

Automatique

Cours AU-360

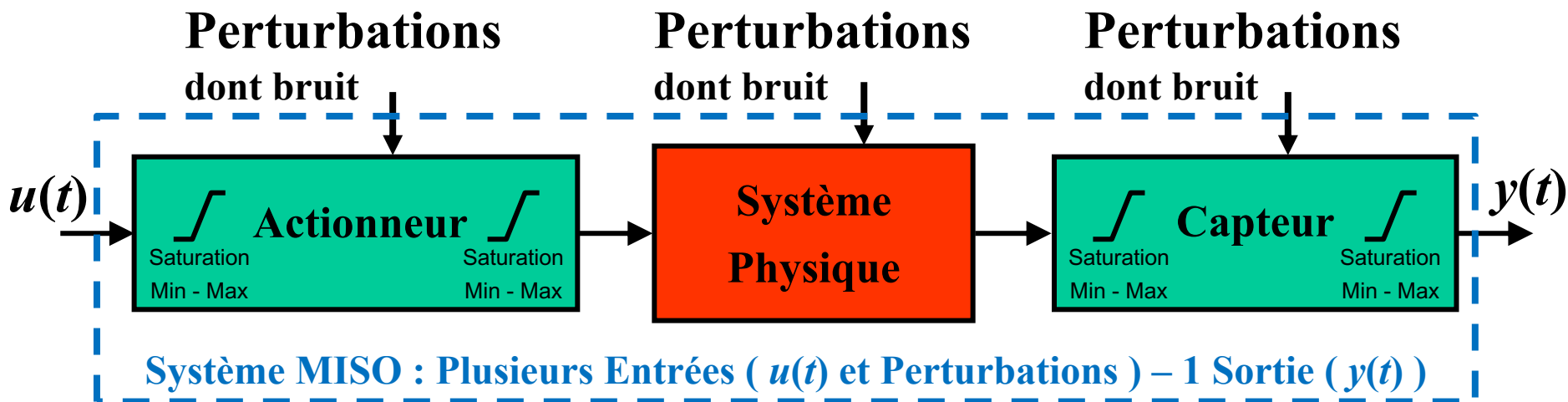
Structure de commande, contraintes et objectifs d'un système asservi MISO

1. La connaissance du modèle du système à commander
2. Robustesse et Fonctions de sensibilité
3. Stabilité de l'association de systèmes dynamiques
4. Prédiction de la stabilité de la boucle fermée par l'analyse de la boucle ouverte
5. Marges de stabilité (de robustesse) des systèmes asservis
6. La structure de commande à 2 degrés de liberté et ses propriétés
7. Contraintes sur le correcteur $C(p)$ du système asservi
8. Eléments de choix du filtre $F(p)$ de la consigne
9. Spécifications. En résumé

La connaissance du modèle du système à commander

Les éléments du système MISO

(Multi Input – Single Output) à commander

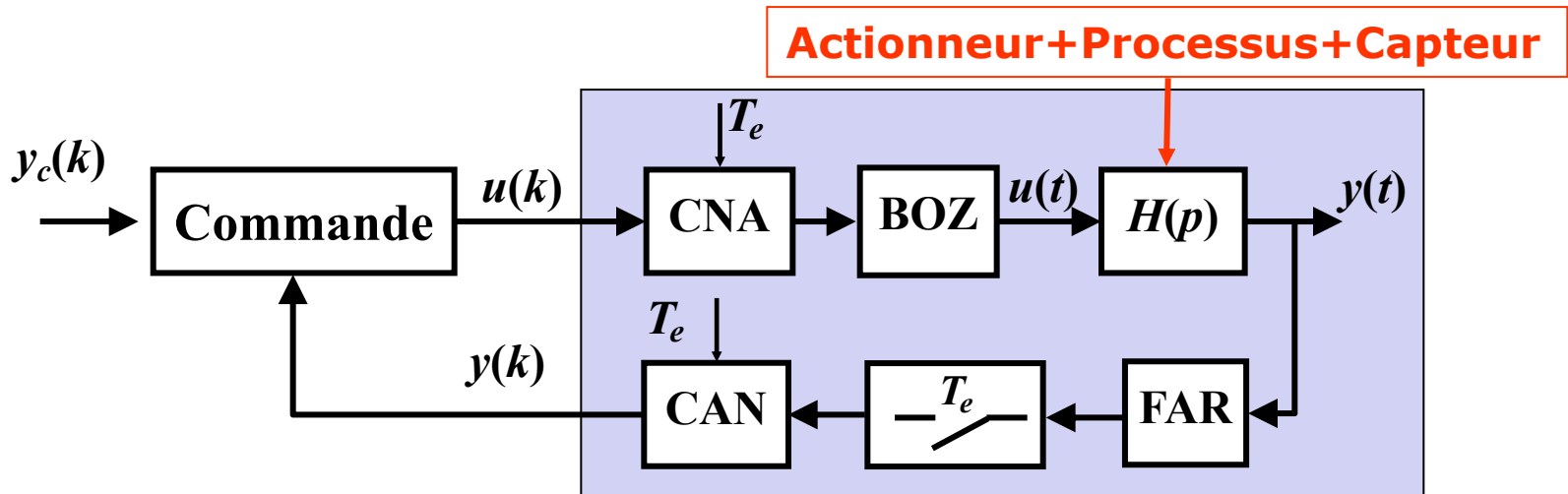


- Le bruit est tout signal non contrôlé dont le spectre fréquentiel est en dehors de la bande fréquentielle d'intérêt, mais tout de même pris en compte par la commande.
- Les perturbations, dans la bande fréquentielle d'intérêt, devraient être annihilées par la commande.
- L'actionneur et le capteur sont supposés avoir des comportements invariants.
- L'actionneur et le capteur possèdent toujours des saturations en entrée et en sortie prises en compte par la commande.
- Le système physique est le plus souvent non-linéaire et variant ce qui impose que la commande devra être robuste aux incertitudes sur le modèle qui sera adopté pour le système pour construire la commande.

Nota : La bande fréquentielle d'intérêt sera le plus souvent donnée par le domaine de validité.

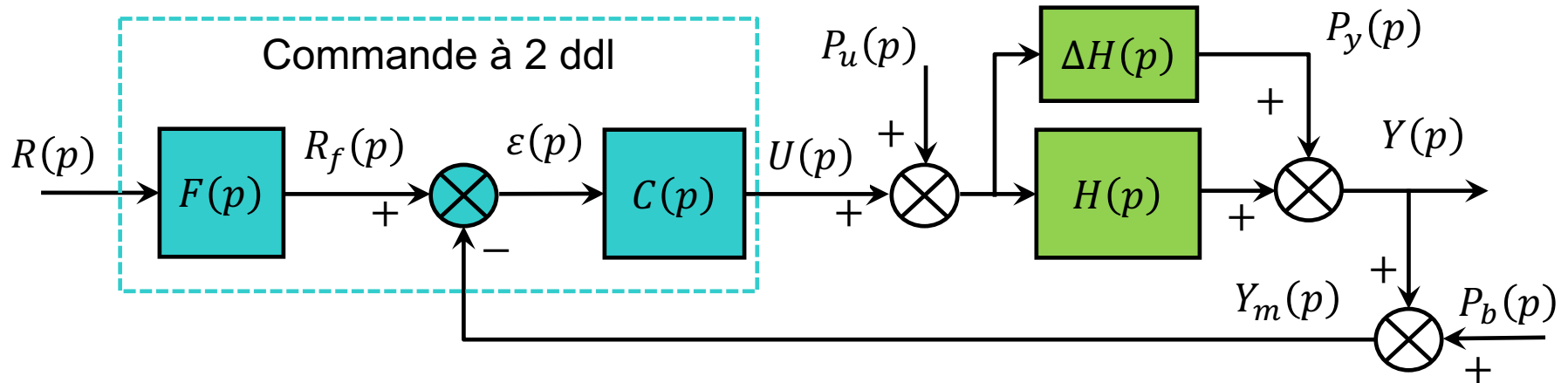
- **Hypothèses :**
 - **Comportement linéaire du système à commander dans le domaine d'intérêt et invariance à son échelle de temps**
 - => Choix d'un **modèle linéaire** à temps continu ou temps discret
 - => **Robustesse** de la commande aux variations lentes du système à commander
 - => Les saturations (non linéaires) devront être prises en compte spécifiquement par la commande : **saturation des intégrateurs (anti windup)**
 - **Perturbations exogènes additives**
 - => Les perturbations seront rassemblées sous deux formes :
 - $P_u(t)$: Perturbation additive de commande qui vient s'ajouter à la commande
 - $P_b(t)$: Perturbation additive de bruit qui vient s'ajouter à la mesure
 - Ce bruit sera caractérisé (mesuré) par son amplitude $|P_b(t)|$
- **Le modèle linéaire du système à commander est donné par :**
 - Une fonction de transfert $H_c(p)$ ou $H_d(z)$ avec :
 - son domaine de validité $\omega_{validité}$
 - un majorant L_{max} du retard pur qui peut exister entre l'instant t de mesure de la sortie $y(t)$ et l'instant $t + \Delta t$ d'application de la commande $u(t)$ qui en est issue
 - Le système réel n'étant pas invariant sur un temps long (\gg constantes de temps du modèle) => critères de robustesse de la commande à ces évolutions.

Modélisation du système piloté par ordinateur



- **Modèle pour la commande par la mise en série de :**
 - Gain dynamique ou fonction de transfert de chacun des éléments avec le domaine de validité fréquentielle $\omega_{validité}$
 - Retards purs de chacun des éléments :
 - Retard pur du système à commander
 - Retard éventuel de communication
 - Retards du système de commande : temps de calcul, FAR, CAN
- => somme des retards purs majorée par L_{max}
- **Commande :**
 - Elaborée à temps continu ou à temps discret
 - Implantée à temps discret

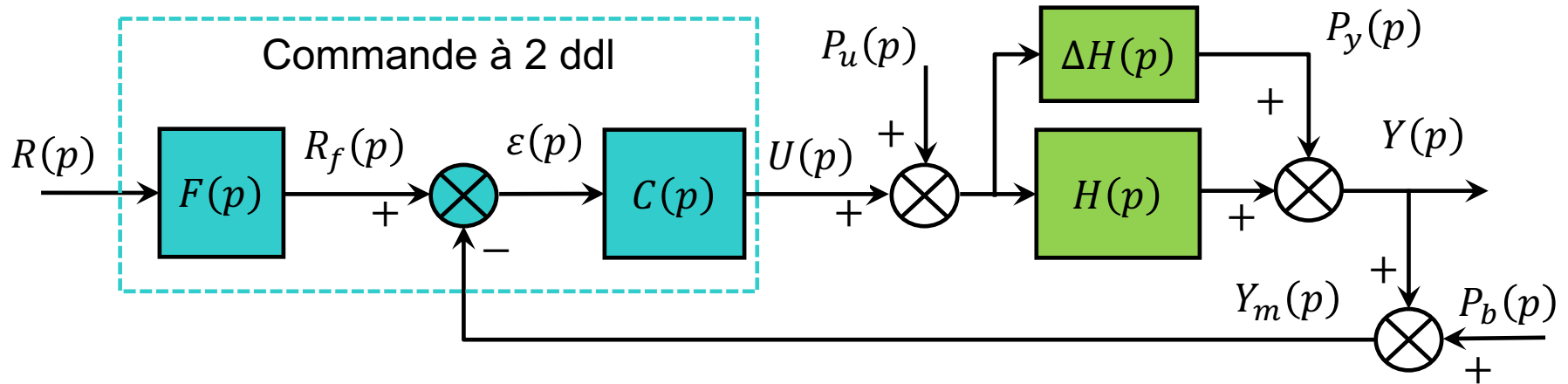
Objectifs généraux pour la synthèse d'une commande



