial}{m \partial \eta_1} \frac{1}{2} (\ln(\eta_1 - \eta_2) + \ln(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)) = -\frac{i}{2m(\eta_1 - \eta_2)}$$

$$A_{\bar{\eta}_1} = \frac{i}{2m(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)}$$

我们得到

$$d\gamma_1 = \oint A_{\eta_1} d\eta_1 + A_{\bar{\eta}_1} d\bar{\eta}_1 = \oint -\frac{i}{2m} \left(\frac{d\eta_1}{\eta_1 - \eta_2} - \frac{d\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2} \right)$$

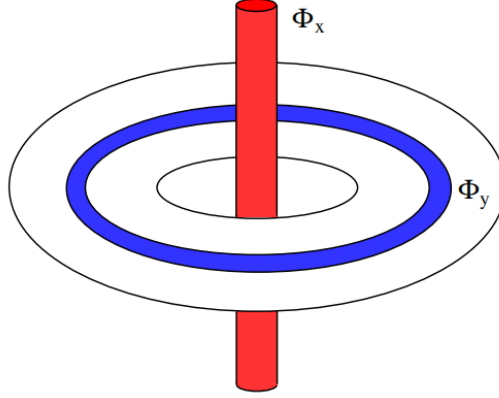
如果将 η_1 绕 η_2 半圈，结果应当对应于一次交换，利用留数定理，我们得到贝里相位为 $-\frac{i}{2m}(i\pi + i\pi) = \frac{\pi}{m}$ 是分数统计的结果。

7.8 分数电导

我们这样考虑一个事情：考虑一个圆盘中的二维电子体系，定义逆时针方向为 x 方向。其上有分数量子霍尔效应的多体态：

$$\psi(z, \bar{z}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$$

我们在圆盘的正中央挖一个洞，并通过 $\Phi_x = \Phi_0$ 的磁通， Φ_0 是单位磁通，数值为 $\frac{2\pi}{e}$ 。也就是说，这个磁通会导致电子绕原点的相位增加 2π ，如图 [1]



考虑这样一个事情：多体电子的波函数会变成什么？很显然，它应当仍然保持是朗道能级的基态，但是它又会和原先的基态保持不同，因为绕原点的相位发生了变化了。很明显，改变了电子的绕圈性质就会改变电子绕原点的角动量，在原点处增加一个磁通会使电子的角动量增加 \hbar 。所以我们的目标是要找到一个既是朗道能级基态，又是所有电子角动量增加了 \hbar 的态。很显然，它就是：

$$\psi(z, \bar{z}) = \prod_i z_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{q}{4} B(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n)}$$

这刚好就是存在一个位于原点处的准空穴时所对应的态。因此我们可以称准空穴（粒子）是一个局部磁通。

我们换个角度想这个事情。当我们把原点这个点位置的磁通从 0 增加到 $\frac{2\pi}{e}$ 的时候，这个宏观系统的起点和终点有什么变化？变化就是原点处少了一个准粒子的电荷 $\frac{e}{m}$ ，而它一定转移到了圆盘的外边界上，转移的方向为 y 方向。而在增加磁通的时候我们发生了什么？在 x 方向多了一个电场，值为 $E = \frac{2\pi}{eT}$ (T 为该过程所消耗的时间)。

x 方向的电场最终得到了 y 方向的电荷转移，这个就是霍尔电导的定义。因此我们很容易算出霍尔电导为：

$$\sigma_{xy} = \frac{j_y}{E_x} = \frac{e/mT}{2\pi/eT} = \frac{e^2}{2\pi m}$$

8 Chern Simons 理论简要介绍

在之前的理论中，我们尝试用微观的方法研究霍尔效应，即直接研究电子的波函数。现在，我们试图使用一种宏观的方法来研究，即场论的方法。

不考虑任何有关电子微观状态的东西，单单从场和电流的相互作用的角度出发，从规范不变性的角度直接得到霍尔电导的量子化。我们把二维平面的 $A_\mu(x)$ 视为外场，像量子场论那样假定有一个内部自由度 $a(x)$ ，其路径积分为

