二阶HORN逻辑的复杂性与表达能力

冯世光

中山大学逻辑与认知研究所

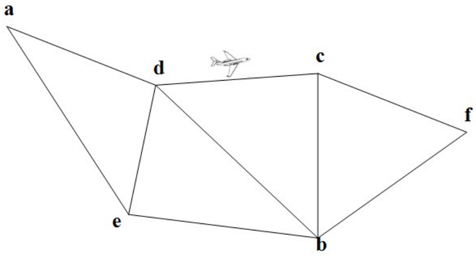
2012年6月4日

描述复杂性

描述复杂性理论是有穷模型论的一个分支，它从逻辑的角度对计算复杂性进行研究。 计算复杂性理论关心的是解决一个问题所需要的时间和空间资源，而描述复杂性则主要研究定义一个问题所需要的最小逻辑的表达能力。

例子一

一个关系数据库可以看成是一个结构。



航线数据库

每个节点表示一个城市，节点之间有线相连表示城市之间有一条直达航线。

例子一

查询1： 是否最多中转一次就可以从城市 a 到城市 b ？

例子一

查询1： 是否最多中转一次就可以从城市 a 到城市 b？

$$R(a,b) \vee \exists v(R(a,v) \wedge R(v,b))$$

例子一

查询1： 是否最多中转一次就可以从城市 a 到城市 b ？

$$R(a,b) \vee \exists v(R(a,v) \wedge R(v,b))$$

其中 $R(x,y)$ 表示从城市 x 到城市 y 有一条直达航线。

例子一

查询1： 是否最多中转一次就可以从城市 a 到城市 b ？

$$R(a,b) \vee \exists v(R(a,v) \wedge R(v,b))$$

其中 $R(x,y)$ 表示从城市 x 到城市 y 有一条直达航线。

查询2： 是否可以从城市 a 到城市 b (中转次数不限) ？

例子一

查询1：　是否最多中转一次就可以从城市 a 到城市 b ？

$$R(a,b) \vee \exists v(R(a,v) \wedge R(v,b))$$

其中 $R(x,y)$ 表示从城市 x 到城市 y 有一条直达航线。

查询2：　是否可以从城市 a 到城市 b (中转次数不限) ？

研究结果表明查询2是不能用一阶公式表达的。

例子二

3着色问题是判断一个图能不能被三种颜色染色的问题。

例子二

3着色问题是判断一个图能不能被三种颜色染色的问题。

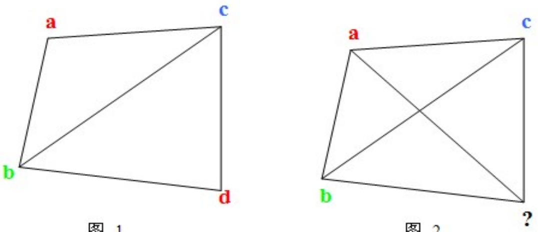


图 1　　图 2

例子二

查询： 图 G 是否能被三种颜色染色 ？

例子二

查询： 图 G 是否能被三种颜色染色？

这一查询也不能用一阶逻辑表达。即不存在一个一阶句子 ϕ，使得对任意的图 G 有， $G \models \phi$ 当且仅当 G 可以3着色。

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

- 确定传递闭包逻辑 FO(DTC)

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

- 确定传递闭包逻辑 FO(DTC)
- 传递闭包逻辑 FO(TC)

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

- 确定传递闭包逻辑 FO(DTC)
- 传递闭包逻辑 FO(TC)
- 最小固定点逻辑 FO(LFP)

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

- 确定传递闭包逻辑 FO(DTC)
- 传递闭包逻辑 FO(TC)
- 最小固定点逻辑 FO(LFP)
- 存在型二阶逻辑 ∃SO

一阶逻辑的扩充

为了增强表达问题的能力，研究者引入了新的逻辑：

- 确定传递闭包逻辑 FO(DTC)
- 传递闭包逻辑 FO(TC)
- 最小固定点逻辑 FO(LFP)
- 存在型二阶逻辑 $\exists$SO
- 二阶HORN逻辑 SO-HORN

