

Automatique

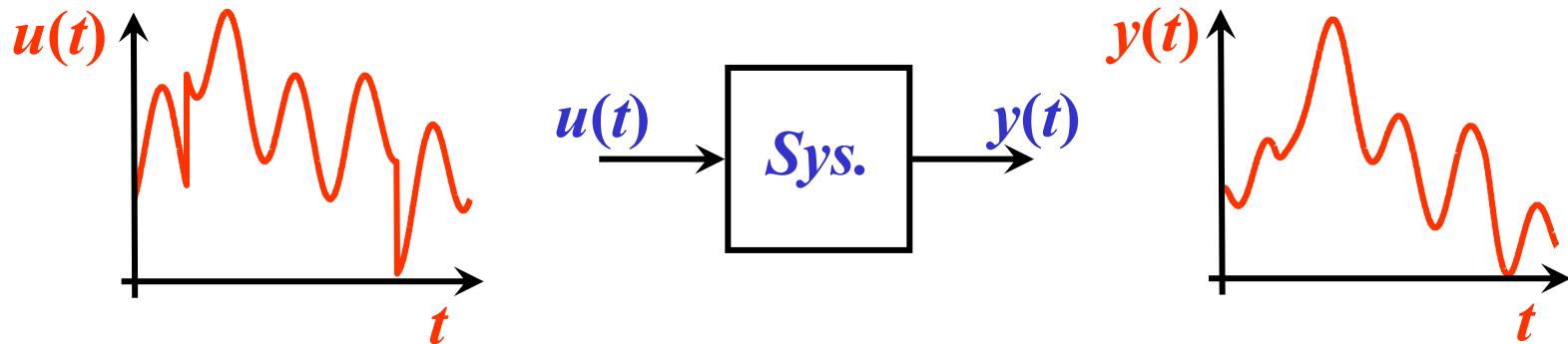
Cours AU-360

Systèmes dynamiques linéaires invariants causaux à temps continu

1. Propriétés et Représentation d'état des systèmes linéaires invariants causaux à temps continu
2. Transformée de Laplace et Fonctions de transfert
3. Stabilité EB-SB et Factorisation des Fonctions de Transfert
4. Régimes de fonctionnement : Transitoire, Permanent, Statique, Sinusoïdal
5. Analyse et représentation fréquentielle : Diagrammes de Bode, Nyquist et Black-Nichols
6. Systèmes du 1^{er} ordre
7. Systèmes passe-bas du 2^{ème} ordre
8. Systèmes d'ordre $n > 2$ et Réduction de modèle
9. Domaine de validité fréquentielle d'un modèle
10. Identification expérimentale des paramètres de systèmes linéaires

Propriétés et Représentation d'état des systèmes linéaires invariants causaux à temps continu

Signal et Système à temps continu



- Existe à tout instant
- Peut présenter des discontinuités mais est d'énergie finie

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt < \infty$$

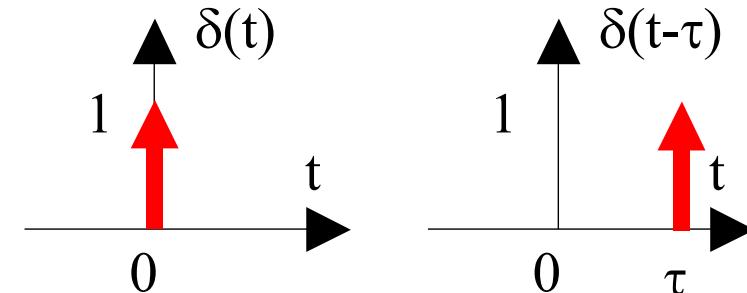
- Signal issu d'un système physique régit par des équations différentielles
- Le signal réel $y(t)$ est dit :
 - Causal si : $y(t) = 0, \forall t < 0$
 - Strictement causal si : $y(t) = 0, \forall t \leq 0$

Signaux typiques de test

L'impulsion

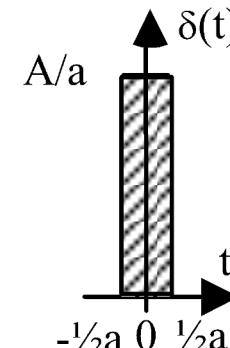
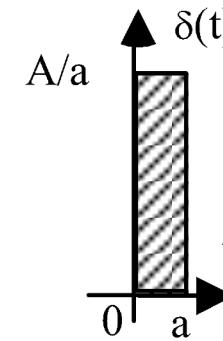
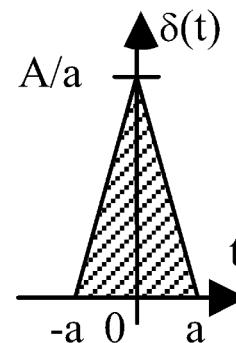
- **L'impulsion unitaire $\delta(t)$ (distribution de Dirac)** est une « fonction » du temps de durée très brève dont l'aire sous la courbe est unitaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



- On dira que la fonction $\delta(t)$ est nulle partout sauf en $t=0$.
- Cette « fonction » mathématique n'a de sens qu'appliquée à un système.

- **Réalisations pratiques approchées de $\delta(t)$:**

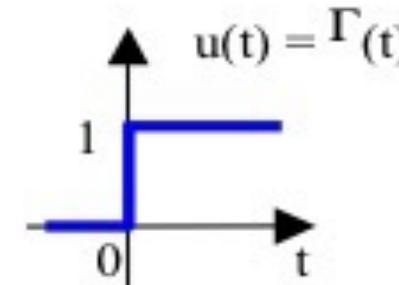


Signaux typiques de test

L'échelon et la rampe

- **L'échelon unitaire $\Gamma(t)$ (échelon de Heaviside)** est défini par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

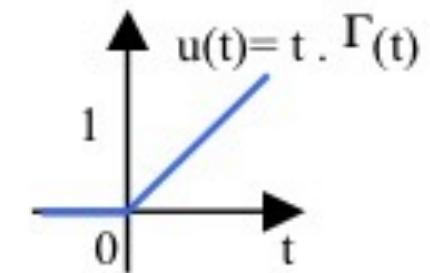


La fonction de Dirac est la dérivée de la fonction de Heaviside :

$$\delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$$

- **La fonction rampe $t \cdot \Gamma(t)$** est définie par :

$$r(t) = t \cdot \Gamma(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ t, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$



- La fonction rampe est l'intégrale de la fonction de Heaviside :

$$r(t) = \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau$$

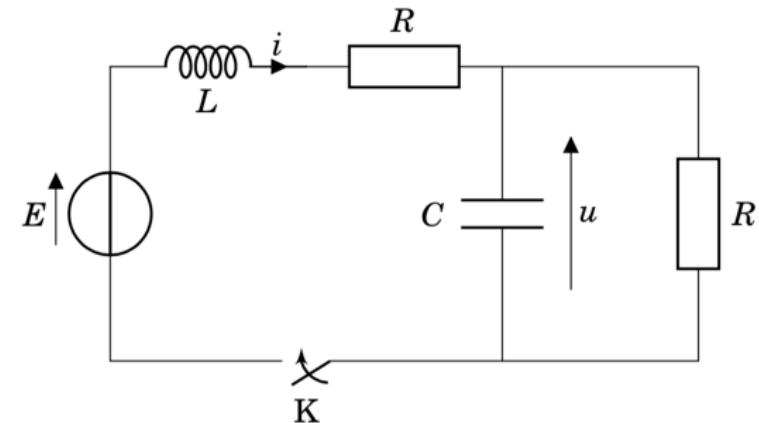
- On parle aussi d'échelon de vitesse pour désigner la rampe

Systèmes dynamiques

- **Systèmes dont le comportement dépend des valeurs présentes et passées des grandeurs qui les caractérisent**
- **Dépendance au passé liée à un effet mémoire qui apparaît par la présence d'éléments de stockage d'énergie**
 - Energie cinétique : inductances, inertie mécanique, inertie thermique...
 - Energie potentielle : condensateurs, hauteurs...
- **Ces systèmes sont régis par des équations intégro-différentielles**
 - de dimension finie d'ordre **n** (paramètres localisés)
l'ordre **n** (nombre de dérivations et d'intégrations) est égal au nombre d'éléments indépendants de stockage d'énergie
 - de dimension infinie (paramètres distribués)
régissent le comportement de phénomènes distribués dans l'espace

Modèle pour $t < 0$: K ouvert , $K = 0$

- $i = 0$
- $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} \Rightarrow u(t) = u(t_1)e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$
 $u(t_1)$ à $t = t_1 < 0$
- $E = u + u_K$



Modèle pour $t \geq 0$: K fermé , $K = 1$

- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri - u) \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\frac{du}{dt} + \frac{2}{LC}u = \frac{1}{LC}E$
- $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} + \frac{1}{C}i$

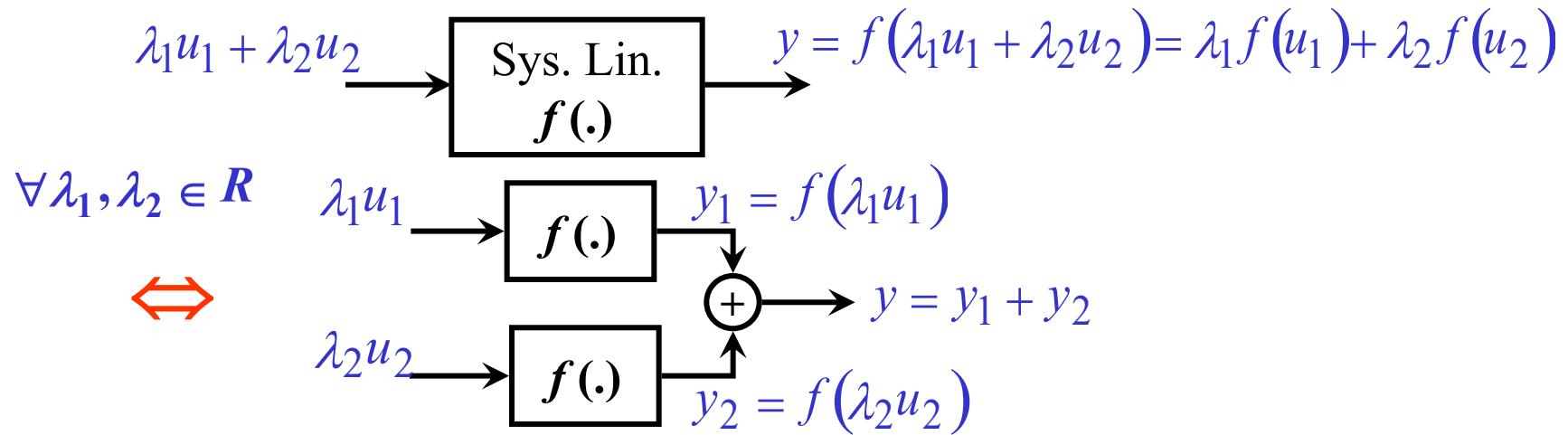
Modèle pour $t \geq 0$ sous forme d'état :

L'équation d'état : $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E$

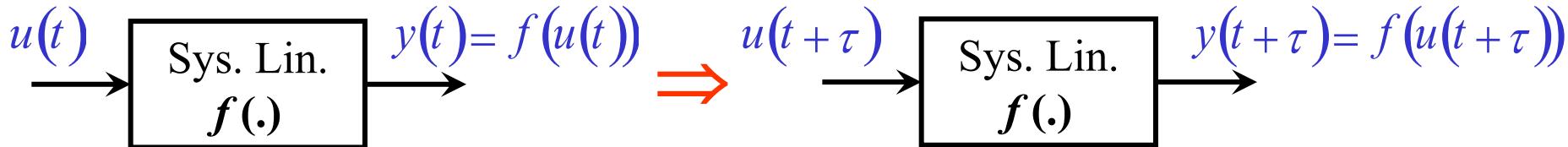
L'équation de sortie (la mesure) : $y = u = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix}$.

Propriétés des systèmes linéaires invariants causaux

- Un système **linéaire** satisfait le principe de superposition :

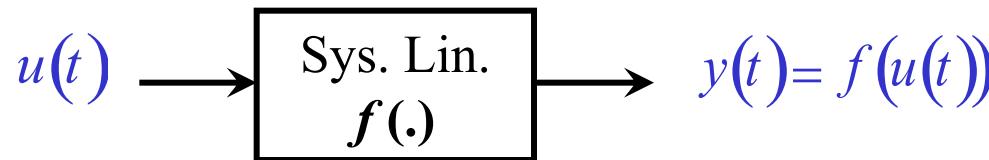


- Un système est **invariant** (ou stationnaire) si les relations entrées/sorties ne dépendent pas de l'instant d'application de l'entrée :



- Un système est dit **causal** si la sortie du système $y(t_0)$ dépend uniquement de l'entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$ (la valeur actuelle de la sortie ne dépend que des valeurs actuelle et passées de l'entrée)

Représentation des systèmes linéaires à temps continu

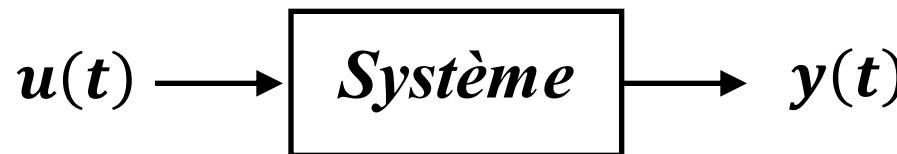


- Les **systèmes linéaires invariants à temps continu sont régis par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants** :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_0 u + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- **n** est l'ordre du système
- **r = n - m** est le degré relatif du système
- Un système physique est :
 - Dynamique si **n > 0** sinon Statique (**y = G.u**)
 - Causal (propre) : **n ≥ m**
 - Strictement causal (strictement propre) : **n > m**
 - Invariant ssi les coefficients **a_i** et **b_i** sont constants

Représentation d'état des systèmes linéaires invariants à temps continu



- **Les systèmes linéaires causaux et stationnaires à temps continu sont définis par un système d'équations différentielles linéaires de la forme :**

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec les vecteurs d'état $x \subset \mathbb{R}^n$, de commande $u \subset \mathbb{R}^m$ et de sortie $y \subset \mathbb{R}^p$;

- Caractérise le **comportement dynamique intrinsèque du système en tenant compte des dynamiques internes $x(t)$**

Obtention de la Représentation d'Etat à temps continu



- **Considérons une représentation externe** (entrée-sortie) :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_0 u + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \text{ avec } m < n$$

- **Il vient la représentation d'état suivante sous forme dite « contrôleur » :**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \cdots 0 \ b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_0] x(t)$$

Cette représentation n'est pas unique seules les dimensions le sont.

Solution de la représentation d'état en temps continu

- La solution du système en temps continu suivant :

$$(\Sigma_c) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

est donnée par :

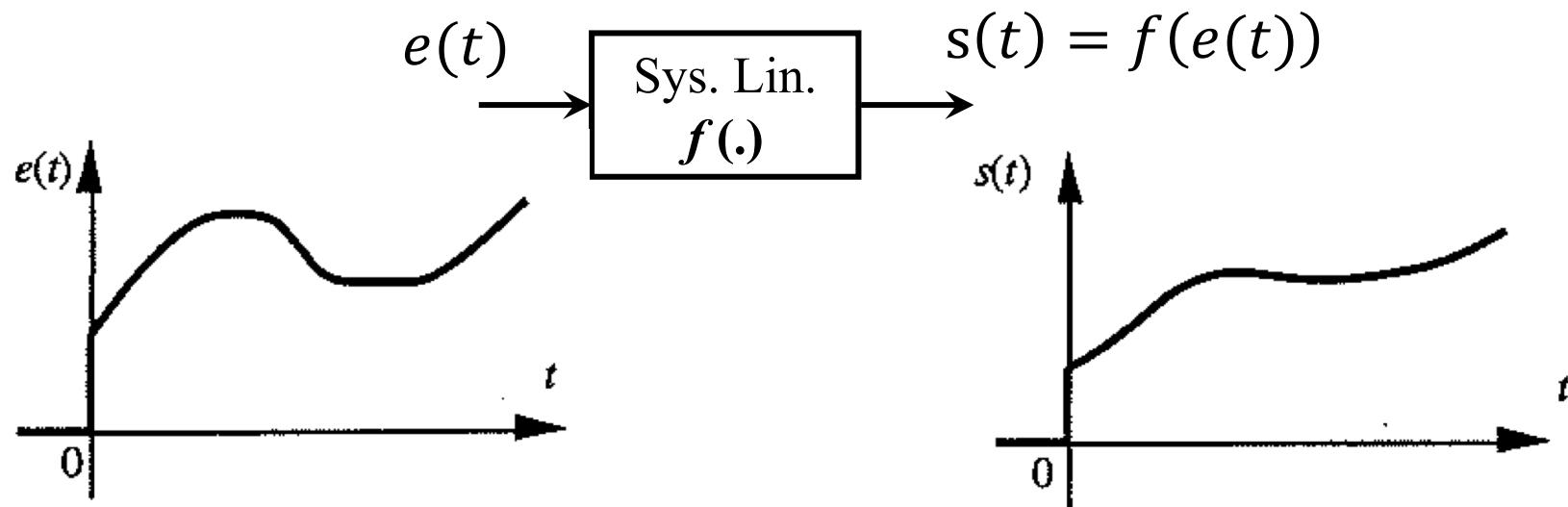
$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

- Pour toute entrée **u(t)** bornée, les états **x(t)** du système à temps continu : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ sont bornésssi :

**Toutes les valeurs propres de A
sont à parties réelles strictement négatives.
On dit que le système est stable.**

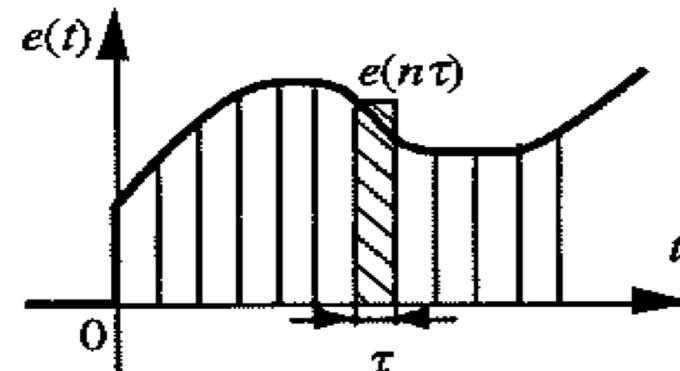
Les V.P λ_i de A sont les racines de : $\det(\lambda I_n - A) = 0$

Réponse d'un système linéaire invariant causal et produit de convolution (1/3)



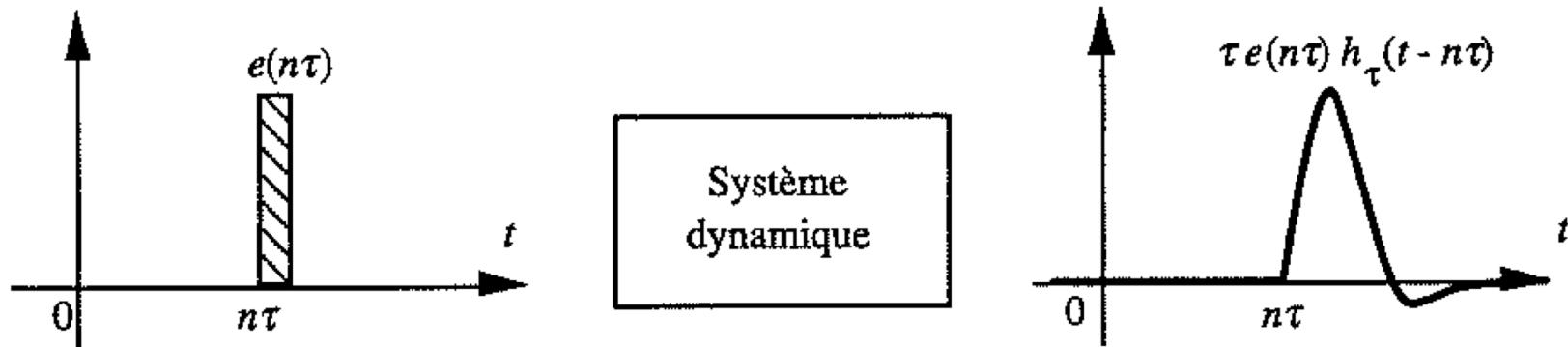
On cherche à déterminer la sortie $s(t) = f(e(t))$, avec $f(\cdot)$ une fonction linéaire et invariante

Pour cela, découpons $e(t)$ en petites tranches de largeur τ :

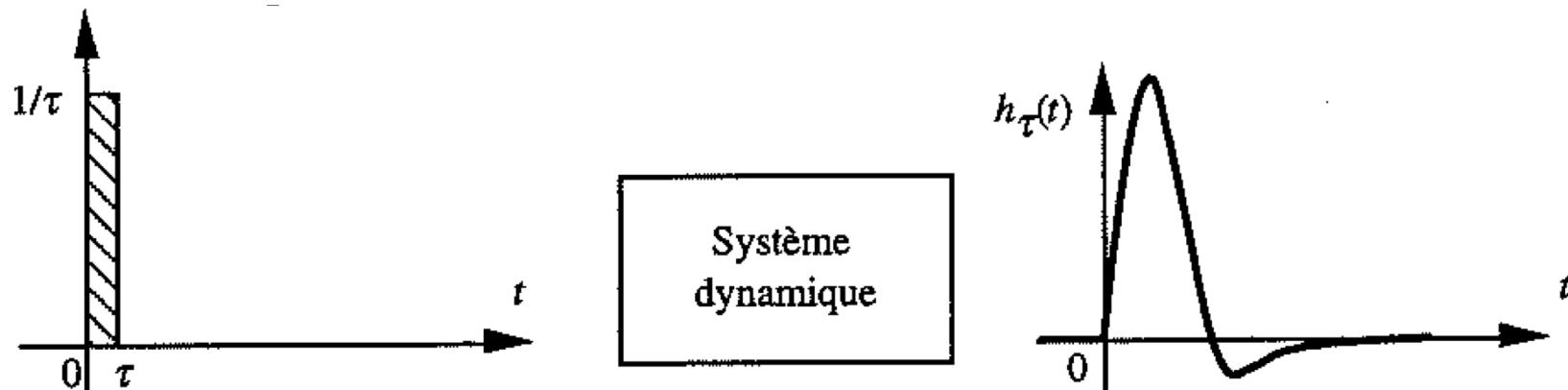


Réponse d'un système linéaire invariant causal et produit de convolution (2/3)

La $n^{\text{ème}}$ impulsion isolée et excitant le système, conduit à la sortie $\tau e(n\tau) h_\tau(t - n\tau)$



où $h_\tau(t)$ est la réponse du système à l'impulsion de surface unité placée à l'origine $t = 0$:



Réponse d'un système linéaire invariant causal et produit de convolution (3/3)

Par la linéarité du système, à l'instant $t = n\tau$, la réponse du système à l'entrée $e(t)$ est approchée par la somme des réponses partielles relatives aux n impulsions appliquées entre $t = 0$ et $t = n\tau$, soit :

$$s(t) = \sum_{k=0}^n \tau e(n\tau) h_\tau(t - n\tau)$$

Si $\tau \rightarrow 0$, l'impulsion, de largeur τ et de hauteur $\frac{1}{\tau}$, placée à l'origine tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.

