

# 6 Relativistic Perturbation Theory

武汉大学物理科学与技术学院 陈俊烨

2024 年 11 月 16 日

## 摘要

本讲义的主题相对论微扰理论。本人主要依靠教材《COSMOLOGY》(DANIEL BAUMANN) 第六章内容来准备，不足之处还请指正。

## 1 引言

上一章的牛顿分析对于大于哈勃半径的尺度和相对论流体（如光子和中微子）是不够的。正确的描述需要一种广义相对论的处理方法，我们将在本章中发展这种方法。这将使我们能够跟踪原始等离子体中所有波动的演变，从它们在非常大尺度上的冻结初始条件，到它们在小尺度上进入地平线后的复杂演变。

图 1 显示了宇宙中所有已知物种的相互作用。在低能量状态下——也就是在中微子解耦和核合成之后——在宇宙演化中发挥重要作用的力只有重力和电磁力。根据等效原理，所有物种都通过万有引力相互作用。此外，光子、电子和质子通过它们的电磁相互作用强耦合，可以被视为单光子重子流体。复合后，电磁耦合变得不明显，演化仅由重力决定。有两种类型的引力效应：物种的均匀密度决定了宇宙的膨胀率，而它们的扰动则产生了局部引力势。这两种影响都反馈到物种的进化中。这种反馈是非线性的，可能导致相当复杂的动态。

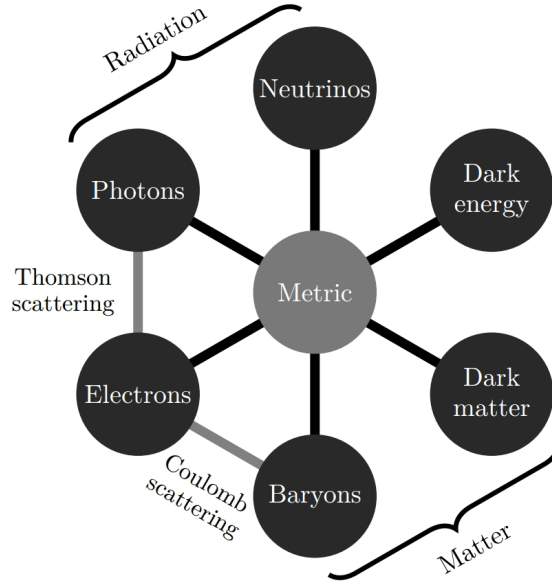


图 1: 宇宙中不同物种之间的相互作用。在复合之前，光子和电子通过汤姆逊散射紧密耦合，而电子和重子（主要是质子）通过库仑散射相互作用。所有的物种都有引力相互作用。

结构形成的两个重要时刻是物质-辐射相等， $z_{eq} \approx 3400$ ，光子去耦， $z_{dec} \approx 1100$ 。在相等之前，光子的大辐射压抑制了结构的生长。因此，只有当宇宙成为物质主导时，暗物质扰动的聚集才开始变得重要。在解耦之前，重子与光子紧密耦合，它们的密度波动振荡。这些振荡是由两种相反的力量引起的：重力和辐射压力。当重力使微扰坍缩时，辐射压力增加并导致微扰再次膨胀。然后压力下降，重力再次赢得战斗，这个过程重复，导致原始等离子体中持续的振荡或“声波”。这些振荡的频率取决于波动的波长。在解耦时，不同波长的模式在其演化的不同阶段被捕获，从而在 CMB 中产生特征图案。在解耦后，重子失去光子的压力支持，落入暗物质产生的引力势阱中。最终，恒星和星系将会形成。

在本章中，我将用精确的数学术语讲述宇宙结构形成的迷人故事。在第 6.1 节中，我们将从定义度规和能量动量张量的扰动开始。我们将表明，扰动的形式取决于坐标的选择（或“规范选择”）。我们将在牛顿规范下推导线性化的演化方程，并证明在小尺度下，它们可以简化为上一章的牛顿方程。

在第 6.2 节中，我们将讨论超视界尺度上扰动的初始条件。我们将引入“绝热扰动”的概念，并证明“共动曲率扰动” $R$  在这种扰动的视界外是恒定的。在本章剩下的部分，我们的任务将是确定这些初始波动如何在宇宙晚期产生观测到的相关性（见图 6.2）。在第 6.3 节中，我们确定了物质波动的演化并推导了晚期功率谱。在 6.4 节中，我们将求解解耦前紧耦合光子重子流体的动力学，并展示它是如何印刻在 CMB 各向异性和物质功率谱中的（另见第 7 章）。最后，在 6.5 节中，我们回顾了膨胀宇宙中张量扰动的演化，这将有助于我们在第 7 章和第 8 章中讨论引力波。

本章中的所有数值计算都是用波尔兹曼代码 CLASS 进行的。作为一名有抱负的宇宙学家，你应该下载 CLASS 或 CAMB，并尝试重现其中的一些结果。玩一玩 CLASS，你就会对

宇宙学扰动的动力学有直观的认识。

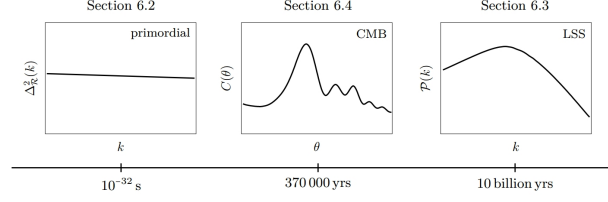


图 2: 在本章中, 我们展示了原始曲率扰动的尺度不变谱  $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)$  如何演变成 CMB 各向异性的角功率谱  $C(\theta)$  和物质功率谱  $\mathcal{P}(k)$ 。

## 2 Linear Perturbations

从概念上讲, GR 中的微扰理论与牛顿引力中的微扰理论相同。我们将度量和能动张量写成

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &= \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}), \\ T_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

并将  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  和  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$  扩展到扰动的线性阶。然而, 在实践中, 有两个特点使其比上一章的牛顿分析更为复杂: 首先, 代数涉及的内容更多。计算扰动的爱因斯坦张量并不是一件容易的事。这让宇宙学扰动理论背上了“难学”的恶名, 尽管从概念上讲它并不难。为了解决这个难题, 我将在本章中非常明确地进行所有代数运算, 并鼓励大家积极地完成它。一段时间后, 这实际上会成为一种有趣的(有点像冥想的)练习。我还会在这本书的网站上提供一个 Mathematica 笔记本, 它可以让你毫不费力地执行所有这些计算。相对论摄动理论的第二个复杂之处是, 在大尺度上, 我们所说的物质微扰和度量微扰之间存在着歧义——通过坐标的改变, 我们可以将一种转化为另一种。这种微妙之处并没有出现在牛顿的处理中。

### 2.1 Metric Perturbations

为了避免不必要的技术干扰, 我们将背景度量  $\bar{g}_{\mu\nu}$  作为平坦的 FRW 度量。扰动的时空可以写成

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (2)$$

其中  $A$ 、 $B_i$  和  $E_{ij}$  是空间和(共形)时间的函数。因子 2 是为了以后方便而引入的。我们将采用有用的惯例, 即空间向量和张量上的索引随着  $\delta_{ij}$  上升和下降。

执行扰动的标量向量张量 (SVT) 分解将非常有用。对于三向量来说, 这应该很熟悉。这仅仅意味着我们可以把任何三向量分成一个标量的梯度和一个无发散的向量

$$B_i = \underbrace{\partial_i B}_{\text{scalar}} + \underbrace{\hat{B}_i}_{\text{vector}}, \quad (3)$$

其中,  $\partial^i \hat{B}_i = 0$ 。在傅里叶空间, 式 (3) 的分解变为  $B_i = i\hat{k}_i B + \hat{B}_i$ , 其中  $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 。我们可以看到, 矢量被分割成与傅里叶模式  $\mathbf{k}$  方向平行的部分和与之正交的部分。同样, 任何秩为 2 的对称张量都可以写成

$$E_{ij} = \underbrace{C\delta_{ij} + \partial_{\langle i}\partial_{j\rangle} E}_{\text{scalar}} + \underbrace{\partial_{\langle i}\hat{E}_{j\rangle}}_{\text{vector}} + \underbrace{\hat{E}_{ij}}_{\text{tensor}}, \quad (4)$$

其中

$$\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle} E \equiv \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E, \quad (5)$$

$$\partial_{\langle i}\hat{E}_{j\rangle} \equiv \frac{1}{2} \left( \partial_i \hat{E}_j + \partial_j \hat{E}_i \right). \quad (6)$$

(4) 中的第一项包含空间扰动的迹, 即  $E^i_i = C\delta^i_i = 3C$ , 而其余项是无迹的。与之前一样, 带帽子的量具有消失发散性, 即  $\partial^i \hat{E}_i = \partial^i \hat{E}_{ij} = 0$ , 因此对应于横向矢量和张量扰动。张量扰动描述了引力波 (见第 6.5 节), 按照格奥尔基的说法, 我也将用  $h_{ij} \equiv 2\hat{E}_{ij}$  表示它们。在傅立叶空间, 我们把 (5) 写成  $\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle} E \rightarrow -(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) E \equiv -\hat{k}_{\langle i} \hat{k}_{j\rangle} E$ 。

因此, **度规的 10 个自由度被分解为 4 + 4 + 2 个 SVT 自由度:**

- (1) 标量:  $A, B, C, E$
- (2) 向量:  $\hat{B}_i, \hat{E}_i$
- (3) 张量:  $\hat{E}_{ij}$

**SVT 分解之所以如此强大, 是因为标量、矢量和张量的爱因斯坦方程在线性阶并不混合, 因此可以分开处理。**我们主要对标量波动和相关的密度扰动感兴趣, 而在线性阶, 将向量和张量一致设为零。矢量扰动不是由暴胀产生的, 即使是, 它们也会随着宇宙的膨胀而迅速衰减。张量扰动是暴胀的一个重要预言, 我们将在文中多处讨论它们。

### 2.1.1 Gauge problem

式 (2) 中的度规扰动并不是唯一定义的, 而是取决于我们对坐标或规范的选择。特别是, 当我们写下扰动度量时, 我们隐含地引入了特定的时空切片, 并在这些时空切片上定义了特定的空间坐标。选择不同的坐标会改变扰动变量的值。它甚至可能引入“虚假扰动”, 即使背景是完全均质的, 也可能因坐标选择不便而产生的虚假扰动。

例如, 考虑一个均质的 FRW 时空, 对空间坐标做如下改变:  $x^i \mapsto \tilde{x}^i = x^i + \xi^i(\eta, \mathbf{x})$ 。我们假设  $\xi^i$  较小, 因此也可将其视为扰动。使用  $dx^i = d\tilde{x}^i - \partial_\eta \xi^i d\eta - \partial_k \xi^i d\tilde{x}^k$ , 线元变为

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] \\ &= a^2(\eta) [-d\eta^2 - 2\xi'_i d\tilde{x}^i d\eta + (\delta_{ij} - 2\partial_{\langle i}\xi_{j\rangle}) d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j] \end{aligned} \quad (7)$$

其中我们去掉了与  $\xi^i$  二次方相关的项，并定义了  $\xi'_i \equiv \partial_{\eta}\xi_i$ 。我们引入了度量扰动  $B_i = -\xi'_i$  和  $\hat{E}_i = -\xi_i$ 。然而，这些只是虚构的规范模式，只要回到原来的坐标就可以消除。

作为另一个例子，考虑时间切片的变化， $\eta \mapsto \tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, \mathbf{x})$ 。宇宙的均匀密度会受到干扰，

$$\rho(\eta) = \rho(\tilde{\eta} - \xi^0(\tilde{\eta}, \mathbf{x})) = \bar{\rho}(\tilde{\eta}) - \bar{\rho}'\xi^0 \quad (8)$$

因此，即使在一个未受扰动的宇宙中，时间坐标的局部变化也可以引入一个虚构的密度扰动  $\delta\rho = -\bar{\rho}'\xi^0$ 。相反，我们也可以通过选择恒定时间的超曲面与恒定能量密度的超曲面重合来消除能量密度中的实扰动。于是我们得到  $\delta\rho = 0$ ，尽管存在非均匀性。当然，波动并没有完全消失，但会在度规中表现为新的扰动。

