Signaux déterministes à temps continu

Exercice 1 : Signal à énergie finie

Montrer que le signal x(t) défini par $x(t) = e^{-at}.u(t)$ avec $a>0$ et u(t) fonction Heaviside (échelon) est à énergie finie.

$$u(t) = \begin{cases} 1 , \ \forall\, t \geq 0 \\ 0 , \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Exercice 2 : Transformation de Fourier

Déterminer la transformée de Fourier des signaux suivants :

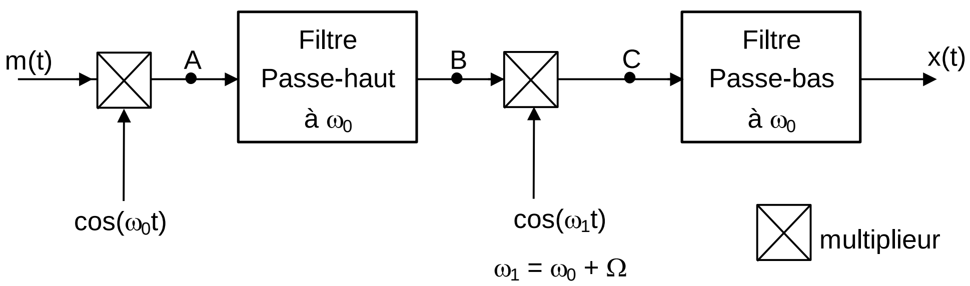
1. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t).\mathrm{rect}_T(t)$ avec $\mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 , \ \forall\, |t| \leq T/2 \\ 0 , \text{ ailleurs} \end{cases}$

2. $y(t) = \mathrm{tri}_T(t)$ avec $\mathrm{tri}_T(t) = \begin{cases} t+T , \ \forall \ -T \leq t \leq 0 \\ -t+T , \ \forall \ 0 \leq t \leq T \\ 0 , \text{ ailleurs} \end{cases}$

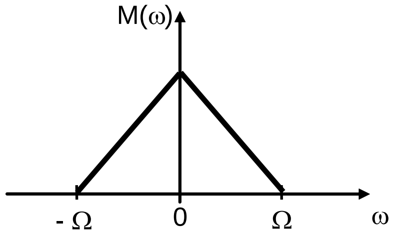
3. $z(t) = t.e^{-at}.u(t)$ avec $a > 0$ et u(t) fonction échelon

Exercice 3

Pour assurer le secret des transmissions, il est possible de traiter le signal dans un système (parfois appelé brouilleur) représenté ci-dessous.



La figure suivante représente le spectre d'un signal m(t).



Analyser le système et dessiner le spectre du signal de sortie (hypothèse : $\omega_0 >> \Omega$).

Le raisonnement fera apparaître le spectre des signaux en A, B, C et celui obtenu en sortie. Conclusion. Quels sont les opérations permettant de retrouver m(t) à partir de x(t) ?

Exercice 4 : Traitement du signal et mathématiques

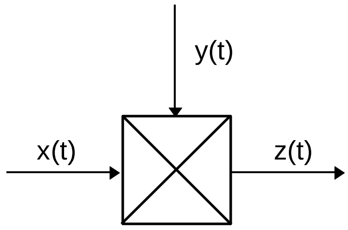
1. Déterminer la fonction x(t) dont la transformée de Fourier X(f) vaut 1 dans la bande [-B ; B] et zéro ailleurs.

2. En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

Exercice 5 : Modulation d'amplitude

Soit un modulateur d'amplitude d'entrée x(t) et de sortie z(t) = x(t).y(t).



1. Montrer que TF[z(t)] = Z(f) = X(f - f_m) pour y(t) = $e^{j\omega_m t}$, avec $\omega_m = 2\pi f_m$.

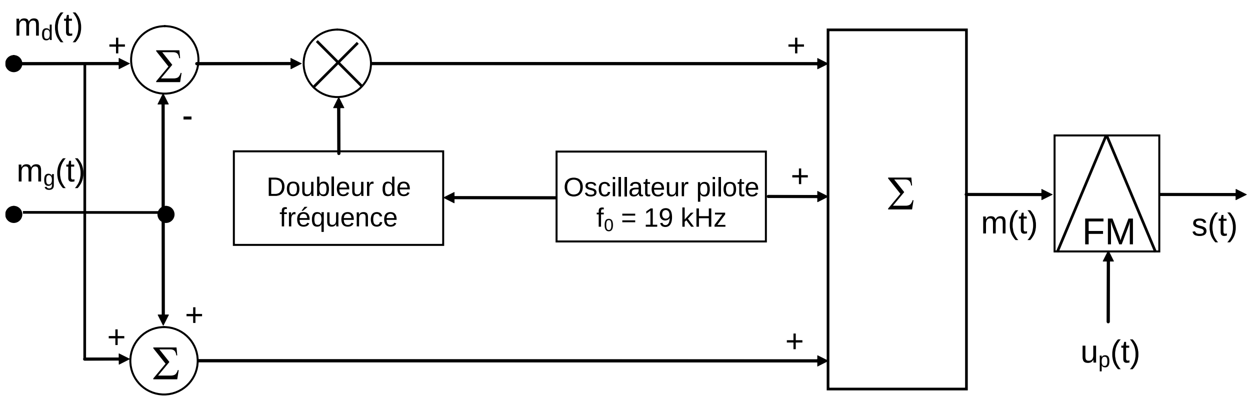
2. Montrer qu'un démodulateur peut être un multiplieur par $e^{-j\omega_m t}$.

