

# 统计物理复习/预习

## ① 熵, 状态方程

利用 S 的定义求出描述最大熵态的  $\epsilon, \alpha$  分布方程

$\alpha \rightarrow$  描述封闭系统的所有可能状态

不同的  $\alpha$  描述不同的状态

熵的 physical meaning 不确定性的增加

not a measurement of disorder

系统处于  $\alpha$  的概率为  $P_\alpha$

$$\Rightarrow S = -\sum_\alpha P_\alpha \ln P_\alpha$$

$$\max: P_\alpha = \frac{1}{\Omega}, \Omega \text{ 为所有可能态的总数}$$

$$S = \ln \Omega$$

$V, E, N$ , 求最大 S

先求状态数

$\Delta N_\epsilon: \epsilon \sim \epsilon + \Delta \epsilon$  间粒子数

$\Delta g_\epsilon$ : 单粒子相空间可容纳粒子占据的微观状态数

Bosons

$\Rightarrow \Delta N_\epsilon$  个球分为  $\Delta g_\epsilon$  组

每组可以有多个, 也可以没有

简化: 至少有 1 个

$\Rightarrow$  把  $\Delta g_\epsilon - 1$  个球在  $\Delta N_\epsilon - 1$  个空位

$$0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0$$

$$\Rightarrow C_{\Delta N_\epsilon - 1}^{\Delta g_\epsilon - 1}$$

现在每组值  $\Delta g_\epsilon - 1$  个球, 且至少保证 1 个

$$\Rightarrow C_{\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon - 1}^{\Delta g_\epsilon - 1} = C_{\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon - 1}^{\Delta N_\epsilon}$$

故  $\epsilon \sim \epsilon + \Delta \epsilon$  内状态数为

$$\Delta g_\epsilon = \frac{(\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon - 1)!}{(\Delta N_\epsilon)! (\Delta g_\epsilon - 1)!}$$

$$\Rightarrow \Omega = \prod_\epsilon \Delta g_\epsilon$$

$$S = \sum_\epsilon \ln \Delta g_\epsilon$$

由于  $\Delta N_\epsilon$  与  $\Delta g_\epsilon$  很大

Stirling 近似

$$\ln N! \approx N \ln N - N (N \gg 1)$$

$$S = \sum_\epsilon [\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon - 1] \ln (\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon - 1) - \Delta N_\epsilon \ln \Delta N_\epsilon - \Delta g_\epsilon \ln \Delta g_\epsilon + 1$$

$$- \Delta N_\epsilon \ln \Delta N_\epsilon + \Delta N_\epsilon - (\Delta g_\epsilon - 1) \ln (\Delta g_\epsilon - 1) - \Delta g_\epsilon \ln \Delta g_\epsilon + 1$$

$$\approx \sum_\epsilon [\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon] \ln (\Delta N_\epsilon + \Delta g_\epsilon) - \Delta N_\epsilon \ln \Delta N_\epsilon - \Delta g_\epsilon \ln \Delta g_\epsilon$$

$$= \sum_\epsilon [(\Delta N_\epsilon + 1) \ln (\Delta N_\epsilon + 1) - \Delta N_\epsilon \ln \Delta N_\epsilon] \Delta g_\epsilon$$

其中  $n_\epsilon \equiv \Delta N_\epsilon / \Delta g_\epsilon$ , 称为占据数, 描述每个单粒子微观

为求其极大值, 还要考虑两个约束 状态下时平均粒子数

$$E = \sum_\epsilon \epsilon n_\epsilon \Delta g_\epsilon$$

$$N = \sum_\epsilon n_\epsilon \Delta g_\epsilon$$

考虑 Lagrange 乘子法

$$\mathcal{L} = \sum_\epsilon [(\Delta N_\epsilon + 1) \ln (\Delta N_\epsilon + 1) - \Delta N_\epsilon \ln \Delta N_\epsilon + \lambda_1 \Delta N_\epsilon + \lambda_2 \Delta g_\epsilon] \Delta g_\epsilon$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_\epsilon} = \ln (1 + \frac{1}{n_\epsilon}) + \lambda_1 \epsilon + \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow n_\epsilon = \frac{1}{e^{(\lambda_1 \epsilon + \lambda_2)} - 1}$$

$$\text{取 } \lambda_1 \equiv -\frac{1}{kT}, \lambda_2 \equiv \mu (k=1)$$

$$\Rightarrow n_\epsilon = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1} \quad (\text{Einstein-Bose distribution})$$