- 一个查询判断一个结构是否具有某个性质，它实际上是一个判定问题。

逻辑与计算复杂性

- 一个查询判断一个结构是否具有某个性质，它实际上是一个判定问题。
- 如果某个逻辑公式定义了一个查询，那么我们关心这个查询的复杂性是多少。

逻辑与计算复杂性

我们可以建立从逻辑到计算复杂性类的“刻画”关系。

我们可以建立从逻辑到计算复杂性类的“刻画”关系。

例如：

我们可以建立从逻辑到计算复杂性类的“刻画”关系。

例如：

1. 对任意一个由有穷结构组成的类 K， 如果 K 的判定问题在 NP 中，那么就存在 $\exists$SO 中的一个公式 ϕ 使得 K=Mod(ϕ)。

逻辑与计算复杂性

我们可以建立从逻辑到计算复杂性类的“刻画”关系。

例如：

1. 对任意一个由有穷结构组成的类 K， 如果 K 的判定问题在 NP 中，那么就存在 $\exists$SO 中的一个公式 ϕ 使得 $K=\mathrm{Mod}(\phi)$。

2. 对于 $\exists$SO 中的每个公式 ϕ，$\mathrm{Mod}(\phi)$ 的判定问题在复杂性类 NP 中。

我们可以建立从逻辑到计算复杂性类的“刻画”关系。

例如：

1. 对任意一个由有穷结构组成的类 K， 如果 K 的判定问题在 NP 中，那么就存在 ∃SO 中的一个公式 ϕ 使得 K=Mod(ϕ)。

2. 对于 ∃SO 中的每个公式 ϕ，Mod(ϕ) 的判定问题在复杂性类 NP 中。

结论：∃SO 刻画复杂性类 NP，∃SO=NP。

刻画定理

刻画定理

- 存在型二阶逻辑（∃SO）可以在所有有穷结构上刻画NP（Fagin 1974）

刻画定理

- 存在型二阶逻辑（∃SO）可以在所有有穷结构上刻画NP（Fagin 1974）
- FO(LFP) 可以在有序结构上刻画 PTIME（Immerman and Vardi 1982）

刻画定理

- 存在型二阶逻辑（∃SO）可以在所有有穷结构上刻画NP（Fagin 1974）
- FO(LFP) 可以在有序结构上刻画 PTIME（Immerman and Vardi 1982）
- SO-HORN 可以在有序结构上刻画 PTIME（Grädel 1991）

刻画定理

- 存在型二阶逻辑（∃SO）可以在所有有穷结构上刻画NP（Fagin 1974）
- FO(LFP) 可以在有序结构上刻画 PTIME（Immerman and Vardi 1982）
- SO-HORN 可以在有序结构上刻画 PTIME（Grädel 1991）
- SO-KROM 可以在有序结构上刻画 NLOGSPACE（Grädel 1992）

存在的问题

在所有有穷结构上，

$$\text{哪个逻辑} \equiv \text{PTIME} \text{ ？}$$

存在的问题

在所有有穷结构上，

$$\text{哪个逻辑} \equiv \text{PTIME} \ ?$$

如果证明不存在这样一个逻辑，则 **P** $\neq$ **NP** !!!

存在的问题

在所有有穷结构上，

$$\text{哪个逻辑} \equiv \mathsf{PTIME}\ ?$$

如果证明不存在这样一个逻辑，则 **P** $\neq$ **NP** !!!

- Immerman[1987,1990,1997,2005]
- Grädel[1991,1992,1996,2005]
- M.Otto[1993,1996]
- A.Dawar, M.Grohe, B.Holm, B.Laubner[2009]
- A.Atserias, A.Bulatov, A.Dawar[2009]

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$$\mathsf{FO} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{FO(LFP)}$$

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

FO $\Rightarrow$ FO(LFP) $\Rightarrow$ FO(LFP,#)

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

FO $\Rightarrow$ FO(LFP) $\Rightarrow$ FO(LFP,#) $\Rightarrow$ FO(LFP)+rank

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$$\mathsf{FO} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{FO(LFP)} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{FO(LFP,\#)} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{FO(LFP)+rank} \quad\Rightarrow\quad ?$$

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$\Rightarrow$ FO(LFP) $\Rightarrow$ FO(LFP,#) $\Rightarrow$ FO(LFP)+rank $\Rightarrow$?