3. On module maintenant x(t) par un cosinus : z(t) = x(t).cos(ω_mt).

Montrer qu'une démodulation peut consister en un multiplieur par cos(ω_mt) suivi d'un filtre passe-bas.

Exercice 6 : Modulateur-Démodulateur stéréophonique FM

1. On considère le modulateur FM stéréophonique schématisé sur la figure suivante :



où :

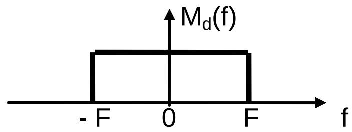
* $m_d(t)$ et $m_g(t)$ représentent respectivement les voies de droite et de gauche du signal stéréophonique, de largeur de bande limitée à F = 15 kHz et de spectre $M_d(f)$ et $M_g(f)$;

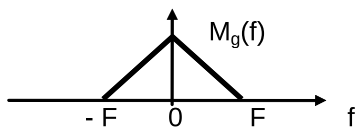
* Σ est l'opérateur somme algébrique de signaux analogiques ;

* X est l'opérateur multiplication de signaux analogiques.

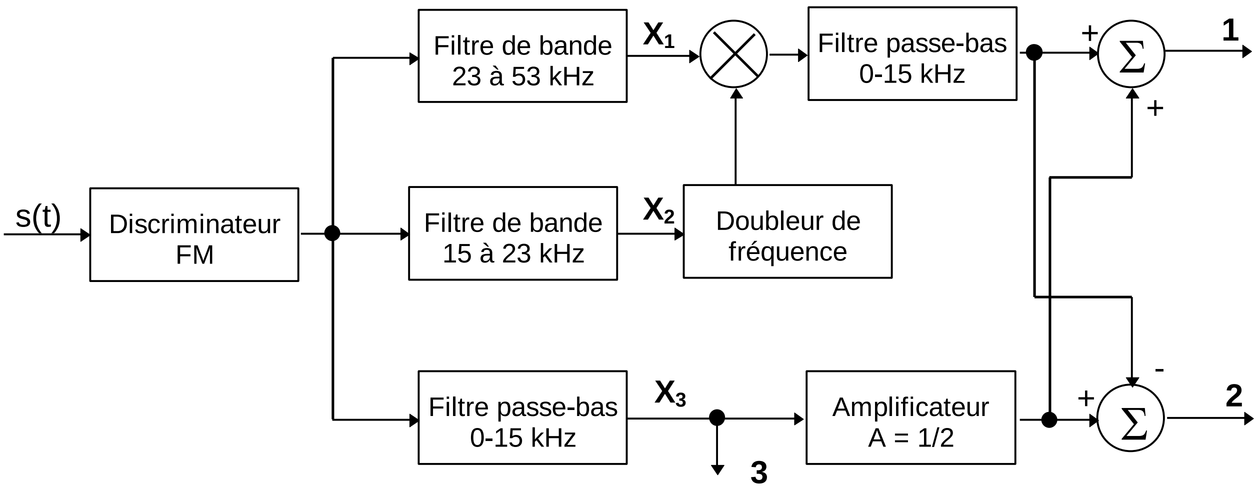
L'oscillateur pilote fournissant un signal x(t) = cos(2πf_0t) où f_0 = 19 kHz, déterminer le spectre M(f) du signal modulant m(t) appliquer au modulateur FM.

Représenter graphiquement M(f) en adoptant les représentations schématiques suivantes :





2. On considère le démodulateur FM stéréophonique schématisé sur la figure suivante :



Nous n'étudions pas ici la modulation de fréquence. Aussi, nous admettons que l'opération {modulation + transmission + démodulation} est une opération unité, c'est-à-dire que l'on retrouve le signal m(t) en sortie du discriminateur FM.

Quels sont les spectres des signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ observés en sortie des trois filtres dont les bandes passantes, dans le domaine des fréquences positives, sont précisées sur le schéma ?

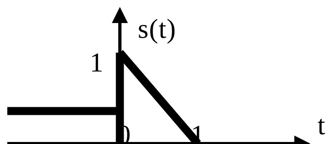
Déterminer les expressions des signaux observés aux sorties notées 1, 2 et 3 sur le schéma du démodulateur.

Quel est l'intérêt de la sortie 3 ?