这些例子说明，我们需要一种更物理的方法来识别真正的扰动。一种方法是定义微扰，使其不随坐标变化而变化。

### 2.1.2 Coordinate transformations

考虑下面的坐标变换

$$x^\mu(q) \mapsto \tilde{x}^\mu(q) \equiv x^\mu(q) + \xi^\mu(q), \quad \text{where} \quad \begin{aligned} \xi^0 &\equiv T, \\ \xi^i &\equiv L^i = \partial^i L + \hat{L}^i. \end{aligned} \quad (9)$$

如标注所示，旧坐标和新坐标在同一物理点  $q$  处求值。如前所述，我们假设  $\xi^\mu$  很小，因此可以视为小扰动。函数  $T(\eta, \mathbf{x})$  定义了新坐标下的常时间超曲面，而  $L^i(\eta, \mathbf{x})$  确定这些超曲面上的空间坐标。我们将空间位移  $L^i$  分解为一个标量  $L$  和一个无散度向量  $\hat{L}^i$ 。

我们希望了解在这种坐标变化下，度量扰动是如何变换的。不过，在此之前，我们先看一个更简单的问题：（洛伦兹）标量场  $\phi(\eta, \mathbf{x})$  的变换，它可能是膨胀子，也可能是流体的密度。由于我们只是重新标注了坐标，所以每个点  $q$  上的场值必须保持不变

$$\phi(x^\mu) = \tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu). \quad (10)$$

用场的背景值及其扰动值来写两边，我们得到

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\eta) + \delta\phi(x^\mu) &= \bar{\phi}(\tilde{\eta}) + \delta\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) \\ &= \bar{\phi}(\eta + T) + \delta\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) \end{aligned} \quad (11)$$

请注意，两个坐标下的背景解  $\bar{\phi}(\eta)$  是相同的。对式 (11) 右侧的函数进行泰勒展开，我们发现

$$\bar{\phi}(\eta) + \delta\phi(x^\mu) = \bar{\phi}(\eta) + \bar{\phi}'T + \delta\tilde{\phi}(x^\mu) \quad (12)$$

其中我们去掉了扰动中超过线性阶的项。因此，场的扰动变换为

$$\delta\tilde{\phi}(x^\mu) = \delta\phi(x^\mu) - \bar{\phi}'T(x^\mu). \quad (13)$$

这个表达式的两边都在相同的坐标值  $x^\mu$  上求值，而这些坐标值通常并不对应于同一个物理点。考虑到这一点，我们通常会省略参数，将变换规则写成

$$\delta\tilde{\phi} = \delta\phi - \bar{\phi}'T \quad (14)$$

注意，场的扰动只取决于时间规范的选择。

要确定度规的变换，我们需要利用时空间隔是一个不变量的原理：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta, \quad (15)$$

其中我在两边使用了一组不同的虚拟指数，以使接下来的几行更加清晰。写出  $d\tilde{x}^\alpha = (\partial\tilde{x}^\alpha/\partial x^\mu)dx^\mu$  ( $d\tilde{x}^\beta$  的写法类似)，我们发现

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}). \quad (16)$$

这将旧坐标中的度量  $g_{\mu\nu}$  与新坐标中的度量  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  联系起来。考虑到式 (9) 中的具体变换，我们可以得出

$$\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{\eta}/\partial\eta & \partial\tilde{\eta}/\partial x^j \\ \partial\tilde{x}^2/\partial\eta & \partial\tilde{x}^i/\partial x^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+T' & \partial_j T \\ L^{i'} & \delta_j^i + \partial_j L^i \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中  $\alpha$  表示行， $\mu$  表示列。在下面的插入符中，我将说明式 (16) 对式 (2) 中度量扰动的变换意味着什么。根据 SVT 分解，我们可以得到

$$A \mapsto A - T' - \mathcal{H}T, \quad (18)$$

$$B \mapsto B + T - L', \quad \hat{B}_i \mapsto \hat{B}_i - \hat{L}'_i, \quad (19)$$

$$C \mapsto C - \mathcal{H}T - \frac{1}{3}\nabla^2 L, \quad (20)$$

$$E \mapsto E - L, \quad \hat{E}_i \mapsto \hat{E}_i - \hat{L}_i, \quad \hat{E}_{ij} \mapsto \hat{E}_{ij}. \quad (21)$$

**示例：**

我将把时间部分作为一个例子，剩下的作为练习。考虑式 (16) 中  $\mu = \nu = 0$  的情况：

$$g_{00}(x) = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial\eta} \frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial\eta} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}). \quad (22)$$

右边唯一的项是  $\alpha = \beta = 0$  的项。例如考虑  $\alpha = 0$  和  $\beta = i$ 。度规  $\tilde{g}_{0i}$  的非对角线分量与  $\tilde{B}_i$  成正比，因此它是一阶摄动。但  $\partial \tilde{x}^i / \partial \eta$  与一阶变量  $\xi^i$  成正比，因此积为二阶，可以忽略。对于  $\alpha = i$  和  $\beta = j$ ，也有类似的论证。因此，式 (22) 可以简化为

$$g_{00}(x) = \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \right)^2 \tilde{g}_{00}(\tilde{x}) \quad (23)$$

将式 (9) 和式 (2) 代入，可得

$$\begin{aligned} a^2(\eta)(1 + 2A) &= (1 + T')^2 a^2(\eta + T)(1 + 2\tilde{A}) \\ &= (1 + 2T' + \dots) (a(\eta) + a'T + \dots)^2 (1 + 2\tilde{A}) \\ &= a^2(\eta) (1 + 2\mathcal{H}T + 2T' + 2\tilde{A} + \dots). \end{aligned} \quad (24)$$

因此，我们发现，在一阶，度量扰动  $A$  变换为

$$A \mapsto \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T, \quad (25)$$

这正是式 (18) 中的结果。

### 2.1.3 Gauge-invariant variables

避免规范问题的一种方法是定义不随坐标变化而变换的度量扰动的特殊组合。这些是所谓的巴丁变量 (Bardeen variables)。

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \quad \hat{\Phi}_i \equiv \hat{B}_i - \hat{E}'_i, \quad \hat{E}_{ij}, \\ \Phi &\equiv -C + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E'). \end{aligned} \quad (26)$$

这些规范不变变量是“真实的”时空扰动，因为它们不能通过规范变换去除。

### 2.1.4 Gauge fixing

规范问题的另一种解决方案是固定规范并跟踪度规和物质中的所有扰动。方便的量规选择通常可以简化分析，不同的量规用于不同的目的。以下是常用的规范：

#### (1) 牛顿规范 (Newtonian gauge)

我们可以使用式 (9) 中规范函数  $T$  和  $L$  中的自由度来设置四个标量度量扰动中的两个为零。牛顿规范是由选择

$$B = E = 0, \quad (27)$$

定义的。那么式 (2) 就变成

$$ds^2 = a^2(\eta) [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (28)$$

其中我将剩下的两个度规微扰  $A \equiv \Psi$  和  $C \equiv -\Phi$  重新命名，以便与式 (26) 中的巴丁势接触。牛顿规范的一个优点是度规是对角线的，这不仅简化了计算，而且使物理透明：恒定时间的超曲面与静止观测者的世界线在坐标中正交（因为  $B = 0$ ），并且恒定时间超曲面的诱导几何是各向同性的（因为  $E = 0$ ）。此外，注意度规 (28) 与通常的 GR 弱场极限的相似性（见附录 A），其中  $\Psi$  扮演引力势的角色。牛顿规范将是我们研究结构形成的首选规范，因为运动方程将与我们在牛顿分析中发现的方程最相似。

### (2) 空间平直规范 (Newtonian gauge)

计算暴胀摄动的一种方便的规范是空间平直规范，其中

$$C = E = 0. \quad (29)$$

在这个规范中，我们将能够最直接地关注暴胀场  $\delta\phi$  的波动（见第 8 章）。

### (3) 同步规范 (Synchronous gauge)

同步规范是历史上一个重要的规范，其中

$$A = B = 0. \quad (30)$$

这个规范是由 Lifshitz 在他关于宇宙微扰理论的开创性工作中引入的，在早期的 CMB 编码中发挥了重要作用。同步规范的一个缺点是它仍然包含伪量规自由度。这些模式在宇宙摄动理论的早期历史中引起了相当大的混乱，确实是巴丁发展他的规范不变方法的动机之一。

## 2.2 Matter Perturbations

接下来，我们考虑能量-动量张量的扰动。我们会发现，为张量定义上、下混合指数的扰动很方便：

$$\begin{aligned} T^0_0 &\equiv -(\bar{\rho} + \delta\rho) \\ T^i_0 &\equiv -(\bar{\rho} + \bar{P})v^i \\ T^i_j &\equiv (\bar{P} + \delta P)\delta^i_j + \Pi^i_j, \quad \Pi^i_i \equiv 0, \end{aligned} \quad (31)$$

其中， $v^i$  为体速度 (bulk velocity)， $\Pi^i_j$  为各向异性应力 (anisotropic stress)。我们经常把动量密度 (momentum density) 写成  $q^i \equiv (\bar{\rho} + \bar{P})v^i$ 。如果对能量动量张量有几个贡献（如光子、重子、暗物质等），则将它们相加， $T_{\mu\nu} = \sum_a T_{\mu\nu}^{(a)}$ ，于是有

$$\delta\rho = \sum_a \delta\rho_a, \quad \delta P = \sum_a \delta P_a, \quad q^i = \sum_a q^i_{(a)}, \quad \Pi^{ij} = \sum_a \Pi^{ij}_{(a)}. \quad (32)$$

我们看到密度、压力和各向异性应力的扰动只是加在一起。速度没有加在一起，但动量密度加在一起。

对于度规，我们对能量动量张量的扰动应用 SVT 分解： $\delta\rho$  和  $\delta P$  只有标量部分，而  $v_i$  和  $q_i$  有标量和矢量部分，



$$\begin{aligned} v_i &= \partial_i v + \hat{v}_i \\ q_i &= \partial_i q + \hat{q}_i \end{aligned} \quad (33)$$

速度的标量部分有时用速度散度 (velocity divergence)  $\theta \equiv \partial_i v^i$  来表示。各向异性应力  $\Pi_{ij}$  有标量、矢量和张量部分，

$$\Pi_{ij} = \partial_{(i} \partial_{j)} \Pi + \partial_{(i} \hat{\Pi}_{j)} + \hat{\Pi}_{ij}. \quad (34)$$

通常使用重标标量各向异性应力是有用的，其在傅里叶空间中定义为  $\Pi_{ij}(\eta, \mathbf{k}) \subset -(\bar{\rho} + \bar{P}) \hat{k}_{(i} \hat{k}_{j)} \Pi(\eta, \mathbf{k})$ 。最后，用无量纲密度对比 (density contrast)  $\delta \equiv \delta\rho/\rho$  表示密度扰动也很方便。扰动理论适用于密度对比度小于 1 的情况。

总之，总物质的标量扰动由四个扰动变量  $(\delta, \delta P, v, \Pi)$  描述。类似的，不同类型  $a = \gamma, \nu, c, b, \dots$  的扰动由  $(\delta_a, \delta P_a, v_a, \Pi_a)$  表示。然而，与度规扰动一样，这些扰动也取决于坐标的选择。

### 2.2.1 Coordinate transformations

在坐标变换下， $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu$ ，张量  $T^\mu_\nu$  变换为

$$T^\mu_\nu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}). \quad (35)$$

为了求出式 (35)，我们需要  $\partial x^\mu / \partial \tilde{x}^\alpha$ 。作为一个矩阵，它是  $\partial \tilde{x}^\alpha / \partial x^\mu$  的逆，因为