La réponse du système tend alors vers la **réponse impulsionale du système** notée $h(t)$. Pour un système causal $h(t) = 0 \forall t < 0$.

On obtient alors pour $s(t)$:

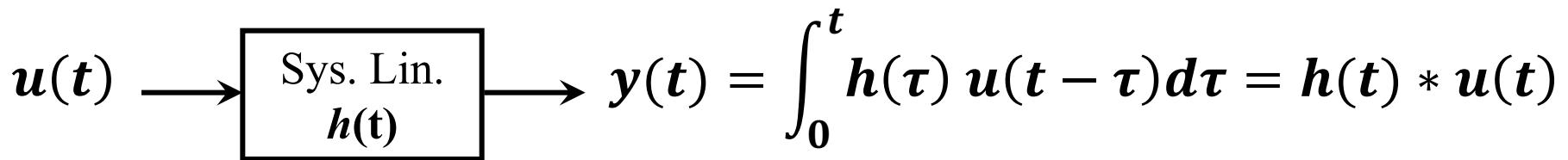
$$s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Par causalité de $e(t)$ et $h(t)$, il vient :

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) e(t - \tau) d\tau = h(t) * e(t)$$

nommé produit de convolution de deux fonctions causales.

Réponse impulsionale d'un système linéaire invariant causal



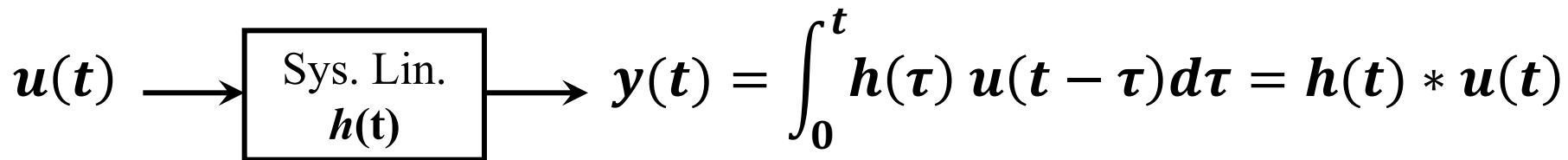
- Propriétés du produit de convolution :
 - Le produit de convolution n'existe que si $u(t)$ est bornée ($|u(t)| < U_{max} < \infty$) et $\int_0^\infty |h(t)| dt$ existe ($h(t) \in L_1$)
 - Le produit de convolution est commutatif
 - La fonction de Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$\text{Si : } u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = h(t)$$

=> $h(t)$ est appelée la réponse impulsionale du système

$h(t)$ caractérise complètement le comportement du système

Point d'équilibre et cycle limite

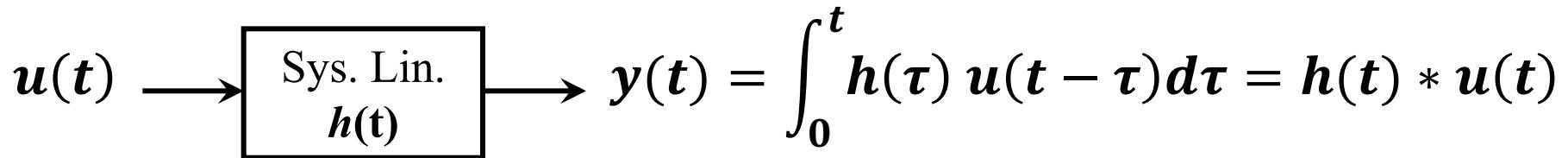


- **Point d'équilibre :**

- Un point d'équilibre est une valeur **constante** particulière de la sortie : c'est la valeur constante vers laquelle tend la sortie $y(t)$ lorsque l'entrée $u(t)$ est constante.
- Dans le cas d'un système linéaire, pour une entrée nulle, le seul point d'équilibre possible est $y = 0$.

- **Cycle limite :**

- Un cycle limite est une trajectoire bornée cyclique de la sortie $y(t)$ lorsque l'entrée $u(t)$ est constante.
- Un cycle limite forme une trajectoire fermée dans l'espace des phases.
- Pour un système linéaire le seul cycle limite possible est une sortie sinusoïdale (oscillateur)



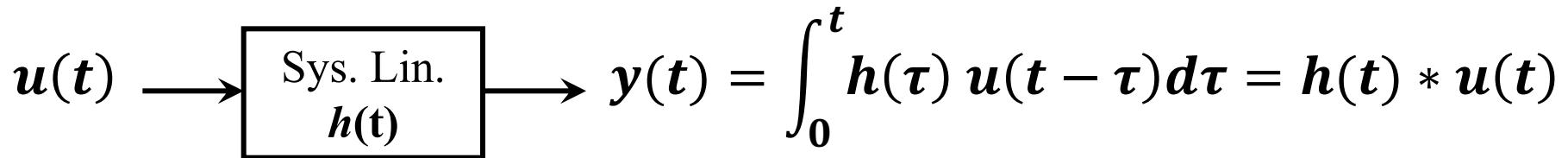
- **Stabilité des systèmes linéaires :**

- On dira d'un système linéaire que son point d'équilibre ou son cycle limite est stable, si lorsqu'on écarte l'état du système de ce point d'équilibre ou de son cycle limite, il y revient après un certain temps.
- Pour un système linéaire stable, le retour à l'équilibre est de forme exponentielle.
- Un système linéaire est stable ssi : $\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$

- **Instabilité :**

- Un système instable est un système dont la sortie diverge. Par conséquent, c'est un système qui s'autodétruit en pratique !!!

Définition de la stabilité Entrée Bornée – Sortie Bornée (EB-SB)



- **Définition : Stabilité EB-SB**

Un système est stable au sens EB-SB
(Entrée Bornée – Sortie Bornée)
si pour toute entrée bornée, sa sortie l'est aussi. ♦

$$\|u(t)\| < M \quad \forall t > t_0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < N(M, y(t_0))$$

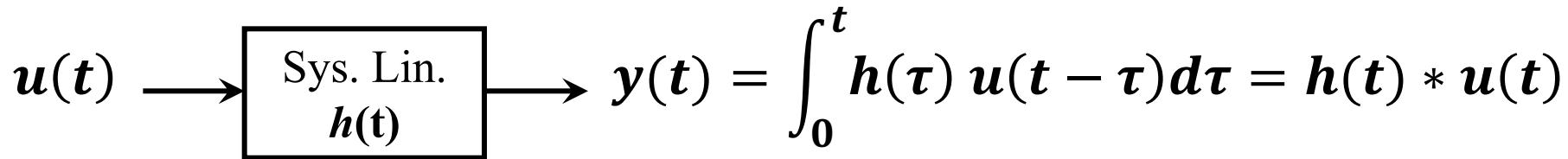
Avec M et N des nombres finis qui ne dépendent pas de t_0

- **Théorème : Stabilité EB-SB**

Une C.N.S. de stabilité EB-SB d'un système est que sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable :

$$\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$$

Stabilité EB-SB de systèmes élémentaires



- **Les systèmes linéaires invariants suivants sont-ils stables au sens EB-SB ? :**
 - $y(t) = 2u(t)$
 - $\frac{dy(t)}{dt} = 2u(t)$
 - $3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$
 - $3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -u(t)$
 - $3\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = u(t)$
- **Sous quelles conditions la mise en série de N systèmes linéaires sera-t-elle stable au sens EB-SB ?**

Transformée de Laplace et Fonctions de Transfert

Transformée de Laplace

Définition

Soit $x(t)$ une fonction localement sommable de la variable réelle t et causale (i.e. $x(t) = 0$ pour $t < 0$)

S'il existe $\sigma > \sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$

alors $x(t)$ admet une transformée de Laplace $X(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$ définie par :

$$X(p) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-tp} dt$$

Le domaine $Re(p) > \sigma_0$ tel que $X(p)$ existe s'appelle le domaine de sommabilité ou de convergence de l'intégrale de Laplace.

σ_0 s'appelle l'abscisse de sommabilité de l'intégrale de Laplace.

- L'intégrale de Laplace est bijective :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = \frac{1}{2j\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} X(p)e^{tp} dp$$

- La notation anglo-saxonne de la variable « p » est « s ».

Propriétés de la transformée de Laplace

- **Linéarité :**

$$\mathcal{L}(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda\mathcal{L}(x(t)) + \mu\mathcal{L}(y(t)), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- **Dérivation :**

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = p\mathcal{L}(x(t)) - x(0^-) = pX(p) - x(0^-)$$

$$\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = p^2X(p) - px(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = p^k X(p) - p^{k-1}x(0^-) - \dots - \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(0^-)$$

- **Intégration :**

$$\mathcal{L}\left(\int_{0^-}^t x(t)dt\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(x(t))$$

- **Théorème du retard** (translation sur t) :

$$\mathcal{L}(x(t-T)) = e^{-pT}\mathcal{L}(x(t)) = e^{-pT}X(p)$$

Exemples de Transformées de Laplace

$x(t)$	$X(p)$	σ_0
$\delta(t)$	1	$-\infty$
$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1, & \forall t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	0
$t^n \Gamma(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0
$e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p + a}$	$-a$
$\sin(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	0
$\cos(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	0
$e^{-at} \cos(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$-a$

Théorème de la valeur initiale

Théorème de la valeur finale

- **Théorème de la valeur initiale :**

Si $x(t)$ est définie en 0 et si $X(p)$ a une abscisse de convergence finie, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty} pX(p)$$

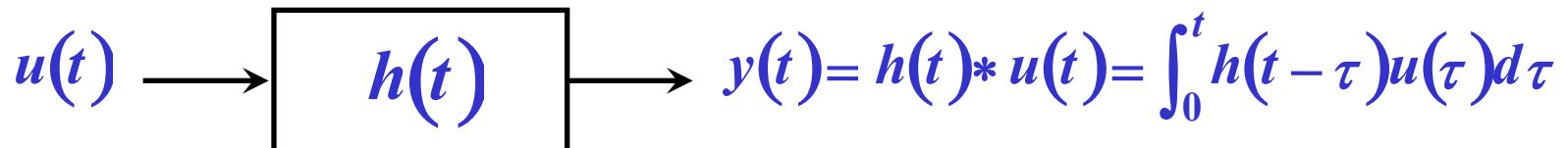
- **Théorème de la valeur finale :**

Si $x(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+} pX(p)$$

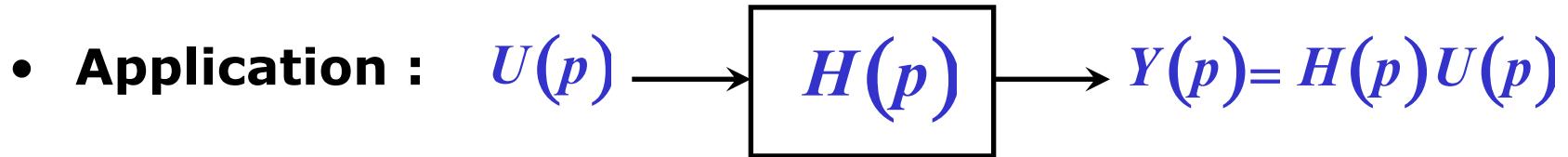
Produit de convolution et Fonction de transfert

- **Système linéaire stationnaire causal à temps continu :**



- **Transformée de Laplace du produit de convolution :**

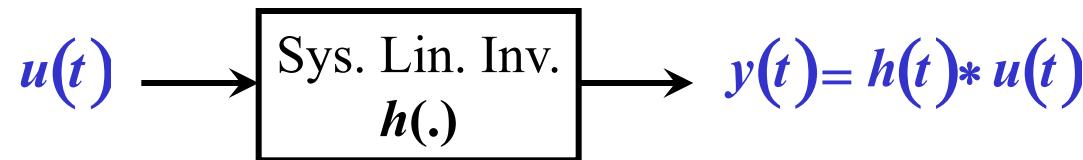
$$L(h(t) * u(t)) = \int_0^\infty \left[\int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau \right] e^{-pt} dt = H(p)U(p)$$



- **En pratique, la Transformée de Laplace :**

- d'un Signal est obtenue à partir de tables ou de logiciels spécialisés
- d'un Système (Fonction de Transfert) à partir des équations différentielles ou d'une identification directe par des méthodes spécifiques.

Lien entre Equations Différentielles Ordinaires et Fonction de Transfert



$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_0 u + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

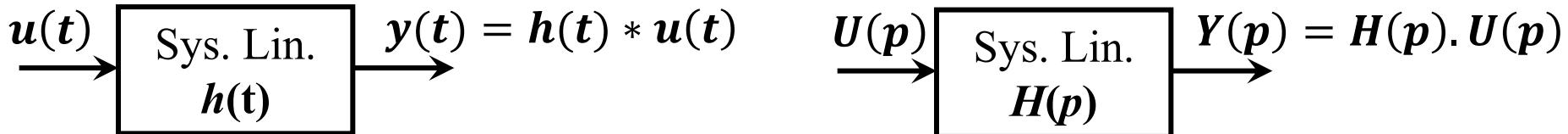
- **L'application de la transformée de Laplace en considérant des **conditions initiales nulles** donne :**

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

- Les racines de $B(p)$ sont appelées les **zéros** de $H(p)$
- Les racines de $A(p)$ sont appelées les **pôles** de $H(p)$
- Les pôles et les zéros sont réels ou complexes conjugués

Stabilité EB-SB et Factorisation des Fonctions de Transfert

Stabilité EB-SB d'un système linéaire représenté par sa Fonction de Transfert

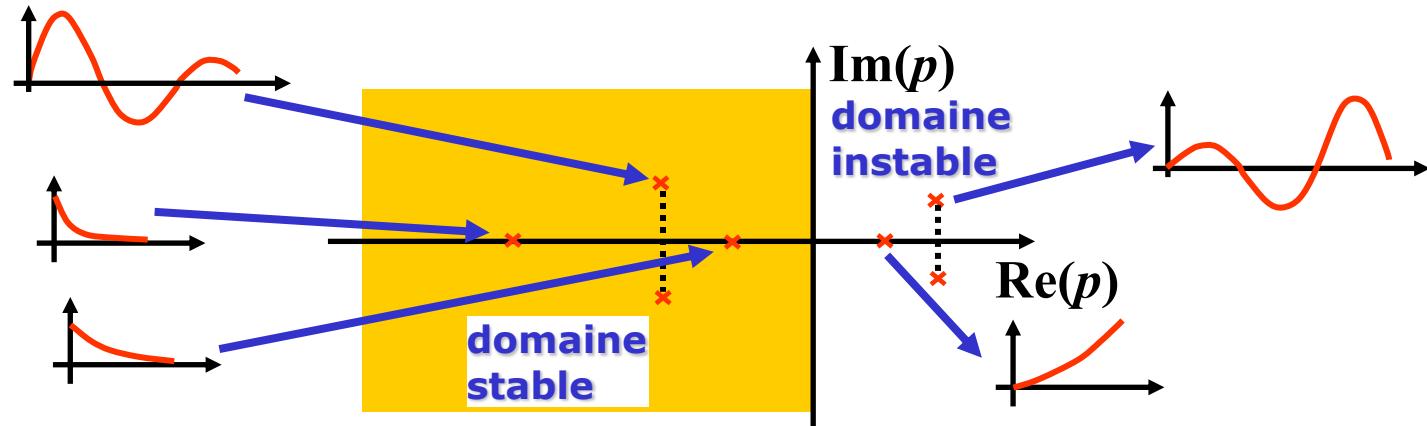


- **Définition :** Un système est stable au sens EB-SB (Entrée Bornée – Sortie Bornée) si pour toute entrée bornée, sa sortie l'est aussi :

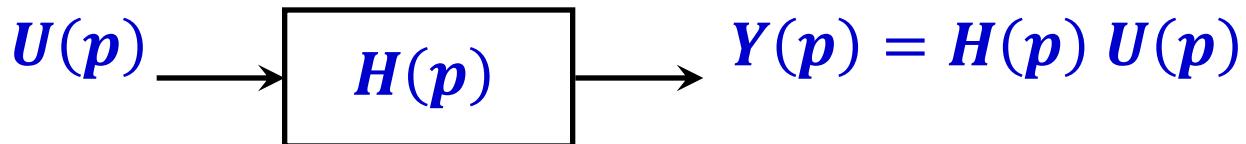
$$\|u(t)\| < M \quad \forall t > t_0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < N(M, y(t_0))$$

- **Théorème 1 :** Une C.N.S. de stabilité EB-SB d'un système est que sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable : $\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$
- **Théorème 2 :** Une C.N.S. de stabilité EB-SB d'un système décrit par sa fonction de transfert $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$ est que tous les pôles de $H(p)$ soient à partie réelle strictement négative :

$Re(\text{pôles}(H(p))) < 0 \Rightarrow \text{Système stable au sens EB-SB}$



Stabilité des systèmes du 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordre



La stabilité EB-SB de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, dépend de la négativité des parties réelles des racines de $A(p)$.

- **Systèmes du 1^{er} ordre :**

$$A(p) = a_1 p + a_0$$

$H(p)$ stable ssi : $a_1 > 0$ et $a_0 > 0$.

- **Systèmes du 2^{ème} ordre :**

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

$H(p)$ stable ssi : $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ et $a_0 > 0$.

- **Systèmes du 3^{ème} ordre :**

$$A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

$H(p)$ stable ssi tous les coefficients $a_i > 0$ et $a_2 a_1 > a_3 a_0$.

Caractéristiques des Fonctions de Transfert

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

- **Gain statique de $H(p)$** : $H(p=0) = b_0/a_0$
 - $a_0 = 0$: Gain statique infini, système intégrateur
 - $b_0 = 0$: Gain statique nul, système déivateur
- **Pôles du système** : Racines de $A(p)$
 - Soient deux pôles p_1 et p_2 , si $|p_1| > |p_2|$ alors:
 - p_1 sera nommé pôle rapide et p_2 pôle lent ;
 - Pôles dominant : Pôle ayant le plus petit module : Dynamique la plus lente : Constante de temps la plus grande
 - Pôle stable : Pôle à partie réelle négative
 - Pôle instable : Pôle à partie réelle positive
- **Zéros du système** : Racines de $B(p)$
 - Zéro à partie réelle positive : Zéro instable. Si $H(p)$ possède au moins un zéro instable : Système à non minimum de phase

- Soit un système décrit par sa Fonction de Transfert entrée-sortie :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

- Les racines des polynômes en p de $A(p)$ et $B(p)$ sont soit réelles soit complexes conjuguées d'où la factorisation de $A(p)$ et $B(p)$:

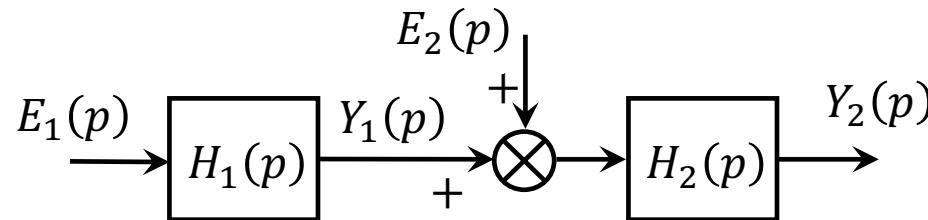
$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m(p + z_1)(p + z_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_i)p + |z_i|^2) (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_j)p + |z_j|^2)}{a_n(p + p_1)(p + p_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_i)p + |p_i|^2) (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_j)p + |p_j|^2)}$$

et de $H(p)$ comme le produit de Fonctions de Transfert :

$$H(p) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{p + z_1}{p + p_1} \cdot \frac{p + z_2}{p + p_2} \dots \frac{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_i)p + |z_i|^2}{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_i)p + |p_i|^2} \cdot \frac{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_j)p + |z_j|^2}{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_j)p + |p_j|^2}$$

d'où l'intérêt de bien connaître le comportement des systèmes du 1^{er} ordre (1 pôle) et du 2nd ordre (2 pôles).

