

Automatique

**Analyse et commande
des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux
à temps continu et à temps discret**

E. Mendes

Cours AU 360 – Grenoble INP – Esisar, UGA

SOMMAIRE

Introduction	8
Approche hiérarchique de la commande des systèmes.....	8
Structure générale de commande d'un système asservi	11
Objectifs du cours.....	13
A. Modèles de systèmes dynamiques à temps continu.....	14
1. Représentation des systèmes dynamiques à temps continu	14
1.1 Représentation externe (entrée/sortie) de systèmes linéaires invariants causaux SISO	14
1.2 Représentation interne (espace d'état) de systèmes MIMO	15
1.3 Représentation interne (espace d'état) de systèmes linéaires invariants causaux SISO	17
2. Modélisation de systèmes physiques.....	18
2.1 Modélisation de systèmes électriques R, L et C	18
2.2 Modélisation de systèmes mécaniques f, M et K	20
2.3 Moteur électrique à courant continu	21
2.4 Modélisation de systèmes thermiques	22
2.5 Modélisation de systèmes hydrauliques.....	24
B. Signaux à temps continu et temps discret – Échantillonnage	26
1. Signal à temps continu	26
2. Signal échantillonné à temps discret.....	26
3. Théorème d'échantillonnage de Shannon et repliement de spectre	27
4. Filtre anti-repliement de spectre.....	28
4.1 Modélisation du filtre anti-repliement de spectre pour le domaine à temps discret	28
4.2 Exemple d'un filtre anti-repliement de type Butterworth d'ordre 3.....	29
4.3 Utilité du sur-échantillonnage	29
5. Modélisation du convertisseur analogique numérique (CAN)	30
6. Reconstitution du signal échantillonné en un signal à temps continu (CNA et Bloqueur).....	31
6.1 Bloqueur d'Ordre Zéro.....	31
6.2 Bloqueur d'Ordre Un	32
7. Choix de la période d'échantillonnage	32
7.1 Critère de Shannon	32
7.2 Critère de Gain	32
7.3 Critère de Phase	32
7.4 Précision numérique.....	33
C. Systèmes dynamiques causaux linéaires invariants et Fonctions de Transfert	34
1. Signaux et systèmes causaux.....	34
2. Systèmes linéaires invariants	35
2.1 Principe de superposition	35
2.2 Système invariant (stationnaire).....	35
3. Solutions des systèmes dynamiques SISO causaux linéaires invariants	36

4. Transformée de Laplace et Fonction de Transfert à temps continu.....	38
4.1 Définition de la transformée de Laplace.....	38
4.2 Propriétés de la transformée de Laplace	38
4.3 Transformées de Laplace usuelles	39
4.4 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale	39
4.5 Calcul opérationnel et résolution d'EDO avec les transformées de Laplace	39
4.6 Transformées de Laplace du produit de convolution	40
4.7 Fonction de transfert à temps continu d'un système linéaire invariant causal	41
5. Transformée en z et Fonction de transfert à temps discret.....	43
5.1 Interprétation de l'opérateur z^{-1}	43
5.2 Propriétés de la transformée en z	43
5.3 Quelques exemples de transformation en z.....	44
5.4 Table de transformées en z.....	45
5.5 Calcul de la transformée en z inverse par la méthode des résidus.....	46
5.6 Représentation des systèmes linéaires stationnaires en temps discret par leur fonction de transfert en z	47
5.7 Implantation par équation aux différences	48
D. Analyse des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux	49
1. Stabilité des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux	49
2. Signaux typiques de test	53
3. Réponses d'un système dynamique linéaire invariant causal SISO	54
3.1. Caractérisation du régime permanent	54
3.2 Caractérisation du régime transitoire	55
4. Analyse fréquentielle des systèmes linéaires invariants - Diagrammes.....	57
4.1 Le diagramme de Bode	58
4.2 Le diagramme de Black-Nichols.....	61
4.3 Le diagramme de Nyquist	62
4.4 Construction des diagrammes pour les systèmes à temps discret	63
Exemple de diagrammes pour un système du 1 ^{er} ordre à temps continu et à temps discret	63
5. Analyse des systèmes linéaires passe-bas du 1 ^{er} et 2 nd ordre à temps continu	65
5.1 Systèmes passe-bas du 1 ^{er} ordre	65
5.1.1 Réponse fréquentielle	65
5.1.2 Réponse à un échelon à conditions initiales nulles.....	66
5.2 Mise en série de systèmes passe-bas du 1 ^{er} ordre	67
5.3 Systèmes passe-bas du 2 nd ordre	69
5.3.1 Réponses à une entrée en échelon unitaire à conditions initiales nulles.....	69
5.3.2 Réponses à une entrée sinusoïdale.....	72
E. Modèles généraux de capteurs et d'actionneurs	73
1. Modèle général d'un capteur à captation continue.....	73
2. Modèle général d'un capteur à captation par « pas »	74
3. Modèle général d'un actionneur	74

F. Méthodes élémentaires expérimentales d'identification de modèles linéaires	75
1. Identification par analyse fréquentielle	75
2. Identification par analyse indicelle à temps continu	75
2.1 Cas d'une réponse apériodique – Méthode de Vladimir Strejc	75
2.2 Cas d'une réponse de type pseudo-oscillatoire	77
3. Prétraitement des données – Filtrage de la mesure	78
4. Domaine de validité fréquentielle d'un modèle.....	79
4.1 Approximation d'une fonction de transfert de type passe-bas du 1 ^{er} ordre par son gain statique	79
4.2 Domaine de validité fréquentielle d'un modèle identifié	80
4.3 Application à la réduction du modèle d'un processus et à la détermination du domaine de validité fréquentielle d'un modèle identifié.....	81
4.4 Majorant du retard pur non identifié	82
G. Stabilité de l'association de systèmes dynamiques – Marges de stabilité	83
1. Stabilité au sens EB-SB d'un système dynamique défini par sa fonction de transfert.....	83
2. Stabilité au sens EB-SB de l'association de systèmes dynamiques	84
2.1 Stabilité de systèmes en série.....	84
2.2 Stabilité de systèmes bouclés	85
2.3 Prédiction de la stabilité de la boucle fermée par l'analyse de la boucle ouverte	87
2.3.1 Critères de Nyquist à temps continu	88
2.3.2 Critères de Nyquist à temps discret	91
3. Marges de robustesse de la stabilité des systèmes asservis.....	94
3.1 Marges de stabilité	94
3.2 Mesure des marges de stabilité	96
3.2.1 Mesure des marges gain et de phase dans le diagramme de Bode.....	97
3.2.2 Mesure des marges gain et de phase dans le diagramme de Black-Nichols	98
3.3.3 Mesure de la marge de module par la fonction de sensibilité de sortie	99
4. Fonctions de sensibilité et Intégrales de Bode.....	100
H. Structure de commande, contraintes et objectifs d'un système asservi	103
1. Structure générale de commande	103
2. Contraintes de synthèse de la commande	105
3. Objectifs et étapes de la synthèse d'une commande d'un système asservi	105
4. Contraintes sur le correcteur C du système asservi.....	107
4.1. Limitation du niveau de bruit présent sur la commande U	107
4.2. Effet d'un correcteur à action intégrale.....	108
5. Éléments de choix du filtre F de la consigne	109
5.1. Ajustement du dépassement de la valeur finale de la sortie	109
5.2. Suivi de consigne à modèle de référence	110
I. Le correcteur de type PID et ses variantes	112
1. Problème de la forme standard du correcteur PID sans filtrage de l'action dérivée	113
2. Les Correcteur PID Filtré à temps continu et à temps discret.....	114
3. Différentes actions du correcteur PID Filtré	115

3.1 L'action proportionnelle P	116
3.2 Le correcteur PI.....	121
3.3 Le correcteur PD Filtré ou P-Avance de phase.....	125
3.4 Approches pour la détermination des paramètres d'un correcteur de type PID Filtré	127
4. Synthèse de correcteurs de type PID Filtré par modelage de $H_{B0}(j\omega)$	128
4.1. Allure « idéale » de $H_{B0}(j\omega)$	128
4.2. Utilisation de la méthode de modelage de $H_{B0}(j\omega)$ et outils logiciels disponibles.....	129
4.3. Analyse de $H_{B0}(j\omega)$ dans le diagramme de Black-Nichols	131
5. Détermination des gains d'un correcteur PID par des essais expérimentaux.....	132
5.1. Méthode expérimentale de Ziegler-Nichols à temps continu	132
5.1.1 Essai de pompage en boucle fermée.....	133
5.1.2 Essai indiciel en boucle ouverte.....	134
5.1.3 Remarques sur les essais de la méthode de Ziegler-Nichols	135
5.2. Méthode expérimentale de Takahashi à temps discret.....	136
J. Synthèse de correcteurs par compensation des pôles dominants	137
1. Principe de la méthode à temps continu	137
1.1. Exemple d'application de la méthode.....	138
2. Principe de la méthode à temps discret	142
K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST	143
1. Structure générale de commande et structure de commande RST	143
2. Synthèse d'une commande à temps continu sous forme RST par placements des pôles de la boucle fermée	144
2.1 Degré du polynôme de régulation	144
2.2 Rejet asymptotique des perturbations P_u et P_y constantes	144
2.3 Choix des degrés des polynômes de correction $R(p)$ et $S(p)$	144
2.3.1 Solution minimale pour $R(p)$ et $S(p)$	144
2.3.2 Correcteur strictement propre avec solution minimale pour $R(p)$	145
2.3.3 Correcteur avec effet intégral.....	145
2.4 Détermination des coefficients des polynômes $R(p)$ et $S(p)$	145
2.5 Choix du polynôme de régulation $D(p)$	146
2.5.1 Polynôme de régulation $D(p)$ ayant d pôles multiples.....	146
2.5.2 Choix des pôles du polynôme de régulation $D(p)$ par placement dit robuste.....	146
2.6 Choix de $T(p)$	148
2.6.1 Erreur statique nulle	148
2.6.2 Calcul de $T(p)$	148
2.7 Application de la méthode de placement des pôles de la boucle fermée en temps continu	149
3. Synthèse d'une commande à temps discret sous forme RST par placements des pôles de la boucle fermée	152
3.1 Degré du polynôme de régulation	153
3.2 Rejet asymptotique des perturbations P_u et P_y constantes	153
3.3 Choix des degrés des polynômes de correction $R(z)$ et $S(z)$	153

3.3.1 Solution minimale pour $R(z)$ et $S(z)$	153
3.3.2 Régulateur strictement propre avec solution minimale pour $R(z)$	153
3.3.3 Régulateur avec effet intégral	153
3.4 Détermination des coefficients des polynômes $R(z)$ et $S(z)$	154
3.5 Choix de $T(z)$	154
3.5.1 Erreur statique nulle	154
3.5.2 Choix de $T(z)$	154
3.6 Choix du polynôme de régulation $D(z)$	156
3.6.1 Polynôme de régulation $D(z)$ ayant d pôles multiples	156
3.6.2 Choix des pôles du polynôme de régulation $D(z)$ par placement dit robuste.....	156
3.7 Application des méthodes de commande par placement de pôles à temps discret	157
3.7.1. Exemple 1	157
3.7.2 Exemple 2	160
L. Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur	162
1. Sensibilité des racines des polynômes aux incertitudes d'implantation	163
2. Cellules élémentaires	164
2.1 Implantation de polynômes	164
2.2 Implantation de fonctions rationnelles de polynômes.....	165
3. Sensibilité et précision d'implantation.....	165
4. Procédure d'implantation d'une fonction de transfert.....	166
4.1 Implantation d'un filtre du troisième ordre	167
ANNEXES.....	169
A1. Étude algébrique de la stabilité des systèmes linéaires invariants	169
A1.1 Critère algébrique de Routh pour les systèmes à temps continu	169
A1.2 Critère algébrique de Jury pour les systèmes à temps discret	170
A2. Méthodes approchées de calcul de la transformée en z	172
A2.1. Correspondance entre les plans p et z	172
A2.2. Méthodes approchées de discréétisation des fonctions de transfert.....	173
A2.2.1 Discréétisation par la méthode du rectangle arrière – Euler explicite.....	173
A2.2.2 Discréétisation par la méthode du rectangle avant – Euler implicite	174
A2.2.3 Discréétisation par la méthode de Tustin	174
A2.3 Comparaison des méthodes de discréétisation	175
A3. Notion de filtrage et Filtres	177
A4. Le décibel et son intérêt.....	178
Références	180

Avertissement

Ce polycopié de cours n'est pas un texte complet comme pourrait l'être un livre sur le sujet. Il est le support au cours, travaux dirigés et travaux pratiques d'un cours délivré à Grenoble INP – Esisar. Ce polycopié devrait contenir les éléments fondamentaux nécessaires au suivi du cours (merci de signaler les éventuelles erreurs ou oubli qui vous semblent important de corriger ou d'ajouter). En tout état de cause, il est nécessaire en parallèle de s'appuyer sur des livres de référence qui peuvent être trouvés en grande quantité dans toute bibliothèque universitaire (cf. section Références). Par ailleurs, de nombreux cours d'automatique peuvent être consultés sur internet.

Introduction

De manière générale, nous désignerons par système un ensemble d'éléments liés entre eux pour concourir à la réalisation d'une tâche donnée. Les systèmes possèdent le plus souvent plusieurs entrées et plusieurs sorties. Ces systèmes sont dits MIMO (Multi Input – Multi Output).

Pour un système de périmètre donné, nous désignerons par entrées de ce système, les grandeurs (variables) exogènes (extérieures au système) qui agissent sur l'état du système. Pour ce même système, les sorties sont les grandeurs (variables) internes du système qui sont mesurées à l'aide de capteurs. On fera ainsi la différence entre les états (variables) internes qui définissent complètement le fonctionnement du système et les sorties qui ne sont qu'une image de ces grandeurs internes obtenues par des capteurs. En pratique, afin de minimiser les coûts et augmenter la fiabilité, on minimisera le nombre de capteurs utilisés. On peut alors être amené à mettre en place des dispositifs numériques (appelés observateurs) d'estimation des grandeurs internes non mesurées.

A titre d'exemple, le schéma de la figure I.1 représente le schéma fonctionnel global d'un véhicule en distinguant les entrées (flèches entrantes) et les sorties (flèches sortantes). C'est un système MIMO complexe constitué de 7 entrées exogènes et de 5 sorties (mesures).

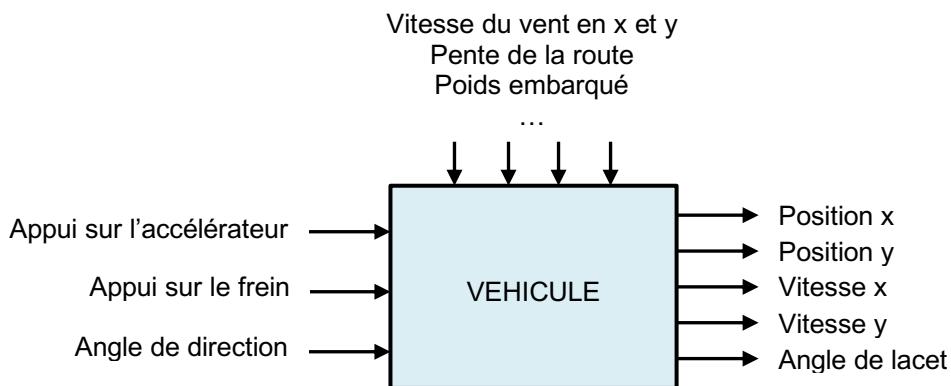


Figure I.1 – Schéma fonctionnel global d'un véhicule.

L'élaboration de la commande du système véhicule qui consiste à définir les lois horaires des 3 entrées de commande (appui sur l'accélérateur, appui sur le frein, angle de direction) pour, par exemple, aller d'un point A de coordonnées (x_A, y_A) à un point B de coordonnées (x_B, y_B) est une tâche complexe qui en plus de la prise en compte de la dynamique du véhicule (équations régissant le comportement du véhicule), nécessite de prendre en compte les perturbations exogènes (vitesse du vent, pente de la route, poids embarqué...) qui sont au mieux mal connues sinon inconnues. Certaines perturbations peuvent être mesurées au prix d'un coût supplémentaire de la commande par l'ajout de capteurs spécifiques.

Approche hiérarchique de la commande des systèmes

La complexité de la commande d'un système tel que celui de la figure I.1 nécessite dans un premier temps de définir un système hiérarchique de commande. La figure I.2 donne une hiérarchie de commande typique à 3 niveaux d'abstraction.

Planification des points de passage	Prise de décision	Flexible et Lent
Optimisation Planification continue	Planification de Trajectoire	Intermédiaire
Système asservi	Contrôle en boucle fermée	Rigide et Temps réel

Figure I.2 – Hiérarchie de commande typique à 3 niveaux d'abstraction.

La structure hiérarchique de la figure I.2 est très générale et permet d'aborder la plupart des problèmes complexes de commande. Le plus souvent, chacun de ces niveaux sera lui-même constitué de plusieurs niveaux hiérarchiques. Notamment, le niveau « Système asservi » sera constitué dans la plupart des cas de plusieurs niveaux, chaque niveau étant constitué d'une boucle d'asservissement. On obtient alors un système de commande à boucles imbriquées.

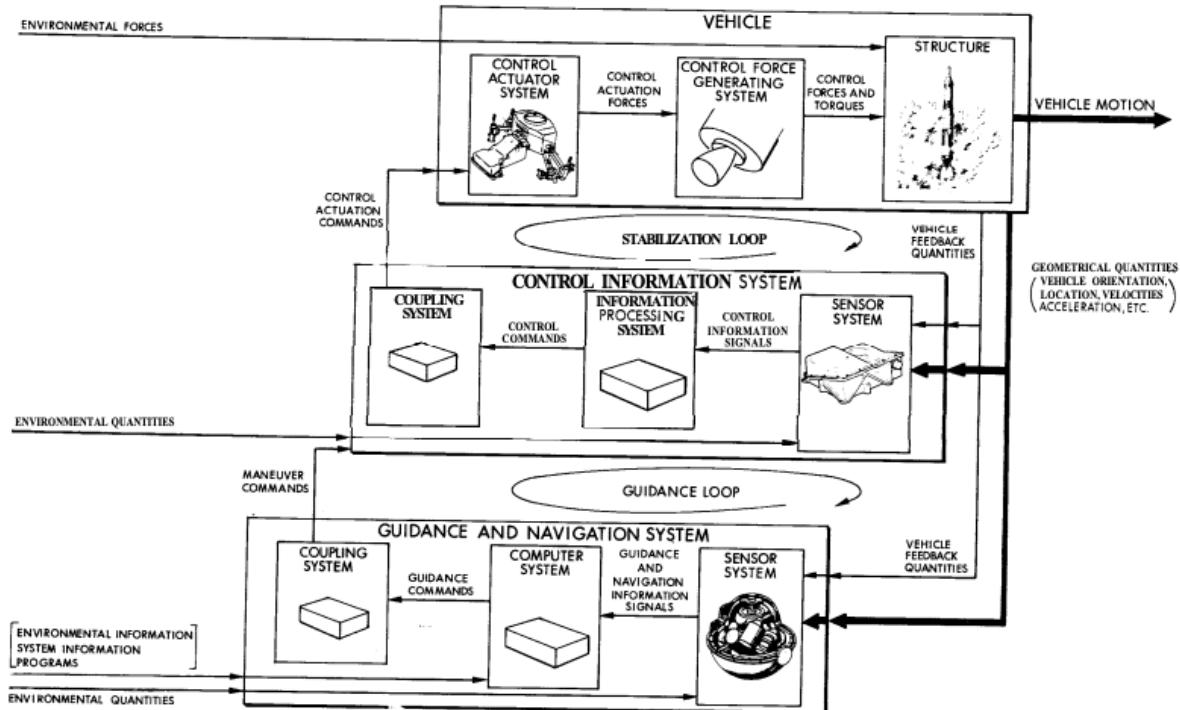


Figure I.3 – Commande hiérarchique utilisée pour la mission Apollo.
<https://ibiblio.org/apollo/hrst/archive/1713.pdf>

A titre d'exemple, la figure I.3 donne le schéma de la commande hiérarchique de la mission Apollo. Le niveau « VEHICLE » est constitué lui-même de trois niveaux qui sont chacun un système asservi du niveau le plus élevé (Structure) au niveau le plus bas (Actionneurs) :

- **Niveau Structure : contrôle de la trajectoire du véhicule (boucle externe)**
 - o Entrées exogènes : forces environnementales (vent, densité, poids...) ;
 - o Entrées de commande : forces et couples appliqués au véhicule
 - o Sorties : position et attitude du véhicule
- **Niveau Génération de forces : contrôle des forces et couples générés (boucles intermédiaires)**
 - o Entrées de perturbations : accélérations, vitesses et position du véhicule, températures...
 - o Entrées de commande : angles et poussées des tuyères
 - o Sorties : forces et couples appliqués au véhicule (entrées de commande du niveau Structure) ;
- **Niveau Contrôle des actionneurs : contrôle des angles et poussées des tuyères (boucles internes)**
 - o Entrées de perturbations : accélérations, frottements non pris en compte, températures...
 - o Entrées de commande : position des actionneurs d'angles des tuyères, ouverture des vannes de carburant...
 - o Sorties : angles et poussées des tuyères (entrée de commande du niveau Génération de forces)

Le niveau contrôle des actionneurs sera lui-même hiérarchisé en plusieurs boucles de contrôle.

Par exemple, le positionnement des tuyères pourrait être obtenu par des vérins électriques constitués d'une tige d'actionnement reliée à un moteur électrique par le biais d'une transmission mécanique vis-écrou ou roue dentée à crémaillère. Il faudra alors mettre en place une commande électrique du moteur pour contrôler sa vitesse puis sa position et ainsi la position de la tige reliée à la tuyère. La figure I.4 donne une représentation schématique du fonctionnement du vérin électrique.

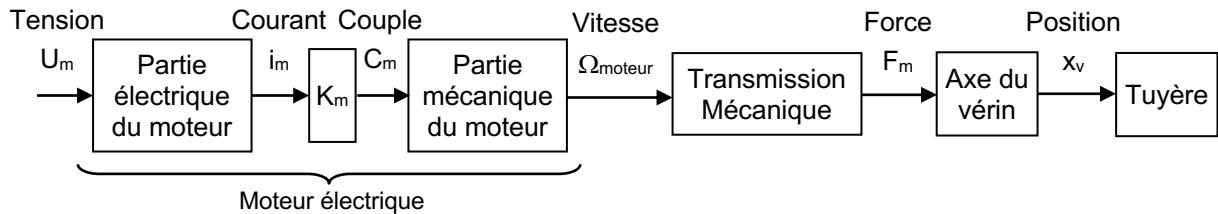


Figure I.4 – Représentation schématique du fonctionnement d'un vérin électrique.

Sur la figure I.4, le moteur électrique est alimenté par une tension U_m et la position de la tige du vérin électrique qui impose l'angle de la tuyère est x_v . A partir d'une consigne de la position angulaire de la tuyère donnée par le niveau hiérarchique supérieur, la consigne de position du vérin est déterminée et la commande du vérin doit déterminer la tension à appliquer au moteur électrique pour que la tige se positionne à la position désirée tout en limitant l'amplitude du courant du moteur pour ne pas le détruire ni le système d'alimentation électrique, et en limitant aussi la vitesse du moteur en dessous de sa vitesse maximale.

On a vu qu'à partir d'une tâche très complexe (le pilotage d'un véhicule d'une position à une autre) la hiérarchisation successive permet d'aboutir au pilotage d'un ensemble de systèmes plus simples dont le positionnement angulaire des tuyères qui, comme on peut le voir sur la figure I.4, se résume à la détermination d'une commande scalaire (1 dimension) U_m pour agir sur une sortie scalaire x_v , la position angulaire de la tuyère.

La hiérarchisation permet très souvent de transformer un problème MIMO (Multi-Inputs Multi-Outputs) très complexe en une suite de problèmes MISO (Multi-Inputs Single-Output) chacun constitué d'une entrée de commande scalaire et d'entrées de perturbations inconnues et d'une sortie scalaire à contrôler grâce à l'entrée de commande. Si les entrées de perturbation agissent sous forme additive à l'entrée de commande, alors on parlera de système SISO (Single-Input Single-Output), c'est le cas principal traité dans ce cours.

Le point crucial pour mener à bien la hiérarchisation de la commande puis le développement de chacune des commandes est l'obtention d'un modèle pour chacun des constituants avec la précision nécessaire à son niveau d'utilisation. La plupart des systèmes ont des comportements non-linéaires qui peuvent être approchés localement par un modèle linéaire (voir le **chapitre A. Modèles de systèmes dynamiques à temps continu**). C'est l'hypothèse que nous ferons dans ce cours. Ainsi, nous nous intéresserons à la détermination des commandes de bas niveau au plus près du système physique à partir d'un modèle linéaire du système à contrôler.

Structure générale de commande d'un système asservi

Grâce à la hiérarchisation, la commande d'un système peut le plus souvent se ramener à la commande d'un système mono-entrée mono-sortie SISO (Single-Input Single-Output).

Typiquement, afin d'asservir la grandeur d'intérêt d'un processus à une référence donnée (qui peut être variable), on utilise un actionneur qui amplifie le signal de commande afin d'appliquer la puissance nécessaire au processus. Pour contrôler la valeur prise par la grandeur à asservir, un capteur est nécessaire. Le signal issu du capteur est utilisé par la commande pour l'asservissement. La figure I.5 donne une représentation de la structure typique de commande. Sur la figure I.5 apparaissent également les perturbations inconnues qui peuvent agir sur l'actionneur, le processus et le capteur.

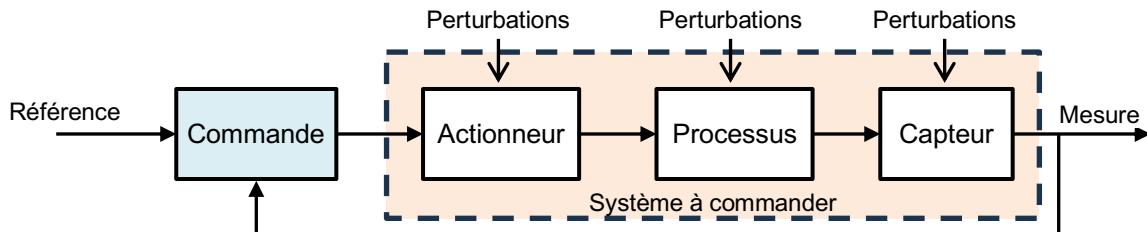


Figure I.5 – Structure typique de commande d'un processus SISO avec son actionneur et son capteur.

Vis-à-vis de la commande, l'ensemble *Actionneur-Processus-Capteur* sera vu comme le *Système à commander*. L'étape préalable à toute élaboration de commande sera d'obtenir un modèle mathématique du *Système à commander*. Ces modèles peuvent être obtenus par modélisation mathématico-physique des composants de ce système (voir le **chapitre A. Modèles de systèmes dynamiques à temps continu**) ou par identification à l'aide de signaux (excitations) appropriés appliqués au système à commander (voir le **chapitre F. Méthodes élémentaires expérimentales d'identification de modèles linéaires**).

Les modèles utilisés dans ce cours pour l'élaboration des commandes sont les modèles de systèmes dynamiques causaux linéaires invariants représentés par leur fonction de transfert (voir le **chapitre C. Systèmes dynamiques causaux linéaires invariants et Fonctions de Transfert** et le **chapitre D. Analyse des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux**)

En pratique, la commande du système est réalisée à l'aide d'un calculateur numérique à temps discret (cadencé par une horloge) interfacé avec le modèle physique à temps continu. La figure I.6 donne la structure générale de ce système de commande numérique.

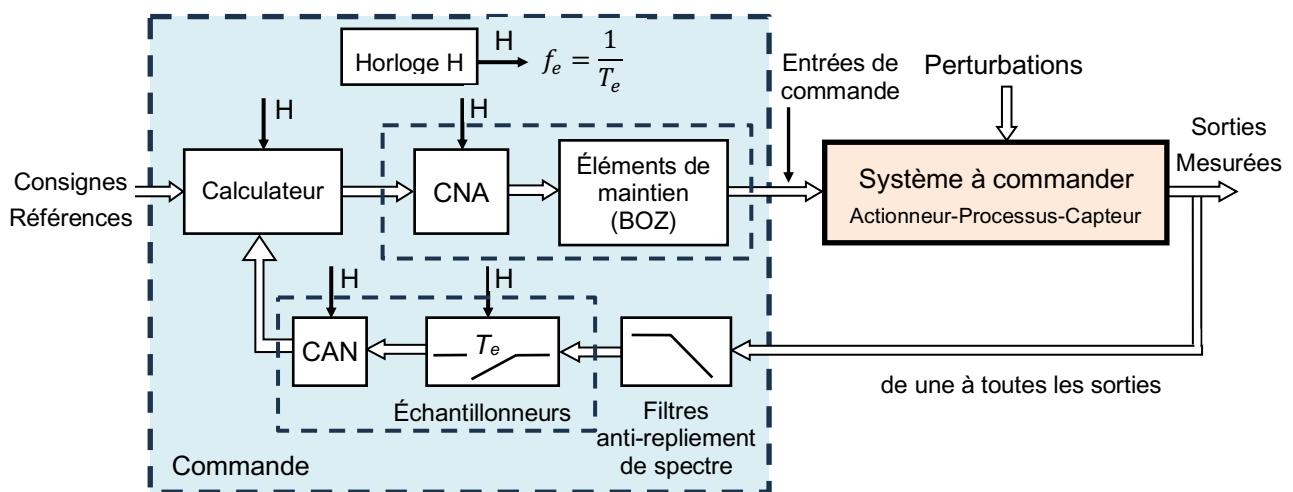


Figure I.6 – Structure générale d'un système de commande par calculateur numérique.

Sur la figure I.6, outre le système à commander, on trouve :

- un ou plusieurs filtres anti-repliement de spectre (anti-aliasing filters en anglais)
- un ou plusieurs Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN, ADC en anglais) associés à des échantillonneurs ;
- le calculateur numérique ;

- un ou plusieurs Convertisseurs Numériques Analogique (CNA, DAC en anglais) associés à des Bloqueurs d'Ordre Zéro (BOZ, ZOH en anglais) ;
- une horloge de fréquence f_e (période d'échantillonnage $T_e = 1/f_e$).

La ou les références que doivent suivre la ou les sorties peuvent être données soit sous forme analogique, elles devront alors être également numérisées, soit directement sous forme numérique.

Le système dans son ensemble met en jeu des signaux à temps continu et des signaux à temps discret ce qui nécessite l'utilisation de composants spécifiques (filtre anti-repliement de spectre, échantillonneur, CAN, CNA) pour faire le lien entre les deux domaines (voir le **chapitre B. Signaux à temps continu et temps discret – Échantillonnage**).

Pour l'élaboration de la commande (algorithme) implantée sur le calculateur, un modèle de l'ensemble du système vu par le calculateur devra être obtenu. Ce modèle a pour entrée la commande $u(t)$ élaborée par l'algorithme implanté sur le calculateur à partir de la mesure de la sortie du système à commander $y_m(t)$ et de la référence $r(t)$ que devra suivre la sortie $y(t)$. Ce modèle, entre la commande $u(t)$ et la mesure de la sortie $y_m(t)$, prend en compte le CNA, le BOZ, le système à commander (actionneur-processus-capteur), le filtre anti-repliement de spectre, l'échantillonneur et le CAN (voir le **chapitre C. Systèmes dynamiques causaux linéaires invariants et Fonctions de Transfert**).

La figure I.7 donne la structure de commande à deux degrés de liberté qu'il sera nécessaire d'implanter sur le calculateur de commande pour mener à bien la commande du système à commander. Cette structure de commande à deux degrés de liberté est très générale et mathématiquement bien définie car la commande, comportant deux entrées (la référence $r(t)$ et la mesure de la sortie $y_m(t)$), il est nécessaire d'avoir deux degrés de liberté, en l'occurrence le filtre de la référence F et le correcteur de boucle C , pour mener à bien la commande du système à commander en tenant compte des perturbations inconnues.

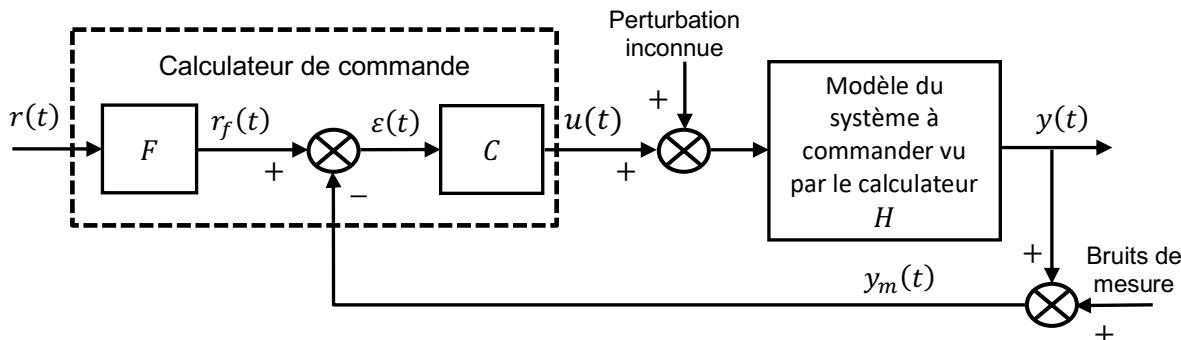


Figure I.7 – Structure de commande à deux degrés de liberté implantée sur calculateur.

La synthèse (élaboration) d'une commande doit satisfaire à un ensemble de contraintes dont les principales sont :

1. Garantir le contrôle du système à commander (garantir la stabilité) même si :
 - la modélisation du système à commander est imparfaite ;
 - les paramètres du système à commander évoluent ;
 - des perturbations inconnues agissent sur le système à commander.
2. Garantir un petit écart entre la référence et la mesure pour une référence de valeur constante (idéalement un écart nul).
3. Limiter la sensibilité de la commande aux bruits de mesure (évite une usure prématûre, des vibrations indésirables et une consommation énergétique inutile).
4. Dépassement en amplitude inférieur à une limite donnée de la référence par la sortie (certaines applications ne permettent aucun dépassement sous peine de destruction)

Ces contraintes de synthèse de commande sont associées à des objectifs spécifiques qui peuvent être spécifiés comme un problème d'optimisation (voir le **chapitre H. Structure de commande, contraintes et objectifs d'un système asservi**).

Les chapitres :

- **I. Le correcteur de type PID et ses variantes,**
- **J. Synthèse de correcteurs par compensation des pôles dominants,**
- **K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST**

donnent les méthodes les plus classiques pour la détermination de commandes de processus linéaires invariants causaux. In fine, la commande se traduit par un algorithme qu'il faudra planter sur un calculateur.

L'implantation sur calculateur numérique de l'algorithme de commande qui aura été synthétisé est aussi un sujet très important car suivant la forme implantée de l'algorithme le nombre de chiffres significatifs des paramètres de l'algorithme peut avoir une influence très importante sur le comportement pratique (voir le **chapitre L. Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur**).

Objectifs du cours

L'objectif principal du cours peut être résumé par :

Donner les éléments théoriques, de méthode et pratiques nécessaires au développement et à l'implantation de commandes linéaires robustes et fiables de systèmes linéaires invariant causaux représentés par une fonction de transfert.

Pour atteindre cet objectif, les éléments théoriques, de méthode et pratiques seront dispensés tout au long du cours que ce soit en cours magistral, travaux dirigés et travaux pratiques.

De manière plus détaillée, les objectifs particuliers suivants peuvent être explicités :

- Savoir caractériser un système dynamique défini par une fonction de transfert (gain statique, pôles, zéros, stabilité EB-SB, temps de réponse, dépassement...).
- Savoir déterminer les éléments caractéristiques d'un système asservi (structure de commande à deux degrés de liberté, fonctions de transfert entre les différentes entrées et sorties du système bouclé, précision statique, temps de réponse, dépassement, bande passante, résonance...).
- Savoir analyser la stabilité et la robustesse d'un système bouclé (critères de Nyquist et du revers, fonction de sensibilité de sortie, marges de robustesse...).
- Savoir spécifier les contraintes fondamentales à respecter pour la synthèse d'un correcteur (marges de robustesse, amplification maximale du bruit, précision...).
- Savoir exprimer les objectifs de synthèse d'une commande (minimisation du temps de réponse au rejet de la perturbation de commande, minimisation du temps de réponse vis-à-vis de la consigne...).
- Savoir déterminer un correcteur de type PID Filtré ou PI-Avance de phase par la méthode de modelage de la boucle ouverte dans le cas de systèmes simples du premier ou second ordre.
- Savoir déterminer un correcteur par placement des pôles de la boucle fermée en utilisant la structure RST.
- Savoir planter une commande et analyser son comportement dans un environnement de simulation de type Matlab/Simulink.
- Savoir planter une commande sur calculateur numérique en tenant compte des limitations de l'amplitude de la sortie de commande et de la précision des composants utilisés pour la réalisation.

Les supports du cours sont les suivants :

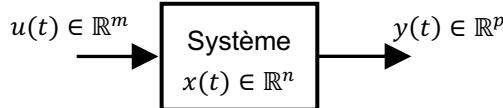
- le présent polycopié ;
- les transparents des cours magistraux ;
- les textes de travaux dirigés ;
- les textes de travaux pratiques et les outils logiciels disponibles.

L'ensemble de ces éléments seront accessibles au téléchargement sur la plateforme Chamilio de Grenoble INP.

A. Modèles de systèmes dynamiques à temps continu

1. Représentation des systèmes dynamiques à temps continu

Nous considérons des systèmes dynamiques (régis par des équations différentielles) à temps continu à paramètres localisés. Ces systèmes possèdent des entrées $u(t)$, des états internes $x(t)$ et des sorties $y(t)$.



De manière générale, les entrées $u(t)$, les états internes $x(t)$ et les sorties $y(t)$ sont des vecteurs de dimensions (m, n, p) appropriées en fonction du système considéré. Ce sont des systèmes MIMO (Multi Input - Multi Output).

Lorsqu'on ne considère que la relation entre une entrée et une sortie, on parlera d'un système SISO (Single Input - Single Output) mono-entrée / mono-sortie.

Les systèmes plus particulièrement traités dans ce cours, ceux pour lesquels des méthodes de commande seront explicitement présentées, sont des systèmes MISO (Multi Input - Single Output). Une entrée est utilisée (entrée de commande) pour contrôler une sortie.

De manière générale :

- Une entrée est une variable exogène au système qui agit sur le comportement du système. Les entrées utilisées pour contrôler le comportement du système sont les entrées de commande, les autres entrées sont le plus souvent considérées comme des entrées de perturbation.
- Un état interne au système est une variable indépendante de mémorisation du passé du système, ce sont le plus souvent des variables de stockage d'énergie.
- Une sortie est un état interne ou une combinaison de ceux-ci qui est obtenue par le biais d'un capteur.

Ces systèmes sont régis par des équations différentielles d'ordre n . Deux représentations peuvent être utilisées :

- Représentation externe (entrée-sortie) : 1 seule équation différentielle d'ordre n relie l'entrée considérée (les autres entrées sont supposées nulles) à la sortie considérée. Cette représentation peut ne s'appliquer qu'à certains types de systèmes.

- Représentation interne (espace d'état) : n équations différentielles d'ordre 1. C'est la représentation la plus générale.

1.1 Représentation externe (entrée/sortie) de systèmes linéaires invariants causaux SISO

Les systèmes (dynamiques) linéaires invariants causaux à temps continu SISO (Single Input – Single Output) à paramètres localisés constants sont régis par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_0 u(t) + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

ou $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \cdots + b_m u^{(m)}$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Éléments de langage :

- n est l'ordre du système
- $r = n - m$ est le degré relatif du système

- Un système physique est :
 - Dynamique si $\mathbf{n} > \mathbf{0}$ sinon Statique ($\mathbf{y} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$)
 - Causal (propre) : $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$
 - Strictement causal (strictement propre) : $\mathbf{n} > \mathbf{m}$
 - Linéaire et invariant si et seulement si les coefficients a_i et b_i sont constants.

1.2 Représentation interne (espace d'état) de systèmes MIMO

De manière très générale, les systèmes dynamiques sont régis par un système d'équations différentielles non linéaires appelée représentation interne sous forme d'état, ou plus simplement représentation d'état, de la forme :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x) + \sum_{i=1}^m g_{1i}(x)u_i \\ \vdots \\ f_n(x) + \sum_{i=1}^m g_{ni}(x)u_i \end{bmatrix} \\ y_i = h_i(x, u), \quad i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

où le vecteur d'état $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, le vecteur des entrées $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, le vecteur de sortie $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$; f_i et $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : Y \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions analytiques (dérivables).

Remarques :

- Le système (Σ) peut comporter des singularités.
- Le système (Σ) est affine en les entrées u_i .
- Si le système (Σ) n'est pas affine en les entrées u_i , le changement de variable suivant permet de l'écrire sous une forme affine :

$$\dot{u}_i = v_i$$

avec v_i les composantes du nouveau vecteur d'entrées.

Point d'équilibre : x_e est un point d'équilibre du système (Σ) si et seulement s'il existe $u_e \in U$ tel que les dérivées temporelles de x soient nulles :

$$0 = \dot{x}|_{u=u_e} = \frac{dx}{dt}\Big|_{u=u_e} = F(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} f_1(x_e) + \sum_{i=1}^m g_{1i}(x_e)u_{ie} \\ \vdots \\ f_n(x_e) + \sum_{i=1}^m g_{ni}(x_e)u_{ie} \end{bmatrix}$$

Pour l'entrée u_e donnée, cette expression caractérise l'ensemble des points d'équilibre.

◊

Linéarisation :

Considérons le système non-linéaire autonome (pas d'entrées) de dimension n :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitz (continûment différentiable).

On supposera, sans perte de généralité, que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre qui est à l'intérieur de X (i.e. $f(0) = 0$).

Le but est d'approcher, autour (voisinage) du point d'équilibre $x = 0$, ce système non-linéaire par un système linéaire du type :

$$\dot{x} = Ax$$

Puisque $f(x)$ est localement Lipschitz, l'application du théorème de la valeur moyenne donne :

$$f(x) = f(0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} \right] x = \begin{bmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ f_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_{x=z} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_{x=z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

où z est un point sur le plan (droite en une dimension) reliant x à l'origine.

Par construction $f(0) = 0$, nous pouvons donc écrire :

$$f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} \right] x = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] x + \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \right] x$$

D'où :

$$f(x) = Ax + a(x)$$

La fonction $a(x)$ satisfait (inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\|a(x)\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\| \cdot \|x\|$$

Par hypothèse $f(x)$ est Lipschitz, donc par continuité de $[\partial f / \partial x]$, il vient :

$$\frac{\|a(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

Ceci permet de définir le système linéaire dit *linéarisé tangent* autour du point d'équilibre $x = 0$:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{où.} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Remarques :

- Le résultat précédent peu également s'obtenir par un développement de Taylor autour du point d'équilibre.
- Le système linéaire tangent n'est valable que localement autour du point d'équilibre.
- Ce voisinage sera d'autant plus restreint que $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_{x=0}$ est grande.
- De la même façon, il est possible de déterminer le linéarisé tangent du système général (Σ) affine en la commande autour du point d'équilibre (x_e, u_e) :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{aligned}$$

avec $\tilde{x} = x - x_e$, $\tilde{u} = u - u_e$, $\tilde{y} = y - y_e$,

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_e, u=u_e}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{x=x_e, u=u_e}, \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \quad \text{et} \quad D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{x=x_e, u=u_e}.$$

1.3 Représentation interne (espace d'état) de systèmes linéaires invariants causaux SISO

Les systèmes (dynamiques) linéaires invariants à temps continu SISO (Single Input – Single Output) à paramètres localisés constants régis par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants peuvent être représentés sous forme d'une équation d'état de dimension n d'ordre 1 et d'une équation algébrique de sortie :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec $\forall t \in \mathbb{R}$ le vecteur d'état (interne) $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, la commande $u(t) \in \mathbb{R}$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}$; et les matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $D \in \mathbb{R}$.

Il est à noter que les matrices A, B et C ne sont pas uniques. Un changement de base inversible permet de passer d'une représentation à une autre.

A partir de la représentation externe suivante :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_0 u + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}, \quad \text{avec } m < n,$$

la représentation d'état dite « contrôleur » est facilement obtenue :

$$\text{Équation d'état : } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Équation de sortie : } y(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_0] x(t) + 0 \cdot u(t)$$

Dans cet exemple, $D = 0$ car $m < n$. Pour $m = n$, $D \neq 0$.

Pour une entrée $u(t) \in \mathbb{R} \ \forall t \geq t_0 \in \mathbb{R}$ et une condition initiale $x(t_0)$ du vecteur d'état $x(t)$, la trajectoire du vecteur d'état $x(t)$ est donnée par :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

La sortie $y(t) \in \mathbb{R}$ est ensuite obtenue par l'application de l'équation de sortie au vecteur d'état et à l'entrée.

Remarque : le calcul de l'exponentiel de matrice e^{At} est le plus souvent obtenu après une diagonalisation préalable de la matrice A (changement de base).

2. Modélisation de systèmes physiques

Dans cette section, sont donnés quelques modèles classiques de systèmes dynamiques issus de plusieurs domaines de la physique.

Les systèmes dynamiques sont des systèmes dont le comportement dépend des valeurs présentes et passées des grandeurs qui les caractérisent.

Dans le cas des systèmes physiques, la dépendance au passé est liée à un effet mémoire qui apparaît par la présence d'**éléments de stockage d'énergie** :

- Énergie cinétique : inductances, inertie mécanique, inertie thermique...
- Énergie potentielle : condensateurs, ressorts, hauteur...

Ces systèmes sont régis par des équations intégro-différentielles :

- de dimension finie d'**ordre n** (systèmes à paramètres localisés dans l'espace, système constitués d'éléments supposés ponctuels tels qu'inductances, condensateurs, objets indéformables...),
l'ordre n (nombre de dérivations et d'intégrations des équations) est égal au nombre d'éléments de stockage d'énergie dont les variables de stockage d'énergie sont linéairement indépendantes ;
- de dimension infinie (systèmes à paramètres distribués dans l'espace, la taille et/ou la déformation de l'élément est prise en compte),
ces équations régissent le comportement de phénomènes distribués dans l'espace, les variables d'énergie dépendant de la variable d'espace.

L'obtention d'un modèle d'un système physique (mise en équations) se fait en 3 étapes fondamentales :

1. Définir les variables indépendantes de stockage d'énergie (les variables d'état).
Le nombre de ces variables indépendantes détermine le nombre d'équations différentielles à écrire (la dimension du modèle).
Remarque : ces variables ne peuvent pas subir de discontinuité car cela impliquerait une discontinuité de l'énergie donc une puissance infinie non réalisable en pratique.
2. Définir les lois constitutives de chaque élément (relation d'entrée-sortie) ;
3. Utiliser les lois fondamentales (de connexion) des éléments du « circuit » (lois de conservation) pour écrire les équations du système.

2.1 Modélisation de systèmes électriques R, L et C

- Les variables de stockage de l'énergie :

U : tension (différence de potentiel) en [V] ;

Q : charge électrique en [Cb] ;

$i = \frac{dQ}{dt}$: courant électrique en [A] ;

$\Phi(t)$: flux magnétique en [Wb].

- Les circuits électriques simples sont constitués de résistances (R en [Ohm]), inductances (L en [H]) et condensateurs (C en [F]). Leurs modèles constitutifs linéaires (pas de saturation) sont donnés par :

$$U_R(t) = Ri_R(t), R > 0, \text{ élément dissipatif d'énergie} : P_R(t) = U_R i_R = R i_R^2(t)$$

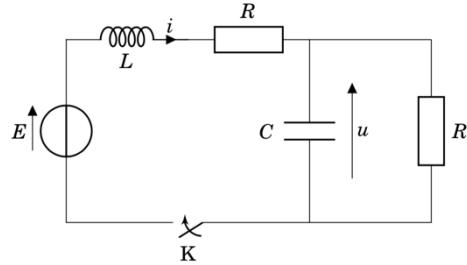
$$U_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, L > 0, \text{ élément de stockage d'énergie cinétique} : W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

$$U_L(t) = \frac{d\Phi}{dt} \text{ avec } \Phi(t) = Li(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dU_C}{dt}, C > 0, \text{ élément de stockage d'énergie potentielle} : W_C(t) = \frac{1}{2} C U_C^2(t)$$

- La mise en équations de systèmes électriques se base sur les deux lois fondamentales de conservation de Kirchhoff :

- La loi des mailles : la somme des tensions d'une maille est nulle, $\sum_i U_i = 0$;
- La loi des noeuds : la somme des courants à un noeud est nulle, $\sum_i i_i = 0$.

