

# Automatique

## Cours AU-360

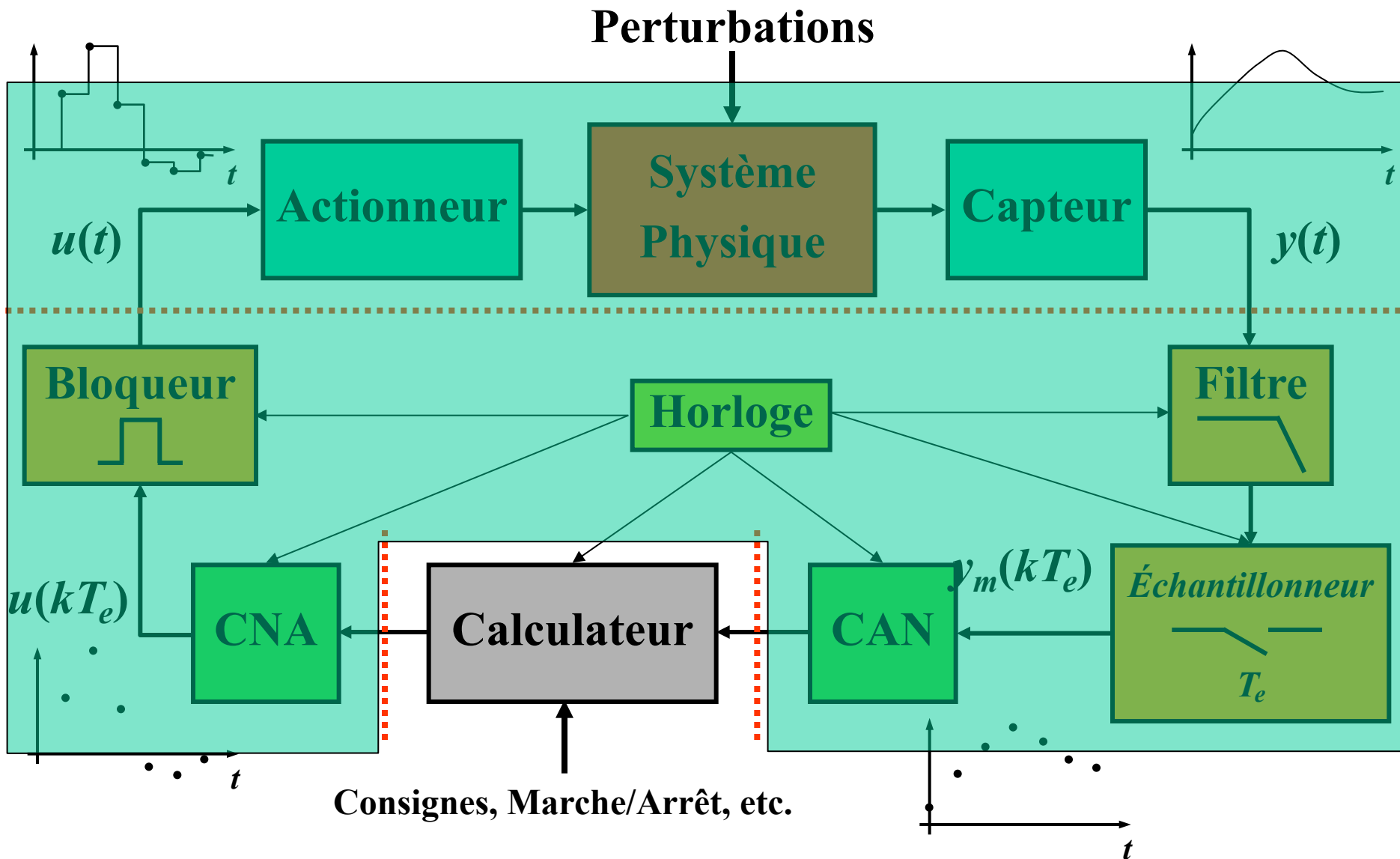
### Représentation par fonction de transfert à temps discret des systèmes linéaires invariants

1. Structure Générale d'un système de commande par ordinateur
2. Échantillonnage, Signaux échantillonnés, FAR de spectre, CAN, CNA, Choix de la Période d'échantillonnage
3. Représentation externe à temps discret
4. La transformée en  $z$  et ses propriétés
5. Stabilité EB-SB des fonctions de transfert à temps discret
6. Représentation fréquentielle des fonctions de transfert à temps discret
7. Méthodes approchées de calcul de la  $T(z)$
8. Modélisation d'un système piloté par ordinateur

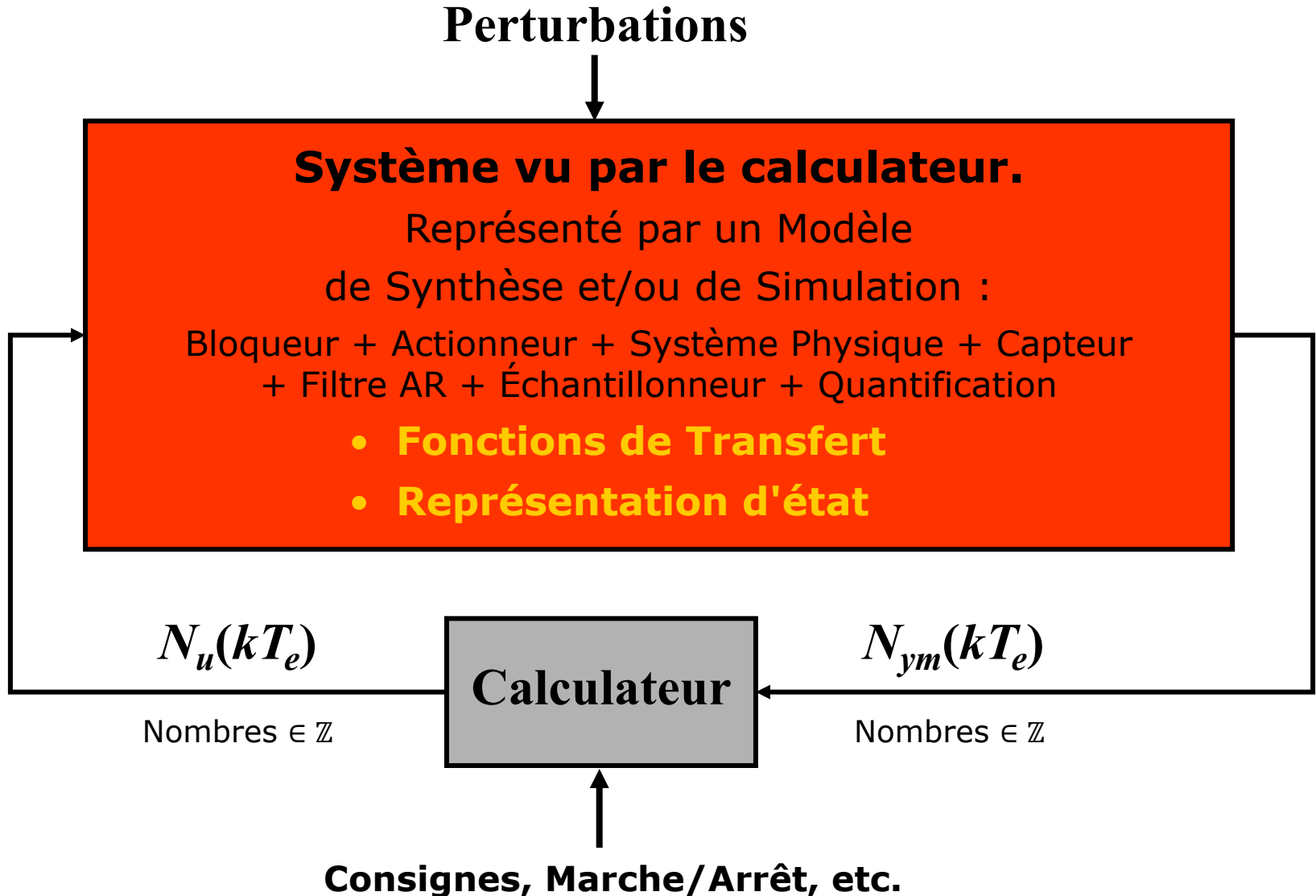
# **Structure Générale d'un système de commande par ordinateur**

# Systèmes de Commande par Calculateur

## Structure Générale

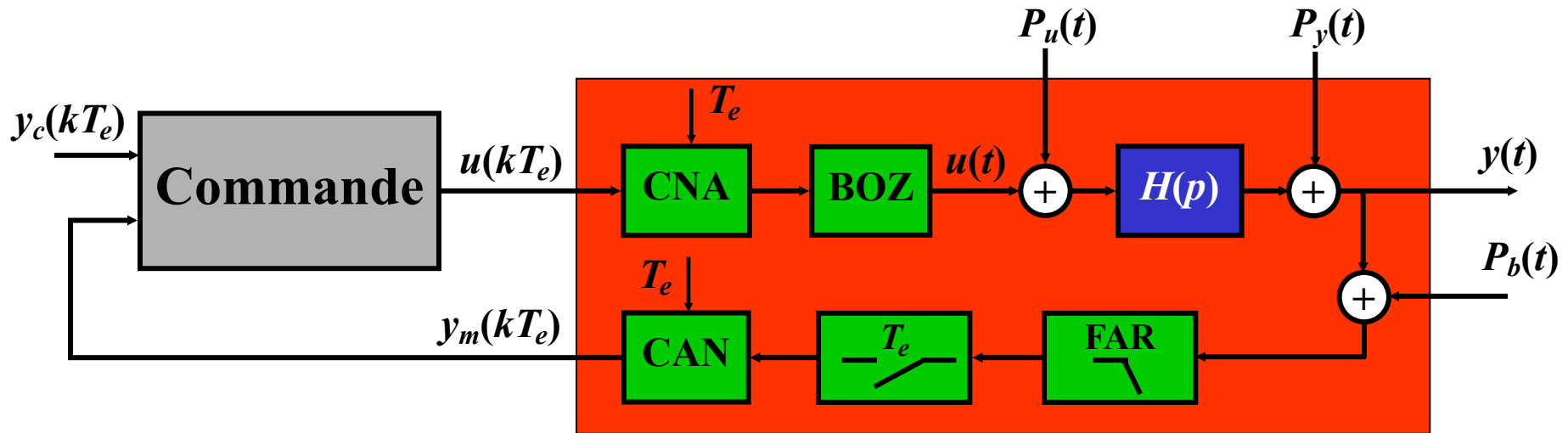


# Systèmes de Commande par Calculateur Modélisation



# Systèmes de Commande par Calculateur

## Structure de Commande



### – Modèle du système :

- sous forme de Fonction de transfert :  $Y(p) / U(p) = H(p)$
- sous forme de Représentation d'état :  $\mathbf{dx}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$

tient compte de l'actionneur, du système physique et du capteur.