Systèmes en série



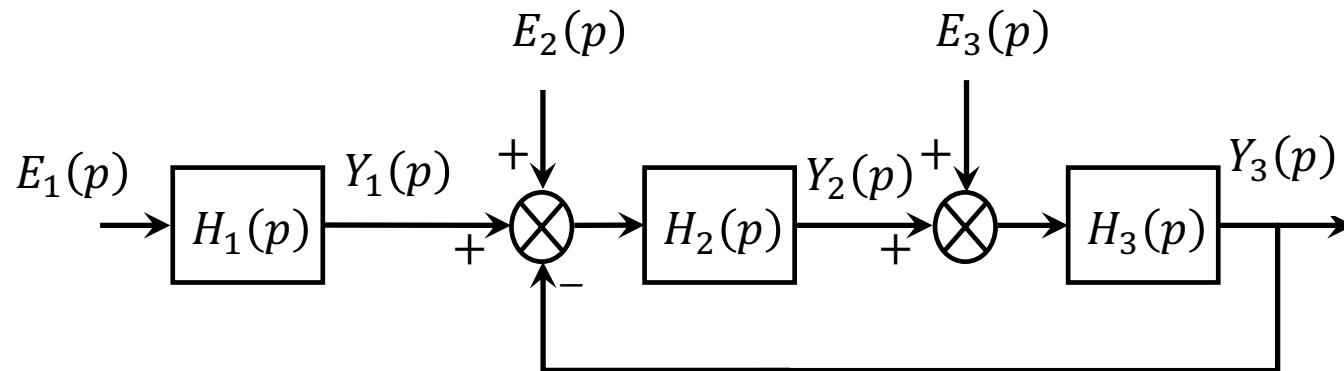
$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_1H_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si **tous les pôles** des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont à parties réelles strictement négatives.

➤ **Proposition : Stabilité EB-SB de l'association en série de systèmes dynamiques**

Un système dynamique défini par une matrice de transfert $M(p)$ entre toutes les entrées exogènes possibles $E(p)$ et toutes les sorties $Y(p)$ des fonctions de transfert $H_i(p)$ qui composent le système réalisé par la mise en série de fonctions de transfert sera stable au sens EB-SB si et seulement si toutes les fonctions de transfert $H_i(p)$ de $M(p)$ sont stables au sens EB-SB.♦

Système composé



$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ H_1 \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{-H_2H_3}{1+H_2H_3} \\ H_1 \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_3}{1+H_2H_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si tous les pôles des fonctions de transfert H_1 , $\frac{H_2}{1+H_2H_3}$, $\frac{H_3}{1+H_2H_3}$ et $\frac{H_2H_3}{1+H_2H_3}$ sont à parties réelles strictement négatives.

Régimes de fonctionnement

Transitoire, Permanent, Statique, Sinusoïdal

Caractérisation temporelle des systèmes linéaires

- La caractérisation temporelle des systèmes linéaires invariants causaux est le plus souvent réalisée en pratique à l'aide d'une **entrée en échelon**.
- Pour les systèmes stables, typiquement deux types de réponses sont obtenues :
 - **Réponse apériodique** (la réponse de la sortie du système ne présente pas de dépassement de la valeur finale)



- **Réponse pseudo-oscillatoire** (dépassement transitoire de la valeur finale de la sortie)



- Pour caractériser un système instable par une réponse expérimentale, il est tout d'abord nécessaire de le stabiliser pour bouclage de la sortie.

- **Solution d'un système linéaire invariant causal stable :**

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_0 u + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- La solution $y(t)$ d'un système dynamique régi par une EDO est constituée de la somme de la solution de l'Equation Homogène (EH) sans second membre $y_{EH}(t)$ plus d'une Solution Particulière (SP) $y_{SP}(t)$ dépendant de l'entrée $u(t)$:

$$y(t) = y_{EH}(t) + y_{SP}(t)$$

- La solution de l'EH $y_{EH}(t)$ est donnée par : $y_{EH}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{p_i t}$ où les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (racines du dénominateur de $H(p)$).
- Pour une fonction de transfert stable, les pôles sont à partie réelle strictement négative : $\text{Re}(\text{pôles}(H(p))) \equiv \text{Re}(p_i) < 0$
- Il en découle que : $y_{EH}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

- **Régime transitoire :** la solution de l'EH $y_{EH}(t)$ ne s'est pas encore « éteinte » : $y(t) = y_{EH}(t) + y_{SP}(t)$

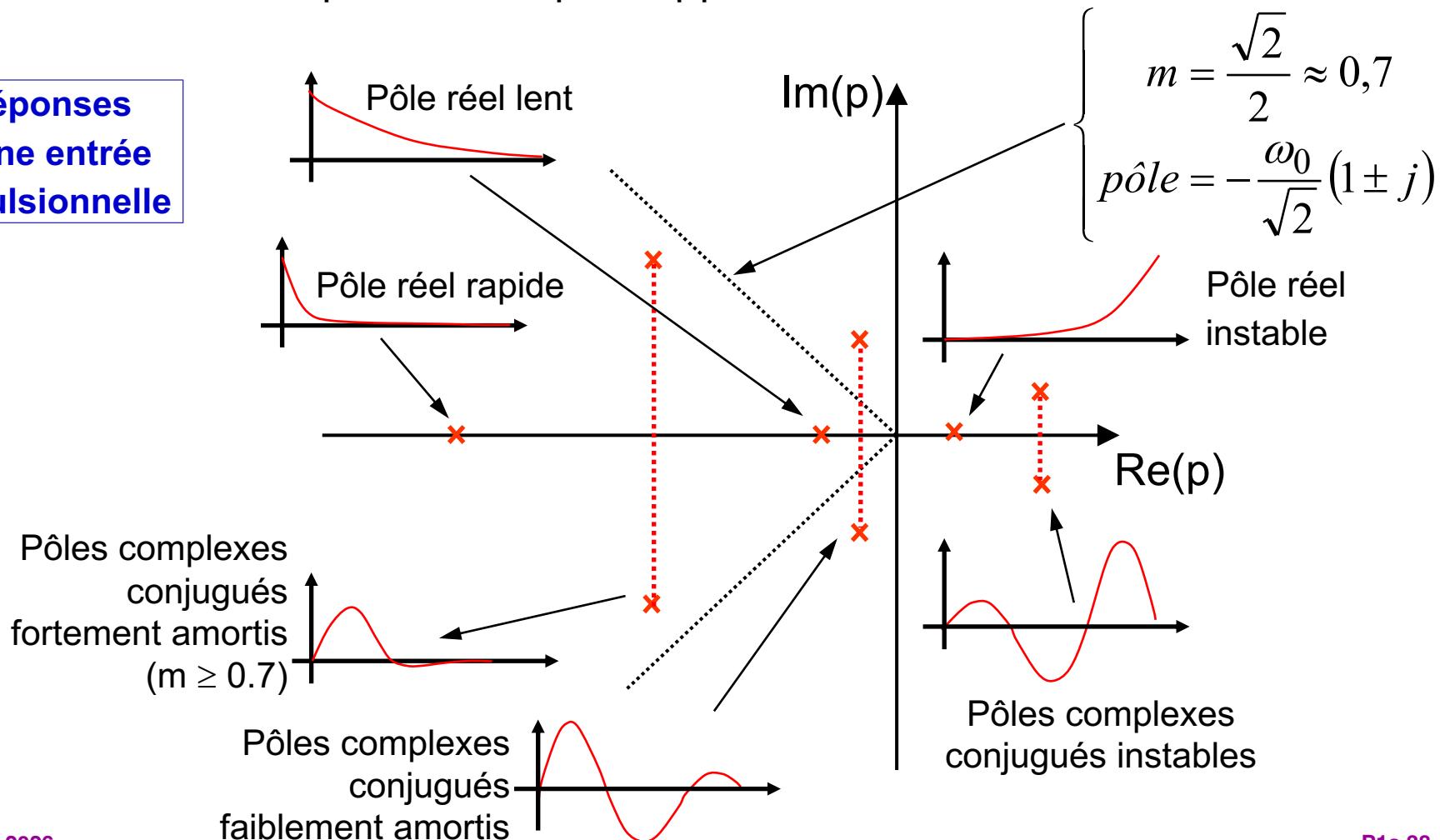
- **Régime permanent :** $y(t) = y_{SP}(t)$, seule la solution particulière, liée à l'entrée $u(t)$, subsiste.

Caractérisation du Régime Transitoire

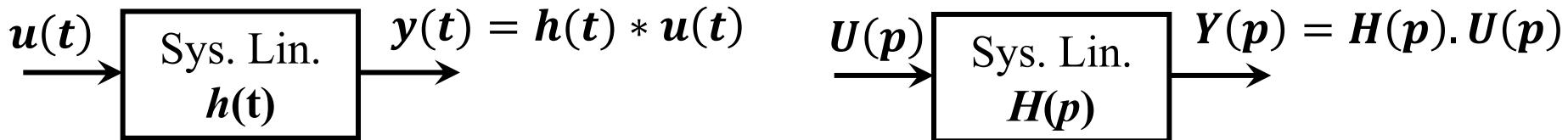
- Grandeurs caractéristiques :**

- Temps de réponse à 95% de la valeur finale
- Valeur du dépassement par rapport à la valeur finale

Réponses à une entrée impulsionnelle



Régime statique et Gain statique



- **Régime statique :**

On appelle Régime Statique d'un système linéaire invariant causal et **stable**, l'état, de durée indéfinie, du système dans lequel toutes ses dérivées nulles.

A conditions initiales nulles, on a $\mathcal{L}\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right) = p^k Y(p)$ donc si $Y(p) \neq 0$, cet état correspond à la valeur particulière $p = 0$ de la variable p .

- **Gain statique :**

- Le **gain statique** est le gain de $H(p)$ en **régime statique**
- Le **régime statique** est défini lorsque $p=0 \Rightarrow$ **dérivées de $y(t)$ nulles**

$$\text{Gain statique : } G_0 = H(p = 0)$$

- Pour une entrée constante (statique) de valeur U_0 , la sortie d'un système stable au sens EB-SB tend vers une valeur constante donnée par :

$$Y_\infty = G_0 U_0 = H(0) U_0$$

Régime permanent sinusoïdal

- **Régime permanent sinusoïdal (harmonique) :**

- Dans le cas d'un système linéaire invariant causal stable, pour une entrée $u(t)$ sinusoïdale de pulsation ω , après extinction du régime transitoire, la sortie $y(t)$ sera aussi sinusoïdale de même pulsation ω :

$$u(t) = A \sin(\omega t) \Gamma(t) \Rightarrow y(t) = A \cdot G(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \Gamma(t)$$

Le gain $G(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$ sont donnés par :

$$G(\omega) = |H(p = j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(H(p = j\omega))$$

- **Exemple :**

- EDO (circuit RC) : $RC \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t) \cdot \Gamma(t)$ avec $y(0^-) = 0$, $RC = \tau$

$$\Rightarrow \frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$$

- Pour une entrée sinusoïdale : $u(t) = U_{max} \sin(\omega t)$, on a, en régime permanent, $y(t)$ de la forme : $y(t) = Y_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ obtenu par résolution de : $\omega \tau Y_{max} \cos(\omega t + \varphi) + Y_{max} \sin(\omega t + \varphi) = U_{max} \sin(\omega t) \Rightarrow$ long et fastidieux
- Obtention directe par la fonction de transfert avec $p = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \Rightarrow G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \Rightarrow Y_{max} = \frac{U_{max}}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = \arg(H(p = j\omega)) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{U_{max}}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau))$$

Analyse et représentation fréquentielle

Intérêt de l'analyse fréquentielle

- **Séries de Fourier :**

La théorie des séries de Fourier montre que tout signal périodique d'énergie finie peut se décomposer sous la forme d'une somme infinie de fonctions trigonométriques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale du signal périodique.

L'ensemble de ces fréquences forme le spectre du signal.

- **Exemple d'un signal carré** d'amplitude 1 de pulsation ω :

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)$$

avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

- **Le théorème de superposition** (linéarité du système) permet d'analyser la réponse du système pour chaque fréquence harmonique du signal d'entrée, puis à faire la somme des réponses pour obtenir la réponse totale.

Pour cela, on détermine, en fonction de la fréquence, le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$ et la phase $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ du système à partir de sa fonction de transfert $H(j\omega)$.

Représentation graphique des fonctions de transfert

- **On désire représenter graphiquement la fonction de transfert d'un système par :**
 - son gain : $G(\omega) = |H(j\omega)|$
 - et sa phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$
- **Dans le but :**
 - De visualiser le type d'action effectuée par la fonction de transfert en fonction de la fréquence du signal d'entrée
 - De pouvoir faire des opérations ou des raisonnements directement sur les graphiques (souvent beaucoup plus simple que de manipuler les expressions de $G(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$).
- **3 représentations couramment utilisées en automatique :**
 - Diagramme de Bode
 - 1 graphe de gain : $x = \omega$ avec une échelle log10, $y = 20 \log_{10} G(\omega) = G_{dB}(\omega)$
 - 1 graphe de phase : $x = \omega$ avec une échelle log10, $y = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés)
 - Diagramme de Balck-Nichols :
 - 1 seul graphe avec : $x = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés) et $y = G_{dB}(\omega)$
 - Diagramme de Nyquist :
 - 1 seul graphe avec : $x = \operatorname{Re}(H(j\omega))$ et $y = \operatorname{Im}(H(j\omega))$

Le décibel (dB)

- Le décibel exprime un **gain sans unité** dans une échelle logarithmique.
- Un gain sans unité est un **rapport** entre deux grandeurs de même unité.
- Le décibel exprime l'amplification ou l'atténuation d'une grandeur.

- Dans le cas du **rapport de deux grandeurs de puissances**, ce rapport en décibels est appelé G_{dB} et est donné par :

$$G_{dB} = \textcolor{red}{10} \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_e} \right) \quad \text{avec } P_S \text{ et } P_e \text{ en Watts}$$

- Dans le cas où c'est le **rapport de deux grandeurs de champs** (qui ne sont pas des puissances) qui est calculé, ce rapport en décibels est aussi appelé G_{dB} et est donné par :

$$G_{dB} = \textcolor{red}{20} \log_{10} \left(\frac{U_S}{U_e} \right) \quad \text{avec par exemple } U_S \text{ et } U_e \text{ en Volts}$$

Exemples de grandeurs de champs courantes : Tensions (Volt), Courants (Ampère), Pression acoustique (Pascal)...

Intérêt du décibel

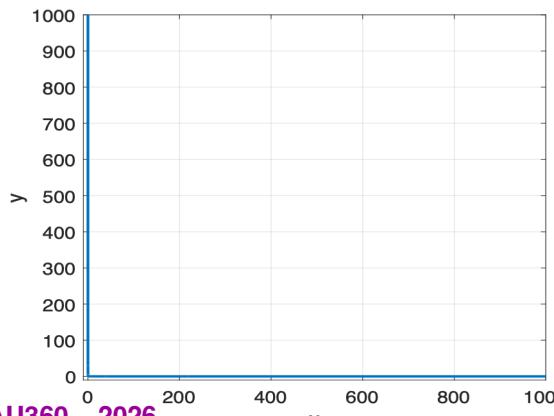
- Le décibel permet de représenter de grandes étendues de gains avec une plage réduite de valeurs (compression d'échelle)

Gain	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10
G_{dB}	-20 dB	-6 dB	-3 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB

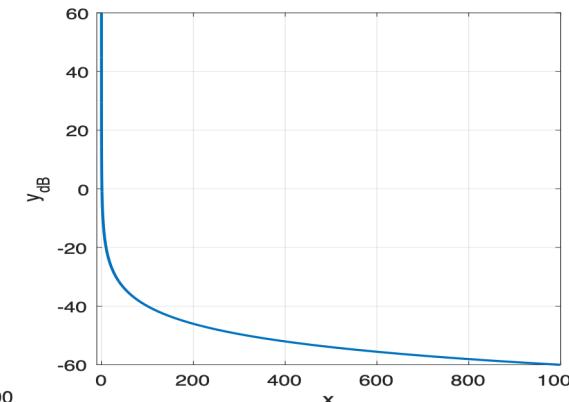
Gain	10^{-4}	10^{-3}	$1/100$	1	100	1000	10^4
G_{dB}	-80 dB	-60 dB	-40 dB	0 dB	40 dB	60 dB	80 dB

- Très utile pour les graphiques :
 - Exemple : représenter $y = \frac{1}{x}$ pour $x \in [10^{-3}, 10^3]$ $y_{dB} = -20 \log_{10}(x)$

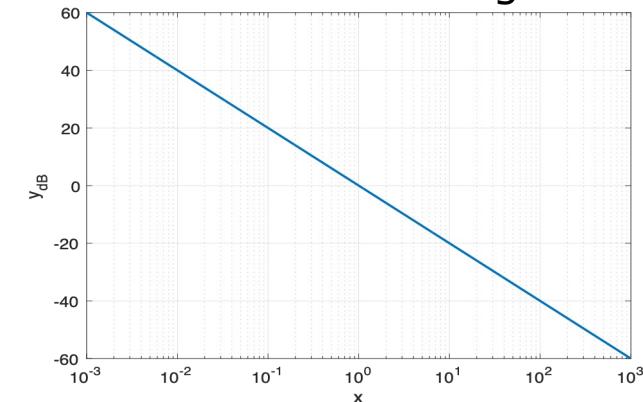
Echelle lin-lin



Echelle lin-lin



Echelle semi-log x



Le décibel avec unité

- Le dB exprime un gain sans unité dans une échelle logarithmique :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} G$$

- On peut adjoindre au dB une unité.
Il faut alors définir une **valeur de référence** pour laquelle on obtient **0 dBunité**.
- **Exemples :**

- Electronique :

- dBW : grandeur de puissance. La puissance de référence est 1 W.
 - dBm : grandeur de puissance. La puissance de référence est 1 mW.
 - dBV : grandeur de champ, valeur efficace de la tension.
La tension de référence est 1 volt RMS.
 - dB μ V : grandeur de champ, valeur efficace de la tension.
La tension de référence est 1 μ volt RMS.

- Acoustique :

- dBSPL : grandeur de champ, valeur efficace de pression acoustique.
La pression de référence est 20 μ Pascals (seuil d'audibilité à 1kHz).

- Audionumérique :

- dBFS : grandeur de champ, amplitude du signal numérique
L'amplitude de référence est l'amplitude max (FS : Full Scale).