Exemple de mise en équation d'un circuit électrique simple :**Étape 1 : Variables d'état (de stockage d'énergie) :**Inductance L : variable i (courant)Condensateur C : variable u (différence de potentiel)L'inductance et le condensateur sont les seuls éléments de stockage d'énergie outre la source de tension E .**Étape 2 : lois constitutives :**Source de tension E : $E = \text{Constante } \forall i$ Interrupteur K : $\begin{cases} t < 0 : K \text{ ouvert}, K = 0, \text{courant} = 0 \\ t \geq 0 : K \text{ fermé}, K = 1, \text{tension aux bornes} = 0 \end{cases}$ Inductance L : $u_L = L \frac{di}{dt}$ Condensateur C : $i_C = C \frac{du}{dt}$ Résistance R en série avec inductance : $u_{RL} = Ri$ avec u_{RL} la tension aux bornes de R Résistance R en parallèle avec condensateur : $u = Ri_{RC}$ avec i_{RC} le courant circulant dans R .**Étape 3 : lois de connexion (conservation)**

2 variables d'état => 2 équations indépendantes à écrire :

Somme nulle des courants au nœud : $Ki = i_C + i_{RC}$ Somme nulle des tensions sur une maille : $E = u_L + u_{RL} + u + (1 - K)u_K$

Écriture des équations de conservation uniquement en fonction des variables d'état et des entrées exogènes :

$$Ki = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

$$E = KL \frac{di}{dt} + KRI + u + (1 - K)u_K$$

A la fin de cette 3^{ème} étape, le modèle ne fera intervenir que les paramètres des composants, les variables d'état et les entrées exogènes.

Pour aller plus loin, il est possible d'écrire un modèle pour chaque état de l'interrupteur K :

- Modèle pour $t < 0 : K \text{ ouvert}, K = 0$

$$i = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} \Rightarrow u(t) = u(t_1)e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \text{ à partir d'une condition initiale } u(t_1) \text{ à } t = t_1 < 0$$

$$E = u + u_K$$

- Modèle pour $t \geq 0 : K \text{ fermé}, K = 1$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri - u)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} + \frac{1}{C}i$$

Pour $K = 1$, modèle SISO avec l'entrée E et la sortie u (grandeur mesurée) :

- Modèle sous forme d'une équation différentielle du 2nd ordre (2 variables d'état) :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} \left(E - R \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) - u \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \frac{du}{dt} + \frac{2}{LC} u = \frac{1}{LC} E$$

- Modèle sous forme de représentation d'état :

$$\text{L'équation d'état : } \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\text{L'équation de sortie (la mesure) : } y = u = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix}.$$

2.2 Modélisation de systèmes mécaniques f, M et K

Pour les systèmes mécaniques en translation :

- Les variables de stockage de l'énergie et d'action des systèmes en translation :

x : position mécanique en [m] avec la position de référence x_0 ;

$v = \frac{dx}{dt}$: vitesse mécanique en [m/s] ;

F : force (variable d'action) en [N].

- Les circuits mécaniques sont composés de frottements (amortisseurs) (de coefficient de frottement f en [N.s/m]), d'objets en translation (de masse M en [kg]) et ressorts (de coefficient de raideur K en [N/m]). Leurs modèles constitutifs linéaires sont donnés par :

$$F_f(t) = fv(t), f > 0, \text{ élément dissipatif d'énergie : } P_f(t) = F_f v = f v^2(t)$$

$$F_M(t) = M \frac{dv}{dt}, M > 0 \quad \text{élément de stockage d'énergie cinétique : } W_M(t) = \frac{1}{2} M v^2(t)$$

$$F_K(t) = K(x(t) - x_0), K > 0, \text{ stockage d'énergie potentielle : } W_K(t) = \frac{1}{2} K(x - x_0)^2$$

- La mise en équations de systèmes mécaniques se base sur les trois lois fondamentales de Newton :

- En l'absence de force agissant sur un corps :
 - un corps immobile reste immobile
 - un corps se déplaçant à vitesse constante en ligne droite continue indéfiniment à le faire ;
- Si des forces sont appliquées à un objet (indéformable), celui-ci accélère par la loi suivante :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

avec $M > 0$ la masse de l'objet en [kg], \vec{v} sa vitesse en [m/s] et $\sum \vec{F}_{ext}$ la somme des forces extérieures appliquées à l'objet en [N]

- Action – réaction : les forces se produisent toujours par paires, en directions opposées et en grandeurs égales ; si le corps 1 agit avec la force F sur le corps 2, alors le corps 2 agit sur le corps 1 avec la même force, égale et de direction opposée.

Pour les systèmes mécaniques en rotation :

- Les variables de stockage de l'énergie et d'action des systèmes en rotation :

θ : angle mécanique en [rad] ;

$\Omega = \frac{d\theta}{dt}$: vitesse angulaire en [rad/s] ;

C : couple (variable d'action) en [Nm].

- Les circuits mécaniques en rotation sont composés de frottements (amortisseurs) (de coefficient de frottement f en [Nm.s]), d'objet en rotation (d'inertie J en [kg.m^2]) et de ressorts (de constante de raideur K en [Nm]). Leurs modèles constitutifs linéaires sont donnés par :

$$C_f(t) = f\Omega(t), f > 0 \quad \text{élément dissipatif d'énergie : } P_f(t) = C_f \Omega = f \Omega^2(t)$$

$$C_J(t) = J \frac{d\Omega}{dt}, J > 0, \quad \text{élément de stockage d'énergie cinétique : } W_J(t) = \frac{1}{2} J \Omega^2(t)$$

$$C_K(t) = K(\theta(t) - \theta_0), K > 0, \quad \text{stockage d'énergie potentielle : } W_K(t) = \frac{1}{2} K(\theta - \theta_0)^2$$

- La mise en équations de systèmes mécaniques se base sur les trois lois fondamentales de Newton :

- En l'absence de couple agissant sur un corps :
 - un corps immobile reste immobile
 - un corps en rotation à vitesse constante continue indéfiniment à le faire ;

- Si des couples sont appliquées à un objet (indéformable), son accélération angulaire est donnée par la loi suivante :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \sum C_{ext}$$

- Action – réaction : les couples se produisent toujours par paires, en sens opposées et en grandeurs égales ; si le corps 1 agit avec le couple C sur le corps 2, alors le corps 2 agit sur le corps 1 avec le même couple, égale et de sens opposé.

2.3 Moteur électrique à courant continu

Un moteur électrique est un dispositif qui permet de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique. A partir d'une tension électrique appliquée aux bobinages du moteur électrique, un mouvement mécanique de rotation (linéaire dans le cas d'un moteur électrique linéaire) est obtenu.

Les moteurs électriques sont utilisés dans de nombreuses applications pour obtenir une vitesse de rotation désirée (ventilateurs, turbines, perceuses, compresseurs, véhicules électriques, laminoirs...) ou le positionnement d'un dispositif mécanique (machines-outils, panneaux photovoltaïques, gouvernes d'avions, ouvertures de vannes, sièges électriques...).

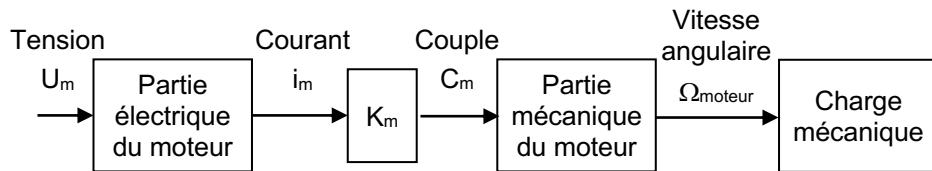


Figure A.1 – Représentation schématique d'un moteur électrique.

La figure A.1 donne la représentation schématique d'un moteur électrique. Sous l'hypothèse de non saturation du circuit magnétique du moteur et de linéarité, le modèle suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} U_m(t) &= R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m}{dt} + K_m \Omega_m(t) \\ J_m \frac{d\Omega_m}{dt} &= K_m i_m(t) - f_m \Omega_m(t) - C_{charge}(t) \\ \frac{d\theta_m}{dt} &= \Omega_m(t) \end{aligned}$$

Avec les variables :

- $U_m(t)$: tension appliquée au moteur en [V] ;
- $i_m(t)$: courant circulant dans les bobinages du moteur en [A] ;
- $\Omega_m(t)$: vitesse angulaire de l'axe de rotation du moteur en [rad/s] ;
- $\theta_m(t)$: position angulaire (modulo- 2π) de l'axe de rotation du moteur en [rad] ;
- $C_{charge}(t)$: couple appliqué au moteur par la charge utile du moteur en [Nm].

Et les paramètres (positifs supposés constants) :

- R_m : résistance électrique des bobinages du moteur en [Ohm] ;
- L_m : inductance des bobinages du moteur en [Henry] ;
- K_m : constante de couple du moteur en [Nm/A] = [V.s] ;
- J_m : inertie des parties mécaniques tournantes du moteur en [kg.m²] ;
- f_m : coefficient de frottements mécaniques visqueux en [Nm.s].

2.4 Modélisation de systèmes thermiques

Des analogies peuvent être faites entre le domaine électrique et le domaine thermique :

Grandeurs thermiques :

- Différence de Température [K]
- Flux de chaleur Φ [W]
- Densité de flux de chaleur $[W/m^2]$
- Conductivité thermique λ [$W/(m.K)$]
- Résistance thermique R_{th} [K/W]
- Capacité thermique $C_{th} = M.C_p$ [J/K]

Grandeurs électriques :

- Différence de potentiel [V]
- Courant I [A]
- Densité de courant J [A/m^2]
- Conductivité électrique σ [Ω^{-1}/m]
- Résistance électrique R [Ω]
- Capacité électrique C [F]

Chaleur spécifique – Chaleur massique d'un corps

Pour augmenter la température, T [K], d'un corps, il faut apporter une certaine quantité d'énergie Q [J ou calories] qui devra être d'autant plus grande que la masse, M [kg], du corps sera grande. Si la transformation est réalisée à pression constante :

$$dQ = M \cdot C_p \cdot dT$$

La quantité C_p ($J/(kg.K)$) représente la chaleur massique (ou chaleur spécifique). Cette quantité dépend du corps mais aussi de la température. Si C_p peut être considérée constante :

$$Q = M \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

La conduction thermique est un transfert thermique spontané d'une région de température élevée vers une région de température plus basse : la densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. En régime permanent et en une dimension, la loi de Fourier exprime la quantité de chaleur élémentaire dQ qui traverse en x une surface S d'épaisseur dx durant le temps dt :

$$dQ = -\lambda S \frac{dT}{dx} \cdot dt$$

Où dQ est l'énergie élémentaire en Joule ; λ est la conductivité thermique ($J.m^{-1}.K^{-1}.s^{-1}$ ou $W.m^{-1}.K^{-1}$) ; S est la section en m^2 ; dt le temps élémentaire en s ; dT/dx le gradient de température suivant x en $K.m^{-1}$. Le paramètre λ dépend de la température mais est le plus souvent considéré constant.

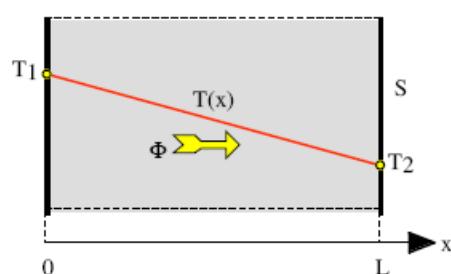
Le flux de chaleur en Watt est alors défini par :

$$\Phi[W] = \frac{dQ}{dt} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

Et la densité de chaleur en W/m^2 par : $\varphi = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{dT}{dx}$

Conductance et Résistance thermique – cas d'un mur

Soit un mur homogène d'épaisseur L , de section S , de conductivité thermique λ dont $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$:



Le flux de chaleur Φ qui traverse le mur est donné par :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

En régime permanent, le flux de chaleur est constant, d'où :

$$\Phi_0 = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

Le flux de chaleur est donc proportionnel à la différence de température entre les faces du mur. Le coefficient de proportionnalité représente la **conductance thermique** et la

résistance thermique du mur :

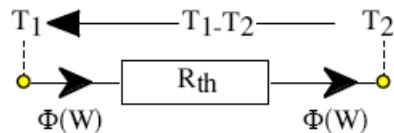
$$G_{th} \left[\frac{W}{K} \right] = \frac{\lambda S}{L} \quad \text{et} \quad R_{th} \left[\frac{K}{W} \right] = \frac{1}{G_{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

En régime permanent, la différence de température entre les deux faces est donnée par :

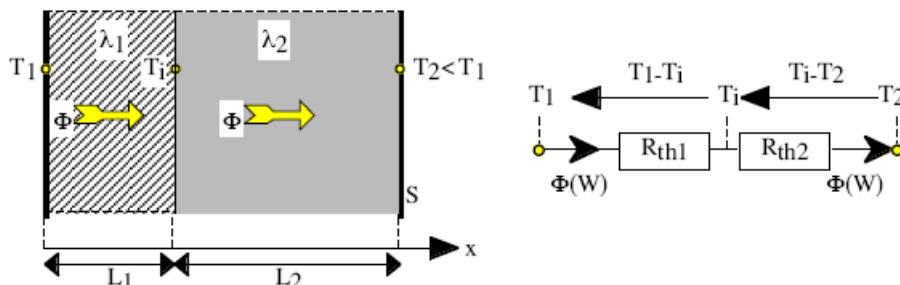
$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_0$$

Schémas thermiques en régime permanent

Il est possible de décrire la conduction thermique par des schémas thermiques analogues à ceux utilisés en électricité :



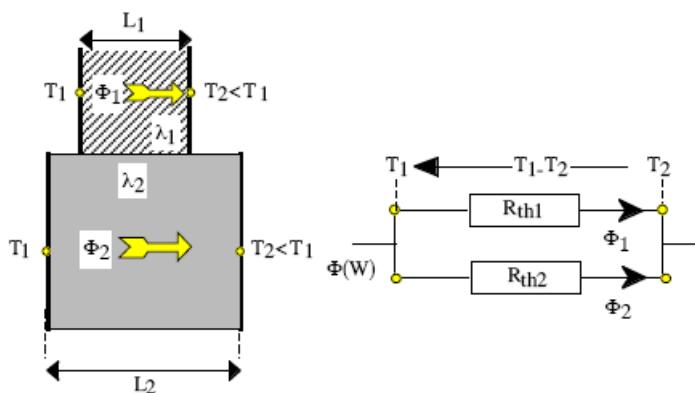
Association série : Considérons un mur de section S composé de deux matériaux différents. En régime permanent, un flux de chaleur Φ_0 circule dans le sens des températures décroissantes.



Soit T_i la température intérieure du mur, nous avons : $\Phi_0 = \frac{T_1-T_i}{R_{th1}}$ et $\Phi_0 = \frac{T_i-T_2}{R_{th2}}$, il vient :

$$T_1 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2})\Phi_0$$

Association parallèle : Considérons une fenêtre au milieu d'un mur. Une représentation partielle est donnée ci-dessous. Deux flux de chaleur existent : un par la fenêtre, l'autre par le mur. Nous avons :



$$\Phi_{10} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}}$$

$$\Phi_{20} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}}$$

Le flux total Φ_0 est donné par :

$$\Phi_0 = \Phi_{10} + \Phi_{20} = \left(\frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} \right) (T_1 - T_2)$$

$$= (G_{th1} + G_{th2})(T_1 - T_2)$$

Équation de la chaleur – Cas général

Un bilan d'énergie, et l'expression de la loi de Fourier conduit à l'équation générale de conduction de la chaleur dans un corps homogène :

$$\lambda \Delta T + P = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

Où : λ ($J.m^{-1}.K^{-1}$ ou $W.m^{-1}.K^{-1}$) est la conductivité thermique du corps, ΔT désigne le Laplacien de la température, P ($W.m^{-3}$) est l'énergie produite au sein même du corps, ρ ($kg.m^{-3}$) est la masse volumique du corps, et C_p ($J.kg^{-1}.K^{-1}$) est la chaleur spécifique massique du matériau.

Dans le cas unidimensionnel, on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\lambda} P$$

Où $\frac{\rho C_p}{\lambda}$ est la constante de diffusion thermique D_{th} ($s.m^{-2}$) du corps.

Système à température quasi-uniforme

On néglige ici les variations spatiales de température à l'intérieur du système considéré. Cette hypothèse est d'autant plus réaliste que les flux échangés avec l'extérieur sont faibles, que le système

est de petite taille, et enfin que sa conductivité thermique est élevée (en effet, en vertu de la loi de Fourier, pour une densité de flux donnée, le gradient de température est d'autant plus faible que la conductivité est grande). On parlera alors de système à température quasi-uniforme. Avec cette approximation, on peut définir une température T pour le système Σ , et sa variation d'énergie interne pendant un intervalle de temps élémentaire dt s'écrit alors :

$$dU = M C_p dT$$

Si par ailleurs on suppose que le système Σ , ayant une surface d'échange S , est immergé dans un fluide à la température T_f , le flux de chaleur reçu par Σ durant l'intervalle de temps dt s'écrit :

$$\delta Q = \lambda S (T_f - T) dt$$

Le système est considéré incompressible, indéformable et immobile. Compte tenu du premier principe de la thermodynamique, ce système échange avec le milieu extérieur, au cours d'un temps dt , la chaleur dQ et le travail utile (c'est à dire non mécanique) dW_u :

$$dU = \delta Q + \delta W_u$$

Il vient pour le système sous les hypothèses énoncées :

$$M C_p \frac{dT}{dt} = \lambda S (T_f - T) + \dot{W}_u$$

La constante de temps thermique de ce système est donnée par : $\tau = \frac{M C_p}{\lambda S}$. L'équation différentielle du 1^{er} ordre qui régit l'évolution de la température est :

$$\tau \frac{dT}{dt} = (T_f - T) + \frac{1}{\lambda S} \dot{W}_u$$

avec $\dot{W}_u = \frac{dW_u}{dt}$ en J/s = W, λ en W.m⁻².K⁻¹ et en S = m² d'où $(1/(\lambda S)) . dW_u/dt$ en K et $1/(\lambda S)$ en K/W.

2.5 Modélisation de systèmes hydrauliques

Les systèmes hydrauliques sont par nature non-linéaires dans leurs comportements, les paramètres dépendent le plus souvent des variables caractéristiques (débits, volumes, pressions) qui les gouvernent. Ce sont donc des systèmes très complexes à modéliser.

On modélise ici, de manière très simplifiée, les systèmes hydrauliques dont les effets liés à l'espace peuvent être négligés (le temps de transport du fluide est négligé). Ce niveau de modélisation est utile à la mise en œuvre de commandes de ces systèmes. Les approximations (non données ici) qui permettent d'aboutir à ces modèles nécessitent la mise en œuvre par la suite de commandes particulièrement robuste aux incertitudes de modélisation.

- Les variables de stockage de l'énergie et d'action sont :

V : volume en [m³] (anologue à une quantité de charges électriques) ;

$Q = \frac{dV}{dt}$: débit en [m³/s] (anologue à un courant électrique) ;

P : pression (variable d'action) en [N/m² = Pa] (anologue à un potentiel électrique).

- Pour la modélisation en vue de la commande, les circuits hydrauliques seront décomposés en éléments de perte de charge (frottements $R(Q)$ en [N.s/m⁵]), en éléments de transport de fluide (d'inertie $I(Q)$ en N.s²/m⁵ = kg / m⁴) et en capacités de stockage (C en [m⁵/N]). Leurs modèles constitutifs sont donnés par :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = R(Q)Q, R(Q) > 0 \forall Q \text{ (anologue à une résistance électrique)}$$

élément dissipatif d'énergie, puissance P_u dissipée : $P_u(t) = \frac{\Delta P(t)}{Q(t)} = R(Q).Q^2(t)$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{d}{dt}(I(Q)Q) = \frac{d\Phi_I}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi_I = I(Q)Q$$

élément de stockage d'énergie cinétique : $W_I(t) = \int_0^t P_u(\tau) d\tau = \int_0^t Q(\tau) \frac{d}{dt}(I(Q)Q) d\tau$

cas linéaire : $I(Q) = I_0 = \text{Constante}$, $\Delta P = P_1 - P_2 = I_0 \frac{dQ}{dt}$, $W_I(t) = \frac{1}{2} I_0 Q^2$

$$V(t) = C(\Delta P(t))\Delta P(t) \quad \text{et} \quad Q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(C(\Delta P(t))\Delta P(t))$$

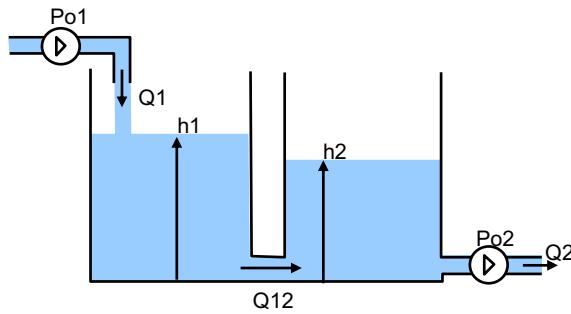
élément de stockage d'énergie potentielle : $W_C(t) = \int_0^t P_u(\tau)d\tau = \int_0^t Q(\tau) \frac{d}{dt}(I(Q)Q)d\tau$

cas linéaire : $C(\Delta P(t)) = C_0$, $V(t) = C_0\Delta P(t)$, $Q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = C_0 \frac{d\Delta P}{dt}$, $W_C(t) = \frac{1}{2}C_0\Delta P^2 = \frac{1}{2}V.\Delta P$

- La mise en équations de systèmes mécaniques se base sur deux lois de conservation :

- La loi des mailles hydrauliques : la somme des pressions d'une maille est nulle, $\sum_i P_i = 0$;
- La loi des nœuds hydrauliques : la somme des débits à un nœud est nulle, $\sum_i Q_i = 0$.

Exemple d'application : Systèmes à deux cuves



- Les débits Q_1 et Q_2 sont contrôlés sans retard, respectivement, par les pompes $Po1$ et $Po2$.

- Les surfaces des réservoirs seront notées, resp., S_1 et S_2 .

- L'orifice, de faible longueur, entre les deux réservoirs peut être modélisé comme un élément dissipatif ayant un écoulement de type turbulent, on montre que la valeur de l'élément dissipatif $R(Q_{12})$ est alors donné par : $R(Q_{12}) = \alpha\rho|Q_{12}|$ avec la densité ρ en kg/m³.

Les pressions liées aux hauteurs h_1 et h_2 de fluide dans les cuves sont $P_1 = \rho gh_1$ et $P_2 = \rho gh_2$.

La différence de pression aux deux extrémités de l'orifice entre les deux réservoirs est donnée par :

$$\Delta P_{12} = P_1 - P_2 = R(Q_{12})Q_{12}$$

$$\text{Il vient : } P_1 - P_2 = \rho gh_1 - \rho gh_2 \quad \text{et} \quad R(Q_{12})Q_{12} = \alpha\rho|Q_{12}|Q_{12} = \alpha\rho.\text{signe}(Q_{12})Q_{12}^2$$

$$\text{D'où l'expression : } Q_{12} = \text{signe}(h_1 - h_2)\sqrt{g/\alpha}\sqrt{|h_1 - h_2|}.$$

Les variables de stockage de l'énergie de ce dispositif sont les volumes V_1 et V_2 de stockage d'énergie potentielle dans chacune des cuves. Ces volumes sont reliés aux hauteurs de fluide par :

$$V_1 = S_1 h_1 \quad \text{et} \quad V_2 = S_2 h_2$$

La loi de conservations des débits ($\sum_i Q_i = 0$) permet d'écrire pour chaque réservoir :

$$\text{Pour le réservoir 1 : } Q_1 = \frac{dV_1}{dt} - Q_{12}$$

$$\text{Pour le réservoir 2 : } Q_{12} = \frac{dV_2}{dt} - Q_2$$

D'où, en prenant en compte les modèles constitutifs, le modèle à deux états (deux variables de stockage de l'énergie) est donné par :

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_{12} = Q_1 - \text{signe}(h_1 - h_2)\sqrt{g/\alpha}\sqrt{|h_1 - h_2|}$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_{12} - Q_2 = \text{signe}(h_1 - h_2)\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\sqrt{|h_1 - h_2|} - Q_2$$

Le modèle obtenu est non-linéaire puisqu'il apparaît la racine carrée de la différence des deux variables d'état (h_1 et h_2). L'utilisation des outils d'analyse des systèmes linéaires nécessitera d'approcher ce modèle non-linéaire par un modèle linéaire (modèle linéarisé tangent) autour des points de fonctionnement désirés (même procédure que pour un développement limité au premier ordre d'une fonction).

B. Signaux à temps continu et temps discret – Échantillonnage

1. Signal à temps continu

Un **signal réel à temps continu** $y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, existe à tout instant t . Il peut présenter des discontinuités mais est d'énergie finie :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt < \infty$$

Le signal réel $y(t)$ est dit :

- **Causal** si : $y(t) = 0, \forall t < 0$
- **Strictement causal** si : $y(t) = 0, \forall t \leq 0$

2. Signal échantillonnable à temps discret

Un signal échantillonnable est composé d'une suite d'impulsions de Dirac discrètes dont les hauteurs à chaque instant d'échantillonnage sont données par les valeurs du signal à temps continu aux instants d'échantillonnage, comme le montre la figure B.1. Ce signal est d'énergie finie. L'instant d'apparition d'une impulsion de Dirac correspond à l'instant d'échantillonnage du signal à temps continu. En pratique, l'intervalle de temps entre deux instants d'échantillonnage est pris constant. On parle alors de période d'échantillonnage T_e et de temps discret.

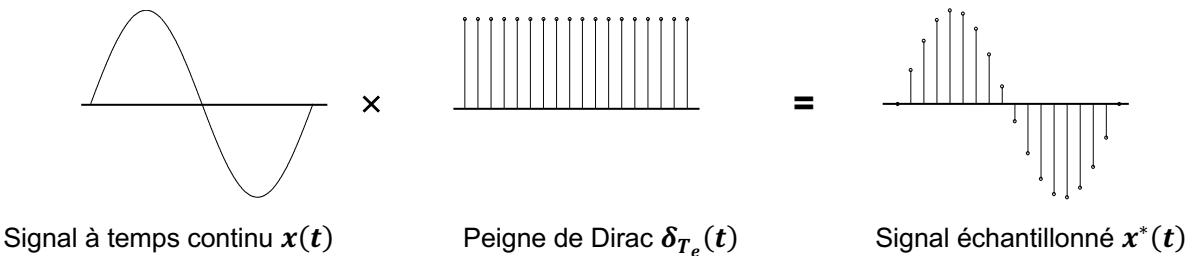


Figure B.1 – Signal échantillonnable appliquée à un signal à temps continu.

La figure B.2 donne une représentation schématique d'un échantillonneur.

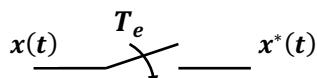


Figure B.2 – Représentation schématique d'un échantillonneur.

L'impulsion de Dirac discrète est définie par :

$$\delta(kT_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

et le peigne de Dirac δ_{T_e} de période T_e par :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

Le signal échantillonnable $x^*(t)$ prend les valeurs prises par le signal à temps continu $x(t)$ aux instants discrets d'échantillonnage $t = kT_e$. Le lien entre ces deux signaux est donné par :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

où $\delta(t - kT_e)$ est l'impulsion de Dirac discrète à l'instant $t = kT_e$, $k \in \mathbb{N}^+$ pour les signaux causaux.

Le signal $x^*(t)$ n'existe qu'aux instants $t = kT_e$. Une notation simplifiée sera utilisée :

$$x(k) = x^*(t)$$

3. Théorème d'échantillonnage de Shannon et repliement de spectre

Il est nécessaire de savoir dans quelle mesure le signal échantillonné $x^*(t)$ représente fidèlement le signal continu $x(t)$ et s'il est possible de reconstruire ce dernier à partir du signal échantillonné. Le théorème de Shannon permet de répondre à cette question.

Théorème de Shannon : Soit un signal échantillonné $x^*(t)$ obtenu par échantillonnage à la fréquence $f_e = 1/T_e$ d'un signal à temps continu $x(t)$. Le signal à temps continu $x(t)$ peut être reconstruit exactement à partir du signal échantillonné $x^*(t)$ si la fréquence maximum f_{max} du spectre de $x(t)$ est inférieure à $f_e/2$.

◊

Ébauche de démonstration : La démonstration se fait simplement en comparant les spectres fréquentiels des signaux $x(t)$ et $x^*(t)$. Calculons le spectre du signal échantillonné :

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j\omega kT_e} \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$X^*(jf) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{f_e}\right) e^{-j2\pi kf_e}$$

Le spectre du signal échantillonné est donc bien f_e -périodique :

$$X^*(f + n f_e) = X^*(f), \quad n \in N$$

◊

La relation précédente permet de mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre (*aliasing* en anglais) qui apparaît lorsque la condition du théorème de Shannon n'est pas remplie. La figure B.3 en donne une représentation schématique.

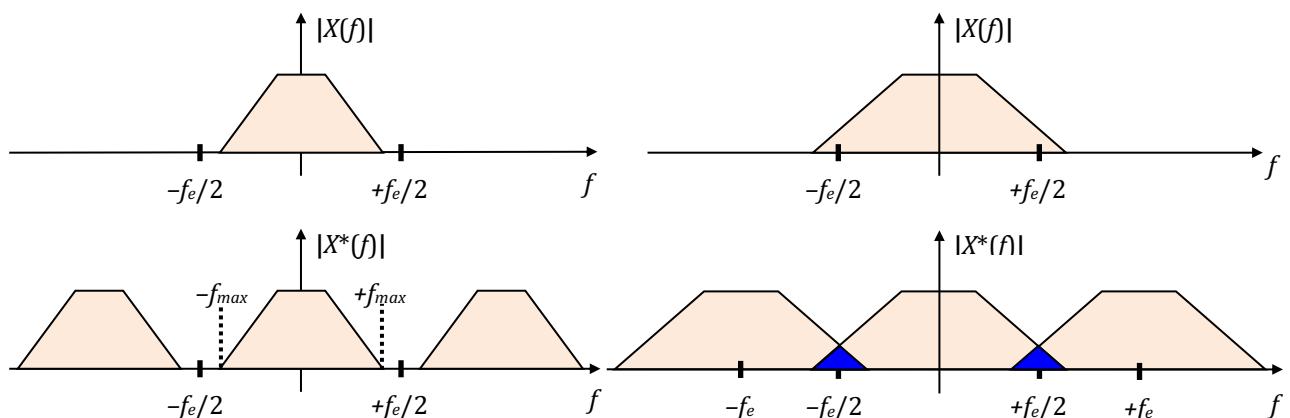
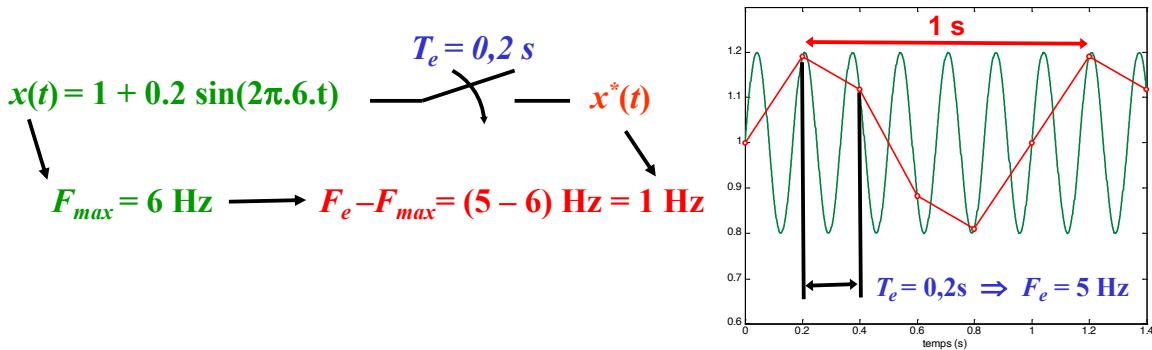


Figure B.3 – Représentation schématique du phénomène de repliement de spectre.
Figures de gauche : pas de repliement de spectre car f_{max} du spectre du signal $x(t)$ inférieur à $f_e/2$
Figures de droite : repliement de spectre car f_{max} du spectre du signal $x(t)$ supérieur à $f_e/2$

Ce phénomène fréquentiel se retrouve dans le domaine temporel. Prenons l'exemple d'un signal $x(t)$ composé de la somme d'une composante continue de valeur 1 et d'une fonction sinusoïdale d'amplitude 0.2 et de fréquence 6 Hz échantillonné à une fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz d'où $T_e = 0.2$ s :

$$x(t) = 1 + 0.2 \sin(2\pi \cdot 6 \cdot t) \quad \text{d'où } f_{max} = 6 \text{ Hz.}$$



Le signal échantillonné $x^*(t)$ est composé de la composante continue de valeur 1 et d'un signal alternatif de fréquence 1 Hz.

En pratique, les signaux réels sont rarement à bande limitée. Afin d'éviter le phénomène de repliement de spectre qui altère le signal échantillonné par rapport au signal à temps continu, il est nécessaire d'utiliser des filtres à temps continu, dits *filtres anti-repliement de spectre*, avant l'échantillonnage.

4. Filtre anti-repliement de spectre

Le choix d'un filtre anti-repliement est fait de telle façon qu'à la fréquence d'échantillonnage f_e fixée, les composantes spectrales du signal échantillonné soient négligeables pour des fréquences supérieures à $f_e/2$. Le terme « négligeable » sera défini en fonction du domaine d'application.

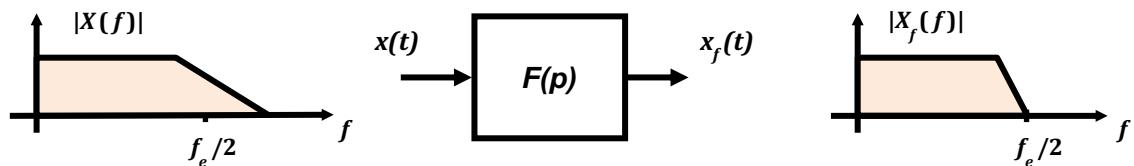


Figure B.4 – Filtrage d'un signal $x(t)$ par un Filtre $F(p)$ à temps continu afin d'éliminer les composantes spectrales de $x(t)$ supérieures à $f_e/2$.

En pratique, on utilise des filtres de type passe-bas d'ordre 3 à 6 ayant un gain unitaire dans la bande passante. Ces filtres sont, en général, constitués de cellules du premier ordre et du second ordre en cascade. Les filtres de type Butterworth sont le plus souvent utilisés car le gain de ces filtres ne présente pas d'ondulation dans la bande passante.

L'introduction du filtrage d'un signal produit un déphasage entre le signal initial et le signal filtré. Ce filtrage devra donc être pris en compte dans le modèle du système pour sa commande (dégradation de la marge de phase).

Le déphasage introduit par le filtre anti-repliement sera le plus souvent pris en compte par l'ajout d'un retard pur au modèle du système. Ce retard pur est donné par le temps de groupe du filtre (i.e. le temps que met le signal à « traverser » le filtre) dans la bande passante du filtre. Le temps de groupe est défini de la manière suivante :

$$t_g = -\frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega}$$

où $\varphi(\omega)$ est le déphasage introduit par le filtre en fonction de la pulsation ω du signal à l'entrée du filtre.

4.1 Modélisation du filtre anti-repliement de spectre pour le domaine à temps discret

Le filtre sera choisi de telle sorte que le gain du filtre puisse être approché par :

Pour : $\omega \geq \omega_0$: $|F(\omega)| \approx 0$

Pour : $\omega < \omega_0$: $|F(\omega)| \approx 1$ avec un temps de groupe constant t_{g0} .

d'où : $|F(j\omega)|_{\omega < \omega_0} \approx 1 \cdot e^{-j\omega t_{g0}}$ (modèle d'un retard pur).

4.2 Exemple d'un filtre anti-repliement de type Butterworth d'ordre 3

La fonction de transfert d'un filtre de Butterworth d'ordre 3 est donnée par :

$$F(\Omega) = \frac{1}{(1 + \Omega)(1 + \Omega + \Omega^2)}$$

avec $\Omega = \frac{j\omega}{\omega_0}$ et ω_0 la pulsation de coupure du filtre.

Le gain de ce filtre est donné par $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^6}}$

et sa phase par : $\varphi(\omega) = \arg(F(\Omega)) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \text{atan}\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) - \pi |_{\frac{\omega}{\omega_0} > 1}$

d'où un temps de groupe $t_g(\omega) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ qui peut être approché dans la bande passante du filtre par :

$$\omega \ll \omega_0 : \quad t_g(\omega) \approx t_{g0} = \frac{2}{\omega_0}$$

Ce filtre anti-repliement de spectre pourra être modélisé par un retard pur de valeur t_{g0} . Si la période d'échantillonnage T_e est prise égale à t_{g0} , le retard pur sera alors d'une période d'échantillonnage.

En pratique, il est courant de choisir la période d'échantillonnage et à partir de cette valeur d'en déduire la pulsation de coupure du filtre de manière à obtenir un modèle simple de ce filtre.

4.3 Utilité du sur-échantillonnage

Dans le cas où la période d'échantillonnage désirée serait très basse, les filtres analogiques nécessaires seraient de volume très important et coûteux. Pour éviter cela, on choisit une fréquence d'échantillonnage plus élevée afin d'obtenir un volume acceptable des filtres analogiques anti-repliement.

Cette fréquence d'échantillonnage sera choisie multiple entière de la fréquence initialement désirée afin, en ne gardant qu'un échantillon sur le multiple entier choisi, d'obtenir le signal à la fréquence désirée.

Avant de réaliser ce sous-échantillonnage, on filtre, à l'aide d'un filtre numérique anti-repliement, le signal échantillonné à fréquence élevée. La figure B.5 donne une représentation schématique de ce double filtrage anti-repliement.

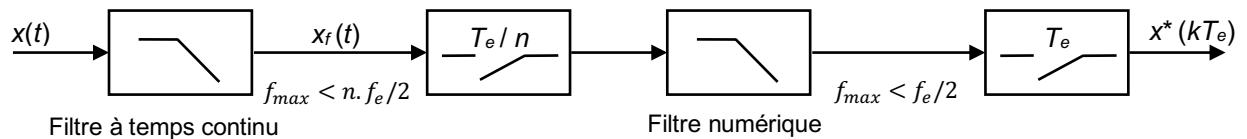


Figure B.5 – Double filtrage, analogique et numérique, anti-repliement de spectre dans le cas d'un échantillonnage final à basse fréquence.

5. Modélisation du convertisseur analogique numérique (CAN)

Le convertisseur analogique numérique permet la conversion d'une tension électrique v_{in} dans une plage donnée $[V_{min}, V_{max}] \subset \mathbb{R}$ à support continu vers un nombre N_{CAN} qui est l'image numérique de la tension échantillonnée dans une plage $[N_{min}, N_{max}] \subset \mathbb{Z}$ à support discret (quantification).

Lorsque la tension minimale V_{min} à l'entrée du CAN est 0, on parle de CAN unipolaire sinon de CAN bipolaire lorsque $V_{min} = -V_{max}$. Suivant le cas, le nombre N_{CAN} délivré par le CAN sera un nombre entier codé sur un nombre binaire de N_{bits} appartenant à la plage $[0, 2^{N_{bits}} - 1]$ pour un convertisseur unipolaire, et à la plage $[-2^{N_{bits}-1}, 2^{N_{bits}-1} - 1]$ pour un convertisseur bipolaire.

Dans le domaine numérique, le pas de quantification prend la valeur 1 puisque N_{CAN} est un entier relatif. Dans le domaine analogique, le pas de quantification du CAN sera donné par le rapport :

$$Q_{CAN} = \frac{V_{max} - V_{min}}{N_{max} - N_{min}} = \frac{\Delta V_{in}}{2^{N_{bits}} - 1}$$

On caractérise le CAN par le nombre de bits N_{bits} du nombre N_{CAN} obtenu après conversion. Typiquement, le nombre de bits N_{bits} prend les valeurs 8, 10, 12, 16 ou 24.

Le temps de conversion mis par le CAN pour convertir le signal analogique en un signal discret sera noté T_{CAN} . Le plus souvent, ce temps de conversion peut être négligé pour l'élaboration de la commande, sinon ce retard pur devra être pris en compte.

Le modèle du CAN prendra donc en compte son gain de conversion, la saturation liée à sa plage d'utilisation, l'effet de quantification et son temps de conversion :

- Gain du CAN : $G_{CAN} = \frac{N_{max} - N_{min}}{V_{max} - V_{min}} = \frac{2^{N_{bits}} - 1}{\Delta V_{in}}$
- Bruit de quantification : Q_{CAN}
- Saturation : $(N_{CAN})_{sat} = \min(N_{max}, \max(N_{min}, N_{CAN}))$
- Temps de conversion : $(N_{CAN}(t))_{out} = N_{CAN}(t - T_{CAN})$

Le modèle complet du CAN sera donné par :

$$N_{CAN}(t) = \min\left(N_{max}, \max\left(N_{min}, \text{Entier}(G_{CAN} v_{in}(t - T_{CAN}))\right)\right)$$

Le calculateur de la commande reçoit en entrée le nombre $N_{CAN}(t)$ image numérique de la grandeur analogique correspondante. En pratique, soit la commande prend en compte le gain introduit par la conversion, soit le calculateur multiplie le nombre $N_{CAN}(t)$ par l'inverse du gain de conversion pour obtenir un nombre dans la même échelle que la grandeur analogique.

La synthèse de l'algorithme de commande devra prendre en compte les effets indésirables introduits par le CAN : la quantification (ajout d'un bruit de mesure), la saturation, le temps de conversion.

En pratique, les composants physiques réalisant la conversion analogique numérique contiennent également un échantillonneur.

6. Reconstitution du signal échantillonné en un signal à temps continu (CNA et Bloqueur)

Le convertisseur numérique analogique (CNA) a pour rôle de convertir la commande $u(k)$ déterminée à l'instant $t = kT_e$ sous la forme d'un nombre $N_{CNA} \in [N_{min}, N_{max}] \subset \mathbb{Z}$ en une tension analogique dans une plage donnée $v_{CNA} \in [V_{min}, V_{max}] \subset \mathbb{R}$.

Le CNA sera défini par son nombre de bits N_{bits} (typiquement 8, 10, 12, 16 ou 24) et sa plage de tension de sortie $[V_{min}, V_{max}]$. Le temps de conversion du CNA sera le plus souvent négligé.

Le modèle du CNA prendra en compte son gain de conversion et la saturation liée à sa plage d'utilisation :

- Gain du CNA : $G_{CNA} = \frac{V_{max}-V_{min}}{N_{max}-N_{min}} = \frac{\Delta V_{in}}{2^{N_{bits}}-1}$
- Saturation : $(N_{CNA})_{sat} = \min(N_{max}, \max(N_{min}, N_{CNA}))$

Le modèle complet du CNA sera donné par :

$$v_{CNA}(t) = G_{CNA} \cdot \min(N_{max}, \max(N_{min}, N_{CNA}(t)))$$

Grâce au CNA, un signal électrique physique est obtenu à chaque pas d'échantillonnage. L'observation du spectre d'un signal échantillonné (figure B.3) montre qu'il suffit d'appliquer à ce dernier un filtre idéal de gain unité et de bande passante $f_e/2$ pour obtenir le signal à temps continu initial. Ce filtre idéal n'est pas causal, il n'est donc pas réalisable physiquement.

En pratique, on est donc amené à mettre en œuvre une reconstruction approchée du signal à temps continu. La solution la plus fréquemment utilisée est le Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ, Zero Order Holder en anglais). Un Bloqueur d'Ordre Un est plus rarement utilisé.

6.1 Bloqueur d'Ordre Zéro

La réponse impulsionnelle d'un Bloqueur d'Ordre Zéro est donnée par la figure B.6.

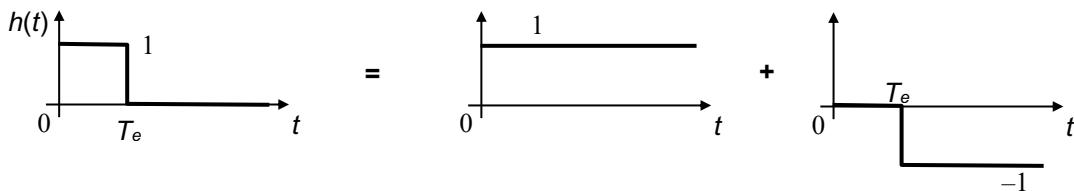


Figure B.6 – Réponse impulsionnelle d'un Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ).

Le passage du signal échantillonné par cet élément correspond à effectuer le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle du BOZ et du signal $x^*(t)$. Le résultat obtenu est le maintien pendant la période d'échantillonnage de la valeur prise aux instants d'échantillonnage par le signal $x^*(t)$ comme le montre la figure B.7.

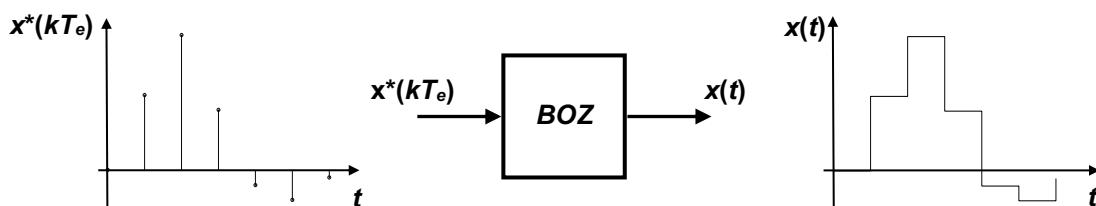


Figure B.7 – Reconstruction d'un signal continu à partir d'un signal échantillonné à la fréquence $f_e = 1/T_e$ à l'aide d'un Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ).

La sortie à temps continu $x(t)$ du BOZ en fonction de l'entrée échantillonnée $x^*(kT_e)$ est donnée par :

$$x(t) = x^*(kT_e) \quad \text{pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e[$$

La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'un BOZ est donnée par :

$$\text{Laplace}[h_{BOZ}(t)] = H_{BOZ}(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

6.2 Bloqueur d'Ordre Un

Le Bloqueur d'Ordre Un (BOU) effectue une prédiction linéaire du signal à temps continu entre deux instants d'échantillonnage. La sortie à temps continu $x(t)$ du **BOU** en fonction de l'entrée échantillonnée $x^*(kT_e)$ est donnée par :

$$x(t) = x^*(kT_e) + \frac{x^*(kT_e) - x^*((k-1)T_e)}{T_e}(t - kT_e) \quad \text{pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e[$$

La fonction de transfert d'un Bloqueur d'Ordre Un est donnée par :

$$\text{Laplace}[h_{BOU}(t)] = H_{BOU}(p) = \left(\frac{1 - e^{-T_e p}}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{T_e} + p\right)$$

7. Choix de la période d'échantillonnage

Le choix optimal de la période d'échantillonnage d'un système à temps continu dépend de critères contradictoires. On pourrait penser qu'il suffit de prendre une fréquence d'échantillonnage très grande (i.e. une période très petite) pour se rapprocher d'un fonctionnement en temps continu mais cela nécessite des calculateurs très rapides, qui peuvent être très couteux, et des problèmes de précision numérique lors des calculs surviennent. Un compromis doit être trouvé. En pratique, on cherchera le plus souvent à prendre une période d'échantillonnage la plus grande possible (i.e. une fréquence la plus petite possible) afin de réduire le coût du calculateur et la charge de calcul de celui-ci.

Les critères de choix de la période d'échantillonnage seront différents suivant la nature de l'algorithme implanté. S'il s'agit d'implanter un filtre (sans bouclage, feedback), le critère de gain sera le plus souvent suffisant. S'il s'agit d'implanter la commande d'un système asservi, plusieurs critères pourront être nécessaires et le plus contraignant sera choisi. Ces critères pourront faire intervenir les performances dynamiques désirées (temps de réponse en boucle fermée) mais aussi la garantie des marges de la stabilité du système bouclé.

7.1 Critère de Shannon

Avant tout, le critère de Shannon doit être vérifié afin d'éviter les artefacts liés au repliement de spectre. Pour cela, la fréquence d'échantillonnage prend une valeur supérieure à celle de la fréquence de coupure des filtres anti-repliement de spectre.

7.2 Critère de Gain

Le critère de Gain est basé sur le principe qu'à partir des fréquences où le gain du système (du filtre) échantillonné est très petit, il peut être considéré comme nul (négligeable) et son effet n'a plus à être pris en compte. Ce critère s'applique principalement aux systèmes de type passe-bas d'ordre supérieur à 2 afin d'avoir une atténuation suffisamment rapide du gain lorsque la fréquence augmente.

Énoncé du Critère de Gain :

$\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$ est telle que pour $\omega \geq \omega_{max}$ le Gain du système est inférieur à G_{min} .

Avec typiquement, $G_{min} \leq \frac{1}{10000} = -80dB$.

◊

Par exemple, pour le filtre passe-bas : $F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{3} + 1\right)^3}$, il vient pour $\omega \gg 3 \text{ rad. s}^{-1}$: $|F(j\omega)| \approx \left(\frac{3}{\omega}\right)^3$

d'où $|F(j\omega_{max})| \leq G_{min}$ pour $\omega_{max} \geq \frac{3}{(G_{min})^{\frac{1}{3}}} = 64.6 \text{ rad/s}$

et donc $T_e < 0.0486 \text{ s}$ permet de respecter le critère de gain avec $G_{min} \leq \frac{1}{10000} = -80dB$.

7.3 Critère de Phase

Le critère de Phase définit une période d'échantillonnage maximale qui permet de garantir le suivi correct de la variation de phase des pôles et zéros les plus rapides du système à temps continu échantillonné. Ce critère est bien adapté aux systèmes asservis car pour ces systèmes la phase est

directement liée à la stabilité du système bouclé. En particulier pour un correcteur, la phase de celui-ci doit être correctement restituée après échantillonnage au moins une décade fréquentielle au-delà de son pôle ou zéro le plus rapide.

Énoncé du Critère de Phase :

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} \geq 10^{N_{décades}} \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|$$

$$\text{ou } T_e \leq \frac{\pi}{10^{N_{décades}} \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|}$$

Avec typiquement, $N_{décades} = 2$.

◊

Avec ce choix, il vient : $\omega_{max} > 100 \times |\text{pôle ou zéro le plus rapide du système}|$.