<u>Exercice 7</u> : Calculer un produit de convolution

7.1 Représentation des signaux

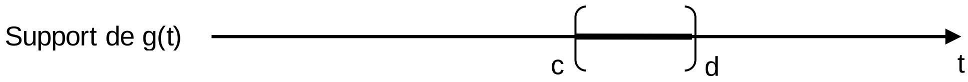
Soit le signal s(t) représenté sur la figure suivante :



a. Représenter l'allure des signaux suivants : $s(-t)$, $s(t-t_0)$, $s(t+t_0)$, $s(-t+t_0)$, $s(-t-t_0)$, $s(2t)$, $s(2t-t_0)$ avec $t_0>0$
b. Soit le signal $v(t)=s(t-t_0)$, comment s'exprime $v(-t)$ en fonction de s(t).

7.2 Représentation du produit de convolution

Soient les deux signaux f(t) et g(t) dont les supports sont représentés sur la figure suivante :

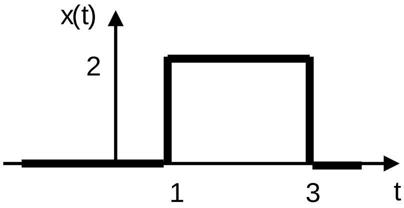


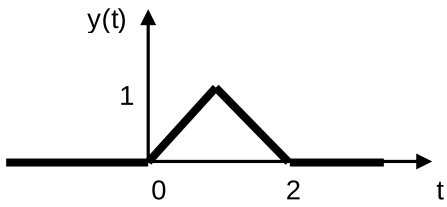
a. Rappeler les expressions sous forme intégrale du produit de convolution $f(t)*g(t)$ et de la fonction d'intercorrélation $f(t)*g^*(-t)$

b. Déterminer et représenter le support sur τ de $g(t-\tau)$ et $g(\tau-t)$

7.3 Calcul d'un produit de convolution

Soient les signaux x(t) et y(t) suivant :





a. Déterminer les expressions analytiques de x(t) et y(t)

b. Calculer le produit de convolution : $z(t) = x(t) * y(t)$

<u>Exercice 8</u> : Décrire et analyser un signal

Soit le signal s(t) périodique de période T_0 tel que sur une demi-période, il est égal à une fonction sinusoïdale de fréquence F et nul sur l'autre demi-période.

1. Représenter le signal s(t)
2. Déterminer l'expression analytique de s(t) en décomposant s(t) sous la forme de deux signaux élémentaires.
3. Déterminer l'expression de la transformée de Fourier de s(t) et représenter son module
4. Dans quel type d'application un tel signal pourrait se rencontrer ?

Eléments d'analyse spectrale

Exercice 1 : Détection des discontinuités par intercorrélation

On considère les signaux suivants :

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } t \notin [0\,;6] \\ 1 \text{ , si } t \in [0\,;4] \\ -1 \text{ , si } t \in \,]4\,;6] \end{cases} \qquad y(t) = rect_1(t - 0{,}5).\sin(2\pi F t) \text{ , } F = 1 \qquad z(t) = y(t/4)$$

Calculer et représenter les deux fonctions d'intercorrélation $C_{xy}(t)$ et $C_{xz}(t)$.

Préciser laquelle des deux fonctions, y(t) ou z(t), révèle le mieux, par l'intermédiaire de sa fonction d'intercorrélation, la discontinuité contenue dans x(t).

Exercice 2 : Propriétés énergétiques des signaux

1. Signaux d'énergie finie

11. Etablir le théorème de Parseval.

12. Montrer que la densité spectrale d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de ce signal ; que représente la fonction d'autocorrélation prise pour t = 0 ?

13. Calculer directement l'énergie totale du signal porte $rect_{2a}(t)$.

Quelle est sa fonction d'autocorrélation ? La représenter.

En déduire l'énergie totale du signal porte.

2. Signaux de puissance finie

21. Soit $s(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$.

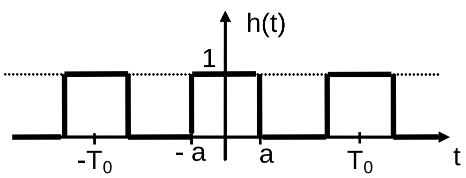
Pour les signaux périodiques de période Δ, la puissance moyenne est aussi définie par la relation :

$$P = \frac{1}{\Delta}\int_{(\Delta)} |s(t)|^2\, dt$$

Déterminer la puissance moyenne de s(t). Déterminer le développement en séries de Fourier de s(t). En déduire son spectre et représenter son module. Calculer les coefficients de Fourier notés s_n de s(t) pour $|n| \leq 3$. En déduire $P_s = \sum_{n=-3}^{3} |s_n|^2$. Conclusion

22. Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation de s(t) en fonction des coefficients de Fourier. Calculer $C_s(0)$. Conclusion.

23. Soit le signal périodique de période T_0 suivant :



Donner l'expression analytique de h(t).

Déterminer H(f).

Calculer la puissance moyenne P_h de h(t) avec $a = T_0/4$.

Signaux déterministes à temps discret

Exercice 1 : Calcul de transformées en z

Calculer les transformées en z des suites suivantes en précisant leur domaine d'existence.