$$Z = \int da(x) e^{iS(a, A_\mu)}$$

因为 a 是我们假定的，他也可能是矢量场的形式 a_μ (其实 a 也不太可能仅仅是一个标量场)。

我们把它简化为：

$$Z = e^{iS_{eff}(A_\mu)}$$

我们定义了一个有效作用量 S_{eff} 。它并不是经典力学所对应的的作用量 S ，也不一定等于 S 的极值。但是我们一定有：

$$\langle J^\mu \rangle = \frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu}$$

这是因为我们把 A_μ 视为外场，在原始的作用量中一定有耦合形式 $S = \int d^3x J^\mu A_\mu$

我们利用这个关系凑出我们想要的霍尔效应的形式：

$$J_i = \sigma_{ij} E_j = \sigma \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

可以凑出

$$S_{eff} = \frac{\sigma}{2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k$$

8.1 规范不变性

我们要求变换 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ 之后 S_{eff} 保持不变。代入 S_{eff} 的表达式，我们得到：

$$S_{eff} \rightarrow S_{eff} + \frac{\sigma}{2} \int d^3x \partial_\mu (f \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda)$$

我们假定积分在紧致曲面上进行 (比如在时间方向也将其首尾相接成 S^1)，如果 f 是一个单值函数，那 $\frac{\sigma}{2} \int d^3x \partial_\mu (f \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda)$ 就应当是 0。没错，如果 f 是单值的，其结果就应当是 0。

但是，我们可以扩大 f 的选择，让 f 不一定是单值函数，因为我们定义规范变换：

$$\psi(x) \rightarrow e^{-iqf(x)} \psi(x)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$$

的时候，我们虽然要求 f 是单值的，但是不一定只有单值的 f 可以构造上述的变换。我们只要求 e^{-iqf} 具有单值性。如果我们扩大 f 的选择，说不定能得到更多的结果。

换言之，

$$\oint \partial_\mu f dx_\mu$$

的值不一定是 0，可能会因为轨道的不同取法相差 $\frac{2n\pi}{q}$ 。

但是 n 的取值是离散的，对于所有可能的 $f(x)$ ，我们可以根据不同的 n 对其进行分类。这种离散的分类方式我们可以归结于其“拓扑性质”，也就是说我们把所有可能的 f 分成了许多拓扑类。

我们现在考虑 S_{eff} 因规范变换产生的附加项。令人惊讶的是，由于我们的分类依据是离散的 n ， $\frac{\sigma}{2} \int d^3x \partial_\mu (f \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda)$ 是量子化的。对于相同的 n ， $\frac{\sigma}{2} \int d^3x \partial_\mu (f \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda)$ 的取值是一样的。

我们直接给出数学上的结果：一个紧致曲面上的 $\frac{\sigma}{2} \int d^3x \partial_\mu (f \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial^\nu A^\lambda)$ 会以 $\frac{4\pi^2}{q^2} \sigma$ 为单位量子化。

当然我们可以取特例验证这一结论：我们按 $t = t + \beta$ 将时空粘成闭曲面，并取规范变换 $f = \frac{2\pi t}{q\beta}$ ，有 $A_0 \rightarrow A_0 - \frac{2\pi}{q\beta}$ 。我们还有量子化 $\oint d^2x (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) = \frac{2\pi}{q}$ ，可以计算

$$\begin{aligned} \Delta S_{eff} &= \Delta \frac{\sigma}{2} \int d^3x A_0 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2) \\ &= \Delta (\sigma \int d^3x A_0 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)) \\ &= \sigma \times \beta \frac{2\pi}{q\beta} \times \frac{2\pi}{q} \\ &= \frac{4\pi^2}{q^2} \sigma \end{aligned}$$