Par exemple, pour un pôle ayant pour module 3 rad/s, il vient : $T_e \leq \frac{\pi}{100 \times 3} = 0,0105 \text{ s.}$

7.4 Précision numérique

La précision numérique des calculs que devra faire le calculateur est aussi un critère de choix. En effet, à un pôle réel à temps continu p_0 correspond un pôle z_0 en temps discret par la relation suivante :

$$z_0 = e^{p_0 T_e}$$

il vient la relation suivante entre la sensibilité de l'un par rapport à l'autre vis-à-vis de la période d'échantillonnage :

$$\left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right| = \frac{1}{|p_0| T_e} \left| \frac{\Delta z_0}{z_0} \right| = \frac{1}{|\ln(z_0)|} \left| \frac{\Delta z_0}{z_0} \right|$$

Cette relation montre que la sensibilité de la valeur de p_0 (rapport $\left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right|$) à l'implantation du pôle z_0 est d'autant plus grande que la période d'échantillonnage T_e est petite.

Par exemple, prenons un pôle $|p_0| = 10 \text{ rad/s}$ d'une fonction de transfert à temps continu et une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ ms}$. Nous obtenons $1/|p_0 T_e| = 100$. Ainsi, avec une précision numérique d'implantation $\left| \frac{\Delta z_0}{z_0} \right|$ de 1 % du pôle z_0 à temps discret correspondra à une incertitude $\left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right|$ de 100 % sur le pôle à temps continu, ce qui n'est pas acceptable.

En pratique, on choisira la précision d'implantation $\left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right|$ désirée du pôle à temps continu, et on en déduira la précision nécessaire en temps discret Δz_0 en fonction de la période d'échantillonnage T_e :

$$\Delta z_0 = \left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right| \cdot |p_0| \cdot |z_0| \cdot T_e = \left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right| \cdot |p_0| \cdot |e^{p_0 T_e}| \cdot T_e = \left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right| \cdot |\ln(z_0)| \cdot z_0$$

Par exemple, pour une précision d'implantation désirée de $\left| \frac{\Delta p_0}{p_0} \right| = 5\% = 0,05$ d'un pôle $|p_0| = 10 \text{ rad/s}$, avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ ms}$, il vient $\Delta z_0 = 0,000495$. C'est la précision minimum avec laquelle les pôles du filtre à temps discret devront être implantés (idem pour les zéros de la fonction de transfert).

On complémente du choix du nombre de chiffres significatifs, les fonctions de transfert devront être implantées sous forme factorisée sinon le nombre de chiffres significatifs devra être beaucoup plus élevé. Voir le **chapitre Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur** pour la procédure d'implantation qui tient compte de la précision numérique des calculateurs.

On résume les principaux avantages/inconvénients d'une petite période d'échantillonnage :

- Avantage : Meilleur suivi de l'évolution du système (domaine fréquentiel étendu)
- Inconvénients :
 - Calculateur rapide \Rightarrow coût élevé
 - Problèmes de précision numérique \Rightarrow nombre important de chiffres significatifs nécessaires \Rightarrow calculateur précis \Rightarrow augmentation du coût.

C. Systèmes dynamiques causaux linéaires invariants et Fonctions de Transfert

1. Signaux et systèmes causaux

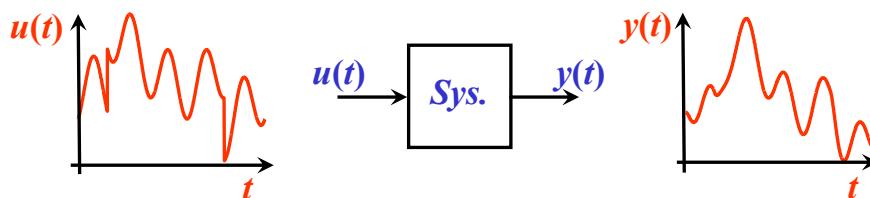
Soit $u(t)$ un signal temporel de la variable de temps $t \in \mathbb{R}$. On dira de ce signal qu'il est :

- **Causal** si $u(t) = 0$ pour tout $t < 0$
- **Strictement Causal** si $u(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$

Un système met en relation des signaux. Il sera caractérisé par

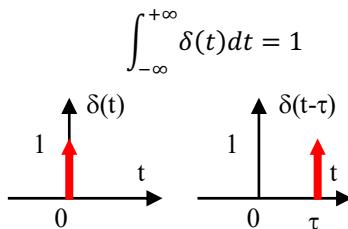
- son nombre M d'entrées $u_i(t), \forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq M$;
- son nombre P de sorties $y_i(t), \forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq P$;
- les relations qui lient les entrées aux sorties à tout instant t .

Le schéma suivant représente le cas élémentaire d'un système, dénommé Sys., ayant une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$:



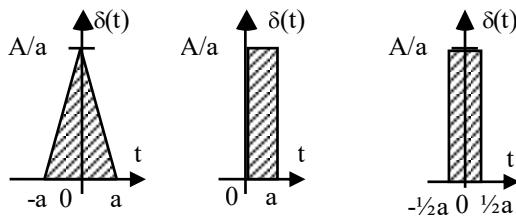
On dira que $y(t)$ est la réponse (temporelle) à l'entrée $u(t)$.

On parlera de **réponse impulsionnelle** lorsque la réponse $y(t)$ du système est obtenue suite à une entrée impulsionnelle $u(t) = \delta(t)$ où l'impulsion unitaire $\delta(t)$ (impulsion de Dirac) est une « fonction » du temps de durée très brève (théoriquement nulle) dont l'aire sous la courbe est unitaire :



On dira que la fonction $\delta(t)$ est nulle partout sauf en $t = 0$. La fonction $\delta(t - \tau)$ est nulle partout sauf en $t = \tau$. Cette « fonction » mathématique n'a de sens qu'appliquée à une autre fonction (système).

Réalisations pratiques approchées de $\delta(t)$:



Un système est dit :

- **Causal** si la réponse impulsionnelle de n'importe quelle de ses sorties à n'importe quelle de ses entrées est un signal causal

$$u_i(t) = \delta(t), \forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq M \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = 0, \forall t < 0, 1 \leq i \leq P$$

- **Strictement causal** si la réponse impulsionnelle de n'importe quelle de ses sorties à n'importe quelle de ses entrées est un signal strictement causal

$$u_i(t) = \delta(t), \forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq M \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = 0, \forall t \leq 0, 1 \leq i \leq P$$

Uniquement les systèmes causaux ou strictement causaux sont réalisables physiquement. Cela provient du fait que dans le cas d'un système non causal, la sortie du système anticiperait l'existence de l'entrée qui lui donne lieu (prédiction du futur). On a donc $y(t_1)$ qui ne dépend que de $u(t \leq t_1)$.

Par exemple, la relation suivante n'est pas causale : $y(t) = u(t+1)$ ou $y(t'-1) = u(t')$: la sortie actuelle est donnée par l'entrée qui existera à $t=1$.

L'ensemble des définitions de cette section s'applique aussi bien aux signaux et systèmes à temps continu qu'à temps discret.

2. Systèmes linéaires invariants

Tout ce qui suit s'applique de manière identique aux systèmes à temps continu et à temps discret.

On désigne par système linéaire invariant un système dont les relations qui le définissent satisfont le principe de superposition et la propriété d'invariance (stationnarité).

2.1 Principe de superposition

On désigne par **système linéaire** un système qui satisfait le principe de superposition qui s'énonce de la manière suivante :

- **Principe de superposition** : si l'entrée d'un système est la somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera donnée par la somme de chacune des sorties correspondant à chacune des entrées prises séparément.

Exemple d'application :

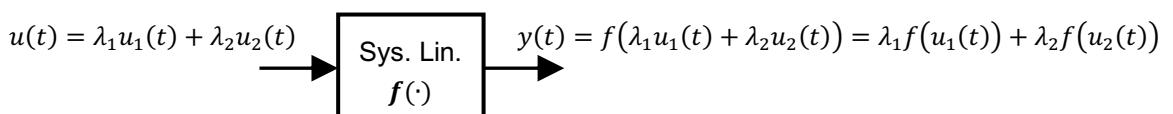
Soit une entrée $u(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, décomposable en une somme pondérée de deux entrées $u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$: $u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Soit un système défini par un fonction analytique $f(\cdot)$ telle que : $y(t) = f(u(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$

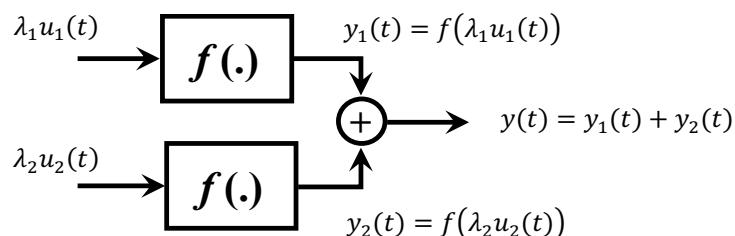
Alors si le système est linéaire, linéarité de $f(\cdot)$, il vient :

$$y(t) = f(u(t)) = f(\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)) = \lambda_1 f(u_1(t)) + \lambda_2 f(u_2(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

De manière schématique, nous avons :



Équivalent à :



2.2 Système invariant (stationnaire)

On désigne par **système invariant (ou stationnaire)** un système dont les relations d'entrées-sorties qui le caractérisent ne dépendent pas de l'instant d'application des entrées :

- **Invariance (Stationnarité)** : soit une entrée $u(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, soit un système défini par $y(t) = f(u(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Un système invariant à temps continu satisfait la relation suivante :

$$y(t + \tau) = f(u(t + \tau)), \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$$

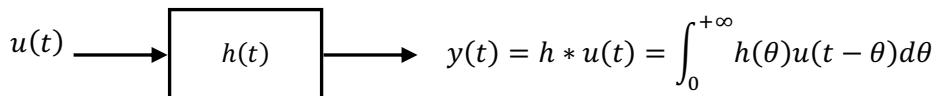
3. Solutions des systèmes dynamiques SISO causaux linéaires invariants

Nous considérons ici les systèmes dynamiques SISO (Single Input – Single Output) causaux linéaires invariants à temps continu ayant une entrée $u(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, m -fois dérivable et une sortie $y(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ces systèmes sont régis de manière très générale par des équations différentielles linéaires à coefficients a_i et b_i constants de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

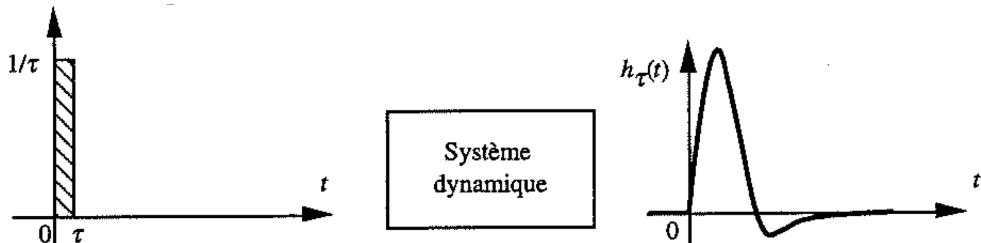
avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Les réponses temporelles de ces systèmes à conditions initiales nulles, $u(t) = y(t) = 0 \quad \forall t < 0$, sont données par le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système et l'entrée $u(t)$ appliquée.

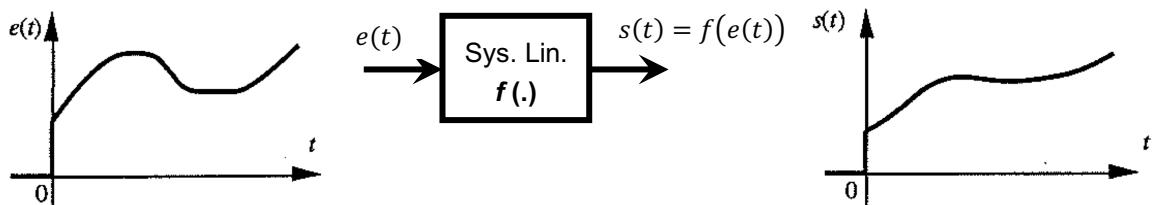


Preuve avec l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ telles que $e(t) = s(t) = 0 \quad \forall t < 0$:

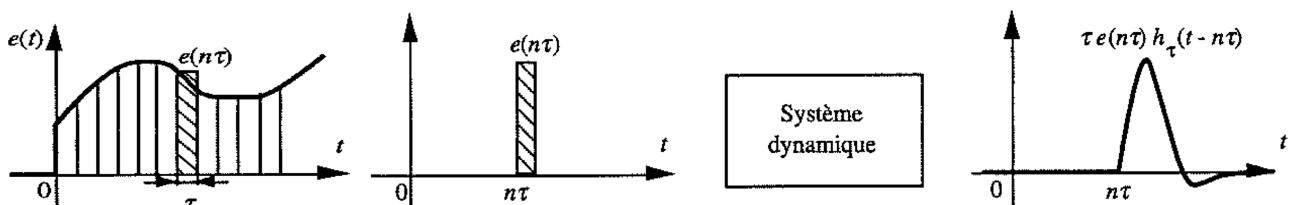
Soit $h_\tau(t)$ la réponse impulsionnelle du système à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ de surface unité placée à l'origine $t = 0$.



On cherche à déterminer la sortie $s(t) = f(e(t))$, avec $f(\cdot)$ une fonction linéaire et invariante.



Pour cela, découpons $e(t)$ en petites tranches de largeur τ :



La $n^{\text{ème}}$ impulsion isolée et excitant le système, conduit à la sortie $\tau \cdot e(n\tau) \cdot h_\tau(t - n\tau)$.

La fonction $h_\tau(t - n\tau)$ est la fonction $h_\tau(t)$ retardée temporellement du temps $n\tau$.

Par la linéarité du système, à l'instant $t = n\tau$, la réponse du système à l'entrée $e(t)$ est approchée par la somme des réponses partielles relatives aux n impulsions appliquées entre $t = 0$ et $t = n\tau$, soit :

$$s(t) = \sum_{k=0}^n \tau e(n\tau) h_\tau(t - n\tau)$$

Si $\tau \rightarrow 0$, l'impulsion, de largeur τ et de hauteur $\frac{1}{\tau}$, placée à l'origine tend vers l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.

La réponse du système tend alors vers la réponse impulsionnelle du système notée $h(t)$. Pour un système causal $h(t) = 0 \forall t < 0$.

On obtient alors pour $s(t)$:

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Par causalité de $e(t)$ et $h(t)$, il vient :

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) e(t - \tau) d\tau = h(t) * e(t)$$

nommé produit de convolution de deux fonctions causales, et symbolisé par le symbole $*$.

♦

Propriétés du produit de convolution :

- Le produit de convolution n'existe que si $u(t)$ est borné ($|u(t)| < U_{max} < \infty$) et $\int_0^\infty |h(t)| dt$ existe ($h(t) \in L_1$) (absolument sommable).
- Le produit de convolution est commutatif.
- La fonction de Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$\text{Si : } u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

$\Rightarrow h(t)$ est appelée la réponse impulsionnelle du système et caractérise complètement le comportement du système dynamique causal linéaire invariant.

La résolution d'équation différentielles d'ordre n ou le calcul du produit de convolution ne sont pas des tâches aisées. Ces calculs sont grandement facilités dans le domaine fréquentiel dual du domaine temporel par l'utilisation de la transformée de Laplace appliquée aux signaux et aux systèmes linéaires invariants.

Dans la suite, la transformée de Laplace est introduite et ses principales propriétés décrites. Pour aller plus loin dans la compréhension de cette transformée, il sera nécessaire de se référer à un texte traitant spécifiquement de ce sujet.

4. Transformée de Laplace et Fonction de Transfert à temps continu

4.1 Définition de la transformée de Laplace

Soit $x(t)$ une fonction localement sommable de la variable réelle t et causale (i.e. $x(t) = 0. \forall t < 0$).

S'il existe $\sigma_0 > \sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$ alors $x(t)$ admet une transformée de Laplace $X(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$ définie par :

$$X(p) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-tp} dt$$

Le domaine $\Re(p) > \sigma_0$ tel que $X(p)$ existe s'appelle le domaine de sommabilité ou de convergence de l'intégrale de Laplace. ($\Re(p)$ désigne la partie réelle de p).

σ_0 s'appelle l'abscisse de sommabilité de l'intégrale de Laplace.

L'intégrale de Laplace est bijective :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)) = \frac{1}{2j\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} X(p)e^{tp} dp$$

Remarque : la notation anglo-saxonne de la variable « p » est « s ».

Nécessité de la borne inférieure 0^- pour le calcul de la transformée de Laplace de signaux discontinus en $t = 0$

Notons :

$$X(p) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_a^{+\infty} x(t)e^{-tp} dt \text{ avec } a = 0^- \text{ ou } 0^+$$

et $x(t)$ une fonction localement sommable et causale et $\Re(p) > \sigma_0$.

Prenons pour fonction temporelle $x(t) = \delta(t)$ et calculons sa transformée de Laplace $X_-(p)$ pour $a = 0^-$ et $X_+(p)$ pour $a = 0^+$:

$$X_-(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-tp} dt = 1 \quad \text{et} \quad X_+(p) = \int_{0^+}^{+\infty} \delta(t)e^{-tp} dt = 0$$

En réalité, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(\delta(t))$ vaut bien 1.

Autre exemple : calculons la transformée de Laplace de $x(t) = \mathbf{1} - \Gamma(t)$ et de sa dérivée $\dot{x}(t) = -\delta(t)$:

- $\mathcal{L}(x(t)) = X_-(p) = X_+(p) = 0$
 - Sachant que : $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = p\mathcal{L}(x(t)) - x(a)$, il vient :
- pour $a = 0^-$: $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = -1$ (juste) et pour $a = 0^+$: $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = 0$ (faux).

4.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Quelques propriétés principales de la transformée de Laplace :

- Linéarité : $\mathcal{L}(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda\mathcal{L}(x(t)) + \mu\mathcal{L}(y(t))$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Dérivation : $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = p\mathcal{L}(x(t)) - x(0^-) = pX(p) - x(0^-)$
 $\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = p^2X(p) - px(0^-) - \dot{x}(0^-)$
 $\mathcal{L}\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = p^k X(p) - p^{k-1}x(0^-) - \dots - \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(0^-)$
- Intégration : $\mathcal{L}\left(\int_{0^-}^t x(t)dt\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(x(t))$
- Théorème du retard (translation sur t) : $\mathcal{L}(x(t-T)) = e^{-pT}\mathcal{L}(x(t)) = e^{-pT}X(p)$

4.3 Transformées de Laplace usuelles

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace les plus usuelles :

$x(t)$	$X(p)$	σ_0
$\delta(t)$	1	$-\infty$
$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1, & \forall t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	0
$t^n \Gamma(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0
$e^{-at} \Gamma(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$-a$
$\sin(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	0
$\cos(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	0
$e^{-at} \cos(\omega t) \Gamma(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$-a$

Table C.1 – Transformées de Laplace usuelles.

4.4 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont très utiles à l'analyse des comportements des systèmes. Ils permettent de déterminer les valeurs initiales et finales de la variable $x(t)$ si elles existent (i.e. bornées).

Théorème de la valeur initiale :

Si $x(t)$ est défini en $t = 0^+$ et si $X(p)$ a une abscisse de convergence finie, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow +\infty} pX(p)$$

♦

Théorème de la valeur finale :

Si $x(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0^+} pX(p)$$

♦

4.5 Calcul opérationnel et résolution d'EDO avec les transformées de Laplace

La transformée de Laplace permet d'introduire le calcul opérationnel utilisant la variable p de Laplace. En particulier, le calcul opérationnel simplifie grandement la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants avec l'utilisation conjointe de la décomposition en éléments simples et des tables de transformées usuelles.

Méthode de résolution d'EDO :

1. Écrire l'EDO à coefficients constants liant l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$
2. Appliquer la transformée de Laplace à chacun des termes de l'EDO en tenant compte des conditions initiales
3. Exprimer $Y(p)$ en fonction des entrées
4. Exprimer $Y(p)$ sous la forme d'une somme d'éléments simples donnés par les tables.
Utiliser les tables de transformées pour obtenir $y(t)$ à partir de $Y(p)$.

Exemple :

$$1. \text{ EDO (circuit RC)} : RC \frac{dv}{dt} + v(t) = E \cdot \Gamma(t) \quad \text{avec } v(0^-) = \frac{E}{2}$$

on note : $y(t) = v(t)$, $u(t) = E \cdot \Gamma(t)$ et $RC = \tau$ (constante de temps en secondes)

$$\Rightarrow \tau \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t) \quad \text{avec } y(0^-) = \frac{E}{2}$$

2. Application de la transformée de Laplace à chacun des termes de l'EDO :

$$\mathcal{L}\left(\tau \frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(u(t)) \Leftrightarrow \tau(pY(p) - y(0^-)) + Y(p) = U(p) = \frac{E}{p}$$

3. Expression de la sortie en fonction de l'entrée :

$$Y(p) = \frac{1}{\tau p + 1} (U(p) + \tau y(0^-)) = \frac{1}{\tau p + 1} \frac{E}{p} + \frac{\tau}{\tau p + 1} \frac{E}{2}$$

4. Décomposition en éléments simples contenus dans les tables de transformation :

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{\tau} \frac{E}{p}}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{1}{\tau} \frac{E}{2}}{p + \frac{1}{\tau}} = \left(\frac{-1}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{1}{p} \right) E + \frac{\frac{1}{\tau} \frac{E}{2}}{p + \frac{1}{\tau}}$$

Calcul des transformées inverses à l'aide des tables :

$$y(t) = (-e^{-t/\tau} \Gamma(t) + \Gamma(t))E + e^{-t/\tau} \Gamma(t) \frac{E}{2} = E \left(1 - \frac{1}{2} e^{-t/\tau} \right) \Gamma(t) \text{ pour } t \geq 0.$$

4.6 Transformées de Laplace du produit de convolution

Soit le produit de convolution: $y(t) = v(t) * u(t) = \int_0^t v(\tau) u(t-\tau) d\tau$

avec $v(t)$ et $u(t)$ deux signaux causaux.

La transformée de Laplace de $y(t)$ est donnée par :

$$Y(p) = \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(v(t) * u(t)) = \int_{0^-}^{+\infty} \left(\int_0^t v(\tau) u(t-\tau) d\tau \right) e^{-tp} dt$$

$u(t)$ et $v(t)$ étant causales, on a $u(t-\tau) = 0$ pour $\tau > t$ et $v(0^-) = 0$, il vient donc :

$$\int_0^t v(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{0^-}^{\infty} v(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

D'où :

$$Y(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \int_{0^-}^{+\infty} v(\tau) u(t-\tau) e^{-tp} d\tau dt = \int_{0^-}^{+\infty} \int_{0^-}^{+\infty} v(\tau) e^{-\tau p} u(t-\tau) e^{-(t-\tau)p} d\tau dt$$

Avec le changement de variable : $t = \theta + \tau$ et de par la causalité, il vient :

$$Y(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \int_{0^-}^{+\infty} v(\tau) e^{-\tau p} u(\theta) e^{-\theta p} d\tau d\theta = \int_{0^-}^{+\infty} v(\tau) e^{-\tau p} d\tau \times \int_{0^-}^{+\infty} u(\theta) e^{-\theta p} d\theta$$

D'où :

$$Y(p) = \mathcal{L}(v(t) * u(t)) = \mathcal{L}(v(t)) \cdot \mathcal{L}(u(t)) = V(p) U(p)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de 2 variables temporelles causales $\mathcal{L}(v(t) * u(t))$ est égale au produit simple des transformées de Laplace de chacune des 2 variables causales.

4.7 Fonction de transfert à temps continu d'un système linéaire invariant causal

Considérons un système linéaire invariant causal à temps continu mono-entrée $u(t)$, mono-sortie $y(t)$. Ce système est défini par sa réponse impulsionnelles $h(t)$.

On appelle **Fonction de transfert à temps continu** d'un système linéaire invariant causal, la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle à temps continu :

$$H(p) = \mathcal{L}(h(t))$$

La fonction de transfert à temps continu rend compte du comportement du système à **conditions initiales nulles**. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le caractère continu du temps, on parlera simplement de Fonction de Transfert en omettant le qualificatif « à temps continu ».

La fonction de transfert est appelée transmittance du système linéaire lorsqu'on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$.

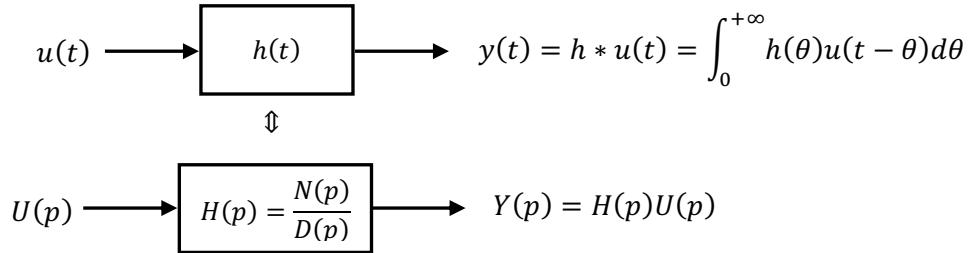


Figure C.1 – Représentation fonctionnelle de la relation entrée-sortie avec $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$, $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ et $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$.

Il est souvent difficile d'obtenir $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$ par le calcul direct de la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. De plus, l'obtention de la réponse impulsionnelle n'est souvent pas aisée.

Lorsque les systèmes linéaires invariants causaux sont régis par des équations différentielles ordinaires (EDO) à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_0 u + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

et que les conditions initiales sont nulles, la fonction de transfert $H(p)$ qui représente la relation entrée-sortie du système peut être directement obtenue :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Obtention de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état.

Soit un système linéaire invariant décrit par une représentation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec $\forall t \in \mathbb{R}$ le vecteur d'état (interne) $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, la commande $u(t) \in \mathbb{R}$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}$;

et les matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $D \in \mathbb{R}$.

La fonction de transfert $H(p)$ est obtenue par le calcul suivant :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = C(pI_n - A)^{-1}B + D$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Dans le cas particulier où l'ordre de la fonction de transfert (degré de $D(p)$) est inférieur à n (dimension du vecteur d'état), il y a des dynamiques internes inobservables avec la sortie $y(t)$. C'est-à-dire qu'on ne peut pas déterminer ces états inobservables uniquement à partir de la mesure de la sortie $y(t)$ et la connaissance de l'entrée $u(t)$. Cet aspect très important est abordé dans les traités portant sur l'analyse des systèmes dans l'espace d'état.

La fonction de transfert $H(p)$ est dite :

– **causale ou propre si et seulement si $n \geq m$** , ceci implique que la sortie du système à un instant t ne dépend que des valeurs passées de la sortie et des valeurs actuelle et passées de l'entrée. En d'autres termes, la sortie actuelle du système ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée.

– **strictement causale ou strictement propre si et seulement si $n > m$** , ceci implique que la sortie du système à un instant t ne dépend que des valeurs passées de la sortie et des valeurs passées de l'entrée. En d'autres termes, la sortie actuelle du système ne dépend pas de la valeur actuelle ni des valeurs futures de l'entrée.

Formes développée et factorisée des fonctions de transfert

La forme suivante de la fonction de transfert est dite développée :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

Alors que la forme suivante, dite factorisée, met en évidence les zéros (racines du polynôme $N(p)$) et les pôles (racines du polynôme $D(p)$) du système :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m(p+z_1)(p+z_2)\dots(p^2+2.\operatorname{Re}(z_i)p+|z_i|^2)(p^2+2.\operatorname{Re}(z_j)p+|z_j|^2)}{a_n(p+p_1)(p+p_2)\dots(p^2+2.\operatorname{Re}(p_i)p+|p_i|^2)(p^2+2.\operatorname{Re}(p_j)p+|p_j|^2)}$$

Cette dernière forme donne beaucoup plus d'informations sur le système que la simple connaissance des coefficients a_i et b_i de $D(p)$ et $N(p)$ respectivement.

Éléments de langage concernant une fonction de transfert $H(p)$:

– le **gain statique de $H(p)$** est donné par $H(p=0) = b_0/a_0$, c'est le gain entre l'entrée et la sortie lorsque toutes les dérivées de $u(t)$ et de $y(t)$ sont nulles ;

- si le **gain statique est infini ($a_0=0$)**, on dit de $H(p)$ que c'est un **système intégrateur** ;
- si le **gain statique est nul ($b_0=0$)**, on dit de $H(p)$ que c'est un **système déivateur** ;
- les **racines $z_i \in \mathbb{C}$ du numérateur $N(p)$ de $H(p)$** sont nommées **les zéros de $H(p)$** ;
- les **racines $p_i \in \mathbb{C}$ du dénominateur $D(p)$ de $H(p)$** sont nommées **les pôles de $H(p)$** ;
- les modules des pôles p_i et des zéros z_i sont homogènes à des pulsations en rad/s ;
- n , le degré de $D(p)$, est le degré de la fonction de transfert ;
- $r = n - m$, degré de $N(p)$ moins le degré de $D(p)$, est le degré relatif de la fonction de transfert ;
- soient deux pôles p_1 et p_2 , si $|p_1| > |p_2|$, p_1 sera nommé pôle rapide et p_2 pôle lent ;
- la variation de la sortie du système sera d'autant plus rapide que les modules des pôles sont de fortes valeurs ;
- on appelle **pôle dominant** d'une fonction de transfert, le **pôle ayant le plus petit module**, c'est donc le pôle le plus lent ;
- les **pôles à partie réelle strictement négative** sont appelés **pôles stables**, ceux à partie réelle nulle ou positive, sont appelés pôles instables ;
- les zéros à partie réelle négative sont appelés zéros stables, ceux à partie réelle positive, sont appelés zéros instables ;
- si au moins un zéro de la fonction de transfert est à partie réelle positive (zéro instable), on dit de $H(p)$ que c'est un **système à non minimum de phase**.

5. Transformée en z et Fonction de transfert à temps discret

Dans la suite, la variable $k \in \mathbb{N}$ désigne l'indice de temps discret d'un signal échantillonné $x(k) \in \mathbb{R}$ prenant des valeurs aux instants kT_e avec T_e la période temporelle d'échantillonnage (de mesure).

Transformée en z : Soit $x(k)$ un signal causal à temps k discret (i.e. $\forall k < 0, x(k) = 0$), on définit la transformée en z unilatérale par :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| > R$$

Cette série est absolument convergente lorsque $|z| > R$, où R désigne le rayon de convergence.

♦

Transformée en z inverse : Si $X(z)$ est définie comme une fraction de polynômes, la transformée en z inverse est donnée par :

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z)z^{k-1} dz$$

où C désigne le cercle centré à l'origine du plan z englobant tous les pôles de $X(z)$.

♦

5.1 Interprétation de l'opérateur z^{-1}

L'opérateur $z^{-1} = \frac{1}{z}$ peut être interprété comme l'opérateur retard d'un échantillon (figure C.2).

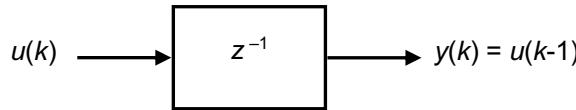


Figure C.2 – Opérateur retard.

$$\text{Preuve : } Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k-1)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k-1)z^{-(k-1)}z^{-1} = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n}$$

d'où $Y(z) = z^{-1}U(z)$

car $u(k)$ est causal ♦

Un retard d'un échantillon dans le domaine temporel devient, dans le domaine z , une multiplication par $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

5.2 Propriétés de la transformée en z

– Linéarité :

$$Z[\lambda x(k) + \mu y(k)] = \lambda X(z) + \mu Y(z)$$

– Translation :

$$Z[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$$

– Multiplication par la variable k (temps) : $Z[k x(k)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$

– Convolution :

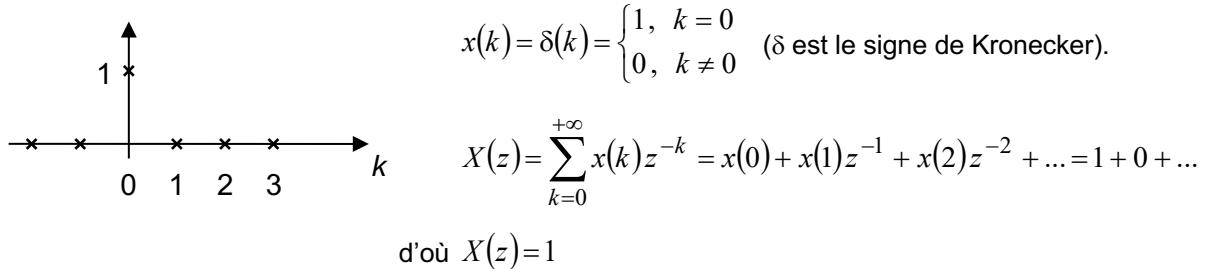
$$Z[x(k) * y(k)] = Z \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \right] = X(z)Y(z)$$

– Théorème de la valeur finale :

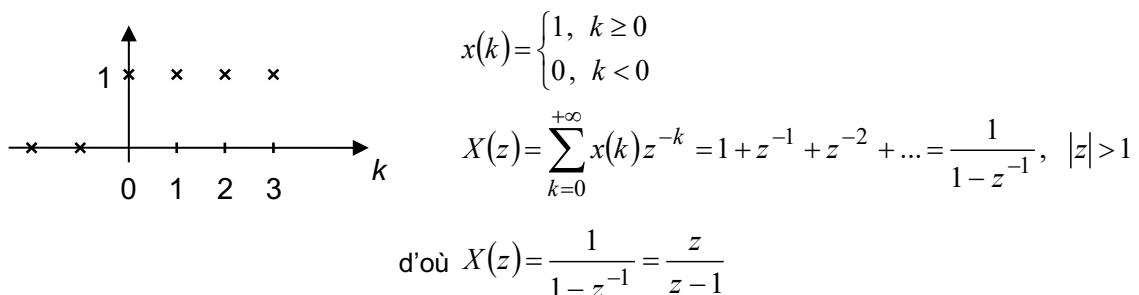
$$\text{si } \lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) \text{ existe alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

5.3 Quelques exemples de transformation en z

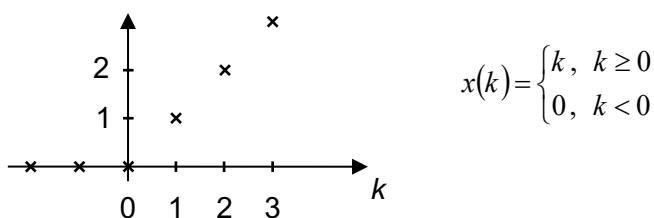
Impulsion discrète :



Échelon unitaire :



Rampe discrète :



La rampe discrète peut être vue comme un échelon unitaire multiplié par k d'où :

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = z^{-1} \frac{d}{dz^{-1}} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Exponentielle discrète :

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad X(z) = Z(a^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

5.4 Table de transformées en z

La table suivante donne la transformée en z de fonctions de transfert à partir de la connaissance de la transformée de Laplace en p , avec T_e la période d'échantillonnage.

Transformée de Laplace $X(p)$	Fonction du temps $x(t), t \geq 0$	Transformée en z $X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t) = 1$	$\frac{z}{z - 1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{T_e z}{(z - 1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T_e^2 z (z + 1)}{2(z - 1)^3}$
$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z - e^{-aT_e}} \right)$
$\frac{1}{p + a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT_e}}$
$\frac{1}{(p + a)^2}$	$t e^{-at}$	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}$
$\frac{1}{(p + a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{T_e^2 z e^{-aT_e}}{2(z - e^{-aT_e})^2} + \frac{T_e^2 z e^{-2aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^3}$
$\frac{1}{(p + a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!} e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z - e^{-aT_e}} \right)$
$\frac{a}{p(p + a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT_e})z}{(z - 1)(z - e^{-aT_e})}$
$\frac{a}{p^2(p + a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{T_e z}{(z - 1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT_e})z}{a(z - 1)(z - e^{-aT_e})}$
$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin(at)$	$\frac{z \sin(aT_e)}{z^2 - 2z \cos(aT_e) + 1}$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{z(z - \cos(aT_e))}{z^2 - 2z \cos(aT_e) + 1}$

$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{z e^{-aTe} \sin(bT_e)}{z^2 - 2z e^{-aTe} \cos(bT_e) + e^{-2aTe}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{z^2 - z e^{-aTe} \cos(bT_e)}{z^2 - 2z e^{-aTe} \cos(bT_e) + e^{-2aTe}}$
$F_c(p)$	$f(t)$	$F_d(z)$
$F_c(p+a)$	$f(t)e^{-at}$	$F_d(z e^{aTe})$
$e^{-nTe} F_c(p)$	$f(t-nT_e)$	$z^{-n} F_d(z)$

 Table C.2 – Table de transformées en \mathbf{z} .

5.5 Calcul de la transformée en \mathbf{z} inverse par la méthode des résidus

Soit $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ la transformée en \mathbf{z} de $\mathbf{x}(k)$. La transformée inverse est donnée par :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{k-1} dz$$

où C désigne le cercle centré sur l'origine du plan \mathbf{z} contenant les pôles de $\mathbf{X}(\mathbf{z})$.

La méthode des résidus consiste à déterminer $\mathbf{x}(k)$ de la manière suivante :

$$x(k) = \sum_{i=1}^n K_i$$

où n désigne le nombre de pôles (racines du dénominateur) de la fonction $\mathbf{X}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}^{k-1}$ et K_i le résidu de $\mathbf{X}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}^{k-1}$ au pôle $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i$.

Le résidu est calculé de la manière suivante :

$$K_i = \frac{1}{(q_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{q_i-1}}{dz^{q_i-1}} \left[(z - z_i)^{q_i} X(z) z^{k-1} \right]$$

pour un pôle \mathbf{z}_i de multiplicité $q_i \geq 0$.

Exemple : $X(z) = \frac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$

D'après le théorème des résidus, $\mathbf{x}(k)$ est donné par :

$$x(k) = \sum_{i=1}^2 K_i = \sum_{i=1}^2 \text{Résidus} \left[\frac{(1-a)z^k}{(z-1)(z-a)} \right]_{z=z_i}$$

$$K_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{(1-a)z^k}{(z-1)(z-a)} \right] = 1^k = 1$$

$$K_2 = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{(1-a)z^k}{(z-1)(z-a)} \right] = -a^k$$

d'où : $x(k) = 1 - a^k$.

5.6 Représentation des systèmes linéaires stationnaires en temps discret par leur fonction de transfert en z

Le transfert entre la suite de valeurs discrètes $u = \{u(k)\}_{k \in N^+}$ appliquée en entrée d'un système défini par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ et la suite obtenue en sortie $y = \{y(k)\}_{k \in N^+}$ est donnée par le produit de convolution discret :

$$y(k) = h * u(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(k-n)u(n)$$

Par application du théorème de convolution discrète, il vient :

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

où $Y(z)$ représente la transformée en z de la sortie $y(k)$ du système, $H(z)$ et $U(z)$ les transformées en z respectives de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du système et de l'entrée $u(k)$.

Fonction de transfert en z : $H(z) = Z[h(k)]$, la transformée en z de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du système, est appelée fonction de transfert en z du système. Cette fonction est intrinsèque au système.

♦

Dans le cas de systèmes linéaires invariants, la fonction de transfert en z prend en général la forme d'une fonction rationnelle :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Propriétés de la fonction de transfert à temps discret $H(z)$:

Les paramètres a_i et b_i de la fonction de transfert $H(z)$ à temps discret n'ont pas de sens physique. Pour analyser certaines propriétés de $H(z)$, il est nécessaire de faire le lien entre la représentation à temps discret et la représentation à temps continu. Pour cela, on utilise la relation entre la variable z et la variable p de Laplace :

$$z = e^{pT_e} \quad \text{où } T_e \text{ est la période d'échantillonnage.}$$

– le **gain statique de $H(z)$** est donné par $H(z=1) = \frac{b_0+b_1+\dots+b_m}{a_0+a_1+\dots+a_n}$, c'est le gain entre l'entrée et la sortie lorsque l'entrée $u(kT_e)$ et la sortie $y(kT_e)$ sont constantes (dérivées nulles) ;

- si le **gain statique est infini** ($a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$), $H(z)$ est un **système intégrateur** ;
- si le **gain statique est nul** ($b_0 + b_1 + \dots + b_m = 0$), $H(z)$ est un **système déivateur** ;
- les **racines $z_{zi} \in \mathbb{C}$ du numérateur** de $H(z)$ sont nommées **les zéros de $H(z)$** ;
- les **racines $z_{pi} \in \mathbb{C}$ du dénominateur** de $H(z)$ sont nommées **les pôles de $H(z)$** ;

– les **pôles à l'intérieur du cercle unité** ($|z_{pi}| < 1$) sont appelés **pôles stables**, ceux sur ou en dehors du cercle unité sont appelés pôles instables ; par extension, on dira que $H(z)$ est stable si **tous** ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité, sinon instable ;

- à un pôle z_{pi} à temps discret correspond un pôle p_i à temps continu :

$$p_i = \frac{1}{T_e} \ln(z_{pi}) \text{ dont le module est homogène à une pulsation en rad/s}$$

- soient deux pôles z_{p1} et z_{p2} , si $1 > |z_{p1}| > |z_{p2}|$, z_{p2} sera nommé pôle rapide et z_{p1} pôle lent ;

– la variation de la sortie du système sera d'autant plus rapide que les modules de ses pôles sont de petites valeurs ;

– on appelle **pôle dominant** d'une fonction de transfert, le **pôle ayant le plus grand module**, c'est donc le pôle le plus lent ;

5.7 Implantation par équation aux différences

A partir de la fonction de transfert en z du système et à l'aide de la propriété de translation de la transformée en z , la relation entrée–sortie du système peut être définie par une ou des équations aux différences de la forme :

$$y(k) = \frac{1}{a_0} [b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n)]$$

La sortie $y(k)$ à l'instant $t = k \cdot T_e$ est déterminée par l'entrée $u(k)$ à l'instant k et les valeurs précédentes de la sortie et de l'entrée.

En pratique, cette forme développée de l'équation aux différences est très sensible à la précision avec laquelle les paramètres a_i et b_i sont implantés sur le calculateur réalisant le calcul de $y(k)$ par cette équation. Se référer au **chapitre Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur** pour la procédure à suivre.

D. Analyse des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux

1. Stabilité des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux

Le concept de stabilité joue un rôle majeur en automatique. En effet, quelle que soit la méthode de commande utilisée, le premier objectif de toute commande est d'assurer la stabilité du ou des points d'équilibre désirés du système dynamique. Dans le cas des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux, la stabilité d'un point d'équilibre particulier entraîne la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre. Pour ces systèmes, la stabilité ne dépend pas d'un point d'équilibre particulier (ce qui n'est pas le cas général des systèmes non-linéaires). On parlera alors de stabilité du système linéaire invariant sans spécifier le point d'équilibre.

Point d'équilibre :

- Un point d'équilibre est une valeur **constante** particulière de la sortie : c'est la valeur constante vers laquelle tend la sortie $y(t)$ lorsque l'entrée $u(t)$ est constante.
- Dans le cas d'un système linéaire stable, pour une entrée nulle, le seul point d'équilibre possible est $y = 0$.

Cycle limite :

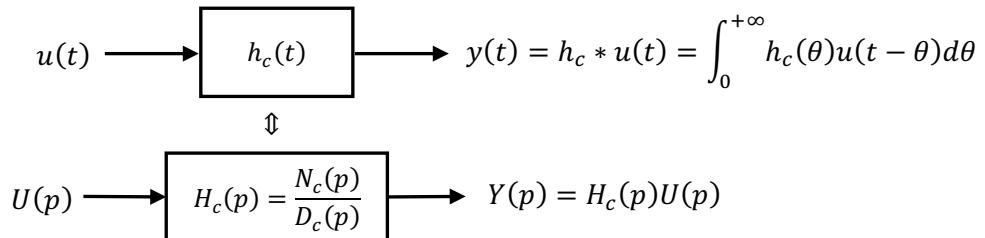
- Un cycle limite est une trajectoire bornée cyclique de la sortie $y(t)$ lorsque l'entrée $u(t)$ est constante.
- Un cycle limite forme une trajectoire fermée dans l'espace des phases (abscisse : y , ordonnée : dy/dt).
- Pour un système linéaire le seul cycle limite possible (un cercle) est une sortie sinusoïdale (oscillateur).

Garantir la stabilité d'un système est équivalent à garantir le contrôle du système. Un système physique instable (non stable) est un système dont on a perdu le contrôle qui a de fortes chances de se détruire ou d'induire des dommages sur d'autres systèmes auxquels il est relié.

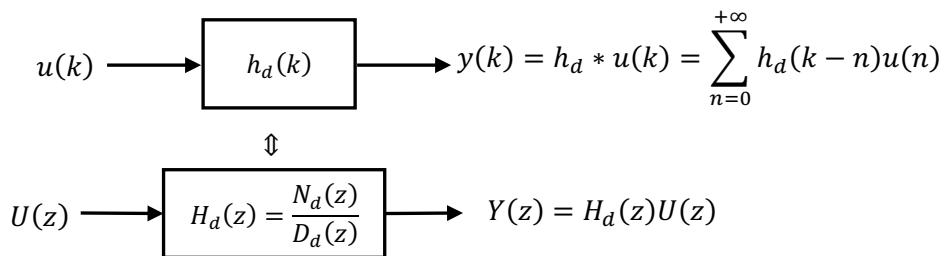
Le premier travail à mener lorsqu'on cherche à contrôler un système est de démontrer que la stabilité est garantie dans toutes les conditions avec la commande mise en œuvre afin de garantir la sécurité du système commandé.

On s'intéresse ici aux systèmes dynamiques linéaires invariants causaux définis par leur réponse impulsionnelle ou de manière équivalente par leur fonction de transfert à temps continu ou à temps discret selon le cas traité.

A temps continu :



A temps discret :



Stabilité des systèmes dynamiques :

- On dira d'un système dynamique que son point d'équilibre ou son cycle limite est stable, si lorsqu'on écarte l'état du système de ce point d'équilibre ou de son cycle limite, il y revient après un certain temps.
- Pour un système linéaire stable, la trajectoire temporelle du retour à l'équilibre de la sortie est de forme exponentielle.

Instabilité :

- Un système instable est un système dont la sortie diverge. Par conséquent, c'est un système qui peut s'autodétruire en pratique ou causer des dommages importants aux systèmes auxquels il est relié !!!

Stabilité au sens Entrée Bornée – Sortie Bornée (EB-SB)**Définition : Stabilité EB-SB**

Un système est stable au sens EB-SB (Entrée Bornée – Sortie Bornée) si pour toute entrée bornée, sa sortie l'est aussi.

$$\|u(t)\| < M \quad \forall t > t_0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < N(M, y(t_0)) \quad \forall t > t_0$$

Avec M et N des nombres finis qui ne dépendent pas de t_0 .

◆

En anglais, on parlera de stabilité BIBO (Bounded Input – Bounded Output).

Théorème : Stabilité EB-SB et réponse impulsionnelle

Une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) de stabilité EB-SB d'un système linéaire invariant causal à temps continu (resp. à temps discret) est que sa réponse impulsionnelle soit absolument sommable : $\int_0^\infty |\mathbf{h}_c(t)| dt < \infty$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} |h_d| < \infty$).

◆

En pratique, deux difficultés apparaissent : l'obtention de la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}(t)$ et le calcul de la somme $\int_0^\infty |\mathbf{h}(t)| dt$ (idem à temps discret).

L'analyse de la stabilité du système à temps continu par la fonction de transfert $H_c(p)$, transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}_c(t)$, est donnée par le théorème suivant :

Théorème : Stabilité EB-SB et pôles de la Fonction de Transfert à temps continu

Une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) de stabilité EB-SB d'un système linéaire invariant causal à temps continu décrit par sa fonction de transfert $H_c(p) = \mathcal{L}(\mathbf{h}_c(t))$ est que tous les pôles de $H_c(p)$ (racines de $D_c(p)$ dénominateur de $H_c(p) = \frac{N_c(p)}{D_c(p)}$) soient à partie réelle strictement négative (demi plan gauche ouvert du plan complexe) :

$$\Re(pôles(H_c(p))) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Système à temps continu stable au sens EB-SB}$$

◆

Sans avoir à calculer explicitement les pôles de $H_c(p)$, le **critère algébrique de Routh** permet de déterminer si les pôles de $H_c(p)$ sont à partie réelle strictement négative (voir annexes).

Remarque 1 : Un système à temps continu possédant au moins un pôle en $p = 0$ est instable au sens EB-SB.

Remarque 2 : Les racines à parties réelles positives ou nulles, respectivement, de $N_c(p)$ et de $D_c(p)$ sont appelées, respectivement, zéros instables et pôles instables.

Remarque 3 : Les zéros d'un système ne jouent aucun rôle dans la stabilité. Ainsi, un système ayant tous ses pôles stables (à partie réelle négative) et possédant un ou plusieurs zéros instables sera stable au sens EB-SB.

Remarque 4 : Les réponses temporales des fonctions de transfert linéaires invariantes à temps continu sont de la forme exponentielle, $\sum \beta_i e^{p_i t}$ avec p_i les pôles de la fonction de transfert. Si les pôles sont à

partie réelle strictement négative, la réponse propre du système tend exponentiellement vers 0. Par contre, si au moins un pôle est à partie réelle positive, la réponse diverge exponentiellement.

Stabilité des systèmes à temps continu du 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordre

Soit la fonction de transfert d'un système à temps continu : $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, sa stabilité EB-SB dépend de la négativité des parties réelles des racines de D(p).