FO

$\Rightarrow$ SO-HORN

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$$\mathsf{FO} \begin{cases} \Rightarrow \ \mathsf{FO(LFP)} \ \Rightarrow \ \mathsf{FO(LFP,\#)} \ \Rightarrow \ \mathsf{FO(LFP)+rank} \ \Rightarrow \ ? \\ \Rightarrow \ \mathsf{SO\text{-}HORN} \ \Rightarrow \ ? \end{cases}$$

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$\Rightarrow$ FO(LFP) $\Rightarrow$ FO(LFP,#) $\Rightarrow$ FO(LFP)+rank $\Rightarrow$?

FO

$\Rightarrow$ SO-HORN $\Rightarrow$?

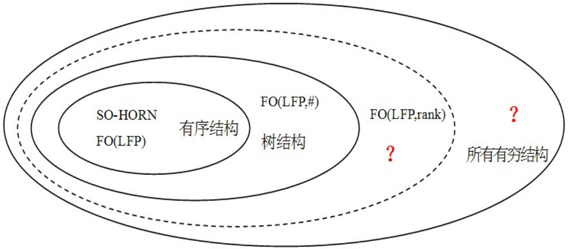
2. 研究目前几种关于PTIME的逻辑在一般结构上的表达能力。

两条研究主线

1. 通过对已有的逻辑进行扩充引入表达能力更强的逻辑。

$$\text{FO}\;\begin{array}{l}\Rightarrow\ \text{FO(LFP)}\ \Rightarrow\ \text{FO(LFP,\#)}\ \Rightarrow\ \text{FO(LFP)+rank}\ \Rightarrow\ ?\\[2ex] \Rightarrow\ \text{SO-HORN}\ \Rightarrow\ ?\end{array}$$

2. 研究目前几种关于PTIME的逻辑在一般结构上的表达能力。



本文的工作

Grädel[1992] 问题:

SO-HORN 能否刻画在 PTIME 中且在子结构下保持的问题？

本文的工作

Grädel[1992] 问题:

SO-HORN 能否刻画在 PTIME 中且在子结构下保持的问题?

- 本研究解决了该问题，证明是不能的!

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：
  - 二阶修正 HORN 逻辑 SO-HORN^r。

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：
  - 二阶修正 HORN 逻辑 SO-HORN^r。
  - 修正 DATALOG 程序 DATALOG^r。

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：
  - 二阶修正 HORN 逻辑 SO-HORN^r。
  - 修正 DATALOG 程序 DATALOG^r。
- 同时为了得到表达能力更强的逻辑，本文还引入了：

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：
  - 二阶修正 HORN 逻辑 SO-HORN^r。
  - 修正 DATALOG 程序 DATALOG^r。
- 同时为了得到表达能力更强的逻辑，本文还引入了：
  - 二阶扩展 HORN 逻辑和二阶扩展修正 HORN 逻辑。

本文的工作

- 为了解决该问题，本文引入了：
  - 二阶修正 HORN 逻辑 SO-HORN^r。
  - 修正 DATALOG 程序 DATALOG^r。
- 同时为了得到表达能力更强的逻辑，本文还引入了：
  - 二阶扩展 HORN 逻辑和二阶扩展修正 HORN 逻辑。
  - 二阶修正 KROM 逻辑和二阶扩展 KROM 逻辑。

修正 SO-HORN 逻辑

SO-HORN 是具有下列形式的二阶公式的集合

$$Q_1 R_1 \cdots Q_m R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$Q_i \in \{\forall, \exists\}$，$C_1, \ldots, C_n$ 是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。

修正 SO-HORN 逻辑

SO-HORN 是具有下列形式的二阶公式的集合

$$Q_1 R_1 \cdots Q_m R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$Q_i \in \{\forall, \exists\}$，$C_1, \ldots, C_n$ 是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。

例如：令 $\tau = \{E\}$ 是一个词汇表。

SO-HORN 是具有下列形式的二阶公式的集合

$$Q_1 R_1 \cdots Q_m R_m \forall \bar{x} (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$Q_i \in \{\forall, \exists\}$，$C_1, \ldots, C_n$ 是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。

例如：令 $\tau = \{E\}$ 是一个词汇表。

$$\exists R \forall x \forall y \forall z \begin{pmatrix} (Exy \wedge Ryz \to Rxz) \wedge \\ (\neg Exy \wedge Ryz \to \bot) \end{pmatrix}$$