### – Modèle pour la synthèse du correcteur :

- Modèle du système + Modèle de la chaîne d'acquisition

### – Informations supplémentaires nécessaires sur le modèle :

- Domaine absolu de validité en amplitude (domaine de fonctionnement linéaire)
- Gabarit fréquentiel de validité du modèle (caractérisation de  $P_y(t)$ )
- Caractérisation du bruit de mesure  $P_b(t)$  et niveau de bruit autorisé sur  $u(t)$

# **Échantillonnage**

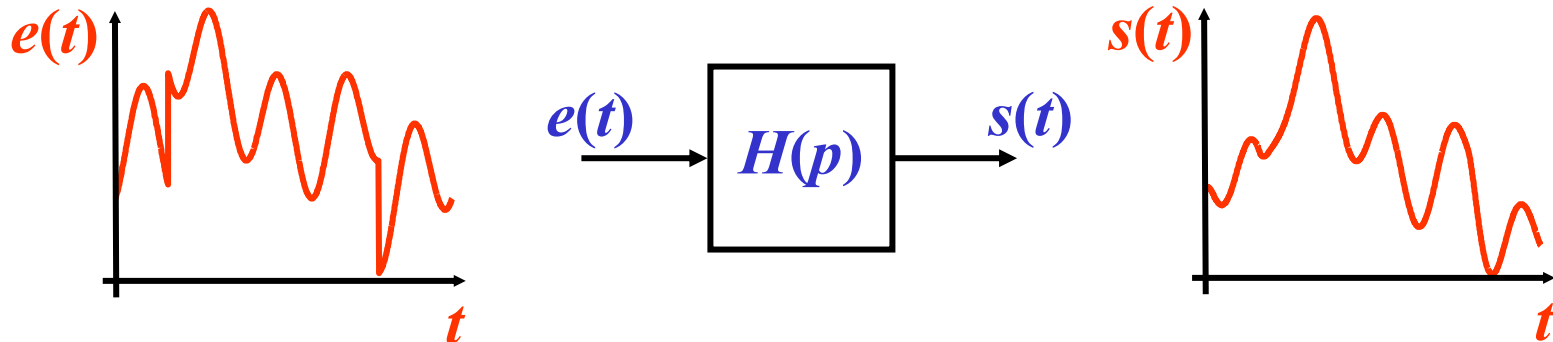
## **Signaux échantillonnés**

### **Période d'échantillonnage**

# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Signal et Système à temps continu

- **Trois type de signaux et de systèmes sont considérés**
  - à temps continu (existent à tout instant)
  - échantillonnés (à temps discret) (existent en des instants précis du temps)
  - discrets (nombre limité de valeurs : issus de quantificateurs)
- **Signal et système à temps continu**

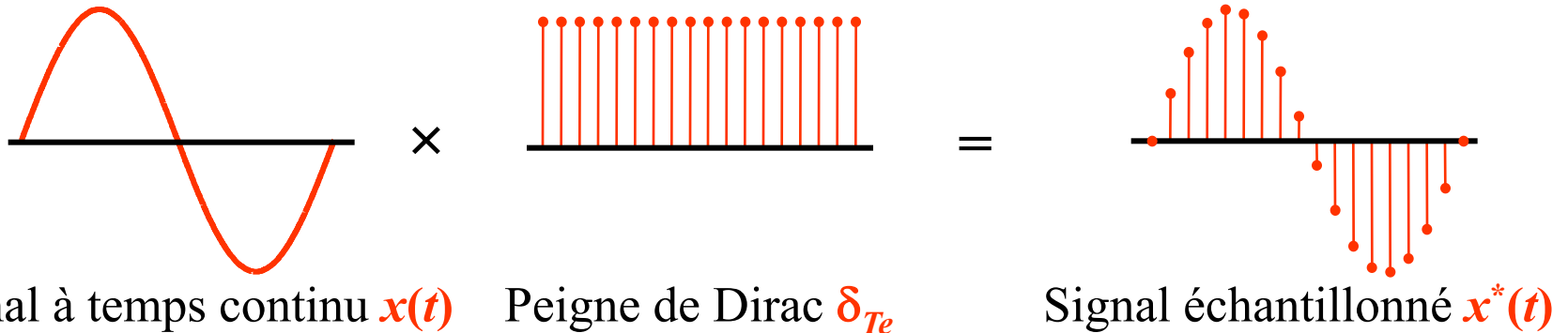


- Le signal existe à tout instant
- Peut présenter des discontinuités mais est d'énergie finie
- Signal issu d'un système physique régit par des équations différentielles
- Système à Paramètres localisés  $\Rightarrow$  Fonction de Transfert ou Rep. État

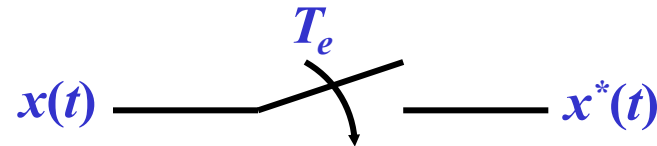
# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Signal échantillonné et temps discret

- Échantillonnage d'un signal :



- Échantillonneur :



- $T_e$  : Période d'échantillonnage (durée entre deux échantillons)
- $x(t)$  et  $x^*(t)$  sont de même nature (même unité)

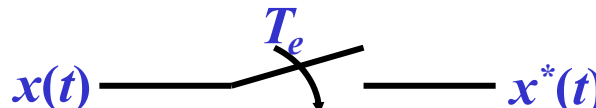
$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad \text{avec} \quad \delta(kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

On notera dans la suite :  $x(k) = x(kT_e) = x^*(t)$



# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Théorème de Shannon – repliement de spectre

- Échantillonneur :** 
  - Question :  $x^*(t)$  représente-t-il fidèlement  $x(t)$  ?
    - Réponse : oui mais uniquement dans une bande limitée de fréquences
- Théorème de Shannon :**
  - Soit un signal échantillonné  $x^*(t)$  obtenu par échantillonnage à la fréquence  $f_e = 1/T_e$  d'un signal à temps continu  $x(t)$ .
  - Le signal à temps continu  $x(t)$  peut être reconstruit exactement à partir du signal échantillonné  $x^*(t)$  si la fréquence maximum  $f_{max}$  du spectre de  $x(t)$  est inférieure à  $f_e/2$ . ♦

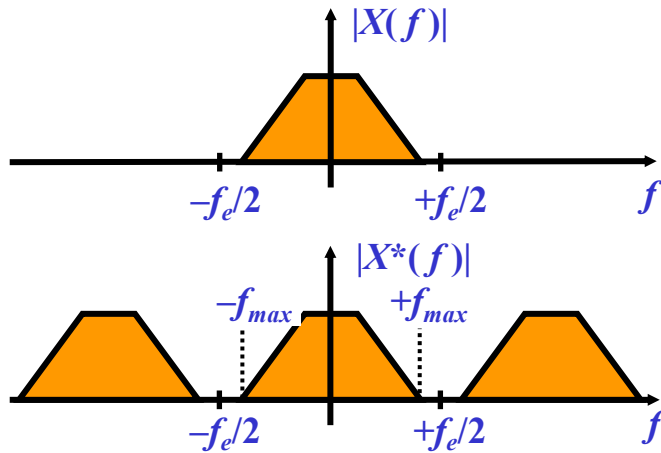
Démonstration : comparaison des spectres de  $x^*(t)$  et  $x(t)$

$$\begin{aligned}
 X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt & X^*(jf) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{f_e}\right) e^{-j2\pi k \frac{f}{f_e}} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j\omega kT_e} & X^*(f + nf_e) &= X^*(f), \quad n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

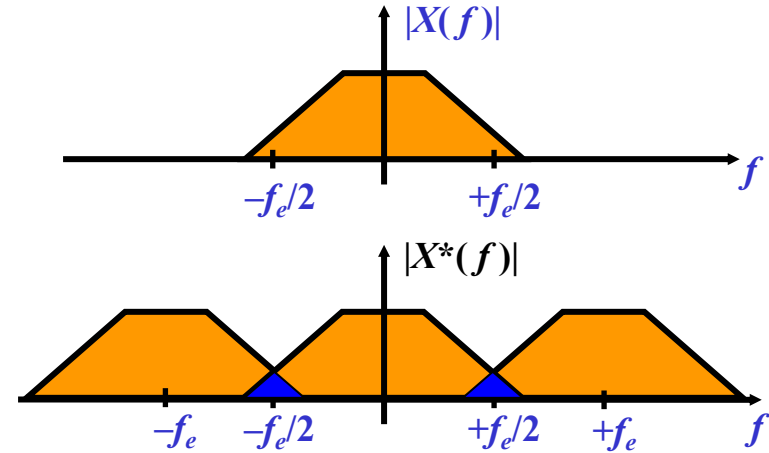
# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Visualisation du repliement de spectre

Pas de repliement  $F_{max} < \frac{f_e}{2}$



Repliement  $F_{max} > \frac{f_e}{2}$



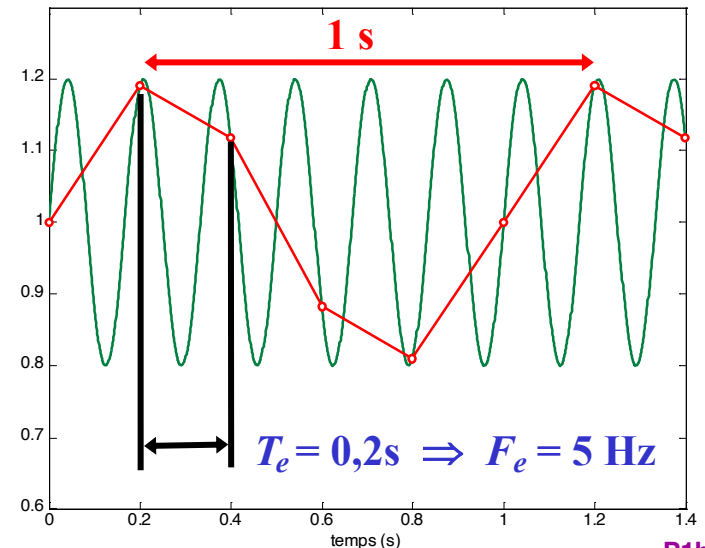
$x(t) = 1 + 0.2 \sin(2\pi \cdot 6 \cdot t)$

$F_{max} = 6 \text{ Hz}$

$T_e = 0,2 \text{ s}$

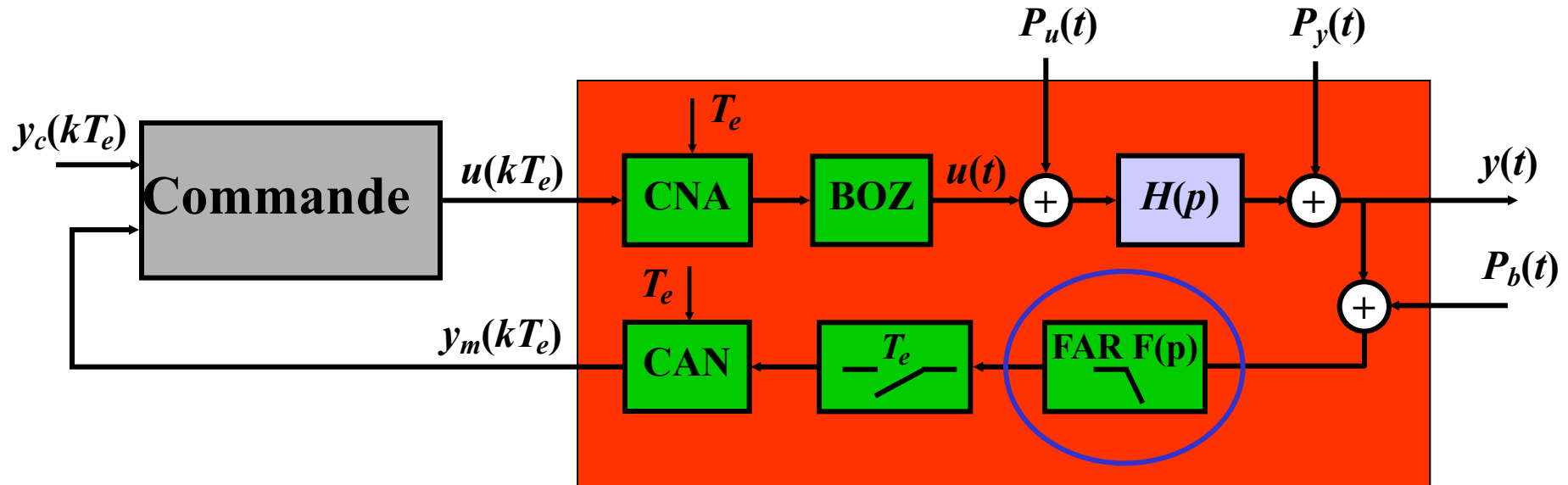
$F_e - F_{max} = (5 - 6) \text{ Hz} = 1 \text{ Hz}$

$x^*(t)$



# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Filtre Anti-Repliement de spectre (1/3)



**But du FAR :** Éliminer les composantes spectrales de  $x(t)$  supérieures à  $f_e/2$

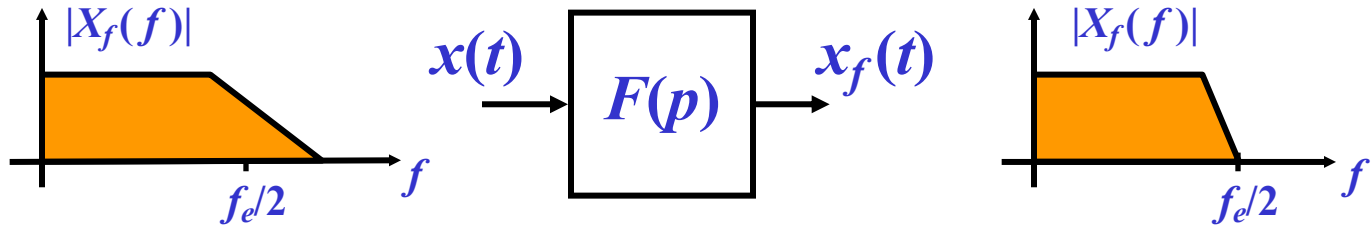
**Comportement idéal du FAR :**

- Gain unitaire dans la bande passante :  $f < f_e/2 : |F(\omega)| \approx 1$
- Gain nul au-delà de la bande passante :  $f > f_e/2 : |F(\omega)| \rightarrow 0$

# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Filtre Anti-Repliement de spectre (2/3)

**FAR :** Éliminer les composantes spectrales de  $x(t)$  supérieures à  $f_e/2$



- **Modélisation d'un FAR de pulsation de coupure  $\omega_0$  :**

- **Gain :**
  - Pour :  $\omega \ll \omega_0$  :  $|F(\omega)| \approx 1$
  - Pour :  $\omega \gg \omega_0$  :  $|F(\omega)| \rightarrow 0$

- **Phase :**  $\varphi(\omega) = \arg(F(j\omega))$

La phase introduit un retard (temps mis par le signal pour « traverser » le filtre) donné par le temps de groupe  $t_g(\omega)$  :  $t_g(\omega) = -\partial\varphi(\omega) / \partial\omega$

En pratique, le filtre est choisi de telle sorte que  $t_g(\omega)$  puisse être approché par une constante  $t_{g0}$  dans la bande passante

- **Modèle dans la bande passante du filtre :**  $F(j\omega)|_{\omega < \omega_0} \approx 1 \cdot e^{-j\omega t_{g0}}$

# Échantillonnage – Signaux échantillonnés

## Filtre Anti-Repliement de spectre (3/3)

- **Modèle d'un FAR de type Butterworth d'ordre 3 :**

$$F(\Omega) = \frac{1}{(1 + \Omega)(1 + \Omega + \Omega^2)} \quad \text{avec } \Omega = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \text{et } \omega_0 \text{ la pulsation de coupure du filtre.}$$

$$\text{d'où } |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}}$$

$$\text{Pour : } \omega \ll \omega_0 : |F(\omega)| \approx 1$$

$$\text{Pour : } \omega \gg \omega_0 : |F(\omega)| \rightarrow 0$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = \arg(F(\Omega)) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) - \pi \Big|_{\frac{\omega}{\omega_0} > 1}$$

$$t_g(\omega) = -\partial\varphi(\omega) / \partial\omega, \quad \text{pour } \omega \ll \omega_0 : t_g(\omega) \approx t_{g0} = \frac{2}{\omega_0}$$

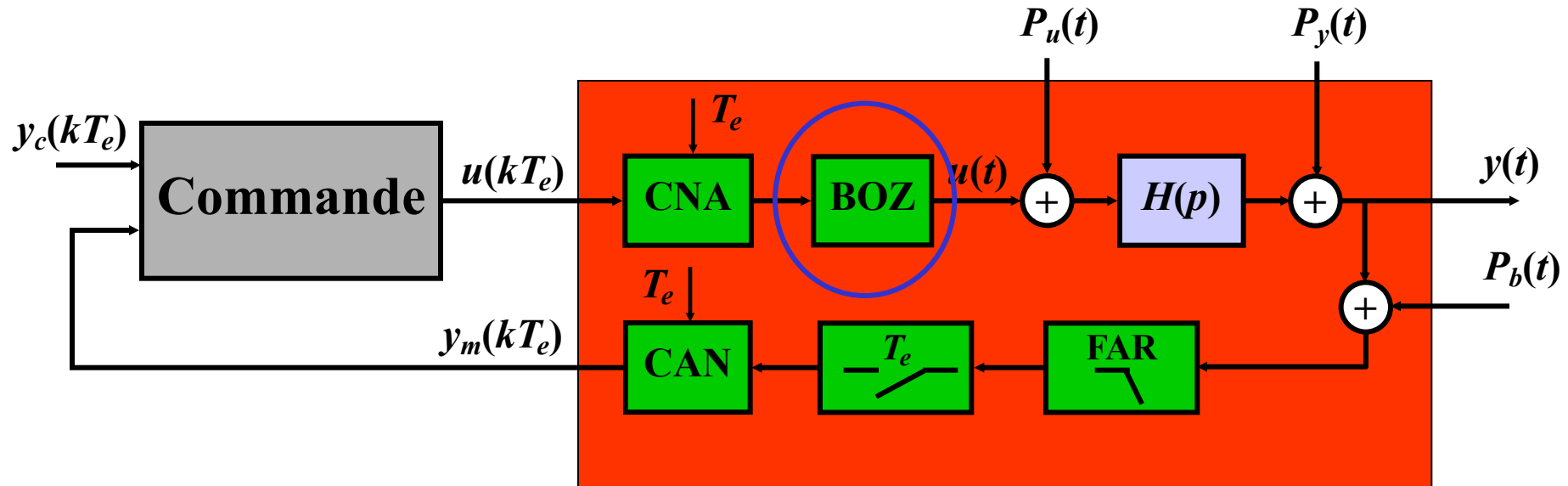
- **Choix de la fréquence de coupure du FAR :**

$$F_{max} = f_e/2 \Rightarrow \omega_{max} = \pi/T_e \Rightarrow \text{avec } \omega_0 = \frac{2}{\pi} \omega_{max} = 2/T_e$$

le filtre sera modélisé par un retard pur de valeur :  $t_{g0} = \frac{2}{\omega_0} = T_e$

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ – ZOH) (1/2)



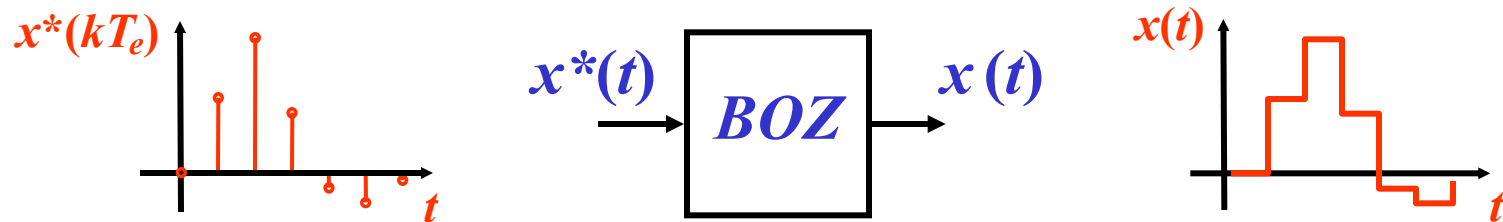
Passage d'un signal échantillonné à un signal à temps continu :  
Utilisation d'un BLOQUEUR d'ordre zéro ou d'ordre un.

En pratique, le CNA intègre un BOZ.

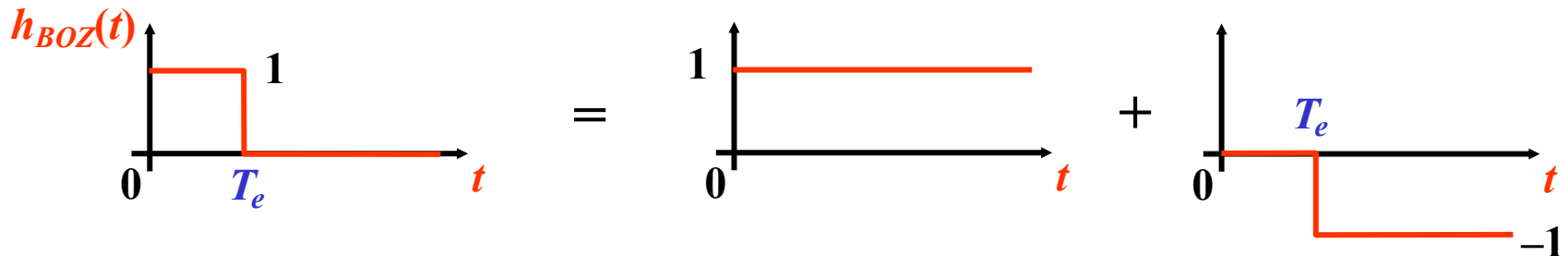
# Échantillonnage – Signaux discrets

## Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ – ZOH) (2/2)

- **Bloqueur d'Ordre Zéro (Zero Order Holder)**



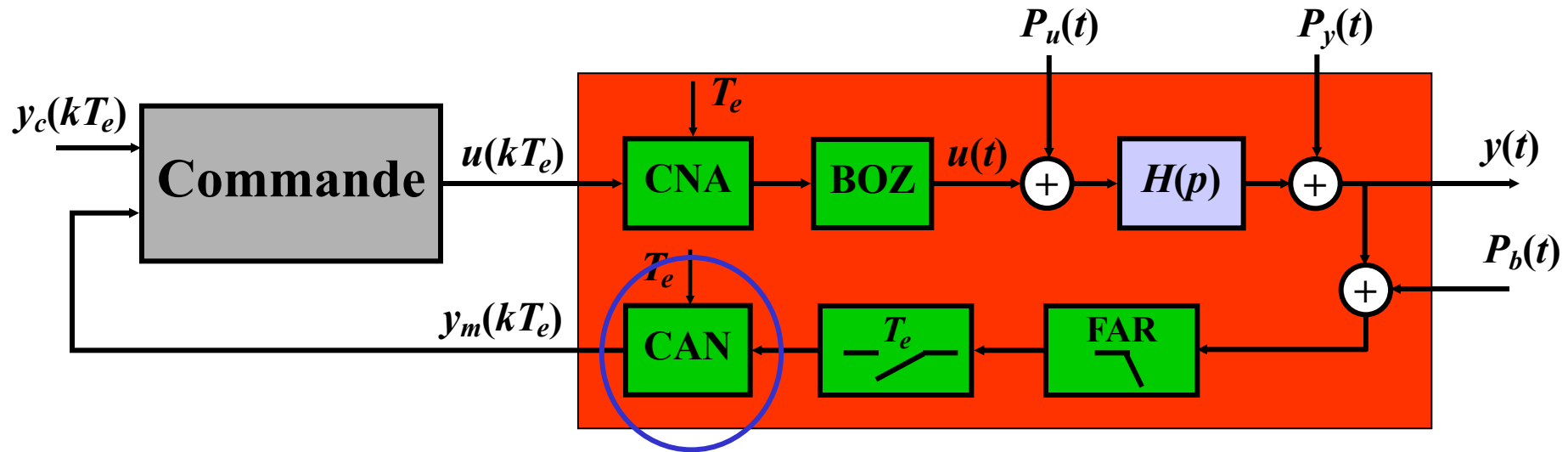
– Réponse impulsionnelle :



$$\text{Laplace} \left[ h_{BOZ}(t) \right] = H_{BOZ}(p) = \frac{1}{p} + \frac{-e^{-T_e p}}{p} = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Système et Signal discrets



- **Signal discret** : suite de valeurs numériques qui n'existent qu'aux instants d'échantillonnage : sortie du CAN  $y_m(kT_e)$  et entrée du CNA  $u(kT_e)$
- **Système discret** : modèle mathématique (équations aux différences ou fonction de transfert en  $z$ ) entre signaux discrets.
- **En pratique** :
  - Les circuits **CAN (ADC)** effectuent les opérations d'**échantillonnage** et de **conversion**
  - Les circuits **CNA (DAC)** effectuent les opérations de **conversion** et de **blocage (BOZ)**

Le passage du signal échantillonné au signal discret ajoute du bruit au système en raison de la quantification

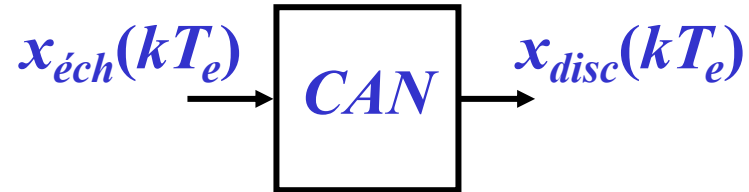


# Échantillonnage – Signaux discrets

## Modèles des CAN et CNA

- **Modèle d'un CAN :**

Les paramètres d'un CAN :