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (36)$$

对于式 (9) 中的变换，矩阵  $\partial \tilde{x}^\alpha / \partial x^\mu$  由式 (17) 给出：

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \partial \tilde{\eta} / \partial \eta & \partial \tilde{\eta} / \partial x^j \\ \partial \tilde{x}^i / \partial \eta & \partial \tilde{x}^i / \partial x^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + T' & \partial_j T \\ L^{i'} & \delta_j^i + \partial_j L^i \end{pmatrix}. \quad (37)$$

为了确定相应的逆矩阵，我们利用这样一个事实，即形式为  $1 + \varepsilon$  的矩阵的逆（其中 1 是单位矩阵， $\varepsilon$  是一个小扰动）是  $1 - \varepsilon$ （取到  $\varepsilon$  的首项）。由此得出

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \begin{pmatrix} \partial \eta / \partial \tilde{\eta} & \partial \eta / \partial \tilde{x}^j \\ \partial x^i / \partial \tilde{\eta} & \partial x^i / \partial \tilde{x}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - T' & -\partial_j T \\ -L^{i'} & \delta_j^i - \partial_j L^i \end{pmatrix}. \quad (38)$$

将这些结果代入式 (35)，我们就可以确定能量动量张量的扰动是如何变换的。我将推导  $\delta\rho$  的变换作为一个例子，剩下的作为练习。结果是

$$\delta\rho \mapsto \delta\rho - \bar{\rho}' T, \quad (39)$$

$$\delta P \mapsto \delta P - \bar{P}' T, \quad (40)$$

$$q_i \mapsto q_i + (\bar{\rho} + \bar{P})L'_i, \quad (41)$$

$$v_i \mapsto v_i + L'_i, \quad (42)$$

$$\Pi_{ij} \mapsto \Pi_{ij}. \quad (43)$$

注意，密度和压力微扰的变换方式与式 (14) 中标量场的微扰相同。当然，这是必然的，因为  $\rho$  和  $P$  都是洛伦兹标量。

示例：

将式 (35) 应用于能量动量张量的时间分量，我们得到

$$\begin{aligned} T^0_0(x) &= \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial \eta} \tilde{T}^\alpha_\beta(\tilde{x}) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \tilde{T}^0_0(\tilde{x}) + O(2). \end{aligned} \quad (44)$$

两边代入  $T^0_0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho)$  得到

$$\begin{aligned} \bar{\rho} + \delta\rho &= (1 - T')(1 + T')(\bar{\rho}(\eta + T) + \delta\tilde{\rho}(x)) \\ &= \bar{\rho}(\eta) + \bar{\rho}'T + \delta\tilde{\rho}(x) + O(2). \end{aligned} \quad (45)$$

解出  $\delta\tilde{\rho}$  得到

$$\delta\tilde{\rho} = \delta\rho - \bar{\rho}'T, \quad (46)$$

这正是式 (39) 的结果。

### 2.2.2 Gauge-invariant variables

我们看到，微扰的标量部分和矢量部分可以通过坐标的改变而改变。和前面一样，我们可以定义变量的特定组合，这些变量的转换将被取消。从度规变量和物质变量可以形成各种各样的量规不变量。

(1) 一个有用的组合是

$$\bar{\rho}\Delta \equiv \delta\rho + \bar{\rho}'(v + B). \quad (47)$$

$\Delta$  称为共动密度对比 (comoving density contrast)，因为当  $v + B = 0$  时，它变为共动度规中的密度对比。我们将在下面看到，在共动密度对比方面，泊松方程的相对论推广采用与牛顿近似相同的形式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\Delta, \quad (48)$$

其中  $\Psi$  为式 (26) 中定义的巴丁势 (Bardeen potential)。

(2) 另外两个重要的规范不变量是

$$\zeta = -C + \frac{1}{3}\nabla^2 E + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}, \quad (49)$$

$$\mathcal{R} = -C + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(v + B) \quad (50)$$

这些扰动被称为曲率扰动, 因为它们分别减小了均匀密度规和移动规中空间切片的固有曲率。

三个规整不变的扰动  $\Delta, \zeta$  和  $\mathcal{R}$  并非相互独立, 而是服从以下关系式

$$\zeta = \mathcal{R} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\rho}'}\bar{\rho}\Delta. \quad (51)$$

根据泊松方程 (48) 我们可以看到, 在超视距尺度上, 共动密度对比消失了, 因此两个曲率扰动相等

$$\zeta \xrightarrow{k \ll \mathcal{H}} \mathcal{R}. \quad (52)$$

在大尺度上, 我们可以交替处理  $\zeta$  和  $\mathcal{R}$ 。曲率扰动的一个关键特征是, 如果物质扰动是“绝热的”, 曲率扰动在超视界尺度上是恒定的 (见第 6.2.2 节)。描述初始条件的一个好方法是用  $\zeta$  或  $\mathcal{R}$  表示。

### 2.2.3 More gauges

上面我们使用规范自由度将两个度规扰动设为零。或者, 我们也可以在物质领域定义测量:

(1) 均匀密度规范 (Uniform density gauge)

我们可以利用时间切分的自由度, 将总密度扰动设为零

$$\delta\rho = 0. \quad (53)$$

该量规中的主要标量扰动是曲率扰动, 即  $\delta g_{ij} = a^2(1 - 2\zeta)\delta_{ij}$ 。

(2) 共动度规 (Comoving gauge)

同样, 我们可以要求协变速度扰动消失

$$v + B = 0. \quad (54)$$

在这个量规中, 主要的标量扰动是曲率扰动, 即  $\delta g_{ij} = a^2(1 - 2\mathcal{R})\delta_{ij}$ 。这是另一种方便计算膨胀量子波动的量规。

根据哪个度规扰动被设置为零, 有不同版本的均匀密度和移动量规。

## 2.3 Conservation Equations

到目前为止，我们做的还不多。我们定义了度规和能量动量张量的微扰，并讨论了它们的规范依赖性。我们的下一个任务是推导这些扰动的演化方程。度规的演化遵循爱因斯坦方程  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ ，而物质微扰的演化遵循能量动量张量守恒定律  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 。将这些方程在微扰中展开成线性阶将得到物质和度规微扰的线性化运动方程。

在一个固定的规范中进行这个分析会很方便。我们将选用牛顿规范，其中度规是

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1+2\Psi) & 0 \\ 0 & (1-2\Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

在本节中，我们将通过线性化  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  推导出物质扰动的运动方程。如果不同分量之间没有能量和动量的传递，则物质是单独守恒的，我们也有  $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(a)} = 0$ 。在这种情况下，我们的结果将分别适用于所有物种。

更明确地说，我们有

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^\mu{}_\nu &= 0 \\ &= \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^\alpha{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T^\mu{}_\alpha. \end{aligned} \quad (56)$$

要评估这一点，我们需要扰动连接系数。利用度量 (55)，可以直接（但繁琐）证明

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H} + \Psi' \quad (57)$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \partial_i \Psi \quad (58)$$

$$\Gamma_{00}^i = \partial^i \Psi, \quad (59)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}\delta_{ij} - [\Phi' + 2\mathcal{H}(\Phi + \Psi)]\delta_{ij}, \quad (60)$$

$$\Gamma_{j0}^i = (\mathcal{H} - \Phi')\delta_j^i, \quad (61)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -2\delta_{(j}^i \partial_{k)} \Phi + \delta_{jk} \partial^i \Phi. \quad (62)$$

示例：

回顾连接系数的一般表达式

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\beta g_{\gamma\rho} + \partial_\gamma g_{\beta\rho} - \partial_\rho g_{\beta\gamma}). \quad (63)$$

要评估这一点，我们需要度规 (55) 的逆

$$g^{\mu\nu} = a^{-2} \begin{pmatrix} -(1-2\Psi) & 0 \\ 0 & (1+2\Phi)\delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

其中，我们使用了线性近似  $(1+2\Psi)^{-1} \approx (1-2\Psi)$ 。将其应用于  $\Gamma_{00}^0$ ，我们可以得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} (\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{0\rho} - \partial_\rho g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) \quad (\text{since } g^{0i} = 0) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00} \\ &= \frac{1}{2} a^{-2} (1-2\Psi) \partial_0 [a^2 (1+2\Psi)] \\ &= a^{-2} (1-2\Psi) [a a' (1+2\Psi) + a^2 \Psi'] \\ &= \mathcal{H} + \Psi', \end{aligned} \quad (65)$$

这便是式 (57) 的结果。

将扰动连接系数代入 (56)，我们就可以推导出物质扰动的线性化演化方程。由于代数比较复杂，我们将在下面的方框中讨论。下面的段落将对结果进行总结。

### (1) 连续性方程 (Continuity equation)

在 (56) 中设置  $\nu = 0$ ，我们可以发现

$$\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta P) - \partial_i q^i + 3\Phi'(\bar{\rho} + \bar{P}) \quad (66)$$

这是描述密度扰动演变的连续性方程。右侧的第一项只是背景膨胀造成的稀释，第二项则考虑了局部流体流动。最后一项（与  $\Phi'$  成比例）是纯粹的相对论效应，与局部膨胀率扰动引起的密度变化相对应。这是因为我们可以把  $(1-\Phi)a$  视为牛顿规范下度规空间部分的“局部尺度因子”。因此，(66) 中的第一项和最后一项是相关的。

将  $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$  和  $q^i = (\bar{\rho} + P)v^i$  代入 (66)，我们就得到了密度对比的演化方程

$$\delta' = -\left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right) (\nabla \cdot \mathbf{v} - 3\Phi') - 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) \delta. \quad (67)$$

因此，在极限  $P \ll \rho$  中，我们恢复了用保形时间写成的牛顿方程 (5.138)  $\delta' = -\nabla \cdot \mathbf{v} + 3\Phi'$ ，但有一个来自扰动膨胀率的相对论修正。这种修正在亚哈勃尺度上很小，我们重现了牛顿极限。

### (2) 欧拉方程 (Euler equation)

在 (56) 中令  $\nu = i$ ，我们得到

$$q'_i = -4\mathcal{H}q_i - (\bar{\rho} + \bar{P})\partial_i \Psi - \partial_i \delta P - \partial^j \Pi_{ij} \quad (68)$$

这是欧拉方程的相对论版本。(68) 右侧的第一项是动量密度  $q \propto a^{-4}$  的预期缩放。其余项是由重力、压力和各向异性应力引起的力项。

将  $q_i = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i$  代入 (68), 就得到了体积速度 (bulk velocity) 的演化方程

$$v'_i = - \left( \mathcal{H} + \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}} \right) v_i - \frac{1}{\bar{\rho} + \bar{P}} (\partial_i \delta P + \partial^j \Pi_{ij}) - \partial_i \Psi, \quad (69)$$

它应该与牛顿方程 (5.139) 相比较。

**导出过程:**

首先考虑 (56) 的  $\nu = 0$  部分,

$$\partial_0 T^0_0 + \partial_i T^i_0 + \Gamma_{\mu 0}^\mu T^0_0 + \underbrace{\Gamma_{\mu i}^\mu T^i_0}_{O(2)} - \Gamma_{00}^0 T^0_0 - \underbrace{\Gamma_{i0}^0 T^i_0}_{O(2)} - \underbrace{\Gamma_{00}^i T^0_i}_{O(2)} - \Gamma_{j0}^i T^j_i = 0 \quad (70)$$

将扰动能动张量和连接系数代入后得出

$$\begin{aligned} & -(\bar{\rho} + \delta\rho)' - \partial_i q^i - (\mathcal{H} + \Psi' + 3\mathcal{H} - 3\Phi')(\bar{\rho} + \delta\rho) \\ & + (\mathcal{H} + \Psi')(\bar{\rho} + \delta\rho) - (\mathcal{H} - \Phi')\delta_j^i(\bar{P} + \delta P)\delta_i^j = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

因此

$$\bar{\rho}' + \delta\rho' + \partial_i q^i + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \delta\rho) - 3\bar{\rho}\Phi' + 3\mathcal{H}(\bar{P} + \delta P) - 3\bar{P}\Phi' = 0. \quad (72)$$

分别写出零阶和一阶部分, 我们得到

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}), \quad (73)$$

$$\delta\rho' = -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta P) - \partial_i q^i + 3\Phi'(\bar{\rho} + \bar{P}). \quad (74)$$