1. $\{ x(n) \} = \delta(n-k)$

2. $\{ x(n) \} = \begin{cases} 1, \ \forall\ n \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$

3. $\{ x(n) \} = \begin{cases} \alpha^n, \ \forall\ n \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$

4. $\{ x(n) \} = \begin{cases} n, \ \forall\ n \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$

5. $\{ x(n) \} = \begin{cases} na^n, \ \forall\ n \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$

6. $\{ x(n) \} = \begin{cases} a^n.\cos(nb), \ \forall\ n \geq 0, \ |a| < 1 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$

Exercice 2 : Système discret

Considérons le système défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + by(n-1) \text{ avec la condition initiale } y(-1) = a.$$

1. Dans le cas où $a = 0$, déterminer la réponse de ce système à la suite $\{x(n)\} = \{x_1(n)\}$ définie par :

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Comment est appelée cette réponse ? Est-elle finie ou infinie ? Donner la condition de stabilité et en déduire les valeurs que peut prendre b.

2. Toujours dans le cas où $a = 0$, déterminer la réponse à la suite $\{x(n)\} = \{x_2(n)\}$ définie par :

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

Tracer cette réponse et déterminer la valeur de y(n) quand n tend vers l'infini, dans le cas où la condition de stabilité est vérifiée.

3. En utilisant la transformée en z monolatérale, déterminer la réponse du système à la suite $\{x(n)\} = \{x_3(n)\}$ définie par :

$$x_3(n) = \begin{cases} e^{2\pi jnF} \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

On prendra $b = -0,8$. Mettre en évidence le régime transitoire et la réponse en régime permanent.

4. Déterminer la fonction de transfert H(z) du système ; en déduire ses pôles et ses zéros, et la représentation fréquentielle associée ($b = -0,8$).

5. Déterminer la réponse en fréquence H(f) du système. Donner le module et l'argument de H(f). Tracer le module |H(f)| et en déduire l'effet du système étudié.

Exercice 3 : Filtres RIF élémentaires

1. Quelles sont les réponses fréquentielles d'amplitude et de phase ainsi que la réponse impulsionnelle du système régi par l'équation : $y(n) = x(n) + x(n-L)$

2. Mêmes questions pour le système suivant : $y(n) = x(n) + 2.\ X(n-1) + x(n-2)$

3. Quels sont les effets des filtres étudiés ? Les comparer et conclure.

<u>Exercice 4</u> : Synthèse de filtre RIF par troncature de la réponse impulsionnelle

Le filtre à synthétiser est un filtre passe bas de fréquence de coupure normalisée égale à 0.25.

1. Calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre en considérant que l'on souhaite obtenir un filtre à phase linéaire et que l'on souhaite considérer N échantillons. Faire l'application numérique pour N = 15 et représenter la réponse impulsionnelle.

2. Calculer le gain complexe du filtre synthétisé en faisant apparaître une somme de termes en cosinus. Le représenter et comparer au filtre désiré. Comment améliorer le filtre réalisé ?

<u>Exercice 5</u> : Synthèse de filtre RII par approximation de Butterworth

On souhaite réaliser un filtre numérique passe-bas dont le gabarit $|H(\omega)|$ possède les caractéristiques suivantes :

- une atténuation maximale de 1 dB dans la bande passante : $0 \leq \omega \leq 0.18\pi$.
- une atténuation minimale de 30 dB dans la bande atténuée : $0.75\pi \leq \omega \leq \pi$.

Pour cela, on choisit de rechercher le filtre analogique de Butterworth d'ordre minimal qui par transformation bilinéaire sera associé à un filtre numérique possédant ces caractéristiques.

On rappelle qu'un filtre de Butterworth $H_a(\omega_a)$, d'ordre N et de fréquence de coupure ω_{ac}, est défini par la relation :

$$|H_a(j\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}\right)^{2N}}$$

1. Proposer pour le filtre analogique un gabarit, qui selon cette procédure, correspond au gabarit du filtre numérique.

2. Déterminer les paramètres (ordre et fréquence de coupure) du filtre de Butterworth d'ordre minimal qui satisfait le gabarit proposé.

3. Donner la fonction de transfert $H_a(p)$ du filtre de Butterworth stable correspondant (T_e = 2s).

4. Calculer l'expression de H(z) de la fonction de transfert du filtre numérique déduit de $H_a(p)$ par la transformation bilinéaire.

5. Tracer le gabarit souhaité et dessiner l'allure de $|H(\omega)|$ pour $0 \leq \omega \leq \pi$

<u>Exercice 6</u> : Transformée de Fourier de signaux à temps discret

Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

1. $\{rect_N(n/N)\}$ **2.** $\{a^n.u(n)\}$, $|a| < 1$ et u(n) la fonction échelon

ESISAR **EE331** Romain Siragusa

Année 2014 – 2015

3ème Année

Examen de Traitement du signal déterministe
Cours EE331

Documents interdits

Calculatrice autorisée

Durée : 1h45

Recommandations

Une attention particulière dans le **soin de la rédaction est recommandée**. Un non-respect de cette contrainte pourra entraîner un malus sur la note finale. Tout résultat devra être justifié par un schéma, une équation ou/et une phrase d'explication. Un résultat numérique n'est complet que lorsque que les unités sont précisées.