同理, 对于 Fermions

$$n_\epsilon = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1} \quad (\text{Fermi-Dirac distribution})$$

不处于热平衡, 但仍有可处于最大 S, 因此

满足上述分布, 系统好像处于平衡一样

$\Rightarrow$  局域平衡态

如复合时期后的光子

## ② 态密度, 能量密度, 压强

现在求分布函数  $n_\epsilon$ , 为求  $n, p, P$

需要先求  $\Delta g_\epsilon$

$V, T$ , 粒子状态可由  $x, y, p$  决定

经典力学: 无大小  $x$  与  $p$  对应不同状态  $\Rightarrow \Delta g_\epsilon = \Delta \omega$

量子力学: 相互间隔  $h$  的一维一单元格  $2\pi h$  内两个状态不可分辨

$\Rightarrow$  推广至 3 个内部自由度的 3 维空间粒子

$$\Delta g_\epsilon = \int_V \frac{d^3x d^3p}{(2\pi h)^3}$$

若考虑均匀空间

$$\Delta g_\epsilon = \int_V \frac{d^3p}{(2\pi h)^3}$$

$$= \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon + \Delta \epsilon} p^2 dp \quad (g=1)$$

利用微分关系

$$\epsilon^2 = p^2 + m^2$$

也可以写成能量形式

$$\Delta g_\epsilon \approx \frac{gV}{2\pi^2} \sqrt{(\epsilon^2 - m^2)} \epsilon \Delta \epsilon$$

故我们可以求出粒子数密度

$$n = \sum_\epsilon \frac{1}{V} n_\epsilon \Delta g_\epsilon$$

$$= \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon + \Delta \epsilon} \frac{p^2}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1} dp$$

能量密度

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int \frac{p^3}{e^{(E-p)/T} \pm 1} E(p) dp$$

最后我们计算压强

考虑小面积元  $\Delta\sigma$ ,  $\vec{n}$  为法向量

在  $t \sim t+\Delta t$  时间内

球壳内, 处于立体角  $\Delta\Omega$  且速率为  $|\vec{v}|$  的粒子的总数为

$$\Delta N = n e \Delta g_e R^2 |\vec{v}| \Delta t \Delta\Omega, R = |\vec{v}| t$$

然而只有速度  $\vec{v}$  指向该面积元的粒子对压强有贡献, 能对压强有贡献的总粒子数为

$$\Delta N_\sigma = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{n}) \Delta\sigma}{|\vec{v}| 4\pi R^2} \Delta N$$

$$= \frac{(\vec{v} \cdot \vec{n}) \Delta\sigma}{4\pi} n e \Delta g_e \Delta t \Delta\Omega$$

每个粒子贡献的动量为  $z(\vec{p} \cdot \vec{n})$ , 故压强为

$$\Delta p = \int_\Omega \frac{z(\vec{p} \cdot \vec{n}) \Delta N_\sigma}{\Delta\sigma \Delta t}$$

$$= \frac{|\vec{p}|^2}{2\pi\epsilon} n e \Delta g_e \int \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{\epsilon})$$

对半个球面积分, 得

$$\Delta p = \frac{|\vec{p}|^2}{3\epsilon} n e \Delta g_e$$

故压强表达式为

$$p = \frac{g}{2\pi^2} \int \frac{1}{e^{(E-p)/T} \pm 1} \frac{p^4}{3E(p)} dp$$

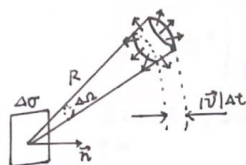
对于无质量粒子, 有

$$E = p$$

此时有

$$p = \frac{1}{3} \rho$$

正对应了极端相对论性的物态方程



#### ④ 化学势函数

原初等离子体

$T > 10^9 \text{ K}$ , 宇宙早期是一团炽热的 plasma,  $\gamma$  与物质  
不考虑粒子的产生湮灭  $\Rightarrow \mu = 0$  相互耦合

$$\Rightarrow n = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 (p^2 + m^2)}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp$$

取  $x \equiv m/T, \xi \equiv p/T$ , 则

$$n = \frac{g}{2\pi^2} T^3 I_{\pm}(x), I_{\pm}(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] \pm 1}$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} T^4 J_{\pm}(x), J_{\pm}(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] \pm 1}$$

数值求解, 但可近似.