- **Sécurité** : assurer la stabilité (le contrôle) du système bouclé
- Traitement des entrées exogènes :
 - **Py** : représente les variations lentes $\Delta H(p)$ de $H(p)$
 - ✓ Objectif : Rejet de P_y pour assurer la **robustesse** du système bouclé
 - **Pu** : perturbation de commande dans la bande fréquentielle d'intérêt
 - ✓ Objectif : Rejet de P_u pour minimiser l'effet sur la sortie Y
 - **Pb** : bruit de mesure (hors bande fréquentielle d'intérêt) présent sur la sortie mesurée
 - ✓ Maîtrise du gain en Hautes Fréquences de $C(p)$ pour maîtriser l'amplitude du bruit présent sur la commande U
 - **R** : consigne de référence que doit suivre la sortie
 - ✓ Amener la sortie Y à la valeur de référence désirée R en maîtrisant le dépassement

Robustesse et Fonctions de sensibilité

Robustesse de la commande d'un système



- Robustesse** : capacité d'une commande à maintenir un fonctionnement "correct" :
 - en présence de perturbations (P_u et P_b)
 - lorsque le système $H(p)$ est mal connu ou évolue au cours du temps ($\Delta H(p) \neq 0, P_y \neq 0$).
- Fonction de sensibilité de sortie $S(p)$** :

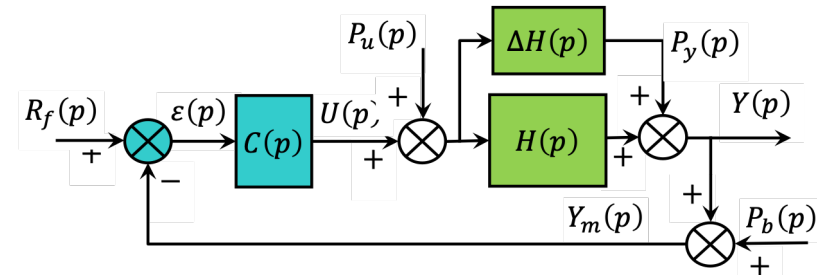
$$S(p) \triangleq \frac{d(\log H_{BF})}{d(\log H)} = \frac{dH_{BF}}{H_{BF}} \bigg/ \frac{dH}{H}, \quad H_{BF} = \frac{HC}{1+HC}$$

Permet d'évaluer pour chaque fréquence l'influence d'une variation de $H(j\omega)$ (représentée par $\Delta H(j\omega)$) sur le système bouclé H_{BF} .

Fonctions de Sensibilité

$$\frac{dH_{BF}}{H_{BF}} \triangleq S(p) \frac{dH}{H},$$

$$H_{BF} = \frac{HC}{1+HC} = 1 - \frac{1}{1+HC}$$



$$\frac{\partial H_{BF}}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left(1 - \frac{1}{1+HC} \right) = \frac{C}{(1+HC)^2} = \frac{1}{1+HC} \frac{H_{BF}}{H}$$

D'où la fonction de sensibilité de sortie $S(p)$:

$$S(p) = \frac{1}{1+HC} = \frac{1}{1+H_{BO}}$$

et la fonction de sensibilité complémentaire :

$$T(p) \triangleq 1 - S = \frac{HC}{1+HC} = H_{BF}$$

Lorsqu'un système satisfait : $pH_{BO} = pH_C \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$,

les fonctions de sensibilité de sortie **$S(p)$**

et de sensibilité complémentaire **$T(p)$**

satisfont les propriétés suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \int_0^{+\infty} \log \left| \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)} \right| d\omega = \pi \sum |p_i|$$

$$\int_0^{+\infty} \log |T(1/j\omega)| d\omega = \int_0^{+\infty} \log \left| \frac{H_{BO}(1/j\omega)}{1 + H_{BO}(1/j\omega)} \right| d\omega = \pi \sum \left| \frac{1}{z_i} \right|$$

où : p_i sont les pôles de $H_{BO}(p)$ à parties réelles positives

et z_i sont les zéros de $H_{BO}(p)$ à partie réelle positive

un pôle ou un zéro d'ordre n est compté n fois.

Interprétation des intégrales de Bode

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)| d\omega = \pi \sum |p_i|$$

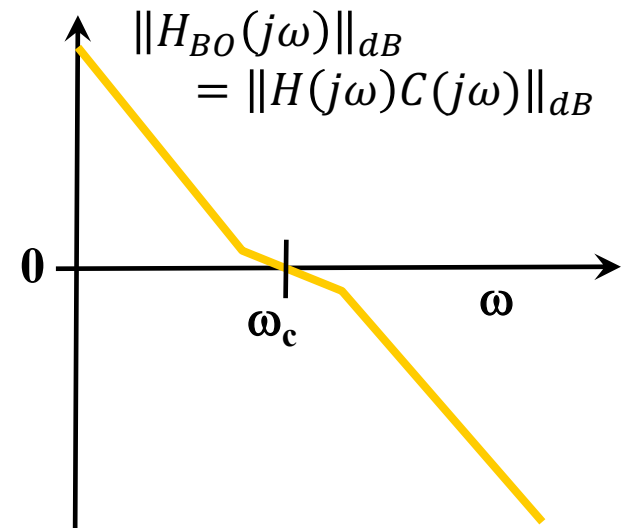
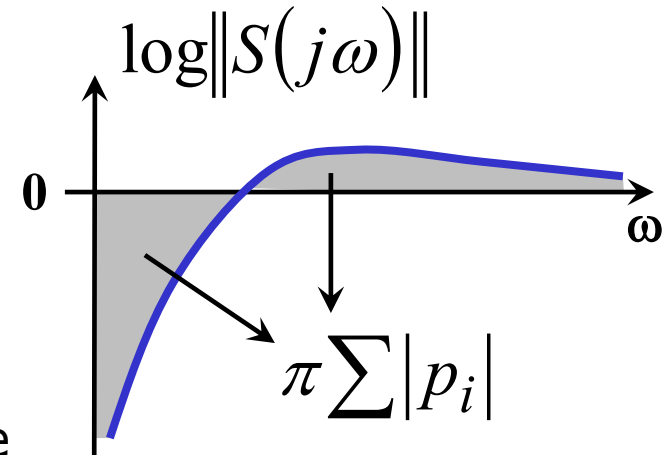
Les fonctions de sensibilité :

- Ne peuvent pas être rendues petites à toutes les fréquences (règle du tas de sable dans une pièce fermée)
- Augmentent lorsqu'il y a des pôles ou des zéros instables

De plus : $T(p) + S(p) = 1$

On privilégiera une faible sensibilité en basses fréquences pour minimiser l'erreur statique :

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+H_{BO}(j\omega)|} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad \text{avec } H_{BO}(p) = H(p)C(p)$$



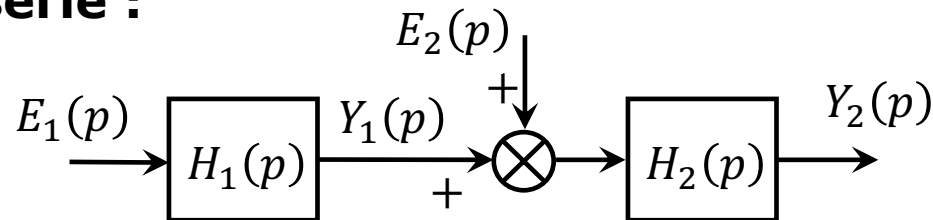
Stabilité de l'association de systèmes dynamiques

Stabilité EB-SB de l'association de systèmes dynamiques

Proposition : **Stabilité EB-SB de l'association de systèmes dynamiques**

Un système dynamique défini par une matrice de transfert $M(p)$ entre toutes les entrées exogènes possibles $E(p)$ et toutes les sorties $Y(p)$ des fonctions de transfert $H_i(p)$ qui composent le système sera stable au sens EB-SB si et seulement si toutes les fonctions de transfert $H_i(p)$ de $M(p)$ sont stables au sens EB-SB. ♦

Systèmes en série :

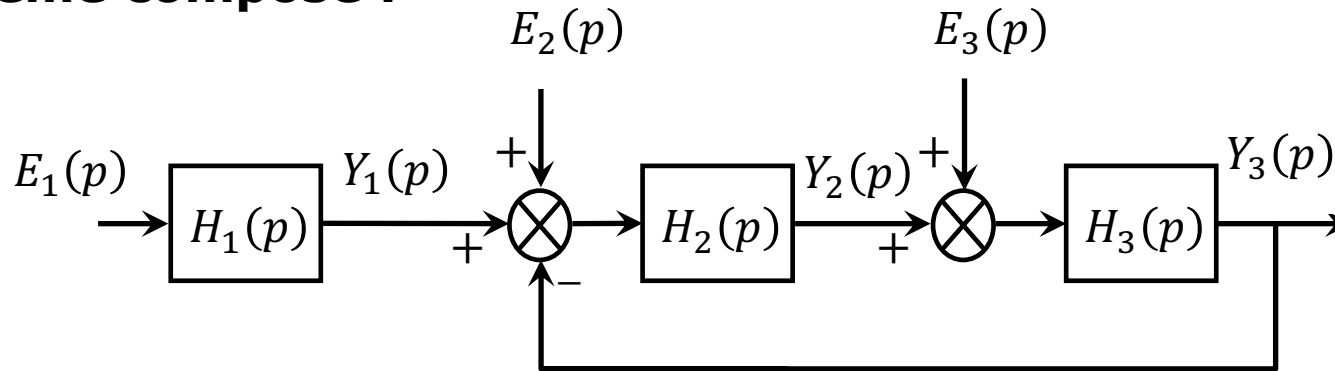


$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_1 H_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si tous les pôles des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont à parties réelles strictement négatives.

Stabilité EB-SB de l'association de systèmes dynamiques

Système composé :

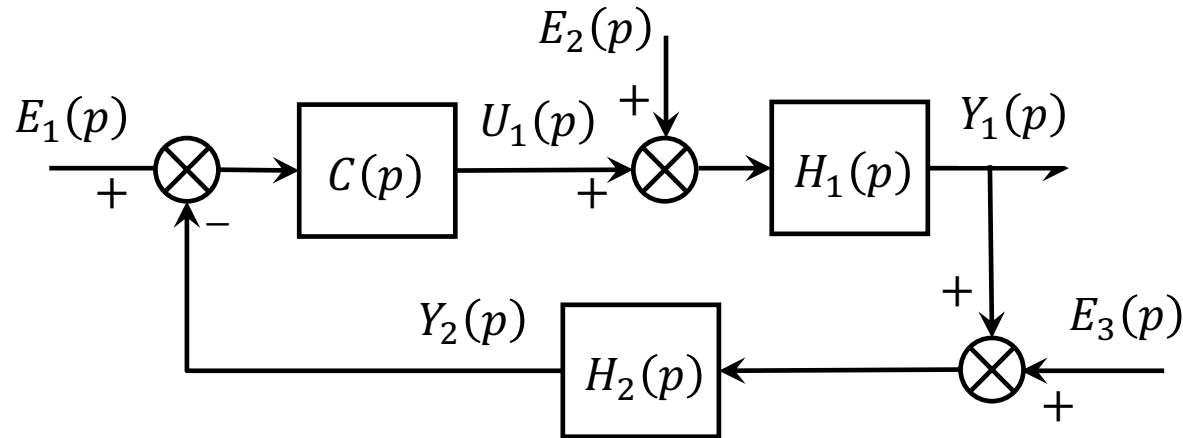


$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ H_1 \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{-H_2H_3}{1+H_2H_3} \\ H_1 \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_3}{1+H_2H_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si tous les pôles des fonctions de transfert

H_1 , $\frac{H_2}{1+H_2H_3}$, $\frac{H_3}{1+H_2H_3}$ et $\frac{H_2H_3}{1+H_2H_3}$
 sont à parties réelles strictement négatives.