零阶方程 (73) 只是均质背景中的能量守恒。一阶方程 (74) 是密度扰动  $\delta\rho$  的连续性方程。

接下来, 考虑 (56) 的  $\nu = i$  分量,  $\partial_\mu T^\mu_i + \Gamma_{\mu\rho}^\mu T^\rho_i - \Gamma_{\mu i}^\rho T^\mu_\rho = 0$ , 因此

$$\partial_0 T^0_i + \partial_j T^j_i + \Gamma_{\mu 0}^\mu T^0_i + \Gamma_{\mu j}^\mu T^j_i - \Gamma_{0i}^0 T^0_0 - \Gamma_{ji}^0 T^j_0 - \Gamma_{0i}^j T^0_j - \Gamma_{ki}^j T^k_j = 0. \quad (75)$$

将扰动能动张量  $T^0_i = +q_i$  和  $T^i_0 = -q^i$  与扰动连接系数代入, 可以得到

$$\begin{aligned} & q'_i + \partial_j [(\bar{P} + \delta P)\delta_i^j + \Pi_i^j] + 4\mathcal{H}q_i + (\partial_j \Psi - 3\partial_j \Phi)\bar{P}\delta_i^j + \partial_i \Psi\bar{\rho} \\ & + \mathcal{H}\delta_{ji}q^j - \mathcal{H}\delta_i^j q_j - \underbrace{(-2\delta_{(k}^j \partial_{i)} \Phi + \delta_{ki} \partial^j \Phi)\bar{P}\delta_j^k}_{-3\partial_i \Phi \bar{P}} = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

化简后得到

$$q'_i = -4\mathcal{H}q_i - (\bar{\rho} + \bar{P})\partial_i \Psi - \partial_i \delta P - \partial^j \Pi_{ij}, \quad (77)$$

这证实了欧拉方程 (68) 的形式。

针对一些特殊情况对 (67) 和 (69) 进行评估很有启发：

(1) 物质 (Matter)

考虑非相对论流体（即物质）， $P_m = 0$  和  $\Pi_m^{ij} = 0$ 。这样，连续性方程和欧拉方程就大大简化了

$$\delta'_m = -\nabla \cdot \mathbf{v}_m + 3\Phi', \quad (78)$$

$$\mathbf{v}'_m = -\mathcal{H}\mathbf{v}_m - \nabla\Psi \quad (79)$$

这些方程中的每个项都非常直观。将 (78) 的时间导数与 (79) 的散度结合起来，我们发现

$$\begin{array}{ccc} \delta''_m + \mathcal{H}\delta'_m & = & \nabla^2\Psi + 3(\Phi'' + \mathcal{H}\Phi'). \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{friction} & & \text{gravity} \end{array} \quad (80)$$

除了由势的时间依赖性引起的项外，这与物质微扰演化的牛顿方程相同。我们将把这个方程应用于暗物质微扰的聚类。

(2) 辐射 (Radiation)

对于相对论性完全流体（即无粘性辐射），我们有  $P_r = \frac{1}{3}\rho_r$  and  $\Pi_r^{ij} = 0$ ，连续性方程和欧拉方程就变成了

$$\delta'_r = -\frac{4}{3}\nabla \cdot \mathbf{v}_r + 4\Phi', \quad (81)$$

$$\mathbf{v}'_r = -\frac{1}{4}\nabla\delta_r - \nabla\Psi \quad (82)$$

将 (81) 的时间导数与 (82) 的散度结合起来，我们得到

$$\delta''_r - \frac{1}{3}\nabla^2\delta_r = \frac{4}{3}\nabla^2\Psi + 4\Phi''. \quad (83)$$

我们可以看到，辐射扰动并没有受到哈勃摩擦力的影响，而是感受到了额外的压力作用力。下面，我将展示这个方程是如何在原始等离子体中实现声波的。

### 2.3.1 Summury

为了便于今后参考，请允许我在此收集线性化连续性方程和欧拉方程：

$$\delta' = -\left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)(\partial_i v^i - 3\Phi') - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)\delta, \quad (84)$$

$$v'_i = -\left(\mathcal{H} + \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}}\right)v_i - \frac{1}{\bar{\rho} + \bar{P}}(\partial_i\delta P + \partial^j\Pi_{ij}) - \partial_i\Psi. \quad (85)$$

我们通常在傅立叶空间中使用这些方程。对于标量波动，我们可以通过以下替换获得各个傅立叶模式的方程：

$$\begin{aligned}\partial_i &\rightarrow ik_i \\ v_i &\rightarrow i\hat{k}_i v \\ \Pi_{ij} &\rightarrow -(\bar{\rho} + \bar{P})\hat{k}_{(i}\hat{k}_{j)}\Pi\end{aligned}\tag{86}$$

其中  $\hat{k}_{(i}\hat{k}_{j)} \equiv \hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}$ 。请注意，我们在  $\nu$  和  $\Pi$  中吸收了  $k \equiv |\mathbf{k}|$  的因子，并用  $(\bar{\rho} + \bar{P})$  的因子重调了各向异性应力，因此  $v(\eta, \mathbf{k})$  和  $\Pi(\eta, \mathbf{k})$  并不完全是  $v(\eta, \mathbf{x})$  和  $\Pi(\eta, \mathbf{x})$  的傅立叶变换。方程 (84) 和 (85) 由此得出

$$\delta' = \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)(kv + 3\Phi') - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)\delta,\tag{87}$$

$$v' = -\left(\mathcal{H} + \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}}\right)v - \frac{1}{\bar{\rho} + \bar{P}}k\delta P + \frac{2}{3}k\Pi - k\Psi.\tag{88}$$

这些方程也分别适用于所有不直接耦合的成分。例如，暗物质不与其他物质相互作用（除了通过引力），因此它满足自己的守恒方程。一般来说，我们将为每种具有扰动的物质分别建立演化方程  $(\delta_a, v_a, \delta P_a, \Pi_a)$ 。不同类型之间的引力耦合由 (84) 和 (85) 中的膨胀率  $\mathcal{H}$  以及度量势  $\Phi$  和  $\Psi$  来表示。

当然，两个方程不足以完全描述四个扰动  $(\delta_a, v_a, \delta P_a, \Pi_a)$  的演变。为了取得进展，我们必须进一步简化假设或找到额外的演化方程。我们将两者兼顾。

(1) 有时我们会假设一个完美的流体。这种流体的特点是强相互作用，使压力保持各向同性， $\Pi = 0$ 。对于  $P = P(\rho)$  的正压流体，压力扰动可以写成  $\delta P = c_s^2\delta\rho$ ，其中声速为

$$c_s^2 \equiv \frac{dP}{d\rho} = \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'}.\tag{89}$$

对于一般流体，压力可能不仅仅取决于密度，声速定义为

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S = \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'},\tag{90}$$

其中下标表示在固定熵下求导，第二个等式假设背景的膨胀是绝热的（即没有熵的产生）。这种扰动称为**绝热扰动**，如果

$$\delta P = c_s^2\delta\rho = \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'}\delta\rho.\tag{91}$$

注意，正压流体中的扰动必然是绝热的，但一般情况下并非如此。如果扰动是绝热的，那么它们只能用两个独立的变量来描述，比如  $\delta$  和  $\nu$ ，它们的演化由连续性方程和欧拉方程给出。



(2) 解耦或弱相互作用的物质（如中微子）不能用完美流体来描述，并且上述各向异性应力和压力摄动的简化不适用。在这种情况下，我们无法避免求解扰动分布函数  $f$  演化的玻尔兹曼方程（见附录 B）。

(3) 解耦的冷暗物质是一个特殊的例子。它没有碰撞，速度弥散可以忽略不计。因此，它的行为就像一种无压完美流体，尽管它没有相互作用，因此不是传统意义上的流体。

## 2.4 Einstein Equations

由式 (84) 和式 (85) 可知，物质微扰的演化受到度规势  $\Phi$  和  $\Psi$  的影响。因此，为了闭合方程组，我们还需要度规微扰的演化方程。这些都是从爱因斯坦方程推导出来的，我们接下来会分析它。

在牛顿规范中推导线性化的爱因斯坦方程在概念上是直截了当的，但在代数上有点乏味。你一生中应该亲手做一次这样的计算。之后，您应该使用 Mathematica 或您最喜欢的替代品来执行代数。在这本书的网站上，你可以找到 Mathematica 笔记本 CPT。注：它将允许您在按下一个按钮时再现本节中的所有结果。

我们需要爱因斯坦张量的摄动  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ ，所以我们首先需要计算摄动的里奇张量  $R_{\mu\nu}$  和里奇标量  $R$ 。

(1) 里奇张量 (Ricci tensor)

回想一下里奇张量可以用连接系数表示为

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda. \quad (92)$$

在 (57)-(62) 中代入扰动连接系数，得到

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 3\Phi'', \quad (93)$$

$$R_{0i} = 2\partial_i(\Phi' + \mathcal{H}\Psi), \quad (94)$$

$$R_{ij} = [\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 - \Phi'' + \nabla^2\Phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) - \mathcal{H}\Psi' - 5\mathcal{H}\Phi']\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) \quad (95)$$

我将明确推导出  $R_{00}$ ，其他部分留作练习。

里奇张量的时间分量为

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{0\rho}^\lambda. \quad (96)$$

$\lambda = 0$  的项在  $\lambda$  上的总和中抵消，因此我们得到

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0i}^\rho \Gamma_{0\rho}^i \\
&= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{00}^0 + \underbrace{\Gamma_{ij}^i \Gamma_{00}^j}_{O(2)} - \underbrace{\Gamma_{0i}^0 \Gamma_{00}^i}_{O(2)} - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i \\
&= \nabla^2 \Psi - 3\partial_0 (\mathcal{H} - \Phi') + 3(\mathcal{H} + \Psi')(\mathcal{H} - \Phi') - (\mathcal{H} - \Phi')^2 \delta_i^j \delta_j^i \\
&= -3\mathcal{H}' + \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 3\Phi'',
\end{aligned} \tag{97}$$

这证实了结果 (93)。

(2) 里奇标量 (Ricci scalar)

现在计算里奇标量就相对简单了

$$R = g^{00} R_{00} + 2 \underbrace{g^{0i} R_{0i}}_{O(2)} + g^{ij} R_{ij}. \tag{98}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
a^2 R &= -(1 - 2\Psi) R_{00} + (1 + 2\Phi) \delta^{ij} R_{ij} \\
&= (1 - 2\Psi) [3\mathcal{H}' - \nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') - 3\Phi''] \\
&\quad + 3(1 + 2\Phi) [\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 - \Phi'' + \nabla^2 \Phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) \\
&\quad - \mathcal{H}\Psi' - 5\mathcal{H}\Phi'] + (1 + 2\Phi) \nabla^2 (\Phi - \Psi).
\end{aligned} \tag{99}$$

去掉非线性项，这就变成

$$\begin{aligned}
a^2 R &= 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \\
&\quad - 2\nabla^2 \Psi + 4\nabla^2 \Phi - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi - 6\Phi'' - 6\mathcal{H}(\Psi' + 3\Phi'),
\end{aligned} \tag{100}$$

其中第一行是第 2 章讨论的同质部分，第二行是线性修正。

(3) 爱因斯坦方程 (Einstein equations)

我们可以计算爱因斯坦方程了

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu. \tag{101}$$

我们选择使用一个指数，因为它简化了能动张量的形式。我们将首先考虑方程的时间部分，即  $\mu = \nu = 0$ 。爱因斯坦张量的相关分量是

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= g^{0\mu} G_{\mu 0} = g^{00} \left[ R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right] \\
&= -a^{-2} (1 - 2\Psi) R_{00} - \frac{1}{2} R,
\end{aligned} \tag{102}$$

其中，我们利用了  $g^{0i}$  在牛顿规范中消失，在线性阶上  $g^{00} g_{00} = 1$  的性质。代入式 (93) 和式 (100)，得到

$$\delta G_0^0 = -2a^{-2} [\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi)], \tag{103}$$