修正 SO-HORN 逻辑

修正 SO-HORN 逻辑，记为 SO-HORN^r。

修正 SO-HORN 逻辑，记为 SO-HORN^r。

例如：

$$\exists R \forall x \forall y \forall z \left(\begin{array}{l} (Exy \wedge Ryz \rightarrow Rxz) \wedge \\ (\neg Exy \wedge \forall y\, Ryz \rightarrow \perp) \end{array} \right)$$

这个公式是一个 SO-HORN^r 公式。

例子

给定一个四元组$\langle A, S, f, \mathsf{a}\rangle$，其中$A$是一个集合，$S$是$A$的一个子集，$f$是$A$上的一个二元函数，a是$A$中的某个元素。

例子

给定一个四元组$\langle A, S, f, \mathsf{a}\rangle$，其中$A$是一个集合，$S$是$A$的一个子集，$f$是$A$上的一个二元函数，$\mathsf{a}$是$A$中的某个元素。

GEN 是下面这个集合的判定问题

$$\{\langle A, S, f, \mathsf{a}\rangle \mid \mathsf{a}\text{在由}S\text{产生并且在}f\text{下封闭的最小的集合里面}\}$$

例子

给定一个四元组$\langle A, S, f, \mathsf{a}\rangle$，其中$A$是一个集合，$S$是$A$的一个子集，$f$是$A$上的一个二元函数，$\mathsf{a}$是$A$中的某个元素。
GEN 是下面这个集合的判定问题

$$\{\langle A, S, f, \mathsf{a}\rangle \mid \mathsf{a}\text{在由}S\text{产生并且在}f\text{下封闭的最小的集合里面}\}$$

这是一个 PTIME 完全问题。我们可以用一个 SO-HORN^r 的句子来表达此问题的补。

令词汇表$\tau = \{\mathbf{a}, S, F\}$，其中$\mathbf{a}$是一个常项符，$S$是一个一元关系符，$F$是一个三元关系符。 下面的 SO-HORN^{r}公式

令词汇表$\tau = \{\mathbf{a}, S, F\}$，其中**a**是一个常项符，$S$是一个一元关系符，$F$是一个三元关系符。下面的 SO-HORN^{r}公式

$$\exists R_1 \exists R_2 \forall x \forall y \forall z \forall u \left(\begin{array}{l} (\neg Fxyz \to R_1xyz)\wedge \\ (\forall z R_1xyz \to \bot)\wedge \\ (Fxyz \wedge Fxyu \to z = u)\wedge \\ (Sx \to R_2x)\wedge \\ (R_2x \wedge R_2y \wedge Fxyz \to R_2z)\wedge \\ (R_2\mathbf{a} \to \bot) \end{array} \right)$$

定义了 GEN 问题的补，它也是一个 PTIME 完全的问题。

修正 SO-HORN 逻辑

关于 SO-HORN^r 我们证明了下面的结论：

修正 SO-HORN 逻辑

关于 SO-HORN^r 我们证明了下面的结论：

- SO-HORN^r 可以在有序结构上刻画 PTIME。

关于 SO-HORN^r 我们证明了下面的结论：

- SO-HORN^r 可以在有序结构上刻画 PTIME。
- SO-HORN^r 与它的存在型部分 (SO$\exists$)-HORN^r 等价。

修正 DATALOG 程序

一个 DATALOG 程序Π是一些具有如下形式的规则的集合

$$\beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_l$$

一个 DATALOG 程序Π是一些具有如下形式的规则的集合

$$\beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_l$$

其中

- β是一个原子公式，它构成这一规则的头部。

修正 DATALOG 程序

一个 DATALOG 程序Π是一些具有如下形式的规则的集合

$$\beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_l$$

其中

- β是一个原子公式，它构成这一规则的头部。
- 每个 α_i 是一个原子公式或负原子公式， $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ 构成规则的主体。

一个 DATALOG 程序Π是一些具有如下形式的规则的集合

$$\beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_l$$

其中

- β是一个原子公式，它构成这一规则的头部。
- 每个 α_i 是一个原子公式或负原子公式， $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ 构成规则的主体。

我们称在规则头部出现的关系符为目的关系符，所有其他的符号为外延符号。

修正 DATALOG 程序

下面是一个 DATALOG 程序：

$$\begin{aligned} \Pi: \quad Rxy &\leftarrow Exy \\ Rxy &\leftarrow Rxz, Ezy \end{aligned}$$