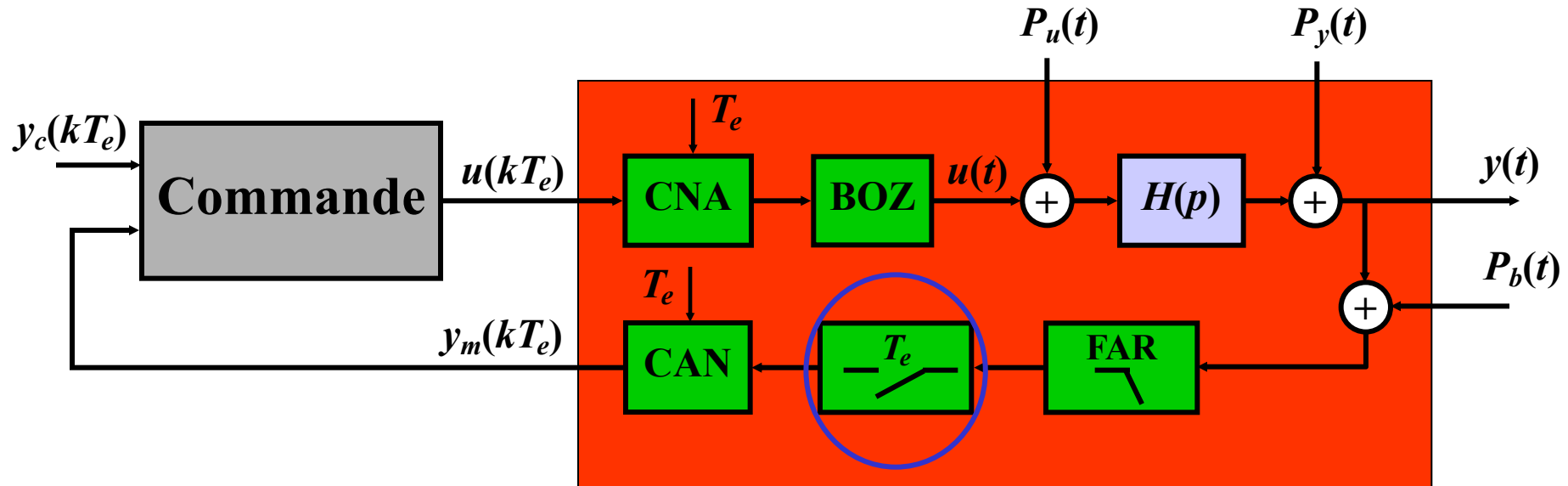
- Temps de conversion : retard pur de la chaîne d'acquisition
- Plage du signal échantillonné d'entrée :  $x_{éch}(kT_e) \in [x_{min} ; x_{max}]$   

$$(x_{éch}(kT_e))_{Sat} = Sat[x_{éch}(kT_e)]_{x_{min}}^{x_{max}}$$
- Nombre de points de quantification :  $N_{pts} = 2^N$
- Plage du signal discret de sortie du CAN :
  - Conversion unipolaire (non signée) :  $x_{disc}(kT_e) \in [0 ; 2^N - 1]$
  - Conversion bipolaire (signée) :  $x_{disc}(kT_e) \in [-2^{N-1} ; 2^{N-1} - 1]$
$$x_{disc}(kT_e) = Floor\left(\frac{N_{pts}}{x_{max} - x_{min}} \left( (x_{éch}(kT_e))_{Sat} - x_{min} \right)\right)$$
- Amplitude du Bruit (offset) de Quantification :
  - Ramené côté entrée :  $B_{Qin}(kT_e) = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_{pts}}$
  - Ramené côté sortie :  $B_{Qout}(kT_e) = 1$

- **Modèle d'un CNA :** Temps de traitement, plage d'entrée, gain.

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Choix de la période d'échantillonnage



- **Contraintes de choix de la période d'échantillonnage**
  - **Suffisamment petite** pour "suivre" l'évolution du système
  - **Pas trop petite** pour éviter les problèmes de précision numérique liés à l'implémentation sur ordinateur

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Choix de la période d'échantillonnage

- **Lien entre Période d'échantillonnage et précision d'implémentation :**

$$(\Delta_{imp})_{relatif} = \left| \frac{\partial p_0}{p_0} \right| p_0 T_e$$

Ex. :  $|\partial p_0 / p_0|_{\max} = 0,05 = 5\%$   
 $p_0 = 10 \text{ rad/s}$   
 $T_e = 1 \text{ ms}$   
 d'où :  $(\Delta_{imp})_{relatif} = 0,0005$

*=> plus petite est la période d'échantillonnage  $T_e$ ,*

*plus grande devra être la précision d'implémentation sur calculateur des paramètres des algorithmes (filtres, correcteurs) et aussi la précision des calculs, et plus grand sera le coût de calcul des algorithmes donc du calculateur*

*En pratique, on a tout intérêt à prendre, la plus grande valeur possible pour la période d'échantillonnage qui garantisse les performances recherchées.*

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Choix de la période d'échantillonnage

### Choix de la période d'échantillonnage $T_e$ :

- Pas de méthode unique : dépend du contexte
- Pulsation de Nyquist :  $F_{max} = \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$  d'où :  $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$ 
  - Critère utilisé par rapport aux spectres des signaux traités  
Le spectre peut être réduit par le filtre anti-repliement de spectre.

### Choix à partir de la connaissance de la fonction de transfert à temps continu :

- **Critère de gain pour une fonction de transfert de type Passe-Bas :**
  - Au-delà d'une certaine pulsation  $\omega_1$  le gain de la fonction de transfert est inférieur à un gain donné  $G_{min}$ , typiquement  $G_{min} \leq \frac{1}{10000} = -80dB$ . Tous les signaux au-delà de cette pulsation ne sont plus considérés :

$$\omega_1 \leq \omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} \Rightarrow T_e \leq \frac{\pi}{\omega_1}$$

- **Critère de phase pour une fonction de transfert :**
  - Période d'échantillonnage qui permet de garantir le suivi correct de la variation de phase des pôles et zéros les plus rapides du système à temps continu :

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} \geq 10^{Ndécades} \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|$$

$$T_e \leq \frac{\pi}{10^{Ndécades} \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|}, \text{ Avec typiquement, } Ndécades = 2$$

# Choix de la période d'échantillonnage pour l'implantation d'un filtre passe-bas

**Fonction de transfert d'un filtre passe-bas à implanter sur calculateur numérique :**

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{3} + 1\right)^3}$$

- **Critère de Gain** pour le choix de  $T_e$  (systèmes d'ordre  $\geq 2$ ) :

$\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$  est telle que pour  $\omega \geq \omega_{max}$  le Gain de  $F(j\omega)$  est inférieur  $G_{min}$

- Typiquement :  $G_{min} \leq \frac{1}{10000} = -80dB$
- Dans le cas de l'exemple : pour  $\omega \gg 3 \text{ rad.s}^{-1}$  :  $|F(j\omega)| \approx \left(\frac{3}{\omega}\right)^3$   
 d'où :  $|F(j\omega_{max})| \leq G_{min}$  pour  $\omega_{max} \geq \frac{3}{(G_{min})^{\frac{1}{3}}} = 64.6 \text{ rad/s}$  et  $T_e < 0.0486 \text{ s}$

- **Critère de Phase** pour le choix de  $T_e$  :

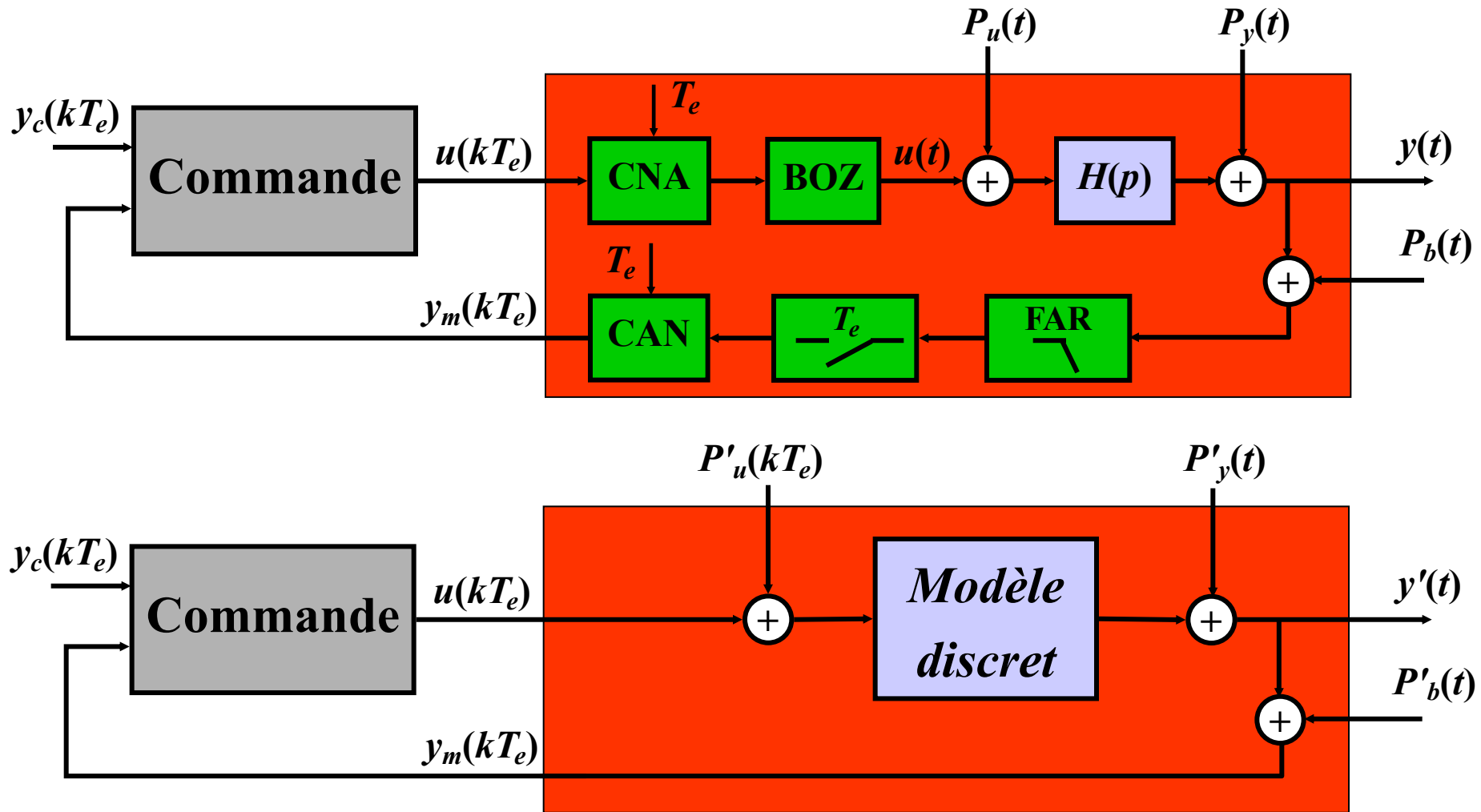
$\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} > 10^{N \text{ décades}} \times |\text{pôle le plus rapide du filtre}|$

- Typiquement :  $N_{décades} = 2$  d'où  $10^{N_{décades}} = 100$
- Dans le cas de l'exemple :  $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} > 100 \times (3 \text{ rad/s}) = 300 \text{ rad/s}$

d'où  $T_e \leq \frac{\pi}{100 \times 3} = 0.01047 \text{ s}$

# Échantillonnage – Signaux discrets

## Récapitulatif du modèle à temps discret



A la section suivante, nous verrons comment est obtenu le modèle final à temps discret  $H_d(z)$  du système complet prenant en compte l'ensemble des éléments.

# Représentation externe à temps discret

# Relation d'Entrée–Sortie



- **Définition :** **Relation d'Entrée–Sortie**  
 Un système dynamique causal multivariable  
 à temps discret  
 est défini par une relation d'entrée–sortie causale :

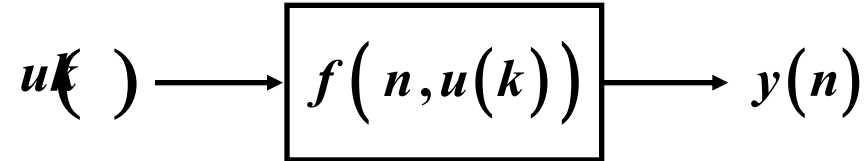
$$y(n) = f\left(n, u(k)\right), \quad 0 \leq k \leq n$$

où  $u \in U \subset R^m$  et  $y \in Y \subset R^p$  ◆

- Caractérise le **comportement dynamique intrinsèque** du processus.  
 → Prend en compte le caractère discret du temps :  
 $t_k = kT_e$  avec  $T_e$  la période d'échantillonnage et  $k \geq 0$ .