① 相对论极限

高温时,  $x \rightarrow 0$

$$\text{实 } I_{\pm}(0) = \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{e^{\xi} \pm 1}$$

可得可写的几何级数的形式

$$\frac{1}{e^{\xi} \pm 1} = \frac{e^{-\xi}}{1 \pm e^{-\xi}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} e^{-j\xi}$$

$$\text{实 } I_{\pm}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} \int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-j\xi}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} \frac{2}{j^3}$$

对于玻色子, 有

$$I_{-}(0) = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots) \equiv 2\zeta(3)$$

其中  $\zeta$  为 Riemann Zeta 函数,  $\zeta(3) \approx 1.202$

对于费米子, 有

$$I_{+}(0) = 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots)$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots) - 4(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \dots)$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots) - \frac{4}{2^2}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots)$$

$$= (1 - \frac{1}{4}) 2\zeta(3) = \frac{3}{4} I_{-}(0)$$

代入  $n$ , 可知

$$n = \frac{5(13)}{\pi^2} g T^3 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{3}{4} & \text{fermions} \end{cases}$$

同理对  $\rho$ , 有

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{7}{8} & \text{fermions} \end{cases}$$

若代入现今宇宙温度  $T_0 = 2.73 \text{ K}$

可知

$$n_{\gamma,0} \approx 410 \text{ cm}^{-3}$$

$$\rho_{\gamma,0} \approx 4.6 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

#### ⑤ 非相对论极限

考虑  $T < m$  的情况,  $x \gg 1$  (当今宇宙,  $m_p/T \sim 10^3$ )

$$I_{\pm}(x) \approx \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}]}$$

考虑  $x \gg \xi$ , 故

$$I_{\pm}(x) \approx \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{e^{x + \xi^2/2x}} = e^{-x} \int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-\xi^2/(2x)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-x}$$

$$\text{则 } \frac{I_{\pm}(x)}{I_{\pm}(0)} \approx 0.5 x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \ll 1$$

这表明在低温情况下大量粒子含量大大下降

$$n = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}$$

对于能量密度, 考虑到  $\sqrt{m^2 + p^2} \approx m + \frac{p^2}{2m}$

由此可得

$$\rho \approx mn + \frac{3}{2} nT, \text{ 表明 } \rho \text{ 与 } n \text{ 差不多相等}$$

① GUT 时期  $t \sim 10^{-36} \text{ s}$   $T \sim 10^{28} \text{ K}$

② 电弱时期 plasma  $t \sim 10^{-12} \text{ s}$   $T \sim 10^{15} \text{ K}$   
quark, lepton, gauge bosons

③ QGP  $10^{-6} \text{ s} \sim t \sim 10^{-5} \text{ s}$   $T \sim 10^{12} \text{ K}$   
自由态 quark and gluon

④ 强子 plasma 夸克禁闭后约  $1 \text{ s}$   $10^9 \text{ K} \sim T \sim 10^8 \text{ K}$   
 $e^{\pm}, \nu, \gamma$

⑤ 光子-重子 plasma 100s  $\sim t \sim 3800 \text{ 年}$   $10^5 \text{ K} \sim T \sim 3000 \text{ K}$   
 $\gamma, e^{\pm}, p, \text{He 核}$

通过上面的推导我们发现从  $T \gg m \rightarrow T \ll m$   
 $\rho, n$  大幅下降, 这可以通过正反粒子间的湮灭来解释. 实际上在  $\rho$  很大时也有正反粒子间的湮灭, 但它会与正反粒子对产生抵消, 而随着  $T \downarrow$ , 产生逐渐减弱而不足以抵消