Systèmes du 1^{er} ordre :

$$D(p) = a_1 p + a_0 ,$$

$H(p)$ stable ssi tous les coefficients $a_i > 0$: $a_1 > 0$ et $a_0 > 0$.

Systèmes du 2^{ème} ordre :

$$D(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 ,$$

$H(p)$ stable ssi tous les coefficients $a_i > 0$: $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ et $a_0 > 0$.

Systèmes du 3^{ème} ordre :

$$D(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 ,$$

$H(p)$ stable ssi tous les coefficients $a_i > 0$ et $a_2 a_1 > a_3 a_0$.

Ces résultats peuvent être facilement obtenus à partir du critère algébrique de Routh (voir annexes).

Théorème : Stabilité EB-SB et pôles de la Fonction de Transfert à temps discret

Une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) de stabilité EB-SB d'un système linéaire invariant causal à temps discret décrit par sa fonction de transfert $H_d(z) = Z(h_d(t))$ est que tous les pôles de $H_d(z)$ (racines de $D_d(z)$ dénominateur de $H_d(z) = \frac{N_d(z)}{D_d(z)}$) aient un module strictement inférieur à 1 (localisés à l'intérieur du cercle unité du plan complexe) :

$\text{Modules}(\text{pôles}(H_d(z))) < 1 \implies \text{Système à temps discret stable au sens EB-SB}$

♦ Sans avoir à calculer explicitement les pôles de $H_d(z)$, le **critère algébrique de Jury** permet de déterminer si les pôles de $H_d(z)$ ont un module strictement inférieur à 1 (voir annexes).

Remarque 1 : Un système à temps discret possédant au moins un pôle de module identité $|z| = 1$ est instable au sens EB-SB.

Remarque 2 : Les réponses temporelles des fonctions de transfert linéaires invariantes à temps discret sont de la forme exponentielle, $\sum \beta_i |z_i|^k$ avec z_i les pôles de la fonction de transfert. Si les modules des pôles sont à l'intérieur du cercle unité, la réponse propre du système tend exponentiellement vers 0. Par contre, si au moins un pôle possède un module supérieur à l'unité, la réponse diverge exponentiellement.

Théorème : Stabilité EB-SB et Représentation d'état à temps continu

Soit un système linéaire invariant causal à temps continu décrit par une représentation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec $\forall t \in \mathbb{R}$ le vecteur d'état (interne) $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, la commande $u(t) \in \mathbb{R}$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}$;

et les matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $D \in \mathbb{R}$.

Alors pour toute entrée $u(t)$ bornée, les états $x(t)$ du système à temps continu : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ sont bornés si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives. On dit alors que le système est stable au sens EB-SB.

♦

Les valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de A sont les racines de $\det(\lambda I_n - A) = 0$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Théorème : Stabilité EB-SB et Représentation d'état à temps discret

Soit un système linéaire invariant causal à temps discret décrit par une représentation d'état :

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

où kT_e représente un instant multiple de la période d'échantillonnage T_e , $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ le vecteur d'état interne, la commande $u(k) \in \mathbb{R}$ et la sortie $y(k) \in \mathbb{R}$; et les matrices constantes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $D \in \mathbb{R}$.

Alors pour toute entrée $u(k)$ bornée, les états $x(k)$ du système à temps discret : $x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$ sont bornés si et seulement si toutes les valeurs propres de F ont un module strictement inférieur à 1 (localisés à l'intérieur du cercle unité du plan complexe). On dit alors que le système est stable au sens EB-SB.

♦

Les valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de F sont les racines de $\det(\lambda I_n - F) = 0$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Stabilité asymptotique et stabilité exponentielle

Stabilité asymptotique : le système à temps continu $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est dit **asymptotiquement stable** si pour $t > t_0$ l'état $x(t)$ converge vers zéro quel que soit l'état initial $x(t_0)$.

Stabilité exponentielle : le système à temps continu $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est dit **exponentiellement stable** s'il existe des constantes $\beta > 0$ et $0 < \alpha < 1$ indépendantes de t_0 telles que :

$$\forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq \beta \|x(t_0)\| \alpha^{t-t_0}$$

De manière identique, pour les systèmes à temps discret, le système à temps discret $x(k+1) = Fx(k)$ est dit **asymptotiquement stable** si pour $k > k_0$ l'état $x(k)$ converge vers zéro quel que soit l'état initial $x(k_0)$.

Le système à temps discret $x(k+1) = Fx(k)$ est dit **exponentiellement stable** s'il existe des constantes $\beta > 0$ et $0 < \alpha < 1$ indépendantes de k_0 telles que :

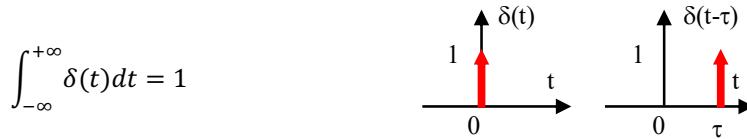
$$\forall k \geq k_0, \|x(k)\| \leq \beta \|x(k_0)\| \alpha^{k-k_0}$$

La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique, mais pas l'inverse. Dans le cas des systèmes linéaires que nous considérons dans ce cours, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité exponentielle. Ainsi, un système linéaire stable au sens EB-SB sera exponentiellement stable.

2. Signaux typiques de test

Un signal de test est un signal de forme mathématique simple qui, appliqué au système étudié, permet de mettre en évidence certaines caractéristiques de ce système.

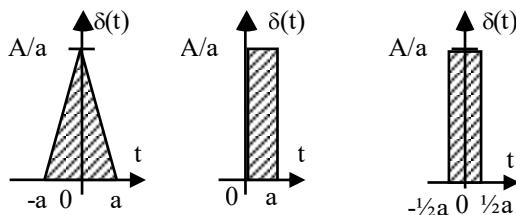
- L'**impulsion unitaire** $\delta(t)$ (**impulsion de Dirac**) est une « fonction » du temps de durée très brève (théoriquement nulle) dont l'aire sous la courbe est unitaire :



On dira que la fonction $\delta(t)$ est nulle partout sauf en $t = 0$. La fonction $\delta(t - \tau)$ est nulle partout sauf en $t = \tau$. Cette « fonction » mathématique n'a de sens qu'appliquée à un système.

Transformée de Laplace de $\delta(t)$: $\text{Laplace}[\delta(t)] = 1$

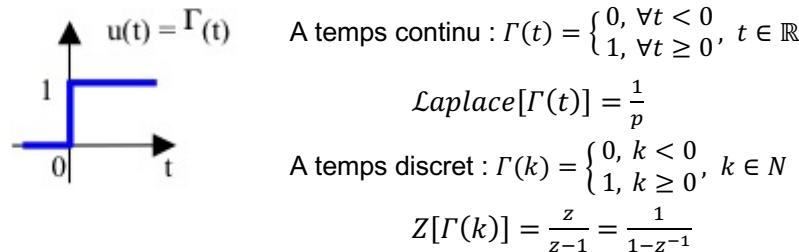
Réalisations pratiques approchées de $\delta(t)$:



A temps discret, l'impulsion discrète est donnée par : $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}, k \in N$

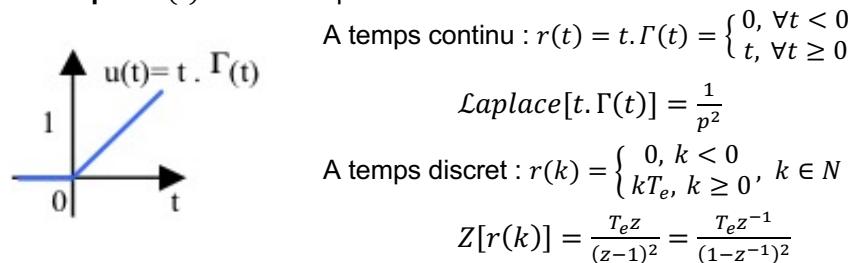
Transformée en z de $\delta(k)$: $Z[\delta(t)] = 1$

- L'**échelon unitaire** $\Gamma(t)$ (**échelon de Heaviside**) est défini par :



La fonction de Dirac à temps continu est la dérivée de la fonction de Heaviside : $\delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$

- La fonction rampe t. $\Gamma(t)$ est définie par :



La fonction rampe à temps continu est l'intégrale de la fonction de Heaviside : $r(t) = \int_0^t \Gamma(\tau)d\tau$

On parle aussi d'**échelon de vitesse** pour désigner la rampe.

- La fonction sinusoïdale d'amplitude U_0 et de pulsation $\omega = 2\pi f$:

$$\text{A temps continu : } u(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ U_0 \sin(\omega t), & \forall t \geq 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{Laplace}[u(t)] = U_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{A temps discret : } u(k) = \begin{cases} 0, & \forall k < 0 \\ U_0 \sin(\omega k T_e), & \forall k \geq 0 \end{cases}, \quad k \in N, \quad Z[u(k)] = U_0 \frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$$

3. Réponses d'un système dynamique linéaire invariant causal SISO

Soit le système dynamique linéaire invariant causal SISO à temps continu suivant :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_0 u + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Pour une entrée $u(t)$ bornée donnée, la réponse $y(t)$ du système est composée de la somme :

- de la réponse transitoire $y_{EH}(t)$ du système donnée par la solution de l'équation homogène (second membre nul) ;
- et d'une solution particulière $y_{SP}(t)$ en régime permanent (après disparition du régime transitoire) liée à l'entrée $u(t)$.

De la même manière, pour un système dynamique linéaire invariant causal SISO à temps discret :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_m u(k-m)$$

avec $\infty > n, m \in \mathbb{N}^+$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Pour une entrée $u(k)$ bornée donnée, la réponse $y(k)$ du système est composée de la somme :

- de la réponse transitoire $y_{EH}(k)$ du système donnée par la solution de l'équation homogène (second membre nul) ;
- et d'une solution particulière $y_{SP}(k)$ en régime permanent (après disparition du régime transitoire) liée à l'entrée $u(k)$.

Un régime transitoire est le passage d'un régime permanent à un autre. Le régime permanent est aussi appelé régime asymptotique (régime atteint in fine). Si le régime permanent correspond à une sortie constante, on parle de régime statique.

3.1. Caractérisation du régime permanent

Les signaux typiques d'entrée pour caractériser le régime permanent d'une fonction de transfert sont l'impulsion de Dirac (entrée passagère), l'échelon de Heaviside (entrée constante), la rampe (entrée linéairement croissante) et l'entrée sinusoïdale.

Entrée sinusoïdale : les fonctions circulaires (sinus, cosinus, exponentiel) sont les fonctions propres (la dérivée d'une fonction circulaire est une fonction circulaire) des systèmes linéaires invariants causaux. Pour cette raison, en régime permanent, la réponse à une entrée sinusoïdale du système est aussi une sortie sinusoïdale à la même pulsation :

- En temps continu pour un système de fonction de transfert $H_c(p) = \mathcal{L}(h_c(t))$:

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = |H_c(j\omega_0)|U_0 \sin\left(\omega_0 t + \arg(H_c(j\omega_0))\right)$$

où $H_c(j\omega) = H_c(p = j\omega)$

- En temps discret pour un système de fonction de transfert $H_d(z) = Z(h_d(z))$:

$$u(k) = U_0 \sin(\omega_0 k T_e) \quad \Rightarrow \quad y(k) = |H_d(z_0)|U_0 \sin\left(\omega_0 k T_e + \arg(H_d(z_0))\right)$$

où T_e est la période d'échantillonnage, $z_0 = e^{j\omega_0 T_e}$ et $0 \leq \omega_0 \leq \omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$.

Le diagramme de Bode (voir section dédiée) représente le gain et la phase de la fonction de transfert du système en fonction de la pulsation ω en régime permanent. Ainsi, la réponse en régime permanent de la sortie du système pour une entrée sinusoïdale de pulsation ω_0 et d'amplitude U_0 est directement donnée par lecture sur le diagramme de Bode.

Entrées de type impulsion de Dirac, échelon de Heaviside, rampe... (intégrales successives de l'impulsion de Dirac) : la valeur finale, une fois le régime permanent atteint, est donnée par application du théorème de la valeur finale :

- En temps continu pour un système de fonction de transfert $H_c(p) = \mathcal{L}(h_c(t))$:

Si la limite existe (système stable au sens EB-SB) :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{R}}} y(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p \in \mathbb{R}}} pY(p) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p \in \mathbb{R}}} pH_c(p). U(p)$$

Par exemple, pour une entrée de type échelon d'amplitude U_0 , la sortie du système en régime permanent sera donnée par :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbb{R}}} y(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p \in \mathbb{R}}} pY(p) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ p \in \mathbb{R}}} pH_c(p). \frac{U_0}{p} = H_c(p = 0). U_0$$

- En temps discret pour un système de fonction de transfert $H_d(z) = Z(h_d(z))$:

Si la limite existe (système stable au sens EB-SB) :

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ z \in \mathbb{R}}} y(k) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{R}}} (z - 1)Y(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{R}}} (z - 1)H_d(z). U(z)$$

Par exemple, pour une entrée de type échelon d'amplitude U_0 , la sortie du système en régime permanent sera donnée par :

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ z \in \mathbb{R}}} y(k) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{R}}} (z - 1)Y(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{R}}} (z - 1)H_d(z). \frac{zU_0}{z-1} = H_d(z = 1) U_0$$

Lorsque l'entrée du système est une entrée constante, la réponse en régime permanent du système est nommée régime statique.

3.2 Caractérisation du régime transitoire

Le régime transitoire de la réponse d'un système entre deux régimes permanents dépend des valeurs des pôles et des zéros de la fonction de transfert. Si le système est stable au sens Entrée Bornée – Sortie Bornée (pôles à parties réelles strictement négatives pour les fonctions de transfert à temps continu, modules des pôles inférieurs à 1 pour les fonctions de transfert à temps discret), le régime transitoire de la réponse s'atténue au cours du temps plus ou moins vite en fonction des pôles et des zéros.

En temps continu, les modules des pôles et zéros de la fonction de transfert $H_c(p)$ sont homogènes à une pulsation en rad/s, donc le régime transitoire s'atténue d'autant plus vite que les modules des pôles et zéros sont grands.

En temps discret, les pôles z_0 de la fonction de transfert $H_d(z)$ sont reliés à leur équivalent à temps continu par la relation $z_0 = e^{p_0 T_e}$ (où p_0 est le pôle équivalent à temps continu), ainsi le régime transitoire s'atténue d'autant plus vite que le module de p_0 est grand donc que le module de z_0 est proche de 1 donc que z_0 est proche du cercle unité dans le plan complexe.

Pour la plupart des systèmes physiques, le régime transitoire dépend essentiellement des valeurs des pôles de la fonction de transfert. La figure D.1 donne l'allure de la réponse d'un système à temps continu pour une entrée impulsionale en fonction de la position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert $H_c(p)$.

De même, la figure D.2 donne l'allure de la réponse d'un système à temps discret pour une entrée impulsionale en fonction de la position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert $H_d(z)$.

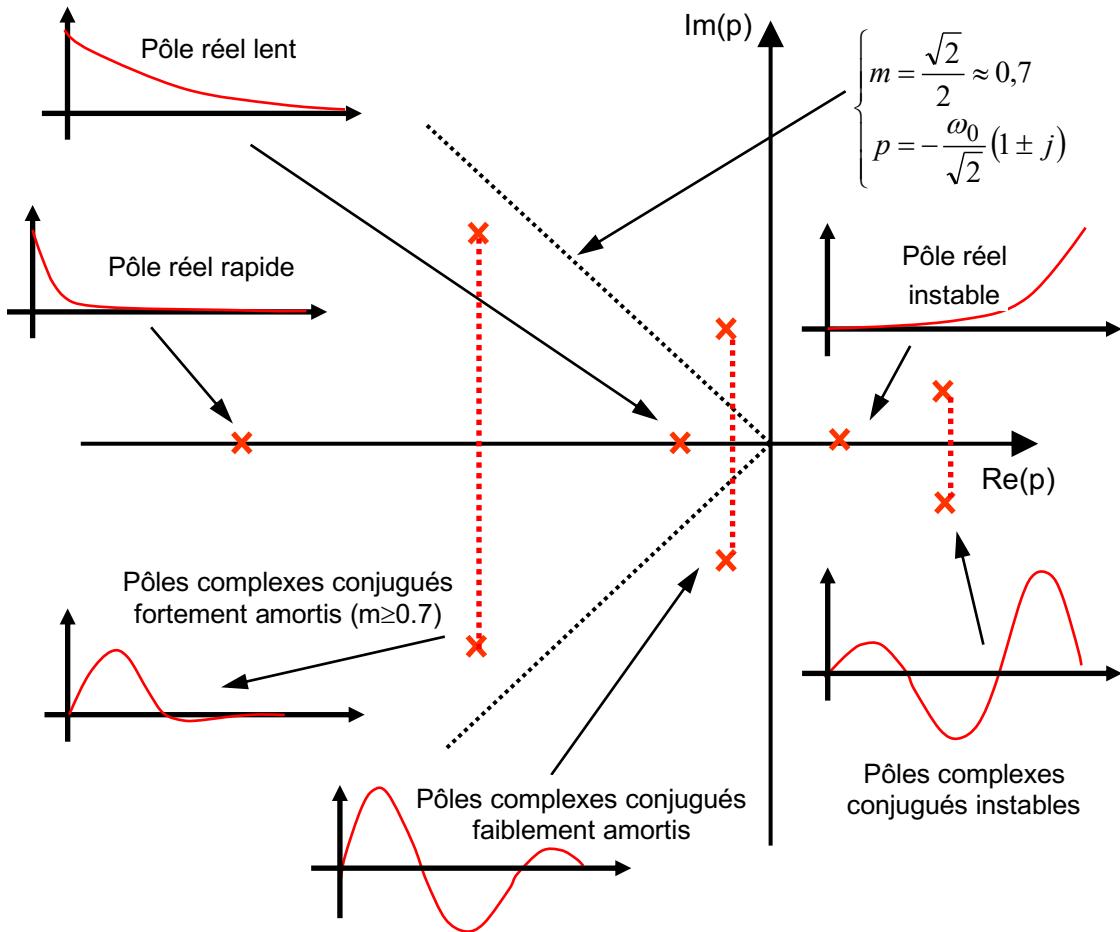


Figure D.1 – Allure de la réponse d'un **système à temps continu** pour une entrée impulsionnelle en fonction de la position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert $H_c(p)$ qui définit le système.
Les pôles sont soit réels soit complexes conjugués.

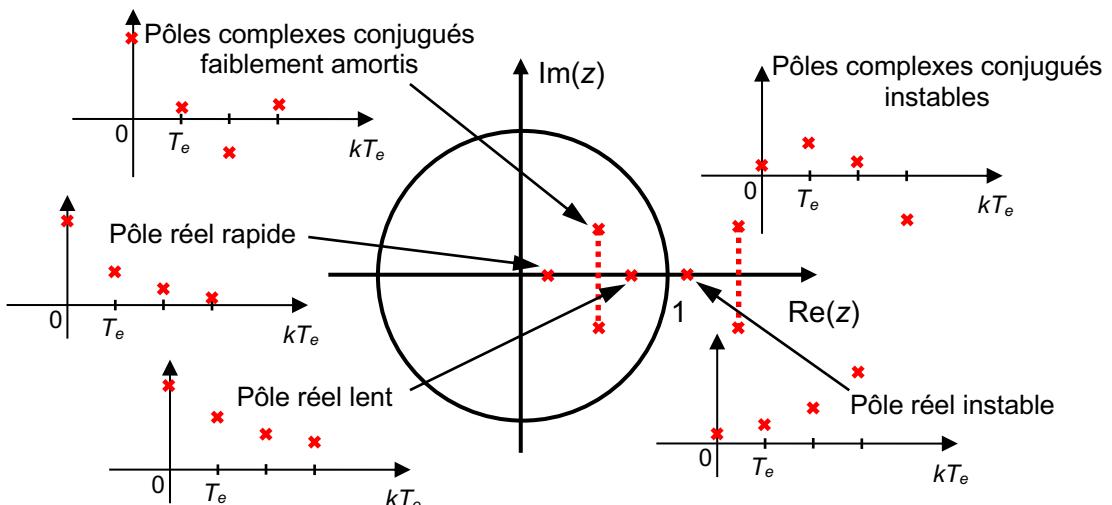


Figure D.2 – Allure de la réponse d'un **système à temps discret** pour une entrée impulsionnelle en fonction de la position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert $H_d(z)$ qui définit le système.
Les pôles sont soit réels soit complexes conjugués.

4. Analyse fréquentielle des systèmes linéaires invariants - Diagrammes

Le domaine fréquentiel est le domaine dual du domaine temporel. Dans le cas des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux, l'étude dans le domaine fréquentiel de ces systèmes permet de mettre en évidence de manière très simples les propriétés de ces systèmes à l'aide de diagrammes spécifiques : diagramme de Bode, diagramme de Nyquist, diagramme de Black-Nichols. Chacun de ces diagrammes a un intérêt spécifique pour un usage donné.

Pour les signaux périodiques d'énergie finie, la théorie des séries de Fourier montre qu'ils peuvent se décomposer sous la forme d'une somme infinie de fonctions trigonométriques (\sin , \cos) de fréquences multiples de la fréquence fondamentale du signal périodique. L'ensemble de ces fréquences forme le spectre du signal.

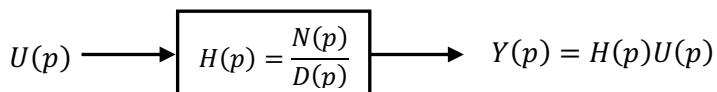
Dans le cas de signaux non-périodiques causaux, la transformée de Laplace et son inverse permettent de passer de la représentation dans le domaine temporel au domaine fréquentiel et vice-versa. La transformée de Fourier s'applique elle aux signaux à support temporel allant de $-\infty$ à $+\infty$.

Prenons l'exemple d'un signal carré d'amplitude 1 de fréquence f_0 , sa décomposition en séries de Fourier est :

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Appliquons ce signal à un système linéaire invariant causal stable à temps continu défini par sa fonction de transfert $H(p)$.



Le théorème de superposition (linéarité du système) permet d'analyser la réponse du système pour chaque fréquence harmonique du signal d'entrée (chaque $u_k(t)$), puis de faire la somme des réponses $y_k(t)$ pour obtenir la réponse totale $y(t)$.

Pour cela, on détermine, en fonction de la pulsation ω , le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$ et la phase $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ du système à partir de sa fonction de transfert avec $p = j\omega : H(p = j\omega)$.

Il vient alors pour $y(t)$:

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} |H(j(2k+1)\omega_0)| \sin((2k+1)\omega_0 t + \arg(H(j(2k+1)\omega_0)))$$

Les différents diagrammes donnent une représentation graphique de la transmittance complexe $H(j\omega)$. Ces diagrammes permettent d'interpréter rapidement sans calculs l'action de la fonction de transfert sur le signal d'entrée en fonction de la fréquence de ce signal. Ils permettent également de faire des opérations ou des raisonnements directement sur les graphiques (souvent beaucoup plus simple que de manipuler les expressions de $G(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$).

3 représentations de $H(j\omega)$ sont couramment utilisées en automatique :

- Diagramme de Bode
 - 1 graphe de gain : $x = \omega$ avec une échelle log10, $y = 20 \log_{10} G(\omega) = G_{dB}(\omega)$
 - 1 graphe de phase : $x = \omega$ avec une échelle log10, $y = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés)
- Diagramme de Balck-Nichols :
 - 1 seul graphe avec : $x = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés) et $y = G_{dB}(\omega)$
- Diagramme de Nyquist :
 - 1 seul graphe avec : $x = \Re(H(j\omega))$ et $y = \Im(H(j\omega))$

La construction de ces représentations d'une fonction complexe caractérisée par son module et son argument sont détaillées par la suite pour les systèmes à temps continu représentés par leur fonction de transfert $H(j\omega)$.

4.1 Le diagramme de Bode

On considère un système dynamique linéaire invariant causal mono-entrée mono-sortie à temps continu représenté par sa fonction de transfert $H(p)$ reliant l'entrée $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$ à la sortie $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$U(p) \xrightarrow{\boxed{H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}}} Y(p) = H(p)U(p)$$

Lorsque l'entrée $u(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , la sortie $y(t)$ sera de même pulsation avec une amplitude et une phase par rapport à $u(t)$ données par :

- Amplitude : $|y(t)| = |H(j\omega)| \cdot |u(t)| = G(\omega) \cdot |u(t)|$
- Phase : $\varphi_y \text{ par rapport à } u = \arg(H(j\omega)) = \varphi(\omega)$

Le diagramme de Bode est une représentation graphique de $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg(H(j\omega))}$ composée de 2 tracés qui sont :

- **le gain en décibels** de la fonction de transfert : $G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$
- **la phase en degrés** de la fonction de transfert : $\varphi(\omega) = \frac{180}{\pi} \arg(H(j\omega))$

en fonction de la pulsation ω (rad/s) sur une échelle logarithmique en abscisse.

Intérêts du diagramme de Bode :

- Le diagramme de Bode du produit de fonctions de transfert (mise en série) se construit par la somme de leurs diagrammes respectifs :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$
 - $G(\omega) = |H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| \cdot |H_2(j\omega)| \Rightarrow G_{dB}(\omega) = G_{1 dB}(\omega) + G_{2 dB}(\omega)$
 - $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$
- Facilité de construction : la construction des graphes par une suite de segments de droites est très proche de la réalité.
- La lisibilité du gain et de la phase sur une grande plage de pulsations

Étapes de la construction du diagramme de Bode :

- Déterminer les pôles et les zéros de $H(p)$.
- En déduire une factorisation de $H(p)$ sous la forme de produits de fonctions de transfert élémentaires normalisées du 1^{er} ou du 2nd ordre (on pourra regrouper les fonctions de transfert identiques).
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique de chaque fonction de transfert élémentaire.
- Effectuer la somme graphique de l'ensemble des diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire.

Règles d'aide à la construction :

- Le diagramme de Bode asymptotique est constitué d'un ensemble de demi-droites et de segments de droites. Pour chaque demi-droite ou segment il faut donc déterminer **2 points ou 1 point et 1 pente**
- Ces points et pentes sont déterminés par :
 - Valeurs calculées de $H(p)$: pôles, zéros
 - Expressions limites de $H(p)$: $p \rightarrow 0$ et $p \rightarrow \infty$

Exemple 1 de construction du diagramme de Bode asymptotique : $H(p) = \frac{A}{(\frac{p}{p_0} + 1)^n}$

$$\Rightarrow H(p = j\omega) = \frac{A}{(1 + j\frac{\omega}{p_0})^n}, \text{ pôle multiple d'ordre } n \text{ en } p = -p_0$$

- A la pulsation : $\omega_0 = |p_0|$:

$$\text{Gain en dB : } |H(j\omega_0)|_{dB} = dB\left(\frac{A}{(\sqrt{2})^n}\right) = A_{dB} - n \times 3dB$$

$$\text{Phase en degrés : } \frac{180}{\pi}\varphi(\omega_0) = -n \times 45^\circ$$

- En basses fréquences : $\omega \rightarrow 0$ ($p \rightarrow j0$) $\Rightarrow H(p \rightarrow 0) \approx A$

$$\text{Gain en dB : } G_{dB}(\omega \ll \omega_0) \approx 20\log_{10}A$$

- demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(\omega_0, 20\log_{10}A)$ dirigée dans le sens des pulsations décroissantes

$$\text{Phase en degrés : } \frac{180}{\pi}\varphi(\omega \ll \omega_0) \rightarrow 0^-$$

- demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(\frac{\omega_0}{10}, 0)$ dirigée dans le sens des pulsations décroissantes

- En hautes fréquences : $\omega \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow j\infty$) $\Rightarrow H(p \rightarrow \infty) \approx \frac{A}{(\frac{p}{p_0})^n}$

$$\text{Gain en dB : } G_{dB}(\omega \gg \omega_0) \approx 20\log_{10}A - n \times 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- demi-droite de pente $-n \times 20dB/\text{décade} = -n \times 6dB/\text{octave}$ partant du point $(\omega_0, 20\log_{10}A)$ dirigée dans le sens des pulsations croissantes

$$\text{Phase en degrés : } \frac{180}{\pi}\varphi(\omega \gg \omega_0) \rightarrow 0 - n \times 90^\circ$$

- demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(10\omega_0, -n \times 90^\circ)$ dirigée dans le sens des pulsations croissantes

- Zone de transition de la phase : $\frac{\omega_0}{10} \leq \omega \leq 10\omega_0$

- Phase en degrés : segment de droite reliant les points : $(\frac{\omega_0}{10}, 0)$ et $(10\omega_0, -n \times 90^\circ)$ passe par le point : $(\omega_0, -n \times 45^\circ)$

Application de l'exemple 1 : $H(p) = \frac{2}{(0.5p+1)^2}$,

Caractéristiques : Ordre $n = 2$, Gain statique $= 2 = 6$ dB, Pôle : $p_0 = -2 \Rightarrow \omega_0 = |p_0| = 2$ rad / s.

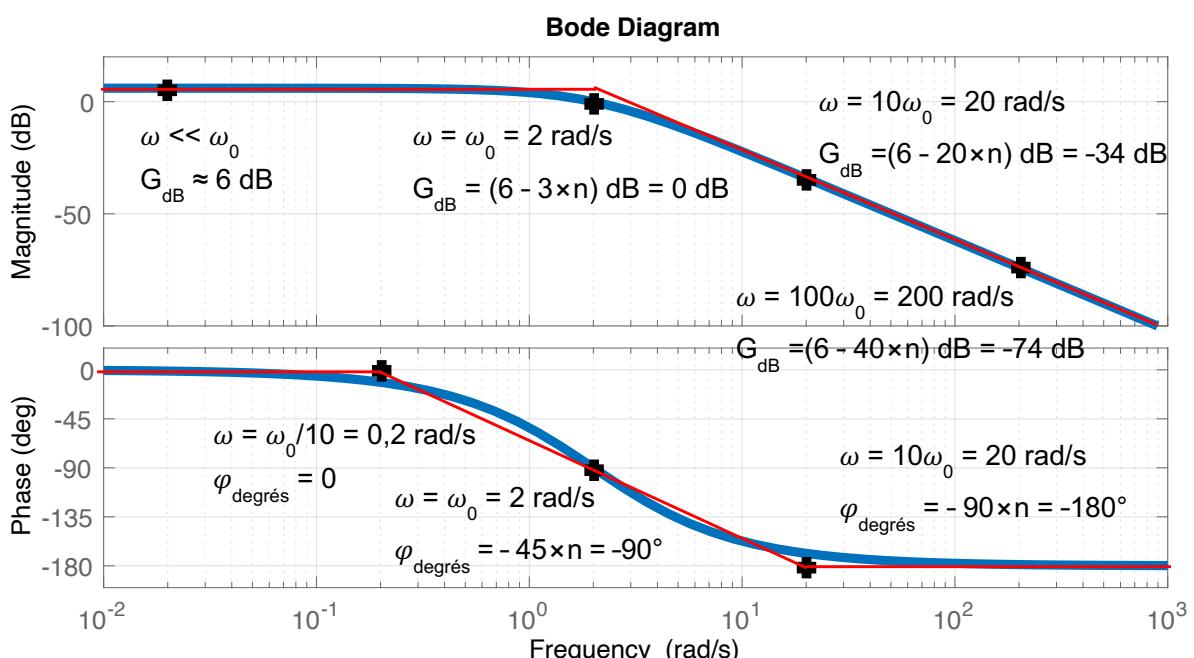


Figure D.3 – Diagramme de Bode de $H(p) = \frac{2}{(0.5p+1)^2}$ avec indication des points caractéristiques.
Courbe rouge : diagramme asymptotique, Courbe bleue : diagramme exact.

Exemple 2 de construction du diagramme de Bode asymptotique : $H(p) = A \left(\frac{p}{p_0} + 1 \right)^n$

$$\Rightarrow H(p = j\omega) = A \left(1 + j \frac{\omega}{p_0} \right)^n, \text{ zéro multiple d'ordre } n \text{ en } p = -p_0$$

- A la pulsation : $\omega_0 = |p_0|$:
 - Gain en dB : $|H(j\omega_0)|_{dB} = dB \left(A(\sqrt{2})^n \right) = A_{dB} + n \times 3dB$
 - Phase en degrés : $\frac{180}{\pi} \varphi(\omega_0) = n \times 45^\circ$
- En basses fréquences : $\omega \rightarrow 0$ ($p \rightarrow j0$) $\Rightarrow H(p \rightarrow 0) \approx A$
 - Gain en dB : $G_{dB}(\omega \ll \omega_0) \approx 20 \log_{10} A$
 - demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(\omega_0, 20 \log_{10} A)$ dirigée dans le sens des pulsations décroissantes
 - Phase en degrés : $\frac{180}{\pi} \varphi(\omega \ll \omega_0) \rightarrow 0^+$
 - demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(\frac{\omega_0}{10}, 0)$ dirigée dans le sens des pulsations décroissantes
- En hautes fréquences : $\omega \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow j\infty$) $\Rightarrow H(p \rightarrow \infty) \approx A \left(\frac{p}{p_0} \right)^n$
 - Gain en dB : $G_{dB}(\omega \gg \omega_0) \approx 20 \log_{10} A + n \times 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{p_0} \right)$
 - demi-droite de pente $n \times 20dB/\text{décade} = n \times 6dB/octave$ partant du point $(\omega_0, 20 \log_{10} A)$ dirigée dans le sens des pulsations croissantes
 - Phase en degrés : $\frac{180}{\pi} \varphi(\omega \gg \omega_0) \rightarrow 0 + n \times 90^\circ$
 - demi-droite horizontale (pente nulle) partant du point $(10\omega_0, +n \times 90^\circ)$ dirigée dans le sens des pulsations croissantes
- Zone de transition de la phase : $\frac{\omega_0}{10} \leq \omega \leq 10\omega_0$
 - Phase en degrés : segment de droite reliant les points : $(\frac{\omega_0}{10}, 0)$ et $(10\omega_0, n \times 90^\circ)$ passe par le point : $(\omega_0, n \times 45^\circ)$

Cas des systèmes stables à non minimum de phase

- Les systèmes stables (pôles à partie réelle négative) qui possèdent des **zéros stables** sont dits à **minimum de phase**
 - Le diagramme de Bode asymptotique de phase **peut** se déduire de celui du gain :
 - Pente nulle de gain \Rightarrow phase nulle
 - Pente de gain de $-n \times 20dB/\text{décade}$ \Rightarrow phase de $-n \times 90^\circ$
 - Pente de gain de $n \times 20dB/\text{décade}$ \Rightarrow phase de $n \times 90^\circ$
- Les systèmes stables sont dits à **non minimum de phase** s'ils possèdent des **zéros instables** (à partie réelle positive)
 - Le diagramme de Bode asymptotique de phase **ne peut pas** se déduire de celui du gain
- **Exemple du filtre Passe-Tout du 1^{er} ordre :** $H(p) = \frac{p_0 - p}{p + p_0}$

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{p_0} \right)$$

Un filtre passe-tout est utilisé en pratique pour ajouter/modéliser un retard en basses fréquences.

4.2 Le diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black-Nichols est utilisé en automatique pour l'analyse de systèmes bouclés et la détermination de correcteurs.

Ce diagramme est la mise sur un seul graphe des deux graphes du diagramme de Bode en éliminant la pulsation (courbe paramétrée en ω) :

- Diagramme de Bode :
 - \Rightarrow 1 graphe de gain : $x = \omega$ (échelle logarithmique),
 $y = 20 \log_{10} G(\omega) = G_{dB}(\omega)$ (échelle linéaire)
 - \Rightarrow 1 graphe de phase : $x = \omega$ (échelle logarithmique),
 $y = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés) (échelle linéaire)
- Diagramme de Black-Nichols :
 - \Rightarrow 1 seul graphe : $x = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega)$ (degrés) : (phase du diagramme de Bode),
 $y = G_{dB}(\omega)$ (gain du diagramme de Bode)

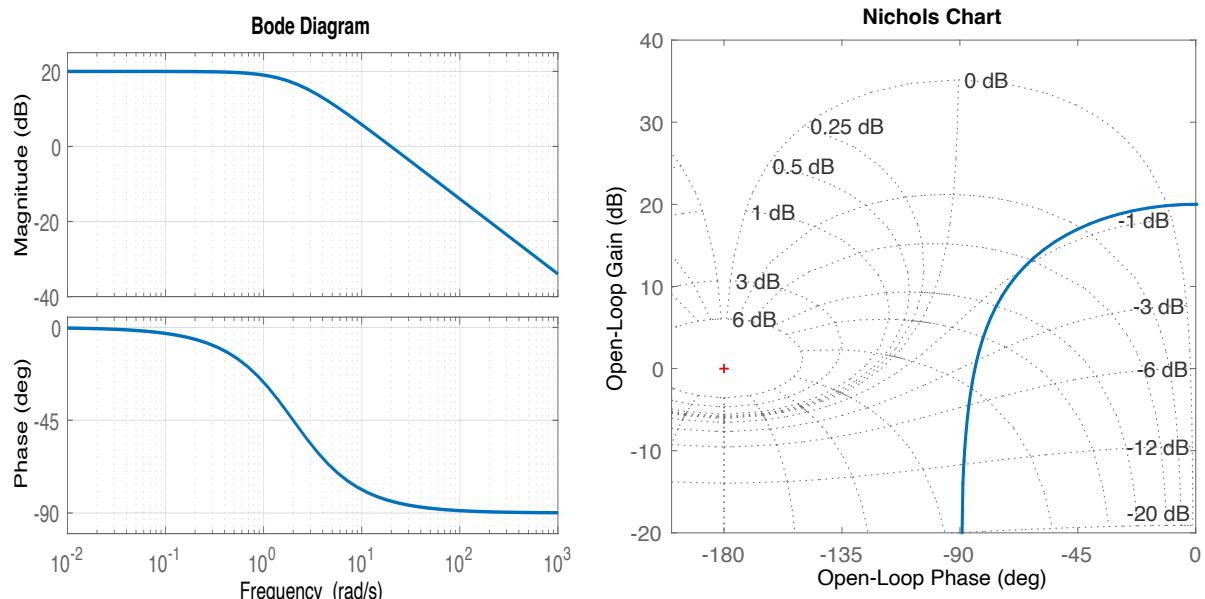


Figure D.4 – Pour $H(p) = \frac{10}{0.5p+1}$: Diagrammes de Bode (figure de gauche) et de Black-Nichols (figure de droite).

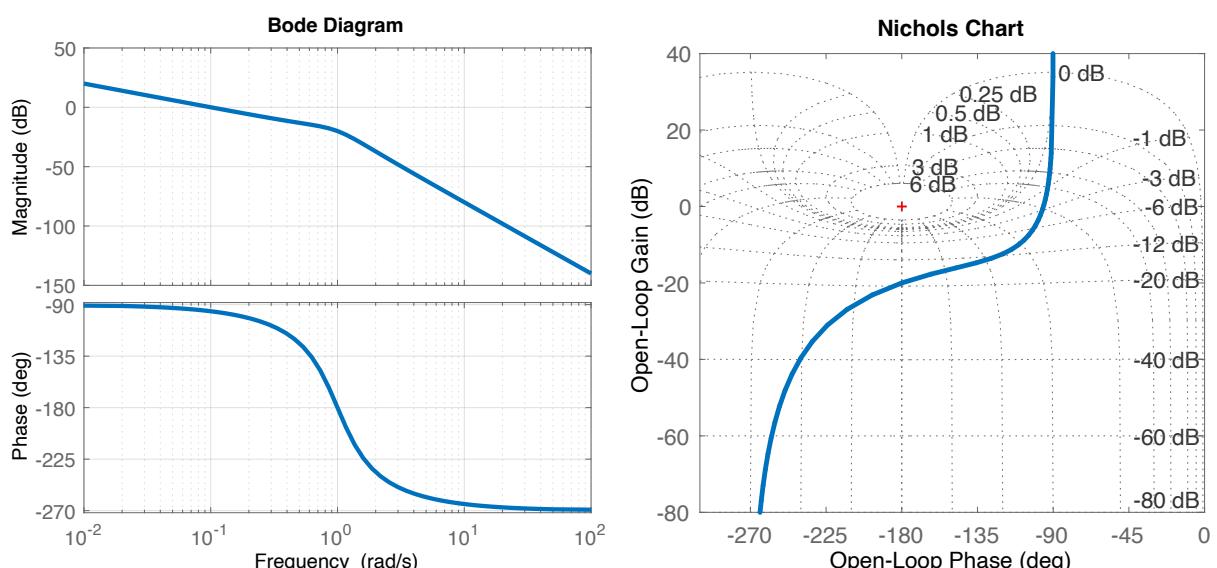


Figure D.5 – Pour $H(p) = \frac{1}{10p(p^2 + p + 1)}$: Diagrammes de Bode (gauche) et de Black-Nichols (droite).

4.3 Le diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est utilisé en automatique pour l'analyse de systèmes bouclés et la détermination de correcteurs.

Le diagramme de Nyquist n'est rien d'autre que la représentation dans le plan complexe du nombre complexe $H(j\omega)$ (courbe paramétrée en ω) :

- $x = \Re(H(j\omega)) = G(\omega) \cdot \cos(\varphi(\omega))$
- $y = \Im(H(j\omega)) = G(\omega) \cdot \sin(\varphi(\omega))$

Règles de construction :

- S'aider du diagramme de Bode
- Le diagramme de Nyquist d'une fonction de transfert du 1^{er} ordre est toujours un demi-cercle pour ω variant de 0 à $+\infty$, et un cercle pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$.
- Déterminer les quadrants successifs parcourus par la courbe image
- Déterminer les valeurs du module, de la phase, ainsi que les tangentes à la courbe image de $H(j\omega)$ aux limites : $\omega \rightarrow 0^+$ et $\omega \rightarrow +\infty$.

Exemple pour $H(p) = \frac{10p+1}{p^2+p+1}$: $H(j\omega) = \frac{1+j10\omega}{1-\omega^2+j\omega}$

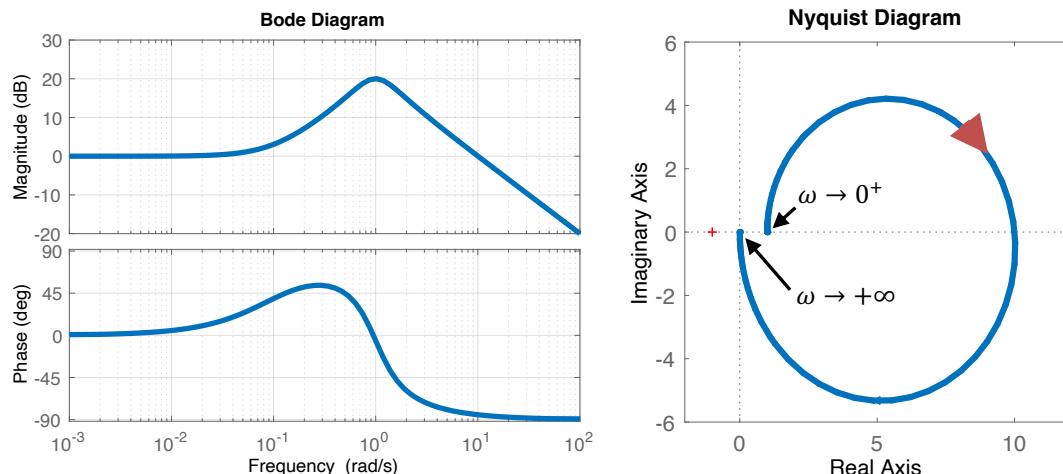


Figure D.6 – Pour $H(p) = \frac{10p+1}{p^2+p+1}$: Diagrammes de Bode (gauche) et de Nyquist (droite).

4.4 Construction des diagrammes pour les systèmes à temps discret

Dans le cas des systèmes linéaires invariants causaux SISO à temps discret, leur modèle est donné par une fonction de transfert $H_d(z)$ de la variable complexe z de la forme :

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

La variable z est reliée à la pulsation ω en rad/s et à la période d'échantillonnage T_e par :

$$z = e^{j\omega T_e} = \cos(\omega T_e) + j\sin(\omega T_e)$$

avec $\omega \in [0, \omega_{max}]$, $\omega_{max} = \frac{1}{2}(2\pi f_e) = \frac{\pi}{T_e}$.

Lorsque l'entrée à temps discret $u(k)$ est sinusoïdale de pulsation $\omega \in [0, \omega_{max}]$, la sortie à temps discret $y(k)$ sera de même pulsation avec une amplitude et une phase par rapport à $u(k)$ données par :

- Amplitude : $|y(k)| = |H_d(z = e^{j\omega T_e})| \cdot |u(k)| = G(\omega) \cdot |u(t)|$
- Phase : $\varphi_y \text{ par rapport à } u = \arg(H_d(z = e^{j\omega T_e})) = \varphi(\omega)$

De la même façon que pour les systèmes à temps continu, les diagrammes de Bode, Black-Nichols et Nyquist permettent de représenter graphiquement la transmittance complexe $H_d(z = e^{j\omega T_e})$. Par contre, la détermination des diagrammes « à la main » sera plus difficile car la variable n'est plus $j\omega$ mais $\cos(\omega T_e) + j\sin(\omega T_e)$. En pratique, on utilisera un ordinateur pour le calcul du gain et de l'argument de $H_d(z = e^{j\omega T_e})$ pour réaliser les tracés.

Exemple de diagrammes pour un système du 1^{er} ordre à temps continu et à temps discret

Un système passe-bas du 1^{er} ordre à temps continu est défini par la fonction de transfert :

$$H_c(p) = \frac{G}{\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\tau p + 1}$$

où ω_0 est la pulsation de coupure en rad/s, $\tau = 1/\omega_0$ est la constante de temps en secondes, et $G = H(p = 0)$ est le gain statique. $H(p)$ n'a pas de zéro et possède un pôle en $p = -\omega_0 = -1/\tau$.

La réponse fréquentielle est obtenue en posant $p = j\omega$ dans la fonction de transfert, d'où :

$$H_c(j\omega) = |H_c(j\omega)| e^{j \arg(H_c(j\omega))} = \frac{G}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{G}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{-j \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

avec $\omega \in [0, +\infty[$.

La fonction de transfert à temps discret de ce même système, dans le cas où l'entrée est maintenue constante entre deux instants d'échantillonnage T_e (utilisation d'un bloqueur d'ordre zéro), est :

$$H_d(z) = \frac{G(1 - z_0)}{z - z_0}$$

avec $z_0 = e^{-\omega_0 T_e}$.

La réponse fréquentielle de $H_d(z)$ est obtenue en posant $z = e^{j\omega T_e} = \cos(\omega T_e) + j\sin(\omega T_e)$:

$$H_d(z = e^{j\omega T_e}) = \frac{G(1 - z_0)}{\cos(\omega T_e) - z_0 + j\sin(\omega T_e)} = \frac{G(1 - z_0)(\cos(\omega T_e) - z_0 - j\sin(\omega T_e))}{(\cos(\omega T_e) - z_0)^2 + (\sin(\omega T_e))^2}$$

avec $\omega \in [0, \omega_{max}]$, $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$.

Pour le cas particulier où $G = 10$ et $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, on obtient :

$$H_c(p) = \frac{10}{p + 1}$$

En prenant une période d'échantillonnage $T_e = 0.03 \text{ s}$ qui satisfait $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e} > 100\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$, il vient pour $z_0 = e^{-\omega_0 T_e} = 0.9704$ et la fonction de transfert à temps discret :

$$H_d(z) = \frac{0.296}{z - 0.9704}, \quad T_e = 0.03 \text{ s}$$

On vérifie que le gain statique $H_d(z = 1) = 10$.

Se référer au **chapitre Signaux à temps continu et temps discret – Échantillonnage** pour la justification de ces choix.

La figure D7 donne les diagrammes de Bode, Nyquist et Black-Nichols obtenus pour les fonctions de transfert à temps continu et temps discret.

Sur le diagramme de Bode de la figure D.7, on remarque qu'en basses fréquences les gains et phases des fonctions de transfert à temps continu et à temps discret sont identiques. Le choix de la valeur de la période d'échantillonnage à $T_e = 0.03 \text{ s} \approx \frac{\pi}{100\omega_0}$ permet cette proximité des réponses en gain et en phase jusqu'à une pulsation proche de $10\omega_0$. Au-delà de cette pulsation la phase de la fonction de transfert à temps discret diverge rapidement de celle de la fonction de transfert à temps continu : pour ces fréquences élevées on ne peut plus considérer une équivalence entre ces deux représentations.

On note aussi sur ce diagramme de Bode la pulsation maximale à temps discret donnée par $\omega_{max} = \frac{1}{2}(2\pi f_e) = \frac{\pi}{T_e} \approx 105 \text{ rad/s}$.