Stabilité EB-SB de systèmes bouclés

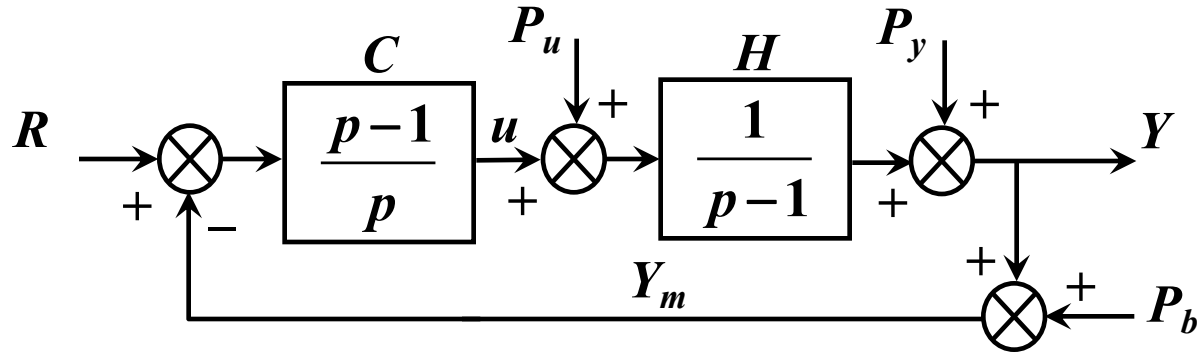


$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ U_1 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \frac{1}{1 + CH_1H_2} \begin{bmatrix} CH_1 & H_1 & -CH_1H_2 \\ CH_1H_2 & H_1H_2 & H_2 \\ C & CH_1H_2 & -CH_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Deux assertions équivalentes :

- Système stable ssi toutes les $H_i(p)$ de $M(p)$ sont stables EB-SB.
- Système stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique $T(p) = 1 + CH_1H_2 = 0$ sont à parties réelles strictement négatives, **Et** qu'il n'y a pas de compensation de pôle instable de $C(p)$, $H_1(p)$ ou $H_2(p)$ par un zéro instable de $C(p)$, $H_1(p)$ ou $H_2(p)$.

Impossibilité de Compenser des pôles instables



$$H C = \frac{1}{p}$$

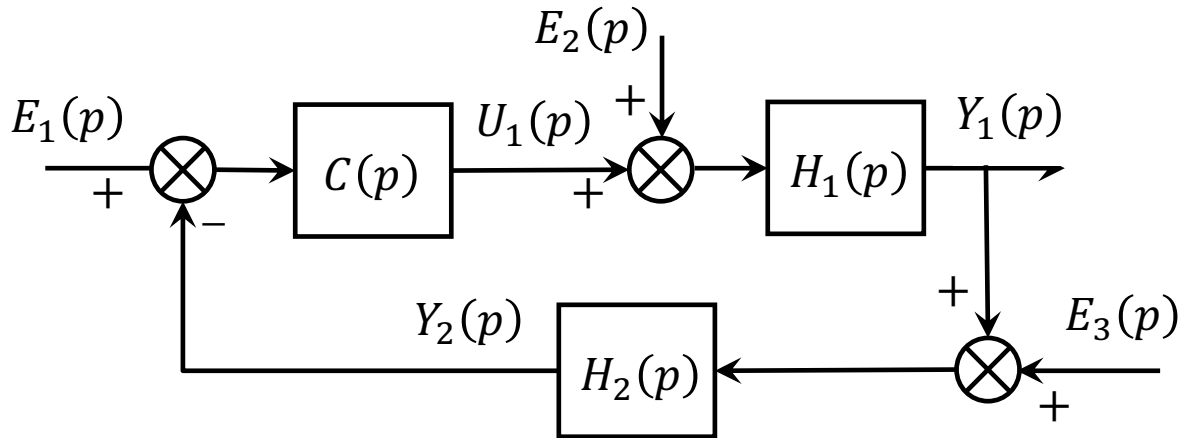
$$\begin{bmatrix} Y \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{HC}{1+HC} & \frac{H}{1+HC} & \frac{1}{1+HC} & \frac{-HC}{1+HC} \\ \frac{C}{1+HC} & \frac{-HC}{1+HC} & \frac{-C}{1+HC} & \frac{-C}{1+HC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P_u \\ P_y \\ P_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{p}{(p+1)(p-1)} & \frac{p}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \\ \frac{p-1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} & \frac{-p+1}{p+1} & \frac{-p+1}{p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P_u \\ P_y \\ P_b \end{bmatrix}$$

La stabilité interne n'est pas assurée

Prédiction de la stabilité de la boucle fermée par l'analyse de la boucle ouverte

Stabilité EB-SB de systèmes bouclés



Système stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique

$$T(p) = 1 + CH_1H_2 = 1 + H_{BO} = 0$$

sont à parties réelles strictement négatives,

Et qu'il n'y a pas de compensation de pôle instable.

Evaluation de la négativité des parties réelles des racines de $T(p)$:

- par le critère de Routh (algébrique)
- par le critère de Nyquist (graphique)

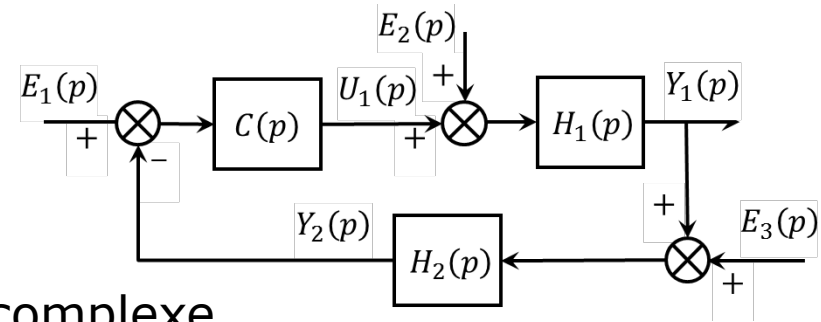
Critère simplifié de Nyquist

Critère du revers

Fonction de transfert en Boucle Ouverte :

$$H_{BO}(p) = C(p)H_1(p)H_2(p)$$

Point Critique : point $(-1, j0)$ du plan complexe



Théorème : Critère du revers

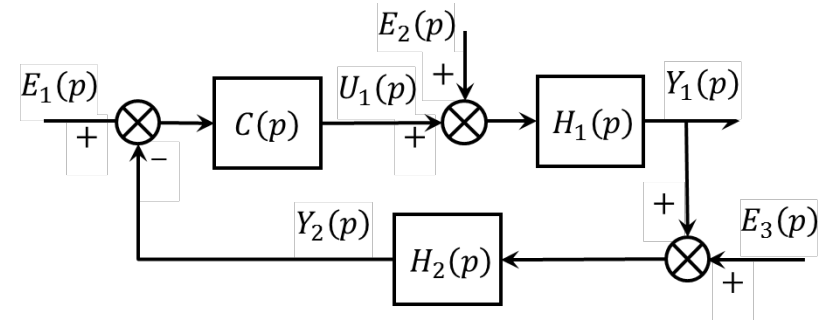
Soit $H_{BO}(j\omega)$, transmittance en boucle ouverte d'un système bouclé à contre-réaction négative, le système bouclé sera stable au sens EB-SB en boucle fermée, si et seulement si $H_{BO}(j\omega)$ est stable au sens EB-SB et que l'image de $H_{BO}(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ laisse le point critique -1 sur sa gauche.

Si $H_{BO}(j\omega)$ possède des pôles sur l'axe imaginaire (pôles à partie réelle nulle), le point critique -1 doit également être laissé sur la gauche par l'image de $H_{BO}(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ en ayant contourné les pôles présents sur l'axe imaginaire dans le demi-plan droit. ♦

Critère du Revers

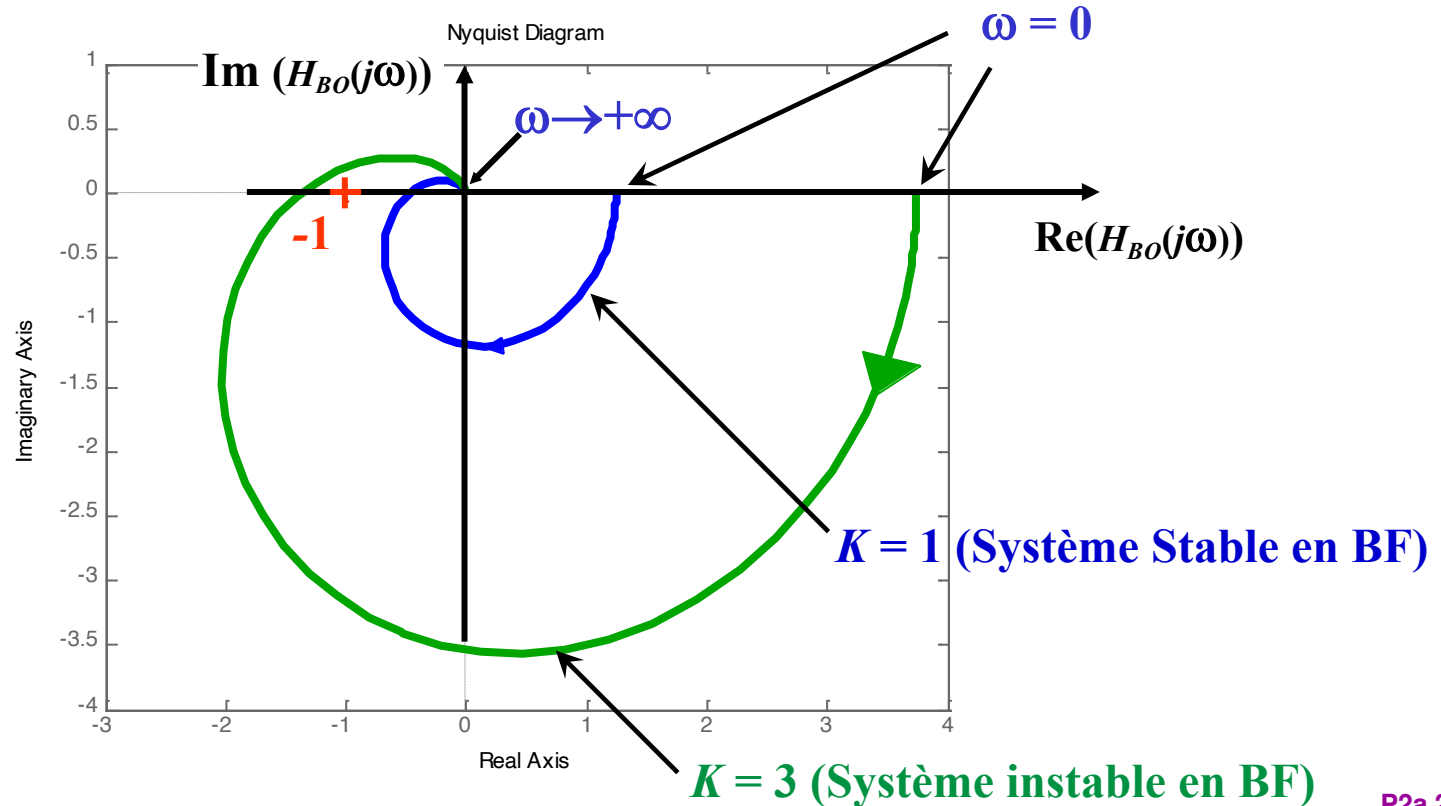
Application

$$\begin{aligned}
 H_{BO}(p) &= C(p)H_1(p)H_2(p) \\
 &= K \frac{5}{p^3 + 3p^2 + 5p + 4}
 \end{aligned}$$



Pôles de $H_{BO}(p) = \{ -1,45 ; -0,773 \pm j 1,467 \}$ (stables)