Construction du diagramme de Bode

Construction du diagramme de Bode

- **On désire représenter graphiquement la fonction de transfert d'un système par :**
 - son gain : $G(\omega) = |H(j\omega)|$
 - et sa phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$
- **Diagramme de Bode :**
 - 1 graphe de gain : $x = \omega$ (échelle log10),
 $y = 20 \log_{10} G(\omega) = G_{dB}(\omega)$
 - 1 graphe de phase : $x = \omega$ (échelle log10),
 $y = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés)
- **Intérêt du diagramme de Bode :**
 - Le produit de fonctions de transfert se construit par la somme de leurs diagrammes respectifs :

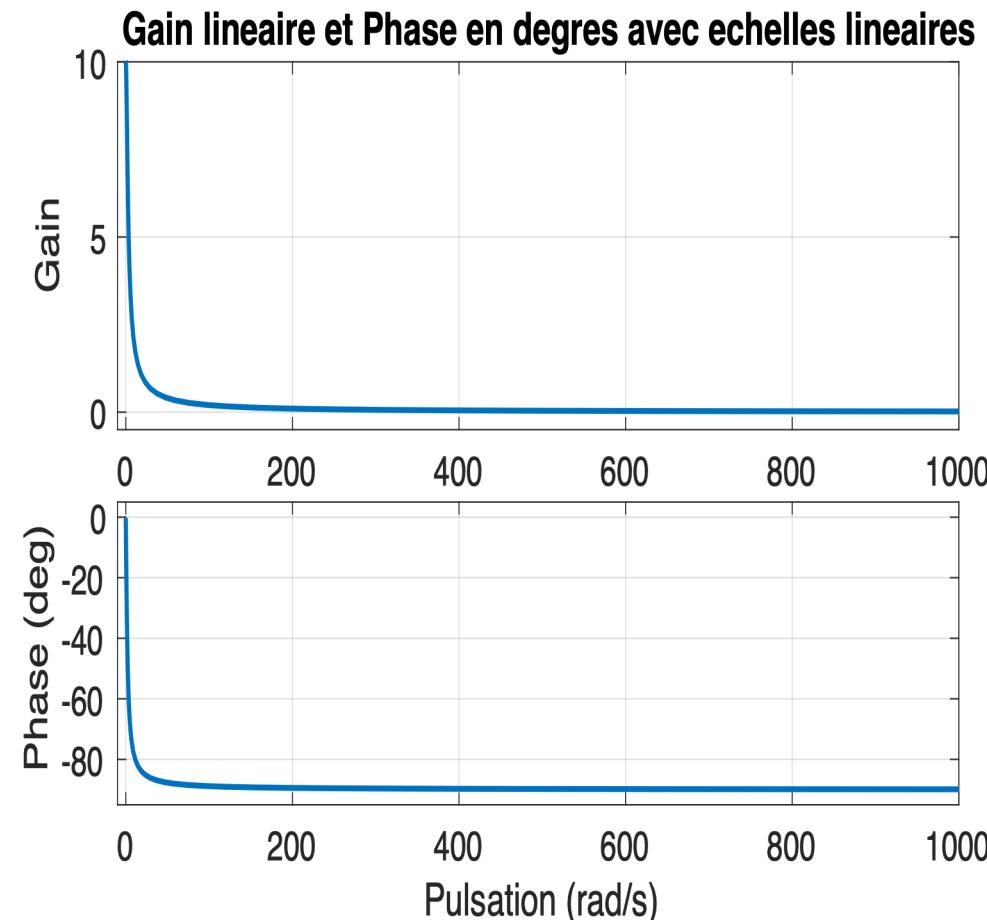
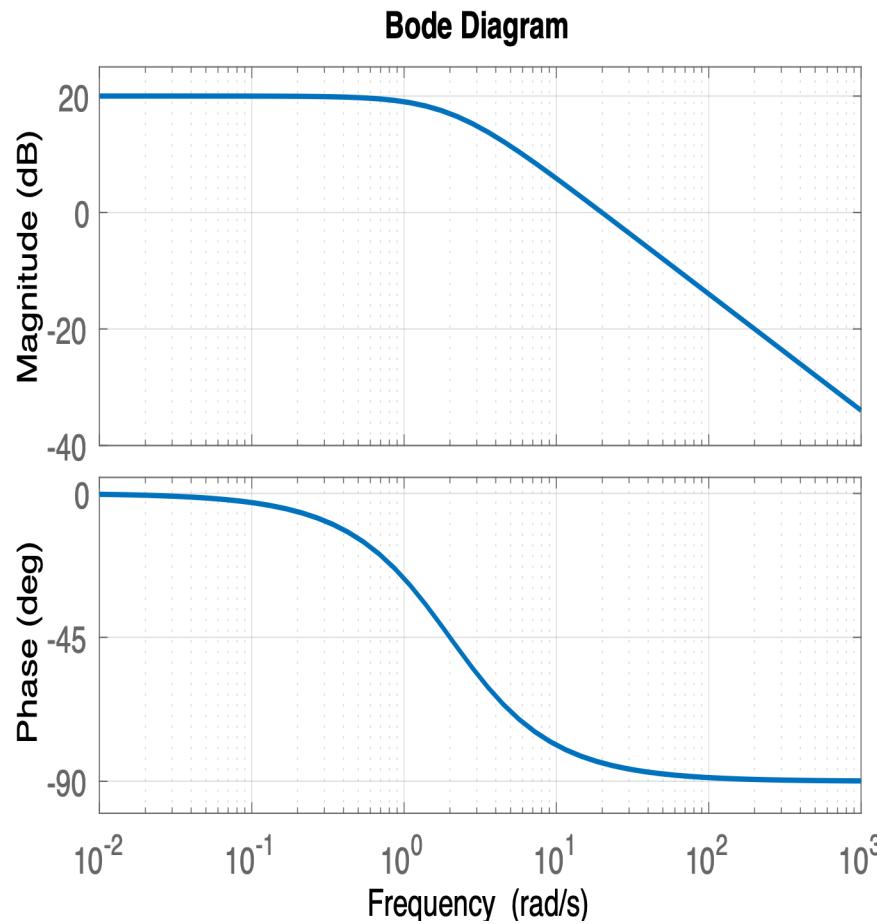
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow G(\omega) = |H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| \cdot |H_2(j\omega)| \Rightarrow G_{dB}(\omega) = G_{1 dB}(\omega) + G_{2 dB}(\omega)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

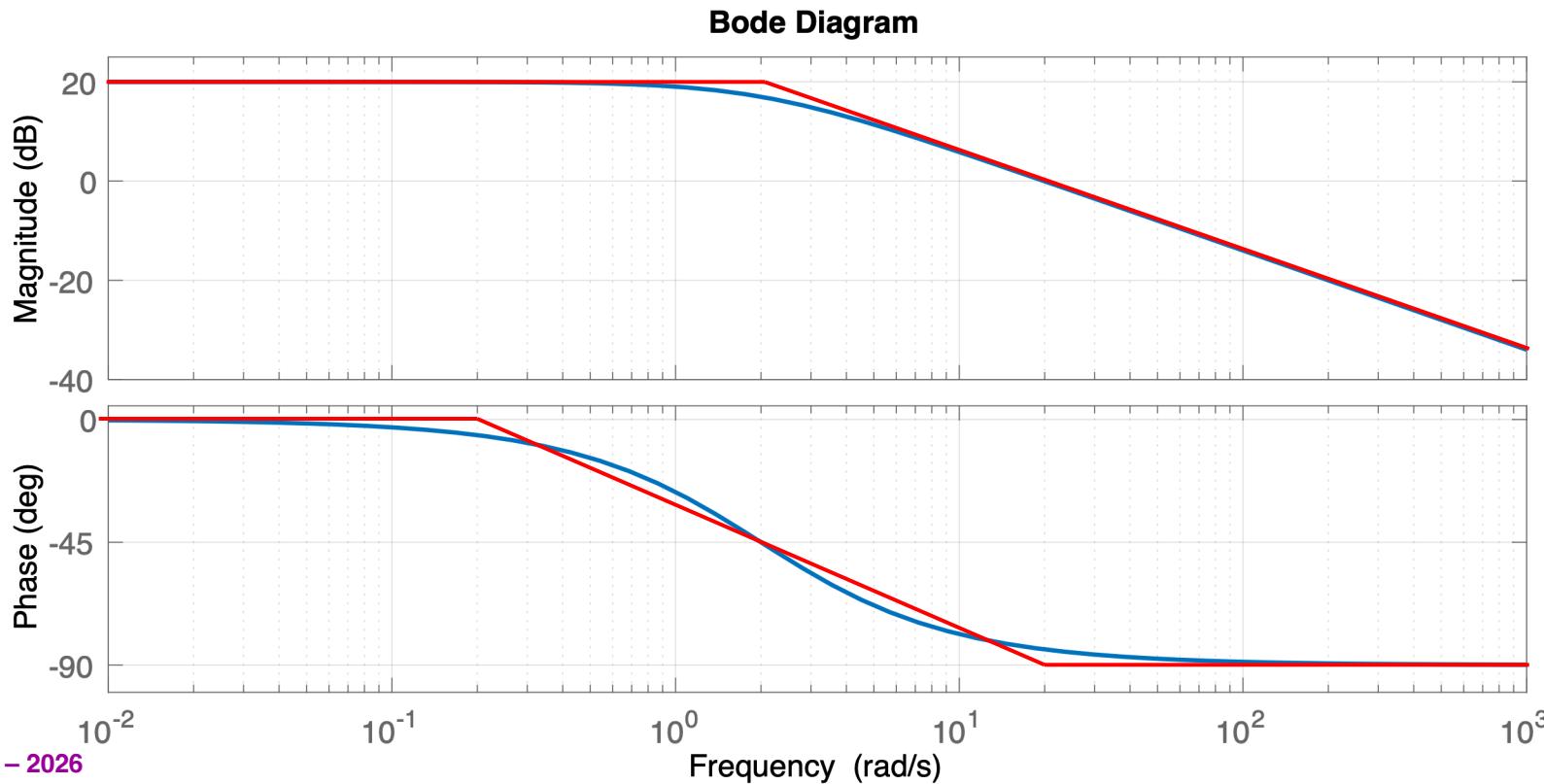
Diagramme de Bode d'un Filtre Passe-Bas du 1^{er} ordre

- Soit le filtre suivant : $H(p) = \frac{40}{2p+4}$



Construction du diagramme de Bode d'un Filtre Passe-Bas du 1^{er} ordre

- Soit le filtre suivant : $H(p) = \frac{40}{2p+4}$
 - Mise sous forme normalisée : $H(p) = \frac{10}{0.5p+1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{10}{1+j0.5\omega}$
 - Comportements en basses et hautes fréquences
 - Valeurs de $G_{dB}(\omega)$ et $\frac{180}{\pi}\varphi(\omega)$ aux pulsations des pôles et zéros
- => Construction du diagramme de Bode asymptotique



Etapes et Règles de construction du diagramme de Bode asymptotique

- **Soit $H(p)$ dont on veut construire le diagramme de Bode Asymptotique image de $H(p = j\omega)$**
- **Etapes :**
 - Déterminer les pôles et les zéros de $H(p)$
 - En déduire une factorisation de $H(p)$ sous la forme de produits de fonctions de transfert élémentaires du 1^{er} ou du 2nd ordre
 - On pourra regrouper les fonctions de transfert identiques
 - Tracer le diagramme de Bode asymptotique de chaque fonction de transfert élémentaire
 - Effectuer la somme graphique de l'ensemble des diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire
- **Règles d'aide à la construction :**
 - Le diagramme de Bode asymptotique est constitué d'un ensemble de demi-droites et de segments de droites. Pour chaque demi-droite ou segment il faut donc déterminer **2 points ou 1 point et 1 pente**
 - Ces points et pentes sont déterminés par :
 - Valeurs calculées de $H(p)$: *pôles, zéros*
 - Expressions limites de $H(p)$: $p \rightarrow 0$ et $p \rightarrow \infty$

Construction du diagramme de Bode d'un Filtre Passe-Bas du 2nd ordre à pôles réels

- **Exemple :** $H(p) = \frac{2}{(0.5p+1)^2} = \frac{2}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^2}$, Ordre n = 2, Gain statique = 2 = 6 dB
- **Pôle :** $p_0 = -2 \Rightarrow$ Pulsation : $\omega_0 = |p_0| = 2 \text{ rad / s}$

$$H(\omega \rightarrow 0) \approx 2 \cdot e^{j0}$$

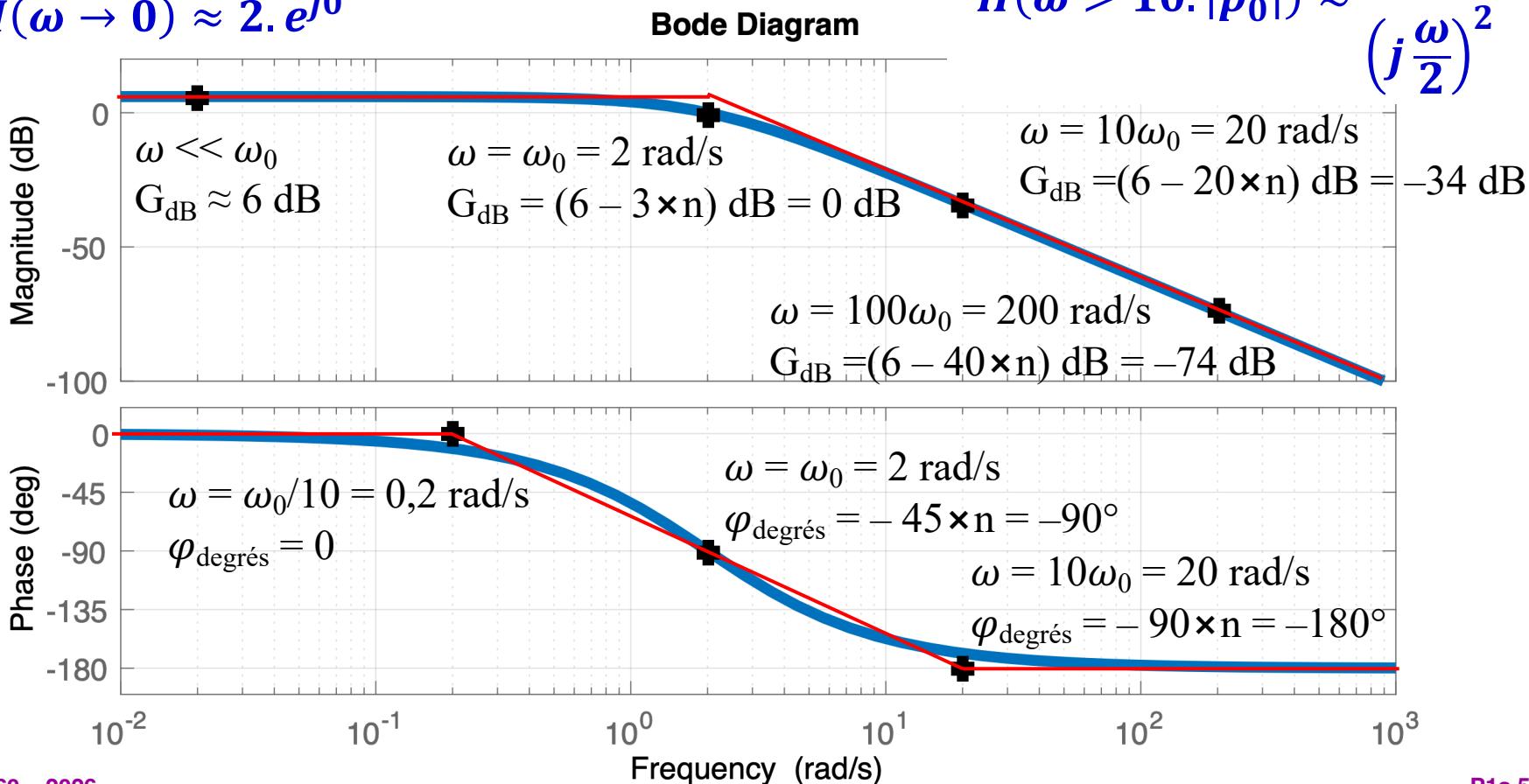


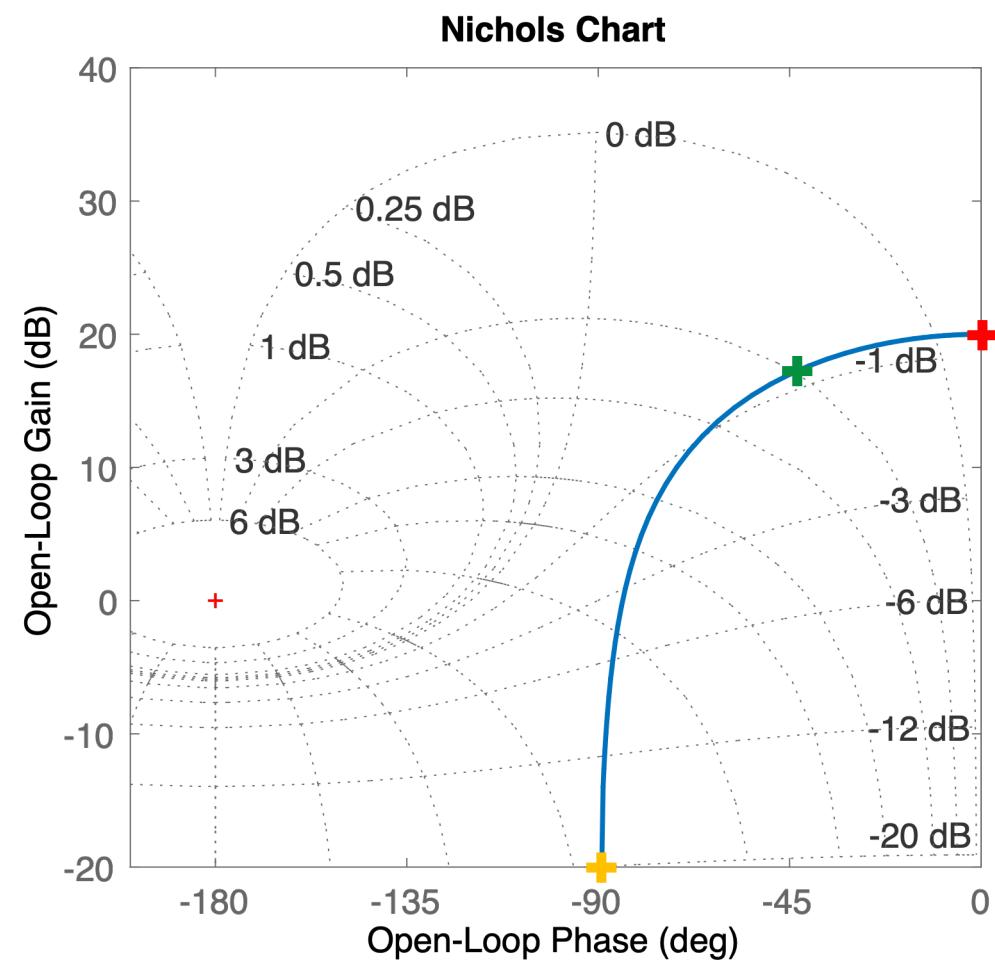
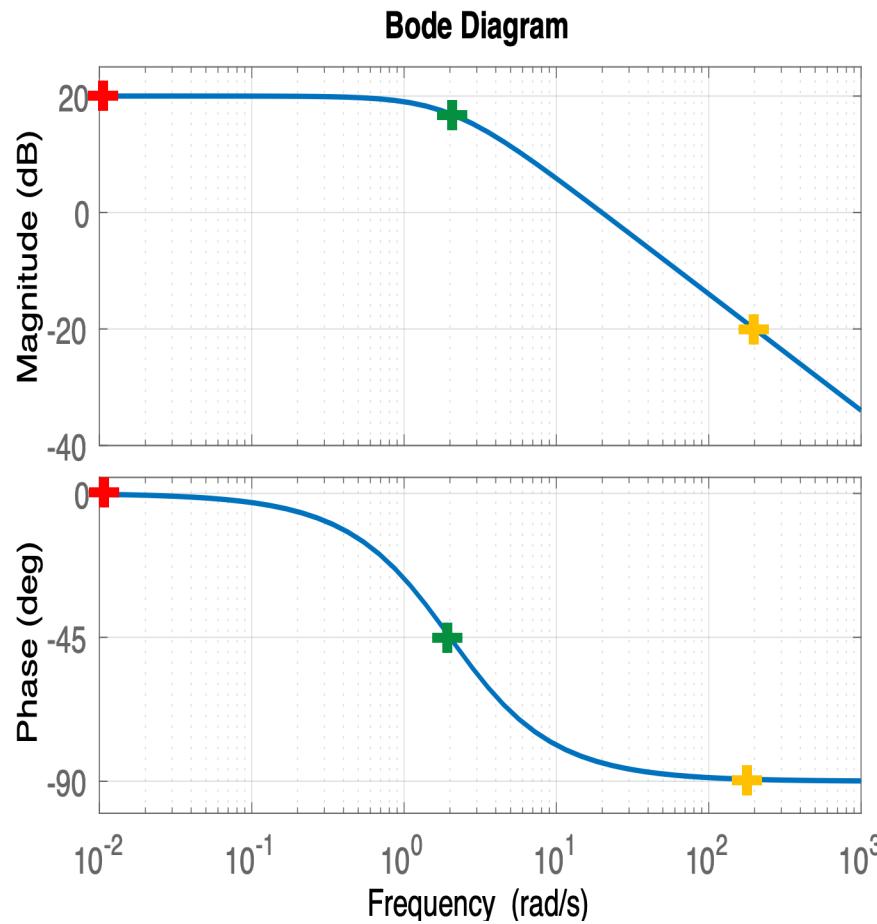
Diagramme de Black-Nichols

Diagramme de Black-Nichols

- **On désire représenter graphiquement la fonction de transfert d'un système par :**
 - son gain : $G(\omega) = |H(j\omega)|$
 - et sa phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$
- **Diagramme de Bode :**
 - 1 graphe de gain : $x = \omega$ (échelle log10),
 $y = 20 \log_{10} G(\omega) = G_{dB}(\omega)$
 - 1 graphe de phase : $x = \omega$ (échelle log10),
 $y = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés)
- **Diagramme de Black-Nichols :**
 - 1 seul graphe avec : $x = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$: phase du diagramme de Bode
 $y = G_{dB}(\omega)$: gain du diagramme de Bode
 \Rightarrow courbe paramétrée en ω
 - Usage : réglage des correcteurs des systèmes asservis par l'analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte.