#### ⑥ 相对论粒子种类

早期宇宙中我们计算总  $\rho$  需考虑各种粒子的贡献之和

$$\rho = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} T^4 J_{\pm}(x_i)$$

其中我们允许不同粒子有不同的  $T$

③ 有效相对论自由度

$$g_{\text{eff}}(T) \equiv \sum_i g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{J_{\pm}(x_i)}{J_{\pm}(0)}, \text{ 其中 } J_{-}(0) = 6, J_{+}(0) = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\text{则 } \rho = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

对于早期宇宙,  $T_i \gg m_i$ , 则  $J_{\pm}(x_i \ll 1) \approx \text{const}$

则

$$g_{\text{eff}}(T) \equiv \sum_{i=b} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{1}{8} \sum_{i=f} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4$$



## ④ 学会并数数

原初等离子体

$T > 10^9 \text{ K}$ , 宇宙早期是一团炽热的 plasma,  $\gamma$  与物质  
不考虑粒子的产生湮灭  $\Rightarrow \mu = 0$  相互耦合

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 [p^2 + m^2]}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp$$

取  $x \equiv m/T, \xi \equiv p/T$ , 则

$$n = \frac{1}{2\pi^2} T^3 J_{\pm}(x), J_{\pm}(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] \pm 1}$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2} T^4 J_{\pm}(x), J_{\pm}(x) \equiv \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}] \pm 1}$$

数值求解, 但可以近似。

① 相对论极限

高温时,  $x \rightarrow 0$

$$J_{\pm}(0) = \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{e^{\xi} \pm 1}$$

可写成几何级数的形式

$$\frac{1}{e^{\xi} \pm 1} = \frac{e^{-\xi}}{1 \pm e^{-\xi}} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-j\xi}$$

$$J_{\pm}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-j\xi}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2}{j^3}$$

对于玻色子, 有

$$J_{+}(0) = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots) \equiv 2\zeta(3)$$

其中  $\zeta$  为 Riemann Zeta 函数,  $\zeta(3) \approx 1.202$

对于费米子, 有

$$J_{-}(0) = 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots)$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots) - 4(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \dots)$$

$$= 2(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots) - \frac{4}{2^3}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots)$$

$$= (1 - \frac{1}{4}) 2\zeta(3) = \frac{3}{4} \zeta(3)$$

代入  $n$ , 可知

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{3}{4} & \text{fermions} \end{cases}$$

同理对  $\rho$  有

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{7}{8} & \text{fermions} \end{cases}$$

若代入现今宇宙温度  $T_0 = 2.73 \text{ K}$

可知

$$n_{\gamma,0} \approx 410 \text{ cm}^{-3}$$

$$\rho_{\gamma,0} \approx 4.6 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

## ② 非相对论极限

考虑  $T < m$  的情况,  $x \gg 1$  (当今宇宙,  $m_p/T \sim 10^{12}$ )

$$J_{\pm}(x) \approx \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{\exp[\sqrt{\xi^2 + x^2}]}$$

考虑  $x \gg \xi$ , 故

$$J_{\pm}(x) \approx \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^2}{e^{x + \xi^2/2x}} = e^{-x} \int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-\xi^2/(2x)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-x}$$

$$\text{则 } \frac{J_{\pm}(x)}{J_{\pm}(0)} \approx 0.5 x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \ll 1$$

这说明在低温情况下大质量粒子含量大幅下降

$$n = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}$$

对于能量密度, 考虑到  $\sqrt{m^2 + p^2} \approx m + \frac{p^2}{2m}$

由此可得

$$\rho \approx mn + \frac{3}{2} nT, \text{ 取 } m \gg T, \text{ 取 } \rho \approx n$$

① GUT 时期  $t \sim 10^{-36} \text{ s}$   $T \sim 10^{28} \text{ K}$

② 电弱时期 plasma  $t \sim 10^{-12} \text{ s}$   $T \sim 10^{15} \text{ K}$   
quark, lepton, gauge bosons

③ QGP  $10^{-6} \text{ s} \sim t \sim 10^{-5} \text{ s}$   $T \sim 10^{12} \text{ K}$   
自由态 quark and gluon