修正 DATALOG 程序

下面是一个 DATALOG 程序：

$$\begin{aligned} \Pi: \quad Rxy &\leftarrow Exy \\ Rxy &\leftarrow Rxz, Ezy \end{aligned}$$

修正 DATALOG 程序，记为 DATALOG^r。

修正 DATALOG 程序

下面是一个 DATALOG 程序：

$$\begin{aligned} \Pi: \quad Rxy &\leftarrow Exy \\ Rxy &\leftarrow Rxz, Ezy \end{aligned}$$

修正 DATALOG 程序，记为 DATALOG^r。

例如

$$\begin{aligned} \Pi': \quad Rxy &\leftarrow Exy \\ Rxy &\leftarrow \forall z Rxz, Ezy \end{aligned}$$

是一个修正 DATALOG 程序。

修正 DATALOG 程序

关于 DATALOG^r 程序和 SO-HORN^r 我们证明了：

关于 DATALOG^r 程序和 SO-HORN^r 我们证明了：

- 每个一阶公式都等价于一个 DATALOG^r 公式。

修正 DATALOG 程序

关于 DATALOG^r 程序和 SO-HORN^r 我们证明了：

- 每个一阶公式都等价于一个 DATALOG^r 公式。
- 在所有有穷结构上，SO-HORN^r $\equiv$DATALOG^r $\equiv$FO(LFP)。

修正 DATALOG 程序的应用

使用 DATALOG^r 程序我们证明了：

使用 DATALOG^r 程序我们证明了：

- 存在一个在 PTIME 中并且在子结构下保持的问题不能被 SO-HORN^r 定义。

修正 DATALOG 程序的应用

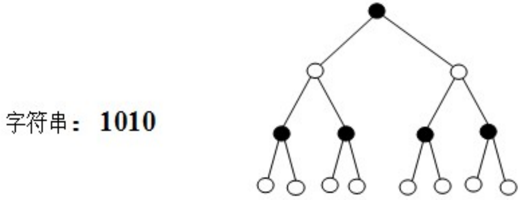
使用 DATALOG^r 程序我们证明了：

- 存在一个在 PTIME 中并且在子结构下保持的问题不能被 SO-HORN^r 定义。

由于 SO-HORN 是SO-HORN^r 的一个子逻辑，这一结论对 Grädel 的问题做出了否定回答。

修正 DATALOG 程序的应用

一个完美二叉树是所有的叶节点都在同一层的满二叉树。我们可以把一个字符串编码到一个完美二叉树中。



这个树编码的信息量没有增加，但它的规模却有指数级的增大。

修正 DATALOG 程序的应用

技术要点：

技术要点：

- 将一个结构编码到完美二叉树中。

技术要点：

- 将一个结构编码到完美二叉树中。
- 对每个定义在完美二叉树上的 DATALOG^r 公式构造等价的定义在序结构上的 DATALOG^r 公式。

修正 DATALOG 程序的应用

技术要点：

- 将一个结构编码到完美二叉树中。
- 对每个定义在完美二叉树上的 DATALOG^r 公式构造等价的定义在序结构上的 DATALOG^r 公式。
- 将 EXPTIME 中的问题归约成在 PTIME 中并且在子结构下保持的问题。

修正 DATALOG 程序的应用

技术要点：

- 将一个结构编码到完美二叉树中。
- 对每个定义在完美二叉树上的 DATALOG^r 公式构造等价的定义在序结构上的 DATALOG^r 公式。
- 将 EXPTIME 中的问题归约成在 PTIME 中并且在子结构下保持的问题。

如果每个在 PTIME 中并且在子结构保持的问题都可以被 SO-HORN^r 定义，那么就会有 EXPTIME=PTIME !!!