S_{eff} 是有效作用量，它会以 $\frac{4\pi^2}{q^2} \sigma$ 为单位量子化。 S_{eff} 并不是真的作用量，不能要求它在规范变换下具有不变性。但是路径积分 (配分函数) $Z = e^{iS_{eff}}$ 一定是规范不变的，因此 S_{eff} 只能以 2π 为单位变化。因此我们有：

$$\frac{4\pi^2}{q^2} \sigma = 2n\pi$$

$$\sigma = n \frac{q^2}{2\pi}$$

整个过程，我们只通过两个条件推出霍尔电导的量子化：一是空间的紧致化，二是规范群的紧致化。规范群的紧致化有两个作用，一是把 f 所有可能的函数形式分成离散的拓扑类，二是磁通量子化。

8.2 S 的形式

我们知道 S 里面会有一个与 A_μ 耦合的形式 $\int d^3x J^\mu A_\mu$ ， J_μ 是一个场的函数 $J_\mu(a)$ ，这个场我们还不知道有什么样的形式，甚至不知道它是标量场、矢量场还是其他形式的场。但是我们有

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

这是一个约束。在作用量里面我们是不允许自由变量出现约束的。就算我们成功把 J 用场表示出来了，我们还要在其基础上加 $\partial_\mu J^\mu(fields) = 0$ 的约束，我们求的就不是自由的作用量了。

所以，我们把它变成规范自由度。我们这样构造：

$$J_\mu = C \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu a^\lambda$$

其中 a^λ 是我们构造出来的场。这样，我们就成功把一个约束变成了规范，让场变量自由。

什么意思呢？我们代入 $\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda)$ ，发现它是天然等于 0 的。但是 J_μ, a_μ 都是矢量场，我们用一个矢量场构造另一个矢量场最后天然满足了一个条件，这个过程我们肯定是丢掉了什么东西的。而我们丢掉的东西就是规范： $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu f$ 。什么意思呢？我们在对 a_λ 操作一个 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu$ 得到 J_μ 的时候，对于能用规范 $a_\lambda \rightarrow a_\lambda + \partial_\lambda f$ 的两个 $a_\lambda(x)$ 得到的 J_μ 是一样的，这说明只有一部分 a_λ 可以一一映射到 J_μ ，只有一部分 J_μ 是被允许的，所以 J_μ 是被限制的。

我们说这样构造出来的 a_μ 是自由的。因此可以试着直接用 a_μ 来构造作用量 S 。我们现在有两个条件：

$$1、\text{与矢势耦合的项为 } \int d^3x C \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu a_\lambda$$

$$2、\int D a_\mu(x) e^{iS(a_\mu, A_\mu)} = e^{i\frac{\sigma}{2} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda}$$

注意到 $\int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$ 是关于矢势 A 的一个二次型，我们通过配方的逆运算，选一个合适的 $C(C = \frac{e^2}{2\pi})$ ，可以构造一个比较好看的作用量：

$$S(a_\mu, A_\mu) = \frac{e^2}{2\pi} \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu a_\lambda \right)$$

不同的 C ，实际上改变的是 a_μ 的标度。

8.3 分数量子霍尔效应

对于 $\frac{1}{m}$ 填充的分数量子霍尔效应，其电导为

$$\sigma = \frac{e^2}{2\pi m}$$

我们构造的是一套有效理论，并且我们仍有 $J_\mu = \frac{e^2}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu a^\lambda$ ，而最终我们得到的满足 $\sigma = \frac{e^2}{2\pi m}$ 的 S_{eff} 应当为

$$S_{eff} = \frac{e^2}{4\pi m} \int d^3x \varepsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k$$

实际上就是原来的 S_{eff} 多除以一个 m 。

得到的作用量为

$$S = \frac{e^2}{2\pi} \int d^3x \left(-\frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu a_\lambda \right)$$

我们顺带根据最小作用量原理得到 a_μ 的运动方程：

$$\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu = \frac{1}{m} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$a_\mu - \frac{A_\mu}{m}$ 是一个三维无旋场。