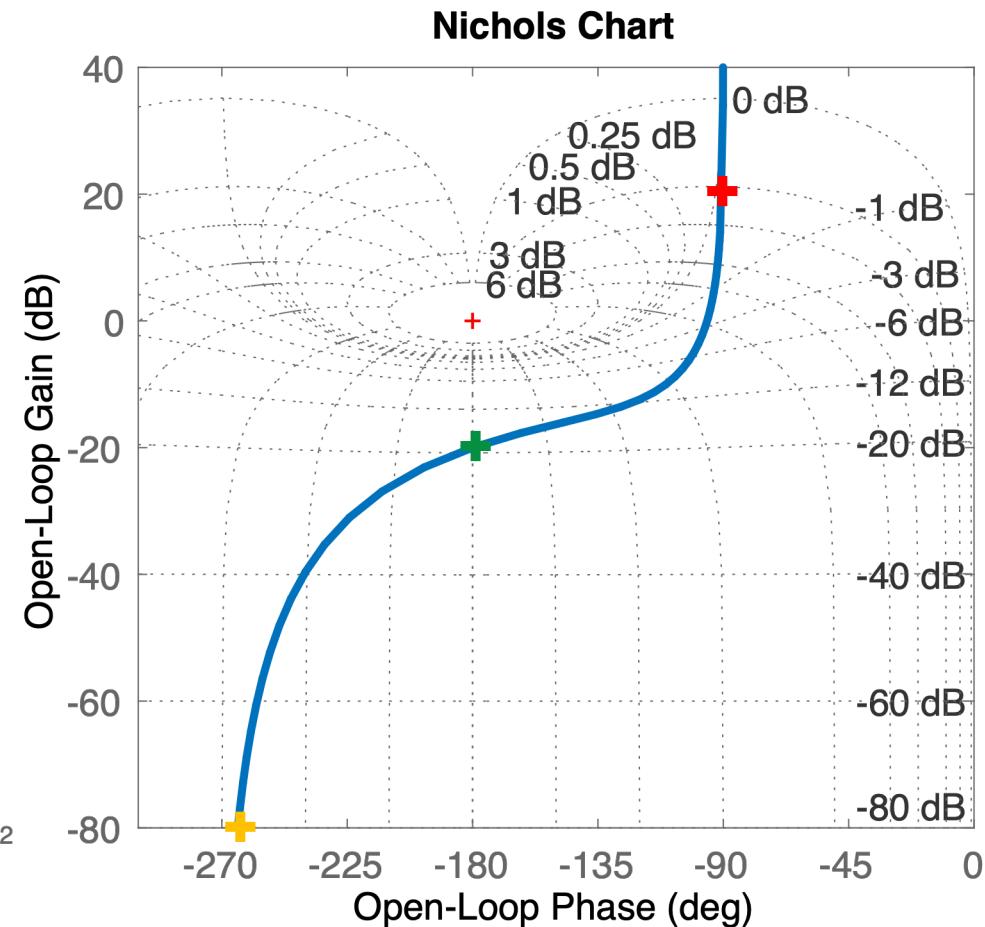
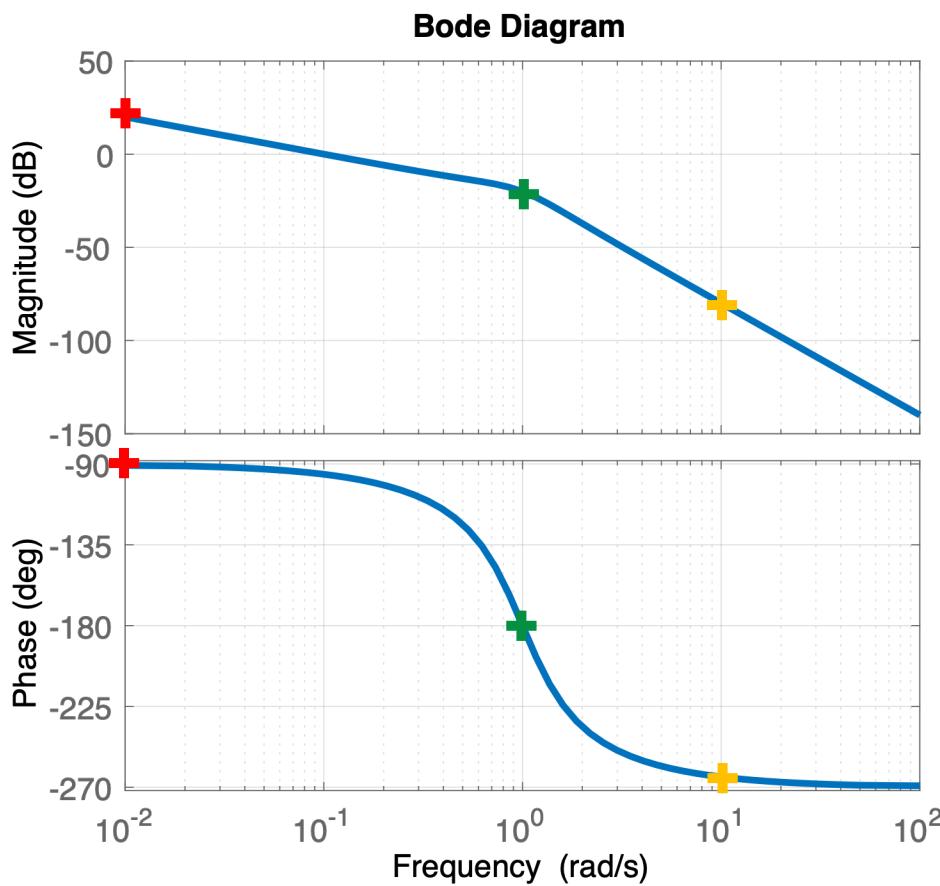
Diagrammes de Bode et de Black-Nichols d'un Filtre Passe-Bas du 1^{er} ordre

- Soit le filtre suivant : $H(p) = \frac{10}{0.5p+1}$



Diagrammes de Bode et de Black-Nichols d'un Filtre Passe-Bas du 1^{er} ordre

- Soit le filtre suivant : $H(p) = \frac{1}{10p(p^2+p+1)}$



Construction du diagramme de Nyquist

Diagramme de Nyquist

- **On désire représenter graphiquement la fonction de transfert d'un système par :**

- son gain : $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- et sa phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

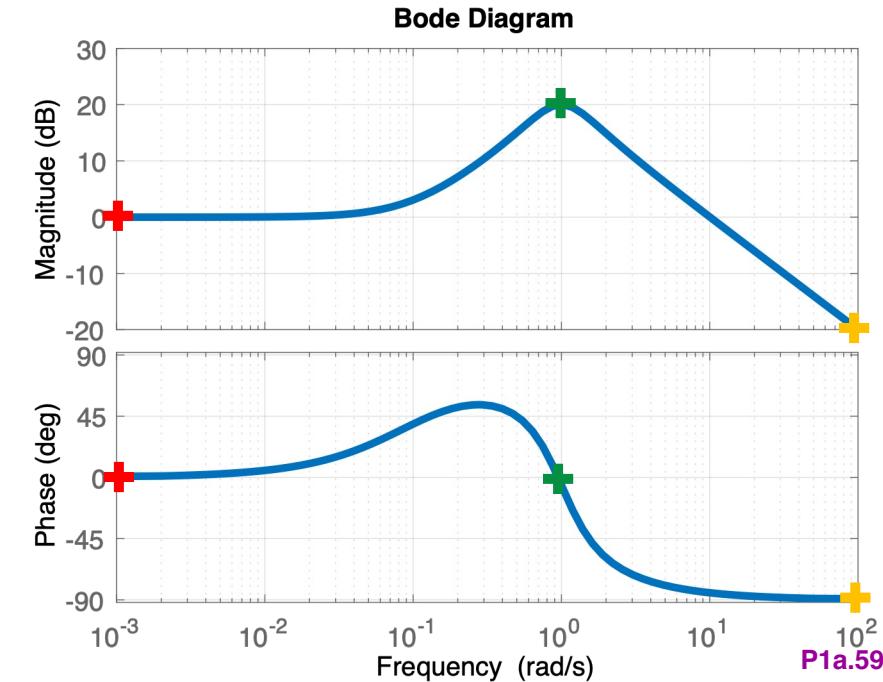
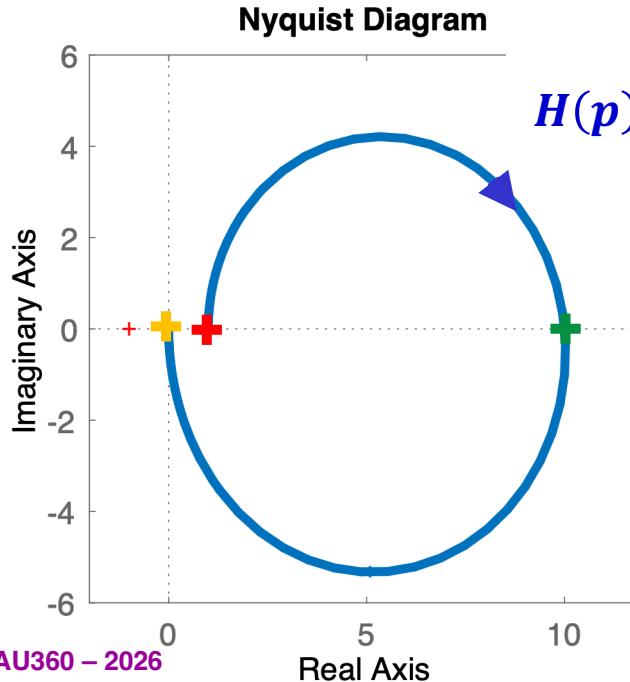
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \arg(H(j\omega))} = G(\omega) \cdot e^{j \varphi(\omega)}$$

- **Diagramme de Nyquist :**

- 1 seul graphe avec : $x = \operatorname{Re}(H(j\omega))$ et $y = \operatorname{Im}(H(j\omega))$
 \Rightarrow courbe paramétrée en ω
 $x = \operatorname{Re}(H(j\omega)) = G(\omega) \cdot \cos(\varphi(\omega))$
 $y = \operatorname{Im}(H(j\omega)) = G(\omega) \cdot \sin(\varphi(\omega))$
- Usage :
 - Réglage des correcteurs des systèmes asservis par l'analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte.
 - Indispensable pour prédire la stabilité en boucle fermée des systèmes instables en boucle ouverte (nécessite de représenter l'image de $H(j\omega)$ pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$).

Règles de construction du diagramme de Nyquist

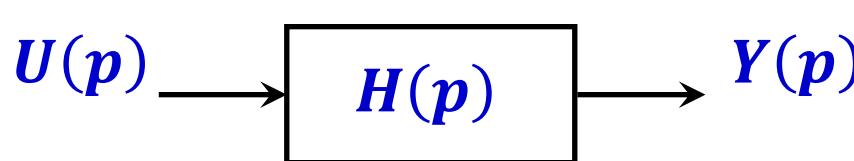
- S'aider du diagramme de Bode
- Le diagramme de Nyquist d'une fonction de transfert du 1^{er} ordre est toujours un demi-cercle pour ω variant de 0 à $+\infty$.
Et un cercle pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$.
- Déterminer les quadrants successifs parcourus par la courbe image
- Déterminer les valeurs du module, de la phase, ainsi que les tangentes à la courbe image de $H(j\omega)$ aux limites : $\omega \rightarrow 0^+$ et $\omega \rightarrow +\infty$



Systèmes du 1^{er} ordre

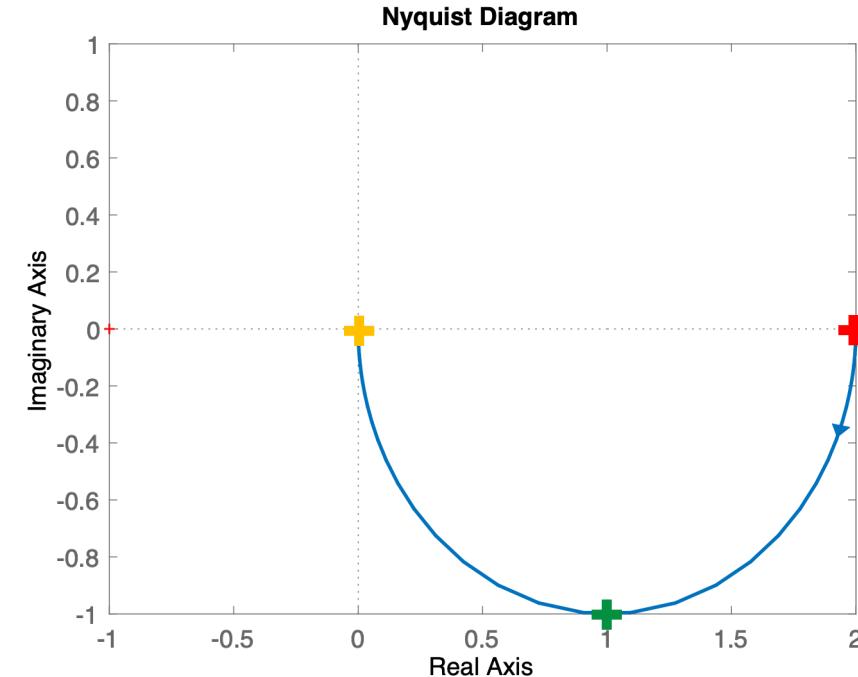
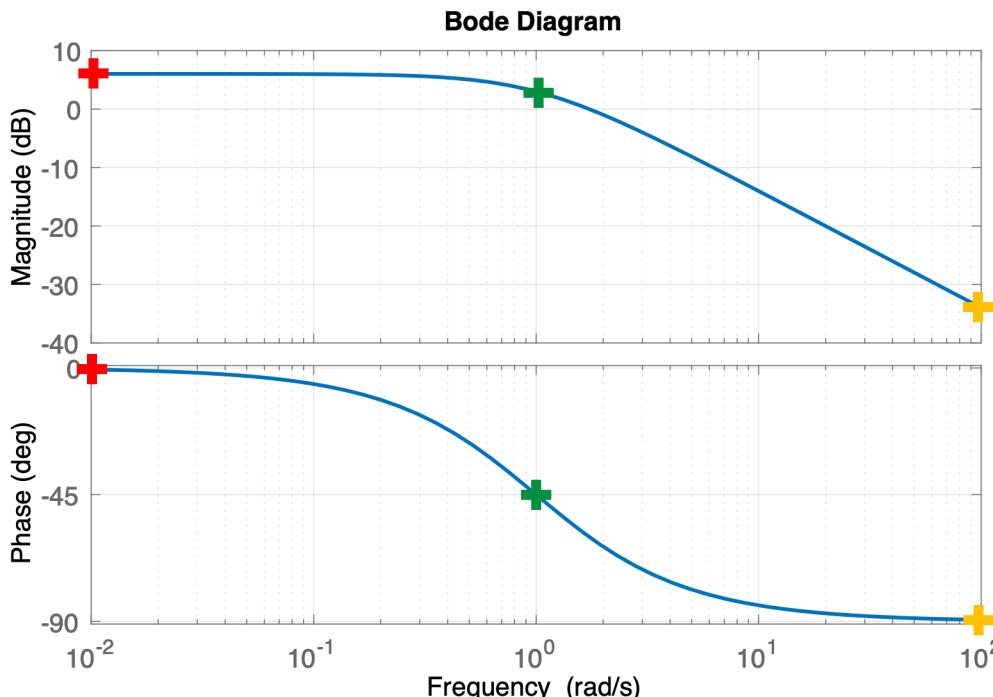
Système Passe-Bas du 1^{er} ordre

Fonction de transfert et Diag. de Bode et Nyquist



$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G}{\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\tau p + 1}$$

- **Gain statique :** $H(p = 0) = G$
- **Constante de temps :** $\tau = 1/\omega_0$ [s] , **Pôle :** $-\omega_0$



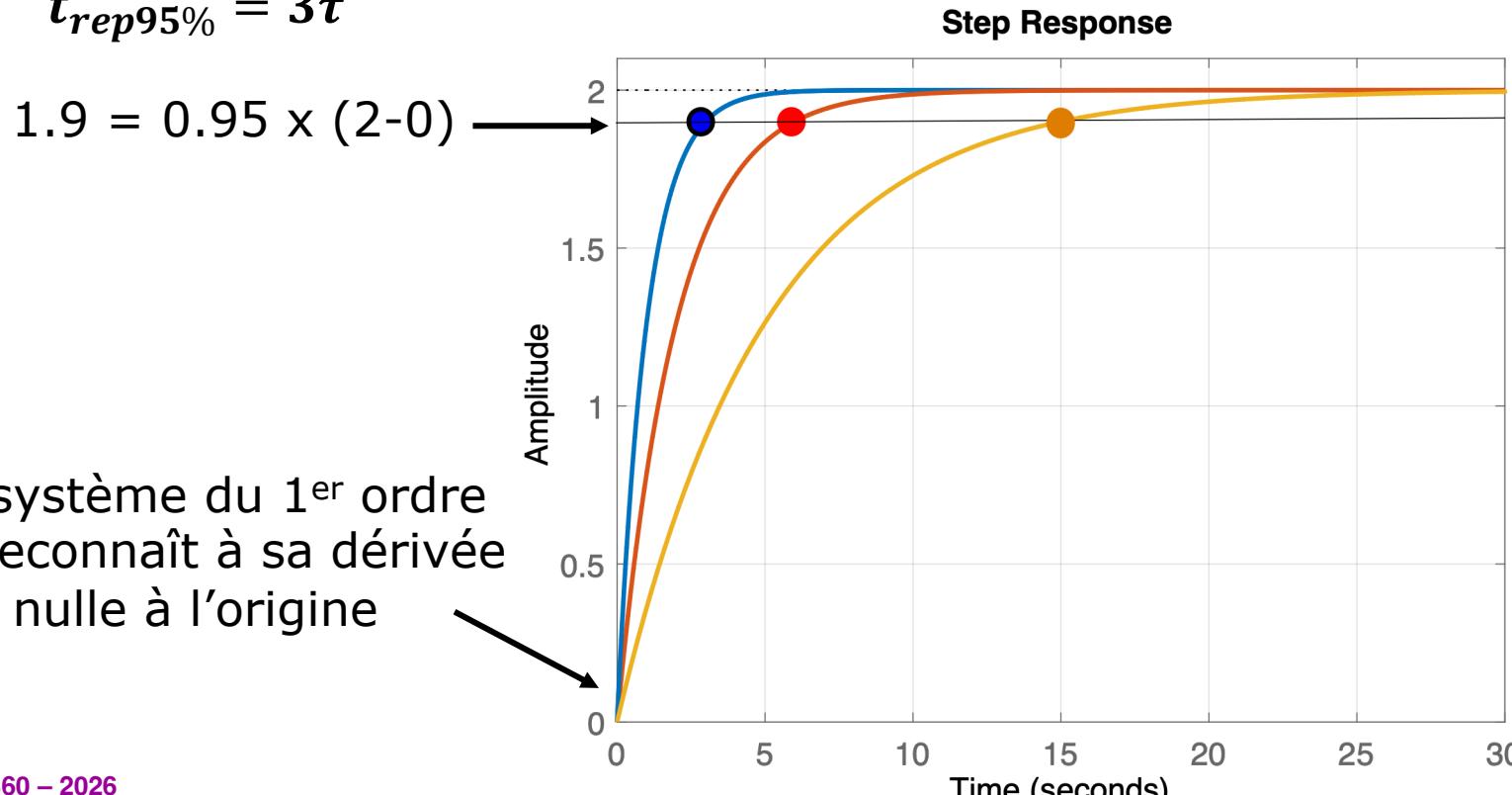
Système Passe-Bas du 1^{er} ordre

Réponse indicielle à condition initiale nulle

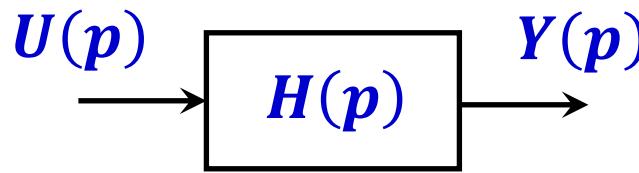
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G}{\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\tau p + 1}$$

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 \\y(t) &= G \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot U_0 \\&= G \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_0\end{aligned}$$

- Réponses indicielles pour : $G = 2$ et $\tau = \{1s, 2s, 5s\}$,**
 $t_{rep95\%} = 3\tau$