于是，时间爱因斯坦方程给出

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (104)$$

其中  $\delta\rho \equiv \sum_a \delta\rho_a$  是总密度扰动。方程 (104) 是泊松方程的相对论广义化。在哈勃半径内，即对于  $k \gg \mathcal{H}$  的傅立叶模式，我们有  $|\nabla^2 \Phi| \gg 3\mathcal{H}|\Phi' + \mathcal{H}\Psi|$ ，因此 (104) 简化为  $\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G a^2 \delta\rho$ ，即牛顿极限的泊松方程。(104) 中的 GR 修正在与哈勃半径相当的尺度上开始变得重要。

接下来，我们考虑爱因斯坦方程的纯空间部分。爱因斯坦张量的相关分量是

$$\begin{aligned} G_j^i &= g^{ik} \left[ R_{kj} - \frac{1}{2} g_{kj} R \right] \\ &= a^{-2} (1 + 2\Phi) \delta^{ik} R_{kj} - \frac{1}{2} \delta_j^i R. \end{aligned} \quad (105)$$

从 (95) 可以看出， $R_{kj}$  中的大部分项与  $\delta_{kj}$  成比例。当与  $\delta^{ik}$  缩合时，会产生无数与  $\delta_j^i$  成比例的项。我们不想处理这些乱七八糟的问题。相反，我们将首先关注  $G_j^i$  的无迹部分，它来自各向异性应力  $\Pi_j^i$ 。利用 (95)，可以得到

$$\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} (\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Pi_{ij} \quad (106)$$

通过替换  $\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \rightarrow -k_{\langle i} k_{j \rangle}$  和  $\Pi_{ij} = -(\bar{\rho} + \bar{P}) \hat{k}_{\langle i} \hat{k}_{j \rangle} \Pi$ ，相应的傅里叶空间方程为

$$k^2 (\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}) \Pi, \quad (107)$$

其中  $\Pi \equiv \sum_a \Pi_a$ 。在大尺度上，暗物质和重子可以被描述为各向异性应力可以忽略不计的完美流体。光子只有在其能量密度处于次主导地位的物质主导时代才开始产生各向异性应力分量。因此，(106) 中唯一相关的源是自由流中微子。要描述中微子引起的各向异性应力，需要超越流体近似；见附录 B。这种影响相对较小，因此就本章所追求的精确度而言，可以忽略不计。方程 (106) 意味着  $\Psi \approx \Phi$ 。

爱因斯坦方程的时空部分也是通过同样的方法得到的。爱因斯坦张量的相关分量为

$$\begin{aligned} G_i^0 &= g^{0\mu} G_{\mu i} = g^{00} R_{0i} \\ &= -a^{-2} R_{0i} \\ &= -2a^{-2} \partial_i (\Phi' + \mathcal{H}\Psi) \end{aligned} \quad (108)$$

再加上  $T_i^0 = \partial_i q$ ，我们发现

$$\Phi' + \mathcal{H}\Psi = -4\pi G a^2 q \quad (109)$$

这样，泊松方程 (104) 就可以写成

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \Delta \quad (110)$$

其中移动密度对比度  $\Delta$  在 (47) 中定义。我们可以看到，就共动密度对比而言，泊松方程的相对论广义形式与牛顿方程的形式相同，但现在在所有尺度上都有效。

最后，我们看一下空间-空间爱因斯坦方程的轨迹。这是一个相对简单的练习，可以证明这导致以下度量势的演化方程

$$\Phi'' + \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' = 4\pi Ga^2\delta P \quad (111)$$

式中  $\delta P \equiv \sum_a \delta P_a$  为总压强摄动。假设  $\Psi \approx \Phi$ ，则为

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi Ga^2\delta P \quad (112)$$

如果我们把  $\delta P = c_s^2\delta\rho$  写成用泊松方程把  $\delta\rho$  和  $\Phi$  联系起来，它就变成了  $\Phi$  演化的封闭方程。

### 2.4.1 Summary

由于本节的主要结果分布在几个页面上，因此将它们写在一个地方可能会很有用，以便稍后更容易找到它们。

线性化的爱因斯坦方程是

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2\delta\rho \quad (113)$$

$$-(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2q \quad (114)$$

$$\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle}(\Phi - \Psi) = 8\pi Ga^2\Pi_{ij}, \quad (115)$$

$$\Phi'' + \mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' + \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi = 4\pi Ga^2\delta P, \quad (116)$$

右边的源包括所有分量的和。在不存在各向异性应力的情况下，式 (115) 表明两个度量势相等， $\Psi \approx \Phi$ ，式 (116) 变为

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi Ga^2\delta P. \quad (117)$$

式 (113) 和式 (114) 可以组合为  $\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\Delta$ ，其形式与牛顿泊松方程相同，但现在在所有尺度上都有效。

将爱因斯坦方程与守恒方程 (84) 和式 (85) 相结合，可以得到一个封闭的方程组（在指定了状态方程和每个流体分量的声速之后）。在本章的其余部分，我们将研究这些方程在各种物理情况下的解。

### 3 Initial Conditions

在解上述演化方程之前，我们必须确定它们的初始条件。在足够早的时候，所有当前观测感兴趣的尺度都在哈勃半径之外。在这样的超级哈勃（“超视界”）尺度上，微扰的演化变得非常简单，尤其是在绝热初始条件下（见下文）。在本节中，我将描述这些超视界模式的初始条件。

#### 3.1 Superhorizon Limit

考虑物质和辐射的连续性方程（78）和式（81）的超视界极限：

$$\delta'_m = 3\Phi', \quad (118)$$

$$\delta'_r = 4\Phi', \quad (119)$$

其中速度项可以降低的事实遵循欧拉方程（79）和式（82）的超视界极限。对光子、中微子、重子和冷暗物质的方程进行积分得到

$$\begin{aligned} \delta_\gamma &= 4\Phi + C_\gamma & \delta_\gamma &= 4\Phi + C_\gamma \\ \delta_\nu &= 4\Phi + C_\nu & \delta_\nu &= \delta_\gamma + S_\nu \\ \delta_c &= 3\Phi + C_c & \delta_c &= \frac{3}{4}\delta_\gamma + S_c \\ \delta_b &= 3\Phi + C_b & \delta_b &= \frac{3}{4}\delta_\gamma + S_b \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (120)$$

其中参数  $C_a$  是积分常数。注意，这些常数通常是波向量  $\mathbf{k}$  的函数。参数  $S_a$  (对于  $a = \nu, c, b$ ) 称为等曲率模态 (isocurvature modes)。

在此绝热模态 (adiabatic mode) 下，给出了一个优选的初始条件集，其中  $S_\nu = S_c = S_b = 0$  和  $C_\gamma \neq 0$ 。在这种情况下，所有扰动的初始值由单个自由度决定。正如我们将在第 8 章看到的，绝热波动是最简单的暴胀模型的自然预测。除了个别注释外，本书其余部分我们都假定初始条件是绝热的。除了理论上吸引力之外，绝热初始条件似乎也更受观测的青睐（见第 8.4.1 节）。

接下来，我们看看爱因斯坦方程（113）：

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_\nu \delta_\nu + \bar{\rho}_c \delta_c + \bar{\rho}_b \delta_b), \quad (121)$$

其中我们忽略了中微子的各向异性应力，因此  $\Phi \approx \Psi$ 。在大尺度上，我们可以忽略  $\nabla^2\Phi$ ，在早期，物质的贡献可以忽略不计。然后我们有

$$3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = -4\pi G a^2 (\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_\nu \delta_\nu). \quad (122)$$

对于绝热初始条件，我们有  $\delta_\nu = \delta_\gamma$  和  $4\pi G a^2 (\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu) = 3\mathcal{H}^2/2$ 。代入  $\mathcal{H} = 1/\eta$ ，得到

$$\eta\Phi' + \Phi = -\frac{1}{2}\delta_\gamma. \quad (123)$$

取时间导数，用 (119) 代替  $\delta'_\gamma$ ，得到

$$\eta\Phi'' + 4\Phi' = 0. \quad (124)$$

该方程的两个解是增长模式  $\Phi = \text{const}$  和衰减模式  $\Phi \propto \eta^{-3}$ 。以增长模式  $\Phi \equiv \Phi_i$  为中心，方程 (123) 意味着以下初始条件

$$\delta_\gamma(\eta_i, \mathbf{k}) = -2\Phi_i(\mathbf{k}). \quad (125)$$

我们可以看到，(120) 中的积分常数由引力势的原始值  $C_\gamma = -6\Phi_i$  固定。对于绝热扰动，所有分量的波动关系为

$$\delta_\gamma = \delta_\nu = \frac{4}{3}\delta_c = \frac{4}{3}\delta_b = -2\Phi_i \quad (\text{superhorizon}), \quad (126)$$

这样，所有波动的初始条件都可以通过给出原始电势  $\Phi_i$  的值来确定。

### 规范依赖性

一个重要的微妙之处在于超视距动力学的规范依赖性。为了说明这一点，请考虑用共动密度对比写成的泊松方程

$$\Delta = -\frac{2}{3}\frac{k^2}{\mathcal{H}^2}\Phi \quad (127)$$

我们可以从中发现一些问题。首先，在超视距尺度 ( $k \ll \mathcal{H}$ ) 上，共动密度对比度  $\Delta$  远远小于  $\delta$ ；其次，它在超视距尺度上并不是恒定的，而是随着  $\Delta \propto \mathcal{H}^{-2} \propto \eta^2$  演变的。我们是否应该担心两种不同规范中密度对比演化的这种质的差异？密度对比不是我们可以测量的吗？在超视距尺度上不是！在我们进行观测的亚视界尺度上，我们有

$$\frac{\Delta - \delta}{\Delta} = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)}{k^2\Phi} \xrightarrow{k \gg \mathcal{H}} 0, \quad (128)$$

所以在小尺度上  $\Delta$  和  $\delta$  没有区别。这是一个普遍的特征：对于亚视界尺度上的所有可测量量，规范问题消失了。

如果我们考虑到中微子引起的各向异性应力，我们就会发现（见问题 6.2）

$$\delta_\gamma(\eta_i, \mathbf{k}) = -2\Psi_i(\mathbf{k}) = -2\Phi_i(\mathbf{k}) \left(1 + \frac{2}{5}f_\nu\right)^{-1} \quad (129)$$

在这里我们引入了分数阶中微子密度  $f_\nu \equiv \bar{\rho}_\nu / (\bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma)$ 。

### 3.2 Adiabatic Perturbations

鉴于绝热微扰的特殊地位，更详细地描述它们的性质是值得的。

绝热扰动可以通过从一个均匀的宇宙开始，并对所有背景量  $\eta \rightarrow \eta + \pi(\eta, \mathbf{x})$ ；在这个时间转移之后，宇宙的某些部分在演化中“领先”，而其他部分则“落后”。正如我们将在第 8 章看到的那样，暴涨期间的量子涨落恰恰产生了背景量的时移。由此引起的压力和密度扰动为

$$\begin{aligned} \delta P_a(\eta, \mathbf{x}) &= \bar{P}'_a \pi(\eta, \mathbf{x}) \\ \delta \rho_a(\eta, \mathbf{x}) &= \bar{\rho}'_a \pi(\eta, \mathbf{x}) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\delta P_a}{\delta \rho_a} &= \frac{\bar{P}'_a}{\bar{\rho}'_a}, \\ \frac{\delta P_b}{\delta \rho_b} &= \frac{\bar{P}'_b}{\bar{\rho}'_b}, \end{aligned} \quad (130)$$

$\pi(\eta, \mathbf{x})$  对于所有物种  $a$  和  $b$  都是一样的。右边的第一个关系意味着

$$\delta P_a = c_{s,a}^2 \delta \rho_a, \quad (131)$$

所以在式 (91) 中定义的意义下，扰动确实是绝热的。使用  $\bar{\rho}'_a = -3\mathcal{H}(1+w_a)\bar{\rho}_a$ ，右边的第二个关系可以写成

$$\frac{\delta_a}{1+w_a} = \frac{\delta_b}{1+w_b} \quad \text{for all species } a \text{ and } b. \quad (132)$$