# Linéarité



## → Définition : Linéarité

Un système dynamique à temps discret est linéaire si sa relation d'entrée-sortie est linéaire :

$$f\left(n, \lambda_1 u_1(k) + \lambda_2 u_2(k)\right) = \lambda_1 f\left(n, u_1(k)\right) + \lambda_2 f\left(n, u_2(k)\right),$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

→ Corollaire : La linéarité implique qu'il existe une suite  $\{h(n, k)\}$ ,  $0 \leq k \leq n$  telle que la relation d'entrée-sortie s'écrive :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(n, k) u(k)$$

# Stationnarité (invariance)

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n h(n, k) u(k)} \longrightarrow y(n)$$

→ **Définition :** **Stationnarité**  
 Une relation d'entrée-sortie est dite stationnaire  
 si elle ne dépend pas  
 de l'instant auquel on applique une même commande. ♦

→ **Corollaire :**  
 La suite  $\{h(n, k)\}, 0 \leq k \leq n$  peut s'écrire :  

$$\{h(n, k)\} = \{h(n - k)\}$$



# Produit de convolution discret et réponse impulsionnelle

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n h(n-k) u(k)} \longrightarrow y(n)$$

→ **Proposition :** **Produit de convolution discret**  
**La relation d'entrée-sortie**  
**d'un système linéaire stationnaire causal**  
**est donnée par le produit de convolution discret :**

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(n-k) u(k) = h * u$$



→ La suite  $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  est appelée **réponse impulsionnelle**  
 obtenue en sortie lorsque l'entrée est l'impulsion discrète  
 de Dirac :  $u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

# La transformée en $z$ et ses propriétés

# La transformée en $z$ unilatérale

→ **Définition :** Transformée en  $z$  unilatérale

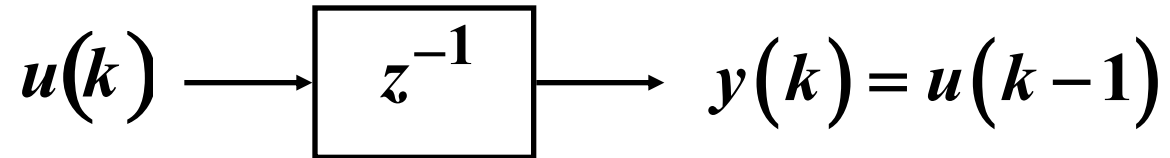
Soit  $x(k)$  un signal discret causal (i.e.  $\forall k < 0, x(k) = 0$ ),  
on définit la transformée en  $z$  unilatérale par :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| > R$$

Cette série est absolument convergente lorsque  $|z| > R$ ,  
où  $R$  désigne le rayon de convergence. ♦

# L'opérateur $z^{-1}$

→ L'opérateur  $z^{-1}$  peut être interprété comme l'opérateur retard d'un échantillon :



→ Preuve :

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k-1) z^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} u(k-1) z^{-(k-1)} z^{-1} = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) z^{-n}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$Y(z) = z^{-1} U(z) = \frac{1}{z} U(z)$$

car  $u(k)$  est causal

# Propriétés de la Transformée en $z$

→ **Linéarité :**  $Z[\lambda x(k) + \mu y(k)] = \lambda X(z) + \mu Y(z)$

→ **Translation :**  $Z[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$

→ **Multiplication par la variable  $k$  :**

$$Z[k x(k)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

→ **Convolution :**

$$Z[x(k) * y(k)] = Z\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(k-n)\right] = X(z) Y(z)$$

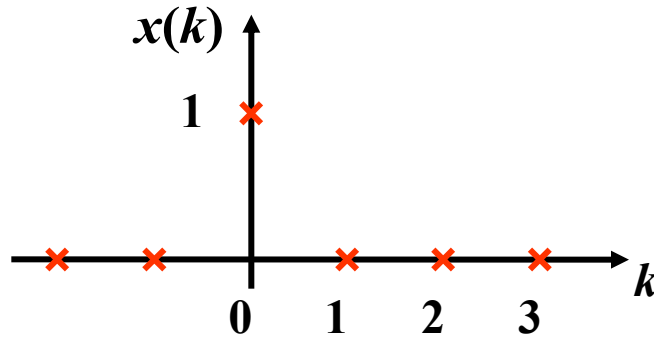
→ **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$$

**existe si**  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k)$  **existe**

# Exemples de Transformées en $z$ (1/2)

→ **Impulsion discrète :**

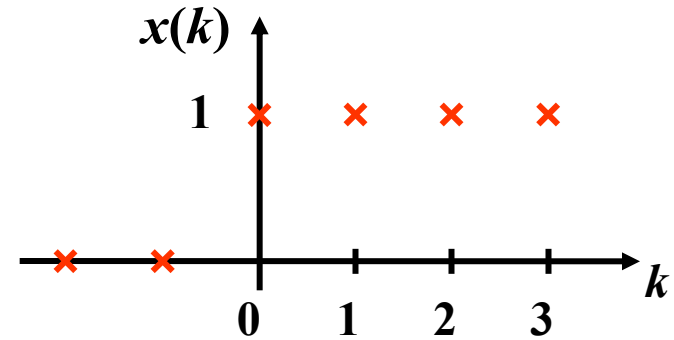


$$x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

( $\delta$  est le signe de Kronecker)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1$$

→ **Échelon unitaire :**



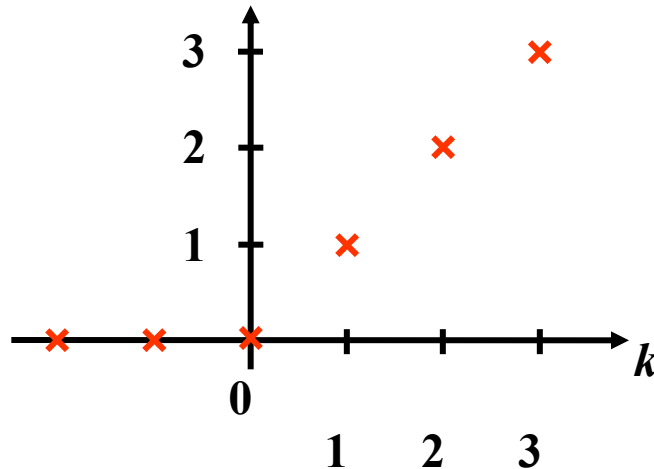
$$x(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \times z^{-k} \quad , |z| > 1 \\
 &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}
 \end{aligned}$$



# Exemples de Transformées en $z$ (2/2)

→ **Rampe discrète :**



$$x(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

→ **Exponentielle discrète :**

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = Z(a^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (a z^{-1})^k$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

# Fonction de transfert en $z$

→ **Système linéaire stationnaire à temps discret :**

$$u(k) \longrightarrow \boxed{h(n-k)} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n h(n-k) u(k)$$

→ **Théorème de convolution discrète :**

$$Z[x(n) * y(n)] = Z\left[\sum_{k=0}^{+\infty} x(n-k) y(k)\right] = X(z) Y(z)$$

→ **Application du théorème de convolution discrète :**

$$U(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z) U(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}$$

# Représentation par équation aux différences

→ **Fonction de transfert en  $z$  :**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

**D'où :**

$$\left[ 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} \right] Y(z) = \left[ a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} \right] U(z)$$

→ **Propriété de translation de la transformée en  $z$  :**

$$y(k) = a_0 u(k) + a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots + a_m u(k-m) - b_1 y(k-1) - \dots - b_n y(k-n)$$

# Obtention de la Fonction de Transfert en $z$ à la Période d'échantillonnage $T_e$ (1/2)

→ Utilisation de tables :

$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aTe}} \right)$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aTe}}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aTe})z}{(z-1)(z - e^{-aTe})}$

# Obtention de la Fonction de Transfert en $z$ à la Période d'échantillonnage $T_e$ (2/2)

→ Avec Matlab à partir de la FT en  $p$  :

**Exemple :**  $H_c(p) = \frac{a}{p(p+a)} = \frac{a}{p^2 + ap + 0} \rightarrow H_d(z) = ?$

- $H_c = \text{tf}([a], [1 \ a \ 0])$  (puissances décroissantes de  $p$ )

→ Passage au temps discret :

- $T_e = 0.1$
- $H_d = \text{c2d}(H_c, T_e, 'zoh')$

→ Récupération numérateur et dénominateur :

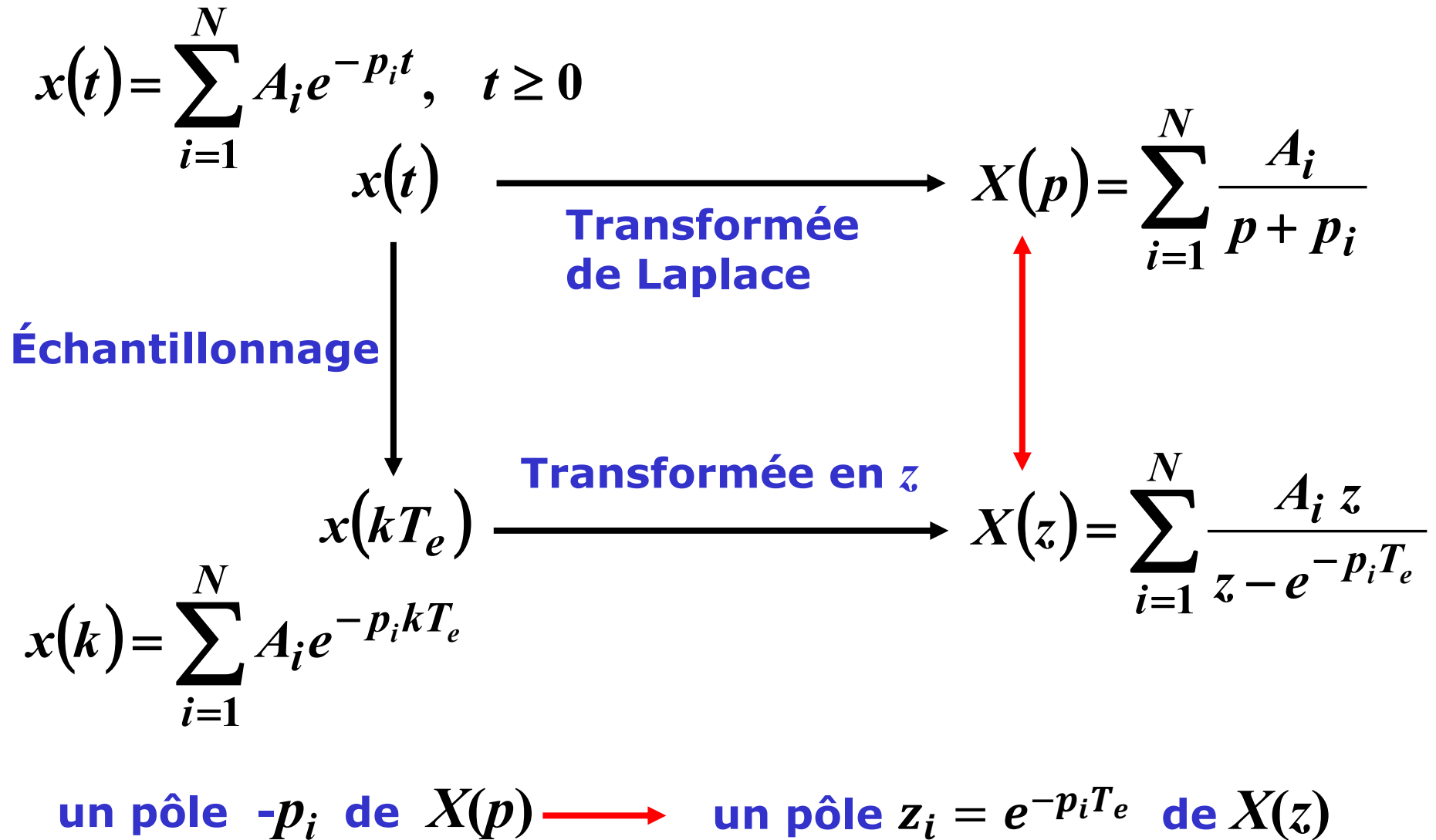
- $[\text{num\_d}, \text{den\_d}] = \text{tfdata}(H_d, 'v')$

→ Autre méthode :