④ 强子 plasma 夸克禁闭后约  $1 \text{ s}$   $10^9 \text{ K} \sim T \sim 10^8 \text{ K}$   
 $e^{\pm}, \nu, \gamma$

⑤ 光子-中子 plasma  $100 \text{ s} \sim t \sim 3800 \text{ 年}$   $10^4 \text{ K} \sim T \sim 3000 \text{ K}$   
 $\gamma, e^{\pm}, p, \text{He 核}$

通过上面的推导我们发现从  $T \gg m \rightarrow T \ll m$   
 $\rho, n$  大幅下降, 这可以通过正反粒子间的湮灭来解释。实际上在  $\rho$  很大时也有正反粒子间的湮灭, 但它会与正反粒子对生成抵消, 而随着  $T \downarrow$ , 生成逐渐减弱而不足以抵消

## ③ 相对论粒子种类

早期宇宙中我们计算总  $\rho$  需考虑各种粒子的贡献之和

$$\rho = \sum_i \frac{1}{2\pi^2} T_i^4 J_{\pm}(x_i)$$

其中我们允许不同粒子有不同的  $T$

③ 引入有效相对论自由度

$$g_{\text{eff}}(T) \equiv \sum_i g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{J_{\pm}(x_i)}{J_{\pm}(0)}, \text{ 其中 } J_{-}(0) = 6, J_{+}(0) = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\text{则 } \rho = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

对于早期宇宙,  $T_i \gg m_i$ , 则  $J_{\pm}(x_i) \ll 1 \approx \text{const}$

则

$$g_{\text{eff}}(T) \equiv \sum_{i=b} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{1}{8} \sum_{i=f} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4$$

#### ④ 学会算数

对于  $T \geq 100 \text{ GeV}$  的情况 ( $t \sim 10^{-10} \text{ s}$ )

所有 **SM** 的粒子都是相对论性的

对于无质量粒子  $g=2$

有质量粒子  $g=2s+1$ ,  $s$  为自旋

bosons:  $g_{\gamma}=2$

2

$$g_{W^{\pm}, Z}=3, s=1 \quad 3 \times 3=9$$

$$g_g=2 \quad 8 \times 2=16$$

$$\text{fermions: } g_{e^{\pm}, \mu^{\pm}, \tau^{\pm}}=2, s=\frac{1}{2} \quad 2 \times 6=12$$

$$g_q=2 \quad 6 \times 3 \times 2 \times 2=72$$

$$g_{\nu}=2 \quad m=0 \quad 3 \times 2=6$$

$$\Rightarrow g_{\text{rel}} = g_b + \frac{7}{8} g_f = 28 \times \frac{7}{8} \times 90 = 106.75$$

其余情况见 P81

熵与膨胀史

由于宇宙膨胀中无耗散, 故研究守恒量更方便.

① 熵守恒

$$Tds = dU + PdV$$

$$s \equiv \frac{S}{V} \quad \text{熵密度}$$

$$Td(sV) = d(UV) + PdV$$

$\Rightarrow S, U$  为广延量

$\rho, s$  与  $V$  无关,  $x$  与

$T$  有关

$$\Rightarrow (Ts - \rho - P)dV + V(T \frac{ds}{dT} - \frac{d\rho}{dT})dT = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \frac{\rho + P}{T} \\ T \frac{ds}{dT} = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} \end{cases}$$

$$\text{又由于 } \frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + P) \\ = -3HTs$$

$$\Rightarrow \frac{d(sa^3)}{dt} = 0$$

表明总的熵守恒, 且  $s \propto a^{-3}$

对于早期  $W = \frac{1}{3}$

$$s = \sum_i \frac{g_i \pi^2}{T_i} = \frac{\pi^2}{45} g_{\text{rel}}(T) T^3$$

$$\text{其中 } g_{\text{rel}} \approx \sum_{i=b} g_b \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \sum_{i=f} g_f \left(\frac{T_i}{T}\right)^3$$

为熵有效自由度

$$\Rightarrow T \propto g_{\text{rel}}^{-1/3} a^{-1}$$

#### ① 膨胀史

Friedmann equation

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{\text{Pl}}^2} \approx \frac{\pi^2}{90} g_{\text{rel}} \frac{T^4}{M_{\text{Pl}}^2}$$