因此，具有相同状态方程的分量具有相同的分数扰动。物质 ( $w_m = 0$ ) 和辐射 ( $w_r = \frac{1}{3}$ ) 中的扰动服从

$$\delta_m = \frac{3}{4} \delta_r \quad (133)$$

这与 (120) 中绝热模式的关系相同。一个重要的推论是，对于绝热波动，总密度扰动  $\delta \rho \equiv \sum_a \bar{\rho}_a \delta_a$ ，是由携带主导能量密度  $\bar{\rho}_a$  的物质主导的，因为所有  $\delta_a$  都是可比的。

最后，我们注意到绝热波动定义中使用的时移  $\pi(\eta, \mathbf{x})$  具有与时间平移对称性自发破缺相关的戈德斯通玻色子 (Goldstone boson) 的解释。这种对称性破缺产生于宇宙学背景的时间依赖性。自发对称性破缺的语言最近在描述宇宙学扰动方面变得非常流行，并根据戈德斯通模式构建了有效场理论。

#### 3.2.1 Isocurvature Perturbations 等曲率扰动

绝热扰动的补充是等曲率扰动。对于两个分量  $a$  和  $b$ ，(密度) 等曲率扰动定义为

$$S_{ab} \equiv \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta_b}{1+w_b}. \quad (134)$$

从 (132) 中我们可以看出，这个量的非零值表示偏离绝热模式。等曲率模式的特殊情况见 (120)。之所以称为“等曲率”，是因为这些扰动的选择方式可以使曲率扰动  $\zeta$  在初始时消失。在这种情况下，一种物质的密度过高会补偿另一种物质的密度过低，从而不会产生净曲率扰动。

让我以中微子密度等曲率模式的特殊情况来说明这一点。根据 (49) 中  $\zeta$  的定义，我们可以得出

$$\zeta = \Phi - \frac{\delta\rho}{3(\rho + P)} = \Phi - \frac{f_\gamma\delta_\gamma + f_\nu\delta_\nu + f_b\delta_b + f_c\delta_c}{3 + f_\gamma + f_\nu}, \quad (135)$$

其中我们使用了  $\bar{\rho}'$  的连续性方程，并引入了  $f_a \equiv \rho_a/\rho$ 。在第二个等式中，我们利用  $\sum_a f_a = 1$  将分母中的  $f_b + f_c$  替换为  $1 - (f_\gamma + f_\nu)$ 。在早期，我们可以忽略重子和暗物质， $f_{b,c} \approx 0$ ，这样  $f_\gamma \approx 1 - f_\nu$ ，因此

$$\begin{aligned} \zeta &= \Phi - \frac{\delta_\gamma}{4} + \frac{f_\nu(\delta_\gamma - \delta_\nu)}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(C_\gamma + f_\nu S_\nu) \end{aligned} \quad (136)$$

其中，我们在最后的等式中使用了 (120)。因此，在  $S_\nu = -C_\gamma/f_\nu$  时曲率扰动消失，密度对比之间的关系为

$$\begin{aligned} \delta_\gamma &= 4\Phi - f_\nu S_\nu \\ &= \delta_\nu - S_\nu = \frac{4}{3}\delta_c = \frac{4}{3}\delta_b. \end{aligned} \quad (137)$$

在问题 6.2 中，你将证明

$$S_\nu = \frac{15 + 4f_\nu}{f_\nu(1 - f_\nu)}\Phi_i \approx 68.8\Phi_i \quad (138)$$

其中最后的等式为  $f_\nu \approx 0.41$ 。因此，等式 (137) 意味着  $\delta_\gamma = -24.2\Phi_i$  和  $\delta_\nu = 44.6\Phi_i$ 。

虽然绝热扰动只有一种方式，但等曲率扰动却有许多不同类型。除了前面描述的密度等曲率扰动，我们还可以在速度扰动中加入等曲率模式。此外，我们还可以形成不同等曲率模式的任意线性组合，并将它们与绝热模式相关联。

幸运的是，我们有充分的理由支持绝热初始条件。首先，等曲率波动会在 CMB 温度和偏振各向异性中产生独特的特征，而这在数据中是看不到的。因此，等曲率波动最多只能是一个次主要成分。绝热扰动在理论上也很有吸引力，因为它们在最简单的暴胀模型中自然产生（见第 8 章），并在超视距尺度上冻结（见第 6.2.4 节）。后一种性质对于暴胀的预测能力很重要，因为它使我们能够对再加热的不确定物理现象保持不可知论。相比之下，原始等曲率扰动的振幅与模型密切相关，对暴胀后的演化非常敏感。特别是，等曲率波动可以被热平衡冲掉：如果所有粒子在膨胀后都处于热平衡状态，并且它们的局部密度由温度决定（化学势消失），那么原始扰动是绝热的。因此，原始等曲率模式的存在需要至少一个场衰变成一些丰度不由热平衡决定的物种（例如，解耦后的冷暗物质）或遵守一些守恒的量子数，如重子或轻子数。例如，上面讨论的中微子密度等曲率模式可能是由于中微子化学势的空间波动造成的。

考虑到具有等曲率波动的模型的复杂性以及观测似乎不需要它们的事实，我们将在本书的其余部分假设绝热初始条件。



### 3.2.2 Curvature Perturbations 曲率扰动

图 3 显示了从辐射主导向物质主导过渡过程中引力势的超视界演化。我们看到，引力势在辐射和物质时代是恒定的，但在两者之间是不同的。这是一个普遍的特征：在状态方程为常数的演化阶段，势在超视界尺度上冻结，但当状态方程改变时，势会演化。

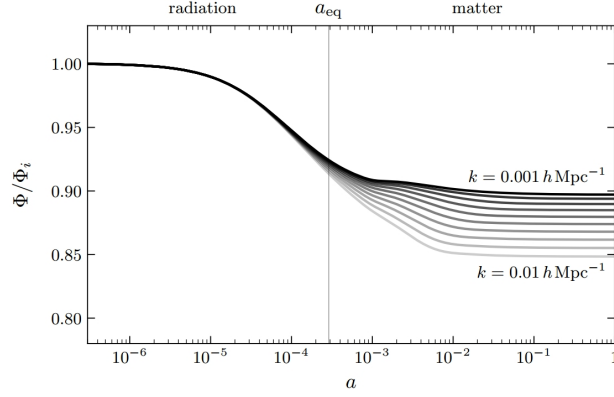


图 3: 忽略来自中微子的各向异性应力，从辐射到物质主导转变过程中引力势的演化。

在大尺度上，即使状态方程发生变化，我们也可以很方便地找到一个可替代的扰动变量，使其保持恒定。这对于从暴胀到辐射主导的宇宙的转变尤为重要。由于再加热过程中的状态方程是未知的，因此我们能够跟踪一个不依赖于这些细节的演化量是至关重要的。这将使我们能够将暴胀所做的预测与暴胀后原始等离子体的波动相匹配。对于绝热初始条件，守恒微扰是 (49) 和式 (50) 中引入的曲率微扰，在牛顿规范中为

$$\zeta = \Phi - \frac{\delta\rho}{3(\bar{\rho} + \bar{P})}, \quad (139)$$

$$\mathcal{R} = \Phi - \mathcal{H}v \quad (140)$$

我们用连续性方程来代替  $\bar{\rho}'$ 。为了证明  $\zeta$  确实在超哈勃尺度上守恒，我们取 (139) 的时间导数：

$$\zeta' = \Phi' - \frac{\delta\rho'}{3(\bar{\rho} + \bar{P})} + \frac{(\bar{\rho}' + \bar{P}')}{3(\bar{\rho} + \bar{P})^2} \delta\rho. \quad (141)$$

利用连续性方程，

$$\begin{aligned} \bar{\rho}' &= -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}), \\ \delta\rho' &= -3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta P) - \partial_i q^i + 3\Phi'(\bar{\rho} + \bar{P}), \end{aligned} \quad (142)$$

我们得到

$$(\bar{\rho} + \bar{P}) \frac{\zeta'}{\mathcal{H}} = \left( \delta P - \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'} \delta\rho \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial_i q^i}{\mathcal{H}}. \quad (143)$$

对于绝热扰动，右边括号中的项消失了，而  $\partial_i q^i = \nabla^2 q$  在大尺度上被  $k^2/\mathcal{H}^2 \ll 1$  的因子抑制了，因此  $\zeta'/\mathcal{H} \xrightarrow{k \ll \mathcal{H}} O(k^2/\mathcal{H}^2) \approx 0$ 。因此，我们建立了超视界尺度上曲率扰动的守恒。

### 3.2.3 Primordial Power Spectrum 原始功率谱

利用习题 6.13 的结果，得到辐射时期重力势的超视界值为

$$\Phi(\eta, \mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathcal{R}_i(\mathbf{k}) \quad (\text{superhorizon}) \quad (144)$$

式中  $\mathcal{R}_i(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{R}(0, \mathbf{k})$  为守恒曲率扰动的初值。忽略中微子的影响，使  $\Psi \approx \Phi$ ，并假设绝热初始条件，我们也有

$$\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m = -2\Phi = -\frac{4}{3}\mathcal{R}_i \quad (\text{superhorizon}). \quad (145)$$

所有波动的初始振幅由  $\mathcal{R}_i$  决定。我们取原始曲率扰动的功率谱为

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(t_i, k) = A_s k^{n_s-4}, \quad (146)$$

其中  $A_s$  和  $n_s$  是常数。在第 8 章中，我们将证明暴胀自然地预测一个  $n_s \approx 1$  的近似尺度不变谱。在下文中，我们将讨论这些尺度不变波动在它们重新进入视界后是如何演变的。

## 4 Growth of Matter Perturbations

在本节中，我将描述无压物质波动的演化，这将与暗物质和重子（解耦后）的聚集有关。在下一节中，我将在解耦之前处理光子和重子的演化，其中辐射压力起着重要作用。

正如我们在第五章中所看到的，结构形成的一个重要尺度是物质-辐射相等时的视界。在相等时刻进入视界的模具有波数  $k_{\text{eq}} = \mathcal{H}_{\text{eq}}$ 。  $k > k_{\text{eq}}$  模式在辐射时代进入视界，而  $k < k_{\text{eq}}$  模式在物质时代进入视界。正如我们在前一章看到的，这导致了物质扰动的尺度依赖演化（见 5.2.3 节）。现在我们将再次推导这一演化，将其更严格地与涨落的超视界极限联系起来。

## 4.1 Evolution of the Potential

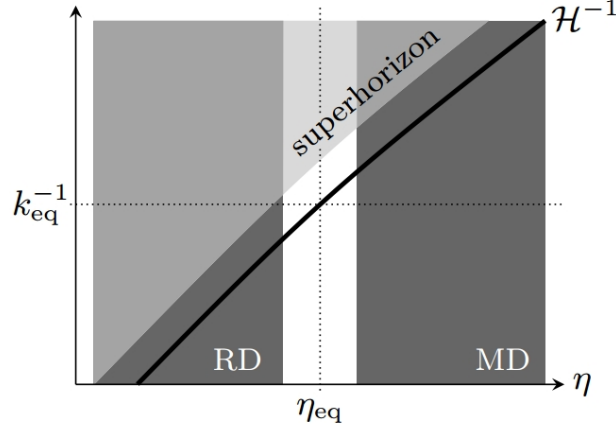


图 4: 三种不同状态（阴影区域）的图解，其中引力势可以找到解析解。

让我们从引力势的演化开始。为简单起见，我们将忽略各向异性应力并假设绝热扰动。当模态处于超视界尺度上，或者当辐射或物质主导背景时，可以找到  $\Phi$  的解析解（见图 4）。