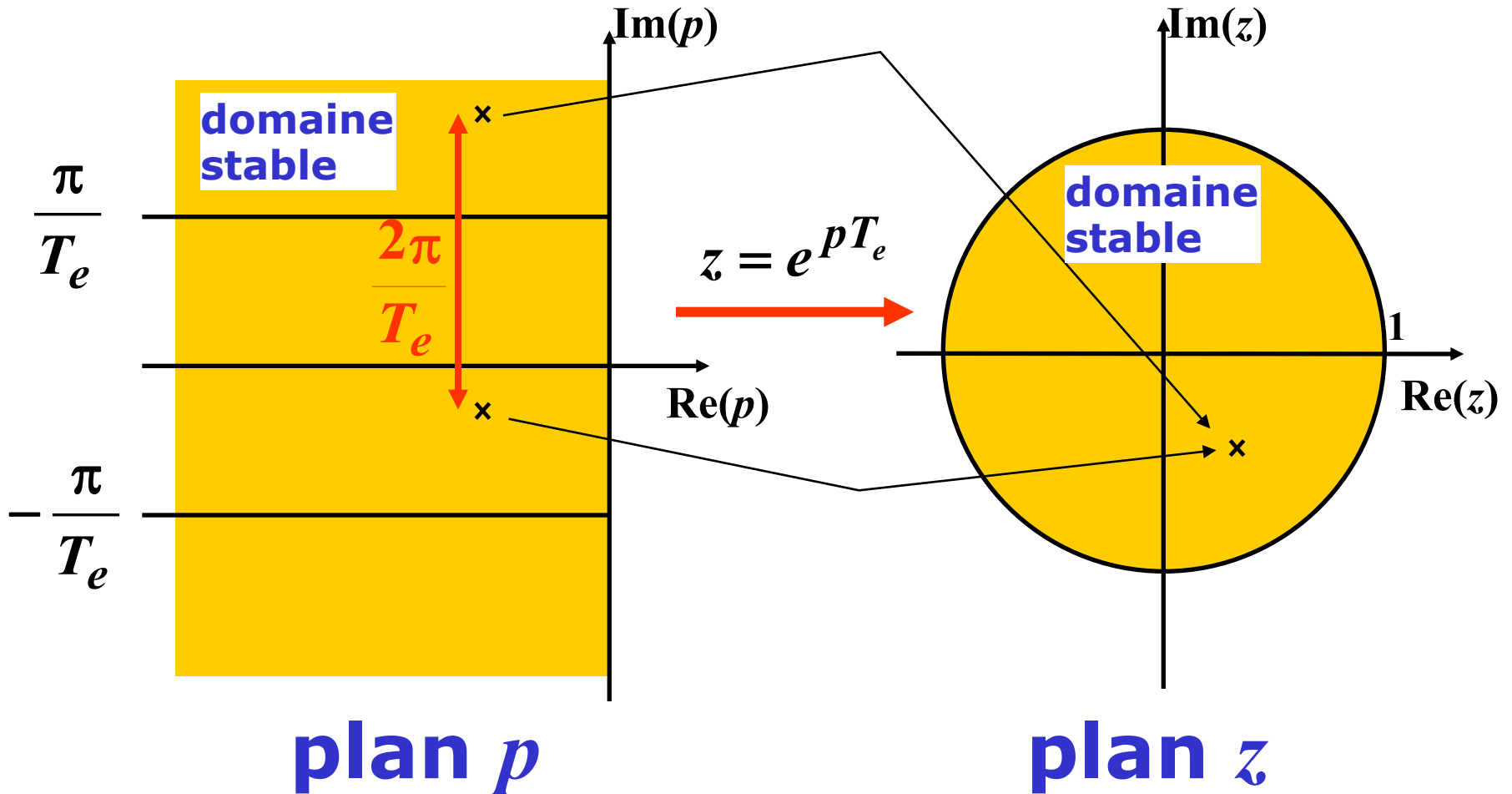
- $[\text{num\_d}, \text{den\_d}] = \text{c2dm}([a], [1 \ a \ 0], T_e, 'zoh')$
- $H_d = \text{tf}(\text{num\_d}, \text{den\_d}, T_e)$

(en puissances décroissantes  $z$ , croissantes de  $z^{-1}$ )

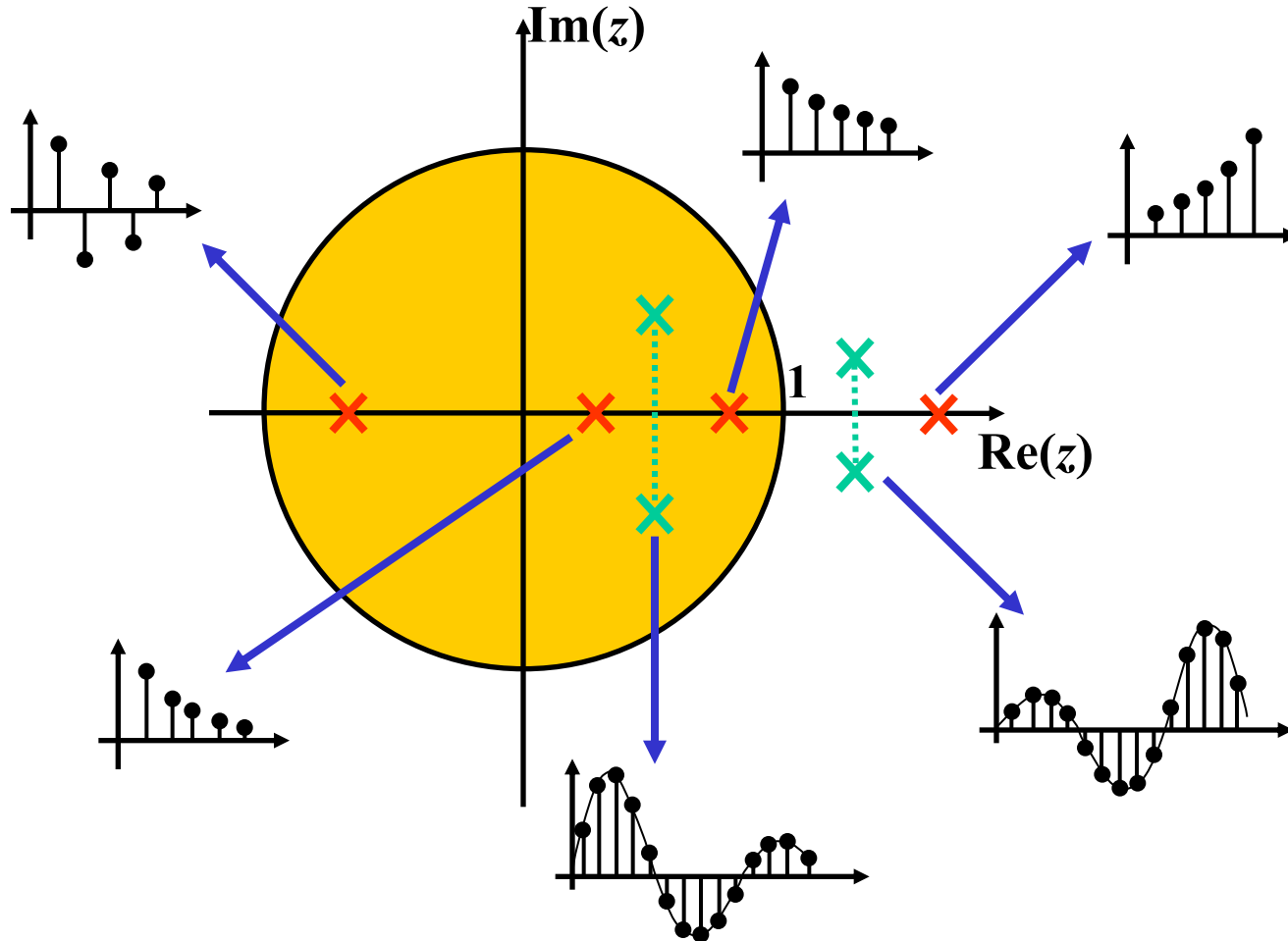
# Lien entre les plans $p$ et $z$ (1/2)



# Lien entre les plans $p$ et $z$ (2/2)



# Influence des pôles sur le régime transitoire





# **Stabilité EB-SB des fonctions de transfert à temps discret**

# Stabilité EB-SB

- **Définition :** Un système est stable au sens EB-SB  
 (Entrée Bornée – Sortie Bornée)  
 si pour toute entrée bornée, sa sortie l'est aussi ♦

$$u(k) \longrightarrow \boxed{h(n-k)} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n h(n-k)u(k)$$

- **Théorème (Stabilité EB-SB) :**  
 Une C.N.S. de stabilité EB-SB d'un système est que  
 sa réponse impulsionnelle soit absolument  
 sommable, i.e :

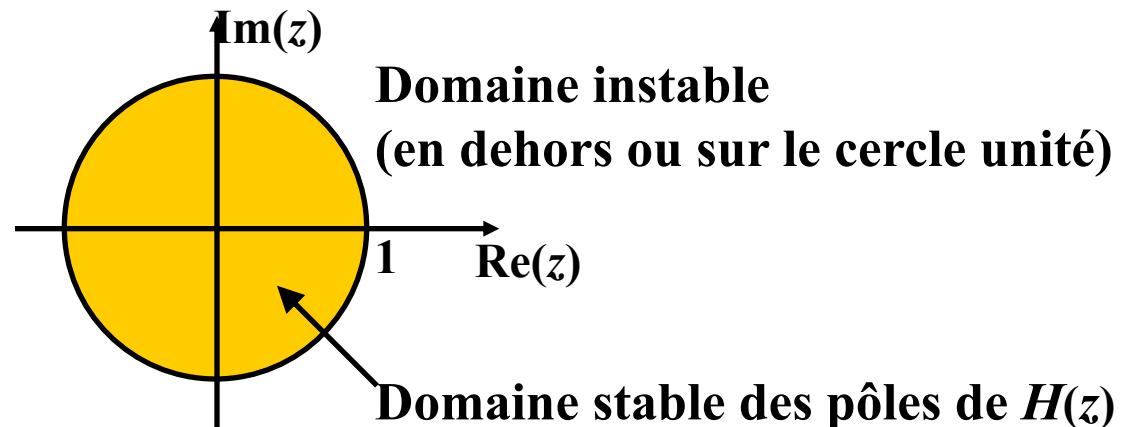
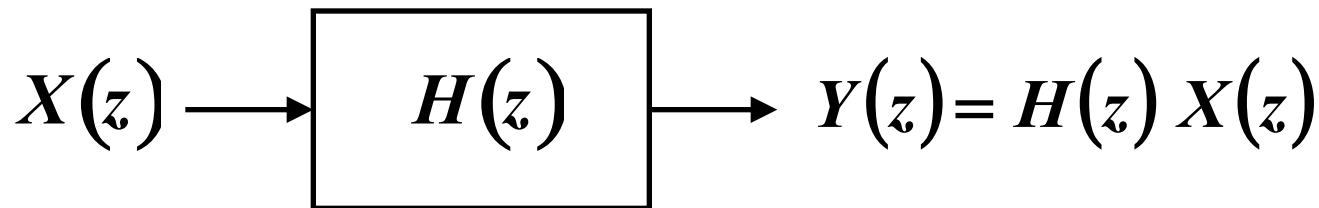
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$



# Stabilité EB-SB et pôles de $H(z)$

## → **Théorème (Stabilité et pôles de $H(z)$ ) :**

**Un système linéaire causal discret est stable au sens EB-SB si et seulement si tous les pôles de  $H(z) = Z [ h(k) ]$  sont à l'intérieur du cercle unité** ♦



# Détermination numérique de la stabilité

$$X(z) \rightarrow \boxed{H(z) = \frac{N(z)}{T(z)}} \rightarrow Y(z) = H(z) X(z)$$

Avec :  $T(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

→ Utilisation de Matlab pour des valeurs particulières des coefficients  $a_i$  :

Exemple :  $T(z) = z^3 - 2.4z^2 + 2.41z - 0.904$

→ `racines = roots( [ 1 -2.4 2.41 -0.904 ] )`

- racines :  $\{ 0.8+0.7i ; 0.8-0.7i ; 0.8 \}$

→ `modules = abs( racines )`

- modules :  $\{ 1.063 ; 1.063 ; 0.8 \}$

→ Conclusion : système instable

# Caractéristiques des Fonctions de Transfert à temps discret

$$\begin{aligned}
 \frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_m z^{n-m}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} \\
 &= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{z - z_{z1}}{z - z_{p1}} \cdot \frac{z - z_{z2}}{z - z_{p2}} \dots \cdot \frac{z^2 - 2 \cdot \text{Re}(z_{zi})z + |z_{zi}|^2}{z^2 - 2 \cdot \text{Re}(z_{pi})z + |z_{pi}|^2} \cdot \frac{z^2 - 2 \cdot \text{Re}(z_{zj})z + |z_{zj}|^2}{z^2 - 2 \cdot \text{Re}(z_{pj})z + |z_{pj}|^2} \\
 &= \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 - z_{z1} \cdot z^{-1}}{1 - z_{p1} \cdot z^{-1}} \cdot \frac{1 - z_{z2} \cdot z^{-1}}{1 - z_{p2} \cdot z^{-1}} \dots \cdot \frac{1 - 2 \cdot \text{Re}(z_{zi}) \cdot z^{-1} + |z_{zi}|^2 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot \text{Re}(z_{pi}) \cdot z^{-1} + |z_{pi}|^2 \cdot z^{-2}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \text{Re}(z_{zj}) \cdot z^{-1} + |z_{zj}|^2 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot \text{Re}(z_{pj}) \cdot z^{-1} + |z_{pj}|^2 \cdot z^{-2}}
 \end{aligned}$$

avec  $n, m \in \mathbb{N}^+$ ,  $\infty > n \geq m$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $|a_i|, |b_i| < \infty$ .

