

全球定位系統概論作業 6

作業時間：2022.05.20.(五)~2022.06.09.(四)22 點

系所：土木系

學號：109612054

姓名：吳巽言

- 在某固定點用全測站施測地物之坐標時，所使用的坐標系統為測站地平坐標系統，其 X 軸、Y 軸、Z 軸分別指向北、東、天頂，而 GPS 測得之坐標系統為地球心地固坐標系統（即 CTS），兩者之間如何轉換？試繪圖並詳列轉換公式。

(文字說明 10 分、轉換公式 5 分、繪圖 5 分：畫一張即可、記得要標示符號與註明內容)

Step1：乘上一旋轉矩陣 $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

改變 e 軸的方向，使左旋坐標系轉換成右旋坐標系。

Step2：固定第二軸(e')旋 轉 $90-\phi$ ，使得 n 轉到 n'，u 轉 到 u'，nu 平面轉 $90-\phi$ 後，u'軸會平行 z 軸。

$$R_2(90^\circ - \phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(90-\phi) & 0 & -\sin(90-\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90-\phi) & 0 & \cos(90-\phi) \end{bmatrix}$$

Step3：∵u' ⊥ n'、M ⊥ L、M ∥ u' ∴n'的方向為 L 的方向，L 反方向與 X 的夾角為 $180-\lambda$ ，固定第三軸 (u') 旋 轉 $180-\lambda$ ，使得 n''軸會平行 X 軸，e''軸會平行 Y 軸。

$$R_3(180-\lambda) = \begin{bmatrix} \cos(180-\lambda) & \sin(180-\lambda) & 0 \\ -\sin(180-\lambda) & \cos(180-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

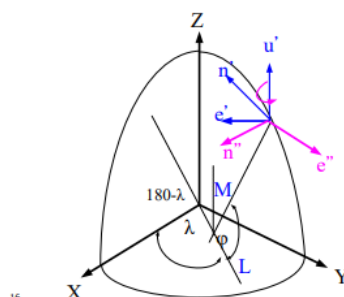
測站地平坐標與地心地固坐標轉換

$$\Delta \bar{X} = R_3(180^\circ - \lambda) R_2(90^\circ - \phi) S_2 \Delta x_e = A \Delta x_e$$

$$A = \begin{bmatrix} -\sin\phi \cdot \cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\phi \cdot \cos\lambda \\ -\sin\phi \cdot \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\phi \cdot \sin\lambda \\ \cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_e = A^{-1} \Delta \bar{X} = A^T \Delta \bar{X}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \cdot \cos\lambda & -\sin\phi \cdot \sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi \cdot \cos\lambda & \cos\phi \cdot \sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix}$$



2. 大地緯度=24 度 20 分(北緯)，大地經度=121 度 30 分，橢球高=125m。請使用 GRS80 之橢球體參數(長半徑及扁率)，回答以下問題：

(1) 試計算 P 點之地心地固坐標 XYZ。(10 分，要書寫計算過程)

```
1  import math
2
3  ## 大地坐標系統 (φ,λ,h) 轉 地心地固坐標系統 (X,Y,Z)
4  # 已知項輸入區：大地坐標系統 (φ,λ,h)
5  lat = str(input("大地緯度 φ (度 分 秒, N+/S-) = ")).split()
6  lon = str(input("大地經度 λ (度 分 秒, E+/W-) = ")).split()
7  h = float(input("大地橢球高 h (m)= "))
8  lat = ((int(lat[0])*3600+int(lat[1])*60+int(lat[2]))/3600)*math.pi/180
9  lon = ((int(lon[0])*3600+int(lon[1])*60+int(lon[2]))/3600)*math.pi/180
10 geodetic = [lat, lon, h]
11 print("大地坐標 = ", geodetic)
12
13 # GRS80橢球體 長半徑a(m) / 扁率f / 離心率e
14 a = 6387137
15 f = 1/298.257222101
16 e = (2*f-f**2)**0.5
17
18 # 卯酉圈曲率半徑 N
19 N = a/(1-(e*math.sin(lat))**2)**0.5
20
21 # 所求：地心地固坐標系統 (X,Y,Z)
22 X = (N+h)*math.cos(lat)*math.cos(lon)
23 Y = (N+h)*math.cos(lat)*math.sin(lon)
24 Z = (N*(1-e**2)+h)*math.sin(lat)
25 geocentric = [X,Y,Z]
26 print("ANS: 地心地固坐標 = ", geocentric)
```