Avec
 $p = j\omega$

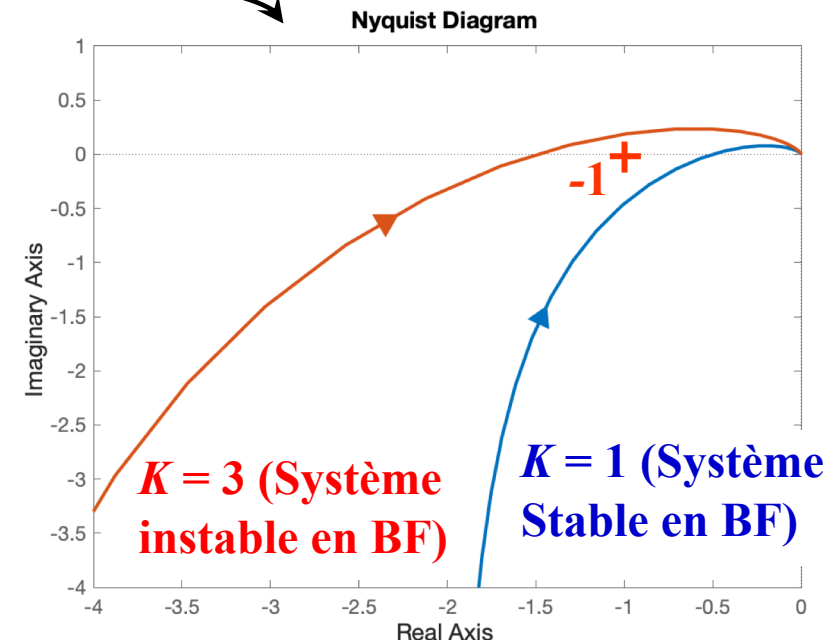
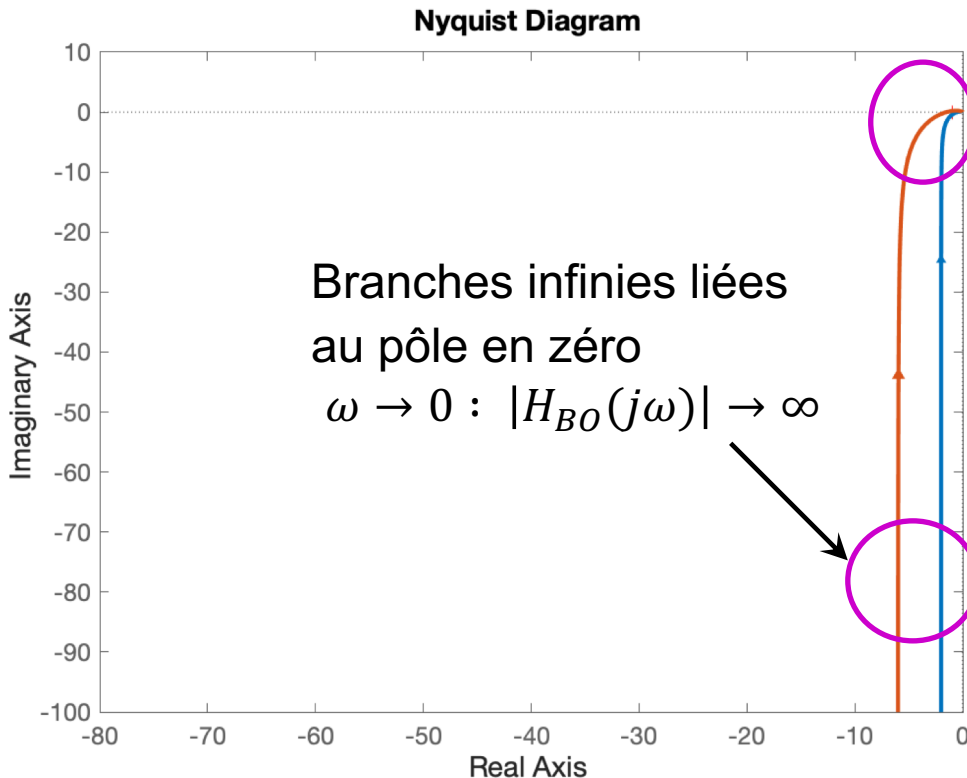
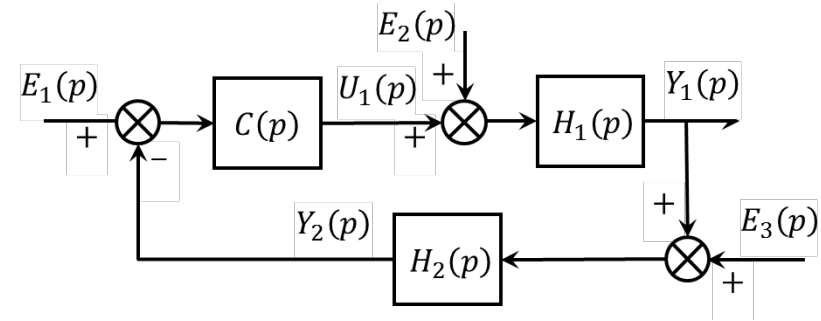


Critère du Revers

cas de H_{BO} avec pôle en 0

$$\begin{aligned}
 H_{BO}(p) &= C(p)H_1(p)H_2(p) \\
 &= K \frac{1}{p(p+1)^2}
 \end{aligned}$$

Pôles de $H_{BO}(p) = \{ 0 ; -1 ; -1 \}$



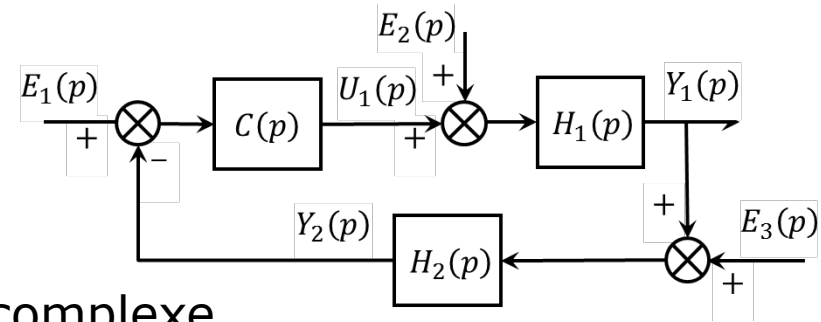
Critère de Nyquist

Critère de contour

Fonction de transfert
en Boucle Ouverte :

$$H_{BO}(p) = C(p)H_1(p)H_2(p)$$

Point Critique : point $(-1, j0)$ du plan complexe



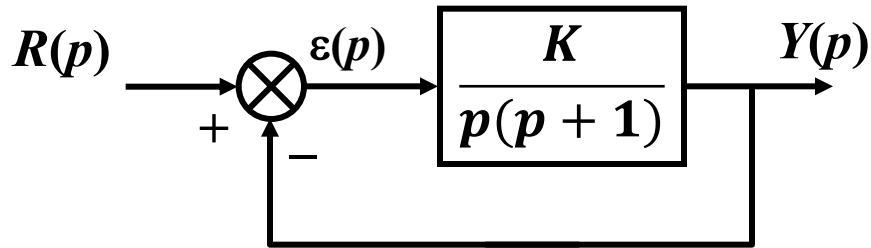
Théorème : Critère de Nyquist – Critère de contour

Pour qu'un système bouclé à contre-réaction négative soit stable au sens EB-SB, il faut et il suffit que l'image de $H_{BO}(j\omega)$, transmittance de la boucle ouverte, lorsque $j\omega$ varie suivant un contour fermé qui englobe le demi-plan droit du plan complexe dans le sens anti-trigonométrique ($j\omega$ varie de $-j\infty$ à $+j\infty$ et boucle par un demi-cercle de rayon $r \rightarrow \infty$ dans le sens anti-trigonométrique) :

- ne passe pas par le point critique -1 .
- entoure le point -1 , dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles strictement positifs de la transmittance en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$. ♦

Critère de Contour

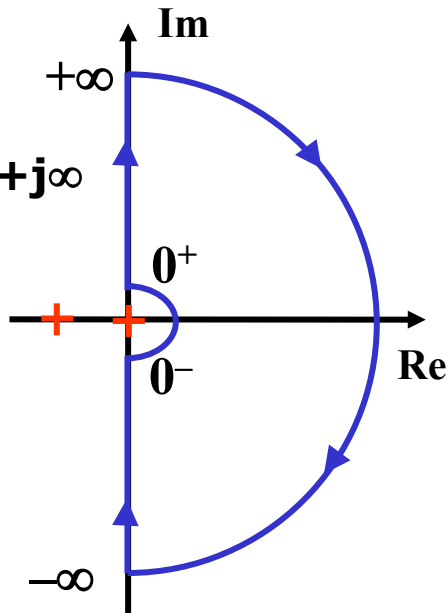
cas de H_{B0} avec pôle en 0



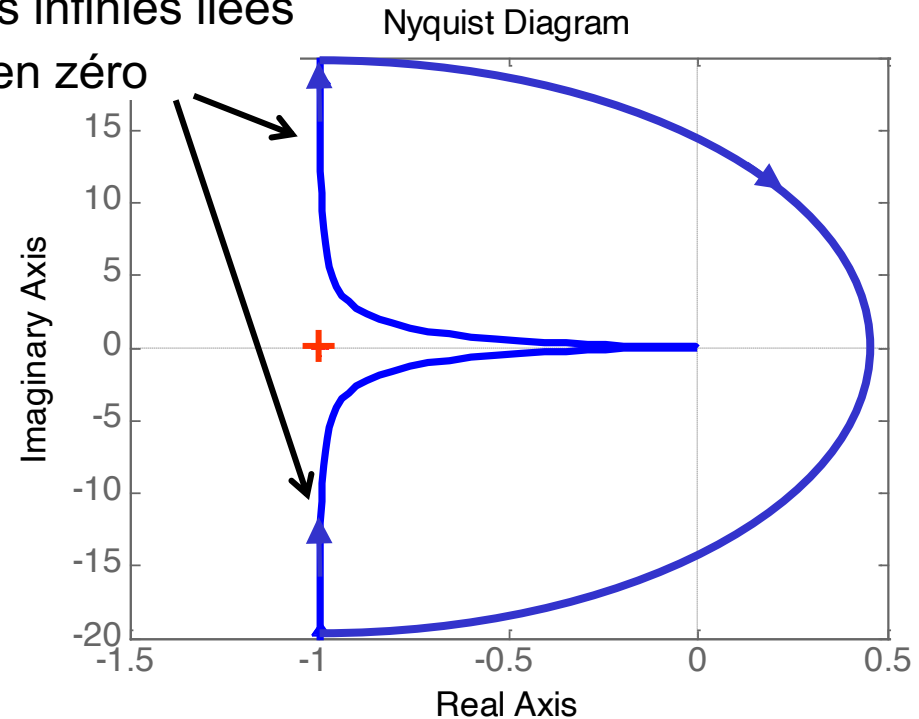
$$H_{B0}(p) = \frac{K}{p(p+1)}$$

$$H_{B0}(j\omega) = \frac{K}{\omega(-\omega + j)} = \frac{-K(\omega + j)}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

$j\omega$ varie de $-j\infty$ à $+j\infty$
 et boucle par un
 demi-cercle
 de rayon $r \rightarrow \infty$
 dans le sens anti-
 trigonométrique



Branches infinies liées
au pôle en zéro

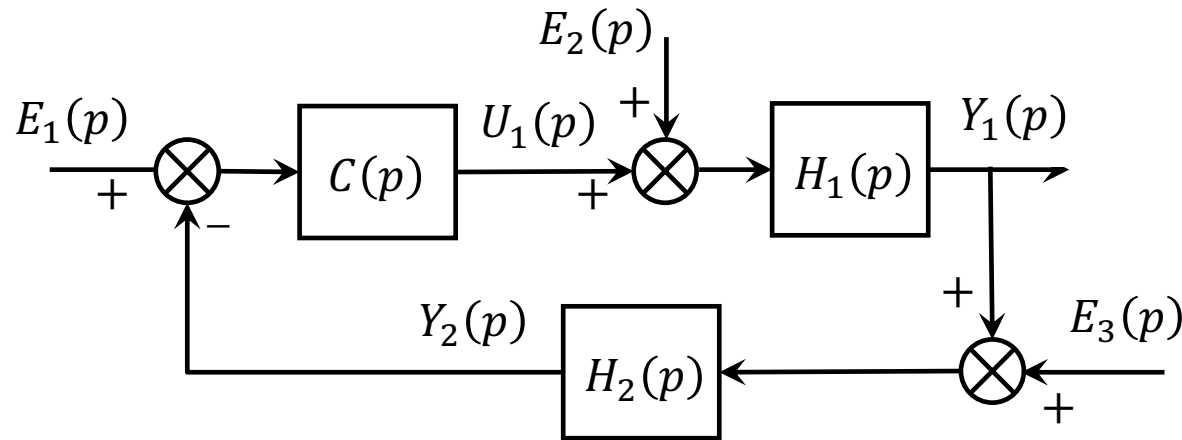


Marges de stabilité (de robustesse) des systèmes asservis

Robustesse du système asservi aux incertitudes sur le modèle du système à commander