辐射主导  $\rho \propto t^{-4}$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{1 \text{ MeV}} = 1.5 g_{\text{rel}}^{-1/4} \left(\frac{1s}{t}\right)^{1/2}$$

宇宙在  $t=1s$  时  $\approx 1 \text{ MeV}$

$\Rightarrow$  此时有一重大事件

#### 宇宙中微子背景

$\nu$  相互作用最弱 in SM  $\rightarrow$  首先从 plasma 中解耦

① 中微子解耦

相互作用的  $\nu$ :  $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ + e^-$

$$e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

相互作用率  $\Gamma \equiv n \sigma |v|$  有效散射截面

$\hookrightarrow$  数密度

通过量纲  $\Rightarrow \sigma \approx G_F^2 T^2$

$$\hookrightarrow G_F \approx 1.2 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad \text{Fermi 常数}$$

考虑  $n \approx T^3$

$$\Gamma = n \sigma |v| \approx G_F^2 T^5$$

故  $\Gamma$  随  $T$  下降速率会大于  $H \approx \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}$

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}}\right)^3$$

预测  $T = 1 \text{ MeV}$  时中微子退耦 (更准确的为  $0.8 \text{ MeV}$ ) 之后中微子开始沿测地线

开始自由运动, 并服从 Fermi-Dirac 分布

在上章我们曾提到  $E \propto a^{-1}$  (对于自由运动粒子)  $\Rightarrow \rho \propto a^{-4}$  ( $E^2 = p^2 + m^2$ )

引入无量纲变量  $q = ap$ , 则

$$n_{\nu} \propto a^{-3} \int d^3q \frac{1}{\exp(q/2AT_{\nu}) + 1}$$

故在退耦后,  $n_{\nu} \propto a^{-3}$  (若  $T_{\nu} \propto a^{-1}$ ), 只要  $T_{\nu} \propto a^{-1}$ , 那么  $T_{\nu} = T_{\gamma}$

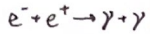
但由于粒子间的湮灭会使  $T_{\nu}$  略微发生偏移, 从而使  $T_{\nu}$  比  $T_{\gamma}$  略高

CMB 存在的证据: ① He 丰度的预测

② CMB 的各向异性

③ 对 CMB 相位的影响

② 正负电子湮灭

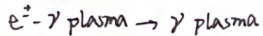


$\Rightarrow \rho$  和  $S$  由  $e^-$  与  $e^+$  传递到  $\gamma$  上, 相比于  $\gamma$  就像被加热一样

$\Rightarrow$  计算  $n$  多少

忽略  $\gamma$  与其它粒子的相互作用  
正负电子湮灭前后

$$g_{\gamma\gamma} = \begin{cases} 2 + \frac{7}{8} \times 4 = \frac{11}{2} & T \gg m_e \\ 2 & T < m_e \end{cases}$$

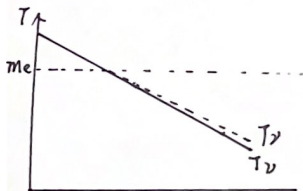


由于总熵不变

$$\Rightarrow g_{\gamma\gamma} (AT)^3 \text{ 不变} \Rightarrow T_\gamma \rightarrow \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\gamma$$

而  $T_{\nu}$  不变  $\Rightarrow T_\gamma$  与湮灭前  $T_\gamma$  相同

$$\Rightarrow T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma$$



宇宙微波背景辐射

$T > 1 \text{ eV}$   $\gamma$  与  $e^-$  通过 Thomson 散射

强烈耦合

$T < 0.3 \text{ eV}$  电子与质子结合形成氢原子 (recombination)  
free  $e^-$  ↓

$T \sim 0.25 \text{ eV}$  光子解耦开始自由传播

① 化学平衡

由于粒子的产生湮灭  $\Rightarrow$  粒子数不守恒

$\Rightarrow$  利用  $\mu$  来描述

考虑如下 reaction:



平衡时, 有

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

注意: (1)  $\gamma$  的  $\mu$  为 0

compton 散射  $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$  (平衡)