扩展二阶 HORN 逻辑

SO-EHORN 是下面一些二阶公式的集合

$$\forall P_1 \exists R_1 \cdots \forall P_m \exists R_m \forall \bar{x}(C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$C_1, \ldots, C_n$是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。

SO-EHORN 是下面一些二阶公式的集合

$$\forall P_1 \exists R_1 \cdots \forall P_m \exists R_m \forall \bar{x}(C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$C_1, \ldots, C_n$是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。
例如：令 $\tau = \{E\}$ 是一个词汇表。

SO-EHORN 是下面一些二阶公式的集合

$$\forall P_1 \exists R_1 \cdots \forall P_m \exists R_m \forall \bar{x}(C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$$

其中$C_1, \ldots, C_n$是相对于 $R_1, \ldots, R_m$ 的 HORN 子句。
例如：令 $\tau = \{E\}$ 是一个词汇表。

$$\forall P \exists R \forall x \forall y \forall z \begin{pmatrix} (Exy \to Rxy) \wedge \\ (Exy \wedge Ryz \wedge \neg Pz \to Rxz) \end{pmatrix}$$

是一个 SO-EHORN 公式。

扩展二阶 HORN 逻辑

二阶扩展修正 HORN 逻辑，记为 SO-EHORN^r。

扩展二阶 HORN 逻辑

二阶扩展修正 HORN 逻辑，记为 SO-EHORN^r。

例如：

$$\forall P \exists R \forall x \forall y \forall z \left(\begin{array}{l} (Exy \to Rxy) \wedge \\ (Exy \wedge \forall y\, Ryz \wedge \neg Pz \to Rxz) \end{array} \right)$$

是一个 SO-EHORN^r 公式。

例子

集合

$$\{\phi|\phi\text{是一个不可满足的命题CNF公式}\}$$

的判定问题是 co-NP 完全的。

例子

集合

$$\{\phi|\phi\text{是一个不可满足的命题CNF公式}\}$$

的判定问题是 co-NP 完全的。

令词汇表$\tau = \{CLA, VAR, P, N\}$，其中 CLA 和 VAR 是两个一元关系符，P 和 N 是两个二元关系符。

例子

集合

$$\{\phi|\phi\text{是一个不可满足的命题CNF公式}\}$$

的判定问题是 co-NP 完全的。

令词汇表$\tau = \{CLA, VAR, P, N\}$，其中 CLA 和 VAR 是两个一元关系符，P 和 N 是两个二元关系符。

对每个CNF 公式 ϕ，我们可以用一个 τ-结构

$$\mathscr{A}_\phi = \langle A, CLA, VAR, P, N \rangle$$

来对其进行编码。

例如，下面的 CNF 公式

$$\phi = ((p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1))$$

例如，下面的 CNF 公式

$$\phi = ((p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1))$$

可以被编码成

$$\mathscr{A}_\phi = \langle \{1,2,3,4\}, CLA, VAR, P, N \rangle ,$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad & CLA = \{1,2,3,4\} \\ & VAR = \{1,2,3\} \\ & P = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\} \\ & N = \{(2,3),(4,1)\}\text{。} \end{aligned}$$

考虑下面的 SO-EHORN^r 的公式：

$$\Phi = \forall X \exists Y \forall x \forall y \left(\begin{array}{ll} & (\forall z Yz \to \bot) \\ \wedge & (\neg CLAx \to Yx) \\ \wedge & (CLAx \wedge VARy \wedge Xy \wedge Pxy \to Yx) \\ \wedge & (CLAx \wedge VARy \wedge \neg Xy \wedge Nxy \to Yx) \end{array} \right)$$

考虑下面的 SO-EHORN^r 的公式：

$$\Phi = \forall X \exists Y \forall x \forall y \left(\begin{array}{ll} & (\forall z Yz \to \bot) \\ \wedge & (\neg CLAx \to Yx) \\ \wedge & (CLAx \wedge VARy \wedge Xy \wedge Pxy \to Yx) \\ \wedge & (CLAx \wedge VARy \wedge \neg Xy \wedge Nxy \to Yx) \end{array} \right)$$

容易看出对所有的CNF公式ϕ，$\mathscr{A}_\phi \models \Phi$当且仅当$\phi$不可满足。

关于 SO-EHORN^r 和 SO-EHORN 我们证明了下面的结论：

关于 SO-EHORN^r 和 SO-EHORN 我们证明了下面的结论：

- 在有序结构上，SO-EHORN$\equiv \Pi^1_2$-EHORN，它们都能刻画 co-NP。

关于 SO-EHORN^r 和 SO-EHORN 我们证明了下面的结论：

- 在有序结构上，SO-EHORN$\equiv \Pi^1_2$-EHORN，它们都能刻画 co-NP。
- 在所有有穷结构上，SO-EHORN$^r \equiv \Pi^1_2$-EHORN^r，它们也都能刻画 co-NP。