- Le système physique est le plus souvent non-linéaire et variant ce qui impose que la commande devra être robuste aux incertitudes sur le modèle qui sera adopté pour construire la commande.
- Le modèle linéaire du système à commander est donné par :
 - Une fonction de transfert $H_c(p)$ ou $H_d(z)$ avec :
 - son domaine de validité $\omega_{validité}$
 - un majorant L_{max} du retard pur qui peut exister entre l'instant t de mesure de la sortie $y(t)$ et l'instant $t + \Delta t$ d'application de la commande $u(t)$ qui en est issue
- Le système réel n'étant pas invariant sur un temps long (temps \gg constantes de temps du modèle) la fonction de transfert $H_c(p)$ ou $H_d(z)$ peut évoluer. Le système asservi doit être robuste à ces variations, par exemple aux changements :
 - du gain statique (marge de gain, marge de module)
 - des constantes de temps (marge de phase, marge de module)
 - des retards purs (marge de retard)

Fonction de transfert en Boucle Ouverte H_{BO}



- Fonction de transfert en Boucle Ouverte :

$$H_{BO}(p) = C(p)H_1(p)H_2(p)$$

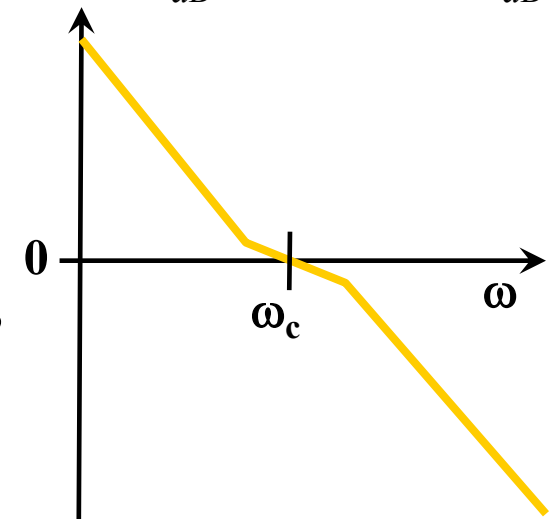
- Pulsation de coupure ω_c de H_{BO} :

$$\omega_c : \omega \geq 0 \text{ / } |H_{BO}(j\omega)| = 1$$

$$\rightarrow |H_{BO}(j\omega_c)| = 1 \equiv |H_{BO}(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

- Respect du domaine de validité : $\omega_c \leq \omega_{validité}$

$$\|H_{BO}(\omega)\|_{dB} = \|H(\omega)C(\omega)\|_{dB}$$



Marges de Stabilité (de Robustesse)

Marges de stabilité :

Distances au point critique $(-1, j0)$ de la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$.

Permet d'être robuste aux incertitudes sur le modèle du système à commander.

→ La marge de gain :

Définition 1 :

$$G_{M1} = 1 - \|H_{BO}(j\omega)\|_{\varphi=-\pi}$$

Définition 2 :

$$G_{M2} = 1/\|H_{BO}(j\omega)\|_{\varphi=-\pi}$$

Mesurées lorsque la phase de $H_{BO}(j\omega)$ vaut -180° .

→ Les marges de phase et de retard :

$$\varphi_M = \pi + \arg(H_{BO}(j\omega)_{\|H_{BO}(j\omega_c)\|=1})$$

$$M_{retard} = \varphi_M [rad] / \omega_c \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Mesurées à la pulsation ω_c .

→ La marge de module :

$$M_M = \min(1 + \|H_{BO}(j\omega)\|)$$

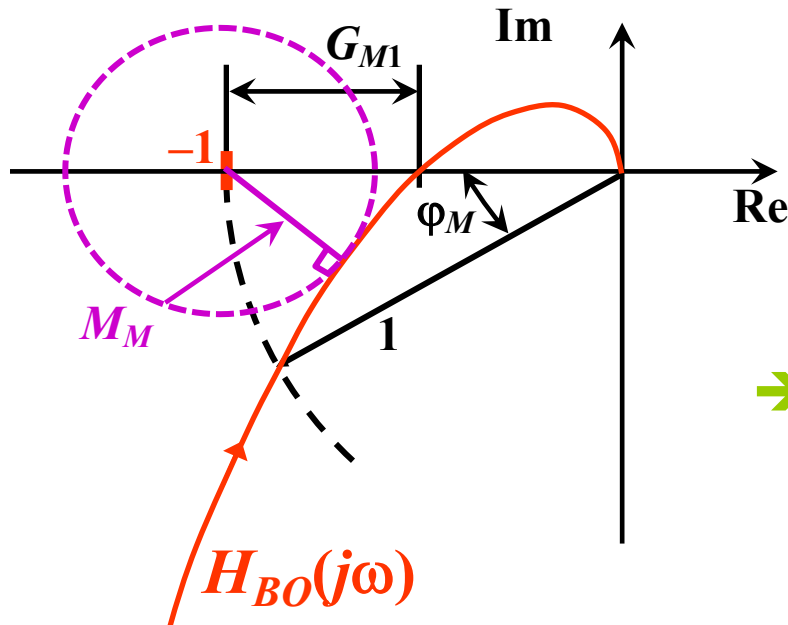
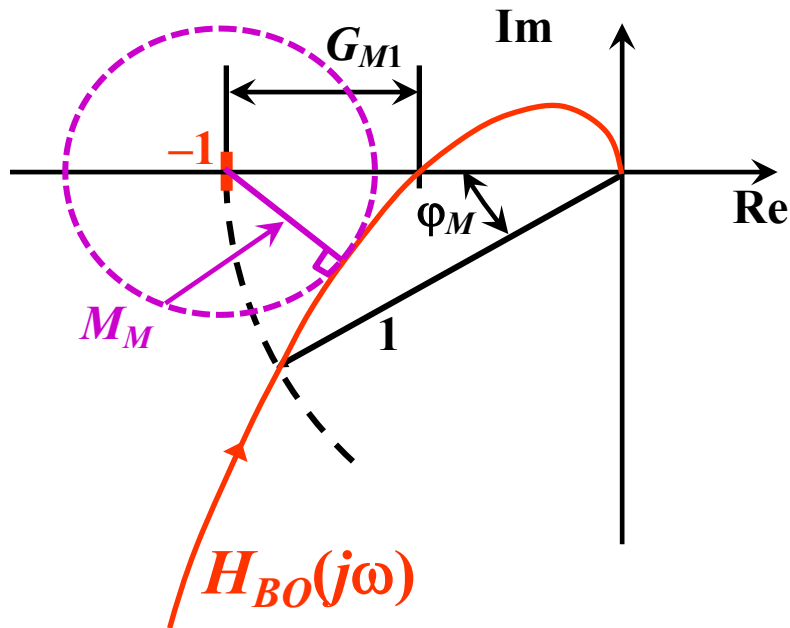


Image de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe de Nyquist

Marges de Stabilité

Valeurs minimales et Relations entre marges



→ Valeurs minimales :

$$G_{M1} \geq 0,5$$

$$G_{M2} \geq 2$$

$$\varphi_M \geq 45^\circ$$

$$M_M \geq 0,5$$

→ Relations entre la Marge de Module et les autres Marges

$$M_M \leq G_{M1}$$

$$M_M = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_M \geq 60^\circ$$

$$M_M = 0,76 \quad \Rightarrow \quad \varphi_M \geq 45^\circ$$

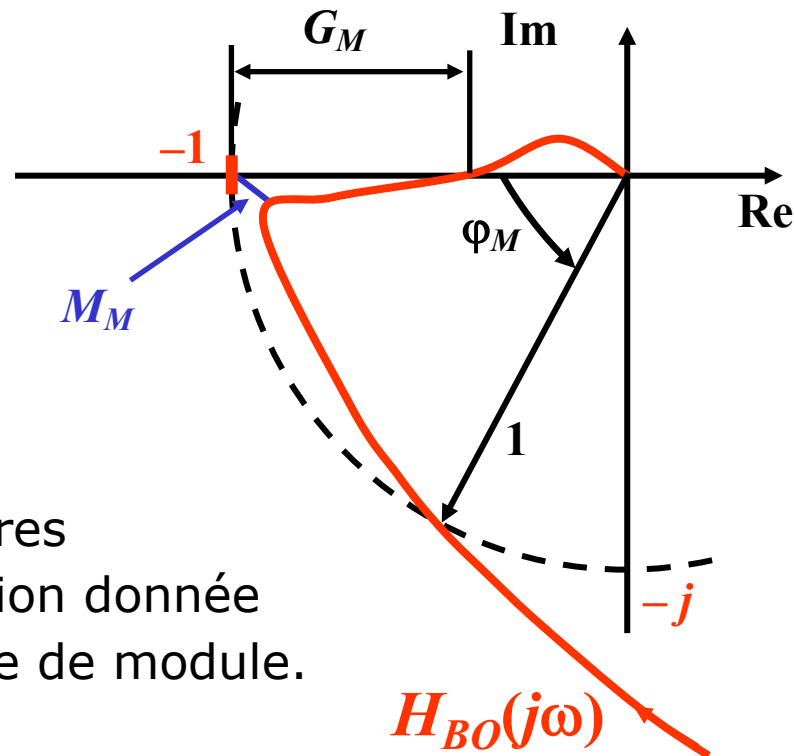
$$M_M = 0,52 \quad \Rightarrow \quad \varphi_M \geq 30^\circ$$

Marges de Stabilité

Importance de la marge de module

Exemple d'un système ayant :

- des marges de gain et de phase suffisantes
- une marge de module insuffisante



Les marges de gain et de phase sont des mesures ponctuelles à une pulsation donnée contrairement à la marge de module.

Mesure des marges de Gain et de Phase dans le diagramme de Bode

→ Diagramme de Bode :

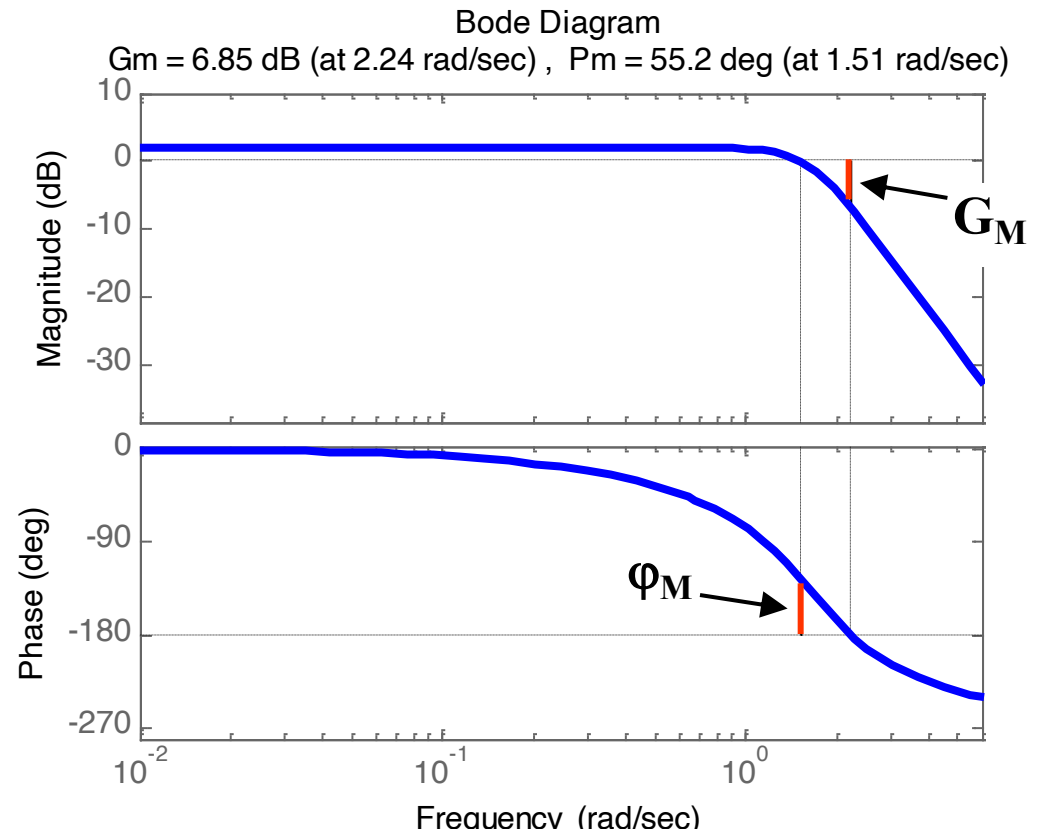
→ $20\log_{10}(\|H_{BO}\|) = f(\log_{10}(\omega))$