$$e^2 = 2f - f^2$$

$$R_{Np} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_p}}$$

$$\begin{aligned} X_p &= (R_{Np} + h_p) \cos \phi_p \cos \lambda_p \\ Y_p &= (R_{Np} + h_p) \cos \phi_p \sin \lambda_p \\ Z_p &= [R_{Np} \times (1 - e^2) + h_p] \sin \phi_p \end{aligned}$$

輸入 24 20 0 及 121 30 0 及 125

由程式得到結果，P 點之地心地固直角坐標 =

(-3042588.282430199, 4965052.821922008, 2615705.016854083)

- (2) 請說明 XYZ 坐標反算大地緯度、大地經度及橢球高的步驟並以(1)小題求得之 XYZ 坐標反算大地緯度、大地經度及橢球高。(10 分)

地心地固坐標系統換算到大地坐標無法直接換算，需疊代。

```

33 D = (X**2+Y**2)**0.5
34 lon = math.atan2(Y,X)
35
36 #疊代
37 h = 0
38 for i in range(1000):
39     lat = math.atan(Z/(D*(1-e**2)))
40     N = a/(1-(e*math.sin(lat))**2)**0.5
41     h = D/math.cos(lat)-N
42     lat = math.atan(Z*(N+h)/(D*((1-e**2)*N+h)))
43     N = a/(1-(e*math.sin(lat))**2)**0.5
44     h = D/math.cos(lat)-N
45
46 #所求：大地坐標系統 (φ,λ,h) - 弧度
47 geodetic = [lat, lon, h]
48 print("ANS: 大地坐標 (弧度) = ", geodetic)
49
50 #所求：大地坐標系統 (φ,λ,h) - 度分秒
51 lat = (lat*180/math.pi)%3600
52 lat_degree = int(lat)
53 lat_minute = int((lat-int(lat))*60)
54 lat_second = int(((lat-int(lat))*60-int((lat-int(lat))*60))*60)
55 lat = "%s°%s'%s\"" % (lat_degree, lat_minute, lat_second)
56 lon = (lon*180/math.pi)%3600
57 lon_degree = int(lon)
58 lon_minute = int((lon-int(lon))*60)
59 lon_second = int(((lon-int(lon))*60-int((lon-int(lon))*60))*60)
60 lon = "%s°%s'%s\"" % (lon_degree, lon_minute, lon_second)
61 print("          (度分秒) = [%s, %s, %s]" % (lat, lon, h))

```

$$D_p = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2}$$

$$\lambda_p = \tan^{-1} \left(\frac{Y_p}{X_p} \right)$$

$$\text{令 } h=0 \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1} \left(-\frac{Z_p}{D_p \cdot (1-e^2)} \right)$$

$$R_{Np1} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

$$h_1 = \frac{D_p}{\cos \varphi_1} - R_{Np1}$$

$$\text{令 } h=h_1 \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{Z_p (R_{Np1} + h_1)}{D_p \cdot [(1-e^2) R_{Np1} + h_1]} \right\}$$

$$R_{Np2} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_2}}$$

$$h_2 = \frac{D_p}{\cos \varphi_2} - R_{Np2}$$

repeat
疊代

用第一小題的解進行反算

由執行程式的結果，得大地緯度、大地經度及橢球高，即大地坐標 (弧度)

= (0.42469678459564153, 2.1205750411731104, 124.9998381594196)

大地精度 = 24°19'59"

大地緯度 = 121°30'0"