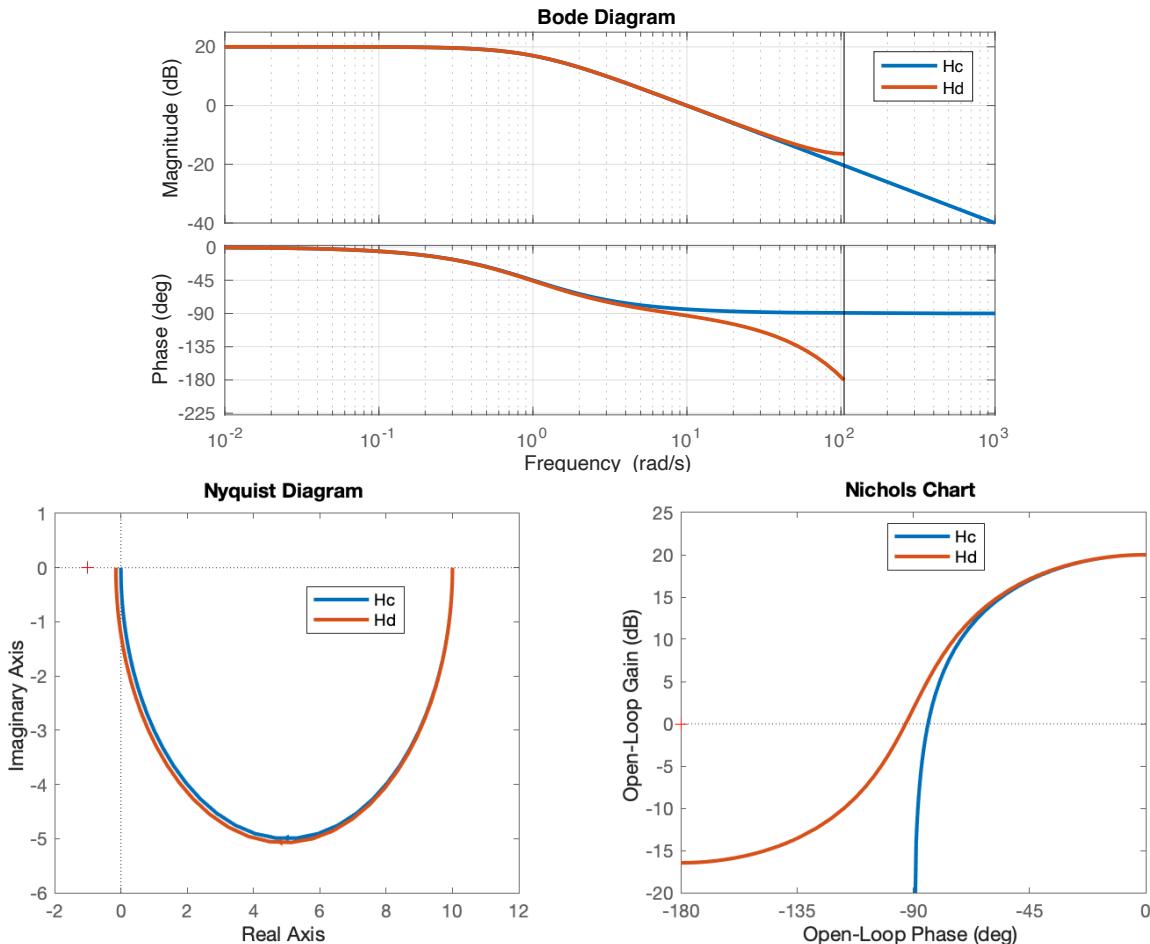


Figure D.7 – Diagrammes fréquentiel d'une fonction de transfert du 1^{er} ordre à temps continu (H_c) et à temps discret (H_d), (haut) Diagramme de Bode, (bas gauche) Diagramme de Nyquist, (bas droite) Diagramme de Black-Nichols.

5. Analyse des systèmes linéaires passe-bas du 1^{er} et 2nd ordre à temps continu

La fonction de transfert $H(p)$ qui représente la relation entrée-sortie d'un système linéaire invariant causal à temps continu est donnée par :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}^+$, $\infty > n \geq m$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $|a_i|, |b_i| < \infty$.

Une fonction de transfert sera caractérisée par son gain statique, ses pôles et ses zéros. Les valeurs des coefficients a_i et b_i de la représentation développée ci-dessus ne permettent pas, dans le cas de systèmes d'ordre supérieur à 2, de caractériser immédiatement le comportement du système. Aussi, à cette représentation développée on préférera souvent une représentation factorisée qui met clairement en évidence les pôles p_i et zéros z_i du système. Sachant que tout polynôme possède des racines réelles et/ou complexes conjuguées, il est donc possible de factoriser les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ de $H(p)$ sous la forme de produits de polynômes du premier et/ou du second ordre. Toute fonction de transfert peut donc être vue comme la mise en série de systèmes du 1^{er} et 2nd ordre :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m(p+z_1)(p+z_2)\dots(p^2+2.\operatorname{Re}(z_i)p+|z_i|^2)(p^2+2.\operatorname{Re}(z_j)p+|z_j|^2)}{a_n(p+p_1)(p+p_2)\dots(p^2+2.\operatorname{Re}(p_i)p+|p_i|^2)(p^2+2.\operatorname{Re}(p_j)p+|p_j|^2)}$$

Il est donc très important de parfaitement connaître les comportements des systèmes du 1^{er} et 2nd ordre. Les sections suivantes décrivent les caractéristiques essentielles des systèmes de type passe-bas du 1^{er} et 2nd ordre.

5.1 Systèmes passe-bas du 1^{er} ordre

Un système passe-bas du 1^{er} ordre à temps continu est défini par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{\frac{G}{p}}{\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{G}{\tau p + 1}$$

où ω_0 est la pulsation de coupure en rad/s, $\tau = 1/\omega_0$ est la constante de temps en secondes, et $G = H(p=0)$ est le gain statique.

$H(p)$ n'a pas de zéro et possède un pôle en $p = -\omega_0 = -1/\tau$.

5.1.1 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle est obtenue en posant $p = j\omega$ dans la fonction de transfert, d'où :

$$H(j\omega) = \frac{G}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

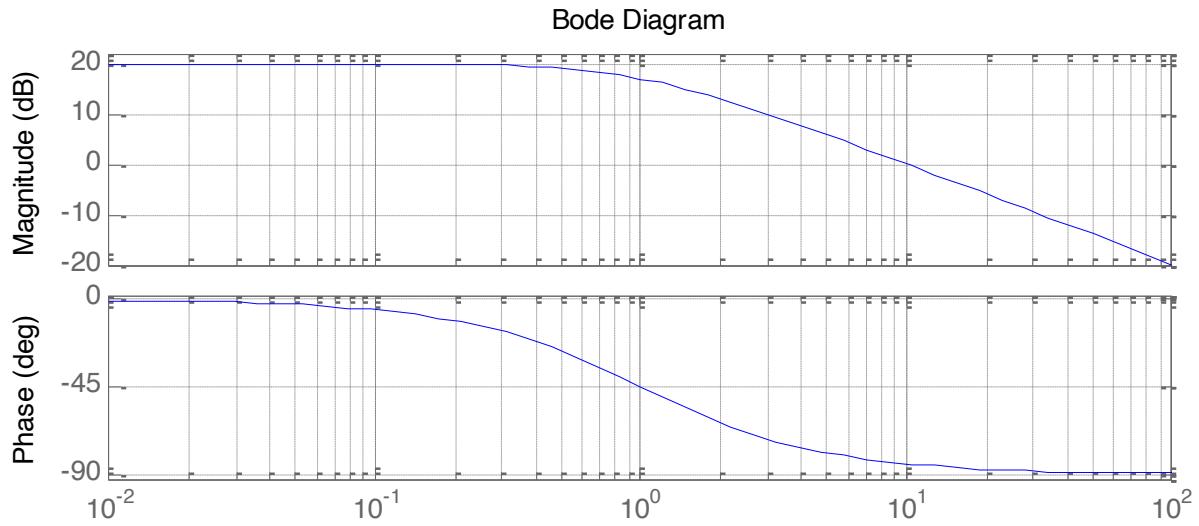
Cette expression complexe peut être décomposée sous la forme module et argument :

$$H(j\omega) = \frac{G}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = |H(j\omega)| e^{j \arg(H(j\omega))} = \frac{G}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{-j \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

La figure D.8 donne le diagramme de Bode de $H(p) = \frac{10}{p+1}$ obtenu à partir du gain et de l'argument (phase) de $H(j\omega)$ pour chaque pulsation ω . Cette fonction de transfert possède un gain statique $H(p=0) = 10$ et un pôle $p_0 = -1$ (racine du dénominateur) de module $|p_0| = 1$ rad/s.

Le gain statique valant 10, le gain asymptotique en basse fréquences dans le diagramme de Bode est donc de $20 \text{ dB} = 20 \log_{10}(10)$. Ensuite à partir de la pulsation de coupure (module du pôle, ici 1 rad/s), le gain subit une atténuation de 20 dB par décade de la pulsation. On a donc un gain de 0 dB à la pulsation 10 rad/s, puis -20 dB à 100 rad/s.

Concernant la phase, elle varie de 0° , en très basses fréquences, à -90° en très hautes fréquences. En pratique, on pourra considérer une phase de 0° pour des pulsations inférieures à $\omega_0/10$, une phase de -90° pour des pulsations supérieures à $10\omega_0$, et enfin de manière exacte, une phase de -45° à la pulsation ω_0 .

Figure D.8 – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert passe-bas du 1^{er} ordre.

5.1.2 Réponse à un échelon à conditions initiales nulles

A conditions initiales nulles de la sortie, pour une entrée de type échelon d'amplitude U_0 , la réponse du système est donnée par :

$$y(t) = G \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot U_0 = G \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_0, \quad t \geq 0$$

Nous avons les valeurs remarquables suivantes :

$$y(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty, \quad y(t) \rightarrow y_{\infty} = G \cdot U_0.$$

$$y(t=3\tau) = (1-e^{-3}) \cdot y_{\infty} \approx 0.95 \quad y_{\infty} = 0.95 \cdot G \cdot U_0. \quad (95\% \text{ de la valeur finale})$$

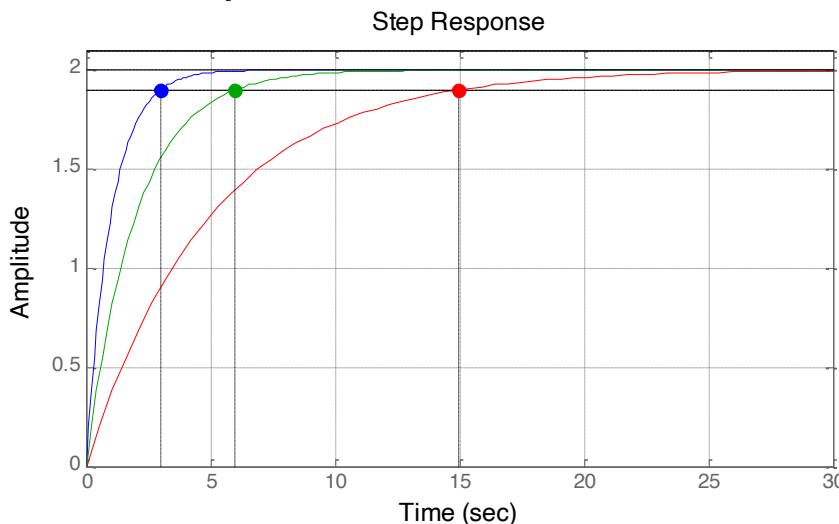
$$y(t=5\tau) = (1-e^{-5}) \cdot y_{\infty} \approx 0.99 \quad y_{\infty} = 0.99 \cdot G \cdot U_0. \quad (99\% \text{ de la valeur finale})$$

La réponse de la sortie du système est d'autant plus rapide que la constante de temps est petite, ou de la même manière que le module du pôle est grand.

La réponse à une entrée constante d'un système passe-bas du 1^{er} ordre est de type apériodique, c'est-à-dire qu'à aucun moment il n'y a de dépassement de la valeur finale de la sortie.

La figure D.9 donne les réponses temporelles pour différentes valeurs de la constante de temps τ de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2}{\frac{p}{\omega_0} + 1} = \frac{2}{\tau p + 1} \quad \text{avec } \tau = 1, 2 \text{ et } 5 \text{ secondes.}$$

Figure D.9 – Réponse à un échelon unitaire d'une fonction de transfert passe-bas du premier ordre de gain statique 2 pour 3 constantes de temps différentes ($\tau = 1, 2$ et 5 secondes).

Les ronds sont les instants où les réponses atteignent 95% de la valeur finale. On obtient bien pour les trois constantes de temps un temps de réponse à 95% égal à 3τ .

5.2 Mise en série de systèmes passe-bas du 1^{er} ordre

Lorsqu'un système de type passe-bas possède plusieurs pôles à parties réelles strictement négatives, il peut être vu comme la mise en série de plusieurs systèmes du premier ordre de type passe-bas.

Si les pôles sont identiques, une fonction de transfert de type passe-bas d'ordre n prendra la forme suivante :

$$H(p) = \frac{G}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^n} = \frac{G}{(\tau p + 1)^n}$$

Pour une entrée constante de type échelon d'amplitude U_0 , la valeur finale de la sortie sera donnée par : $y_\infty = G \cdot U_0$ et le temps de réponse à 95% de la valeur finale dépendra de la valeur du pôle (de la constante de temps) et de l'ordre du système. Le tableau D.1 permet de déterminer le temps de réponse à 95% de la valeur finale en fonction de l'ordre du système :

$$t_{rep \text{ à } 95\%} = a \tau = \frac{a}{\omega_0}$$

degré n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5	12	13,2	14,6	16

Tableau D.1 : Détermination du temps de réponse à 95% de la valeur finale des systèmes passe bas d'ordre n .

La figure D.10 donne la réponse à une entrée en échelon unitaire de systèmes avec $G = 1$, $\tau = 1\text{s}$, et $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

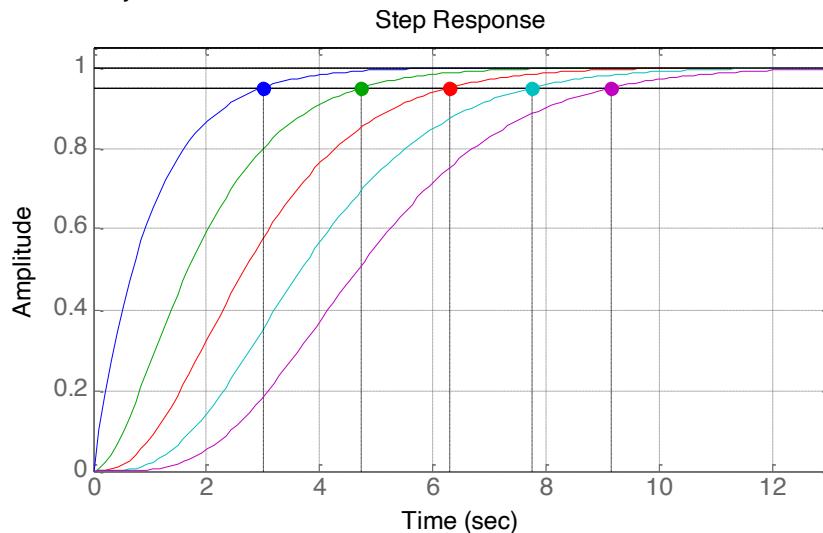


Figure D.10 – Réponse à un échelon unitaire de fonctions de transfert passe-bas d'ordre $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $G = 1$, $\tau = 1\text{s}$. Les ronds sont les instants où les réponses atteignent 95% de la valeur finale.

On retrouve les valeurs données par le tableau D.1.

Lorsque les pôles réels de $H(p)$ sont différents, une fonction de transfert de type passe-bas d'ordre n prendra la forme suivante :

$$H(p) = \frac{G}{\prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{p}{\omega_k} + 1 \right)} = \frac{G}{\prod_{k=1}^{k=n} (\tau_k p + 1)}$$

Par exemple, un système passe-bas du 3^{ème} ordre à pôles réels stables sera donné par :

$$H(p) = \frac{G}{\left(\frac{p}{\omega_1} + 1 \right) \cdot \left(\frac{p}{\omega_2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{p}{\omega_3} + 1 \right)} = \frac{G}{(\tau_1 p + 1) \cdot (\tau_2 p + 1) \cdot (\tau_3 p + 1)}$$

Suivant les valeurs des pôles les uns par rapport aux autres, on pourra en tirer des conséquences sur la réponse du système. Par exemple, lorsque la fonction de transfert possède un pôle très dominant, c'est dire de module au moins cent fois inférieur à tous les autres, on pourra considérer que la réponse temporelle de la fonction de transfert est équivalente à celle d'un système du premier ordre ne possédant que le pôle dominant. La comparaison de la réponse à un échelon d'entrée d'amplitude unitaire de $H(p)$ et de son approximation $H_{app}(p)$ est représentée sur la figure D.11. dans le cas où $H(p)$ possède un pôle très dominant.

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p+1}{1}\right)\left(\frac{p}{100}+1\right)\left(\frac{p}{200}+1\right)} = \frac{1}{(p+1)(0.01p+1)(0.005p+1)} \sim H_{app}(p) = \frac{1}{p+1}$$

$H(p)$ possède trois pôles : $\{-1; -100; -200\}$. Le pôle en -1 rad/s est clairement le pôle dominant puisqu'au moins 100 fois plus lent que les deux autres. L'approximation $H_{app}(p)$ se justifie. Néanmoins, le domaine de validité de $H_{app}(p)$ est restreint. On s'accorde en général sur le fait que cette approximation, qui consiste à négliger des pôles (dynamiques) rapides, est valable jusqu'à une pulsation égale à $1/10$ du premier pôle négligé. Dans le cas de l'exemple, le module du premier pôle négligé est égal à 100 rad/s, d'où une validité du modèle $H_{app}(p)$ jusqu'à la pulsation 10 rad/s.

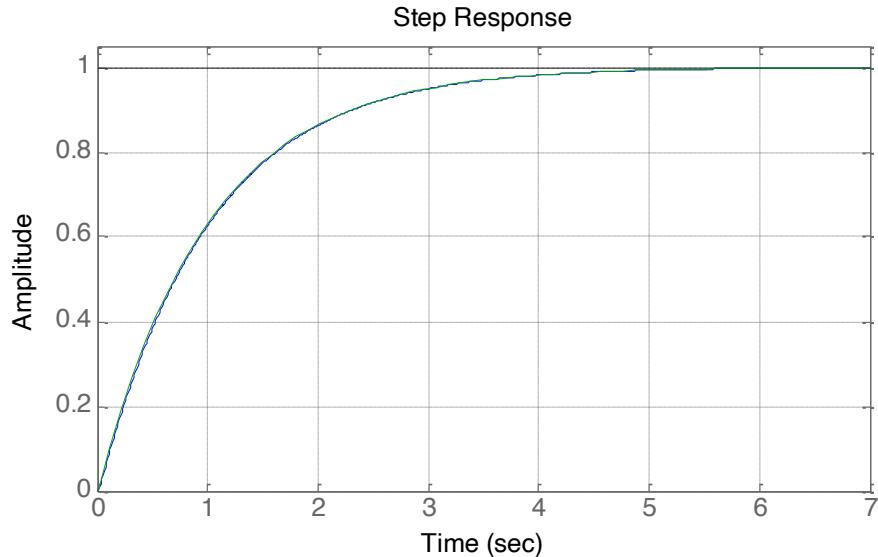


Figure D.11 – Réponse à un échelon unitaire d'une fonction de transfert passe-bas d'ordre 3 et de son approximation au premier ordre en ne gardant que le pôle dominant. Les deux réponses sont quasi-confondues.

L'approximation consistant à négliger tous les pôles rapides par rapport au pôle dominant de la fonction de transfert correspond à approcher en basse fréquences le système initial et à négliger le comportement en hautes fréquences. La figure D.12 donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H(p)$ et de son approximation au 1^{er} ordre $H_{app}(p)$. Comme indiqué plus haut, on retrouve le domaine de validité de $H_{app}(p)$ jusqu'à la pulsation 10 rad/s. Au-delà de cette pulsation, un écart important commence à apparaître entre les phases de $H(j\omega)$ et de $H_{app}(j\omega)$ puis entre les gains à partir de la pulsation du premier pôle négligé (100 rad/s).

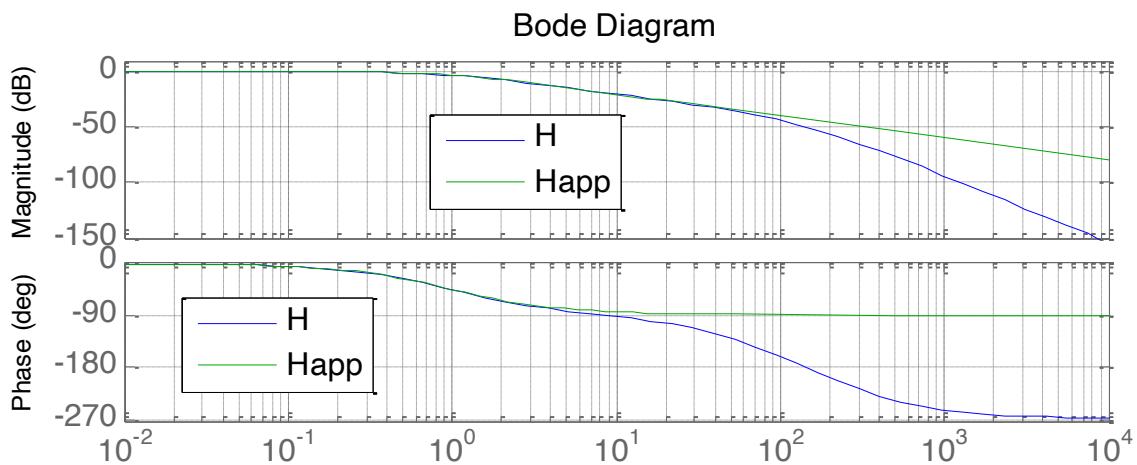


Figure D.12 – Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert passe-bas d'ordre 3 et de son approximation au premier ordre en ne gardant que le pôle dominant.

5.3 Systèmes passe-bas du 2nd ordre

Un système linéaire passe-bas du second ordre d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est régi par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants du type :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dy}{dt} + y(t) = Gu(t) \Leftrightarrow T_0^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2mT_0 \frac{dy}{dt} + y(t) = GU(t)$$

où $\omega_0 = \frac{1}{T_0} > 0$ est la pulsation propre ou pulsation naturelle ou pulsation libre (en rad/s),

m (souvent noté ξ) est le coefficient d'amortissement,

G est le gain statique du système.

L'obtention de la trajectoire $y(t)$ du système connaissant l'entrée $u(t)$ à partir de la résolution de l'équation différentielle nécessite de connaître deux conditions initiales, le plus souvent $y(0)$ et $y'(0)$.

L'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle qui régit le système pour les instants positifs ($t > 0$) donne :

$$\frac{1}{\omega_0^2} (p^2 Y(p) - p y(0^+) - y'(0^+)) + \frac{2m}{\omega_0} (p Y(p) - y(0^+)) + Y(p) = GU(p)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, il vient la fonction de transfert suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_0} p + 1 \right) Y(p) = GU(p) \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{G}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2m}{\omega_0} p + 1}$$

5.3.1 Réponses à une entrée en échelon unitaire à conditions initiales nulles

On s'intéresse à la réponse du système à conditions initiales nulles pour les instants positifs ($t \geq 0$) avec une entrée de type échelon unitaire. On considère la fonction de transfert suivante :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{G}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{G}{1 + 2mT_0 p + (T_0 p)^2}$$

5.3.1.1 Régime apériodique

Si $m > 1$, une réponse apériodique est obtenue, la sortie ne dépasse alors jamais sa valeur finale pour une entrée en échelon.

Les pôles du système sont réels négatifs, i.e. le dénominateur possède deux racines réelles négatives ($-\omega_1, -\omega_2$). La fonction de transfert peut se décomposer comme le produit (mise en série) de deux systèmes du premier ordre :

$$H(p) = \frac{G}{(p + \omega_1)(p + \omega_2)}$$

La réponse à un échelon unité, à conditions initiales nulles, est donnée par :

$$y(t) = G \left[1 - \frac{1}{2} \left((1-a)e^{-\omega_1 t} + (1+a)e^{-\omega_2 t} \right) \right]$$

$$\text{avec } a = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}, \quad \omega_1 = \left(m + \sqrt{m^2 - 1} \right) \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \left(m - \sqrt{m^2 - 1} \right) \omega_0$$

La figure D.13 donne des exemples de réponses avec :

$$G = 2, \omega_0 = 10 \text{ rad/s} \text{ et } m = \{1.1; 2; 4; 10\}$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{2}{1 + \frac{2m}{10} p + \frac{p^2}{100}} = \frac{2}{1 + 0.2m p + (0.1p)^2}$$

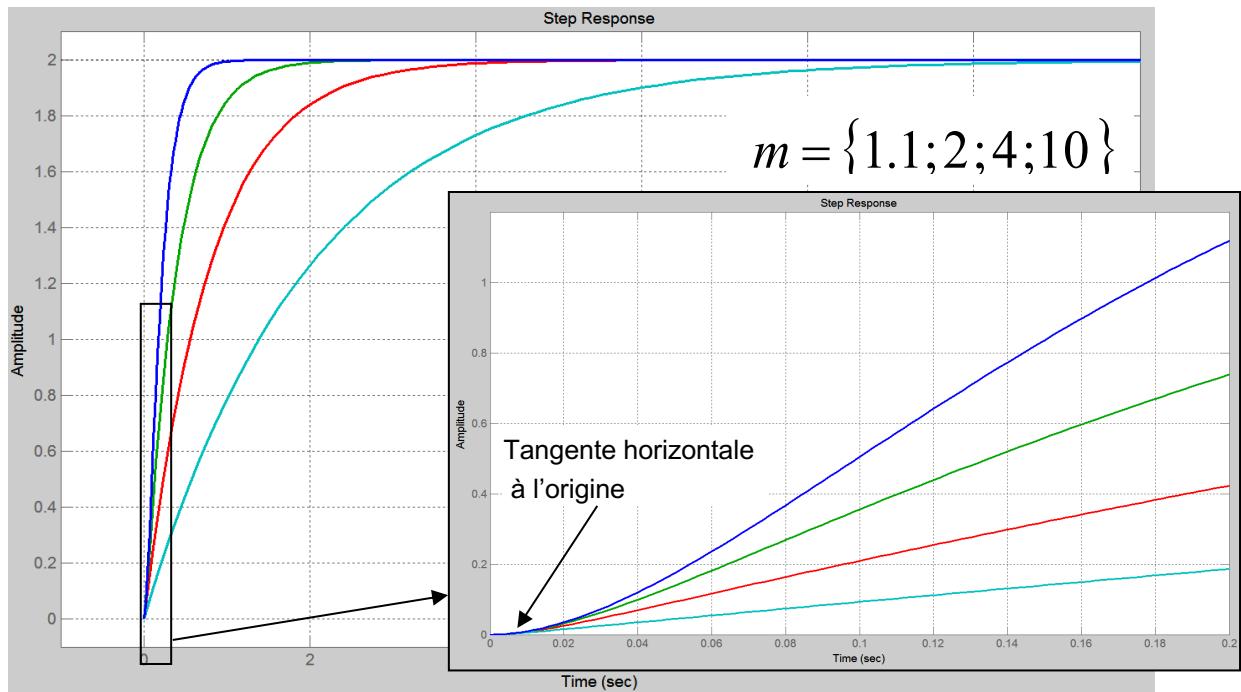


Figure D.13 – Réponses à un échelon unitaire d'entrée d'un système passe-bas du second ordre de gain statique 2 et de pulsation propre $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ pour différentes valeurs de son facteur d'amortissement m .

5.3.1.2 Régime critique

Si $m = 1$, on parle de régime critique, la sortie ne dépasse jamais sa valeur finale pour une entrée en échelon.

Les pôles du système sont réels positifs et identiques, i.e. le dénominateur possède deux racines réelles identiques négatives.

La réponse à un échelon unité est alors donnée par :

$$y(t) = G \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right]$$

5.3.1.3 Régime pseudo-oscillatoire

Si $0 < m < 1$, une réponse pseudo-oscillatoire est obtenue, la sortie dépasse, éventuellement plusieurs fois, sa valeur finale, figure D.15. Les pôles du système sont complexes conjugués avec la même partie réelle négative. La réponse à un échelon unité est donnée par :

$$y(t) = G \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cos(\omega_r t - \varphi) e^{-m\omega_0 t} \right] \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \quad \text{et} \quad \omega_r = \sqrt{1-m^2} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_{osc}}$$

– Instant du premier maximum :

$$T_{1^{er} \max} = \frac{T_{osc}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-m^2} \omega_0}$$

– Valeur du premier dépassement en % :

$$D\% = 100 \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} = 100 e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

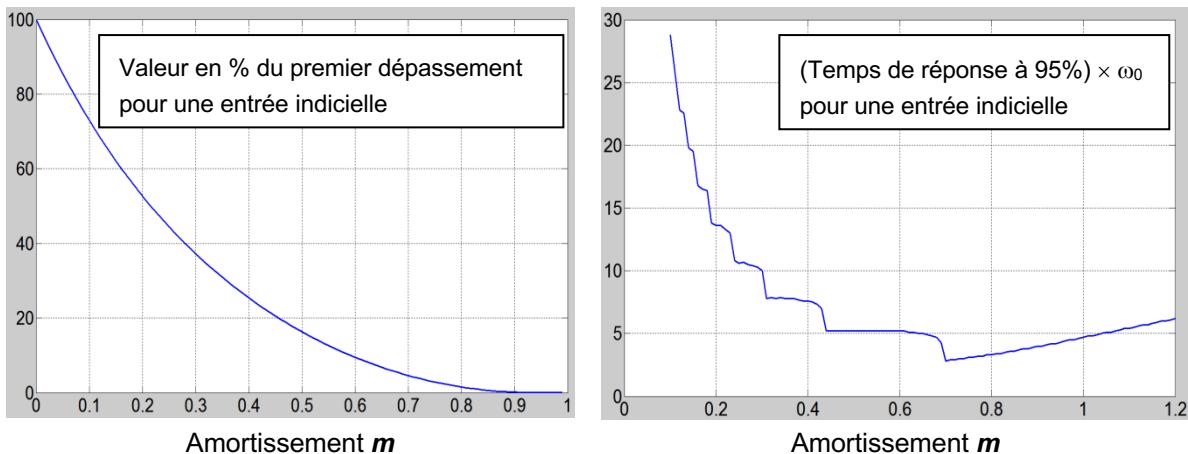


Figure D.14 – (gauche) Valeur en % du premier dépassement pour une entrée indicielle en fonction de l'amortissement m . (droite) Temps de réponse réduit ($\omega_0=1$) à 95% en fonction de l'amortissement m .

Sur la figure D.14 (droite), on peut voir que le temps de réponse à 95% minimum est obtenu pour un amortissement $m = 0.7$.

La figure D.15 donne des exemples de réponses pour :

$$G = 1, \omega_0 = 10 \text{ rad/s}, m = \{0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\},$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{10} p + \frac{p^2}{100}} = \frac{1}{1 + 0.2m p + (0.1p)^2}$$

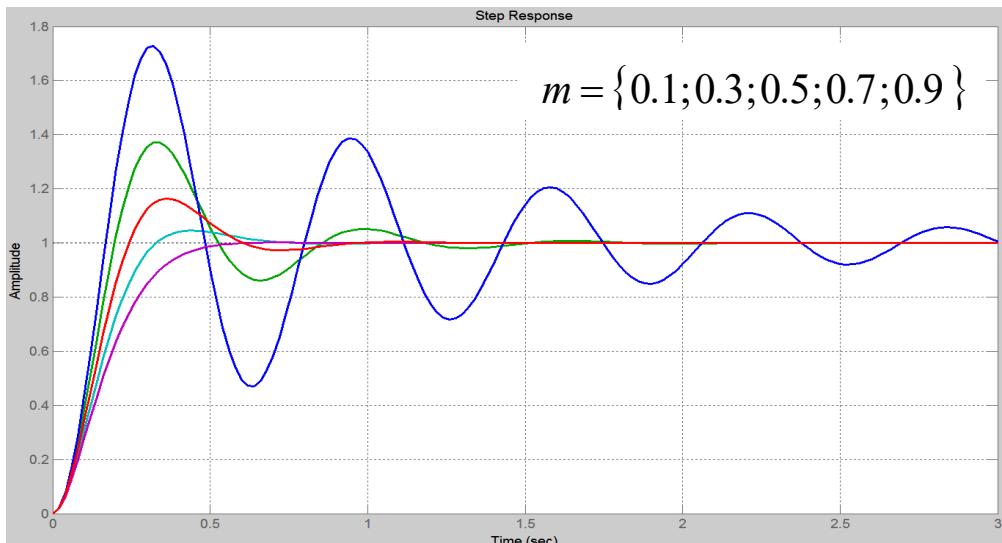


Figure D.15 – Réponses à un échelon unitaire d'entrée d'un système passe-bas du second ordre de gain statique unitaire et de pulsation propre $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ pour différentes valeurs de son facteur d'amortissement m .

5.3.2 Réponses à une entrée sinusoïdale

Le diagramme de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert du système permet de déterminer directement sur les graphiques l'amplitude et la phase de la sortie du système en régime permanent avec une entrée sinusoïdale de pulsation ω .

Pour un système du second ordre, dont l'entrée est sinusoïdale de pulsation ω , la transmittance $H(p=j\omega)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = H(j\omega) &= \frac{G}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2m}{\omega_0} \omega} \\ &= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{G}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{\omega_0} \omega\right)^2}} e^{-j \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2m}{\omega_0} \omega\right)} \end{aligned}$$

La figure D.16 donne les diagrammes Bode (gain en dB et phase en degrés) d'une fonction de transfert de type passe-bas du 2nd ordre de gain unité et de pulsation propre $\omega_0 = 10$ rad/s pour différentes valeurs du facteur d'amortissement m .

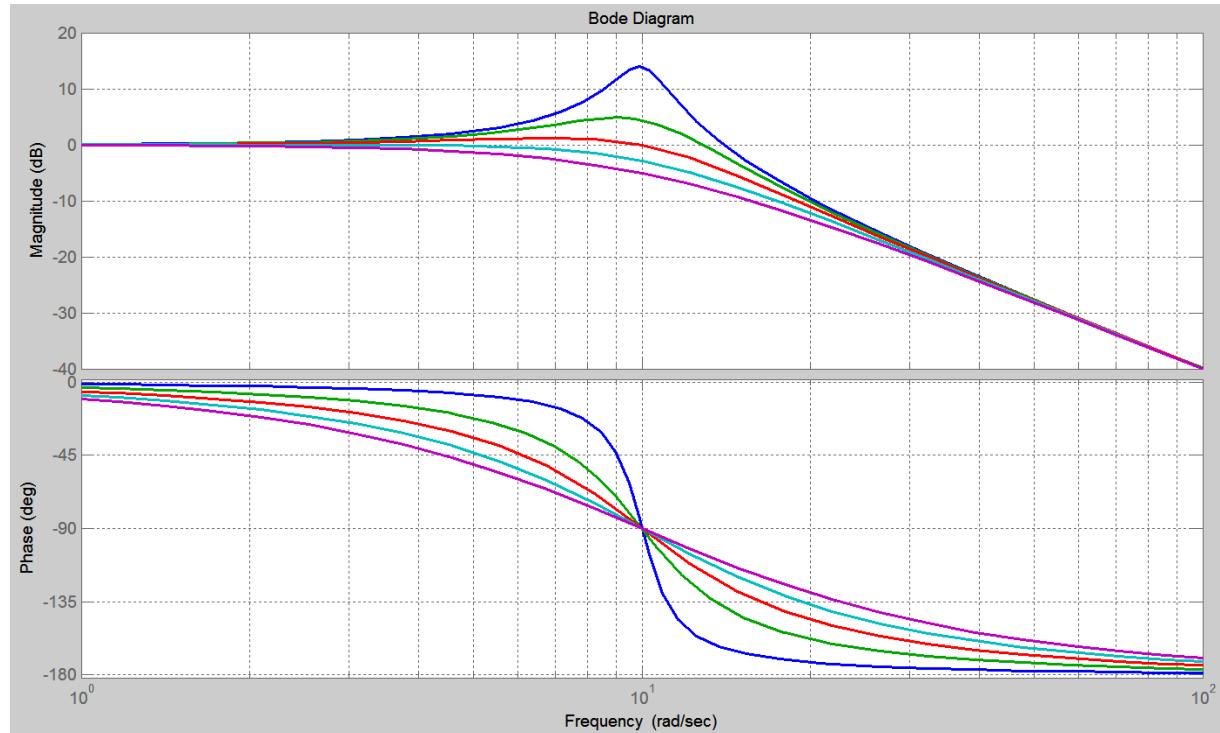


Figure D.16 – Diagrammes de Bode d'une fonction de transfert de gain unité, de pulsation propre $\omega_0 = 10$ rad/s pour différentes valeurs du facteur d'amortissement $m = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

E. Modèles généraux de capteurs et d'actionneurs

Les capteurs et actionneurs des systèmes doivent être pris en compte que ce soit pour la simulation ou l'élaboration des commandes. Les modèles utilisés en simulation seront les plus complets possibles, tout en minimisant le temps de simulation, afin de vérifier en simulation que la commande élaborée atteindra bien les objectifs fixés lorsqu'elle sera appliquée au système réel.

Au chapitre **Signaux à temps continu et temps discret – Échantillonnage** les modèles des composants (filtre anti-repliement de spectre, échantillonneur, convertisseurs analogique numérique et numérique analogique) liés au passage du temps continu au temps discret et à la discréttisation, et vice-versa ont été décrits. Nous donnons ici les modèles généraux applicables aux capteurs et actionneurs.

1. Modèle général d'un capteur à captation continue

De manière générale un capteur à captation continue permet de convertir une grandeur physique (tension, courant, position, vitesse, accélération, débit, température...) en une tension électrique à temps continu, dans une plage donnée de valeurs, qui pourra être acquise par le système de commande avec ses entrées d'échantillonnage et de conversion analogique numérique.

La figure E.1 donne le schéma général d'un capteur à captation continue.

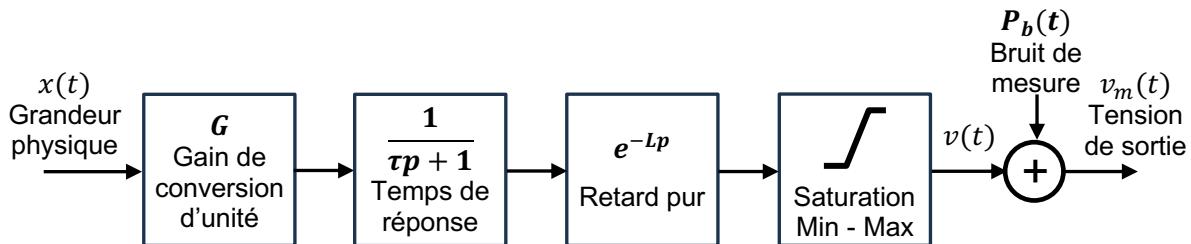


Figure E.1 – Schéma général d'un capteur à captation continue avec $x(t)$ la grandeur physique captée et $v_m(t)$ la tension électrique délivrée par le capteur image de la grandeur physique

Le modèle général d'un capteur à captation continue fait intervenir :

- Le gain de conversion d'unité de la grandeur physique. Par exemple, pour un capteur de température $G = 0,1 \text{ V/}^\circ$.
- Le temps de réponse du capteur avec sa constante de temps caractéristique τ en secondes.
- Le retard pur L de transmission de l'information.
- La plage de valeurs prises par la tension de sortie avec un élément de saturation aux valeurs extrêmes permises. Par exemple [$Min = 0$, $Max = 5 \text{ Volts}$].
- Le bruit de mesure qui sera caractérisé par son amplitude $|P_b|$ et si possible par son spectre fréquentiel.

Pour la simulation du système, l'ensemble des éléments du modèle du capteur de la figure E.1 devront être pris en compte. Les paramètres du modèle seront obtenus par la fiche technique (Datasheet) du capteur fournie par le constructeur du capteur ou par des essais expérimentaux.

Pour la commande élaborée dans un cadre linéaire, uniquement les éléments linéaires seront pris en compte mais pour autant la commande devra être robuste à l'éventuelle saturation du capteur.

Le modèle linéaire général pour la commande sera donné par :

$$\frac{V(p)}{X(p)} = H_{capteur}(p) = \frac{G e^{-Lp}}{\tau p + 1}$$

auquel il faudra ajouter le bruit de mesure $P_b(t)$.

Pour l'élaboration de la commande, la constante de temps (τ) et le retard pur (L) pourront être négligés suivant la bande passante désirée en boucle fermée de l'asservissement. Voir la section **Validité d'un modèle identifié** du chapitre **Méthodes élémentaires expérimentales d'identification de modèles linéaires** pour les aspects de validité de réduction de modèle.

Par contre, le bruit de mesure $P_b(t)$ devra toujours être pris en compte car c'est un facteur très limitant de la bande passante (temps de réponse) en boucle fermée.

2. Modèle général d'un capteur à captation par « pas »

De manière générale, un capteur par pas est un composant qui délivre une grandeur à valeurs discrètes image d'une grandeur physique.

Typiquement, un convertisseur analogique numérique est un capteur par pas puisqu'il délivre une tension (sous la forme d'une structure binaire à N_{bits}) à valeurs discrètes (quantifiées) à partir d'une tension échantillonnée en temps mais à support continu en amplitude.

Le modèle général d'un capteur par pas est constitué du modèle d'un capteur à captation continue suivi d'un étage de quantification tel que représenté sur la figure E.2.

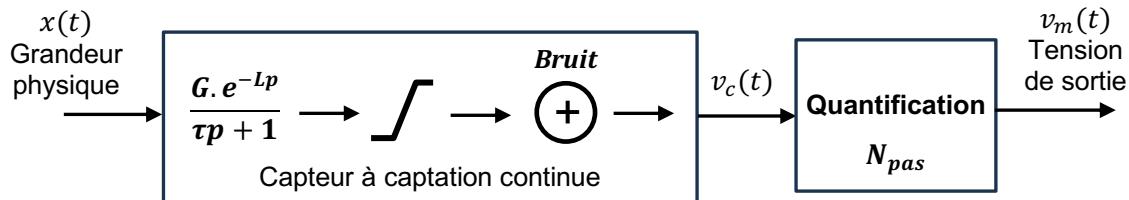


Figure E.2 – Schéma général d'un capteur à captation par pas constitué du modèle d'un capteur à captation continue suivi d'un étage de quantification $v_m(t) = \frac{1}{N_{pas}} \text{Entier}(N_{pas} \cdot v_c(t))$.

Le modèle de l'élément de quantification est donné par :

$$v_m(t) = \frac{1}{N_{pas}} \text{Entier}(N_{pas} \cdot v_c(t))$$

où N_{pas} est le nombre de pas de quantification de la grandeur de sortie du capteur $v_m(t)$.

Pour la simulation du système, l'ensemble des éléments du modèle du capteur de la figure E.2 devra être pris en compte.

Pour la commande élaborée dans un cadre linéaire, uniquement les éléments linéaires seront pris en compte mais pour autant la commande devra être robuste à l'éventuelle saturation du capteur. L'étage de quantification sera pris en compte dans le modèle linéaire par l'ajout d'un bruit de quantification dont l'amplitude pourra être le quantum de quantification donné par le rapport entre la plage de variation de $v_m(t)$ et le nombre de pas N_{pas} .

Le quantum de quantification pourra engendrer une erreur statique de l'asservissement égale à ce pas de quantification. Pour éviter cela, il est possible d'injecter du bruit numérique pour obtenir une valeur moyenne nulle de l'erreur statique au pris d'une commande comportant un signal en haute fréquences consommateur d'énergie.

Certains capteurs sont par construction physique des capteurs à pas. Ils délivrent directement une tension de sortie quantifiée image de la grandeur physique. Les capteurs de position mécanique à pas en sont un exemple typique.

Le codeur incrémental est un exemple de capteur mécanique à pas pour capter la position angulaire d'un arbre mécanique. Il est constitué d'un rotor (élément tournant solidaire de l'arbre mécanique dont on veut connaître la position angulaire) comportant un disque ajouré et d'un stator (partie fixe) qui contient l'électronique du capteur. Lorsque le rotor tourne, les parties ajourées et pleines passent devant le système de lecture (optique ou magnétique), générant ainsi les impulsions électriques. Le comptage de ces impulsions électriques permet de déterminer la position du rotor par rapport à une position de référence donnée pour la captation d'une impulsion électrique à une position particulière du rotor.

3. Modèle général d'un actionneur

Les modèles généraux d'actionneurs sont identiques à ceux des capteurs à captation continue ou par pas selon le cas rencontré. La seule différence notable réside dans le fait que l'élément de saturation sera placé en amont du modèle afin de saturer l'entrée de l'actionneur aux valeurs admissibles.

Les convertisseurs statiques de puissance (hacheurs, onduleurs...) sont typiques de la classe d'actionneurs par pas. Pour autant, le plus souvent, leur fréquence élevée de fonctionnement permet de les modéliser comme des actionneurs à action continue.

F. Méthodes élémentaires expérimentales d'identification de modèles linéaires

Les méthodes expérimentales d'identification des systèmes consistent à définir un modèle mathématique caractérisant le comportement dynamique du système considéré à partir de la mesure de ses entrées et sorties.

Ces méthodes permettent de déterminer une fonction de transfert à temps continu ou à temps discret du système à partir de la stimulation du système réel par des signaux « types » bien définis tels que l'échelon, la sinusoïde, une Séquence Binaire Pseudo Aléatoire (SBPA)... et de la mesure des sorties obtenues.

Ces méthodes supposent la linéarité, la stationnarité et la causalité du système considéré. **La première étape consiste donc à s'assurer de ces propriétés du système** autour du point de fonctionnement choisi. La seule méthode efficace pour s'assurer de la linéarité d'un système est de lui appliquer une entrée sinusoïdale et de vérifier que le signal de sortie est également sinusoïdal. On utilise ici le principe que les fonctions propres des systèmes linéaires sont les fonctions circulaires. En particulier, on s'assurera de choisir une amplitude du signal d'entrée qui évite une saturation de la sortie.

1. Identification par analyse fréquentielle

Le signal d'entrée du système est sinusoïdal d'amplitude suffisamment faible pour obtenir un fonctionnement linéaire.

La mesure de l'amplitude et du déphasage de la sortie par rapport au signal d'entrée permet de tracer le diagramme de Bode du système et d'en déduire une fonction de transfert.

Cette méthode est très efficace mais est souvent fastidieuse et peut demander un temps considérable, surtout lorsque les constantes de temps du système à identifier sont grandes (de l'ordre de la minute à quelques heures ou plus). Néanmoins, elle peut être facilement automatisée. En pratique, on utilisera un sweep fréquentiel.

Même si le diagramme de Bode n'est pas déterminé, quelques relevés effectués à des fréquences bien choisies permettront de confirmer des résultats d'identification obtenus avec d'autres méthodes (i.e. ordre du système, coefficient d'amortissement dans le cas d'un système du second ordre...).

2. Identification par analyse indicielle à temps continu

Le signal d'entrée est de type échelon avec une amplitude suffisamment faible afin de garantir un fonctionnement linéaire du système à identifier, et comportant, si nécessaire, une composante continue afin de se placer autour du point de fonctionnement désiré.

2.1 Cas d'une réponse apériodique – Méthode de Vladimir Strejc

Plusieurs méthodes existent, les plus utilisées sont la méthode de Strejc, la méthode de Broida et les abaques de Caldwell. Ces méthodes sont utilisables lorsque la réponse du système à identifier est de type apériodique.

Dans le cas de la méthode de Strejc, la fonction de transfert du processus est supposée de la forme :

$$\frac{S}{E}(p) = \frac{Ge^{-Lp}}{(1 + \tau p)^n}$$

où G est le gain statique, L est le retard pur, τ est la constante de temps et n est l'ordre du système.

Ce modèle est très bien adapté lorsque le système possède des constantes de temps proches les unes des autres.

La figure F.1 montre la réponse indicielle typique d'un tel système à identifier.

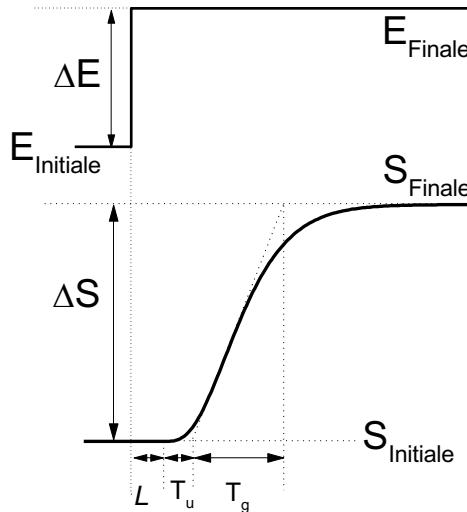


Figure F.1 : Réponse indicielle apériodique typique d'un système à identifier par la méthode de Strejc.

T_u/T_g	0	0.1	0.22	0.32	0.41	0.49	0.57
n	1	2	3	4	5	6	7
τ/T_g	1	0.37	0.27	0.225	0.195	0.175	0.16

Tableau F.1 – Détermination de l'ordre du système n et de la constante de temps τ à partir de la mesure des temps T_u et T_g .

Le gain statique est donné par : $G = \frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{S_{Finale} - S_{Initial}}{E_{Finale} - E_{Initial}}$

Bien noter que c'est un gain différentiel (rapport des différences de valeurs finales et initiales), ce n'est en aucun cas le rapport de deux valeurs. Dans le cas général : $G = \frac{\Delta S}{\Delta E} \neq \frac{S_{Finale}}{E_{Finale}} \neq \frac{S_{Initial}}{E_{Initial}}$.

Les paramètres n (l'ordre du processus), τ (la constante de temps) sont déterminés par la mesure des temps T_u et T_g à l'aide du tableau F.1 sauf pour le cas d'un système du 1^{er} ordre ($n=1$).