(**Barème indicatif noté entre crochets sur 20 pts**)

Exercice I : Effet de l'échantillonnage [4 pts]

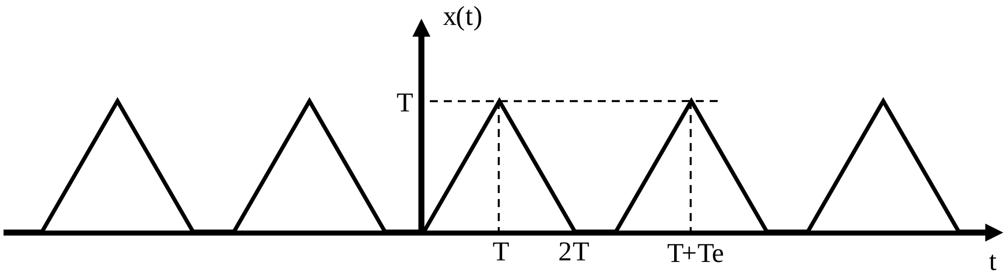
Tracer proprement (i.e. valeurs sur les axes) en justifiant le module des spectres suivant :

- TF[sin(2.π.2000.t)]
- TFD[sin(2.π.2000.n.Te)] , avec Fe = 1/Te = 5000 Hz ; N = 5000 points
- TFD[sin(2.π.2000.n.Te)] , avec Fe = 1/Te = 3000 Hz ; N = 3000 points

TF : transformée de Fourier ; TFD : transformée de Fourier discrète.

Exercice II : Spectre d'un signal périodique [3.5 pts]

1. Quelle est la particularité du spectre d'un signal périodique. [0.5 pts]
2. Soit le signal x(t) périodique de période Te suivant :



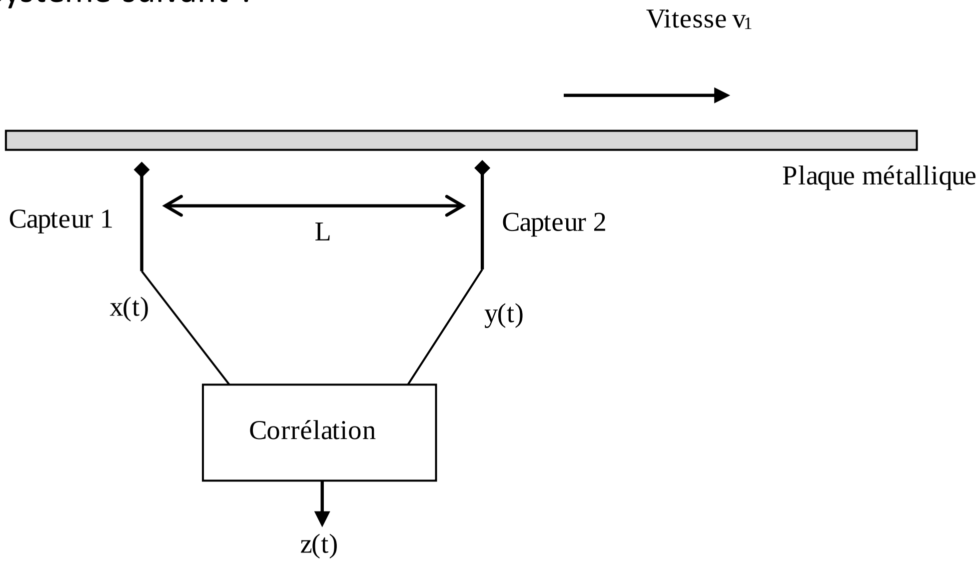
Calculer le spectre X(f) du signal en utilisant la transformée de Fourier. [2 pts]

3. Tracer X(f) et x(t) pour Te = 2T [0.5 pts]

4. Tracer X(f) et x(t) pour Te = T [0.5 pts]

Exercice III : Mesure de vitesse de défilement **[5pts]**

Soit le système suivant :



L'objectif est de mesurer la vitesse de la plaque métallique. Elle se déplace à une vitesse v_1. Les capteurs 1 et 2 mesurent la granularité de la plaque. Les signaux x(t) et y(t) en sortie des capteurs sont envoyés à un système qui effectue le produit de corrélation. Le signal z(t) est le résultat de ce produit.
La distance L entre les deux capteurs est connue.

1. Quelle est la définition du produit d'autocorrélation $C_{xx}(t)$? Que vaut son maximum et pour quel temps t est-il obtenu ? [1.5 pts]

2. Exprimer y(t) en fonction de x(t). [1 pts]

3. Calculer z(t) en fonction de $C_{xx}(t)$. [1.5 pts]

4. Comment est-il possible de déduire la vitesse de la plaque ? [1 pts]

Exercice IV : Etude de systèmes discrets **[8 pts]**

a) Soit le système A décrit par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n-1) + b.x(n-2) + c.x(n-3)$$

avec b et c des constantes, y(n), la sortie du système et x(n), l'entrée du système.