橢球高=124.9998381594196

3. 請說明目前國家坐標系統內容為何(參考橢球體、投影方式)? 又任何點位的坐標有幾種呈現方式?(10 分)

中華民國目前使用 TWD: GRS80 橢球體, 投影方式為橫麥卡托二度分帶投影。

點位呈現有三種坐標系統, 每種系統可分空間直角坐標及球面坐標。因此共六種。

協議地球坐標系統 CTS - 空間直角坐標 (x, y, z)

協議地球坐標系統 CTS - 空間等價球面坐標系: (赤經 α , 赤緯 δ , 空間距離 R)

協議天球坐標系統 CIS - 空間直角坐標 (x, y, z)

協議天球坐標系統 CIS - 空間等價球面(大地)坐標系 (φ, λ, h)

測站地平坐標系 - 空間直角坐標 (x, y, z)

測站地平坐標系 - 空間等價球面座標 (方位角 A , 垂直角 β , 空間距離 r)

而在台灣使用 TWD97, 因此任一點位會有以下三種坐標:

卡氏直角坐標 (X_{97}, Y_{97}, Z_{97})

大地坐標 $(\varphi_{97}, \lambda_{97}, h_{97})$

二度 TM 坐標 (N_{97}, E_{97}, h_{97})

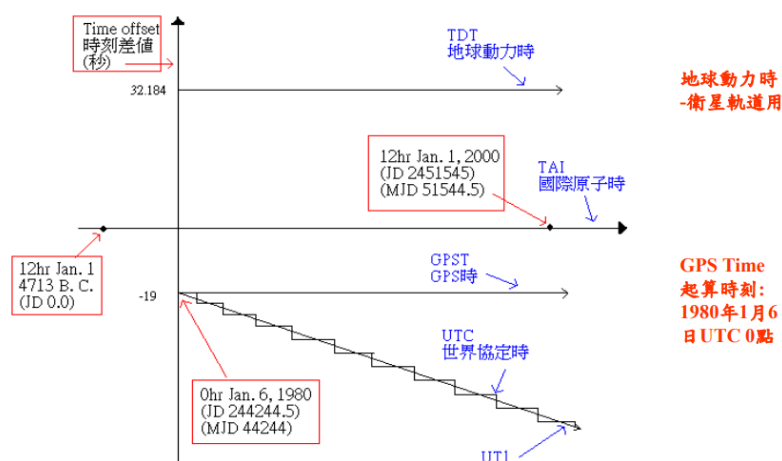
4. 臺灣地區的投影坐標是採用何種投影方式? 內容為何? 採用此種方式有何優勢?(10 分)

台灣地區目前採用橫麥卡托投影經差二度分帶: 台灣、小琉球、綠島、蘭嶼及龜山島等地區之中央子午線訂於東經 121 度; 澎湖金門馬祖等地居訂於東經 119 度。投影座標向西平移 25 萬公尺, 中央子午線尺度為 0.9999。因為台灣狹長, 採此方式東西走廊變形量小精度高。

5. 假設 A 點位的大地坐標為：經度=121 度 35 分、緯度=25 度 45 分，橢球高=100m，試求臺灣地區 2022 年 2 月 5 日早上 08 時 00 分 00 秒時有哪些 GPS 衛星在 A 點位的地平線上？並求各顆衛星與交大之距離、方位角、高度角？

(參考橢球體使用 WGS84)(星曆請使用最終精密星曆，並注意時區問題)

6. 說明解釋 GPS 時 (GPST)、TDT、UTC 及 TAI 之間轉換？何謂潤秒？(10 分)



- $TAI = GPST + 19s$
- $UTC = TAI - \text{Leap Seconds}$
- $GPST = UTC + \text{Leap Seconds} + 19s$
- $|(UTC - \text{Leap Seconds}) - UT1| < 0.9s$