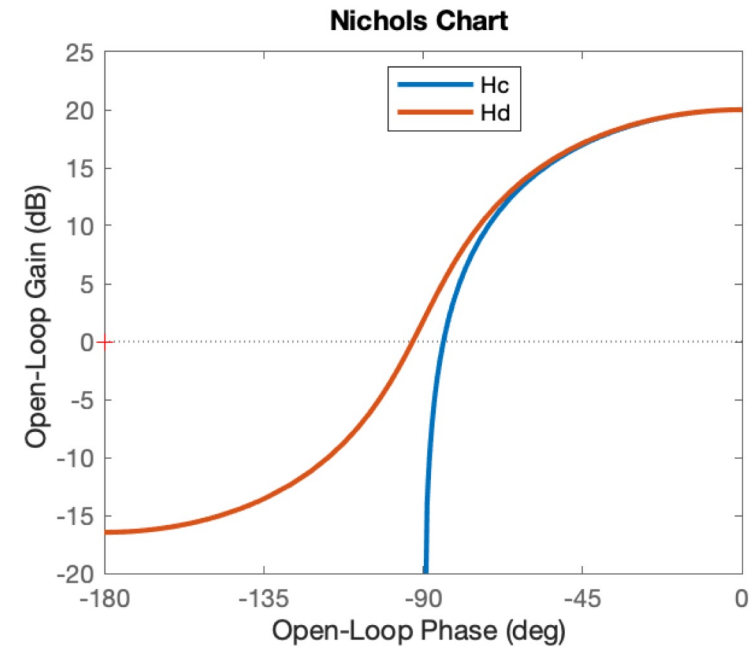
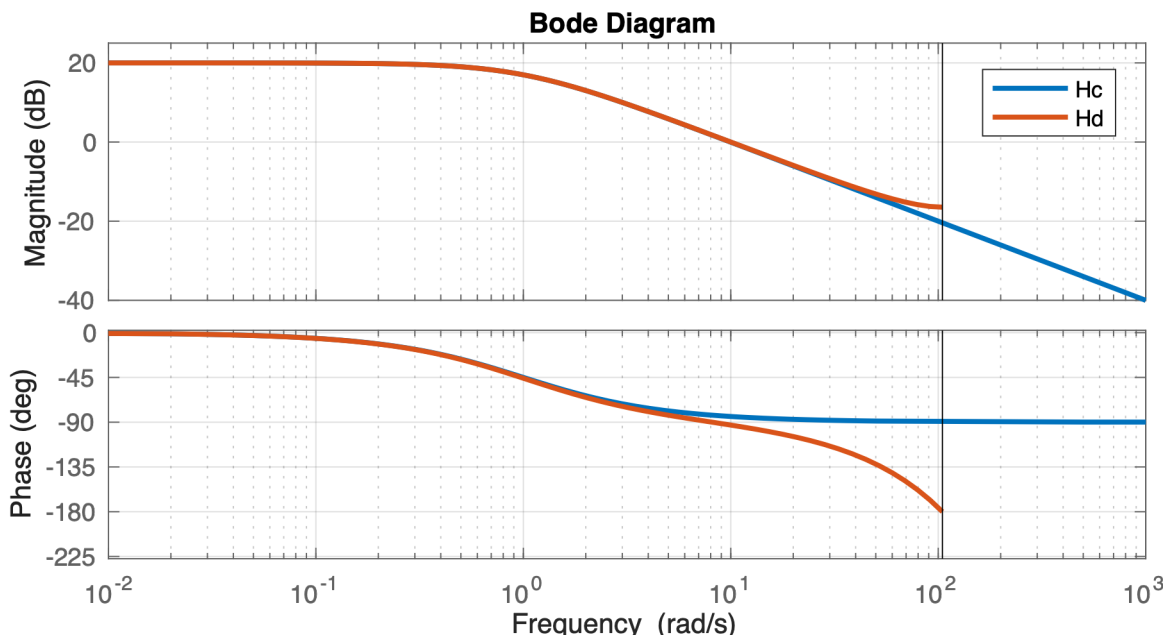
- **Gain statique de H(z) :**  $H(z = 1) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{a_0 + a_1 + \dots + a_n}$   $z = e^{pT_e}$
- **Gain à  $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$  :**  $H(z = -1)$
- **Pôles de H(z) :** Racines de A(z) : réelles ou complexes conjuguées
  - Pôle stable : module  $< 1$  (à l'intérieur du cercle unité)
  - Pôle instable : pôle dont le module est supérieur ou égal à 1.
  - H(z) stable si et seulement si tous les pôles à l'intérieur du cercle unité.
  - A un pôle  $z_{pi}$  à temps discret correspond un pôle  $p_i$  à temps continu :  $p_i = \frac{1}{T_e} \ln(z_{pi})$
  - Soient deux pôles  $z_1$  et  $z_2$ , si  $|z_1| > |z_2|$  alors  $z_1$  sera nommé pôle lent et  $z_2$  pôle rapide

# **Représentation Fréquentielle des fonctions de transfert à temps discret**

# Diagrammes fréquentiels pour une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre à temps discret

$$H_c(p) = \frac{10}{p + 1} \xrightarrow[\text{avec Bloqueur d'Ordre Zéro}]{T_e = 0.03 \text{ s}} H_d(z) = \frac{0.296}{z - 0.9704}$$

$$H_c(p = j\omega) = \frac{10(1 - j\omega)}{1 + \omega^2} \quad H_d(z = e^{j\Omega}) = \frac{0.296(\cos(\Omega) - 0.9704 - j\sin(\Omega))}{(\cos(\Omega) - 0.9704)^2 + (\sin(\Omega))^2}$$



# Méthodes approchées de calcul de la $T(z)$



# Cas d'application de méthodes approchées de calcul de la $T(z)$

---

- **Détermination de la  $T(z)$  par une méthode approchée possible si :**

- **Petite période d'échantillonnage par rapport aux constantes de temps caractéristiques du système**

$$T_e \leq \frac{\pi}{10^{Ndécades} \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|}$$

avec typiquement  $Ndécades = 1 \text{ à } 2$

- **Utilisation des opérateurs :**

- ***Avance d'une période  $q$***
- ***Retard d'une période  $q^{-1}$***

- **Vérification par comparaison des diagrammes de Bode**

# Méthode du rectangle arrière

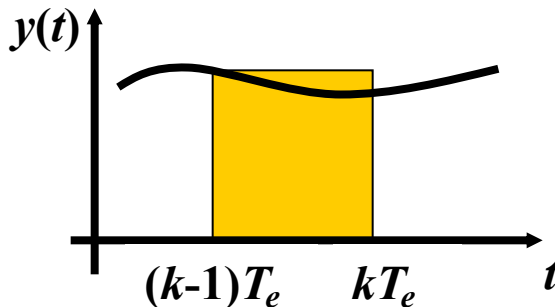
→ **Méthode d'Euler explicite ou transformation en  $\delta$**

→ **Développement limité au premier ordre de  $z = e^{pT_e}$**

**si  $f_e \gg \omega_{BF}$  alors  $z = e^{pT_e} \approx 1 + pT_e + O^2$**

**d'où :** 
$$p = \frac{q-1}{T_e} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1 + T_e p$$

→ **Justification graphique :**  $\frac{I(p)}{Y(p)} = \frac{1}{p}$



$$\frac{I(q)}{Y(q)} = \frac{T_e}{q-1} = \frac{T_e q^{-1}}{1-q^{-1}}$$

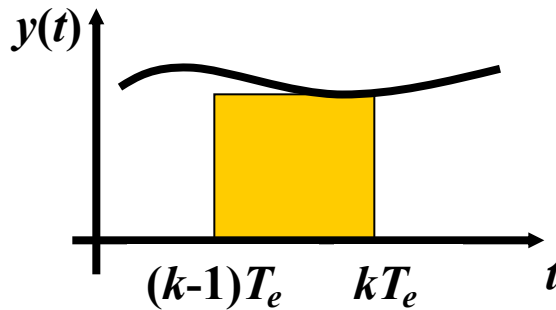
$$I(q) = q^{-1} I(q) + T_e q^{-1} Y(q)$$

# Méthode du rectangle avant

## → Méthode d'Euler implicite

$$p = \frac{q-1}{T_e q} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{1 - T_e p}$$

## → Justification graphique :



$$\frac{I(p)}{Y(p)} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{I(q)}{Y(q)} = \frac{T_e q}{q-1} = \frac{T_e}{1-q^{-1}}$$

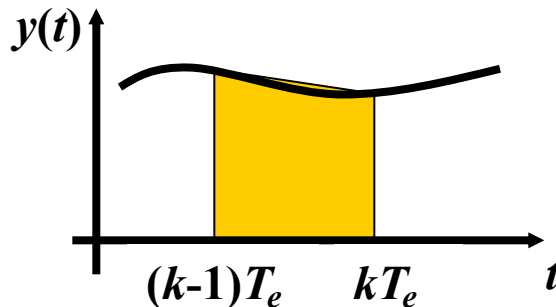
$$I(q) = q^{-1} I(q) + T_e Y(q)$$

# Méthode de Tustin

→ **Méthode** Trapézoïdale, bilinéaire **ou** homographique

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{q-1}{q+1} \quad \leftrightarrow \quad q = \frac{2+T_e p}{2-T_e p} = \frac{1+\frac{T_e}{2}p}{1-\frac{T_e}{2}p}$$

→ **Justification graphique :**



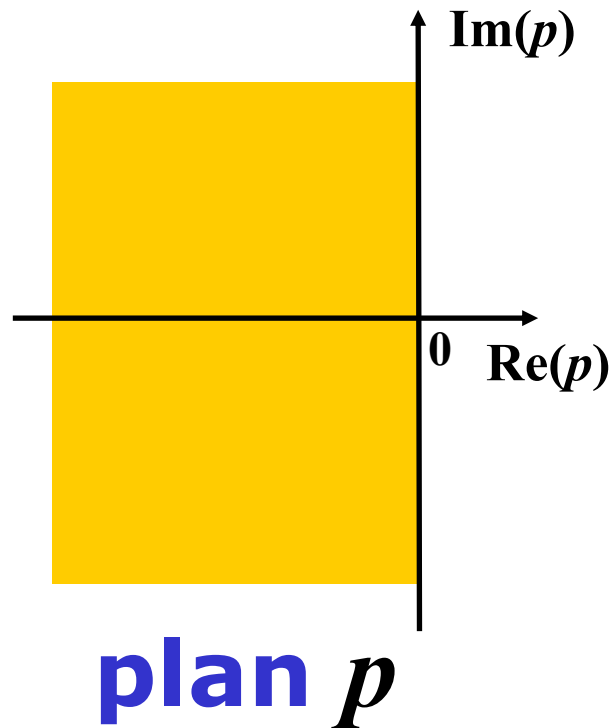
$$\frac{I(p)}{Y(p)} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{I(q)}{Y(q)} = \frac{T_e}{2} \frac{q+1}{q-1} = \frac{T_e}{2} \frac{1+q^{-1}}{1-q^{-1}}$$

$$I(q) = q^{-1} I(q) + \frac{1}{2} T_e \left( 1 + q^{-1} \right) Y(q)$$

# Stabilité des méthodes approchées

→ Que deviennent, par ces méthodes, dans le plan en  $z$  les pôles stables dans le domaine en  $p$  ?