Cas d'un système du 1^{er} ordre :

Dans le cas d'un système du premier ordre ($T_u = 0$, démarrage de la réponse de la sortie dès l'application de l'échelon en entrée), la constante de temps τ ne sera pas obtenue par la mesure de T_g (mesure trop imprécise dans ce cas), mais par la mesure de $t_{95\%} = 3\tau$, temps que met la sortie pour passer de sa valeur initiale à 95% de sa valeur finale.

Remarque 1 : Le choix du retard pur L n'est pas toujours aisé. S'il est petit par rapport à $(T_u + T_g)$, on pourra le négliger.

Remarque 2 : Il est rare que la valeur mesurée expérimentalement du rapport T_u/T_g soit une valeur exacte donnée dans le tableau F.1. Le choix de l'ordre n du système pourra se faire de différentes manières. Si on prend la valeur immédiatement inférieure de n , alors le retard L sera augmenté de manière à ajuster la réponse donnée par la fonction de transfert à la réponse expérimentale. Si par contre c'est la valeur immédiatement supérieure de n qui est prise, alors le retard L sera diminué ou laissé nul. Dans tous les cas, il faut simuler la réponse de la fonction de transfert identifiée afin de vérifier qu'elle restitue bien la réponse mesurée.

Remarque 3 : Il est conseillé de réaliser un essai avec une entrée sinusoïdale afin d'aider au choix de l'ordre du système.

2.2 Cas d'une réponse de type pseudo-oscillatoire

Dans le cas où la réponse à un échelon de l'entrée du système est de type pseudo-oscillatoire, on pourra considérer que la fonction de transfert du processus est du second ordre, de la forme :

$$\frac{S}{E}(p) = \frac{Ge^{-Lp}}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Les paramètres à déterminer sont G le gain statique, L le retard pur, m le facteur d'amortissement et ω_0 la pulsation propre du système en rad/s.

La figure F.2 montre la réponse indicielle (entrée d'amplitude 1) typique d'un tel système.

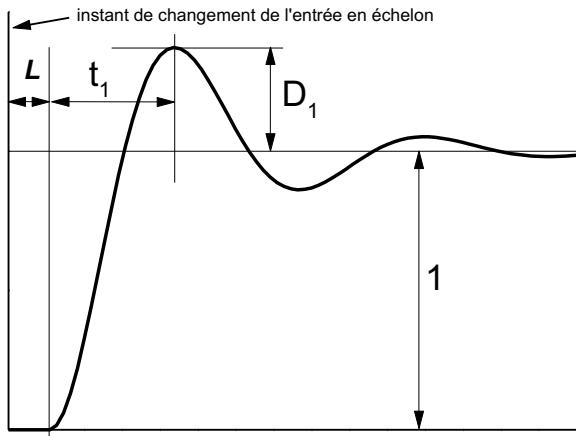


Figure F.2 – Réponse indicielle typique d'un système du second ordre pseudo-oscillatoire.

Le gain statique est donné par :
$$G = \frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{S_{Finale} - S_{Initiale}}{E_{Finale} - E_{Initiale}}$$

Les valeurs initiales et finales sont les valeurs en régime permanent (dérivées nulles) de l'entrée et de la sortie du processus.

Bien noter que c'est un gain différentiel (rapport des différences de valeurs finales et initiales), ce n'est en aucun cas le rapport de deux valeurs. Dans le cas général : $G = \frac{\Delta S}{\Delta E} \neq \frac{S_{Finale}}{E_{Finale}} \neq \frac{S_{Initiale}}{E_{Initiale}}$.

Le retard pur L correspond au temps, à partir du moment où l'entrée de type échelon a changé, pendant lequel la sortie ne change pas.

Les paramètres m et ω_0 sont déterminés, en mesurant les paramètres D_1 et t_1 de la réponse, comme indiqué sur la figure F.2 :

$$m = \frac{-\ln(D_1)}{\sqrt{10 + \ln^2(D_1)}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - m^2}}$$

Remarque 1 : Attention à la détermination de D_1 pour le calcul de m . En effet, comme indiqué sur la figure F.2, le dépassement D_1 est déterminé par rapport à une variation unitaire de la sortie.

Remarque 2 : Si un essai avec une entrée sinusoïdale montre que l'ordre n du système est supérieur à 2 cela peut provenir du retard pur (ordre infini). Si on ne veut pas utiliser de retard pur dans le modèle, on pourra alors choisir la forme suivante pour la fonction de transfert :

$$\frac{S}{E}(p) = \frac{G}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1 + \tau p)^{n-2}}$$

3. Prétraitement des données – Filtrage de la mesure

En pratique, il est souvent nécessaire de filtrer la mesure, par exemple pour supprimer une bande de fréquences indésirables tels que les bruits en haute fréquence ou la composante continue relative au point de fonctionnement du système.

Le filtrage de la mesure doit être pris en compte par la modélisation et ne pas retirer des caractéristiques importantes du système qui ne se retrouveraient donc pas dans le modèle.

La figure F.3 représente le principe du filtrage parallèle qui est le plus souvent utilisé.

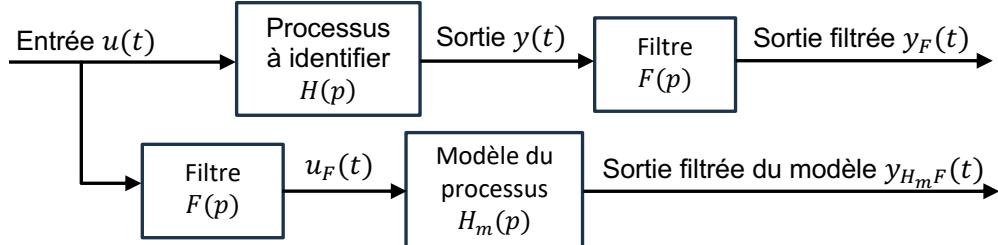


Figure F.3 – Principe du filtrage parallèle des données pour l'identification.

Dans la configuration de la figure F.3, la sortie filtrée du processus $y_F(t)$ est donnée par :

$$Y_F(p) = \mathcal{L}aplace[y_F(t)] = F(p)H(p)U(p) = F(p)H(p)\mathcal{L}aplace[u(t)]$$

et la sortie du modèle par :

$$Y_{H_mF}(p) = \mathcal{L}aplace[y_{H_mF}(t)] = H_m(p)F(p)U(p) = H_m(p)F(p)\mathcal{L}aplace[u(t)]$$

Si le processus à identifier évolue dans un domaine de fonctionnement linéaire les fonctions H et F commutent, il vient alors :

$$Y_{H_mF}(p) = Y_F(p) \Leftrightarrow H_m(p) = H(p)$$

Le choix d'une structure pour le modèle $H_m(p)$ (voir sections précédentes) puis l'optimisation de ses paramètres pour minimiser l'écart $(y_F(t) - y_{H_mF}(t))^2$ permet d'obtenir un modèle du processus.

Dans le cas où une partie du modèle du processus à identifier est connue, il peut être intégré au filtrage de l'entrée appliquée au modèle à identifier afin de n'identifier que la partie inconnue du modèle du processus. La figure F.4 représente cette configuration où le processus à identifier est représenté sous la forme : $H(p) = H_1(p)H_2(p)$ avec $H_1(p)$ supposée connue.

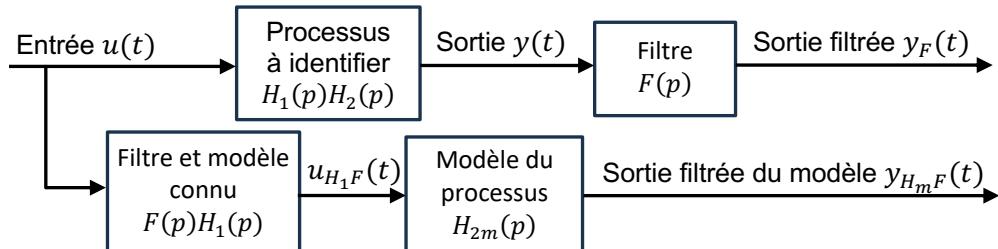


Figure F.4 – Principe du filtrage parallèle des données pour l'identification avec la prise en compte d'une partie connue (ici $H_1(p)$) du processus à identifier.

4. Domaine de validité fréquentielle d'un modèle

La validation d'un modèle identifié uniquement à partir de mesures temporelles n'est pas suffisant. Certaines caractéristiques importantes du processus à commander peuvent être difficilement identifiables à partir de mesures temporelles, le plus souvent, en raison du bruit présent sur les mesures.

Il est indispensable de définir le domaine de validité fréquentielle du modèle identifié, c'est-à-dire la plus grande pulsation pour laquelle le modèle représente effectivement le fonctionnement du processus à commander.

Proximité fréquentielle de deux modèles linéaires

Soit deux modèles linéaires représentés par leurs transmittances $H_1(p = j\omega)$ et $H_2(p = j\omega)$:

- Proximité en gain :

H_1 et H_2 sont proches en gain pour $\omega \leq \omega_{proxGain}$ si :

$$\forall \omega \leq \omega_{proxGain} : \| |H_1(j\omega)| - |H_2(j\omega)| \| \leq \Delta_{Gain} < \infty$$

avec typiquement $\Delta_{Gain} \leq 1 \text{ dB}$ (12%)

- Proximité en phase :

H_1 et H_2 sont proches en phase pour $\omega \leq \omega_{proxPhase}$ si :

$$\forall \omega \leq \omega_{proxPhase} : |\varphi_{H_1}(\omega) - \varphi_{H_2}(\omega)| \leq \Delta_{Phase} < \infty$$

avec typiquement $\Delta_{phase} \leq 6^\circ$ (0,1 rad).

Domaine de validité fréquentielle

Le domaine de validité fréquentielle d'un modèle $H_m(p)$ d'un processus dont le modèle complet est donné par $H_p(p)$ sera défini par :

Dans la bande de fréquences $\omega \leq \omega_{val}$, le modèle $H_m(p)$ sera une approximation acceptable de $H_p(p)$ vis-à-vis des proximités en gain Δ_{Gain} et en phase Δ_{Phase} si :

$\forall \omega \leq \omega_{val} : \| |H_p(j\omega)| - |H_m(j\omega)| \| \leq \Delta_{Gain} < \infty$ et $|\varphi_{H_p}(\omega) - \varphi_{H_m}(\omega)| \leq \Delta_{Phase} < \infty$
avec typiquement $\Delta_{Gain} \leq 1 \text{ dB}$ (12%) et $\Delta_{phase} \leq 6^\circ$ (0,1 rad).

4.1 Approximation d'une fonction de transfert de type passe-bas du 1^{er} ordre par son gain statique

Analysons le diagramme de Bode (figure F.5) d'une fonction de transfert du 1^{er} ordre de type passe-bas ayant un gain statique $G_1 = 10$ et un pôle réel en $p_0 = -1000$:

$$H_1(p) = \frac{G_1}{p + 1} = \frac{10}{p + 1000}$$

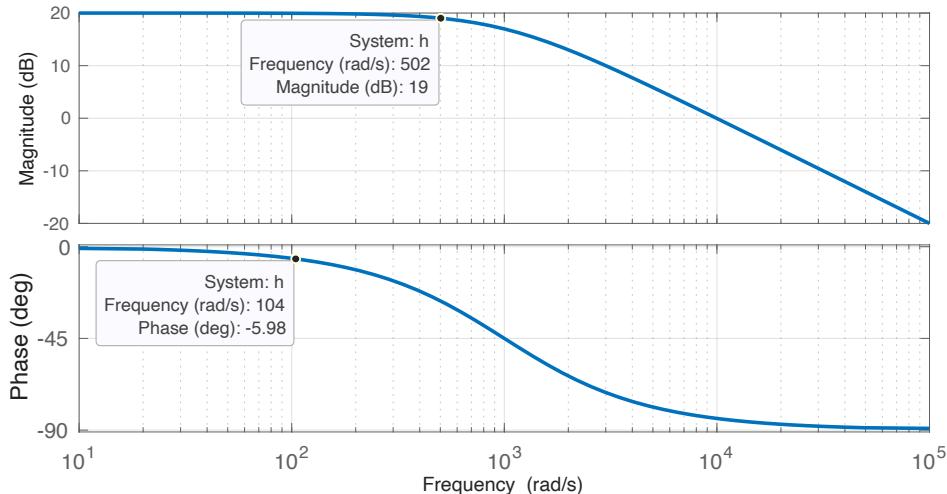


Figure F.5 – Diagramme de Bode de $H_1(p = j\omega) = \frac{10}{p + 1000}$.

Si nous voulions approcher la fonction de transfert $H_1(p)$ par un modèle réduit $H_{1r}(p)$ constitué uniquement par le gain statique G_1 alors le domaine de validité fréquentielle de ce modèle $H_{1r}(p)$ serait réduit jusqu'à la pulsation à partir de laquelle la fonction de transfert $H_{1r}(p)$ n'approche plus suffisamment $H_1(p)$ en gain et en phase.

Modèle réduit de $H_1(p)$: $H_{1r}(p) = G_1 = 10$ (la fonction de transfert est approchée par son gain en basse fréquence lorsque $\omega \rightarrow 0$).

Domaine de validité de $H_{1r}(p) = G_1$ approximation en basses fréquences de $H_1(p)$:

$$\text{Proximité en gain : } ||H_1(j\omega)| - G_1| \leq \Delta_{Gain} = 1 \text{ dB pour } \omega \leq \omega_{proxGain} = 502 \text{ rad/s}$$

$$\text{Proximité en phase : } |\varphi_{H_1}(\omega) - 0| \leq \Delta_{Phase} = 6^\circ \text{ pour } \omega \leq \omega_{proxPhase} = 104 \text{ rad/s}$$

$$\text{Domaine de validité fréquentiel : } \omega_{val} = \min(\omega_{proxGain}, \omega_{proxPhase}) = 104 \text{ rad/s.}$$

Au final, $\forall \omega \leq \omega_{val} = \frac{|p_0|}{10} = 100$ rad/s le gain $G_1 = 10$ sera une approximation acceptable (au sens des valeurs prises par $\Delta_{Gain} = 1 \text{ dB}$ et $\Delta_{Phase} = 6^\circ$) de la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{10}{\frac{p}{1000} + 1}$.

Ce raisonnement pour un système passe-bas du premier ordre peut être tenu pour des systèmes de type passe-bas d'ordres plus élevés. Le résultat général suivant peut être énoncé :

Une fonction de transfert $H(p)$ de type passe-bas ayant un gain statique G_0 et possédant i pôles p_i pourra être approchée en basses fréquences ($\omega \leq \omega_{val}$) par uniquement son gain statique G_0 .

Le domaine de validité de cette approximation est $[0, \omega_{val}]$ avec $\omega_{val} = \frac{1}{10} \min(|p_i|)$.

4.2 Domaine de validité fréquentielle d'un modèle identifié

Lorsqu'un modèle est identifié, très certainement toutes les dynamiques n'ont pas été identifiées. Elles ne sont donc pas prises en compte par le modèle identifié. Le modèle identifié n'est donc acceptable que jusqu'à une certaine valeur de la pulsation. Le complémentaire du résultat précédent amène l'énoncé suivant donnant une valeur pour cette pulsation maximale de validité :

Le domaine de validité d'un modèle identifié $H_m(p)$ est $[0, \omega_{val}]$ avec $\omega_{val} = 10 \max(|p_i|)$.

où $\max(|p_i|)$ est la valeur du module du pôle le plus rapide du modèle identifié.

Une fonction de transfert peut toujours se mettre sous une forme factorisée faisant apparaître un gain, de pôles et de zéros :

$$H_p(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(p + z_1)(p + z_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_i)p + |z_i|^2)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p^2 + 2 \cdot \text{Re}(p_i)p + |p_i|^2)}$$

Cette fonction de transfert apparaît donc comme la mise en série d'un ensemble de fonctions de transfert du 1^{er} ou 2nd ordre selon que les pôles et zéros sont réels ou complexes conjugués.

Dans de nombreux cas, le modèle complet $H_p(p)$ du processus n'est pas utilisé pour synthétiser la commande. D'une part, parce-que l'identification ne permet pas d'identifier l'ensemble des dynamiques (pôles et zéros) du processus, d'autre part parce-que l'utilisation d'un modèle $H_r(p)$ d'ordre réduit en négligeant les pôles et zéros les plus rapides (ceux ayant les modules les plus grands) au-delà d'une certaine pulsation choisie permet de simplifier les commandes élaborées pour les objectifs souhaités. Dans tous les cas le domaine de validité fréquentielle de la fonction de transfert utilisée pour élaborer la commande devra être pris en compte pour cette élaboration.

Par exemple, pour synthétiser le correcteur de régulation de la température d'une pièce à une valeur désirée, il n'est sans doute pas nécessaire d'inclure dans le modèle utilisé pour la synthèse, la dynamique (fonction de transfert) de changement de température du convecteur produisant le flux thermique qui va permettre la régulation. On pourra ne garder, comme modèle pour le convecteur, que son gain en supposant que son temps de réaction peut être négligé. On aboutit avec ces simplifications à un modèle réduit du processus à commander qui dans certains cas de synthèse « automatique » de correcteurs réduit la complexité de l'algorithme de commande mais il ne faudra surtout pas oublier de spécifier le domaine de validité de ce modèle réduit au moment de la synthèse du correcteur sous peine de dysfonctionnement lors de son usage sur le système réel. On pourrait avoir le même raisonnement pour le capteur utilisé pour la mesure de température dont la dynamique pourra être négligée pour les mêmes raisons.

4.3 Application à la réduction du modèle d'un processus et à la détermination du domaine de validité fréquentielle d'un modèle identifié

Considérons le système classique suivant :



Figure F.6 – Système constitué d'un actionneur agissant sur un processus et un capteur de mesure.

Le modèle complet du système de la figure F.6 est donné par :

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{1} + 1\right)\left(\frac{p}{100} + 1\right)\left(\frac{p}{200} + 1\right)} = \frac{1}{(p+1)(0.01p+1)(0.005p+1)}$$

avec la constante de temps de l'actionneur $\tau_{act} = 0.01 \text{ s}$, la constante de temps du processus $\tau_{proc} = 1 \text{ s}$ et la constante de temps du capteur $\tau_{capt} = 0.005 \text{ s}$.

Réduction du modèle pour la commande

Supposons une connaissance complète du modèle $H(p)$. Pour simplifier la synthèse de la commande, ce modèle peut être approché par un modèle réduit $H_{reduit}(p)$ d'ordre 1 en basses fréquences jusqu'à la pulsation ω_{val} :

$$H_{reduit}(p) = \frac{1}{p+1} \quad \text{avec} \quad \omega \leq \omega_{val} = \frac{1}{10} \min(100, 200) = 10 \text{ rad/s}$$

La figure F.7 (gauche) donne les diagrammes de Bode des modèles $H(p)$ et $H_{reduit}(p)$ qui montre le domaine de validité de $H_{reduit}(p)$ donné par : $0 \leq \omega \leq \omega_{val} = 10 \text{ rad/s}$.

Domaine de validité fréquentielle d'un modèle identifié

Les réponses temporelles pour une entrée unitaire en échelon du système complet modélisé par $H(p)$ et du modèle $H_{reduit}(p)$ sont données sur la figure F.7 (droite). Ces réponses temporelles montrent que le pôle dominant à 1 rad/s du modèle complet masque les dynamiques de l'actionneur et du capteur. On constate que le modèle réduit aurait été un modèle identifié acceptable à partir de la réponse temporelle du système complet.

Si le modèle réduit $H_{reduit}(p)$ avait été identifié à partir de la réponse temporelle du modèle complet donnée sur la figure F.7, son domaine de validité serait $\omega_{val} = 10 \times 1 \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s}$.

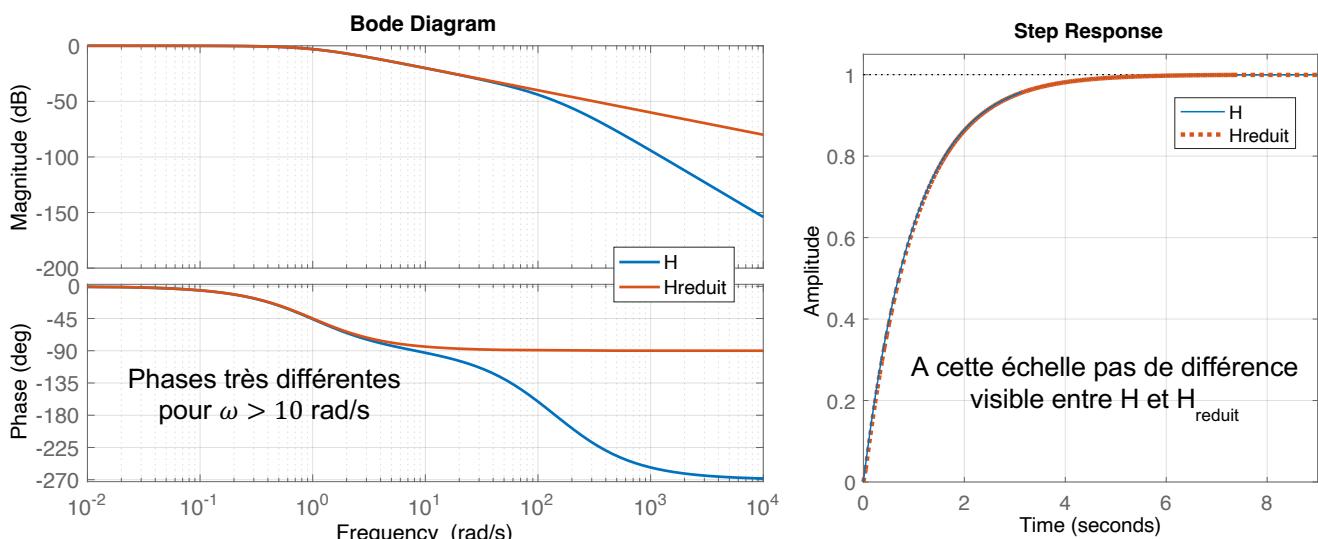


Figure F.7 – (gauche) Diagramme de Bode de $H(p)$ et $H_{reduit}(p)$, (droite) Réponses temporelles de $H(p)$ et $H_{reduit}(p)$ pour une entrée unitaire en échelon.

4.4 Majorant du retard pur non identifié

Le retard pur présent dans un système est très pénalisant pour sa commande. C'est un facteur de limitation très importante de la bande passante (temps de réponse) en boucle fermée du système asservi. En effet, la fonction de transfert d'un retard pur de valeur L en [s] est donnée par :

$$H_{retard}(p) = e^{-Lp}$$

Le gain de cette fonction de transfert est unitaire et sa phase est $\varphi_{retard} = -L\omega$ [rad].

Ce retard pur pourra être négligé en basses fréquences aux pulsations où la phase introduite par ce retard est inférieure à une valeur choisie Δ_{phase} avec typiquement $\Delta_{phase} \leq 6^\circ$ ($0,1$ rad) :

$$H_{retard}(p) \approx 1 \quad \text{pour} \quad \omega \leq \omega_{val} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\pi \Delta_{phase} [\circ]}{180}$$

Par exemple, pour un retard pur de valeur $L = 0.01$ s et $\Delta_{phase} = 6^\circ$, il vient $\omega_{val} = 10.5$ rad/s. Pour des pulsations supérieures à $\omega_{val} = 10.5$ rad/s, le retard pur ne pourra pas être négligé et devra donc être pris en compte par la commande.

Il peut être très difficile d'identifier le retard pur d'un système à partir de sa réponse temporelle si celle-ci est bruitée. La figure F.8 donne la réponse temporelle d'un système dont on désire identifier le modèle. Lors des changements de valeur de l'entrée $u(t)$ en crêtes, la sortie $y(t)$ semble évoluer aux mêmes instants. On pourra alors supposer que le système à identifier est du 1^{er} ordre. Pour autant, avec le bruit présent sur la mesure de la sortie, il est difficile de voir le comportement précis de la sortie aux instants de changement de l'entrée. En particulier, il est difficile de dire si un retard existe entre le changement de l'entrée et la variation de la sortie. Très souvent, en raison du bruit de mesure, il est très difficile de déterminer des retards inférieurs à 1% du temps de réponse à un échelon du système.

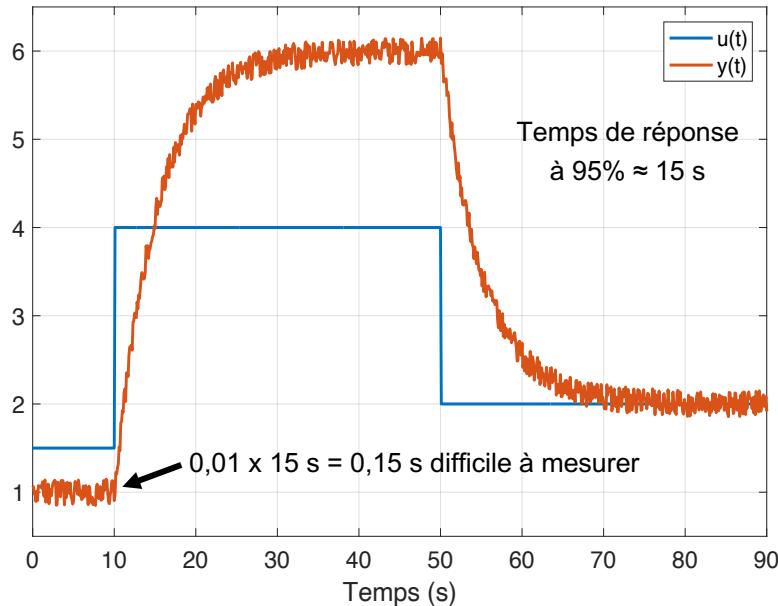


Figure F.8 – Réponse temporelle d'un système dont le modèle est à identifier.

Majorant du retard pur non identifié

Afin de garantir une robustesse suffisante du système de commande à des éventuels retards purs ou dynamiques rapides négligées, il est nécessaire de déterminer un majorant de cet éventuel retard pur pour le prendre en compte lors de l'élaboration de la commande.

Typiquement, le majorant du retard pur pourra être pris égal à 1% du temps de réponse à 95% du système à identifier.

Dans le cas de l'essai de la figure F.8, un majorant du retard serait $L_{maj} = 0,01 \times 15$ s = 0,15 s. Ce retard induit une réduction de phase de 10° à la pulsation $\omega = \frac{\pi}{180} \frac{10}{0,15} = 1,16$ rad/s.

Un essai fréquentiel (entrée sinusoïdale), afin de réduire l'effet du bruit de mesure, devrait permettre d'affiner la valeur du majorant de l'éventuel retard pur.

G. Stabilité de l'association de systèmes dynamiques – Marges de stabilité

1. Stabilité au sens EB-SB d'un système dynamique défini par sa fonction de transfert

L'importance de la notion de stabilité des systèmes dynamiques a été décrite au **chapitre Analyse des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux**. Nous rappelons ici la définition de la stabilité au sens Entrée Bornée – Sortie Bornée (EB-SB) et les théorèmes qui permettent de vérifier la stabilité EB-SB des systèmes à temps continu et à temps discret représentés par leurs fonctions de transfert entrée-sortie.

Définition : Stabilité EB-SB

Un système est stable au sens EB-SB (Entrée Bornée – Sortie Bornée) si pour toute entrée bornée, sa sortie l'est aussi.

$$\|u(t)\| < M \quad \forall t > t_0 \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < N(M, y(t_0)) \quad \forall t > t_0$$

Avec M et N des nombres finis qui ne dépendent pas de t_0 .

◆

En anglais, on parlera de stabilité BIBO (Bounded Input – Bounded Output).

Théorème : Stabilité EB-SB et pôles de la Fonction de Transfert à temps continu

Une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) de stabilité EB-SB d'un système linéaire invariant causal à temps continu décrit par sa fonction de transfert $H_c(p) = \frac{N_c(p)}{D_c(p)}$ est que tous les pôles de $H_c(p)$ (racines de $D_c(p)$) soient à partie réelle strictement négative (demi plan gauche ouvert du plan complexe) :

$$\Re(\text{pôles}(H_c(p))) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Système à temps continu stable au sens EB-SB}$$

◆

Sans avoir à calculer explicitement les pôles de $H_c(p)$, le **critère algébrique de Routh** permet de déterminer si les pôles de $H_c(p)$ sont à partie réelle strictement négative (voir annexes).

Théorème : Stabilité EB-SB et pôles de la Fonction de Transfert à temps discret

Une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) de stabilité EB-SB d'un système linéaire invariant causal à temps discret décrit par sa fonction de transfert $H_d(z) = \frac{N_d(z)}{D_d(z)}$ est que tous les pôles de $H_d(z)$ (racines de $D_d(z)$) aient un module strictement inférieur à 1 (localisés à l'intérieur du cercle unité du plan complexe) :

$$\text{Modules}(\text{pôles}(H_d(z))) < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Système à temps discret stable au sens EB-SB}$$

◆

Sans avoir à calculer explicitement les pôles de $H_d(z)$, le **critère algébrique de Jury** permet de déterminer si les pôles de $H_d(z)$ ont un module strictement inférieur à 1 (voir annexes).

2. Stabilité au sens EB-SB de l'association de systèmes dynamiques

Dans le cas de l'association de systèmes dynamiques (série, parallèle, bouclage), les propositions suivantes donnent les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité dans le cas des systèmes à temps continu et à temps discret.

Proposition : Stabilité EB-SB de l'association de systèmes dynamiques à temps continu

Soit un système dynamique à temps continu défini par une matrice de transfert $M(p)$ entre toutes les entrées exogènes possibles $E(p)$ et toutes les sorties $Y(p)$ des fonctions de transfert $H_i(p)$ qui composent le système :

$$Y(p) = M(p)E(p) = [H_i(p)]E(p)$$

Le système défini par la matrice de transfert $M(p)$ sera stable au sens EB-SB si et seulement si toutes les fonctions de transfert $H_i(p)$ de $M(p)$ sont stables au sens EB-SB.

♦

Proposition : Stabilité EB-SB de l'association de systèmes dynamiques à temps discret

Soit un système dynamique à temps discret défini par une matrice de transfert $M(z)$ entre toutes les entrées exogènes possibles $E(z)$ et toutes les sorties $Y(z)$ des fonctions de transfert $H_i(z)$ qui composent le système :

$$Y(z) = M(z)E(z) = [H_i(z)]E(z)$$

Le système défini par la matrice de transfert $M(z)$ sera stable au sens EB-SB si et seulement si toutes les fonctions de transfert $H_i(z)$ de $M(z)$ sont stables au sens EB-SB.

♦

Dans la suite on donne deux exemples d'association de systèmes définis par leur fonction de transfert à temps continu. Les mêmes raisonnements peuvent être tenus pour les systèmes à temps discret.

2.1 Stabilité de systèmes en série

Le système de la figure G.1 est constitué par la mise en série de 2 fonctions de transfert, il possède donc 2 sorties et 2 entrées.

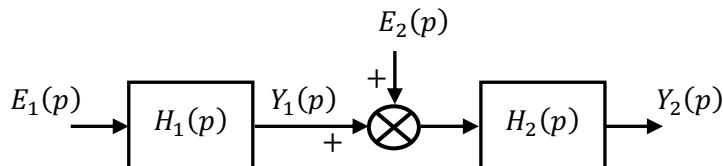


Figure G.1 – Association série de deux systèmes.

La matrice de transfert est donnée par :

$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_1 H_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si les pôles des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont à parties réelles strictement négatives. Ceci entraîne la stabilité de la mise en série $H_1(p)H_2(p)$.

En pratique, même si l'entrée $E_2(p)$ n'est pas explicitée, mais que les systèmes $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont différenciés, il faudra tout de même vérifier la stabilité vis-à-vis de l'entrée $E_2(p)$ donc la stabilité de $H_2(p)$.

Prenons le cas où $H_1(p) = \frac{2(p-1)}{p+3}$ et $H_2(p) = \frac{4}{p-1}$. $H_1(p)$ est stable car elle possède un pôle de valeur -3 qui est un réel négatif. $H_2(p)$ est instable car elle possède un pôle de valeur +1 qui est un réel positif. $H_1(p)H_2(p) = \frac{8}{p+3}$ est une fonction de transfert stable mais en pratique cette association est instable car $H_2(p)$ est instable. Il n'est pas possible de compenser le pôle instable de $H_2(p)$ par un zéro de $H_1(p)$ de même valeur. C'est ce qu'a montré l'analyse de la matrice de transfert.

2.2 Stabilité de systèmes bouclés

Le système de la figure G.2 est constitué par la mise en série et le bouclage de fonctions de transfert, ce système composé possède 3 sorties de fonctions de transfert et 3 entrées exogènes.

Chaque fonction de transfert doit avoir une entrée pour vérifier sa stabilité. C'est le cas ici, il n'est pas nécessaire d'ajouter une entrée de test.

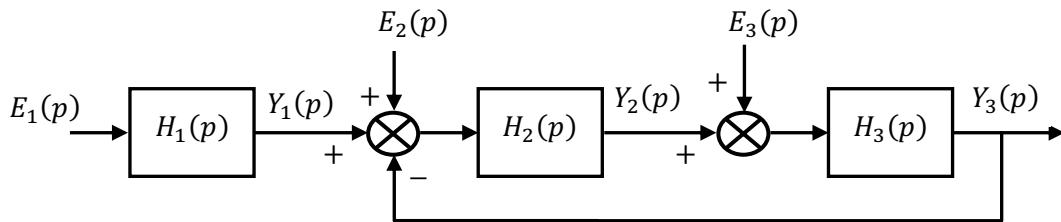


Figure G.2 – Association de systèmes en série et bouclés.

L'analyse de la stabilité de ce système nécessite la construction de la matrice de transfert. Pour cela, chaque sortie $Y_i(p)$ est exprimée en fonction des entrées exogènes $E_i(p)$ et des fonctions de transfert $H_i(p)$. La manière de faire pour écrire ces relations consiste à partir de la sortie considérée et à remonter le flux d'information en sens inverse des flèches (une parenthèse est ouverte à chaque fois qu'un sommateur est rencontré sur le chemin) :

$$\begin{aligned} Y_1 &= H_1 E_1 \\ Y_2 &= H_2(E_2 + H_1 E_1 - H_3(E_3 + Y_2)) \Rightarrow (1 + H_2 H_3)Y_2 = H_2(E_2 + H_1 E_1 - H_3 E_3) \\ Y_3 &= H_3(E_3 + H_2(E_2 + H_1 E_1 - Y_3)) \Rightarrow (1 + H_2 H_3)Y_3 = H_3(E_3 + H_2(E_2 + H_1 E_1)) \end{aligned}$$

La matrice de transfert est donnée par :

$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ H_1 \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{H_2}{1+H_2H_3} & \frac{-H_2H_3}{1+H_2H_3} \\ H_1 \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_2H_3}{1+H_2H_3} & \frac{H_3}{1+H_2H_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Ce système composé sera stable au sens EB-SB si et seulement si les pôles des fonctions de transfert H_1 , $\frac{H_2}{1+H_2H_3}$, $\frac{H_3}{1+H_2H_3}$ et $\frac{H_2H_3}{1+H_2H_3}$ sont à parties réelles strictement négatives.

On remarque que la fonction de transfert $H_1(p)$ est en série avec le système bouclé entre $Y_1(p)$ et $Y_3(p)$. Pour cette raison $H_1(p)$ doit être stable (condition de stabilité de systèmes en série). Concernant le système bouclé, il n'est pas nécessaire que les fonctions de transfert individuelles $H_2(p)$ et $H_3(p)$ soient stables. Ceci est rendu possible par le bouclage. Ainsi, une fonction de transfert instable peut être stabilisée par bouclage. Comme le montre la matrice de transfert, la stabilité du système bouclé dépendra des racines de $1 + H_2(p)H_3(p)$.

En pratique, il ne sera pas nécessaire de construire la matrice de transfert et de vérifier que toutes les fonctions de transfert qui composent cette matrice sont stables. Il suffira d'évaluer les racines de $1 + H_2(p)H_3(p)$ et respecter la règle de non compensation d'un pôle instable par un zéro comme on a pu le voir dans la section précédente sur la stabilité de la mise en série de fonctions de transfert.

La proposition suivante permet de formaliser l'analyse de stabilité de systèmes bouclés.

Proposition : Stabilité EB-SB de systèmes bouclés :

Soit le système dynamique bouclé à contre-réaction (feedback) négative de la figure G.3 où les fonctions de transfert $C(p)$, $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sont les fonctions de transferts de systèmes dynamiques linéaires invariants causaux :

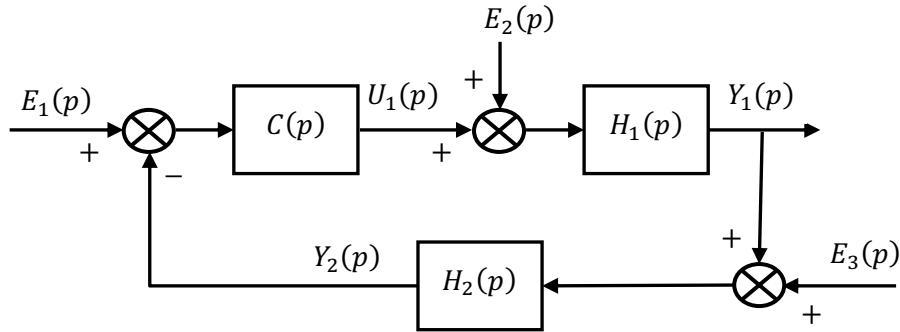


Figure G.3 – Système bouclé à contre-réaction négative.

La matrice de transfert $M(p)$ entre toutes les entrées exogènes possibles $E(p)$ et toutes les sorties $Y(p)$ des fonctions de transfert est donnée par :

$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ U_1 \end{bmatrix} = M(p)E(p) = \frac{1}{1 + CH_1H_2} \begin{bmatrix} CH_1 & H_1 & -CH_1H_2 \\ CH_1H_2 & H_1H_2 & H_2 \\ C & CH_1H_2 & -CH_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- Ce système dynamique bouclé sera stable au sens EB-SB si et seulement si tous les pôles des fonctions de transfert de la matrice de transfert $M(p)$ sont à parties réelles strictement négatives.
- Ce système dynamique bouclé sera stable au sens EB-SB, si et seulement si :

Toutes les racines de l'équation caractéristique $T(p) = 1 + C(p)H_1(p)H_2(p) = 0$ sont à parties réelles strictement négatives,

Et qu'il n'y a pas de compensation de pôle instable de $C(p)$, $H_1(p)$ ou $H_2(p)$ par un zéro de $C(p)$, $H_1(p)$ ou $H_2(p)$.

◆ Le même résultat s'applique aux systèmes à temps discret en remplaçant la négativité de la partie réelle des pôles par le module des pôles à l'intérieur du cercle unité du plan complexe.

En pratique, pour les systèmes à temps continu, le critère algébrique de Routh (cf. Annexe A1.1) permet de vérifier que les racines de l'équation caractéristique $T(p) = 1 + C(p)H_1(p)H_2(p) = 0$ sont à parties réelles strictement négatives.

Pour les systèmes à temps discret, le critère de Jury (cf. Annexe A1.2) permet de vérifier que les racines de l'équation caractéristique $T(z) = 1 + C(z)H_1(z)H_2(z) = 0$ ont un module à l'intérieur du cercle unité du plan complexe.

2.3 Prédiction de la stabilité de la boucle fermée par l'analyse de la boucle ouverte

Soit le système dynamique bouclé à contre-réaction (feedback) négative de la figure G.4 où les fonctions de transfert sont celles de systèmes dynamiques linéaires invariants causaux :

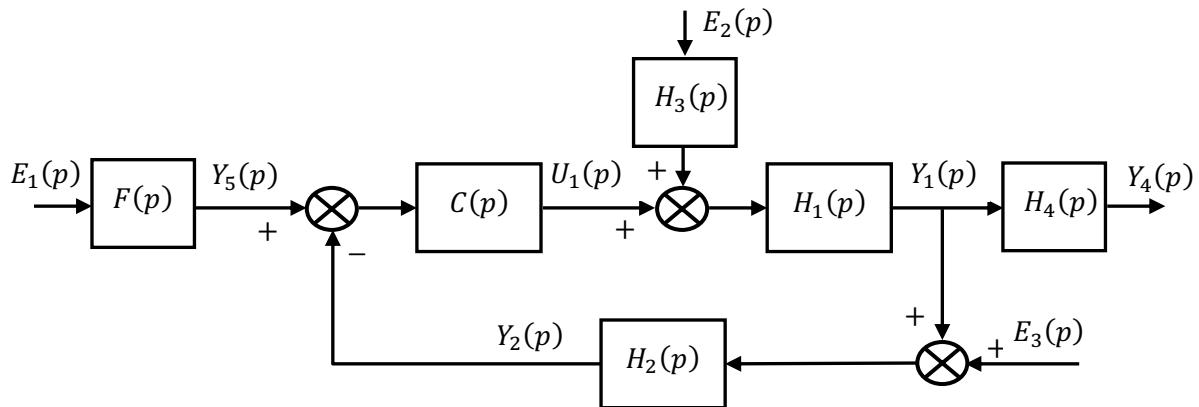


Figure G.4 – Système bouclé à contre-réaction négative.

On désigne par fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$, la mise en série de toutes les fonctions de transfert présentes dans la boucle de la figure G.4 (les fonctions de transfert en dehors de la boucle ne sont pas prises en compte) :

$$H_{BO}(p) = C(p)H_1(p)H_2(p)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure G.4 soit stable au sens EB-SB est que toutes les racines de l'équation caractéristique :

$$T(p) = 1 + CH_1H_2 = 1 + H_{BO}(p) = 0$$

soient à parties réelles strictement négatives et qu'il n'y ait pas de compensation de pôle instable par un zéro.

La stabilité de l'équation caractéristique peut être évaluée par un critère algébrique (critère de Routh pour les systèmes à temps continu, critère de Jury pour les systèmes à temps discret, voir Annexe A1). Par contre, cela ne permet pas de conclure sur le « degré » de stabilité, i.e. le système est-il proche ou éloigné de l'instabilité ? Cette connaissance est d'autant plus importante que les transmittances des systèmes sont obtenues avec plus ou moins de précision et les systèmes sont susceptibles d'évoluer au cours du temps. Il est donc nécessaire de prendre des **marges de sécurité** afin de garantir une certaine **robustesse** du système en boucle fermée vis-à-vis des incertitudes de modélisation et/ou d'identification, et des variations paramétriques du système.

Afin de qualifier le « degré » de stabilité, on fait appel à des critères géométriques. L'équation caractéristique de la forme $T(j\omega) = 1 + H_{BO}(j\omega) = 0 \Leftrightarrow H_{BO}(j\omega) = -1$, permet de quantifier la « distance » entre la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe et le point critique $(-1, j0)$.

Les théorèmes de Nyquist renseignent sur la stabilité du système bouclé en analysant la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe par rapport au point critique $(-1, j0)$ du plan complexe. Ces théorèmes permettent de prédire la stabilité en boucle fermée en analysant la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$ et renseignent sur la « distance » à l'instabilité, ce sont les marges de stabilité (marges de sécurité).

2.3.1 Critères de Nyquist à temps continu

Par rapport au critère algébrique de Routh (voir Annexe A1.1) pour évaluer la stabilité de l'équation caractéristique $T(j\omega) = 1 + H_{BO}(j\omega) = 0$, le critère de Nyquist :

- utilise une représentation graphique qui permet d'évaluer la distance par rapport à l'instabilité, distance entre la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$ et le point critique $(-1, j0)$ dans le plan complexe ;

- s'applique aux fonctions méromorphes (fonction holomorphe (analytique) dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction) et pas seulement aux fonctions rationnelles.

Dans la plupart des cas pratiques, la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive. Dans ce cas, une forme simplifiée du critère de Nyquist peut être utilisée, le critère du revers.

Théorème : Critère de Nyquist – Critère de contour à temps continu

Pour qu'un système bouclé à contre-réaction négative soit stable au sens EB-SB, il faut et il suffit que l'image de $H_{BO}(j\omega)$, transmittance de la boucle ouverte, lorsque $j\omega$ varie suivant un contour fermé qui englobe le demi-plan droit du plan complexe dans le sens anti-trigonométrique ($j\omega$ varie de $-j\infty$ à $+j\infty$ et boucle par un demi-cercle de rayon $r \rightarrow \infty$ dans le sens anti-trigonométrique) :

- ne passe pas par le point critique $(-1, j0)$;
- entoure le point $(-1, j0)$, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles strictement positifs de la transmittance en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$.

◆

Proposition : Critère du revers à temps continu

Soit $H_{BO}(j\omega)$, transmittance en boucle ouverte d'un système bouclé à contre-réaction négative, le système bouclé sera stable au sens EB-SB en boucle fermée, si et seulement si $H_{BO}(j\omega)$ est stable au sens EB-SB et que l'image de $H_{BO}(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ laisse le point critique $(-1, j0)$ sur sa gauche.

Si $H_{BO}(j\omega)$ possède des pôles sur l'axe imaginaire (pôles à partie réelle nulle), le point critique $(-1, j0)$ doit également être laissé sur la gauche par l'image de $H_{BO}(j\omega)$ lorsque ω varie de 0^+ à $+\infty$ en ayant contourné les pôles présents sur l'axe imaginaire dans le demi-plan droit.

◆

Exemple 1 – Système stable au sens EB-SB en boucle ouverte

Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ suivante :

$$H_{BO}(p) = K \frac{3}{p^3 + 2p^2 + 3p + 1} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Les pôles de $H_{BO}(p)$ (racines de $D(p)$) sont à parties réelles strictement négatives car les coefficients de $D(p) = a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$ satisfont : $a_i > 0$ et $a_2a_1 = 6 > a_3a_0 = 1$ (cf. le chapitre Analyse des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux – section Stabilité des systèmes dynamiques linéaires invariants causaux), le critère du revers peut donc être appliqué pour prédire la stabilité en boucle fermée.

Pour $K=1$ et $K=3$, les diagrammes de Nyquist, images de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe sont donnés par la figure G.5.

Pour $K=1$, l'image de $H_{BO}(j\omega)$ laisse le point critique $(-1, j0)$ sur la gauche lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le système en boucle fermée sera donc stable au sens EB-SB.

Par contre, pour $K=3$, l'image de $H_{BO}(j\omega)$ entoure le point critique $(-1, j0)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le système en boucle fermée sera donc instable au sens EB-SB.

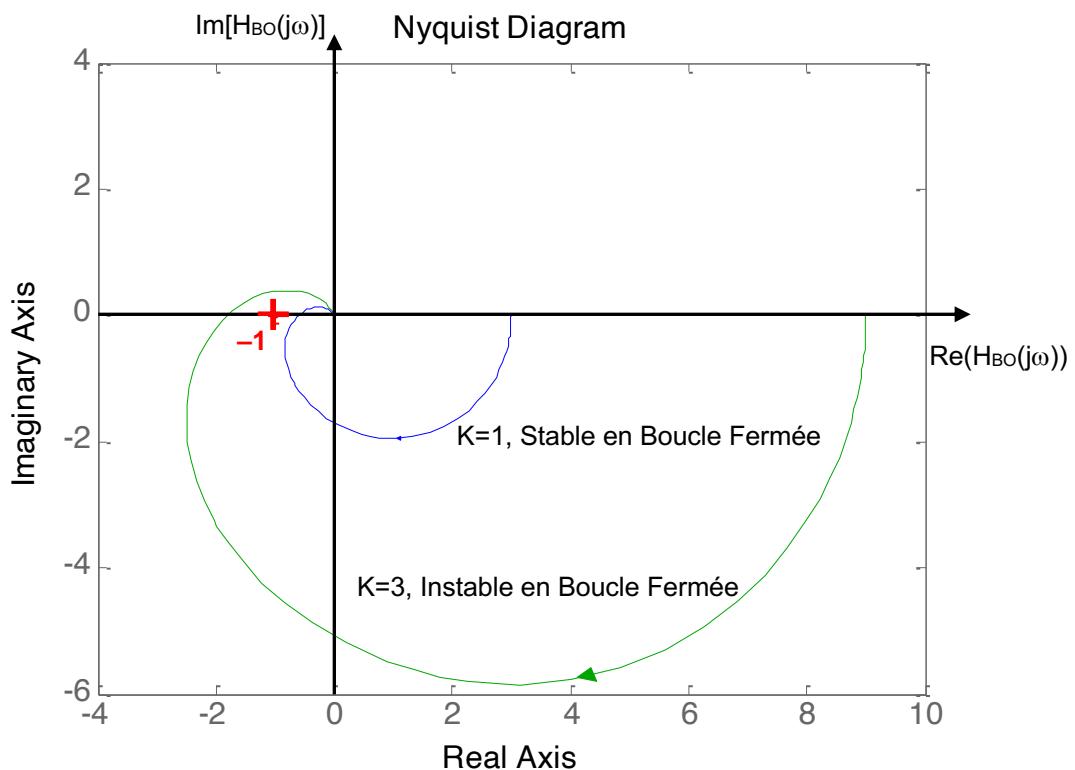


Figure G.5 – Diagrammes de Nyquist, images de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe pour deux valeurs du gain K.

Exemple 2 – Système intégrateur en boucle ouverte

Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ suivante :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p(p+1)^2}$$

$H_{BO}(p)$ possède deux pôles stables en -1 et un pôle à l'origine (intégrateur). Cette fonction de transfert n'est donc pas stable au sens EB-SB. Compte-tenu que le pôle en 0 est sur l'axe imaginaire, le critère du revers doit être appliqué avec précaution afin de prédire la stabilité en boucle fermée.

Pour $K=1$ et $K=3$, les diagrammes de Nyquist, images de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe sont donnés par la figure G.6.