当宇宙被一个具有恒定状态方程的组分所控制时，演化方程为（见习题 6.11）。

$$\Phi'' + 3(1+w)\mathcal{H}\Phi' - w\nabla^2\Phi = 0. \quad (147)$$

这次我们保留梯度项。在物质支配期间，我们有  $w \approx 0$ ，方程（147）在亚视界尺度上与在超视界尺度上具有相同的形式。生长模式和衰减模式的解为

$$\Phi(a, \mathbf{k}) = C_1(\mathbf{k}) + C_2(\mathbf{k})a^{-5/2} \quad (\text{matter era}) \quad (148)$$

其中，我们用  $a \propto \eta^2$  来表示衰减模式。与波长相关的振幅  $C_1(\mathbf{k})$  和  $C_2(\mathbf{k})$  由初始条件和辐射时代的演变决定。我们看到，在物质时代，引力势的增长模式在所有尺度上都是一个常数。这一点值得记住。

辐射时代的情况更有趣一些。在（147）中使用  $w \approx 1/3$ ，我们发现每个傅立叶模式现在都满足

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = 0. \quad (149)$$

令  $\Phi = u(\varphi)/\varphi$ ，其中  $\varphi \equiv k\eta/\sqrt{3}$ ，可以得到

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{2}{\varphi}\frac{du}{d\varphi} + \left(1 - \frac{2}{\varphi^2}\right)u = 0 \quad (150)$$

该方程的解是球面贝塞尔函数（见附录 D）

$$j_1(\varphi) = +\frac{\sin \varphi}{\varphi^2} - \frac{\cos \varphi}{\varphi} = +\frac{\varphi}{3} + O(\varphi^3) \quad (151)$$

$$n_1(\varphi) = -\frac{\cos \varphi}{\varphi^2} - \frac{\sin \varphi}{\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2} + O(\varphi^0). \quad (152)$$

由于  $n_1(\varphi)$  在  $\varphi$  很小（早期）时会爆炸，因此我们根据初始条件否定了这个解。那么辐射时代引力势的解就是

$$\Phi(\eta, \mathbf{k}) = 2\mathcal{R}_i \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi^3} \quad (\text{radiation era}), \quad (153)$$

其中整体归一化由  $\Phi(0, \mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathcal{R}(0, \mathbf{k}) \equiv \frac{2}{3}\mathcal{R}_i(\mathbf{k})$  决定（见练习 6.13）。注意 (6.165) 在所有尺度上都有效。取极限  $\varphi \ll 1$  和  $\varphi \gg 1$  分别得到超视距和亚视距尺度上的解：

$$\Phi(\eta, \mathbf{k}) \approx \begin{cases} \frac{2}{3}\mathcal{R}_i & (\text{superhorizon}), \\ -6\mathcal{R}_i \frac{\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}k\eta)}{(k\eta)^2} & (\text{subhorizon}) \end{cases} \quad (154)$$

因此，在辐射时代， $\Phi$  的亚视界模式振荡频率为  $\frac{1}{\sqrt{3}}k$ ，振幅衰减为  $\eta^{-2} \propto a^{-2}$ 。

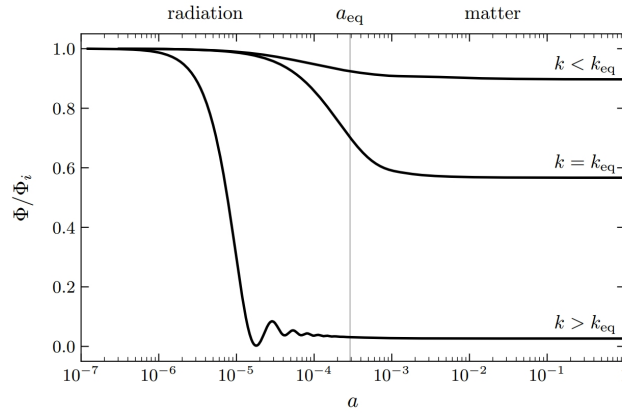


图 5: 在  $\Omega_b = 0.05$  和  $\Omega_c = 0.95$  的平坦爱因斯坦-德西特宇宙中引力势线性演化的数值解。图中为  $k = \{0.001, 0.05, 1\} h\text{Mpc}^{-1}$  时的三种典型傅立叶模式。在大尺度上，引力势是一个常数，除了在从辐射到物质主导的转变中下降 10%。视界进入后，模式在辐射时代衰减和振荡，但在物质时代保持不变。

图 5 给出了三个代表性波长下重力势演化的数值解。正如预测的那样，当模态在视界之外时，势是恒定的。其中两个模态在辐射时期进入视界，之后它们的振幅以  $a^{-2}$  的形式减小。由此产生的物质时代的振幅被强烈抑制。在物质时代，势能在所有尺度上都是常数。长波模式在物质时代进入视界，因此其振幅仅受到来自辐射-物质跃迁的 9/10 因子的抑制（见 6.2.4 节）。

在问题 6.1 中，你将推导出  $\Phi$  超视界演化的解析解：

$$\Phi(a, \mathbf{k}) = \frac{2\mathcal{R}_i}{30y^3} \left[ 16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right] \quad (\text{superhorizon}), \quad (155)$$

式中  $y \equiv a/a_{\text{eq}}$ 。很容易证实，该溶液在早期 ( $y \ll 1$ ) 和后期 ( $y \gg 1$ ) 都趋向于一个常数，并且在从辐射时代向物质时代过渡的过程中占 9/10 的比例。

## 4.2 Clustering of Dark Matter 暗物质的聚集

接下来，我将描述暗物质扰动的增长。前一章用牛顿近似处理了无压流体的亚视界扰动的演化。在下文中，我将在相对论框架下再现这些结果，并将它们扩展到超视界尺度。

### 4.2.1 Matter era 物质时代

让我们从物质时代的演化说起。由于物质是主要成分，泊松方程是这样的

$$\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \Delta_m \quad (156)$$

因此，共动密度对比  $\Delta_m$  的解可以直接从我们之前的  $\Phi$  的结果中得到。利用 (148) 和  $a^2 \bar{\rho}_m \propto a^{-1}$ ，我们发现

$$\Delta_m(a, \mathbf{k}) = -\frac{k^2 \Phi}{4\pi G a^2 \bar{\rho}_m} = \tilde{C}_1(\mathbf{k})a + \tilde{C}_2(\mathbf{k})a^{-3/2} \quad (\text{matter era}), \quad (157)$$

就像牛顿的方法一样，但现在在所有尺度上都有效。注意， $\Delta_m$  的增长模式在视界外演变为  $a$ ，而  $\delta_m$  保持不变。在视界内， $\delta_m \approx \Delta_m$  和两个量规的密度差随比例因子  $a$  而变化。

### 4.2.2 Dark energy era 暗能量时代

很简单，我们可以把它延伸到暗能量主导的时代。由于暗能量没有密度波动，泊松方程仍然是 (156) 的形式。为了得到  $\Delta_m$  的演化方程，我们使用了一个巧妙的技巧。因为  $a^2 \bar{\rho}_m \propto a^{-1}$ ，我们有  $\Phi \propto \Delta_m/a$ 。爱因斯坦方程 (117) 则意味着

$$\partial_\eta^2 (\Delta_m/a) + 3\mathcal{H} \partial_\eta (\Delta_m/a) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) (\Delta_m/a) = 0, \quad (158)$$

整理得到

$$\Delta_m'' + \mathcal{H} \Delta_m' + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) \Delta_m = 0 \quad (159)$$

结合具有物质和暗能量的宇宙的弗里德曼方程 (2.156) 和式 (2.157) 给出

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) &= (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 3\mathcal{H}^2 = -8\pi G a^2 \bar{P} - 8\pi G a^2 \bar{\rho} \\ &= +8\pi G a^2 \bar{\rho}_\Lambda - 8\pi G a^2 (\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_\Lambda) \\ &= -8\pi G a^2 \bar{\rho}_m, \end{aligned} \quad (160)$$

共动密度对比的方程变成

$$\Delta_m'' + \mathcal{H} \Delta_m' - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \Delta_m = 0 \quad (161)$$

这类似于牛顿方程 (5.62)，但现在在所有尺度上都有效。在暗能量占主导的状态下，我们有  $\mathcal{H}^2 \gg 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m$ ，我们可以去掉 (161) 中的最后一项，得到

$$\Delta_m'' - \frac{1}{\eta} \Delta_m' \approx 0 \quad (162)$$

可以解得

$$\Delta_m(a, \mathbf{k}) = \tilde{C}_1(\mathbf{k}) + \tilde{C}_2(\mathbf{k}) a^{-2} \quad (\text{dark energy era}), \quad (163)$$

其中我们使用了  $\eta \propto a^{-1}$ 。这恢复了我们在前一章中发现的结构增长受抑制的现象，但现在它在所有尺度上都成立。

### 4.2.3 Radiation era 辐射时代

在辐射时代，物质是次主要成分，我们无法使用上述技巧，从引力势的爱因斯坦方程中确定物质扰动的演变。相反，我们必须使用连续性方程和欧拉方程。在第 6.1.3 节中，我们表明这意味着物质密度对比的下列演化方程

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' = \nabla^2 \Phi + 3(\Phi'' + \mathcal{H} \Phi'), \quad (164)$$

其中， $\Phi = \Phi_r + \Phi_m$  来自辐射和物质。辐射的贡献 ( $\Phi_r$ ) 在亚水平尺度上快速振荡，而物质的贡献 ( $\Phi_m$ ) 是一个常数。因此，解  $\delta_m$  继承了由  $\Phi_r$  产生的“快模”和由  $\Phi_m$  产生的“慢模”。结果发现，相对于慢速模式，快速模式被抑制了  $(\mathcal{H}/k)^2$  倍。这反映了一个事实，即物质无法对引力势的快速变化做出反应，实际上只能随着时间平均引力势的变化而变化。因此，即使在辐射时代的深处， $\delta_m$  也是  $\Phi_m$  的来源。使用  $\nabla^2 \Phi \approx \nabla^2 \Phi_m = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m$  和  $\Phi'' = \Phi' \approx 0$ ，我们可以得到

$$\delta_m'' + \mathcal{H} \delta_m' - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \approx 0, \quad (165)$$

其中， $4\pi G a^2 \bar{\rho}_m = \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2$ 。充满物质和辐射的宇宙的保角哈勃参数为

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0} = \frac{\Omega_m}{\sqrt{\Omega_r}} \frac{\sqrt{1+y}}{y}, \quad y \equiv \frac{a}{a_{\text{eq}}}, \quad (166)$$

其中， $a_{\text{eq}} = \Omega_r/\Omega_m$  是物质-辐射相等时的尺度因子。用  $y$  作为时间变量，方程 (165) 就变成了所谓的**梅萨罗斯方程**

$$\frac{d^2 \delta_m}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)} \delta_m = 0 \quad (167)$$

其解为

$$\delta_m \propto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}y \\ (1 + \frac{3}{2}y) \ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right) - 3\sqrt{1+y} \end{cases} \quad (168)$$

在极限  $y \ll 1$  (RD), 增长模式解为  $\delta_m \propto \ln y \propto \ln a$ , 即物质波动在辐射时代仅对数增长。只有当宇宙变成物质主导时, 暗物质不均匀性才会显著增长。事实上, 在极限  $y \gg 1$  (MD) 时, 增长模式解为  $\delta_m \propto y \propto a$ 。

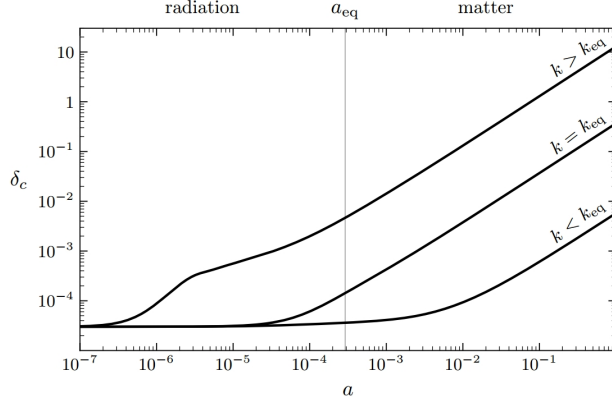


图 6:  $\Omega_b = 0.05$  和  $\Omega_c = 0.95$  的平坦爱因斯坦-德-西特宇宙中暗物质密度对比的演变。图示为  $k = \{0.005, 0.05, 5\} h\text{Mpc}^{-1}$  的三个代表性傅立叶模式。