潤秒=TAI-UTC，是偶爾運用於協調世界時（UTC）的調整，經由增加或減少一秒以消彌精確的時間（使用原子鐘測量）和不精確的觀測太陽時（UT1）之間的差異。這會由於地球自轉的不規則和長期項的地球自轉減慢而有所不同。UTC 標準時間廣泛用於國際計時，並在大多數國家用作民用時的參考，它使用精確的原子時，因此，除非根據需要將其重置為 UT1，否則將超前運行在觀測到的太陽時。

7. 在某一時刻，一 GPS 衛星大地坐標為：經度=150 度 40 分、緯度=45 度 30 分，橢球高=20072000m；一觀測者所在位置之大地坐標為：經度=121 度 35 分、緯度=25 度 45 分，橢球高=100m。請使用參考橢球體 GRS80，試求：

(1) 觀測者與 GPS 衛星之距離。(10 分，要書寫計算過程)

先將 GPS 大地坐標轉換成地心地固直角系統，同第二題，因此用同一個程式。

```

1  import math
2
3  ## 大地坐標系統 (φ,λ,h) 轉 地心地固坐標系統 (X,Y,Z)
4  # 已知項輸入區：大地坐標系統 (φ,λ,h)
5  lat = str(input("大地緯度 φ (度 分 秒. N+/S- ) = ")).split()
6  lon = str(input("大地經度 λ (度 分 秒. E+/W- ) = ")).split()
7  h = float(input("大地橢球高 h (m)= "))
8  lat = ((int(lat[0])*3600+int(lat[1])*60+int(lat[2]))/3600)*math.pi/180
9  lon = ((int(lon[0])*3600+int(lon[1])*60+int(lon[2]))/3600)*math.pi/180
10 geodetic = [lat, lon, h]
11 print("大地坐標 = ", geodetic)
12
13 # GRS80橢球體 長半徑a(m) / 扁率f / 離心率e
14 a = 6387137
15 f = 1/298.257222101
16 e = (2*f-f**2)**0.5
17
18 # 卯酉圈曲率半徑 N
19 N = a/(1-(e*math.sin(lat))**2)**0.5
20
21 # 所求：地心地固坐標系統 (X,Y,Z)
22 X = (N+h)*math.cos(lat)*math.cos(lon)
23 Y = (N+h)*math.cos(lat)*math.sin(lon)
24 Z = (N*(1-e**2)+h)*math.sin(lat)
25 geocentric = [X,Y,Z]
26 print("ANS: 地心地固坐標 = ", geocentric)

```

$$e^2 = 2f - f^2$$

$$R_{Np} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_p}}$$

$$\begin{aligned} X_p &= (R_{Np} + h_p) \cos \phi_p \cos \lambda_p \\ Y_p &= (R_{Np} + h_p) \cos \phi_p \sin \lambda_p \\ Z_p &= [R_{Np} \times (1 - e^2) + h_p] \sin \phi_p \end{aligned}$$

得到

GPS 衛星 = [-16174300.695131818, 9088971.408236658, 18849219.387616355]

觀測者 = [-3014956.6576620713, 4903937.857038969, 2758071.8021574295]

接著計算觀測者與衛星距離 $r = 21202032.02\text{m}$

Ans = 21202032.02m

(2) GPS 衛星之高度角及方位角。(20 分，要書寫計算過程)

將上一題得到的 $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ 帶入矩陣轉換成地平坐標系統得到 $\Delta n \Delta e \Delta u$ ，在求得高度角及方位角。

$$\begin{bmatrix} \Delta n \\ \Delta e \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \cos\lambda & -\sin\phi \sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi \cos\lambda & \cos\phi \sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

$$\Delta n = S \sin z \cos Az \quad \text{--- ①}$$

$$\Delta e = S \sin z \sin Az \quad \text{--- ②}$$

$$\Delta u = S \cos z$$

$$\Rightarrow \frac{\text{②}}{\text{①}} = \tan Az = \frac{\Delta e}{\Delta n}$$

$$\begin{aligned} \text{代回①得所求} \Rightarrow \text{方位角 } Az &= 42.18741896 \\ \text{高度角 } z &= 50.71604259 \quad \# \end{aligned}$$