1. Calculer et tracer la réponse impulsionnelle du système A. [0.5 pts]

2. Pour quelle valeur de b et c le système est-il stable ? [0.5 pts]

3. Calculer la fonction de transfert du système en utilisant la transformée en z. [0.5 pts]

4. Tracer |H(f)|, le module de la fonction de transfert en fréquence. [1 pts]

b) Soit le système B décrit par l'équation aux différences :

$$y(n) = a.x(n) + b.y(n-2)$$

avec a et b des constantes, y(n), la sortie du système et x(n), l'entrée du système. y(-1) et y(-2) sont différent de zéro.

1. Démontrer la formule suivante : (Tz^+ désigne la transformée en z monolatérale) [1 pts]

$$Tz^+\{x(n-n_0)\} = z^{-n_0} \cdot X^+(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x(-n) \cdot z^{-(n_0-n)}$$

2. Par la transformée en z monolatérale, exprimer la réponse du système. [1 pts]

3. Calculer la transformée en z du signal échelon x(n) défini par : [1 pts]

x(n) = 1 pour $n \geq 0$

x(n) = 0 sinon

4. Calculer la réponse y(n) du système au signal échelon x(n) de la question précédente. [2 pts]

Année 2012 – 2013

3ème Année

Examen de Traitement du signal déterministe

Cours EE331

Documents interdits

Calculatrice autorisée

Durée : 1h30

Recommandations

Une attention particulière dans le **soin de la rédaction est recommandée**. Un non-respect de cette contrainte pourra entraîner un malus sur la note finale. Tout résultat devra être justifié par un schéma, une équation ou/et une phrase d'explication. Un résultat numérique n'est complet que lorsque que les unités sont précisées.

(**Barème indicatif noté entre crochets sur 21 pts**)

Exercice 1 : Transformée de Fourier Discrète [8 pts]

La figure 1 représente différents signaux discrets S1, S2 et S3 échantillonnés à la fréquence de 1200 Hz.

Les modules de leur transformée de Fourier discrète, TFDS1, TFDS2 et TFDS3 sont présentés sur la figure 2.

Les abscisses des courbes représentent les numéros des échantillons.

1. Montrer que le module de la TFD du signal S1 peut se mettre sous la forme d'un cosinus.
2. Vérifier que la TFD calculée correspond bien au graphique de la figure 2 nommé TFDS1.
3. Etalonner en justifiant votre démarche l'axe des fréquences du graphique TFDS1.
4. Le signal *S*2 est obtenu à partir du signal *S*1, comment ?
5. Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de *S*2 et celle de *S*1 ? (le justifier).
6. Etalonner l'axe des fréquences du graphique TFDS2. Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?

7. Le signal $S3$ est obtenu à partir du signal $S1$, comment ? Calculer sa TFD et vérifier la cohérence avec le graphique TFDS3.

8. Etalonner l'axe des fréquences du graphique TFDS3. Quel est le lien entre la TFD de $S3$ et celle de $S1$? (le justifier). Comment nomme-t-on cette opération ?