图 6 显示了三种代表性傅立叶模式的暗物质密度对比演变数值解。请注意,  $k > k_{\text{eq}}$  的模式在跨越地平线时振幅会有一个小提升, 然后会进入辐射时代亚地平线演化的缓慢对数增长。

### 4.3 Matter Power Spectrum 物质功率谱

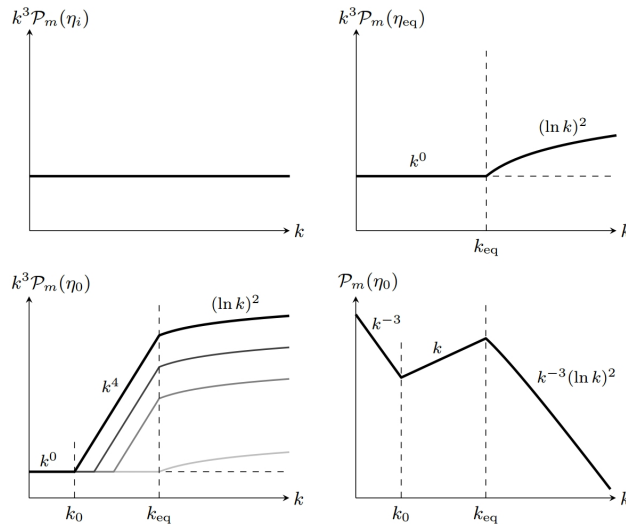


图 7: 物质功率谱的演变。左上角: 在某个初始时间  $\eta_i$  时, 频谱是尺度不变的。右上图在物质-辐射相等时, 频谱的尺度为  $(\ln k)^2$  ( $k > k_{\text{eq}}$ )。左下角在较晚的时间  $\eta_0$ , 由于波动的次水平增长,  $k_0 > k > k_{\text{eq}}$  的频谱以  $k^4$  缩放。右下方  $\mathcal{P}_m(\eta_0, k)$  的最终缩放。

我们得出的物质波动聚类足以解释晚期物质功率谱的形状。我们从时间  $\eta_i$  开始, 此时所有感兴趣的模式都还在哈勃半径之外。我们认为初始功率谱是尺度不变的, 因此  $k^3 \mathcal{P}_m(\eta_i, k) = \text{const}$ 。我们希望看到频谱的尺度依赖性是如何随时间演变的。(补充讨论见第 5.2.3 节)。

首先考虑时间  $\eta_{\text{eq}}$ 。  $k < k_{\text{eq}}$  的模式仍然在视界之外, 这些尺度的频谱必须与初始频谱具有相同的形状 (见图 7)。在辐射时代的视界内, 具有  $k > k_{\text{eq}}$  的模式演化为  $\ln a$ 。因此, 它们的振幅被  $\ln(a_{\text{eq}}/a_k)$  的系数增强, 其中  $a_k$  是模式  $k$  的视界交叉的时刻。由于在辐射时期  $k = (aH)_k \propto a_k^{-1}$ , 这给出了  $k > k_{\text{eq}}$  的光谱的  $(\ln k)^2$  缩放。

接下来, 我们取物质-辐射相等后的时间  $\eta_0$ 。所有的亚视界模都以  $a$  的形式增长, 模的增长量取决于它们进入视界的时间。对于  $k < k_{\text{eq}}$ , 因此我们有  $k^3 \mathcal{P}_m \propto (a_0/a_k)^2 \propto k^4$ , 其中我们在物质时代使用  $k = (aH)_k \propto a_k^{-1/2}$ 。对于  $k > k_{\text{eq}}$ , 我们得到  $k^3 \mathcal{P}_m \propto (a_0/a_{\text{eq}})^2 \ln(a_{\text{eq}}/a_k)^2 \propto (\ln k)^2$ 。在辐射时代进入视界的模式在物质时代都以同样的方式演化, 因此光谱被均匀地提升, 并且这些尺度不产生额外的尺度依赖。最后,  $k < k_0$  的模式仍然在视界之外, 因此光谱必须具有与初始光谱相同的尺度,  $k^3 \mathcal{P}_m \propto \text{const}$ 。综合这些结果, 我们有

$$\mathcal{P}_m(\eta_0, k) = \begin{cases} k^{-3} & k < k_0, \\ k & k_0 < k < k_{\text{eq}} \\ k^{-3}(\ln k)^2 & k > k_{\text{eq}}. \end{cases} \quad (169)$$

根据定义,  $k < k_0$ , 且  $k_0 = a_0 H_0 \approx 3 \times 10^{-4} h \text{Mpc}^{-1}$ , 对应于今天不可观测的超视界模式。亚水平尺度下的光谱标度,  $k > k_0$ , 与第 5.2.3 节所得相同。

## 5 Gravitational Waves

2015 年 9 月 14 日, 激光干涉仪引力波天文台 (LIGO) 首次探测到两个黑洞合并产生的引力波, 开启了一个新的科学时代。这次探测标志着多信使天文学的开始, 在未来, 引力波也可能为研究早期宇宙提供一个新窗口。在本节中, 我将收集一些宇宙学 GWs 的数学背景, 这将有助于我们在第 7 章和第 8 章的讨论。

引力波是空间度规的张量摄动

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (170)$$

由于扰动  $h_{ij}$  是对称的 ( $h_{ij} = h_{ji}$ )、横向的 ( $\partial_i h_{ij} = 0$ ) 和无迹的 ( $h_{ii} = 0$ ), 它包含  $6 - 3 - 1 = 2$  个独立模 (对应于引力波的两个极化)。为了更明确, 我们写出  $h_{ij}$  的傅里叶模态

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = \sum_{\lambda=+, \times} h_{\lambda}(\eta, \mathbf{k}) \epsilon_{ij}^{\lambda}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (171)$$

其中,  $\epsilon_{ij}^{\lambda}(\hat{\mathbf{k}})$  是两个独立的极化张量,  $h_{\lambda}(\eta, \mathbf{k})$  是相应的模函数。偏振张量可视为实数, 并满足  $\epsilon_{ij}^{\lambda}(\hat{\mathbf{k}}) = \epsilon_{ij}^{\lambda}(-\hat{\mathbf{k}})$ , 因此如果  $h_{\lambda}^*(\eta, \mathbf{k}) = h_{\lambda}(\eta, -\mathbf{k})$ , 则  $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$  为实数。极化张量是



对称的 ( $\epsilon_{ij}^\lambda = \epsilon_{ji}^\lambda$ )、横向的 ( $(\hat{k}_i \epsilon_{ij}^\lambda = 0)$ ) 和无迹的 ( $\epsilon_{ii}^\lambda = 0$ )。我们对极化基础的归一化处理将是

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ij}^\lambda \epsilon_{ij}^{\lambda'} = 2\delta^{\lambda\lambda'}, \quad (172)$$

但文献中也有其他约定 (右侧的数字常数不同)。明确地, 极化张量可写成

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^+(\hat{\mathbf{k}}) &\equiv \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j, \\ \epsilon_{ij}^\times(\hat{\mathbf{k}}) &\equiv \hat{m}_i \hat{m}_j + \hat{n}_i \hat{n}_j \end{aligned} \quad (173)$$

$\hat{\mathbf{m}}$  和  $\hat{\mathbf{n}}$  是两个单位向量它们与  $\hat{\mathbf{k}}$  正交并且彼此正交。对于矢量指向  $z$  方向的引力波, 即  $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ , 我们可以选择  $\hat{\mathbf{m}} \equiv \hat{\mathbf{x}}$  和  $\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{y}}$ , 这样

$$h_{ij} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (174)$$

有时, 在所谓的螺旋基 (helicity basis) 中工作是有用的, 其中

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{\pm 2} &\equiv (\epsilon_{ij}^+ \pm i\epsilon_{ij}^\times) / 2, \\ h_{\pm 2} &\equiv h_+ \mp ih_\times. \end{aligned} \quad (175)$$

在围绕波矢  $\mathbf{k}$  旋转一个角度的情况下, 我们得到  $h_{\pm 2} \mapsto e^{\pm 2i\psi} h_{\pm 2}$ , 这表明模式  $h_{\pm 2}$  描述了螺旋度  $+2$  和  $-2$  的状态 (也分别称为“右旋”和“左旋”极化)。

在问题 6.4 中, 您将证明线性化爱因斯坦方程意味着张量扰动的下列演化方程:

$$h_{ij}'' + 2\mathcal{H}h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} = 16\pi G a^2 \hat{\Pi}_{ij}, \quad (176)$$

其中,  $\hat{\Pi}_{ij}$  是各向异性应力的横向无迹部分。在没有源的情况下,  $\hat{\Pi}_{ij} = 0$ , 这个方程描述了引力波在膨胀宇宙中的自由传播。通过定义  $f_{ij} \equiv a(\eta)h_{ij}$  可以方便地去除哈勃摩擦项。每个极化模式满足

$$f_\lambda'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f_\lambda = 0. \quad (177)$$

让我们用一个通用的尺度因子  $a(\eta) \propto \eta^\beta$  来求解这个方程, 它包括辐射主导 ( $\beta = 1$ )、物质主导 ( $\beta = 2$ ) 和作为特例的膨胀 ( $\beta \approx -1$ )。解为

$$h_\lambda(\eta, \mathbf{k}) = \frac{C_\lambda(\mathbf{k})}{a(\eta)} j_{\beta-1}(k\eta) + \frac{D_\lambda(\mathbf{k})}{a(\eta)} y_{\beta-1}(k\eta), \quad (178)$$

其中,  $j_\beta(x)$  和  $y_\beta(x)$  是球面贝塞尔函数 (见附录 D), 常数  $C_\lambda(\mathbf{k})$  和  $D_\lambda(\mathbf{k})$  必须由初始条件固定。

请注意，对于幂律尺度因子，我们有  $a''/a \propto \mathcal{H}^2$ 。因此，在亚哈勃尺度 ( $k \gg \mathcal{H}$ ) 上，我们可以去掉 (177) 中的  $a''/a$  项，那么解就变为

$$h_\lambda(\eta, \mathbf{k}) = \frac{C_\lambda(\mathbf{k})}{a(\eta)} e^{ik\eta} + \frac{D_\lambda(\mathbf{k})}{a(\eta)} e^{-ik\eta} \quad (\text{for } k \gg \mathcal{H}), \quad (179)$$

这也可以从 (178) 的  $k\eta \gg 1$  极限得到。因此，在亚哈勃尺度上，我们得到了预期的平面波解，其振幅随  $a^{-1}$  衰减。在超哈勃尺度 ( $k \ll \mathcal{H}$ ) 上，我们放弃了  $k^2$  项，解变成了

$$h_\lambda(\eta, \mathbf{k}) = C_\lambda(\mathbf{k}) + D_\lambda(\mathbf{k}) \int \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \quad (\text{for } k \ll \mathcal{H}). \quad (180)$$

第二项随着宇宙的膨胀而衰减，因此引力波的增长模式在超哈勃尺度上是一个常数。

在宇宙学中，我们感兴趣的是引力波随机背景的概率谱，即  $P_h(k) \equiv (2\pi^2/k^3) \Delta_h^2(k)$ 。我们定义这个概率谱，其方差为

$$\sum_{i,j} \langle h_{ij}^2(\mathbf{x}) \rangle = \int d \ln k \Delta_h^2(k) \quad (181)$$

其中我们抑制了时间相关性。因此，各个极化模式的概率谱为

$$\langle h_\lambda(\mathbf{k}) h_{\lambda'}(\mathbf{k}') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \frac{\Delta_h^2(k)}{4} \times (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (182)$$

其中的因子 4 来自 (172) 中极化基础的归一化。在第 8 章中，我们将展示暴胀过程中的量子波动如何产生尺度不变的原始 GW 谱，而在第 7 章中，我们将解释这些 GW 如何影响 CMB 中的各向异性。