→ $\arg(H_{BO}) = g(\log_{10}(\omega))$

→ Exemple :

$$H_{BO}(p) = \frac{5}{p^3 + 3p^2 + 5p + 4}$$

$$H_{BO}(j\omega) = \frac{5(4 - 3\omega^2 - j(5\omega - \omega^3))}{(4 - 3\omega^2)^2 + (5\omega - \omega^3)^2}$$



Mesure des marges de Gain et de Phase dans le diagramme de Black-Nichols

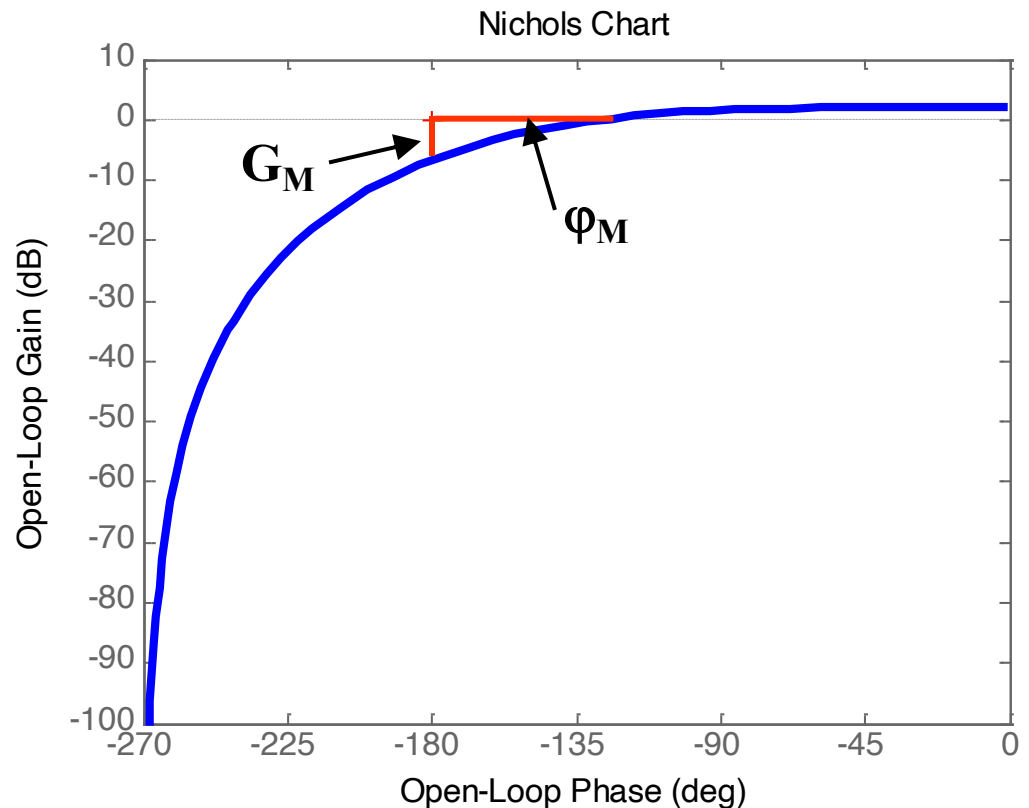
→ **Diagramme de Black-Nichols :**

→ $20\log_{10}(\|H_{BO}\|) = f(\arg(H_{BO}))$

→ **Exemple :**

$$H_{BO}(p) = \frac{5}{p^3 + 3p^2 + 5p + 4}$$

$$H_{BO}(j\omega) = \frac{5(4 - 3\omega^2 - j(5\omega - \omega^3))}{(4 - 3\omega^2)^2 + (5\omega - \omega^3)^2}$$



Mesure de la Marge de Module par le max de la fonction de sensibilité **S**

$$M_M = \min_{\omega} (1 + \|H_{BO}(j\omega)\|)$$

$$\sup_{\omega} \|S(j\omega)\| = \sup_{\omega} \left\| \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)} \right\| = \frac{1}{M_M}$$

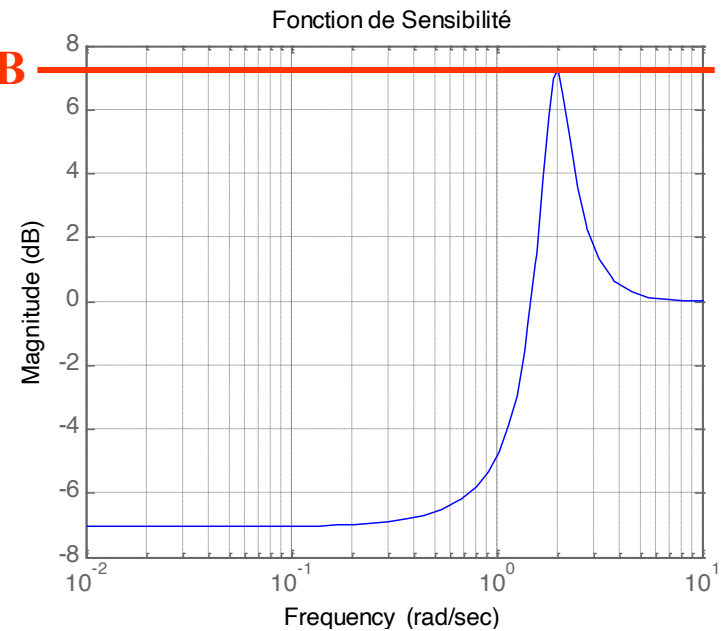
→ **Exemple :**

$$H_{BO}(p) = \frac{5}{p^3 + 3p^2 + 5p + 4}$$

$$S(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$\begin{aligned}
 M_M &= 1/10^{7,27/20} \\
 &= 10^{-7,27/20} = 0,433
 \end{aligned}$$

7,27 dB



Marges de Stabilité

Valeurs usuelles

→ Deux cas en pratique :

- Si le modèle du système est supposé bien connu et évolue peu au cours du fonctionnement, on prendra :

$$\mathbf{M_M \geq 0.5 \quad \text{et} \quad \varphi_{M \text{ degrés}} \geq 45^\circ}$$

- Si le modèle du système est mal connu et/ou évolue fortement au cours du fonctionnement, on prendra plus de sécurité :

$$\mathbf{M_M \geq 0.8 \quad \text{et} \quad \varphi_{M \text{ degrés}} \geq 60^\circ}$$

→ Choix de la marge de Retard :

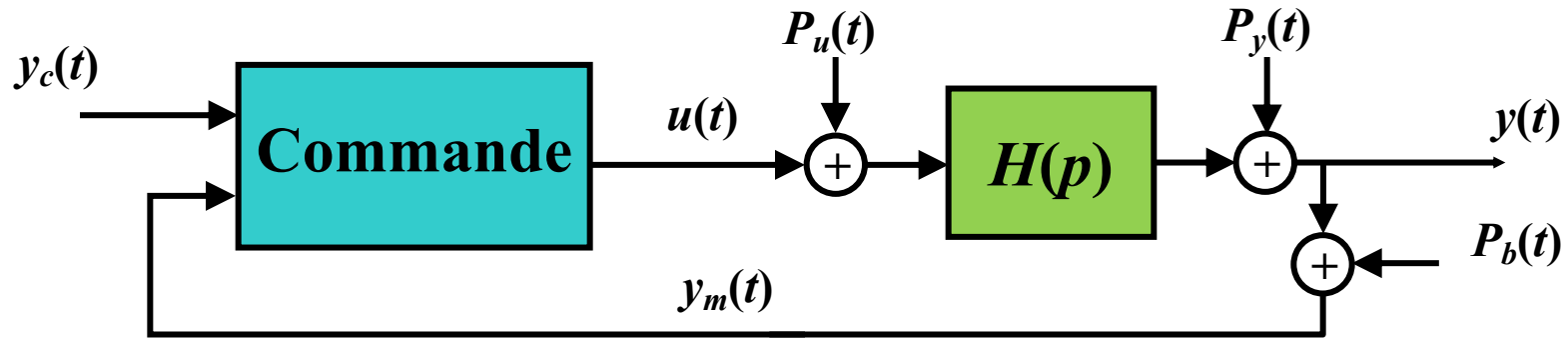
- la Marge de Retard est le plus grand retard qui peut être introduit dans la boucle sans rendre le système instable.
- Dépendra du système à commander, typiquement :

$$\mathbf{M_{retard} \geq 3L_{max}} \text{ avec } L_{max} \text{ un majorant du retard pur du système}$$

- Fixer la marge de Retard et la marge de Phase revient à fixer la bande passante : $\omega_c \leq \frac{\varphi_M \text{ radians}}{M_{retard}}$

La structure de commande à 2 degrés de liberté et ses propriétés

Structure de commande

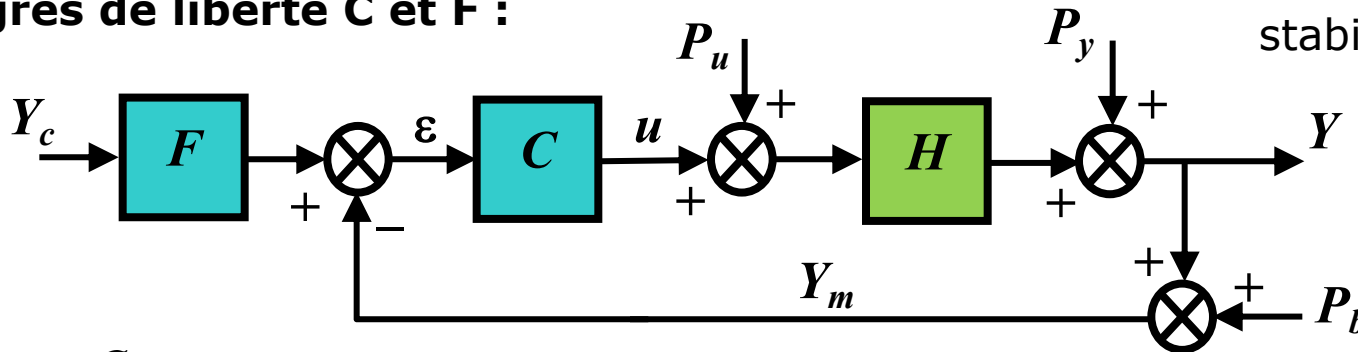


La commande doit faire en sorte que :

1. Les perturbations P_u , P_y et P_b soient « rejetées »
2. La sortie $y(t)$ « suive » la référence $y_c(t)$

2 entrées ($y_c(t)$ et $y_m(t)$), d'où une commande à 2 degrés de liberté C et F :

$H_{BO}(p) = C(p)H(p)$
 \Rightarrow marges de stabilité (robustesse)