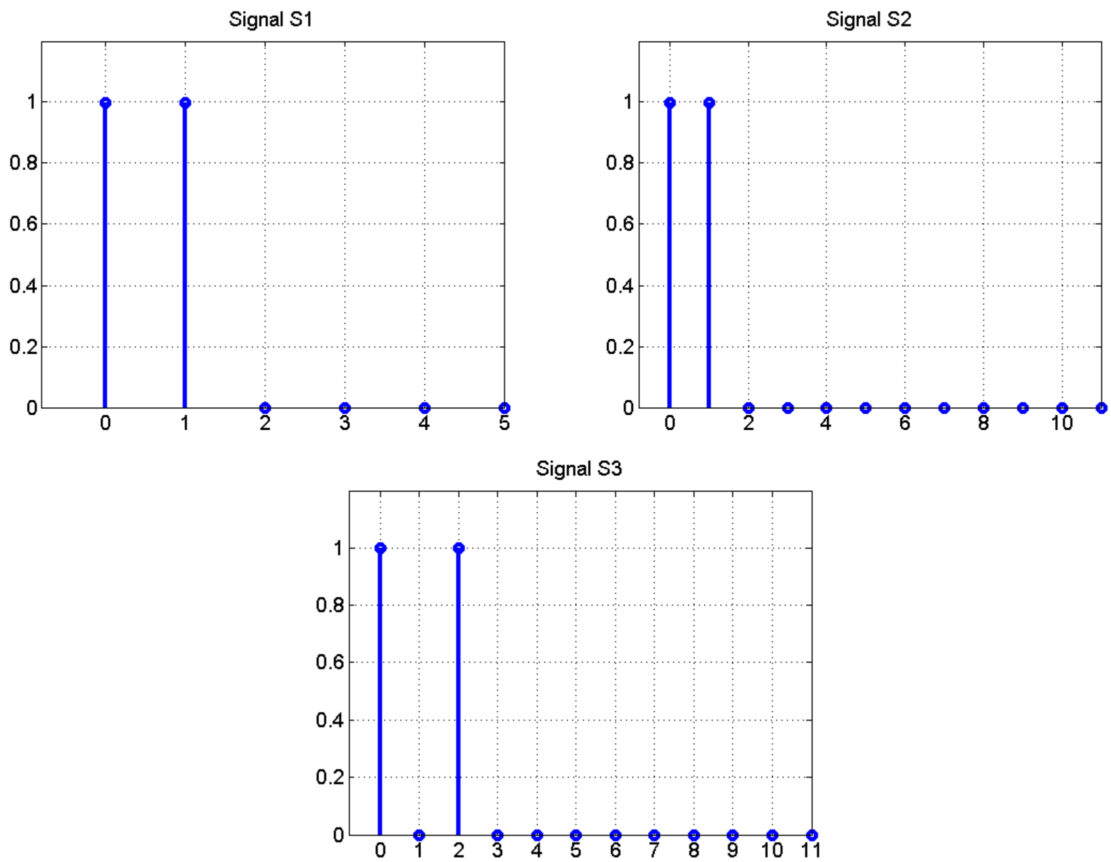
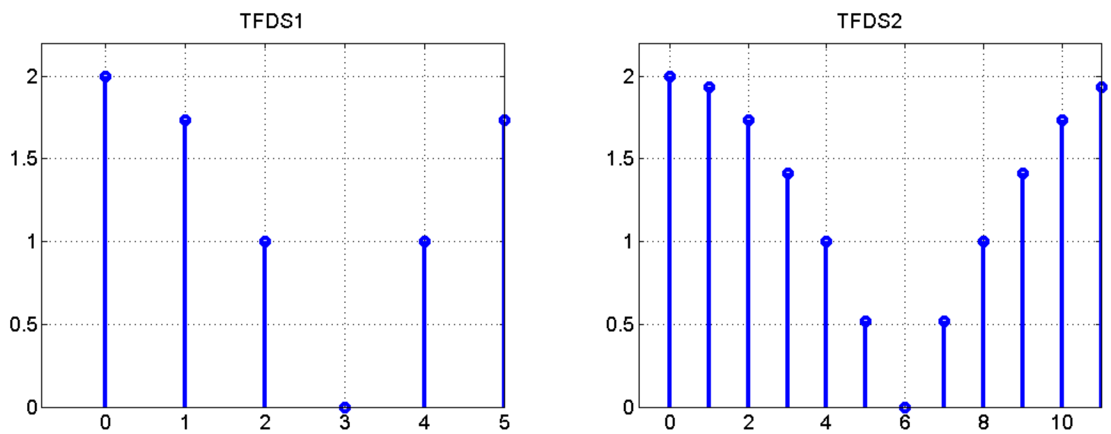


Figure 1 Signaux discret S1, S2 et S3 échantillonnés à 1200 Hz.



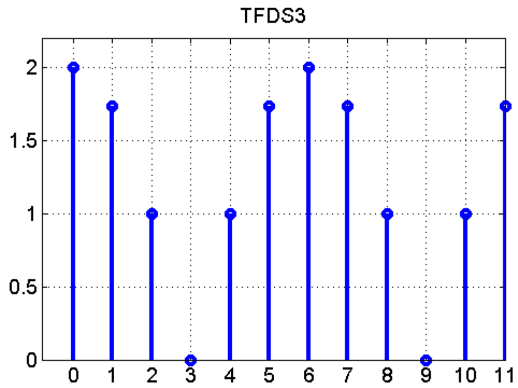


Figure 2 Module des spectres de signaux S1, S2 et S3 par TFD

Exercice 2 : Analyse spectrale d'un signal redressé par simple et double alternance [8 pts]

La fonction de redressement est très utilisée pour alimenter des systèmes en continu à partir d'un signal alternatif de fréquence $\mathbf{F_0}$. L'objectif est d'obtenir une tension continue V_0 aussi grande que possible (Fig. 3).

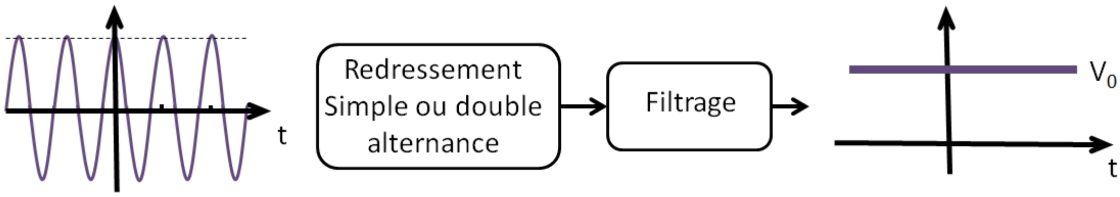


Figure 3 Principe du redressement

Il existe deux types de redressement (Fig. 4) : le redressement simple alternance et le redressement double alternance.