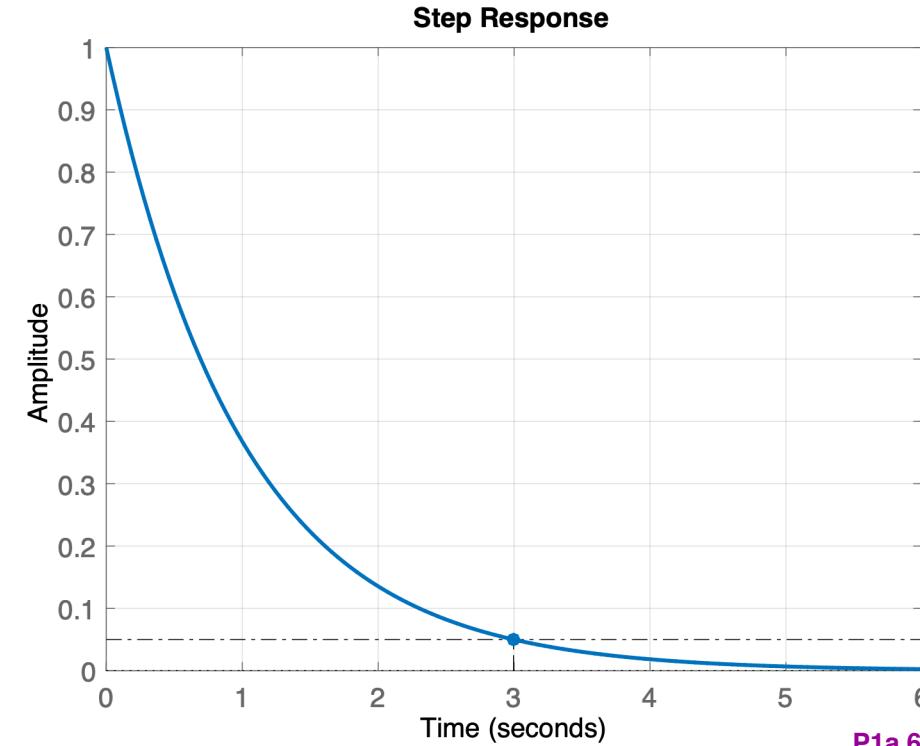
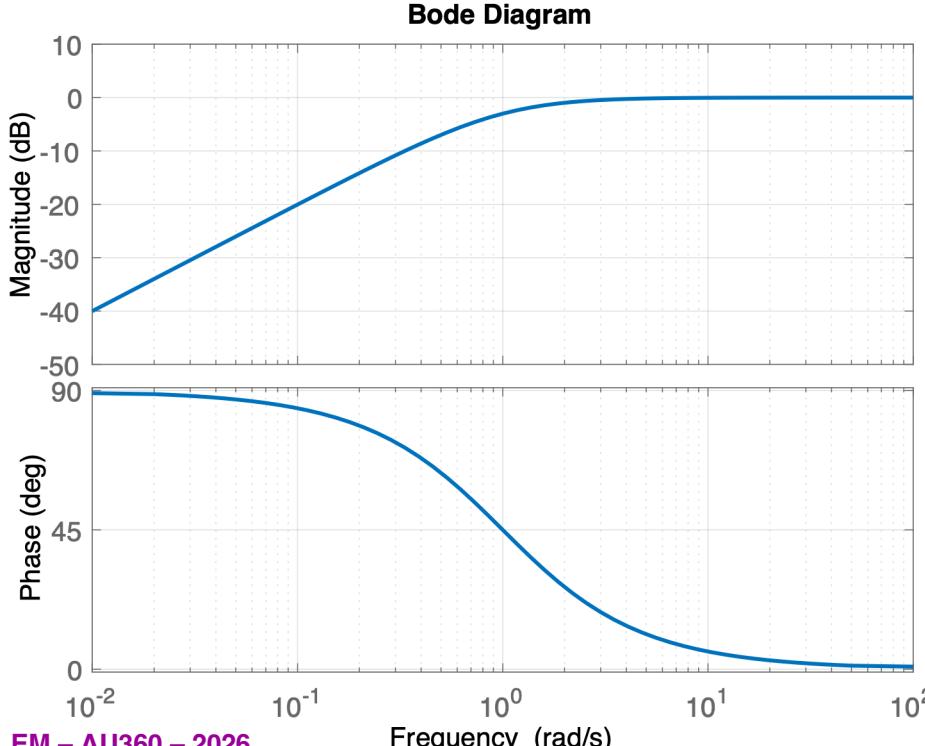


Système Passe-Haut du 1^{er} ordre



$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p}{p + \omega_0} = \frac{\tau p}{\tau p + 1}$$

- **Gain statique** : $H(p = 0) = 0$, **Gain HF** : $H(p \rightarrow \infty) = 1$
- **Constante de temps** : $\tau = 1/\omega_0 = 1$ s, **Pôle** : $-\omega_0$



Filtre Avance-Retard de phase du 1^{er} ordre (High-Shelf du 1^{er} ordre)

$$H_{AR}(p) = \frac{aTp + 1}{Tp + 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

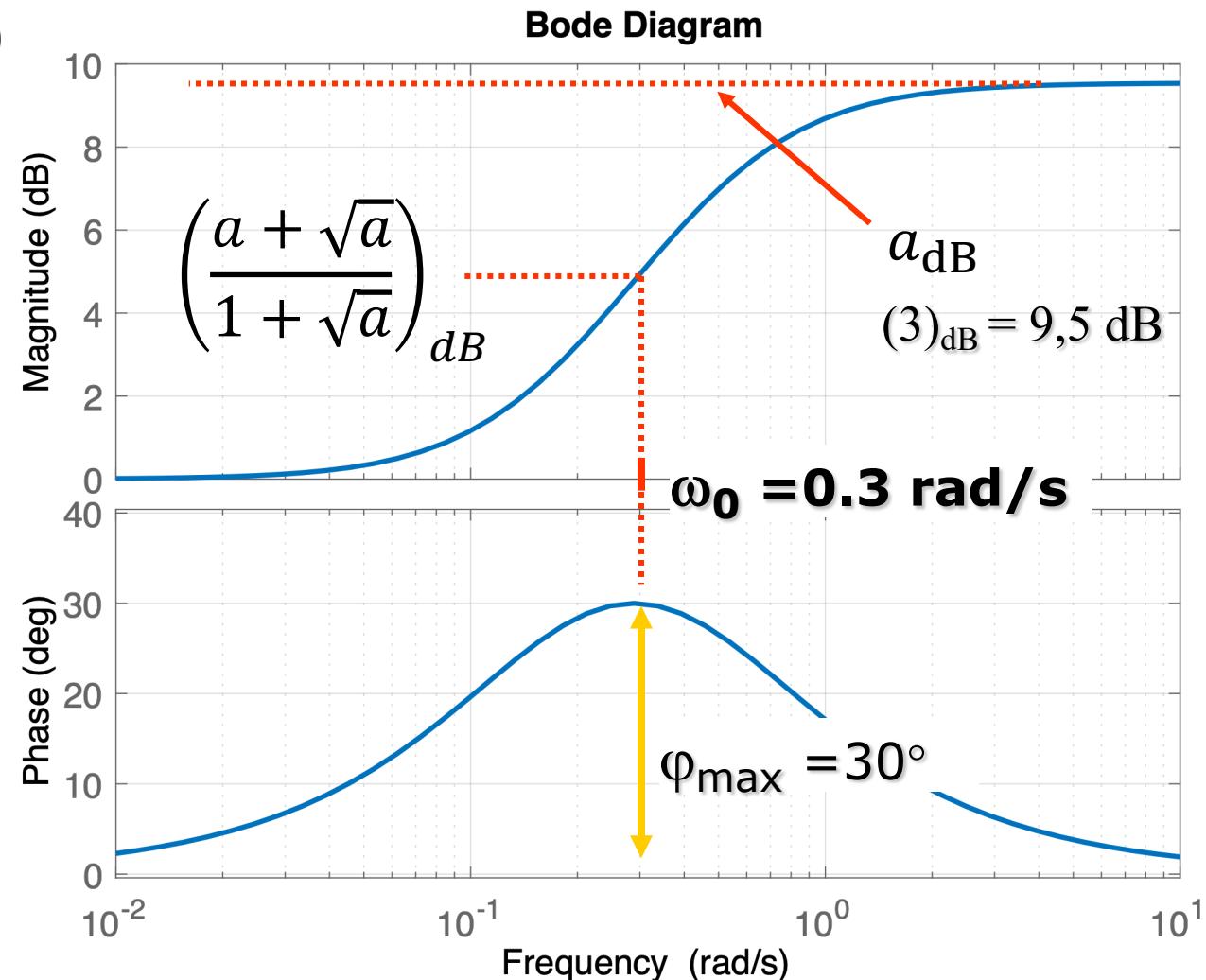
$$\sin(\varphi_{max}) = \frac{a - 1}{a + 1}$$

avec $a > 0$ et $T > 0$

exemple :

$$a = 3 > 1$$

$$T = 2s$$

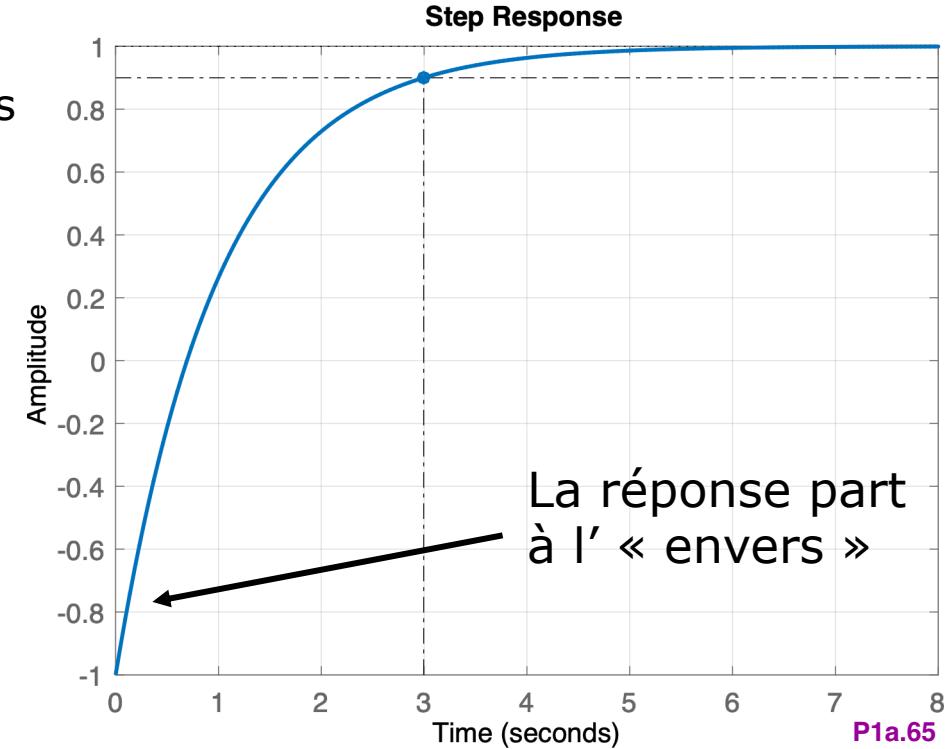
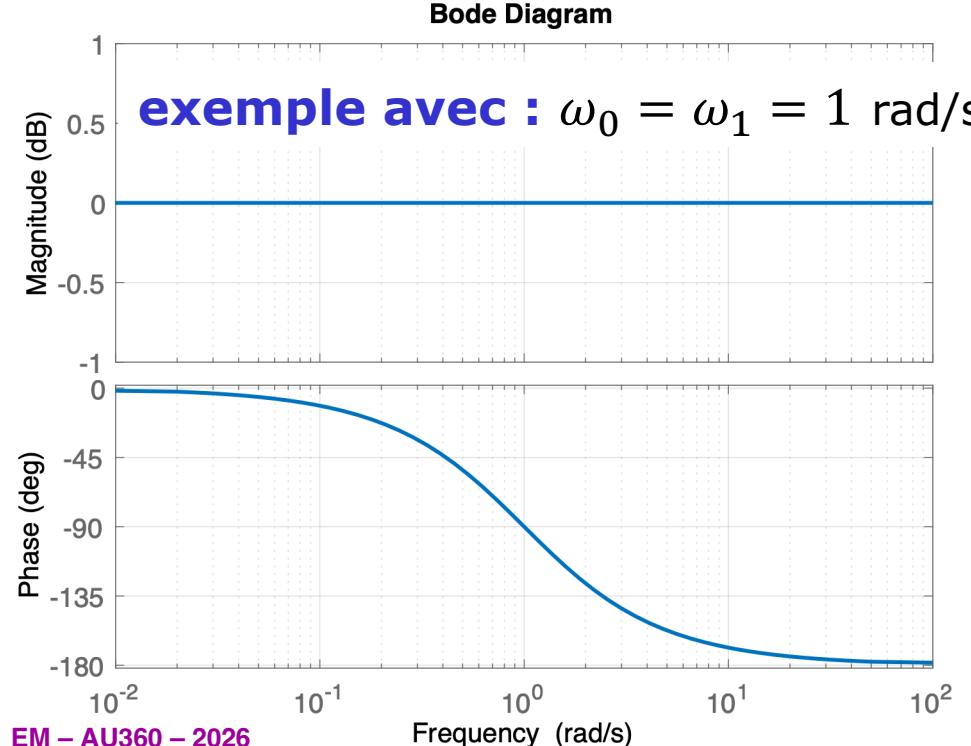


Système du 1^{er} ordre à phase non minimale

Un système à **phase non minimale** (à non minimum de phase) est un système qui possède un **zéro à partie réelle positive**.

$$H(p) = \frac{-p + \omega_1}{p + \omega_0} = \frac{\tau_0}{\tau_1} \cdot \frac{-\tau_1 p + 1}{\tau_0 p + 1} \quad \text{avec } \omega_0 > 0 \text{ et } \omega_1 > 0$$

Si $\omega_0 = \omega_1$, on parle de filtre Passe-Tout



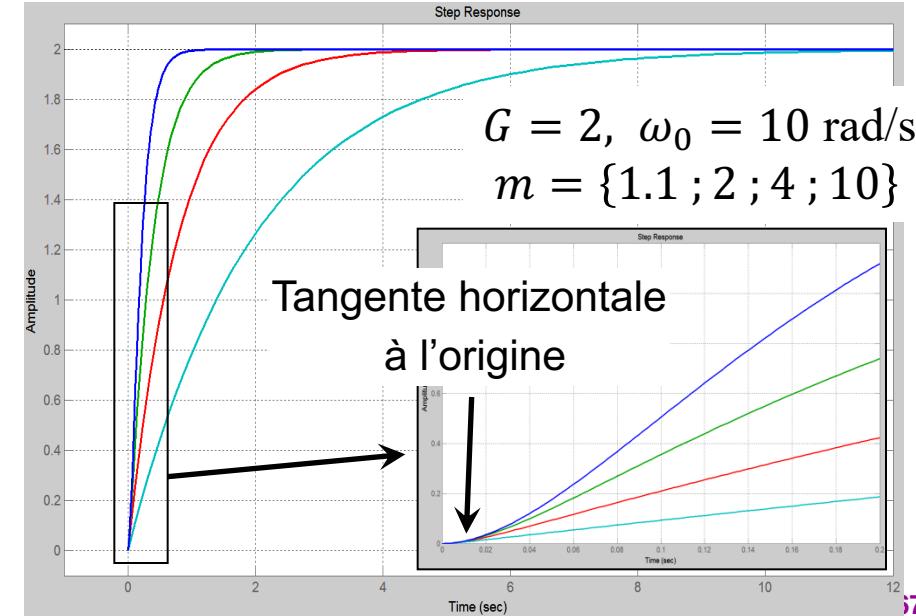
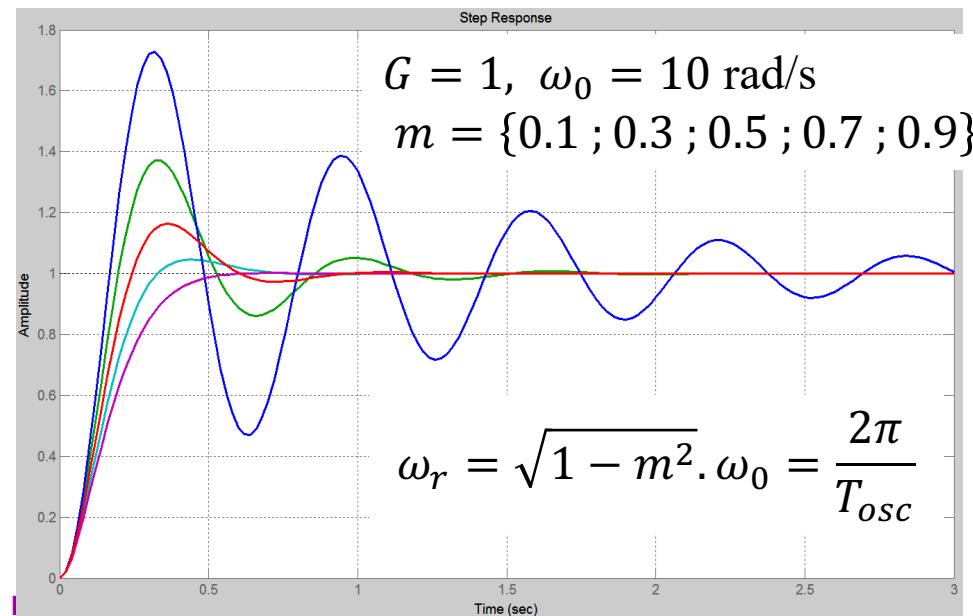
Systèmes Passe-Bas du 2^{ème} ordre

Système Passe-Bas du 2^{ème} ordre

Fonction de transfert et Rép. Temporelles

$$H(p) = \frac{G}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2m\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\tau_0^2 p^2 + 2m\tau_0 p + 1}$$

- Gain statique :** $H(p = 0) = G$
- Pulsation propre (naturelle, libre) :** $\omega_0 = \frac{1}{\tau_0} > 0$ [rad/s]
- Coefficient d'amortissement :** m (ou ξ), **de qualité :** Q
- Pôles réels ou complexes conjugués :** $-\omega_0 \cdot (m \pm \sqrt{m^2 - 1})$



Système Passe-Bas du 2^{ème} ordre

Régime pseudo-oscillatoire

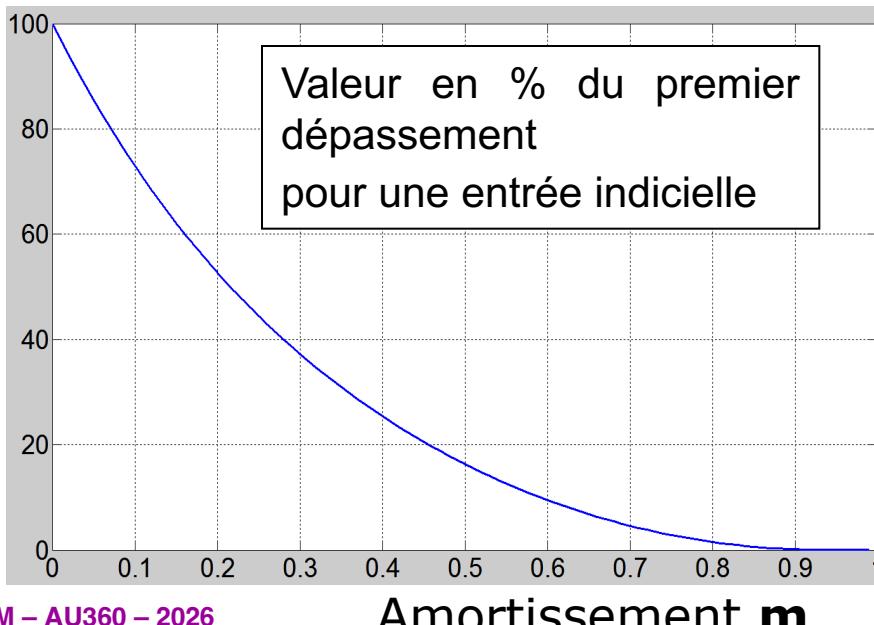
- Réponse à un échelon unitaire pour : $0 < m < 1$**

$$y(t) = G \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cos(\omega_r t - \varphi) e^{-m\omega_0 t} \right) \quad \text{Avec : } \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$\text{et } \omega_r = \sqrt{1-m^2} \cdot \omega_0 = \frac{2\pi}{T_{osc}}$$

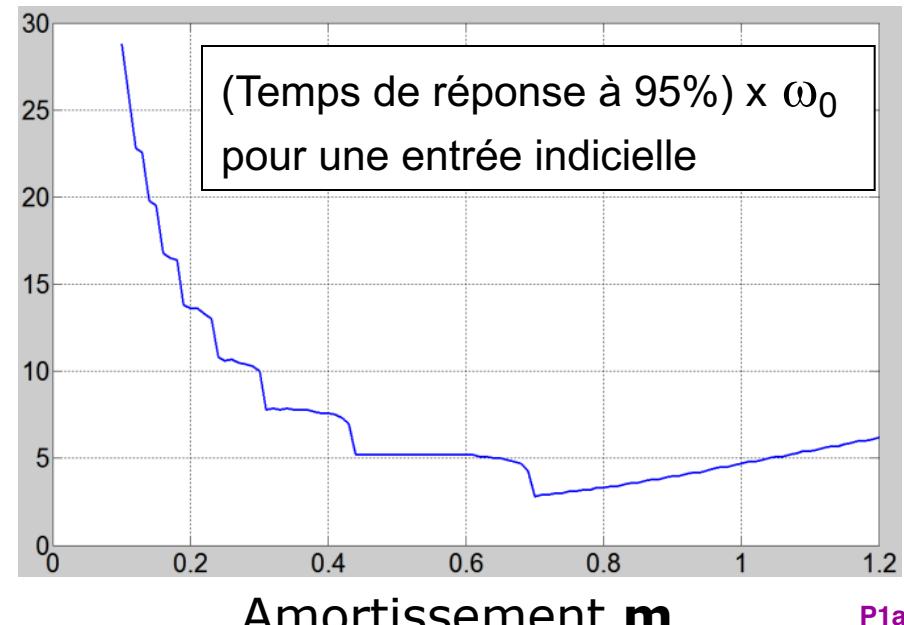
Valeur du premier dépassement en % :

$$D1\% = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} = 100 \times e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$



Instant du premier maximum :

$$T_{1^{er}max} = \frac{T_{osc}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-m^2} \omega_0}$$