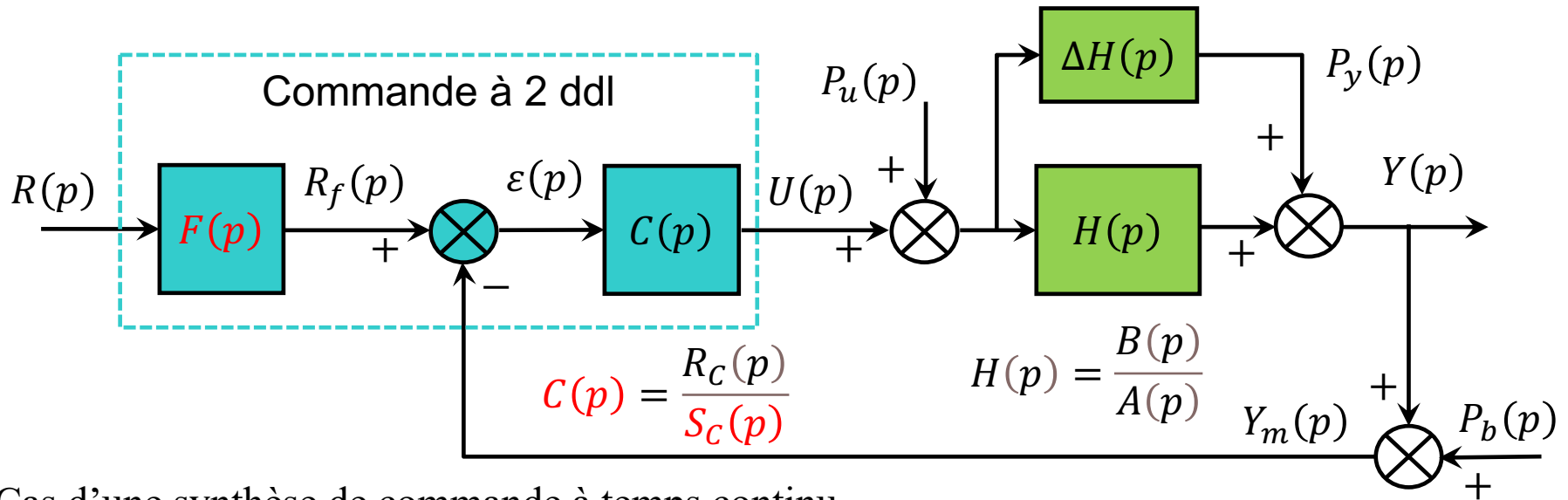
C : correcteur de boucle (feedback) :

impose le comportement vis-à-vis des perturbations (P_u , P_y et P_b)

F : filtrage de la consigne R (feedforward) :

impose le comportement vis-à-vis de la consigne (Y_c)

Structure de commande à 2 degrés de liberté



Cas d'une synthèse de commande à temps continu.

Pour autant, $H(p)$ comporte les éléments (gains) liés au système de commande numérique.

- Relations et Propriétés :** rôles particuliers de S_c , $\frac{1}{1+CH}$, C et F

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+HC} [F.R - HP_u - P_y - P_b] = \frac{AS_c}{AS_c + BR_c} [F.R - HP_u - P_y - P_b] \xrightarrow[p \rightarrow 0, S_c(0)=0]{} 0$$

$$Y(p) = \frac{HC}{1+HC} [F.R - P_b] + \frac{1}{1+CH} [HP_u + P_y] = \frac{BR_c}{AS_c + BR_c} [F.R - P_b] + \frac{S_c}{AS_c + BR_c} [BP_u + AP_y]$$

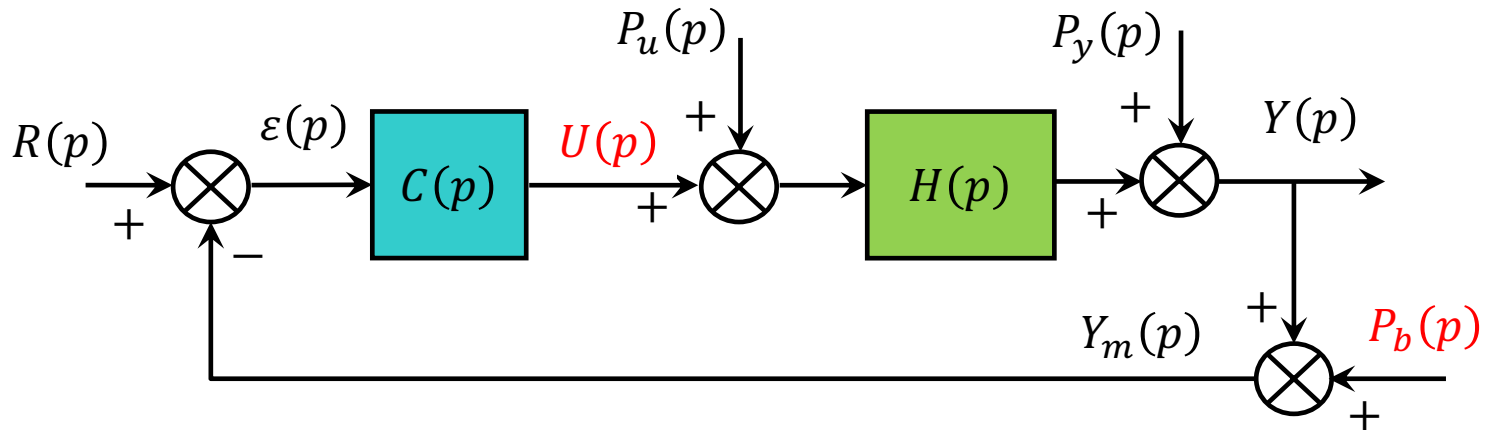
$< P_b > = 0$

$$U(p) = \frac{C}{1+HC} [F.R - HP_u - P_y - P_b] = \frac{C}{1+HC} [F.R - HP_u - P_y] - \frac{C}{1+HC} [P_b]$$

limitation du gain en HF

Contraintes sur le correcteur $C(p)$ du système asservi

Limitation du niveau de bruit présent sur la commande U



➔ **Bruit présent sur la commande :**

$$U_b(p) = \frac{-C(p)}{1 + C(p)H(p)} P_b(p) \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{U_b(j\omega)}{P_b(j\omega)} \right| = |C(j\omega)| \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

➔ **Bruit en hautes fréquences $\omega > 10 \omega_c$:**

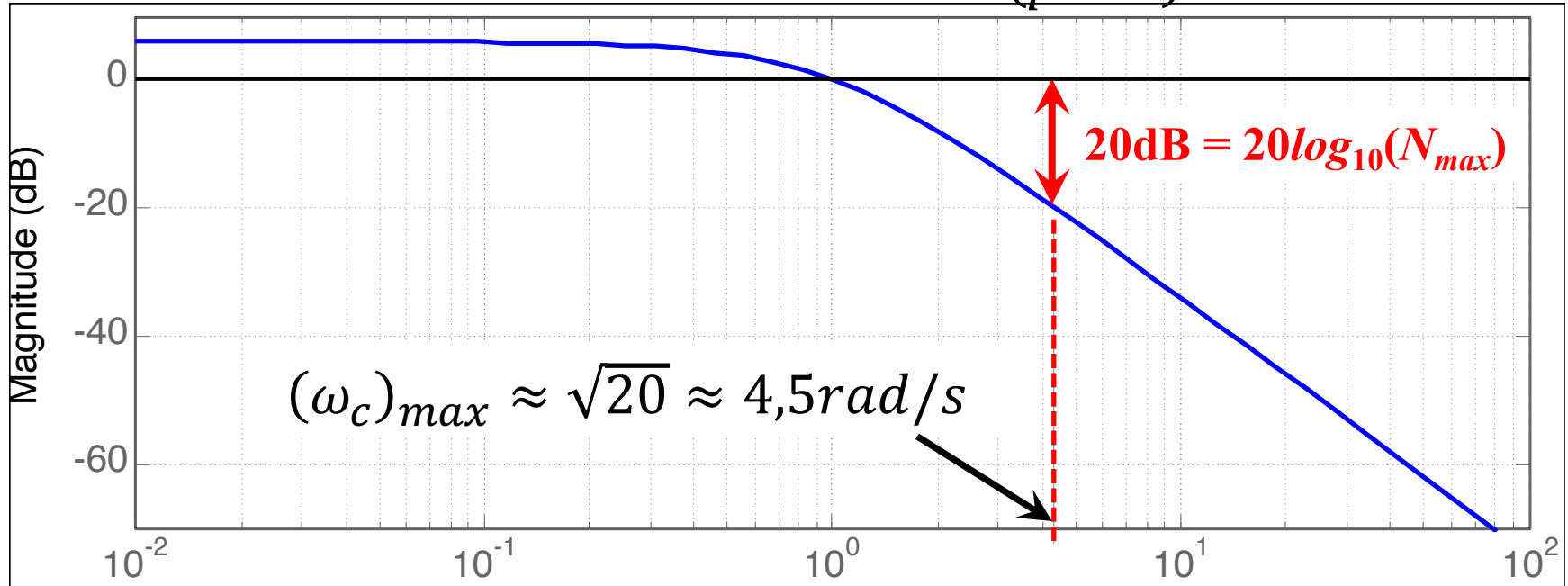
$$\omega > 10 \omega_c : |C(j\omega)H(j\omega)| = |H_{BO}(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)H(j\omega)} \right| \approx 1$$

$$\text{d'où : } |U_b| \approx |C(j\omega)|_{\omega > 10 \omega_c} \cdot |P_b|$$

$$\text{On définit la contrainte : } |C(j\omega)|_{\omega > 10 \omega_c} \leq N_{max} = \frac{(U_b)_{max}}{|P_b|}$$

La contrainte N_{max} limite la valeur de la pulsation de coupure ω_c

→ Considérons le système : $H(p) = \frac{2}{(p+1)^2}$



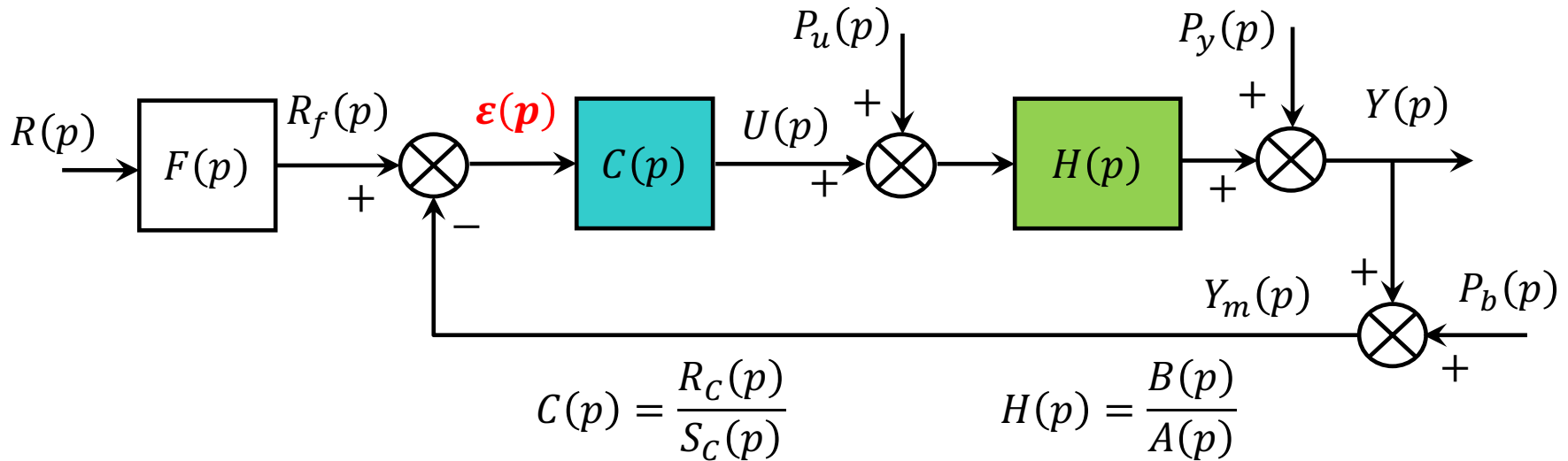
→ Plus grande valeur possible de ω_c :

$$(\omega_c)_{max} = \max_{\omega} (N_{max} \cdot |H(j\omega)| = 1)$$

→ Dans l'exemple, si $|C(j\omega)|_{\omega > 10\omega_c} \leq N_{max} = 10$

alors $(\omega_c)_{max} \approx \sqrt{20} \approx 4,5 \text{ rad/s}$

Erreur statique nulle pour des entrées constantes



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + CH} [FR - HP_u - P_y - P_b] = \frac{S_c \cdot A}{S_c \cdot A + R_c \cdot B} [FR - HP_u - P_y - P_b]$$