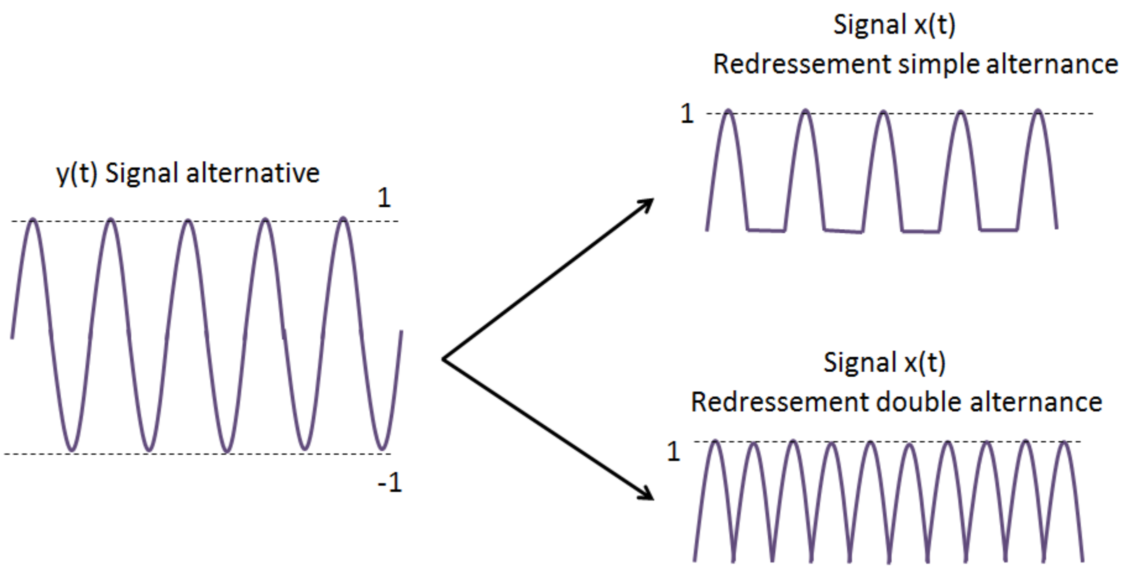


Figure 4 Principe du redressement simple et double alternance d'un signal sinusoïdale.

Le principe, illustré sur la figure 4, est le suivant.

Dans le cas d'un redressement simple alternance, une diode va tout d'abord permettre de ne garder que la partie positive du signal. Ensuite, ce signal est lissé grâce à un filtre passe-bas.

Dans le cas d'un redressement double alternance, un pont de diode va permettre de garder la valeur absolue du signal. Ensuite, ce signal est lissé grâce à un filtre passe-bas.

Grâce à une analyse spectrale, nous allons évaluer les performances du redressement double alternance.

1. Calculer le spectre du signal x(t), c'est-à-dire avant filtrage, pour le cas double alternance.
2. Le module du spectre du signal x(t) pour chacun des cas est représenté à la figure 4. A partir du résultat de la question 1, évaluer sa valeur pour le cas double alternance en f = 0 ; F_0 ; $2F_0$; 3 F_0.
3. Discuter des performances des deux systèmes. Quelle doit-être la fréquence de coupure du filtre dans chacun des cas ?
4. A partir de l'étude, comment est-il possible de déceler une panne sur le système à double alternance ?

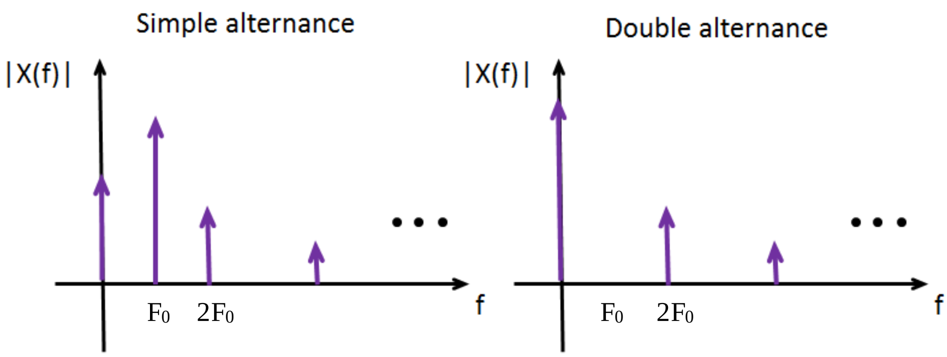


Figure 5 Module du spectre du signal dans le cas d'un redressement simple et double alternance.

Exercice 3 : Etude de systèmes discrets [4 pts]

Soit le système décrit par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + 0,2\, y(n-1) + 0,2\, x(n-1) \text{ avec } y(-1) = c$$

1. Pour c=0, calculer la réponse impulsionnelle h(n) et représenter-la.
2. Pour c=0, calculer la fonction de transfert en fréquence H(f) et tracer son module |H(f)|. De quel type de filtre s'agit-il ?
3. Dans le cas où c est non nul, calculer, en utilisant la transformée en z monolatérale, la réponse du système pour une entrée {x(n)} tel que:

$$x(n) = e^{2\pi jnF} \text{ pour } n \geq 0$$
$$x(n) = 0 \text{ pour } n < 0$$

Faire apparaître le régime transitoire et le régime permanent.