(2) 正反粒子的  $\mu$  相反

$$\mu_X = -\mu_{\bar{X}}$$

$$X + \bar{X} \rightarrow 2\gamma$$

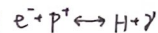
我们可以利用该平衡来描述再复合的开始, 但无法描述其动力学过程 (非平衡)

② 氢原子的再复合

考虑  $nT$  假设

(1) 宇宙仅由 free  $e^-$  电子、质子与光子组成

(2) 氢原子的再复合是在 He 的再复合完成后开始的



$T < m_i$

$$\Rightarrow n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i - \mu_i}{T}\right)$$

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H$$

考虑如下比值

$$\left(\frac{n_H}{n_e n_p}\right)_{eq} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{m_H}{m_e m_p}\right)^{3/2} e^{(m_p + m_e - m_H)/T}$$

由于  $g_e = g_p = 2, g_H = 4$ , 且考虑  $m_H \approx m_p$

$$\text{由 SR 可得 } E_1 \approx m_p + m_e - m_H = 13.6 \text{ eV}$$

最后考虑宇宙呈电中性  $\Rightarrow n_e = n_p$

$$\Rightarrow \left(\frac{n_H}{n_e^2}\right)_{eq} = \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{E_1/T} \dots (1)$$

定义自由电子分数:

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_p + n_H} = \frac{n_e}{n_e + n_H} \begin{cases} \text{完全电离 } X_e = 1 \\ \text{完全中性 } X_e = 0 \end{cases}$$

接下来看  $X_e$  的变化

$$n_b = \eta n_\gamma = \eta \times \frac{2\pi^{5/2}}{\pi^2} T^3$$

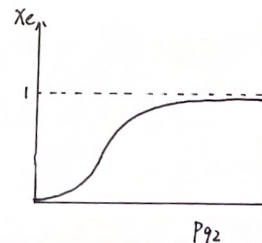
$\hookrightarrow \gamma$  到 baryon 的转化率

$$\Rightarrow \frac{1-X_e}{X_e} = \frac{n_H}{n_e} n_b \dots (2)$$

联立 (1)(2), 就可以得到 Saha 方程

$$\left(\frac{1-X_e}{X_e}\right)_{eq} = \frac{2\pi^{5/2}}{\pi^2} \eta \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{3/2} e^{E_1/T}$$

$$\Rightarrow X_e = \frac{1 + \sqrt{1 + 4f}}{2f}, f = \frac{2\pi^{5/2}}{\pi^2} \eta \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{3/2} e^{E_1/T}$$



定义  $T_{rec}$  为  $X_e = 0.5$  时的温度

$$\eta \approx 6 \times 10^{-10}$$

$$\Rightarrow T_{rec} \approx 2760 \text{ K}$$

$$Z_{rec} \approx 1270$$

$$t_{rec} \approx 290000 \text{ yrs}$$

## ② 光子解耦

耦合:  $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$

相互作用率  $\Gamma_\gamma \approx n_e \sigma_T$

$n_e \downarrow \rightarrow \Gamma_\gamma \downarrow$

定义光子解耦时间为

$$\Gamma_\gamma(T_{dec}) \approx H(T_{dec})$$

$$\Gamma_\gamma(T_{dec}) = n_b \chi_e(T_{dec}) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} g \sigma_T \chi_e T_{dec}^3$$

$$H(T_{dec}) = H_0 \sqrt{\Omega_m} \left( \frac{T_{dec}}{T_0} \right)^{3/2} \quad (H = H_0 \sqrt{\Omega_m} a^{-3/2})$$

$$\Rightarrow \chi_e(T_{dec}) T_{dec}^{3/2} \approx \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{g \sigma_T T_0^{3/2}}$$

代入  $\chi_e$  的解和若干参数及评值

$$\Rightarrow T_{dec} \approx 0.27 \text{ eV}$$

可以看到与上一节不同  $\rightarrow$  没考虑为底动力学

$$\Rightarrow z_{dec} \approx 1090$$

$$t_{dec} \approx 370000 \text{ yrs}$$

## ④ 黑体辐射谱

微得讲细节...

$$I_f = \frac{2h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1}$$

$\hookrightarrow$  谱辐射通量: flux of energy / f / A