$$z = 1 + T_e p$$

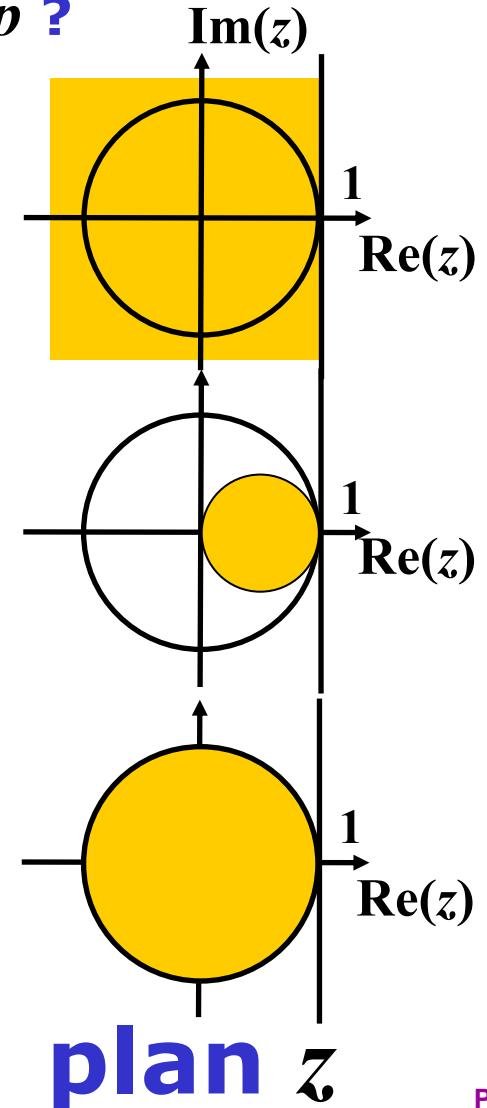
→  
Euler explicite

$$z = \frac{1}{1 - T_e p}$$

→  
Euler implicite

$$z = \frac{2 + T_e p}{2 - T_e p}$$

→  
Tustin



# Comparaison de diagrammes de Bode (1/2)

**Numérisation du correcteur PIDF :**  $C_{cont}(p) = \frac{10}{1+0.001p} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{p} + \frac{0.1p}{1+0.01p} \right]$   
 avec  $T_e = 0,001s$  ( $\omega_{max} = \pi/T_e = 3141$  rad/s)

Pôle le plus rapide : 1000 rad/s



# Comparaison de diagrammes de Bode (2/2)

**Numérisation du correcteur PIDF :**  $C_{cont}(p) = \frac{10}{1+0.001p} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{p} + \frac{0.1p}{1+0.01p} \right]$   
 avec  $T_e = 0,01s$  ( $\omega_{max} = \pi/T_e = 314 \text{ rad/s}$ )

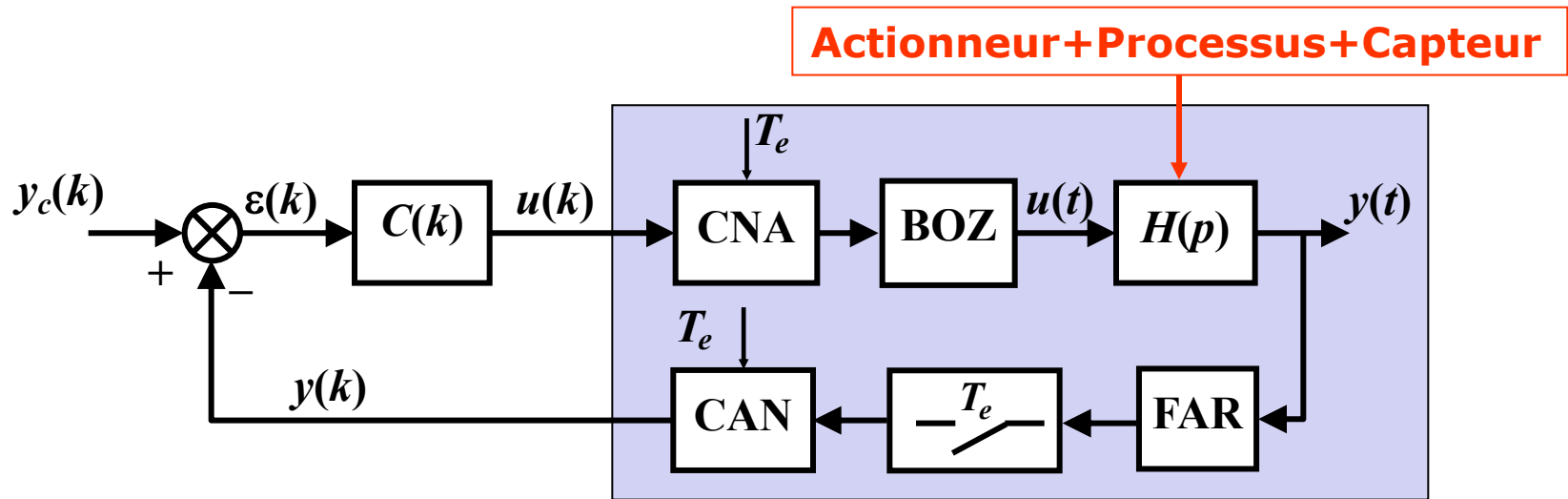
Pôle le plus rapide : 1000 rad/s



# **Modélisation d'un système pilote par calculateur**



# Représentation d'un système continu par ordinateur

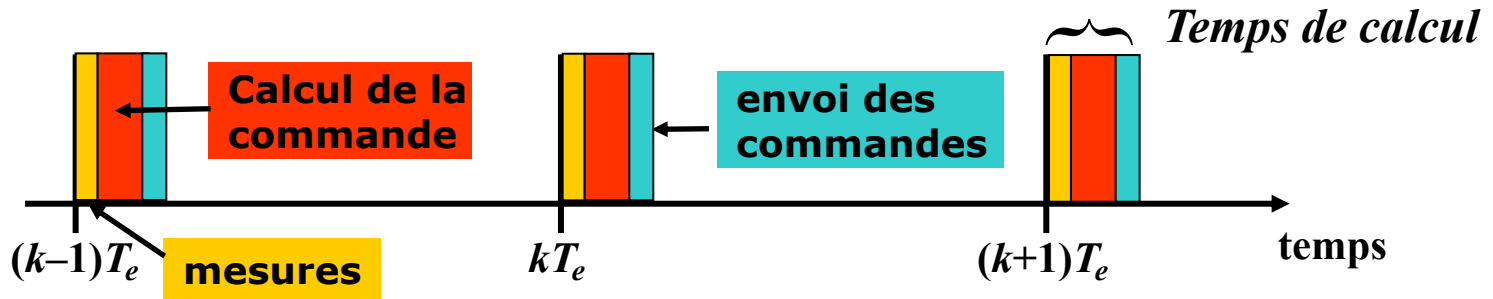


$$H(z) = Z[H_{BOZ}(p)H(p)] = Z\left[\frac{1 - e^{-T_e p}}{p} H(p)\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

Il pourra être nécessaire d'ajouter des retards purs liés aux éléments de la chaîne d'acquisition tel que le FAR

# Prise en compte du temps de calcul du calculateur

→ Cas où le temps de calcul est petit devant  $T_e$  :



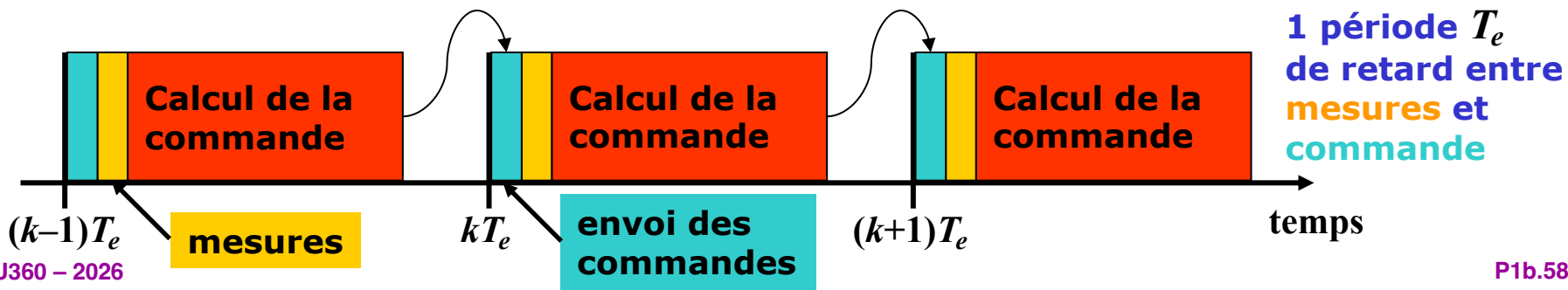
• Retard de phase introduit par le temps de calcul :

$$\Delta\varphi = - \text{temps\_calcul} \times \omega_c \quad \text{avec : } \|H_{BO}(j\omega_c)\| = 1$$

→ Cas où le retard est proche de la période  $T_e$  :

→ Faire la synthèse du correcteur après avoir ajouté explicitement un retard  $T_e$  au modèle  $H(z)$  :

→  $H(z)$  devient  $z^{-1}H(z)$  pour la synthèse



# Exemple de calcul de $H(z)$

$$H(p) = \frac{G}{1 + \tau p} + \text{BOZ} \quad \text{d'où} \quad H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{G}{p(1 + \tau p)} \right]$$

**Décomposition en éléments simples :**

$$\frac{G}{p(1 + \tau p)} = \frac{G}{p} - \frac{G\tau}{1 + \tau p}$$

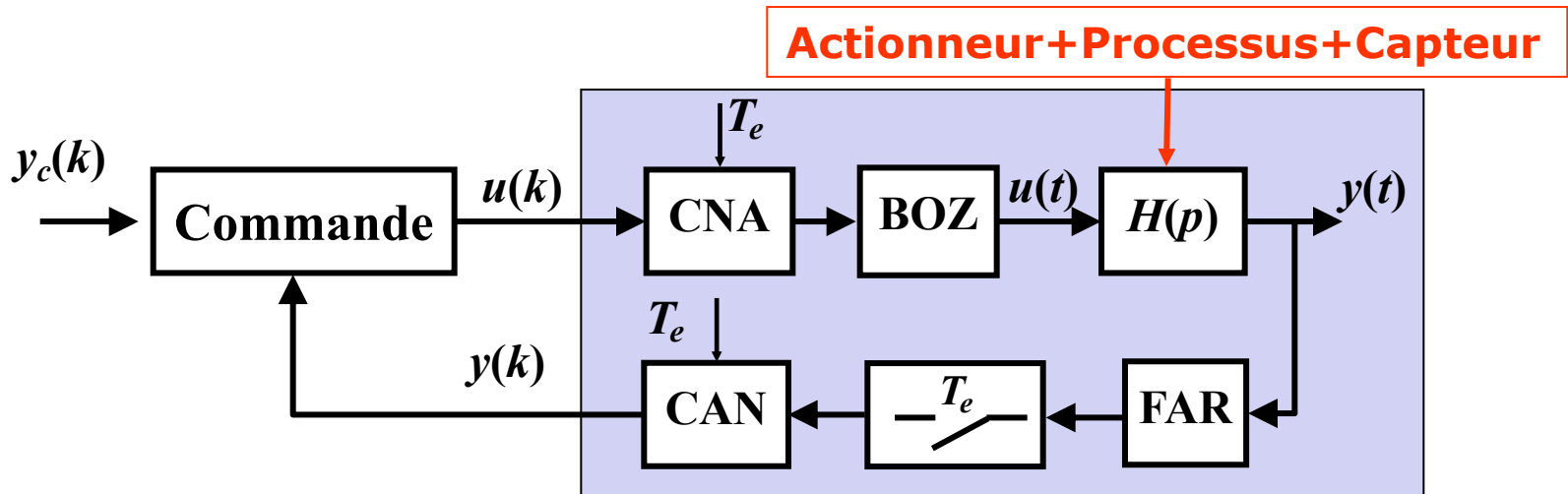
**Propriété de linéarité de la T.Z. :**

$$Z \left[ \frac{G}{p} - \frac{G\tau}{1 + \tau p} \right] = Z \left[ \frac{G}{p} \right] - Z \left[ \frac{G\tau}{1 + \tau p} \right] = \frac{G}{1 - z^{-1}} - \frac{G}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} z^{-1}}$$

**Après simplifications :**

$$H(z) = \frac{G(1 - a)z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad \text{avec} \quad a = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

# Modélisation d'un système piloté par ordinateur



- **Simulation numérique :**

Le simulateur est constitué par l'ensemble des éléments (« boîtes ») représentés par leurs modèles complets (gain+offset+bruit+saturation)

- **Modèle pour la commande par la mise en série de :**

- Gain dynamique ou fonction de transfert de chacun des éléments avec le domaine de validité fréquentielle
- Retards pur de chacun des éléments :
  - Retard lié au temps de calcul de la commande
  - Retard lié au FAR
  - Retard du CAN

Si la somme des retards  $\ll T_e$ , les retards seront pris en compte par les marges de robustesse.