TP: Introduction à la simulation de phénomènes aléatoires

Le but de ce TP est de présenter les principes de la simulation en probabilité, et de se familiariser avec les outils de R Studio correspondants.

1 Implémentation des fonctions de simulations

Exercice 1

En utilisant la fonction `runif` qui permet de donner des nombres choisis au hasard entre 0 et 1, déterminer les fonctions suivantes:

1. une fonction `bern` qui simule N valeurs 0 ou 1 d'une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. une fonction `bin` qui simule N valeurs 0, 1, ... ou n d'une loi binomiale de paramètres n et p.
3. une fonction `geom` qui simule N valeurs issues d'une loi géométrique de paramètre p.
4. (a) Montrer que si $U \sim U[0,1]$, alors la v.a $X = \dfrac{-ln(U)}{\lambda}$ suit la loi $Exp(\lambda)$
   (b) Déterminer une fonction `exp1`, qui génère N valeurs issue d'une loi exponentielle $Exp(\lambda)$.
   (c) Simuler 5000 valeurs d'une loi exponentielle de paramètre 2, tracer l'histogramme correspondant. Superposer par-dessus la densité de la loi exponentielle de paramètre 2.

2 Méthode de Monte-Carlo appliquée au calcul d'une valeur approchée de π.

Exercice 2

On considère un carré $ABCD$ de côté une unité et un quart de disque intérieur au carré de centre A et de rayon 1
On choisit aléatoirement un point à l'intérieur du carré.

1. Déterminer la probabilité que ce point soit dans le quart de disque.
2. A l'aide, de simulations avec R Studio, déterminer une valeur approchée de π. On effectuera 10^5 simulations.
3. Une fois que vous aurez vu en cours le théorème central limite, vous répondrez à cette question: Déterminer le nombre de lancers qu'il faut effectuer afin d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-2} près avec une probabilité de $0,95$.
   Effectuer les simulations à l'aide de R Studio qui permettent d'obtenir cette valeur approchée de π.

3 Méthode de Monte Carlo appliquée au calcul de probabilité

Ici, on se demande s'il existe une façon de calculer de manière approchée une probabilité, sans avoir à faire de calculs.

Exercice 3

1. Soit U et V 2 variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles respectives $Exp(\lambda)$ et $Exp(\mu)$. Calculer de façon théorique la probabilité $p = \mathbb{P}(U \leq 2V)$ (la densité du couple de V.A. indépendantes est le produit des densités). Dans la suite, on prend $\lambda = \frac{1}{10}$ et $\mu = \frac{1}{6}$

2. Imaginons que l'on soit incapable de calculer l' intégrale précédente. On cherche donc une méthode de simulation pour retrouver ce résultat.

   (a) Proposer une méthode.

   (b) Pour mettre en oeuvre cette méthode, on a donc besoin de séries de n nombres avec la fonction exp1. Donner des approximations de p pour différentes valeurs de n et comparer avec la valeur exactes.

4 Comment déterminer la loi d'un phénomène ?

Exercice 4 1. Robert décide de chronométrer son temps de parcours entre son domicile et son lieu de travail durant 20 jours, il obtient le relevé suivant en secondes :

478	482	489	495	497	499	500	502	503	504
505	506	508	509	510	512	513	520	527	548

A partir de ces données, Robert aimerait savoir, à quelle heure doit-il partir de chez lui, sachant qu'il commence de travailler à 8h, pour ne pas arriver en retard avec une probabilité de $0,99$.

(a) Tracer un histogramme des données observées.

(b) Quelle loi a une densité ressemblant à cet histogramme ? C'est la loi qui va vous permettre d'aider Robert.

(c) Estimer le ou les paramètres de cette loi.

(d) Tracer sur la même figure l'histogramme et la densité correspondante.

(e) Résoudre l'exercice, en utilisant les commandes de R Studio.

2. Robert souhaite maintenant faire appel à vos compétences afin de fixer son heure de réveil :

   Durant les 20 jours suivants, il note le temps qui sépare son levé de son départ, il constate qu'il a un temps incompressible de 30 mn, auquel il faut ajouter les temps relevé en mn ci-dessous dus à certains aléas (par exemple, sa tartine pleine de confiture qui se renverse sur sa belle chemise).

N° de l'observation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
temps mesuré	2.13	0.63	0.70	8.14	0.12	3.75	0.20	0.64	0.22	2.36
N° de l'observation	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
temps mesuré	0.10	2.14	4.59	8.54	0.36	3.14	15.07	1.33	1.60	0.22

   Répondre aux mêmes questions que précédemment.
   Ensuite déterminer le temps t_0 tel que la probabilité que le temps qui sépare son lever de son départ soit inférieur à t_0 soit égal à $0,95$

Dans la pratique, on ne donne pas une seule valeur $\tilde{p}$ pour approcher p, mais tout un intervalle de valeurs $[\tilde{p} - a, \tilde{p} + a]$ dont on est sur à α % qu'il contient p (Ce sont des intervalles de confiance qui seront vus en fin de cours).
Il est d'autant plus important de calculer un tel intervalle qu'en pratique, on ne peut pas toujours augmenter le nombre d'observations n à volonté.

Ce problème (trouver la loi que suit un phénomène aléatoire X) est évidemment crucial dans la pratique, car si on se trompe à ce moment-là, tous les calculs savants théoriques qui peuvent suivre seront inutiles !
Il existe donc d'autre moyens, plus quantitatifs que la simple comparaison histogramme-densité, permettant de déterminer avec peu d'erreur la loi de X. Ces techniques sont appelées tests statistiques, le plus célèbre d'entre eux est le test du χ^2 (chi-2).