修正 KROM 逻辑与扩展修正 KROM 逻辑

我们还提出了修正 SO-KROM 逻辑（SO-KROM^r），扩展 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM）和扩展修正 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM^r），并证明了以下一些结论：

修正 KROM 逻辑与扩展修正 KROM 逻辑

我们还提出了修正 SO-KROM 逻辑（SO-KROM^r），扩展 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM）和扩展修正 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM^r），并证明了以下一些结论：

- 在有序结构上，(SO$\exists$)-KROM^r 能够刻画 NLOGSPACE。

修正 KROM 逻辑与扩展修正 KROM 逻辑

我们还提出了修正 SO-KROM 逻辑（SO-KROM^r），扩展 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM）和扩展修正 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM^r），并证明了以下一些结论：

- 在有序结构上，(SO∃)-KROM^r 能够刻画 NLOGSPACE。
- 在有序结构上， SO-EKROM 和 Π^1_2-EKROM 等价，它们都能够刻画 co-NP。

修正 KROM 逻辑与扩展修正 KROM 逻辑

我们还提出了修正 SO-KROM 逻辑（SO-KROM^r），扩展 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM）和扩展修正 SO-KROM 逻辑（SO-EKROM^r），并证明了以下一些结论：

- 在有序结构上，(SO$\exists$)-KROM^r 能够刻画 NLOGSPACE。
- 在有序结构上，SO-EKROM 和 Π^1_2-EKROM 等价，它们都能够刻画 co-NP。
- 在所有结构上，Π^1_2-KROM^r 和 Π^1_2-EKROM^r 等价，它们也都能够刻画 co-NP。

在所有结构上本文中几种逻辑表达能力之间的关系

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \Pi^1_1 \\
 & & \mathrm{DATALOG}^r & & ||| \\
 & & ||| & & \Pi^1_2\text{-}\mathrm{EHORN}^r \\
 & & \text{SO-HORN}^r & & ||| \\
\text{SO-HORN} \prec \text{SO-HORN}^* & \prec & ||| & \preceq & \text{SO-EHORN}^r \\
 & & \text{SO-HORN}^{*r} & & ||| \\
 & & ||| & & \Pi^1_2\text{-}\mathrm{KROM}^r \\
 & & \mathrm{FO(LFP)} & & ||| \\
 & & & & \Pi^1_2\text{-}\mathrm{EKROM}^r
\end{array}
$$

有序结构上HORN逻辑和KROM逻辑之间的关系

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \Pi^1_1 \\
 & & & & ||| \\
\text{SO-KROM} & & \text{SO-HORN} & & \Pi^1_2\text{-EHORN} \\
||| & & ||| & & ||| \\
\Sigma^1_1\text{-KROM}^r & \preceq & \text{SO-HORN}^r & \preceq & \text{SO-EHORN} \\
||| & & ||| & & ||| \\
\text{FO(TC)} & & \text{FO(LFP)} & & \Pi^1_2\text{-EKROM} \\
 & & & & ||| \\
 & & & & \text{SO-EKROM}
\end{array}
$$

本文证明的主要刻画结果

	有序结构	所有结构
SO-HORN^r	PTIME	$\times$
DATALOG^r	PTIME	$\times$
SO-EHORN	co-NP	$\times$
Π^1_2-EHORN	co-NP	$\times$
SO-EHORN^r		co-NP
Π^1_2-EHORN^r		co-NP
Σ^1_1-KROM^r	NLOGSPACE	$\times$
Π^1_2-KROM^r		co-NP
SO-EKROM	co-NP	$\times$
Π^1_2-EKROM	co-NP	$\times$
Π^1_2-EKROM^r		co-NP

将来的工作

- 对 SO-HORN^r 逻辑进行扩充，添加能够表达矩阵的秩的 rank 算子，并对新逻辑的复杂性和表达能力进行研究。
- 研究是否每个可以被 FO(LFP) 表达并且在子结构下保持的问题都可以被 SO-HORN 表达以及是否每个在子结构下保持的一阶公式都等价于一个 SO-HORN 公式。
- 对整个 SO-KROM^r 和 SO-EKROM^r 在所有有穷结构上的复杂性和表达能力进行研究。

谢谢!