Système Passe-Bas du 2^{ème} ordre

Entrée sinusoïdale et Diag. Fréquentiels

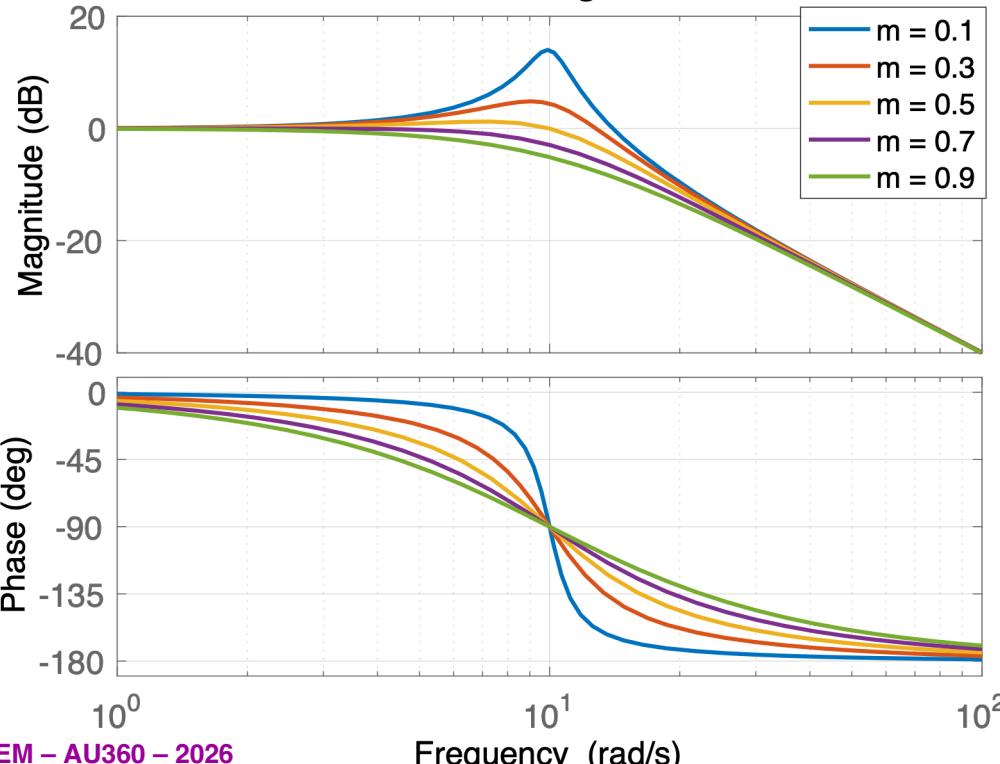
$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{G}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j 2m \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{G}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{-j \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j 2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

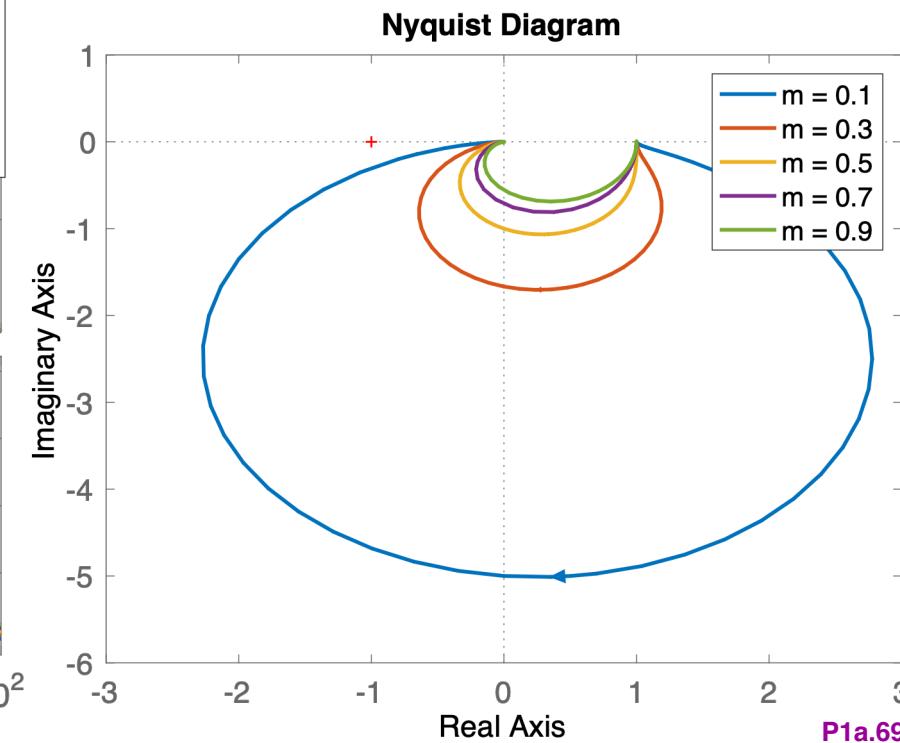
Exemple pour :

$G = 1$, $\omega_0 = 10$ rad/s

Bode Diagram

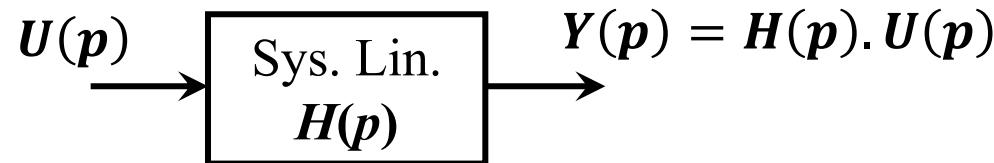


Nyquist Diagram



Systèmes d'ordre $n > 2$ et Réduction de modèle

Factorisation d'une fonction de Transfert



$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

- Sous forme normalisée, le coefficient $a_n = 1$
- **Les pôles** (racines de $A(p)$) **et les zéros** (racines de $B(p)$) **sont réels ou complexes conjugués**

=> $B(p)$ et $A(p)$ peuvent toujours se factoriser sous la forme de produits de polynômes du 1^{er} ou du 2nd ordre :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m(p + z_1)(p + z_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_i)p + |z_i|^2)(p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_j)p + |z_j|^2)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_i)p + |p_i|^2)(p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_j)p + |p_j|^2)}$$

donc **$H(p)$ peut toujours se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de transfert du 1^{er} et du 2nd ordre :**

$$H(p) = b_m \cdot \frac{p + z_1}{p + p_1} \cdot \frac{p + z_2}{p + p_2} \dots \cdot \frac{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_i)p + |z_i|^2}{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_i)p + |p_i|^2} \cdot \frac{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_j)p + |z_j|^2}{p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_j)p + |p_j|^2}$$

Mise en série de Systèmes Passe-Bas du 1^{er} ordre de même constante de temps

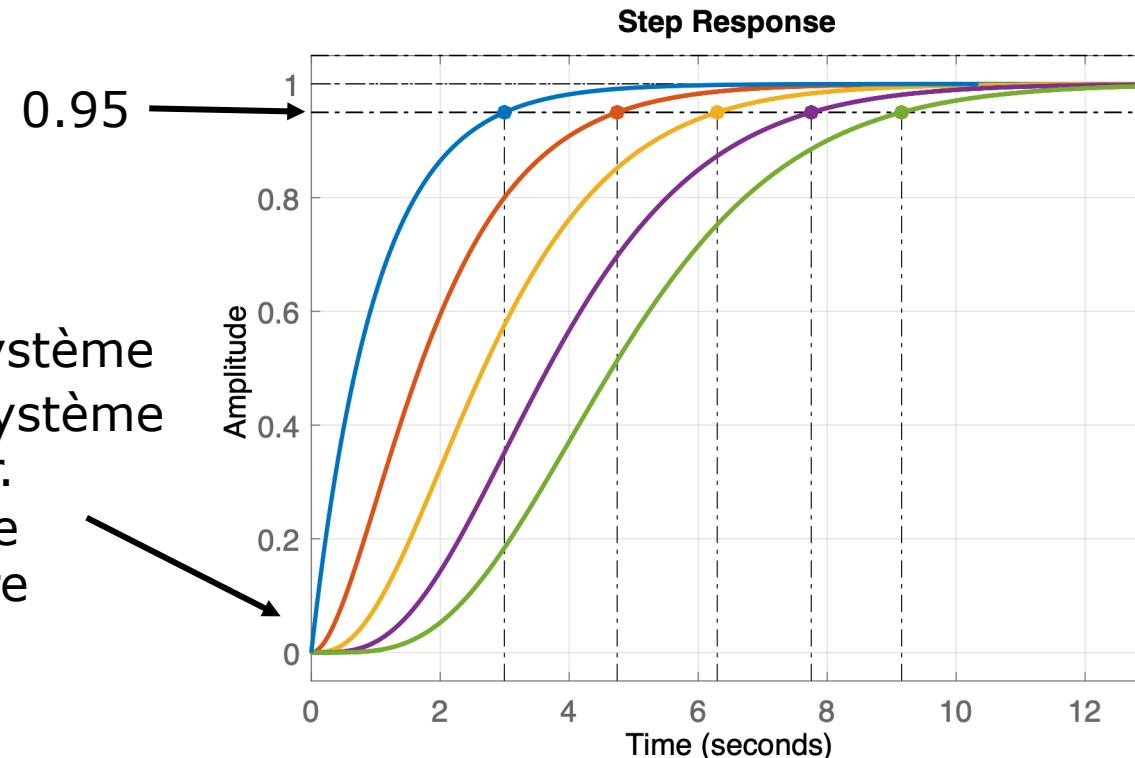
$H(p)$ avec pôle de multiplicité n :

$$H(p) = \frac{G}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^n} = \frac{G}{(\tau p + 1)^n}$$

$$t_{rep95\%} = a \cdot \tau = \frac{a}{\omega_0}$$

degré n	1	2	3	4	5	6
a	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5

- Réponses pour : $G = 1$, $\tau = 1$ s et $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**



Plus l'ordre n du système est élevé, plus le système est lent à démarrer. En pratique, difficile de ne pas confondre avec un retard pur.

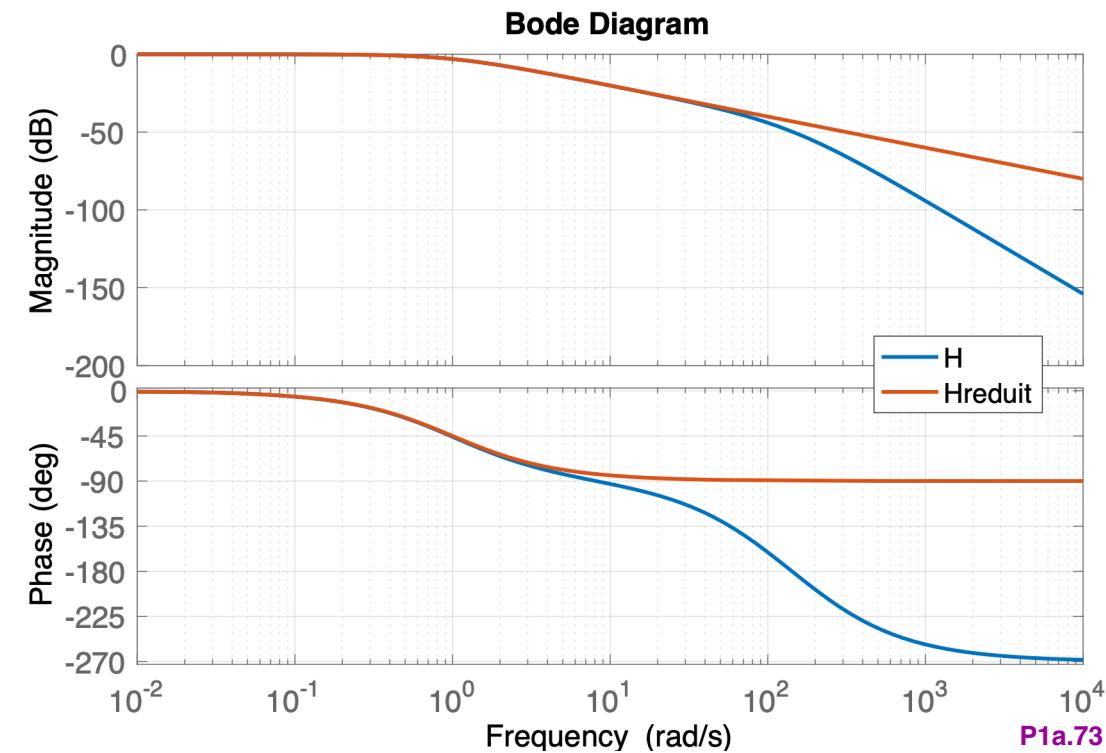
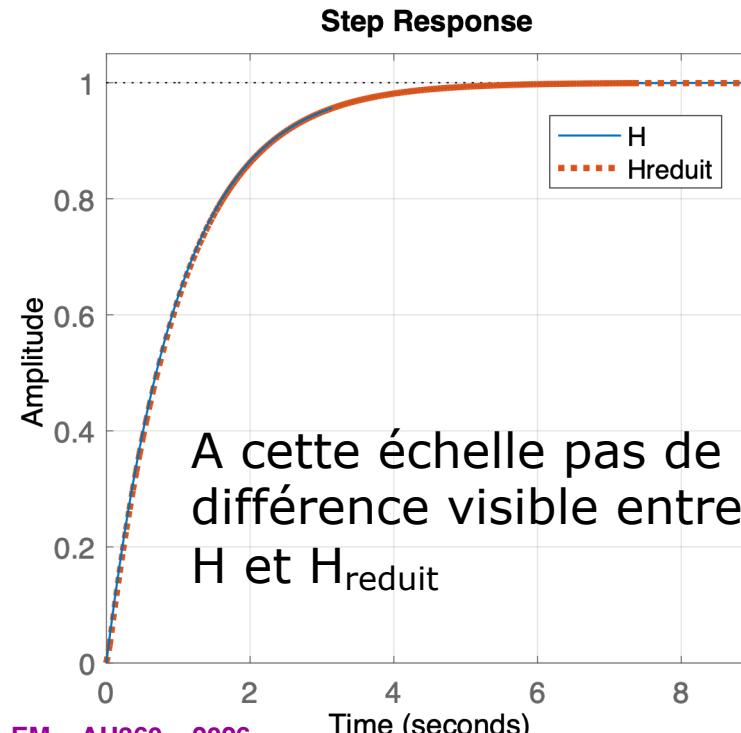
Fonction de transfert ayant des pôles très différents – Réduction de modèle

Exemple d'une réduction de modèle :

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{1} + 1\right)\left(\frac{p}{100} + 1\right)\left(\frac{p}{200} + 1\right)} = \frac{1}{(p+1)(0.01p+1)(0.005p+1)}$$

En basses fréquences ($\omega < \frac{1^{er} \text{ pôle négligé}}{10} = \frac{100}{10}$) : $H(p) \approx H_{reduit}(p) = \frac{1}{(p+1)}$

Domaine de validité : $\omega \leq 10 \text{ rad/s}$



Domaine de validité fréquentielle d'un modèle

Proximité fréquentielle de deux modèles linéaires

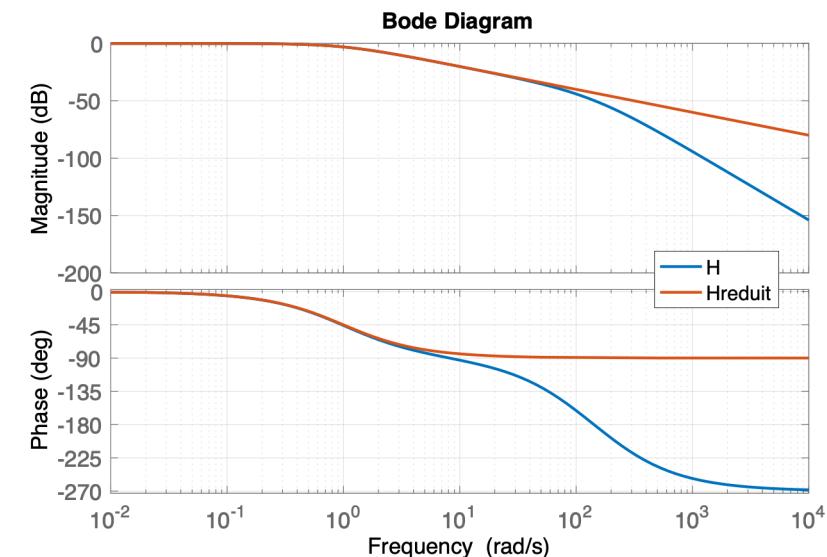
Soit deux transmittances
 $H_1(p = j\omega)$ et $H_2(p = j\omega)$
de modèles de systèmes linéaires
invariants causaux

- **Proximité en Gain :**

H_1 et H_2 sont proches en gain pour $\omega \leq \omega_{proxGain}$ si :
 $\forall \omega \leq \omega_{proxGain} : |||H_1(j\omega)| - |H_2(j\omega)||| \leq \Delta_{Gain} < \infty$
avec typiquement $\Delta_{Gain} \leq 1 dB (12\%)$

- **Proximité en Phase :**

H_1 et H_2 sont proches en phase pour $\omega \leq \omega_{proxPhase}$ si :
 $\forall \omega \leq \omega_{proxPhase} : |\varphi_{H_1}(\omega) - \varphi_{H_2}(\omega)| \leq \Delta_{Phase} < \infty$
avec typiquement $\Delta_{Phase} \leq 6^\circ (0,1 rad)$



Domaine de validité fréquentielle

Le domaine de validité fréquentielle ω_{val} du modèle réduit $H_r(p)$ d'un processus dont le modèle complet est donné par $H_p(p)$ sera défini par :

Dans la bande de fréquences $\omega \leq \omega_{val}$, le modèle $H_r(p)$ sera une approximation acceptable de $H_p(p)$ vis-à-vis des proximités en gain $\Delta_{Gain} < \infty$ et en phase $\Delta_{Phase} < \infty$ si :

$$\forall \omega \leq \omega_{val} : \| |H_p(j\omega)| - |H_r(j\omega)| \| \leq \Delta_{Gain} \text{ et } |\varphi_{H_p}(\omega) - \varphi_{H_r}(\omega)| \leq \Delta_{Phase}$$

avec typiquement $\Delta_{Gain} \leq 1 \text{ dB (12\%)}$ et $\Delta_{phase} \leq 6^\circ (0,1 \text{ rad})$.

Une fonction de transfert $H(p)$ de type passe-bas ayant un gain statique G_0 et possédant i pôles p_i pourra être approchée en basses fréquences ($\omega \leq \omega_{val}$) par uniquement son gain statique G_0 . Le domaine de validité de cette approximation est $\omega \leq \omega_{val} = \frac{1}{10} \min(|p_i|)$ pour $\Delta_{phase} \leq \frac{1}{10} \text{ rad}$.