Avec un correcteur à effet intégral (pôle en $p=0$, $z=1$) : $S_c(p=0) = 0$

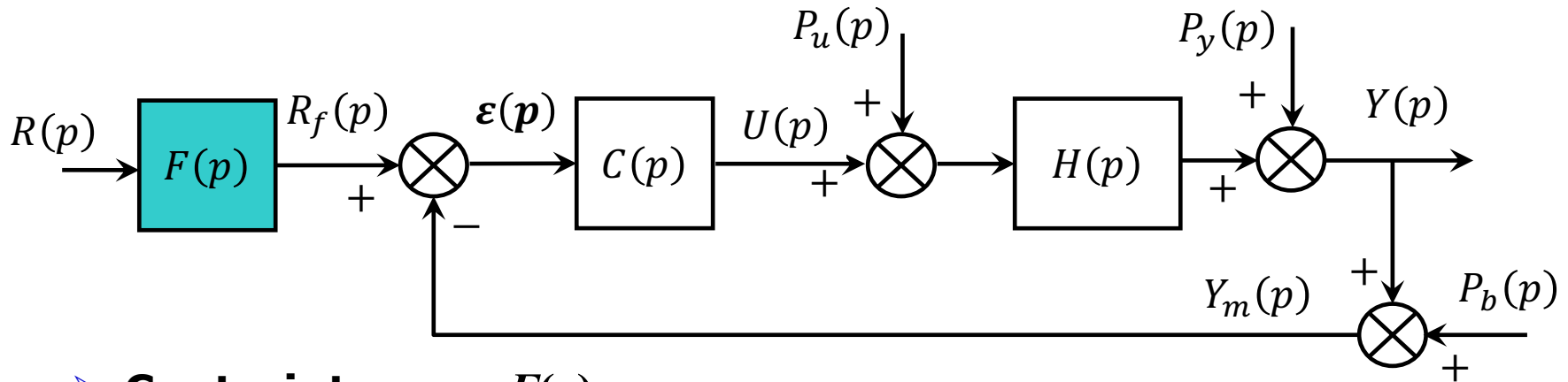
Il vient pour des entrées constantes: $\lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon(p) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$

Et pour la sortie : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = F(0) \cdot R_0 - P_{b0}$

En pratique, il faut veiller à ce que la chaîne de mesure n'introduise pas un offset constant (\Rightarrow vérifier $P_b(0)=0$) et que le gain statique de F soit unitaire ($\Rightarrow F(0)=1$)

Éléments de choix du filtre $F(p)$ de la consigne

Erreur statique nulle pour des entrées constantes



➤ Contraintes sur $F(p)$:

- Stabilité : pôles à parties réelles négatives
- Gain statique unitaire : $F(p=0) = 1$

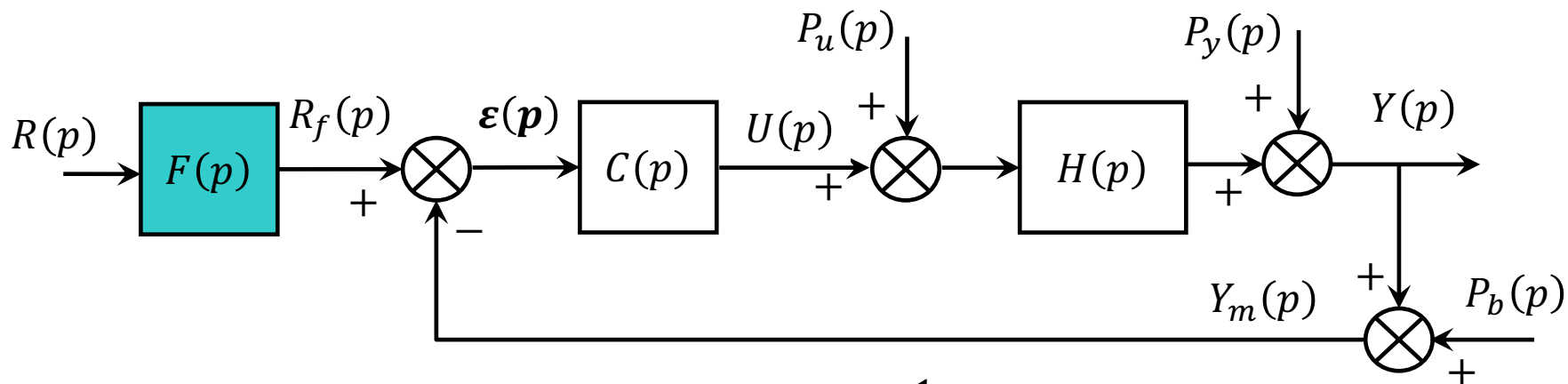
➤ Exemples de choix avec $\omega_0 > 0$:

- Filtre du premier ordre :
$$F(p) = \frac{1}{\tau p + 1} = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$$
- Filtre du second ordre :
$$F(p) = \frac{1}{(\tau p + 1)^2} = \frac{\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

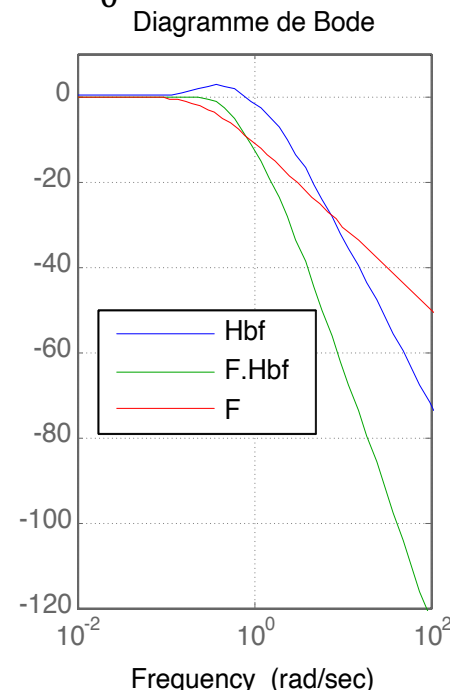
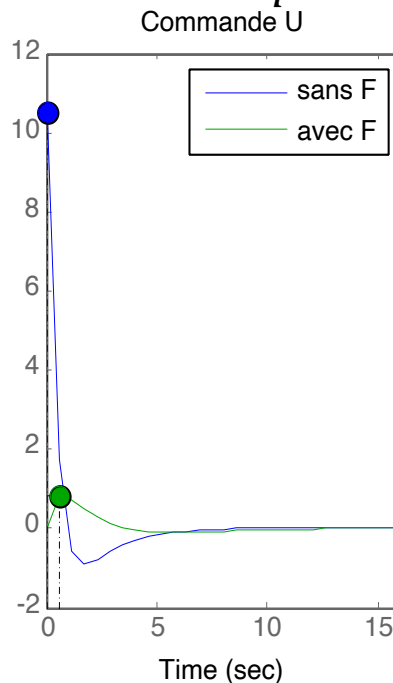
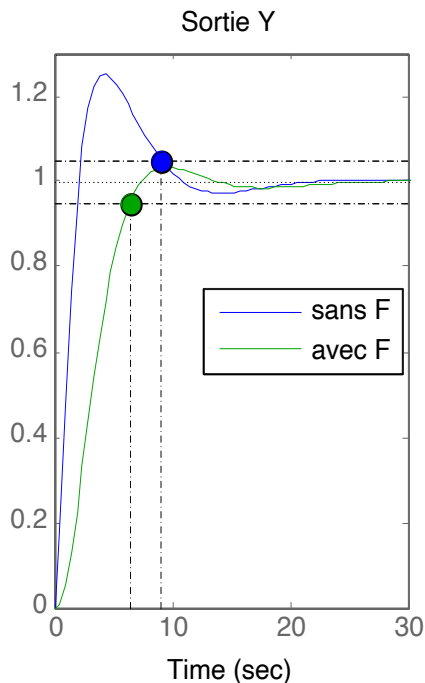
➤ Intérêts de $F(p)$:

- Dépassement : permet de contrôler le dépassement de la sortie $y(t)$ vis-à-vis de la consigne $r(t)$
- Permet d'éviter une discontinuité de $u(t)$ et de limiter sa valeur max.

Exemple de résultats obtenus



➤ **Résultats obtenus avec :** $F(p) = \frac{1}{\tau p + 1} = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$ où $\omega_0 = 0,3 \text{ rad/s}$



Spécifications En résumé

Contraintes de synthèse de la commande

Correcteur C :

- **Assurer la stabilité interne** : Tous les pôles de la matrice de transfert doivent être stables (**temps continu** : $\text{Re}[p_i] < 0$, **temps discret** : pôles $|z_i| < 1$).
- **Marges de stabilité suffisantes (rejet de P_y)**
 - Sys. "connu" et "invariant" : $M_M \geq 0.5$ et $M_{\text{phase}} \geq 45^\circ + \Delta\varphi_{\text{modèle}}$
 - Sys. mal "connu" ou "variant" : $M_M \geq 0.8$ et $M_{\text{phase}} \geq 60^\circ + \Delta\varphi_{\text{modèle}}$
 - **Marge de retard** : $M_{\text{retard}} = M_{\text{phase}} [\text{rad}] / \omega_c \left[\frac{\text{rad}}{s} \right] \geq (M_{\text{retard}})_{\min}$
- **Petit écart entre consigne et mesure (rejet de P_u)**
 - **Grand gain en basses fréquences** : le correcteur possède un intégrateur (**temps continu** : pôle en $p = 0$; **temps discret** : pôle en $z = 1$)
- **Limiter la sensibilité de la commande aux bruits (rejet de P_b)**
 - Limitation du gain du correcteur en hautes fréquences :

$$\|C(j\omega)\|_{\omega > 10\omega_c} \leq N_{\max} = \frac{(U_{\text{bruit}})_{cc}}{(P_b)_{cc}} < \infty$$

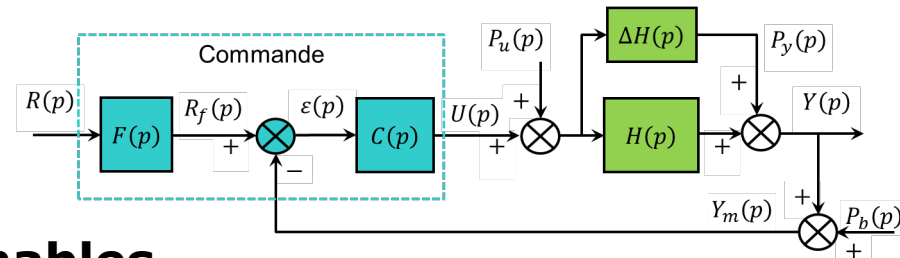
Filtre F de la consigne :

- **Dépassement inférieur à une limite donnée de la consigne Y_c**
 - Traitement de la consigne par filtrage

Objectifs de la synthèse de la commande

Respecter les contraintes

- Si les contraintes sont raisonnables, il existe une infinité de $C(p)$ et de $F(p)$ satisfaisant les contraintes.



1. Déterminer $C(p)$ qui minimise l'effet de $P_u(p)$ sur $Y(p)$

- Et qui respecte les contraintes :

Stabilité, M_M , ϕ_M , M_{retard} , $\|C(j\omega)\|_{\omega > 10\omega_c} \leq N_{\max}$

Grand gain en basses fréquences (si nécessaire) : $\|C(j\omega)\|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow \infty$

2. Déterminer $F(p)$ qui permet d'obtenir le comportement désirée entre $R(p)$ et $Y(p)$

- Et qui respecte les contraintes :

Stabilité de $F(p)$, Gain statique unitaire : $F(p=0) = 1$,

Limitation du dépassement de $y(t)$

Les spécifications dans les diagrammes