Pour $K=1$, l'image de $H_{BO}(j\omega)$ laisse le point critique $(-1, j0)$ sur la gauche lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le système en boucle fermée sera donc stable au sens EB-SB.

Par contre, pour $K=3$, l'image de $H_{BO}(j\omega)$ entoure le point critique $(-1, j0)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le système en boucle fermée sera donc instable au sens EB-SB.

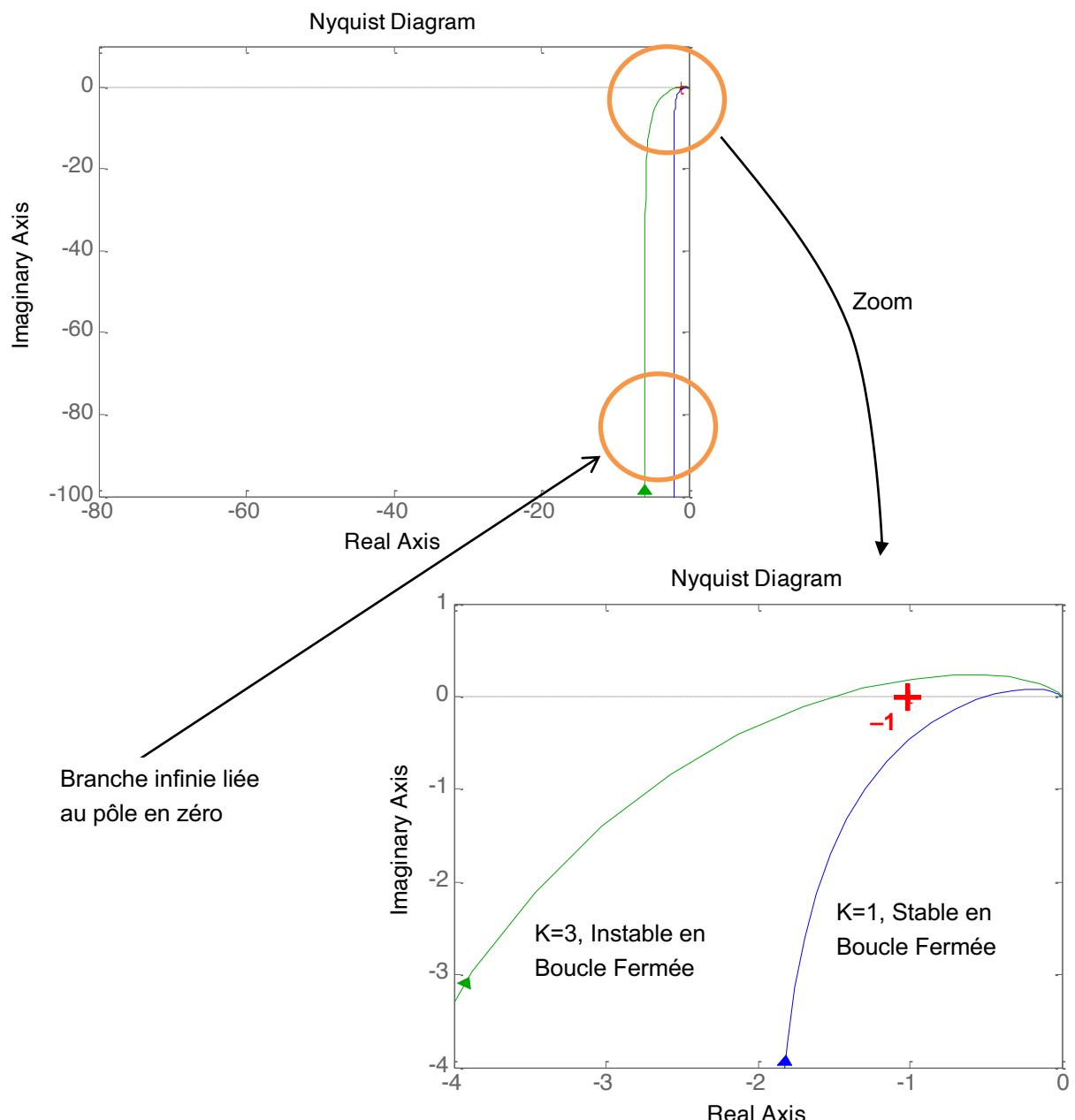


Figure G.6 – Diagrammes de Nyquist, images de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan complexe pour deux valeurs du gain K d'un système ayant un pôle en 0 (système intégrateur).

2.3.2 Critères de Nyquist à temps discret

Le critère algébrique de Jury (voir Annexe A1.2) permet d'évaluer la stabilité de l'équation caractéristique $T(z) = 1 + H_{BO}(z) = 0$, mais ne renseigne pas sur la « distance » à l'instabilité. Les critères de Nyquist appliqués aux systèmes à temps discret permettent d'évaluer la « distance » à l'instabilité et donc la robustesse aux incertitudes sur les fonctions de transfert.

Théorème : Critère de Nyquist – Critère de contour à temps discret

Pour qu'un système à temps discret $H_{BO}(z)$, transmittance en boucle ouverte d'un système bouclé à contre-réaction négative, soit stable au sens EB-SB en boucle fermée, il faut et il suffit que l'image de $H_{BO}(z)$ lorsque $z = e^{j\Omega}$ parcourt le cercle unité avec $-\pi \leq \Omega \leq \pi$, dans le sens trigonométrique :

- Ne passe pas par le point critique $(-1, j0)$.
- Entoure le point $(-1, j0)$, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles à l'extérieur du cercle unité de la transmittance en boucle ouverte.

◆

Remarque : Lorsque $z = e^{j\Omega}$ parcourt le cercle unité avec $-\pi \leq \Omega \leq \pi$, cela correspond à une variation de la pulsation réelle $\omega = \frac{\Omega}{T_e}$ de $-\omega_{max} = -\frac{\pi}{T_e} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_e} = \omega_{max} = \frac{2\pi f_e}{2}$.

Proposition : Critère du revers à temps discret

Pour qu'un système échantillonné $H_{BO}(z)$, transmittance en boucle ouverte d'un système bouclé à contre-réaction négative, **ne possédant pas de pôles instables ni de pôles à la limite de stabilité** (i.e. tous les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité) soit stable EB-SB en boucle fermée, il faut et il suffit que l'image de $H_{BO}(z)$ lorsque $z = e^{j\Omega}$ avec Ω variant de 0 à π , laisse le point critique $(-1, j0)$ sur sa gauche.

Si la transmittance $H_{BO}(z)$ possède des pôles sur le cercle unité alors l'image de $H_{BO}(z)$ dans le plan complexe possède des branches infinies. La fermeture du lieu de Nyquist est obtenue en modifiant le parcours de z . Pour cela, on entoure à l'aide de demi-cercles par l'extérieur du cercle unité les pôles se trouvant sur le cercle comme le montre la figure G.7. Les pôles ainsi entourés seront comptabilisés parmi les pôles stables.

◆

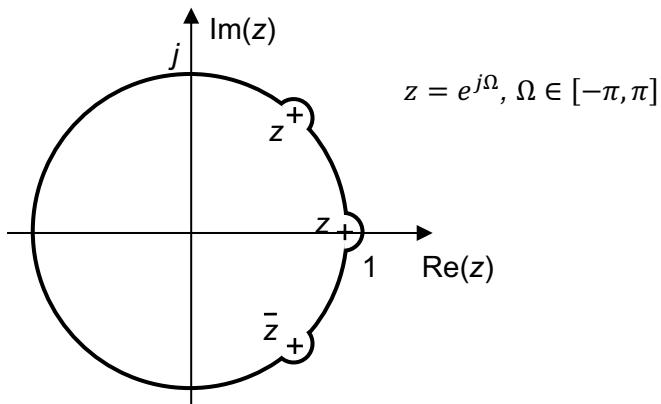


Figure G.7 – Modification du parcours de z dans le cas de pôles sur le cercle unité.

Dans la suite, deux exemples sont traités dans le cas du système bouclé à contre-réaction négative de la figure G.8 avec une transmittance à temps discret $H_{BO}(z)$.

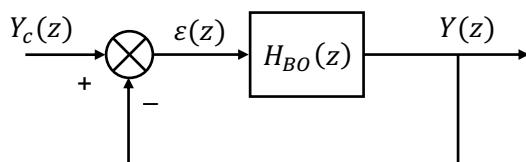


Figure G.8 – Système à temps discret à contre-réaction négative de fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(z)$.

Exemple 1 – Système stable au sens EB-SB en boucle ouverte

Considérons la transmittance $H_{BO}(z)$ à temps discret d'un système bouclé à contre-réaction négative de la figure G.8 :

$$H_{BO}(z) = K \frac{0,04052z + 0,03665}{z^2 - 1,664z + 0,7408} \quad \text{avec } T_e = 0,3 \text{ s}$$

Les pôles de $H_{BO}(z)$ sont complexes conjugués : $z_1 = 0,8320 + j0,2204$, $z_2 = 0,8320 - j0,2204$. Ils ont pour module $|z_1| = |z_2| = 0,8607$. Ils sont donc à l'intérieur du cercle unité, le critère du revers peut être appliqué pour prédire la stabilité en boucle fermée.

La figure G.9 représente les diagrammes Nyquist de $H_{BO}(z = e^{j\Omega})$, avec Ω variant de 0 à π ($\omega = \frac{\Omega}{T_e}$ variant de 0 à $\omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$) pour différentes valeurs de K .

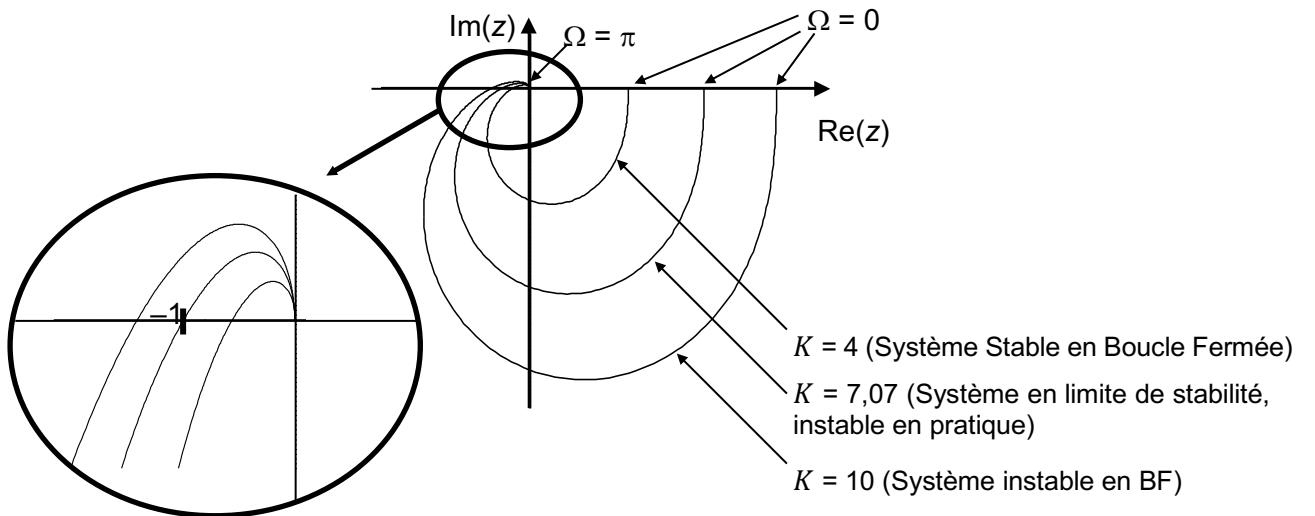


Figure G.9 – Diagrammes Nyquist d'un système à temps discret stable $H_{BO}(z = e^{j\Omega})$, avec Ω variant de 0 à π , pour différentes valeurs de K .

Exemple 2 – Système à temps discret ayant un pôle sur le cercle unité

Considérons la transmittance $H_{BO}(z)$ à temps discret d'un système bouclé à contre-réaction négative de la figure G.8 :

$$H_{BO}(z) = \frac{K}{z - 1}$$

Ce système simple est un intégrateur. Le système bouclé sera stable au sens EB-SB si toutes les racines de l'équation caractéristique : $1 + H_{BO}(z) = 0$ sont à l'intérieur du cercle unité. Un calcul rapide montre que $1 + H_{BO}(z) = 0 \Leftrightarrow z - 1 + K = 0$. Il faut donc $0 < K < 2$ pour que la racine de cette équation soit à l'intérieur du cercle unité. Ce résultat se retrouve en appliquant le critère du contour pour les systèmes à temps discret en tenant compte du pôle sur le cercle unité de $H_{BO}(z)$.

En appliquant le changement de variable : $z = e^{j\Omega}$, avec $-\pi < \Omega < \pi$, il vient :

$$H_{BO}(j\Omega) = \frac{K}{e^{j\Omega} - 1} = -\frac{K}{2} \left(1 + j \frac{\sin \Omega}{1 - \cos \Omega} \right)$$

Lorsque Ω varie de $-\pi$ à $+\pi$ en contournant par l'extérieur le pôle $z = 1$ situé sur le cercle unité (cf. figure G.10a), qui par ce contournement externe sera considéré comme stable lors de l'étude, le tracé dans le plan de Nyquist (plan complexe) de $H_{BO}(j\Omega)$ donné par la figure G.10b est obtenu.

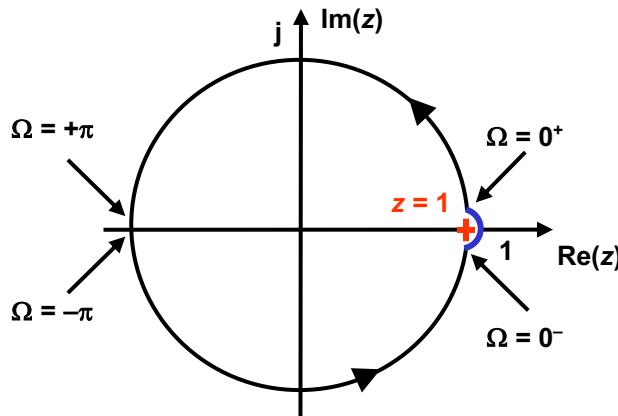


Figure G.10a – Parcours de $z = e^{j\Omega}$ sur le cercle unité lorsque Ω varie de $-\pi$ à $+\pi$ dans le cas d'un pôle en $z = 1$.

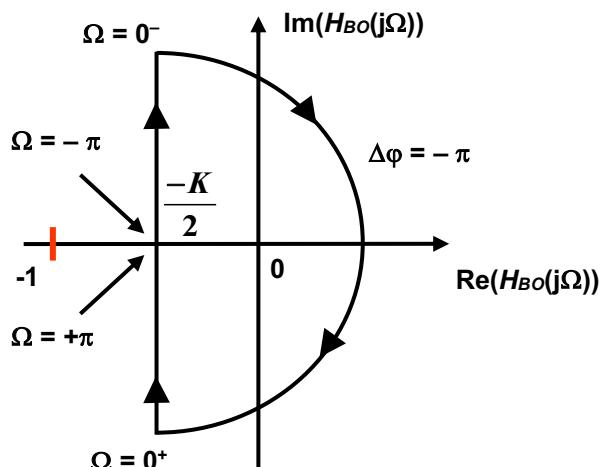


Figure G.10b – Diagrammes Nyquist de $H_{BO}(j\Omega) = \frac{K}{e^{j\Omega} - 1} = -\frac{K}{2} \left(1 + j \frac{\sin \Omega}{1 - \cos \Omega} \right)$ lorsque Ω varie de $-\pi$ à $+\pi$.

Explications du tracé de la figure G.10b :

Variation de Ω de $-\pi$ à 0^- puis de 0^+ à $+\pi$: Branche verticale infinie à partie réelle constante égale à $-K/2$.

Variation de Ω de 0^- à 0^+ : Fermeture à l'infini du contour de Nyquist.

Pour passer de $\Omega = 0^-$ à $\Omega = 0^+$, le contournement du point $z = 1$ par l'extérieur induit une variation de phase de $+\pi$ du tracé z . Sachant que lorsque $\Omega \rightarrow 0$, nous avons :

$$H_{BO}(j\Omega) \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} -\frac{K}{2} \left(1 + j \frac{\Omega}{1 - \left(1 + \frac{\Omega^2}{2} \right)} \right) = -\frac{K}{2} \left(1 + j \frac{2}{\Omega} \right) = -\frac{K}{2} + j - \frac{K}{\Omega}$$

il vient que le tracé de $H_{BO}(j\Omega)$ dans le plan de Nyquist a une variation de phase $\Delta\phi = -\pi$.

Stabilité : puisque le pôle sur le cercle est considéré stable, le système bouclé sera stable au sens EB-SB si le contour de Nyquist n'entoure pas le point $(-1, j0)$, donc si $0 < K < 2$.

3. Marges de robustesse de la stabilité des systèmes asservis

Assurer la stabilité d'un système asservi pour une valeur donnée de la fonction de transfert du système à asservir est fondamental mais pas suffisant. En effet, en pratique le modèle (la fonction de transfert) du système à asservir est connu avec plus ou moins de précision au moment où le correcteur est synthétisé et de plus, le système peut évoluer au cours du temps suite au vieillissement ou tout autre cause. Il est donc nécessaire de garantir la robustesse de la stabilité, donc de s'assurer que le comportement du système asservi n'est que modérément sensible aux évolutions du système à contrôler.

Afin d'assurer la robustesse de la stabilité du système asservi, on synthétisera un correcteur qui assurera que le système asservi se situe à une certaine distance de l'instabilité. Cette distance peut se mesurer de différentes manières, c'est ce que l'on nomme les marges de stabilité ou marges de robustesse en stabilité. Ce sont les marges de module, de phase et de gain (par ordre d'importance décroissante). Toutes ces marges mesurent une certaine distance de l'image de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$ par rapport au point critique $(-1, j0)$ (point limite de stabilité) dans le plan de Nyquist (plan complexe).

Synthétiser un correcteur tel qu'une distance minimale entre la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$ et le point critique $(-1, j0)$ est assurée a deux intérêts majeurs :

- garantir la stabilité du système asservi même lorsque la fonction de transfert du système évolue au cours du temps ou qu'elle est mal connue au moment de la synthèse du correcteur ;
- assurer des réponses correctement amorties (limitation des oscillations) du système asservi.

3.1 Marges de stabilité

Afin de quantifier la « distance » de l'image de $H_{BO}(j\omega)$ par rapport au point critique $(-1, j0)$, on définit trois marges (figure G.11) :

- La marge de module M_M :

$$M_M = \min_{\omega} |1 + H_{BO}(j\omega)|$$

M_M est la plus petite distance entre l'image de $H_{BO}(j\omega)$ et le point critique $(-1, j0)$.

Cette marge permet de garantir que l'image de $H_{BO}(j\omega)$ n'entre pas dans un cercle centré en $(-1, j0)$ et de rayon M_M .

Pour une fonction de transfert $H_{BO}(j\omega)$ strictement causale, la marge de module est comprise entre 0 et 1.

- La marge de phase φ_M et marge de retard D_M :

$$\varphi_M = \pi + \text{Arg}(H_{BO}(j\omega_c)) \text{ avec } \omega_c \text{ la plus grande pulsation telle que } |H_{BO}(j\omega)| = 1.$$

Cette marge indique la plus grande phase négative qui peut être introduite dans la boucle avec de rendre le système asservi instable.

De manière équivalente, cette marge indique le plus grand retard que l'on peut ajouter dans la boucle sans rendre le système asservi instable. En effet, la marge de retard D_M est liée à la marge de phase par :

$$D_M = \frac{\varphi_M}{\omega_c} \text{ (attention au fait que } \varphi_M \text{ se mesure en radians).}$$

- La marge de gain :

$$\text{Définition 1 : } G_{M1} = 1 - |H_{BO}(j\omega_g)|_{\text{arg}(H_{BO}(j\omega_g)) = -180^\circ}$$

$$\text{Définition 2 : } G_{M2} = \frac{1}{|H_{BO}(j\omega_g)|_{\text{arg}(H_{BO}(j\omega_g)) = -180^\circ}} = \frac{1}{1 - G_{M1}}$$

Ces deux définitions sont équivalentes.

$$\omega_g \text{ est la pulsation telle que } \text{arg}(H_{BO}(j\omega_g)) = -180^\circ.$$

G_{M2} est le gain maximum supplémentaire qui s'il est introduit dans la boucle, rend le système asservi instable.

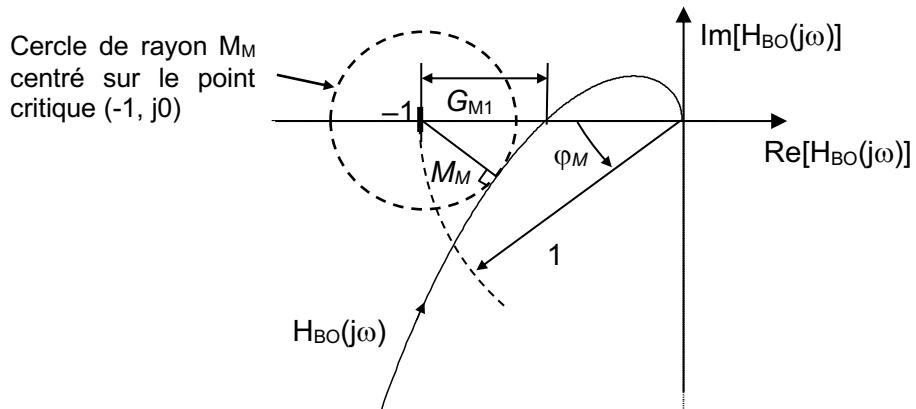


Figure G.11 – Les marges de gain, de phase et de module dans le diagramme de Nyquist.

Les marges minimum suivantes devraient toujours être respectées :

$$M_M \geq 0,5 \quad \varphi_M \geq 45^\circ \quad G_{M1} \geq 0,5 \dots 0,8 \text{ ou } G_{M2} \geq 2 \dots 5$$

A temps discret : $D_M \geq 5.T_e$ (avec T_e la période d'échantillonnage)

A temps continu et temps discret : $D_M \geq 1\% (t_{rep})_{95\%}$ de H_p , avec H_p la fonction de transfert du processus à commander.

En pratique, deux cas sont souvent considérés :

- Si le modèle H_p du système est supposé bien connu et évoluant peu au cours du fonctionnement, on prendra :

$$M_M \geq 0,5, \quad \varphi_M \geq 45^\circ, \quad D_M \geq 5.T_e, \quad D_M \geq 1\% (t_{rep})_{95\%} \text{ de } H_p$$

- Si le modèle H_p du système est mal connu et/ou évolue fortement au cours du fonctionnement, on prendra plus de sécurité :

$$M_M \geq 0,8, \quad \varphi_M \geq 60^\circ, \quad D_M \geq 10.T_e, \quad D_M \geq 3\% (t_{rep})_{95\%} \text{ de } H_p$$

En pratique, pour assurer un fonctionnement correct (limitation des oscillations indésirables) d'un système asservi, il est nécessaire que la marge de retard réelle (valeur théorique moins les potentiels retards non modélisés) reste supérieure à la moitié de la marge de retard théorique.

Rôle particulier de la marge de module

On peut noter les relations suivantes entre la marge de module et les autres marges :

$$\begin{aligned} M_M &\leq G_{M1} \\ M_M = 1 &\Rightarrow \varphi_M \geq 60^\circ \\ M_M = 0,76 &\Rightarrow \varphi_M \geq 45^\circ \\ M_M = 0,52 &\Rightarrow \varphi_M \geq 30^\circ. \end{aligned}$$

De plus, comme le montre la figure G.12 dans certains cas de figure (en particulier avec certaines méthodes algébriques de synthèse de correcteurs) un système peut avoir des marges de gain et de phase satisfaisantes mais une marge de module insuffisante qui amènerait à un comportement pratique inacceptable.

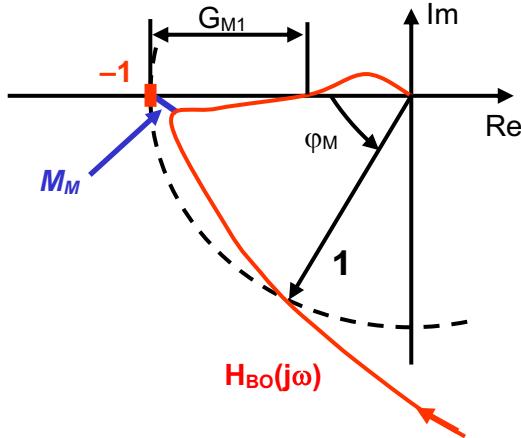


Figure G.12 – Cas d'un système asservi ayant des marges de gain et de phase satisfaisantes mais une marge de module insuffisante.

Importance de la marge de Retard

La marge de retard est une marge qui joue un rôle très important en pratique (elle est trop souvent oubliée dans de nombreux textes d'automatique). C'est cette marge qui fait le lien entre la marge de phase (critère purement mathématique) et le système réel.

Prenons le cas d'un système asservi dont les constantes de temps sont de l'ordre de la seconde. Un correcteur synthétisé pour ce système permet d'obtenir les marges très satisfaisantes suivantes :

$$M_M = 0,5, \quad \varphi_M = 60^\circ \text{ à } \omega_c = 100 \text{ rad/s} \text{ et } G_{M1} = 0,5 \text{ à } \omega_g = 500 \text{ rad/s.}$$

Mais la marge de retard obtenue pour ce système asservi sera :

$$D_M = \frac{\varphi_M}{\omega_c} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{60}{100} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

Ceci indique que le système asservi sera très oscillant si un retard supérieur à 5 ms est introduit dans la boucle d'asservissement, et instable si ce retard est supérieur à 10 ms.

Compte tenu des constantes de temps du système qui sont de l'ordre de la seconde, il peut être difficile de garantir qu'un retard pur non modélisé de l'ordre de quelques ms (quelques pour-cent des constantes de temps) n'existe pas dans le système à commander ou ne puisse pas apparaître au cours du fonctionnement. Si on n'est pas capable de garantir cela, il faudra, pour une même marge de phase, diminuer la bande passante ω_c .

3.2 Mesure des marges de stabilité

Autant il est facile de comprendre l'interprétation des marges de robustesse dans le diagramme de Nyquist, autant, sauf pour la marge de gain, il n'est pas simple de mesurer les marges de module et de phase dans ce diagramme.

Les diagrammes de Bode ou de Black-Nichols permettent une mesure aisée des marges de gain et de phase, alors que le tracé du module de la fonction de sensibilité de sortie $S(j\omega) = \frac{1}{1+H_{BO}(j\omega)}$ permet une mesure aisée de la marge de module.

3.2.1 Mesure des marges gain et de phase dans le diagramme de Bode

Le diagramme de Bode représente sur deux tracés distincts le module en décibels et la phase en degrés d'une fonction de transfert en fonction de la pulsation ω . Pour la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$ nous aurons donc :

- Diagramme de Gain (module de $H_{BO}(j\omega)$ en échelles \log_{10}) :

$$|H_{BO}(j\omega)|_{dB} = 20 \times \log_{10}(|H_{BO}(j\omega)|) = f(\log_{10}(\omega))$$

- Diagramme de Phase (argument de $H_{BO}(j\omega)$ en échelles semi-log₁₀) :

$$\arg(H_{BO}(j\omega)) \text{ en } [^\circ] = g(\log_{10}(\omega))$$

La figure G.13 donne le diagramme de Bode de :

$$H_{BO}(p) = \frac{1000 \times (10p^2 + 75p + 156)}{p^5 + 123.5p^4 + 2498p^3 + 14875p^2 + 12500p} \quad \text{avec } p = j\omega$$

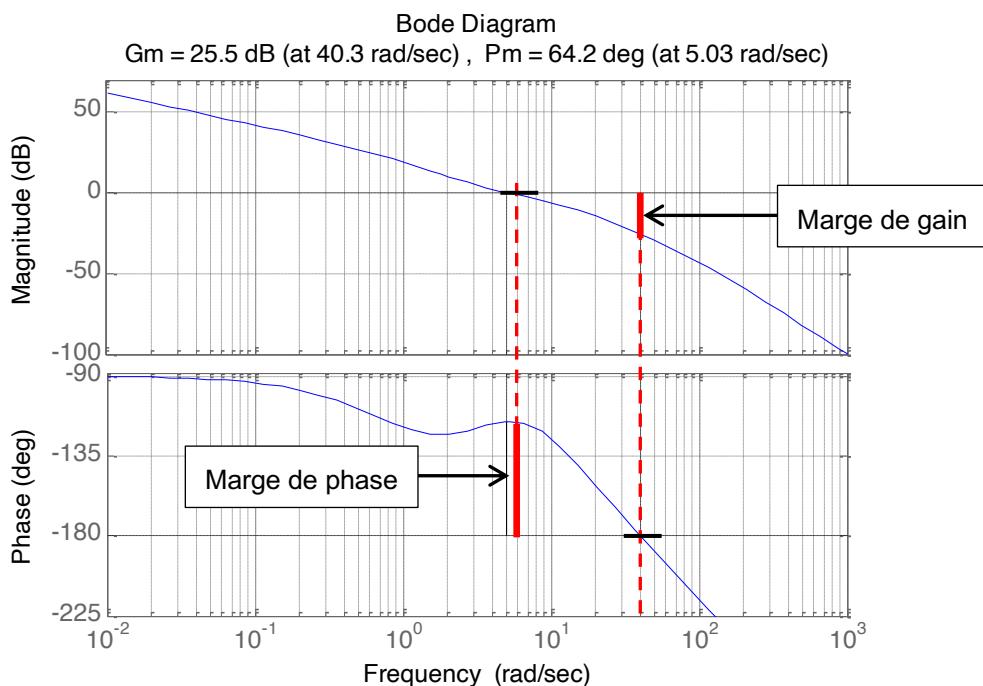


Figure G.13 – Marges de Gain et de Phase dans le diagramme de Bode.

Sur la figure G.13 :

- La marge de gain mesurée en décibels est de 25,5 dB. Il vient pour G_{M2} :

$G_{M2} = 10^{25.5/20} = 18.84$: le gain de boucle peut être multiplié jusqu'à 18,84 avant que le système asservi ne devienne instable. Ce qui est très supérieur à la valeur théorique minimale désirée d'une marge de gain de 2.

- La marge de phase mesurée est $\varphi_M = 64.2^\circ$ à la pulsation $\omega_c = 5.03$ rad/s.

$$\text{Cela correspond à une marge de retard : } D_M = \frac{\varphi_M}{\omega_c} = \frac{\pi}{180} \times \frac{64.2}{5.03} = 0.223 \text{ s.}$$

Un retard introduit dans la boucle supérieure à 223 ms causera l'instabilité du système asservi.

La marge de phase théorique minimale désirée est de 45° . Puisque la marge de phase est de 64.2° , on pourra tolérer en pratique d'ajouter un élément dans la boucle qui n'ajoute pas une phase supérieure à $64.2^\circ - 45^\circ = 19.2^\circ$ à la pulsation 5.03 rad/s (ajout de 66.6 ms de retard à la pulsation 5.03 rad/s) car au-delà le comportement du système asservi deviendrait trop peu amorti en raison de la faible marge de phase.

3.2.2 Mesure des marges gain et de phase dans le diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black-Nichols représente sur un même graphique le module en dB et la phase en degrés d'une fonction de transfert en fonction de la pulsation ω :

$$20 \times \log_{10}(|H_{BO}(j\omega)|) = f(\arg(H_{BO}(j\omega))) \text{ en } [^\circ]$$

La figure G.14 donne le diagramme de Black-Nichols de la fonction de transfert $H_{BO}(j\omega)$ en boucle ouverte :

$$H_{BO}(p) = \frac{1000 \times (10p^2 + 75p + 156)}{p^5 + 123.5p^4 + 2498p^3 + 14875p^2 + 12500p} \quad \text{avec } p = j\omega$$

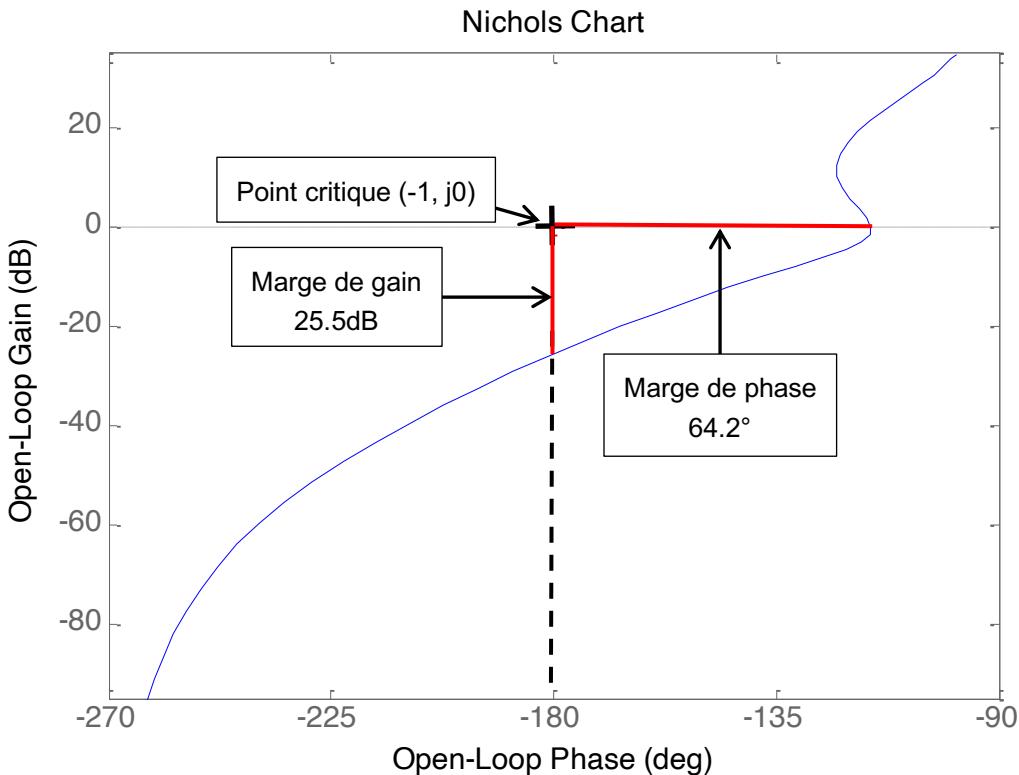


Figure G.14 – Marges de Gain et de Phase dans le diagramme de Black-Nichols.

Le diagramme de Black-Nichols est difficile à tracer à la main. C'est pourquoi le diagramme de Bode est souvent plus utilisé. Par contre, si l'on dispose d'un traceur de diagrammes (ordinateur, calculatrice ou autre), le diagramme de Black-Nichols est un complément très important au diagramme de Bode lors de la synthèse de correcteurs.

On obtient facilement les marges de gain et de phase sur ce diagramme, et le contournement du point critique $(-1, j0)$ de gain unitaire 0 dB et de phase -180° apparaît clairement. C'est pourquoi ce diagramme est particulièrement utile à la synthèse de correcteurs par certaines méthodes dites de modélage de $H_{BO}(p)$.

3.3.3 Mesure de la marge de module par la fonction de sensibilité de sortie

La marge de module est mesurée par la détermination de la plus grande valeur du gain de la fonction de sensibilité de sortie $S(j\omega)$ donnée par :

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)}$$

En effet :

$$\max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)} \right| = \frac{1}{\min_{\omega} |1 + H_{BO}(j\omega)|} = \frac{1}{M_M}$$

En pratique, on trace le diagramme de Bode en amplitude de $S(j\omega)$ et on détermine la plus grande valeur de $|S(j\omega)|_{dB}$. La marge de module est ensuite donnée par :

$$M_M = \frac{1}{10^{\frac{(S_{max})_{dB}}{20}}} = 10^{-\frac{(S_{max})_{dB}}{20}}$$

Le diagramme de la figure G.15 donne le module (gain) de la fonction de sensibilité pour la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{BO}(p) = \frac{1000 \times (10p^2 + 75p + 156)}{p^5 + 123.5p^4 + 2498p^3 + 14875p^2 + 12500p} \quad \text{avec } p = j\omega$$

La plus grande valeur du gain de la fonction de sensibilité est $S_{max} = 1.94$ dB. Il vient donc que la marge de module est $M_M = 10^{-\frac{1.94}{20}} = 0.8$.

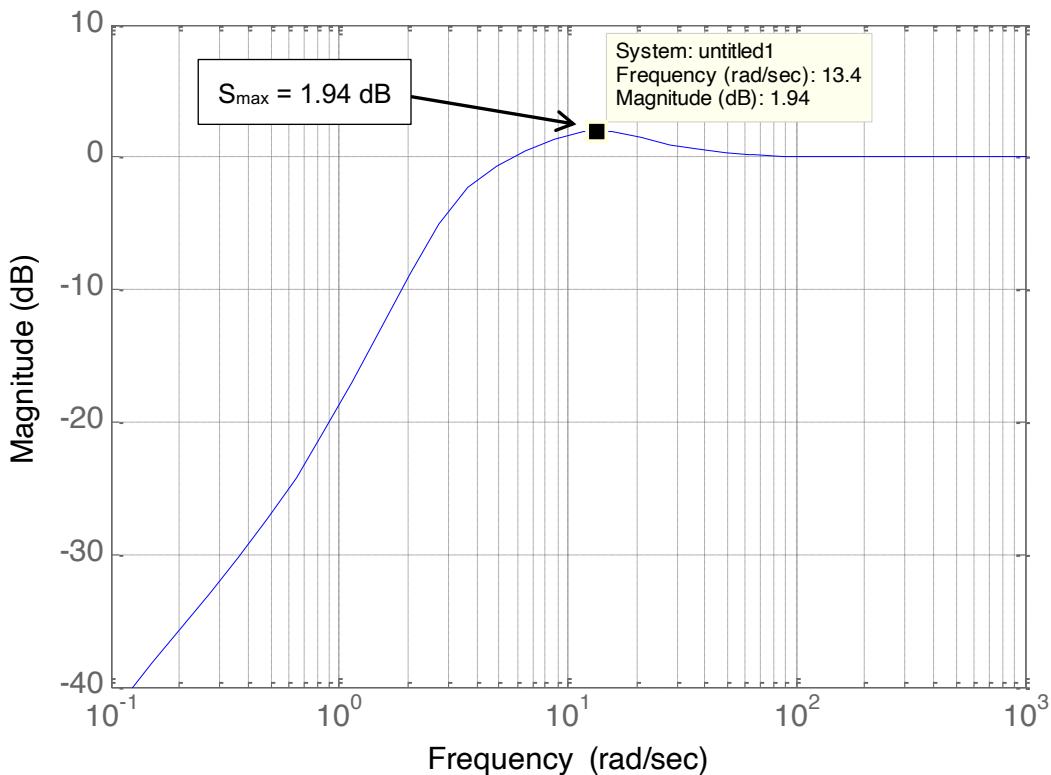


Figure G.15 – Mesure de la marge de module à l'aide du gain de la fonction de sensibilité de sortie.

4. Fonctions de sensibilité et Intégrales de Bode

Considérons le système bouclé générique de la figure G.16 où le processus à asservir est représenté par la fonction de transfert $H(p)$ ($H_d(z)$ en temps discret) et $C(p)$ ($C_d(z)$ en temps discret) est le correcteur qui fait en sorte que la sortie $Y(p)$ atteigne la consigne $Y_c(p)$ à partir du calcul de l'écart $\varepsilon(p)$.

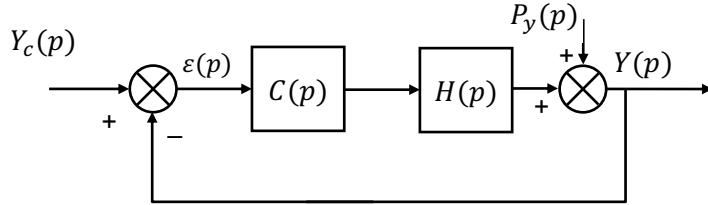


Figure G.16 – Système asservi générique formé d'un comparateur, un correcteur $C(p)$, le processus à asservir $H(p)$ et une boucle de contre-réaction.

La relation entre l'entrée de consigne $Y_c(p)$ et la sortie $Y(p)$ est donnée par la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y_c(p)}{Y(p)} = H_{BF}(p) = \frac{H(p)C(p)}{1 + H(p)C(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \quad \text{avec } H_{BO}(p) = H(p)C(p)$$

Le correcteur $C(p)$ ($C_d(z)$ en temps discret) est déterminé pour obtenir une fonction de transfert en boucle fermée désirée (au moins acceptable). Idéalement, la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ ne devrait pas être sensible (changer) aux changements du processus à commander. C'est-à-dire qu'on souhaiterait que $H_{BF}(p)$ reste inchangée (pour maintenir le comportement désiré de la sortie vis-à-vis de la consigne) lorsque $H(p)$ évolue (changement de ses paramètres) ou que $H(p)$ n'a pas été correctement identifiée (incertitudes/erreurs de modélisation).

La fonction de sensibilité de sortie $S(p)$ permet d'évaluer l'impact des variations de $H(p)$ sur $H_{BF}(p)$:

$$S(p) \triangleq \frac{d(\log H_{BF}(p))}{d(\log H(p))} = \frac{\frac{dH_{BF}}{H_{BF}}}{\frac{dH}{H}}$$

ou sous une autre forme :

$$\frac{dH_{BF}}{H_{BF}(p)} = S(p) \frac{dH}{H(p)}$$

Cette fonction de sensibilité relie la variation de $H_{BF}(p)$ aux variations de $H(p)$. En pratique, on a tout intérêt à minimiser le module de la fonction de sensibilité de sortie. En effet, la relation précédente montre clairement que plus le module de $S(j\omega)$ sera proche de zéro moins sera sensible H_{BF} aux variations de H . Idéalement, il faudrait avoir pour toutes les fréquences une fonction de sensibilité nulle. Comme nous le verrons plus loin avec les intégrales de Bode, ceci n'est pas possible.

L'expression de $H_{BF}(p)$ en fonction de $H(p)$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial H_{BF}}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left(1 - \frac{1}{1 + CH} \right) = \frac{C}{(1 + CH)^2} = \frac{H_{BF}}{H} \frac{1}{1 + CH}$$

D'où il vient l'expression de la fonction de sensibilité de sortie en fonction de $H(p)C(p) = H_{BO}(p)$:

$$S(p) = \frac{1}{1 + CH} = \frac{1}{1 + H_{BO}}$$

Et la fonction de sensibilité complémentaire $T(p)$:

$$T(p) \triangleq 1 - S(p) = \frac{HC}{1 + CH} = H_{BF}(p)$$

Nous avons donc la relation suivante qui lie les variations de $H(p)$ sur $H_{BF}(p)$ en fonction de $H_{BO}(p)$:

$$\frac{dH_{BF}}{H_{BF}(p)} = S(p) \frac{dH}{H(p)} = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} \frac{dH}{H(p)}$$

De cette relation, il vient que pour obtenir un système en boucle fermée qui soit peu sensible aux incertitudes sur le modèle (i.e. dH_{BF}/H_{BF} petit quel que soit dH/H), il est nécessaire d'obtenir une fonction de transfert en boucle ouverte, $H_{BO}(p)$, prenant de fortes valeurs. Il sera montré dans la suite que ce point de vue doit être tempéré afin de tenir compte des entrées de perturbation.

Lien entre la fonction de sensibilité de sortie et la marge de module

La marge de module M_M est mesurée par la plus petite distance entre la courbe image de $H_{BO}(j\omega)$ dans le plan de Nyquist (plan complexe) et le point critique $(-1, j0)$:

$$M_M = \min_{\omega} |1 + H_{BO}(j\omega)|$$

La fonction de sensibilité de sortie $S(j\omega)$ est donnée par :

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)}$$

D'où :

$$\max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)} \right| = \frac{1}{\min_{\omega} |1 + H_{BO}(j\omega)|} = \frac{1}{M_M}$$

Par conséquent, la marge de module M_M est donnée par :

$$M_M = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

Cette expression montre que minimiser la valeur maximum du module de la fonction de sensibilité permet de maximiser la marge de module du système en boucle fermée donc d'augmenter sa robustesse aux variations du système à commander.

On peut également remarquer que la fonction de transfert entre la perturbation de sortie $P_y(p)$ et la sortie $Y(p)$ de la figure G.16 est la fonction de sensibilité de sortie :

$$\frac{Y(p)}{P_y(p)} = \frac{1}{1 + H(p)C(p)} = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} = S(p)$$

Ainsi, minimiser le module de la fonction de sensibilité de sortie $S(j\omega)$, minimisera l'influence de la perturbation de sortie $P_y(p)$ sur la sortie $Y(p)$. Tout ceci est obtenu en déterminant un correcteur $C(p)$ qui satisfait la marge de module désirée.

Intégrales de Bode en temps continu

Il est naturel de vouloir minimiser le module de la fonction de sensibilité $S(j\omega)$ à toutes de fréquences afin de désensibiliser le système asservi aux variations inconnues de $H(p)$ et maximiser la marge de module du système asservi. Bode a montré qu'il n'est pas possible de rendre le module de $S(j\omega)$ aussi petit qu'on le souhaite sur toutes les fréquences pour la plupart des systèmes.

En effet, pour un système qui satisfait : $pH_{BO} = pHC \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$, les fonctions de sensibilité $S(j\omega)$ et de sensibilité complémentaire $T(j\omega)$ satisfont les propriétés suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|d\omega = \int_0^{+\infty} \log \left| \frac{1}{1 + H_{BO}(j\omega)} \right| d\omega = \pi \sum |p_i|$$

$$\int_0^{+\infty} \log|T(1/j\omega)|d\omega = \int_0^{+\infty} \log \left| \frac{H_{BO}(1/j\omega)}{1 + H_{BO}(1/j\omega)} \right| d\omega = \pi \sum \left| \frac{1}{z_i} \right|$$

où p_i sont les pôles de $H_{BO}(p)$ à partie réelle positive (pôles instables) et z_i sont les zéros de $H_{BO}(p)$ à partie réelle positive (zéros instables) un pôle ou un zéro d'ordre n est compté n fois.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|d\omega$ représente l'aire sous la courbe de la figure G.17 représentative d'une allure typique de $|S(j\omega)|$:

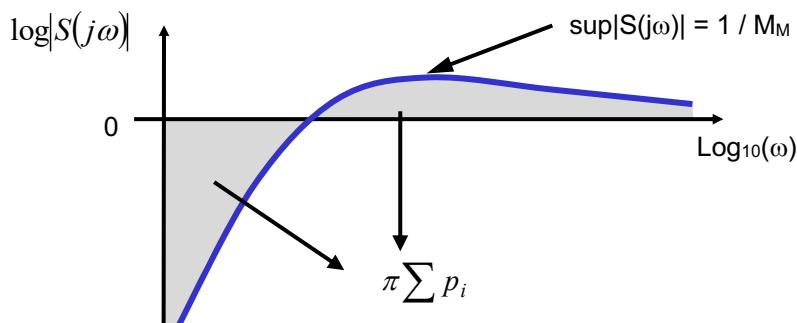


Figure G.17 – Allure typique du module (en dB) de la fonction de sensibilité de sortie.

Les intégrales de Bode signifient que les fonctions de sensibilité ne peuvent pas être rendues petites à toutes les fréquences. Ainsi, si la sensibilité est décrite dans une bande de fréquences, elle s'accroîtra dans une autre. Cette limitation fondamentale est l'une des grandes difficultés de la commande d'un système qui impose de faire des compromis entre précision (peu de sensibilité en basses fréquences) et robustesse (minimisation de la plus grande valeur de $|S|$).

En pratique, le module de $S(j\omega)$ ne pouvant pas être rendu petit à toutes les fréquences, on privilégiera $|S(j\omega)| \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} 0$ afin d'obtenir une erreur statique nulle entre la consigne et la sortie du système. Ceci imposera d'avoir un module $|H_{BO}(j\omega)| \gg 1$ en basses fréquences. Le plus souvent cela sera réalisé par l'utilisation d'un intégrateur ($\frac{1}{p}$) dans le correcteur.

H. Structure de commande, contraintes et objectifs d'un système asservi

1. Structure générale de commande

Nous nous intéressons à la commande de systèmes SISO (Single Input – Single Output) possédant une entrée de commande et une sortie à asservir. Typiquement, afin d'asservir la grandeur d'intérêt d'un processus à une référence donnée (qui peut être variable), on utilise un actionneur qui amplifie le signal de commande afin d'appliquer la puissance nécessaire au processus. Pour contrôler la valeur prise par la grandeur à asservir, un capteur est nécessaire. Le signal issu du capteur est utilisé par la commande pour l'asservissement. La figure H.1 donne la structure typique de commande.

Sur la figure H.1 apparaissent également les perturbations inconnues qui peuvent agir sur l'actionneur, le processus et le capteur.

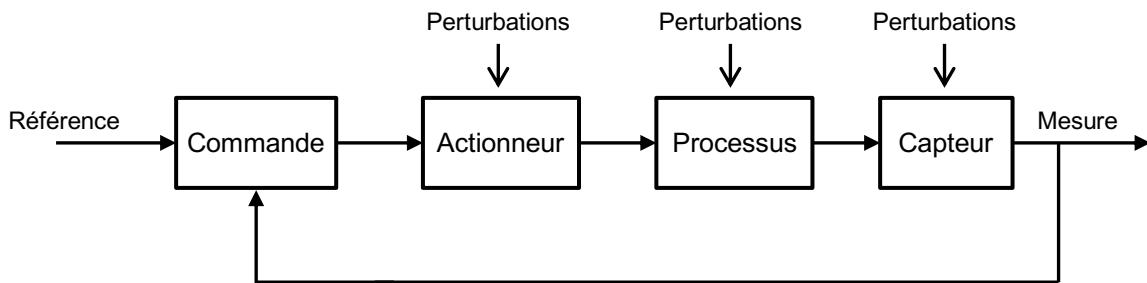


Figure H.1 – Structure typique de commande d'un processus SISO avec son actionneur et son capteur.