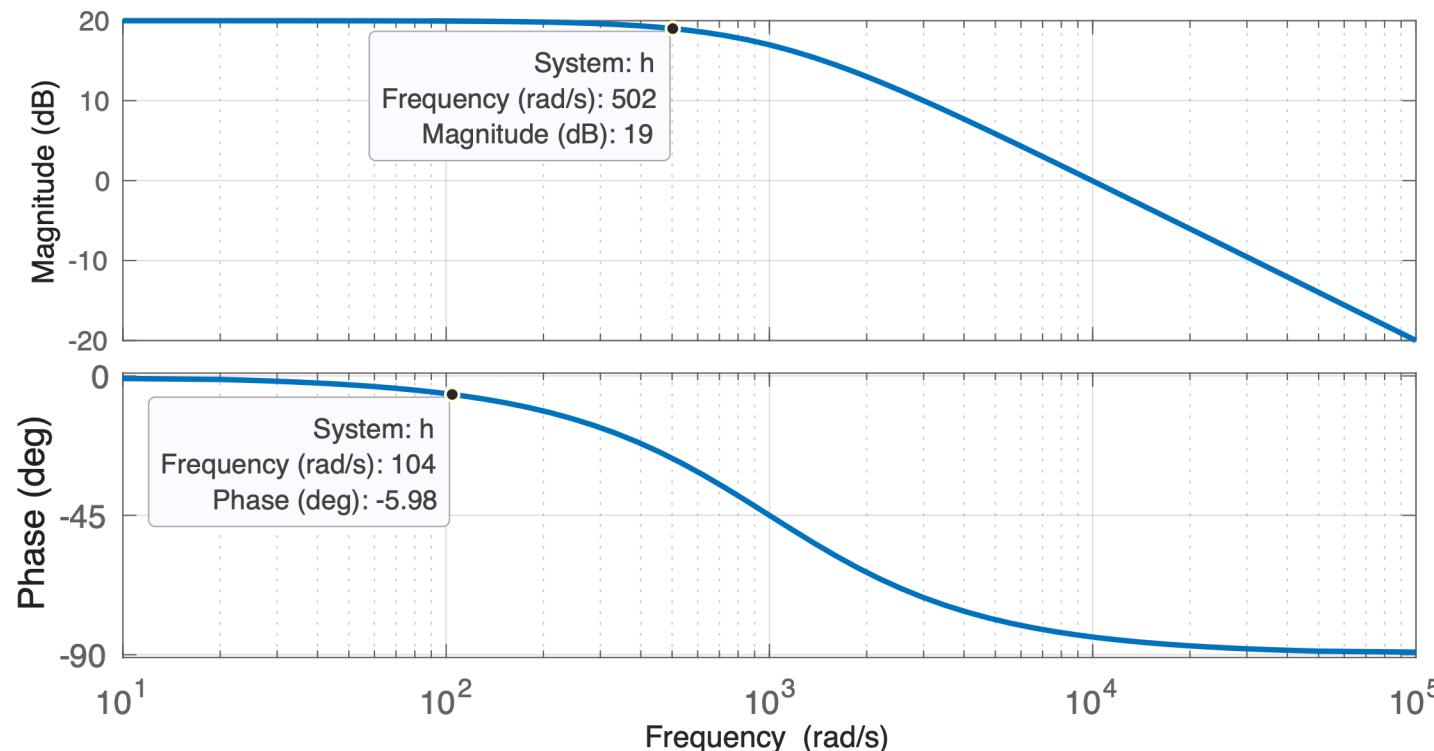
Remarque : plus précisément au 1^{er} ordre $\omega_{val} = \frac{1}{10} \frac{1}{\sum_i \frac{1}{|p_i|}}$

Approximation d'une fonction de transfert de type passe-bas du 1^{er} ordre par son gain statique

Soit la fonction de transfert du 1^{er} ordre suivante :

$$H_1(p) = \frac{G_1}{\frac{p}{p_0} + 1} = \frac{10}{\frac{p}{1000} + 1} \text{ de gain statique } 10 \text{ et de pôle } = -1000$$

Pour $\Delta_{Gain} = 1 \text{ dB}$ et $\Delta_{Phase} = 6^\circ$, cette fonction de transfert peut être approchée par $H_r(p) = G_1 = 10$ avec $\omega_{val} = 104 \text{ rad/s}$



Application à la réduction du modèle d'un système



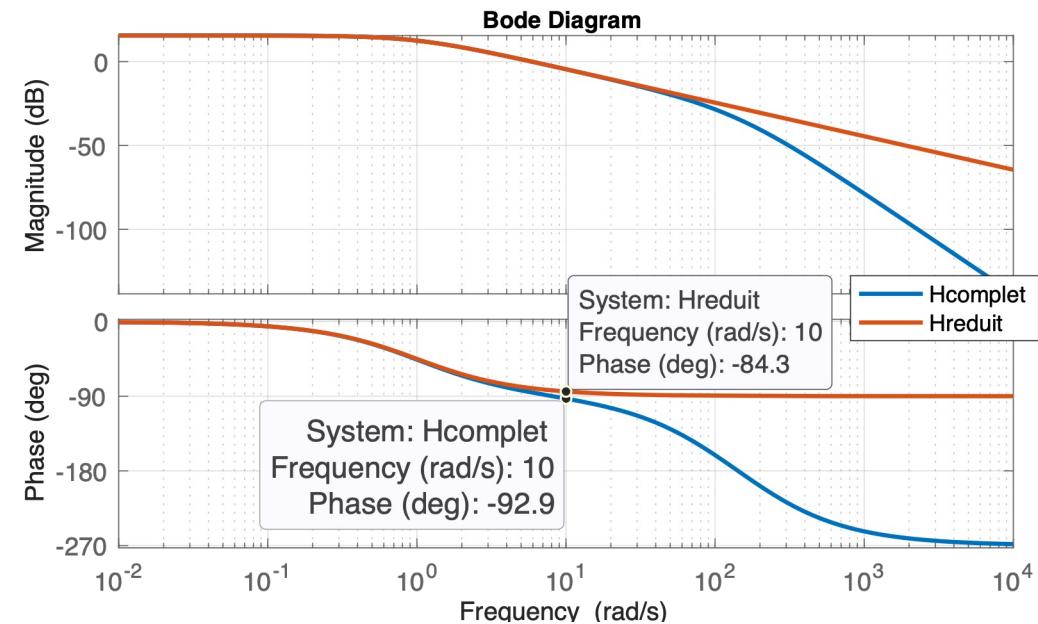
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{3}{\frac{p}{100} + 1} \cdot \frac{2}{\frac{p}{1} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{p}{200} + 1} = \frac{6}{0.00005p^3 + 0.01505p^2 + 1.015p + 1}$$

Le modèle $H(p)$ complet du système peut être approché par le modèle réduit $H_r(p)$ avec $\Delta_{phase} \leq 8,6^\circ$ (**0,15 rad**) :

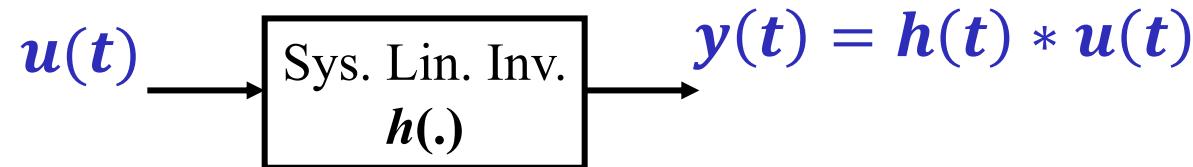
$$H_r(p) = \frac{6}{p+1}$$

$$\text{pour } \omega \leq \omega_{val} = \frac{\min(100, 200)}{10} \\ = 10 \text{ rad/s}$$

$$\Delta_{phase} [\circ] \approx \frac{180}{\pi} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) \omega_{val}$$

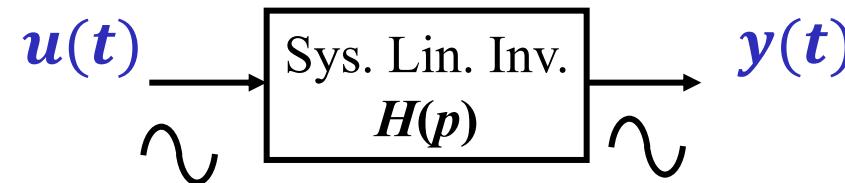


Identification expérimentale des paramètres de systèmes linéaires



- **Méthodes expérimentales d'identification**
 - Obtention d'une fonction de transfert du système
 - A partir de la mesure de ses entrées et sorties.
- **Stimulation du système réel par des signaux types en boucle ouverte :**
 - sinusoïdes, échelon, suite d'échelons : Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA)...
 - mais aussi quelques méthodes adaptées à l'identification en boucle fermée
- **Avant tout il faut s'assurer de la linéarité du système**
 autour du point de fonctionnement considéré idéalement par un test à entrée sinusoïdale.

Identification par analyse fréquentielle

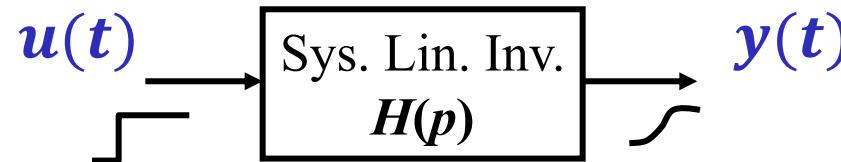


- **$u(t)$ est sinusoïdal d'amplitude suffisamment petite pour obtenir un fonctionnement linéaire**

Auquel on ajoute le plus souvent une composante continue pour se placer autour du point de fonctionnement désiré.

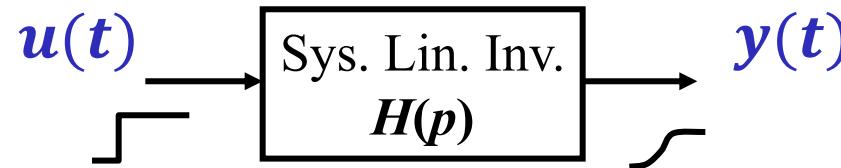
- **Cette méthode consiste à tracer le diagramme de Bode du système et d'en déduire $H(j\omega)$**
 - Méthode très efficace. Utilisation d'un sweep fréquentiel.
 - Peut être fastidieuse pour les systèmes lents.
- **Quelques relevés effectués à des fréquences bien choisies permettront de confirmer des résultats d'identification obtenus avec d'autres méthodes :**
 ordre du système, coefficient d'amortissement dans le cas d'un système du second ordre ...

Identification par analyse indicielle



- **$u(t)$ est de type échelon :**
 - amplitude suffisamment petite afin de garantir un fonctionnement linéaire du système à identifier
 - comportant une composante continue afin de se placer autour du point de fonctionnement désiré
 - si le système n'est pas stable en boucle ouverte,
il faut tout d'abord effectuer un premier bouclage stabilisant.
- **Typiquement deux types de réponses obtenues :**
 - apériodique
 - pseudo-oscillatoire
- **Le domaine de validité du modèle identifié sera le plus souvent pris égal à : $\omega_{val} = 10 \max(|p_i|)$** où p_i sont les pôles de la fonction de transfert identifiée.

Identification par analyse indicelle cas d'une réponse apériodique



- **Plusieurs méthodes d'identification de $H(p)$:**
 - méthode de Strejc,
 - méthode de Broida
 - abaques de Caldwell ...
- **Forme choisie pour la Fonction de transfert dans le cas de la méthode de Strejc :**

$$H(p) = \frac{Ge^{-\tau p}}{(1 + Tp)^n}$$

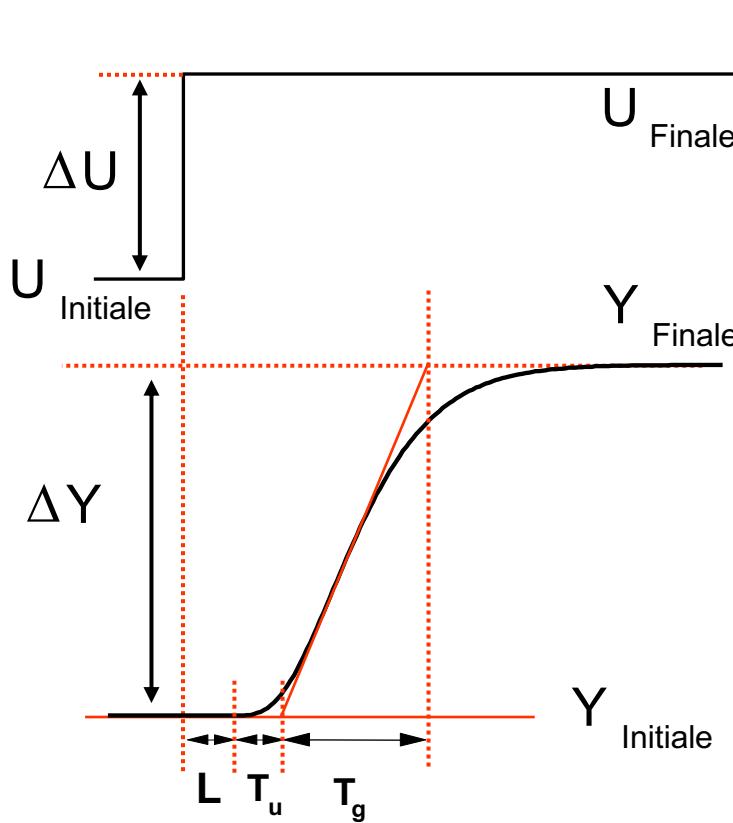
G est le gain statique, **τ** est le retard pur,
T est la constante de temps et **n** est l'ordre du système.

- Modèle bien adapté aux systèmes ayant des constantes de temps proches les unes des autres.

Identification par analyse indicelle

Réponse apériodique – Méthode de Strejc

- La méthode de Strejc est une méthode (parmi d'autres) d'identification de systèmes pouvant être approchés par la fonction de transfert suivante :



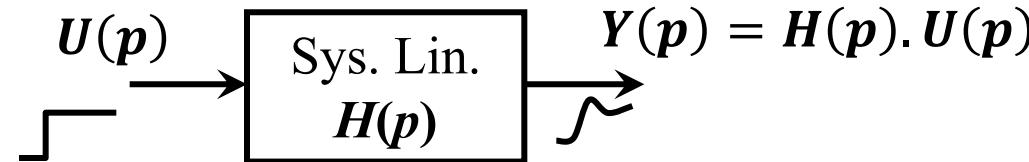
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G e^{-Lp}}{(\tau p + 1)^n}$$

$$G = \frac{\Delta Y}{\Delta U}$$

T_u/T_g	0,1	0,22	0,32	0,41	0,49	0,57
n	2	3	4	5	6	7
τ /T_g	0,37	0,27	0,225	0,195	0,175	0,16

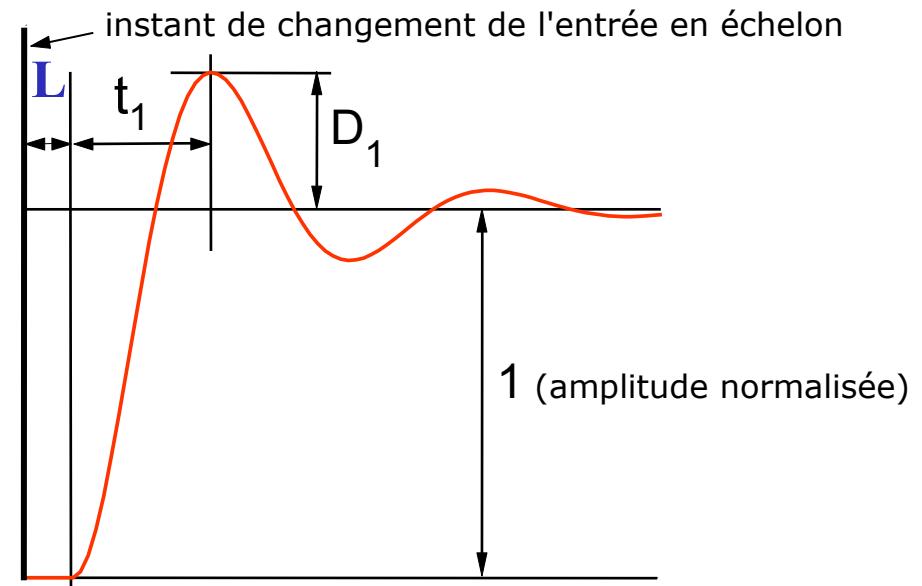
Méthode adaptée pour les systèmes d'ordre $n \geq 2$.

Identification par analyse indicelle cas d'une réponse pseudo-oscillatoire



**Fonction de transfert
considérée :**

$$H(p) = \frac{G e^{-Lp}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2m \frac{p}{\omega_0} + 1}$$



G est le gain statique, **L** est le retard pur,
 ω_0 est la pulsation propre et **m** le facteur d'amortissement

$$G = \frac{\Delta Y}{\Delta U}$$

$$m = \frac{-\ln(D_1)}{\sqrt{10 + \ln^2(D_1)}}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - m^2}}$$

Cas de l'identification d'un système du 1^{er} ordre

Identification par essai indiciel

Réponse apériodique avec dérivée à l'origine non nulle

Pour une entrée en échelon, lorsque la pente de la dérivée à l'origine de la réponse est non nulle, on pourra faire l'hypothèse d'un **système du 1^{er} ordre**.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G}{\tau p + 1}$$

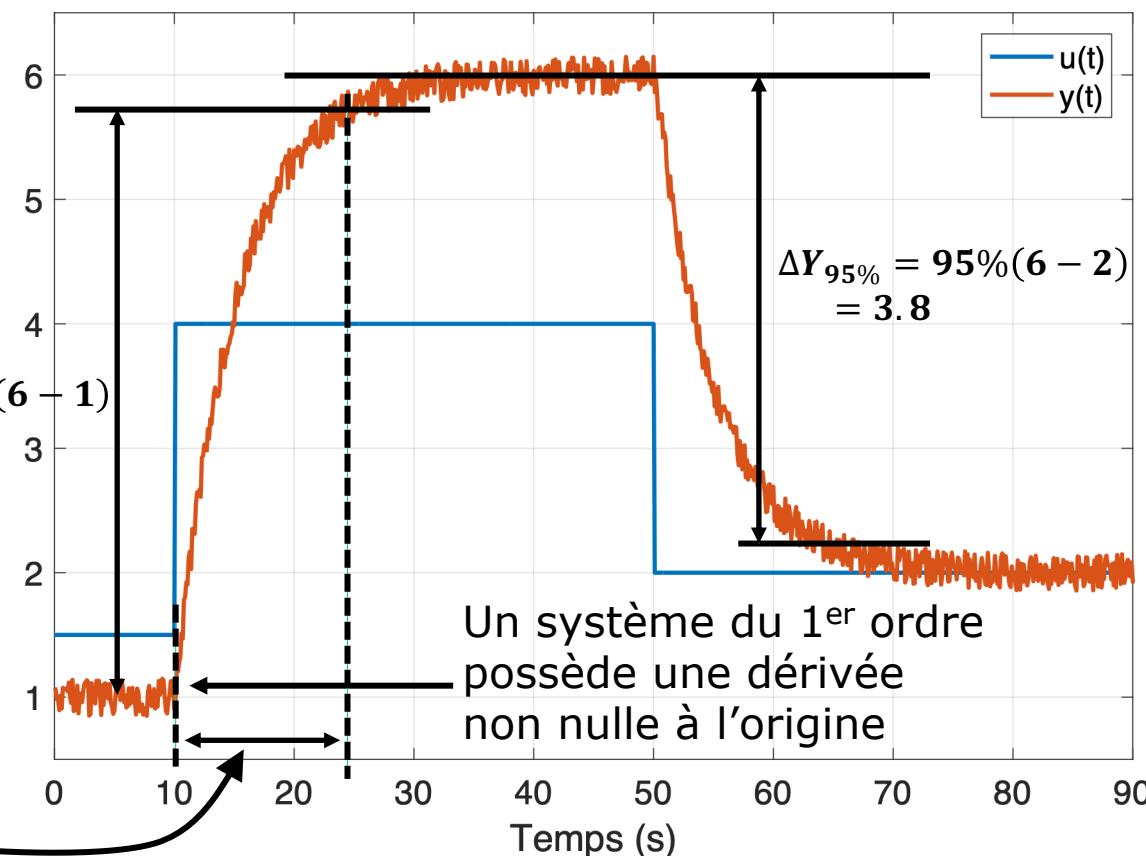
avec $\omega_{val} = 10 \times \frac{1}{\tau}$

$$G = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{6 - 1}{4 - 1.5} = 2$$

$$= \frac{2 - 6}{2 - 4} = 2$$

$$\neq \frac{1}{1.5} \neq \frac{6}{4} \neq \frac{2}{2}$$

$$\tau = \frac{t_{rep95\%}}{3} \approx \frac{15}{3} = 5 \text{ s}$$



Choix de la bande passante maximale

Majorant du retard pur non identifié

A la pulsation ω [rad/s], un retard pur L [s] engendre un retard de phase :

$$\varphi_{retard}[\circ] = -\frac{180}{\pi} L \omega$$

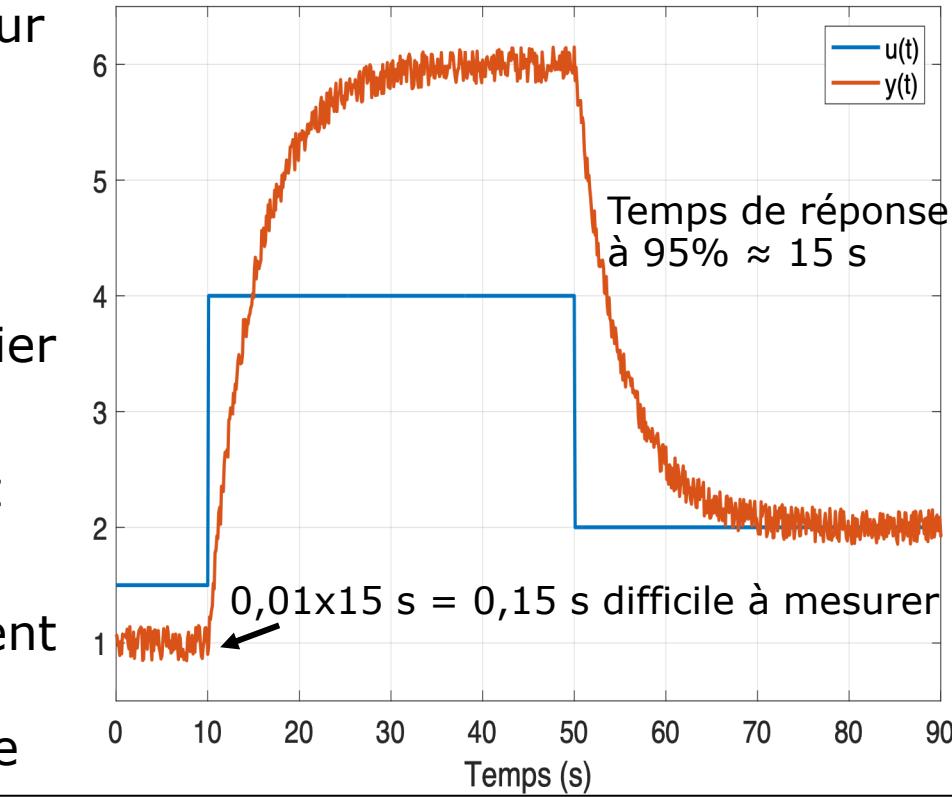
En pratique, en raison du bruit de mesure, il peut être difficile d'identifier la valeur du retard pur.

On pourra alors estimer un majorant de ce retard pur.

Typiquement, on pourra arbitrairement prendre ce majorant égal à 1% du temps de réponse à 95% du système identifié :

$$L_{majorant}[s] = 0.01 \cdot t_{rep.95\%}$$

ω_{val} et $L_{majorant}$ devront être pris en compte pour la synthèse de la commande



Pour le système ci-dessus :

$$H(p) = \frac{2.e^{-Lp}}{5p+1} \text{ avec } \omega_{val} = 10 \times \frac{1}{\tau} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\text{avec } L \leq L_{majorant} = 0.15 \text{ s.}$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_{val} : \varphi_{retard}[\circ] = -17^\circ$$