不同的填充数，竟然对应的是不同的场论。

为什么我们可以在这里使用经典方法呢？我们在考虑 Laughlin 态的准粒子的交换效应的时候，用的是贝里相位，而贝里相位使用绝热演化方法得到的。笔者认为因为是绝热演化，所以我们可以使用经典方法。

如果我们对 a 使用正则量子化的话，我们得到

$$[a_1(x), a_2(x')] = \frac{2\pi i}{me^2} \delta^2(x - x')$$

这个性质非常漂亮。如果我们在环面上定义两个方向的 Wilson Loop,

$$W_1 = e^{ie \oint a_1 dx^1}, W_2 = e^{ie \oint a_2 dx^2}$$

(为什么要定义 Wilson Loop 呢？因为原本的 a_μ 是可以进行规范变换的，因此它不是一个可观测量，我们定义出来的 Wilson Loop 是把规范自由度给丢掉了的)

我们可以根据 BCH 公式得到

$$W_1 W_2 = W_2 W_1 e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

$$W_1^{-1} W_2^{-1} W_1 W_2 = e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

而左边的 $W_1^{-1} W_2^{-1} W_1 W_2$ ，就是将某个东西绕一整圈的操作。

$$\oint d^2x (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) = \frac{h}{e}$$

8.4 作用量的流形不变形

所谓流形不变性，是指作用量不会因流形的连续变化而改变。如果我们引入度规 $g_{\mu\nu}$ ，我们会惊人的发现其在作用量的表达式里面相消了。

从微分几何的角度来理解， $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda$ 对应于一个外微分形式，其允许 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda d^3x$ 是保持度规不变的，就

好比一块面积上的函数，我们将面积增大两倍，但是其上的函数也会因为这个变化减小 $\frac{1}{2}$ ，最后函数在这块面积上的积分还是不变的。

这就有一个重要的推论：能动量张量必须处处为 0。因为我们有 $\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}}$ 。如果通过哈密顿量的公式 $H = a_\mu \frac{\partial L}{\partial a_\mu} - L$ ，我们也能惊人的发现哈密顿量一定是 0。这说明我们不能用经典的薛定谔方程来分析其演化。它不是一个传统的理论。

8.5 准粒子 (空穴) 激发

回想我们在电动力学里的知识：外场是 A_μ ，电流是 J_μ ，他们在作用量里是以耦合的形式。这里我们的场是 a_μ ，如果它以某种形式和某种流 j_μ 耦合，这种流所对应的粒子 (空穴) 我们就成为准粒子 (空穴)。

准粒子会以 $\int d^3x j^\mu a_\mu$ 的形式进入作用量。如果在二维平面的 x_0 处有一个准粒子 $j_0 = e\delta^2(x - x_0)$ ，这个 j_0 里的元电荷 e 对应于狄拉克量子化条件。我们可以求解此时 a_μ 的运动方程：

$$\frac{me^2}{2\pi}(\partial_\mu(a_\nu - \frac{A_\nu}{m}) - \partial_\nu(a_\mu - \frac{A_\mu}{m})) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}j^\lambda$$

我们有

$$\frac{me}{2\pi}(\partial_1(a_2 - \frac{A_2}{m}) - \partial_2(a_1 - \frac{A_1}{m})) = \delta^2(x - x_0)$$

$$J_0 = \frac{e^2}{2\pi}(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) = \frac{Be^2}{2\pi m} + \frac{e}{m}\delta^2(x - x_0)$$

右边的第一项是磁场导致的，第二项才是我们要的准粒子的电荷。我们得到准粒子电荷为 $\frac{e}{m}$ (由于磁场所导致的物理效应不是我们所要考虑的，在之后的计算中我们设 $A_\mu = 0$)。

我们发现，我们设的时候是 $j_0 = e\delta^2(x - x_0)$ ，最后计算得到 $J_0 = \frac{e}{m}\delta^2(x - x_0)$ ，因为我们设的时候使用的是 U(1) 规范群的紧致化导致的量子化条件， j_0 不是真实的荷，只是满足某个量子化条件的一个参数。而 J_0 是真实的电荷。

进一步，我们考虑一个运动的准粒子：

$$j_0 = e\delta^2(x - x_0(t))$$

$$j_i = e\dot{x}_0(t)\delta^2(x - x_0(t))$$

像这样运动的准粒子会使路径积分 $\int Da_\mu(x)e^{iS(a_\mu, A_\mu)}$ 里多出一个相位 $\int Da_\mu(x)e^{i\int d^3x j^\mu a_\mu}$ ，而 j_μ 里面都是 δ 函数，可以使其简化为：

$$\int Da_\mu e^{i\int_{x_0(t)} e a_\mu(x) dx^\mu}$$

其中 $\int_{x_0(t)}$ 描述的是积分路径。

我们知道虽然我们是在对所有可能的 a_μ 作路径积分，但其中只有满足拉格朗日方程的 a_μ 贡献是最大的。我们取满足拉格朗日方程的 a_μ 对应的 $e^{i \int_{x_0(t)} e a_\mu(j_\mu, x) dx^\mu}$ 作为 $\int Da_\mu e^{i \int_{x_0(t)} e a_\mu(x) dx^\mu}$ 的值。

而 a_μ 的拉格朗日方程为： $\frac{me^2}{2\pi}(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} j^\lambda$ 。根据旋度定理，选取库伦规范 $a_0 = 0, \partial^\mu a_\mu = 0$ ，我们很容易得到：

$$a_i(x, t) = \frac{1}{em} \varepsilon_{ij} \frac{x_j - x_{0j}(t)}{|x - x_0(t)|^2}$$

通过一个运动的准粒子，我们知道了 a_μ 是怎么算的。下面我们来计算两个粒子的交换效应。我们有：

$$a_i(x, t) = \frac{1}{em} \varepsilon_{ij} \left(\frac{x_j - x_{1j}(t)}{|x - x_1(t)|^2} + \frac{x_j - x_{2j}(t)}{|x - x_2(t)|^2} \right)$$

然后，我们固定 $x_2(t) = 0$ ，求 $e^{i \int_{x_1(t)} e a_\mu(j_\mu, x) dx^\mu}$ ，并使积分路径绕过 $x=0$ ，我们得到的是：

$$\begin{aligned} & e^{i \int_{x_1(t)} e \frac{1}{em} \varepsilon_{ij} \frac{x_j - x_{2j}(t)}{|x - x_2(t)|^2} dx^i} \\ & = e^{i \int \frac{x dy - y dx}{mr^2}} = e^{\frac{2\pi i}{m}} \end{aligned}$$

绕一圈是 $\frac{2\pi}{m}$ ，交换两个粒子是绕半圈，也就是 $\frac{\pi}{m}$

8.6 流形上的 Chern Simons 理论：以环面 T^2 为例

只是一个浅浅的入门，告诉一下为什么拓扑会导致一些现象。

环面，其实是两个方向的周期性所粘成的一个流形。我们回到之前讲的 Wilson Loop, $W_1^{-1} W_2^{-1} W_1 W_2 = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ ，我们发现我们其实没有构造任何的准粒子，却出现了一个非平凡的相位。这就是一个拓扑效应。

由于这个公式， W_1, W_2 不可能有一维表示，因此基态一定简并。我们构造一个最简单的 W_1, W_2 的表示：

$$W_1 |n\rangle = e^{2\pi i/m} |n\rangle$$

$$W_2 |n\rangle = |n+1\rangle$$

这是一个 m 维的表示，因此我们说环面上的基态是 m 重简并的。这也是拓扑所导致的。

如果闭曲面不是环面，而是其他更复杂的，比如 $g=2$ (有两个孔) 的甜甜圈，那其基态就是 m^g 重简并。

References

- [1] David Tong. *The Quantum Hall Effect*. TIFR Infosys Lectures, 2016.