Nous ferons l'hypothèse que l'actionneur, le processus et le capteur sont des systèmes linéaires invariants causaux à temps continu. Le comportement de chacun d'eux est donné par une fonction de transfert : $H_a(p)$ pour l'actionneur, $H_p(p)$ pour le processus, $H_c(p)$ pour le capteur. La fonction de transfert du système entre le signal issu de la commande et le signal de mesure donné par le capteur, sera :

$$H(p) = H_a(p)H_p(p)H_c(p)$$

Le plus souvent en pratique, les dynamiques de l'actionneur et du capteur sont très rapides par rapport à celle du processus. On pourra alors faire l'hypothèse $H(p) \approx H_a(p=0)H_p(p).H_c(p=0)$ avec une réduction du domaine de validité fréquentielle du modèle utilisé pour élaborer la commande (voir la section 4. Domaine de validité fréquentielle du chapitre F. Méthodes élémentaires expérimentales d'identification de modèles linéaires).

Par ailleurs, en pratique le signal de commande doit toujours être saturé aux valeurs maximum et minimum que peut prendre ce signal. Dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires, nous ne prendrons pas en compte cette obligation au moment de la synthèse du correcteur mais devrons, lors de l'implantation, tenir compte de cette saturation. En particulier, un dispositif anti emballage (anti-windup) de l'intégrateur devra être utilisé si la commande possède une action intégrale.

Pour la synthèse de la commande du système $H(p)$, la structure de commande à deux degrés de liberté, $F(p)$ et $C(p)$, de la figure H.2 est préconisée.

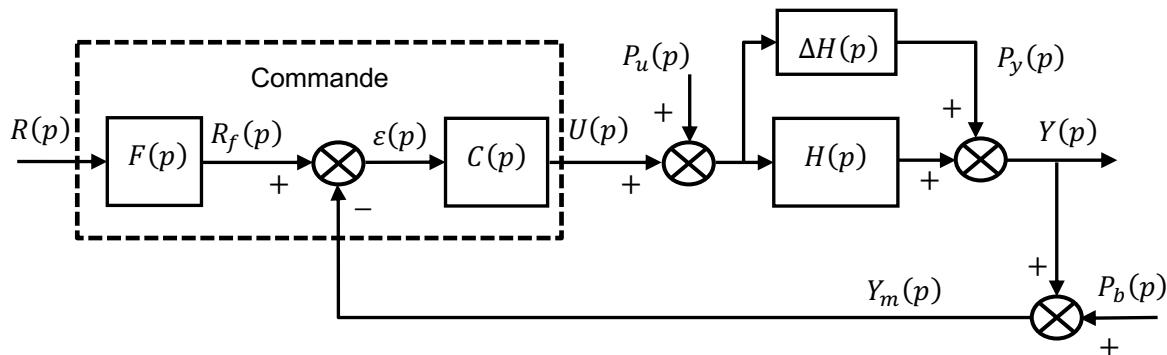


Figure H.2 – Structure de commande à deux degrés de liberté pour la commande d'un système $H(p)$ perturbé.

Sur la figure H.2 apparaissent :

- $Y(p)$: la sortie du système $H(p)$ à commander ;
- $Y_m(p)$: la sortie mesurée ;
- $U(p)$: la sortie de la commande appliquée à l'entrée de commande du système $H(p)$;
- $R(p)$: la référence de la sortie $Y(p)$ (le signal que doit suivre la sortie du système) ;
- $R_f(p)$: la référence filtrée par $F(p)$;
- $\varepsilon(p)$: l'écart de consigne ;
- $P_u(p)$: la perturbation de commande ;
- $P_y(p)$: la perturbation de sortie issue de l'incertitude $\Delta H(p)$ de $H(p)$;
- $P_b(p)$: le bruit de mesure.

Les objectifs généraux à atteindre par un système de commande sont :

- d'assurer la stabilité du système bouclé (stabilité interne) ;
- d'amener la sortie Y à la valeur de référence désirée R ;
- de maîtriser la sensibilité du système bouclé aux variations ΔH de H , ce qui revient à maîtriser l'effet de la perturbation P_y en assurant une marge de module suffisante ;
- de maîtriser le bruit en hautes fréquences présent sur la commande U , ce qui revient à maîtriser l'effet du bruit de mesure P_b sur la commande U ;
- de minimiser l'effet de la perturbation de commande P_u .

Ces objectifs doivent être précisément définis mathématiquement en explicitant les contraintes à respecter et le(s) critère(s) à minimiser lors de la conception de la commande.

La commande à deux degrés de liberté de la figure H.2 est caractérisée par le fait qu'elle permet d'une part de fixer le comportement en régulation (i.e. le comportement vis-à-vis des perturbations) du système bouclé à l'aide du correcteur $C(p)$, et d'autre part de choisir le comportement de la sortie vis-à-vis de l'entrée de référence grâce au filtre $F(p)$:

- $C(p)$: correcteur de boucle (feedback) ;
- $F(p)$: filtrage de la consigne R et/ou fonction d'anticipation (feedforward).

Ainsi, la démarche de synthèse consistera à tout d'abord déterminer un correcteur $C(p)$ qui satisfait les contraintes et objectifs liés aux perturbations. Puis dans un second temps de déterminer un filtre $F(p)$ de la consigne R qui permet d'obtenir le comportement désiré de la sortie Y vis-à-vis de la consigne R .

Afin de définir les contraintes que devront satisfaire le filtre $F(p)$ et le correcteur $C(p)$ par rapport aux objectifs de commande, il est tout d'abord nécessaire d'établir les relations entre les différents signaux du système de commande de la figure H.2 :

$$Y(p) = F(p) \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} R(p) + \frac{H(p)}{1+C(p)H(p)} P_u(p) + \frac{1}{1+C(p)H(p)} P_y(p) - \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} P_b(p)$$

$$U(p) = F(p) \frac{C(p)}{1+C(p)H(p)} R(p) - \frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} P_u(p) - \frac{C(p)}{1+C(p)H(p)} P_y(p) - \frac{C(p)}{1+C(p)H(p)} P_b(p)$$

Il apparaît clairement, avec ces relations, que le choix de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = C(p)H(p)$ conditionne grandement le fonctionnement du système bouclé et que le filtre $F(p)$ permet de fixer le comportement par rapport à la référence une fois $H_{BO}(p)$ déterminée.

Il est fondamental avant de débuter la synthèse d'une commande de fixer les objectifs de synthèse par rapport à un cahier des charges donné. On pourra alors distinguer deux notions fondamentales : les contraintes de synthèse à respecter, sans quoi le système ne pourrait pas fonctionner correctement en pratique, et les grandeurs à optimiser. Il est donc nécessaire dans un premier temps d'expliciter les contraintes de synthèse.

2. Contraintes de synthèse de la commande

Les contraintes de synthèse d'une commande sont tous les critères que devra satisfaire la commande pour qu'elle puisse fonctionner lorsqu'elle sera implantée en pratique.

On peut citer au moins 5 groupes de contraintes de synthèse qu'il faudra absolument respecter afin d'obtenir le fonctionnement expérimental attendu du système bouclé :

1. Stabilité interne

- Toutes les fonctions de transfert entre tous les points d'entrée et de sortie doivent être stables au sens EB-SB : $\text{Re}[\text{pôles}] < 0$.

2. Marges de stabilité suffisantes

- Marges de robustesse minimum :
 - marge de module $M_M \geq (M_M)_{\min}$,
 - marge de phase $\varphi_M \geq (\varphi_M)_{\min}$,
 - marge de retard $D_M \geq (D_M)_{\min}$

3. Limiter le bruit présent sur la commande

- Gain du correcteur en hautes fréquences $\leq N_{\max} < \infty$

4. Petit écart statique entre consigne et mesure

- Grand gain de $C(p)$ en basses fréquences : $C(p=0) \rightarrow \infty$

5. Dépassement de la sortie inférieur à une limite donnée

- Filtrage de la consigne par filtre $F(p)$

Si au moins une commande composée de $C(p)$ et de $F(p)$ satisfaisant les contraintes de synthèse existe, alors il en existe une infinité. Par conséquent, des valeurs uniques de $C(p)$ et de $F(p)$ seront choisies par rapport à l'optimisation d'objectif précis.

Le plus souvent les objectifs de synthèse sont pour le correcteur $C(p)$ et le filtre $F(p)$:

$C(p)$: Minimiser l'impact de la perturbation de commande P_u sur le système asservi tout en respectant les contraintes 1, 2, 3 et 4.

$F(p)$: Minimiser le temps de réponse de la sortie vis-à-vis d'un échelon de référence tout en respectant les contraintes 1, 4 et 5.

Démarche pratique en deux étapes successives :

1. Déterminer $C(p)$ sans s'occuper de la réponse de la sortie vis-à-vis de l'entrée de consigne
2. Déterminer $F(p)$ une fois le correcteur $C(p)$ obtenu pour obtenir le comportement désiré de la sortie vis-à-vis de l'entrée de consigne de la sortie.

3. Objectifs et étapes de la synthèse d'une commande d'un système asservi

Nous résumons dans cette section les objectifs de la synthèse d'une commande pour le système asservi représenté sur la figure H.2 sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. De manière générale résoudre ce problème n'est pas une chose facile, beaucoup de méthodes ont été développées pour cela en fonction de la méthode d'optimisation choisie qu'elle soit « à la main » ou utilisant des ordinateurs puissants.

De manière plus complète, suivant l'entrée de référence (constante, sinusoïdale, trajectoire connue...), le type de la perturbation de commande (impulsionnelle, constante, sinusoïdale...) ou la nature du bruit présent sur la mesure, le problème à résoudre sera différent. Il pourra inclure des contraintes supplémentaires et/ou des informations supplémentaires sur le système à commander.

La formulation proposée ci-dessous est adaptée au cas où on ne dispose pas d'information particulière sur la nature des entrées exogènes (référence et perturbations) et où le filtre $F(p)$ est choisi du 1^{er} ordre afin de faciliter l'implantation.

Problème : Synthèse d'une commande robuste de système SISO

Soit le système asservi de la figure H.2 où $H(p)$, $C(p)$, $F(p)$ sont des systèmes linéaires invariants causaux à temps continu et $\Delta H(p)$ est inconnue mais bornée,

Soit $H_{BO}(p) = C(p).H(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte,

Étape 1 :

Déterminer $C(p)$ minimisant l'effet de la perturbation de commande P_u sur la sortie du système Y tel que :

1. Stabilité interne :

- Toutes les racines de $T(p) = 1 + H_{BO}(p) = 0$ sont à partie réelle strictement négative.
- Pas de compensation de pôle instable entre $C(p)$ et $H(p)$.

2. Robustesse de la stabilité :

- $M_M \geq M_{MD}$, $\varphi_M \geq \varphi_{MD}$ et $D_M \geq D_{MD}$ avec M_{MD} la marge de module désirée, φ_{MD} la marge de phase désirée et D_{MD} la marge de retard désirée.

3. Robustesse au bruit de mesure :

- $|C(j\omega)|_{\omega>10\omega_c} \leq N_{max}$ avec ω_c la plus grande pulsation telle que $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$.

4. Correcteur intégral (annulation de l'erreur statique) :

- $C(p=0) \rightarrow +\infty$

Etape 2 :

Déterminer la pulsation propre ω_0 du filtre à gain statique unitaire $F(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_0}+1}$ tel que :

1. Filtre stable :

- $\omega_0 > 0$, pôle de $F(p)$ à partie réelle strictement négative.

2. Dépassement de la sortie inférieur à une limite donnée :

- $Y_{max} \leq 1.05 \times Y_\infty$ (dépassement inférieur à 5% de la valeur finale)

Le problème à résoudre tel que formulé ci-dessus pourra être modifié en fonction des problèmes concrets rencontrés. Néanmoins, les conditions 1,2 et 3 de l'étape 1, ainsi que les 2 conditions de l'étape 2 seront toujours présentes.

Quatre paramètres sont à préciser dans le problème ci-dessus : la marge de module désirée M_{MD} , la marge de phase désirée φ_{MD} , la marge de retard désirée D_{MD} et le gain N_{max} . Ces valeurs seront choisies suivant le contexte et la connaissance plus ou moins précise du système à commander (voir la section 3. Marges de robustesse de la stabilité des systèmes asservis du chapitre G. Stabilité de l'association de systèmes dynamiques – Marges de stabilité). Concernant la valeur N_{max} , elle sera déterminée à partir du niveau de bruit autorisé sur la commande connaissant le niveau de bruit présent sur la mesure, voir la section 4.1. Limitation du niveau de bruit présent sur la commande U du présent chapitre.

4. Contraintes sur le correcteur C du système asservi

On s'intéresse ici à quelques contraintes que devra satisfaire le correcteur intervenant dans l'asservissement de la figure H.3.

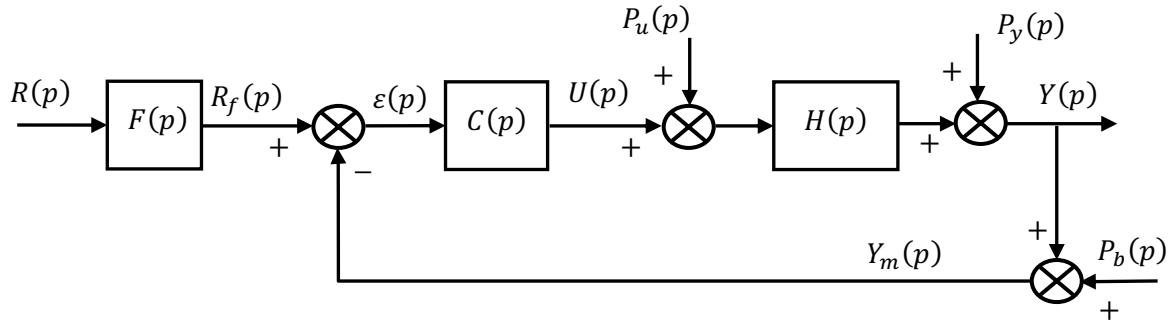


Figure H.3 – Structure de commande à deux degrés de liberté pour la commande d'un système $H(p)$.

4.1. Limitation du niveau de bruit présent sur la commande U

La limitation du bruit présent sur la commande U est fondamentale pour assurer le fonctionnement de l'asservissement en pratique, éviter une usure prématuée des actionneurs, éviter du bruit audible et une consommation énergétique inutile.

Le bruit U_b présent sur la commande provient principalement du bruit de mesure P_b . Le transfert entre le bruit de mesure P_b et la commande U est donné par (figure H.3) :

$$U_b(p) = -\frac{C(p)}{1 + C(p)H(p)} P_b(p) \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{U_b(j\omega)}{P_b(j\omega)} \right| = |C(j\omega)| \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

En remarquant que $\max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{1}{M_M}$ est l'inverse de la marge de module $M_M \geq 0.5$ qui est un critère de synthèse du cahier des charges qu'il faudra respecter, nous avons :

$$\left| \frac{U_b(j\omega)}{P_b(j\omega)} \right| \leq \frac{1}{M_M} |C(j\omega)| \quad \forall \omega \geq 0$$

En pratique, on fera le plus souvent l'hypothèse que le spectre du bruit est situé en hautes fréquences. Seront considérées comme hautes fréquences, les fréquences situées une décade au-delà de la pulsation de coupure ω_c , avec ω_c la plus grande pulsation ω telle que $|C(j\omega_c) \cdot H(j\omega_c)| = 1$. Ainsi, au-delà de la pulsation $10\omega_c$, l'hypothèse suivante sera faite : $|C(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\omega > 10\omega_c} \ll 1$ d'où :

$$\left| \frac{U_b(j\omega)}{P_b(j\omega)} \right|_{\omega > 10\omega_c} \approx |C(j\omega)|_{\omega > 10\omega_c} \quad \text{ou} \quad |U_b|_{\omega > 10\omega_c} \approx |C(j\omega)|_{\omega > 10\omega_c} \cdot |P_b|$$

Cette relation montre que le gain du correcteur doit être limité en hautes fréquences ($\omega > 10\omega_c$) afin de limiter le bruit indésirable sur la commande apporté par le bruit de mesure P_b .

Nous noterons N_{\max} la valeur maximale autorisée du gain du correcteur pour les pulsations $\omega > 10\omega_c$. N_{\max} sera donné par le rapport entre l'amplitude maximum du bruit autorisé sur la commande (U_b)_{max} et l'amplitude du bruit présent sur la mesure de la sortie du système $|P_b|$:

$$N_{\max} = \frac{(U_b)_{\max}}{|P_b|}$$

Et le correcteur synthétisé devra donc satisfaire la contrainte suivante :

$$|C(j\omega)|_{\omega > 10\omega_c} \leq N_{\max} < \infty$$

avec ω_c la plus grande pulsation ω telle que $|C(j\omega_c) \cdot H(j\omega_c)| = 1$.

Cette contrainte impose que le correcteur devra être propre : le degré du dénominateur devra toujours être supérieur ou égal à celui du numérateur.

Exemple d'application :

Prenons le cas d'un système asservi dont la mesure de la grandeur de sortie est entachée d'un bruit de mesure d'amplitude 200 mV.

Supposons que la commande $u(t)$ est comprise entre -10V et +10V.

Supposons que le bruit maximum autorisé sur la commande soit de 10% de l'amplitude maximum, i.e. $(U_b)_{max} = 10\% \text{ de } 10V = 1V$.

Il vient alors pour le gain maximum en hautes fréquences du correcteur :

$$|P_b| = 0.2 \quad \text{et} \quad |U_b|_{max} = 1 \quad \text{alors} \quad |C(j\omega)|_{\omega>10\omega_c} \leq N_{max} = \frac{|U_b|_{max}}{|P_b|} = \frac{1}{0.2} = 5 = 14dB$$

♦

La contrainte de gain maximum du correcteur en hautes fréquences est un facteur très limitant lors de la synthèse du correcteur. C'est le plus souvent cette contrainte qui limitera la vitesse de rejet des perturbations.

En pratique, le niveau P_b de bruit présent sur la mesure est obtenu par mesure expérimentale.

Si le niveau de bruit P_b est très élevé, et amène à un gain du correcteur très petit, il faudra alors que le correcteur soit strictement propre et comporte donc un filtre passe-bas en hautes fréquences. Ce filtre doit être déterminé au moment de la synthèse du correcteur et ne doit en aucun cas être choisi de manière arbitraire sans tenir compte du correcteur.

4.2. Effet d'un correcteur à action intégrale

Un correcteur $C(p)$ à action intégrale est un correcteur qui a un gain infini en régime statique :

$$\text{Correcteur à action intégrale : } |C(p)| \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} +\infty$$

Nous noterons le correcteur $C(p)$ et le système à asservir $H(p)$ sous les formes suivantes :

$$C(p) = \frac{R_C(p)}{S_C(p)}, \quad H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$S_C(p=0) = 0$ dans le cas d'un correcteur à action intégrale.

Si nous reprenons la structure de commande de la figure H.3, l'écart de consigne ε et la sortie du système Y sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + CH} [FR - HP_u - P_y - P_b] = \frac{S_C \cdot A}{S_C \cdot A + R_C \cdot B} [FR - HP_u - P_y - P_b] \\ Y(p) &= \frac{CH}{1 + CH} \left[FR + \frac{1}{C} P_u + \frac{1}{CH} P_y - P_b \right] = \frac{R_C \cdot B}{S_C \cdot A + R_C \cdot B} \left[FR + \frac{S_C}{R_C} P_u + \frac{S_C \cdot A}{R_C \cdot B} P_y - P_b \right] \end{aligned}$$

Le théorème de la valeur finale nous permet de déterminer l'écart de consigne ε et la sortie du système Y en régime permanent pour des entrées R , P_u , P_y et P_b constantes. Ainsi en tenant compte de l'action intégrale du correcteur ($S_C(p=0) = 0$) et si le système asservi est stable, il vient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = F(0) \cdot R_0 - P_b$$

L'annulation de l'écart ε entre la référence et la sortie du système est bien obtenue en basses fréquences en choisissant un correcteur ayant une action intégrale.

La sortie Y tendra vers la référence constante R_0 si le filtre F de la consigne a un gain statique unitaire : $F(p=0) = 1$, et que la valeur moyenne du bruit de mesure P_b est nulle. En pratique, la chaîne de mesure ne doit pas comporter de décalage constant (offset).

Les mêmes raisonnements peuvent être tenus en temps discret :

avec Correcteur à action intégrale : $|C_d(z)| \xrightarrow[z \rightarrow 1]{} +\infty$ d'où : $C_d(z) = \frac{R_d(z)}{S_d(z)}$ avec $S_d(z=1) = 0$.

5. Éléments de choix du filtre F de la consigne

5.1. Ajustement du dépassement de la valeur finale de la sortie

On s'intéresse ici à la détermination du filtre $F(p)$ de la référence R intervenant dans l'asservissement de la figure H.4 après que le correcteur de boucle $C(p)$ ait été déterminé.

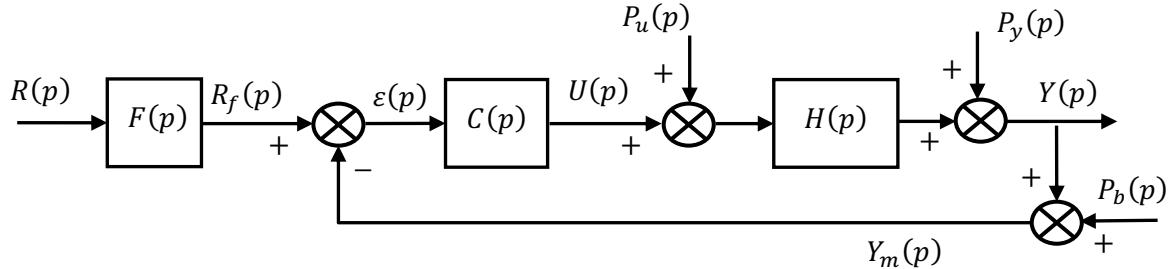


Figure H.4 – Structure de commande à deux degrés de liberté pour la commande d'un système $H(p)$.

En pratique, le filtre $F(p)$ de la référence est la plupart du temps nécessaire car un réglage optimal du correcteur de boucle $C(p)$ amène très souvent à un fort dépassement de la sortie Y pour une entrée de consigne R de type échelon si le filtre $F(p)$ est remplacé par un simple gain unitaire.

En outre, le filtre $F(p)$ permet de garantir la continuité de la commande U même lorsque la référence R varie en échelon. Cette continuité est particulièrement importante pour les systèmes mécaniques auxquels on évite ainsi des chocs (discontinuité de force ou de couple).

Le choix le plus simple pour le filtre $F(p)$ consiste en un filtre passe-bas du 1^{er} ordre de gain unitaire :

$$F(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_0} + 1} \quad (\text{H5.1})$$

La pulsation ω_0 est déterminée de telle sorte que le dépassement de la valeur finale de la sortie Y pour une entrée de référence R en échelon soit inférieur ou égale à la valeur choisie.

Exemple :

Un Correcteur $C(p)$ optimal a été déterminé pour asservir un système $H(p)$. Un filtre $F(p)$ de la forme (H5.1) ayant une pulsation de coupure $\omega_0 = 0.3$ rad/s a ensuite été choisi afin d'obtenir un dépassement maximum de 5% de la valeur finale de la sortie pour une entrée de consigne en échelon.

La figure H.5 donne les résultats obtenus sans et avec le filtre $F(p)$ du 1^{er} ordre.

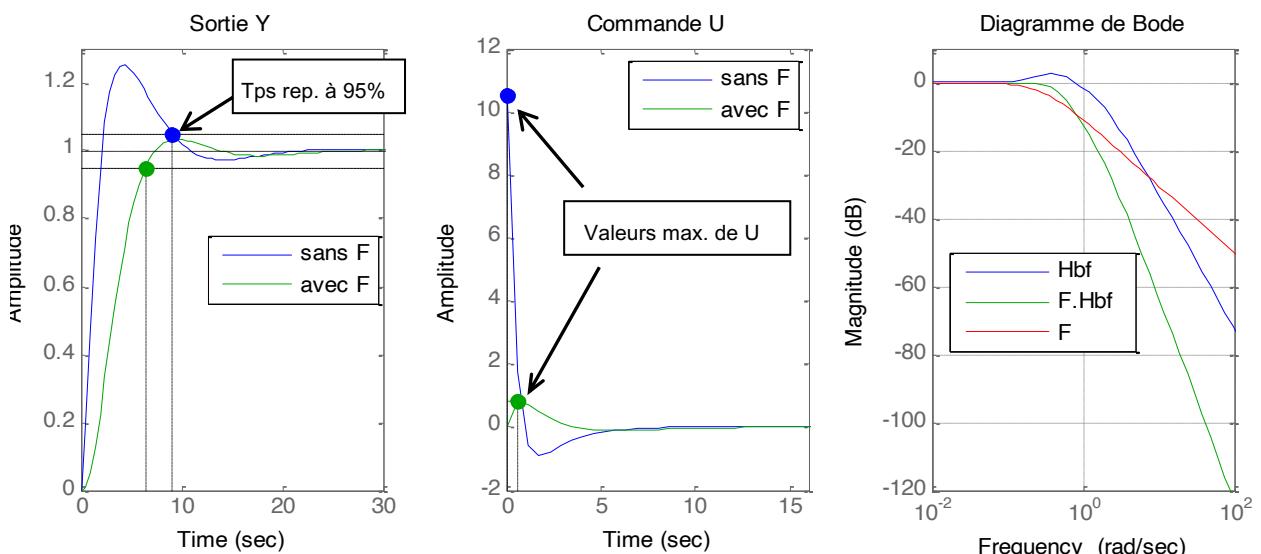


Figure H.5 – Réponses d'un système asservi avec et sans filtre F de la consigne.

Des résultats présentés à la figure H.5 certaines conclusions générales peuvent être tirées :

– figure de droite : sur le diagramme de Bode, l'effet du filtre apparaît clairement, il compense la résonance présente sur H_{BF} .

– figure du milieu : on voit l'intérêt d'avoir utilisé un filtre vis-à-vis de la commande qui n'a plus de discontinuité et prend, grâce au filtre, une amplitude maximum 10 fois plus petite.

– figure de gauche : la réponse de la sortie vis-à-vis d'un échelon de consigne, ne présente plus de dépassement avec le filtre pour un temps de réponse à 95% de la valeur finale meilleur que sans le filtre.

Des filtres plus complexes peuvent être utilisés, en particulier lorsqu'on désire diminuer le temps de réponse vis-à-vis de l'entrée de consigne. La contrepartie sera une plus grande complexité d'implantation du filtre. En pratique, on préférera utiliser des techniques de suivi de consigne à modèle de référence, objet de la section suivante.

5.2. Suivi de consigne à modèle de référence

On s'intéresse ici au schéma de commande de la figure H.6, où, par rapport au schéma de la figure H.4, un terme direct d'anticipation (feedforward) de la commande U_{ff} a été ajouté.

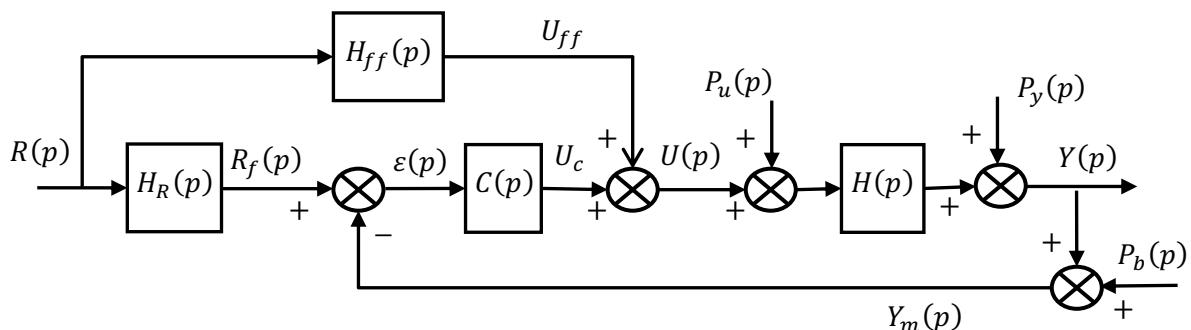


Figure H.6 – Structure de commande à deux degrés de liberté pour la commande d'un système $H(p)$ avec terme direct d'anticipation de la commande U_{ff} .

Par rapport au schéma de commande de la figure H.4, le schéma de la figure H.6 permet une plus grande simplicité et une plus grande souplesse pour la détermination du filtre de la consigne R lorsqu'on désire imposer un modèle de référence entre la consigne R et la sortie Y . Pour cela, deux filtres de la consigne R sont utilisés :

$H_R(p)$: Modèle de référence entre R et Y , génère le comportement désiré de la sortie ;

$H_{ff}(p)$: Fonction de transfert qui génère le terme d'anticipation (feedforward) U_{ff} qui impose à la sortie de suivre la référence R_f (dans le cas idéal sans perturbations).

Nous nous plaçons dans le cas idéal sans perturbations : $P_u = P_y = P_b = 0$, et le modèle $H(p)$ du système est parfaitement connu. Il vient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} Y = H \cdot U \\ U = U_{ff} + U_C = H_{ff} \cdot R + C \cdot (H_R \cdot R - Y) \end{cases} \quad (H5.2)$$

D'où :

$$\frac{Y}{R} = \frac{H \cdot (H_{ff} + C \cdot H_R)}{1 + HC} \quad (H5.3)$$

En prenant :

$$H_{ff} = H_R \cdot \frac{1}{H} \quad (H5.4)$$

Avec H_{ff} causale, stable et propre ou strictement propre, c'est-à-dire $\text{degré}(H_R) \geq \text{degré}(H)$.

En utilisant (H5.4) dans (H5.3), il vient :

$$\frac{Y}{R} = H_R \quad (H5.5)$$

Choix du modèle de référence H_R :

Il est absolument nécessaire que la fonction de transfert $H_{ff} = H_R \cdot \frac{1}{H}$ soit causale et stable :

- le degré relatif de H_R doit être au moins égal à celui de H ;
- les zéros instables de H doivent apparaître dans H_R ;
- en pratique, les zéros stables faiblement amortis de H doivent apparaître dans H_R .

En résumé :

- le correcteur C assure la stabilité du système bouclé (marges de robustesse, sensibilité au bruit, rejet optimal des perturbations...) ;
- les filtres H_R permet de fixer les performances du système bouclé vis-à-vis de la consigne ;
- le gain statique du filtre H_R doit valoir 1 afin d'assurer une erreur statique nulle entre R et Y .

Exemple :

Un système à commander a pour fonction de transfert : $H(p) = \frac{2}{3p+1}$ de temps de réponse à 95% de la valeur finale égal à $3 \times 3 \text{ s} = 9 \text{ s}$.

Un correcteur $C(p)$ a été déterminé afin de rejeter les perturbations constantes et ne pas amplifier par un gain supérieur à 10 les bruits en HF : $C(p) = \frac{2p+10}{0.2p}$.

On souhaite déterminer des filtres $H_R(p)$ et $H_{ff}(p)$ qui permettront d'obtenir un temps de réponse en boucle fermée de l'ordre de 0.3s entre la consigne R et la sortie Y .

Afin d'assurer la continuité de la commande U , on prendra une fonction de transfert H_{ff} strictement propre, donc $\text{degré}(H_{ff}) = \text{degré}(H)+1 = 2$. $H(p)$ est une fonction de transfert stable du 1^{er} ordre et ne possède pas de zéro. Nous pouvons donc prendre :

$$H_R = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^2}, \quad H_{ff} = H_R \cdot \frac{1}{H} = \frac{3p+1}{2\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^2}$$

Un temps de réponse à 95% de l'ordre de 0.3s entre la consigne R et la sortie Y est obtenu en choisissant convenablement la pulsation ω_0 . La fonction de transfert H_R a été choisie comme la mise en série de deux fonctions de transfert du premier ordre. Pour un système du 2nd ordre obtenu par la mise en série de 2 systèmes passe-bas du 1^{er} ordre, un temps de réponse à 95% de 0.3s est obtenu avec :

$$\omega_0 = \frac{4.8}{t_{rep \text{ à } 95\%}} = \frac{4.8}{0.3} = 16 \text{ rad/s}$$

La figure H.7 donne les résultats obtenus sans filtre de la consigne, avec un filtre unique $F(p) = \frac{1}{0.3p+1}$ de la consigne et avec les filtres H_r et H_{ff} imposant le modèle de référence désiré.

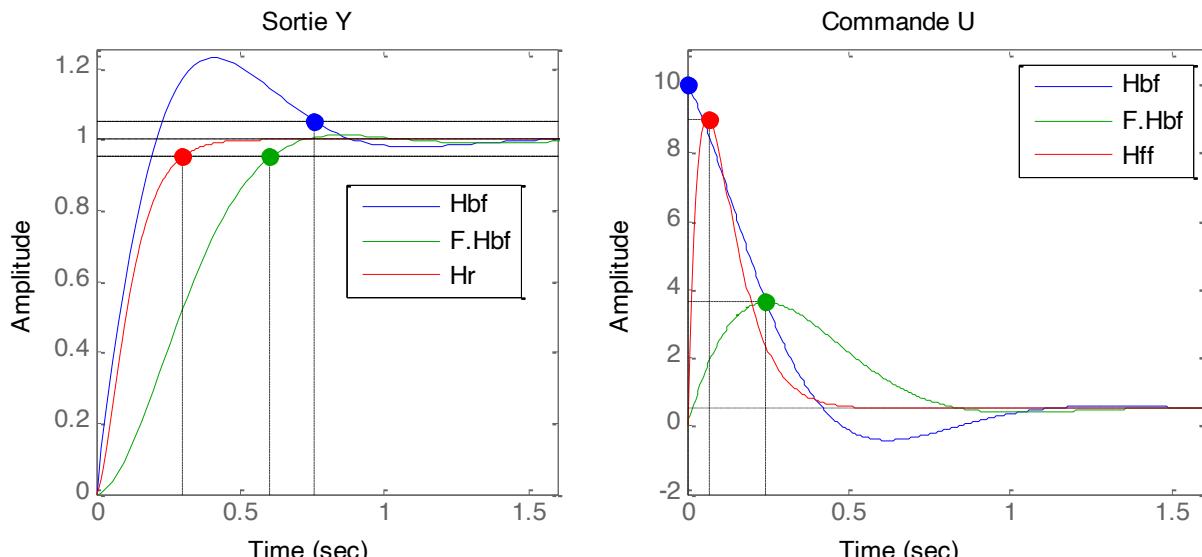


Figure H.7 – Réponses d'un système asservi sans filtre de la consigne, avec un filtre F passe-bas du 1^{er} ordre et avec un modèle de référence.

I. Le correcteur de type PID et ses variantes

Les correcteurs de type PID et ses variantes sont les correcteurs les plus utilisés en pratique, ils représenteraient plus de 90% des correcteurs utilisés. Plus précisément, ce n'est pas le correcteur PID qui est le plus utilisé mais plutôt le correcteur PI (PID sans action Dérivée) en raison de la grande difficulté à régler un correcteur utilisant une action dérivée sans méthode adaptée.

Pour l'asservissement de la sortie $y(t)$ à la consigne $r(t)$ tout en rejetant la perturbation de commande $p_u(t)$, la perturbation de sortie $p_y(t)$ qui matérialise les incertitudes sur le processus, et le bruit de mesure $p_b(t)$ supposé de valeur moyenne nulle, la structure de commande à temps continu de la figure I.1 est considérée dans la suite.

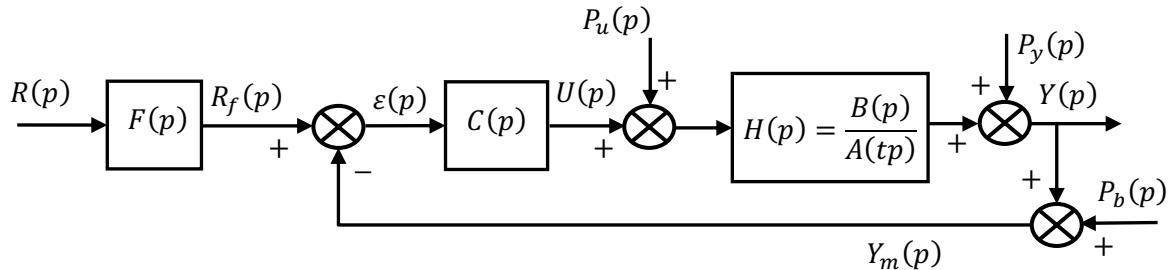


Figure I.1 – Structure de commande à temps continu pour la commande d'un système $H(p)$.

Pour une commande à temps discret, la même structure de commande de la figure I.2 est utilisée.

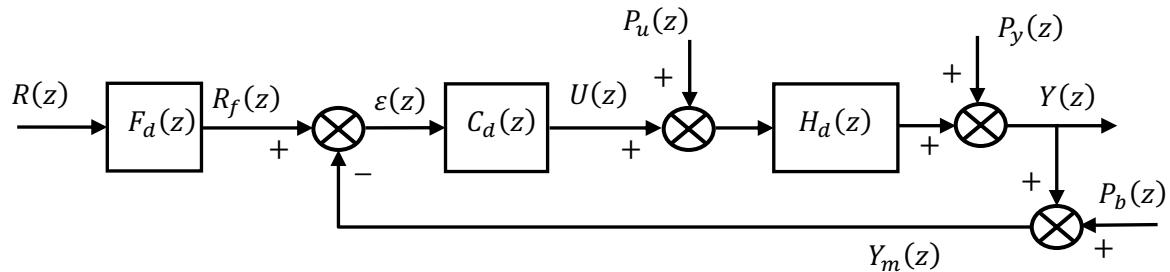


Figure I.2 – Structure de commande à temps discret pour la commande d'un système $H(z)$.

Les structures des figures I.1 et I.2 sont identiques avec simplement des fonctions de transfert différentes. Les relations qui lient les grandeurs entre-elles sont de la même forme. Il s'en suit que les méthodes et les principes développés sont très proches à temps continu et à temps discret. Dans la suite, l'approche à temps continu sera privilégiée et des précisions seront données dans le cas où l'approche à temps discret induit une modification spécifique.

L'objectif de l'asservissement est de faire en sorte que la sortie $y(t)$ suive la consigne $r(t)$. La consigne peut être filtrée par un Filtre F . L'écart de consigne ε est obtenu par la comparaison entre la consigne filtrée $r_f(t)$ et la mesure $y_m(t)$. Si on désire l'équivalence suivante en régime statique ($p = 0$ en temps continu, $z = 1$ en temps discret) :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow r(t) - y(t) \rightarrow 0$$

Il sera nécessaire d'avoir :

- un gain statique unitaire du filtre de la consigne : $F(p = 0) = 1, F_d(z = 1) = 1$;
- une valeur moyenne nulle du bruit de mesure : $\langle p_b(t) \rangle = 0$.

L'écart de consigne ε et la sortie du système Y sont donnés par les relations suivantes en fonction des entrées exogènes :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{1 + CH} [R_f - HP_u - P_y - P_b] = \frac{1}{1 + CH} [F \cdot R - HP_u - P_y - P_b] \\ Y &= \frac{CH}{1 + CH} [R_f + \frac{1}{C} P_u + \frac{1}{CH} P_y - P_b] = \frac{CH}{1 + CH} [F \cdot R + \frac{1}{C} P_u + \frac{1}{CH} P_y - P_b] \end{aligned}$$

1. Problème de la forme standard du correcteur PID sans filtrage de l'action dérivée

A temps continu, la forme standard parallèle du correcteur PID est donnée par :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

où :

- K est le gain proportionnel de boucle ;
- T_i (en secondes) est la constante d'intégration ;
- T_d (en secondes) est la constante de dérivation ;

C'est la forme standard classique donnée dans de nombreux ouvrages.

Cette forme standard pose un problème majeur car c'est une fonction de transfert impropre (i.e. degré du numérateur supérieur au degré du dénominateur). Le gain du correcteur tend vers l'infini en hautes fréquences :

$$|C(j\omega)| \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} K T_d \omega \rightarrow \infty$$

Ceci n'est pas conforme à la contrainte de limitation du gain du correcteur en hautes fréquences à une valeur finie spécifiée N_{max} . Cette forme standard du correcteur PID ne peut pas être utilisée en pratique telle quelle. Lors de la mise en œuvre pratique, le terme dérivé devra être filtré pour limiter le gain en hautes fréquences du correcteur à la valeur spécifiée. Cette action de filtrage peut annuler tout le bénéfice de l'action dérivée d'où, dans de nombreux cas, la non utilisation de l'action dérivée.

A temps discret, la forme standard parallèle du correcteur PID est donnée par :

$$C_d(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K \left(1 + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} + K_d (1 - z^{-1}) \right)$$

où :

- K est le gain proportionnel de boucle ;
- $K_i = \frac{T_e}{T_i}$ est le gain intégral ;
- $K_d = \frac{T_d}{T_e}$ est le gain dérivé.

En hautes fréquences, $\omega = \omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$, $Z_{\omega_{max}} = -1$, le gain du correcteur est :

$$|C_d(z)|_{\omega=\omega_{max}=\frac{\pi}{T_e}} = |C_d(z = -1)| = K \left(1 + \frac{K_i}{2} + 2K_d \right)$$

Il faudra veiller à ce que cette valeur de gain en hautes fréquences soit bien inférieure à N_{max} , la contrainte de gain maximum en hautes fréquences du correcteur.

A titre d'exemple, la figure I.3 donne les diagrammes de Bode d'un correcteur PID standard à temps continu et à temps discret.

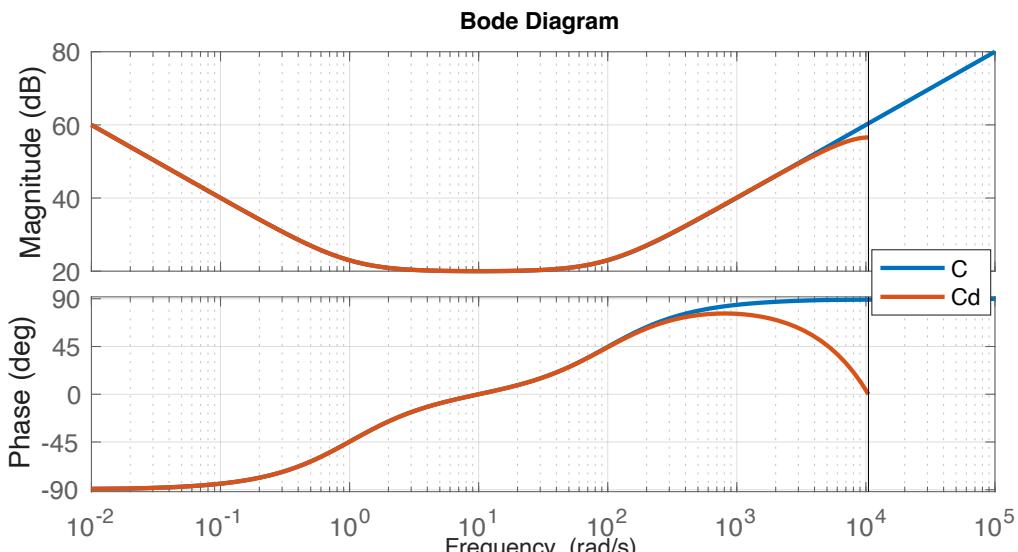


Figure I.3 – Diagramme de Bode d'un correcteur PID standard à temps continu avec $K=10$, $T_i=1s$, $T_d=0,01s$. Diagramme de Bode d'un correcteur PID standard à temps discret avec $T_e = 0,3$ ms, $K=10$, $K_i=T_e/T_i$, $K_d=T_d/T_e$.

2. Les Correcteur PID Filtré à temps continu et à temps discret

La forme utilisée en pratique du correcteur de type PID comportant une action dérivée est le correcteur PID Filtré.

A temps continu, la forme parallèle du correcteur PID Filtré est la suivante :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\frac{T_d}{\alpha} p + 1} \right) = K \frac{1 + \left(T_i + \frac{T_d}{\alpha} \right) p + T_i T_d \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) p^2}{T_i p \left(\frac{T_d}{\alpha} p + 1 \right)} \quad (I.1)$$

où :

- K est le gain proportionnel de boucle ;
- T_i (en secondes) est la constante d'intégration ;
- T_d (en secondes) est la constante de dérivation ;
- α est la constante de filtrage du déivateur.

Le gain statique du correcteur PID Filtré (I.1) est infini :

$$\lim_{p \rightarrow 0} C(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K \frac{1}{T_i p} \rightarrow \infty$$

Ce gain statique infini permet d'assurer une erreur statique nulle entre une consigne constante et la sortie du système asservi en présence de perturbations de commande P_u et de sortie P_y constantes.

Le gain en hautes fréquences du correcteur PID Filtré (I.1) est fini et donné par :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} C(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} K \frac{T_i T_d \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) p^2}{T_i p \left(\frac{T_d}{\alpha} p \right)} \rightarrow K(\alpha + 1)$$

Cette expression montre clairement que si le terme dérivé n'est pas filtré (i.e. $\alpha \rightarrow +\infty$), le gain en hautes fréquences du correcteur PID tend vers l'infini, ce qui n'est pas acceptable en pratique. L'une des contraintes que doit satisfaire le correcteur est que son gain en hautes fréquences doit être borné par N_{max} une constante finie (gain d'amplification maximum du bruit de mesure). Le correcteur PID Filtré devra donc satisfaire :

$$K(\alpha + 1) \leq N_{max}$$

A temps discret, la forme parallèle du correcteur PID Filtré est la suivante :

$$C_d(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K \left(1 + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} + \frac{K_d(1 - z^{-1})(1 - z_d)}{1 - z_d z^{-1}} \right) \quad (I.2)$$

où :

- K est le gain proportionnel de boucle ;
- $K_i = \frac{T_e}{T_i}$ est le gain intégral ;
- $K_d = \frac{T_d}{T_e}$ est le gain dérivé ;
- $z_d = e^{-\alpha \frac{T_e}{T_d}}$ est le pôle à temps discret du filtre du 1^{er} ordre de l'action dérivée.

En hautes fréquences, $\omega = \omega_{max} = \frac{\pi}{T_e}$, $z_{\omega_{max}} = -1$, le gain du correcteur est :

$$|C_d(z)|_{\omega=\omega_{max}=\frac{\pi}{T_e}} = |C_d(z = -1)| = K \left(1 + \frac{K_i}{2} + \frac{2K_d(1 - z_d)}{1 + z_d} \right)$$

A titre d'exemple, la figure I.4 donne les diagrammes de Bode d'un correcteur PID Filtré à temps continu et à temps discret. Le gain en hautes fréquences est limité à une valeur finie au prix d'une réduction de l'avance de phase (phase positive) apportée par le correcteur.

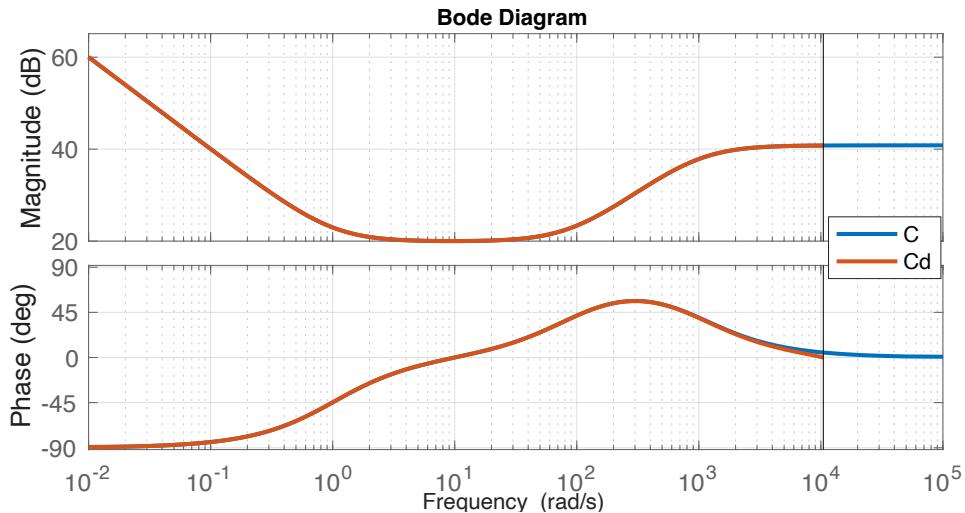


Figure I.4 – Diagramme de Bode d'un correcteur PID Filtré à temps continu $C(p)$ avec $K=10$, $T_i=1s$, $T_d=0,01s$, $\alpha = 10$. Diagramme d'un correcteur PID Filtrée à temps discret $C_d(z)$ avec $T_e = 0,3$ ms, $K=10$, $K_i=T_e/T_i$, $K_d=T_d/T_e$, $z_d = 0,741$.

3. Différentes actions du correcteur PID Filtré

Dans cette section sont analysées les différentes actions du correcteur PID Filtré donné par (I.1) en temps continu ((I.2) en temps discret) avec la structure de l'asservissement donnée par la figure I.1 en temps continu (figure I.2 en temps discret).

Afin de rendre concrète l'analyse des différentes actions du correcteur PID Filtré, nous nous appuierons sur la commande d'un système $H(p)$ du second ordre dont la réponse pour une entrée unitaire est donnée sur la figure I.5 et la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{0.5}{p^2 + 1.8p + 1} \quad (I.3)$$

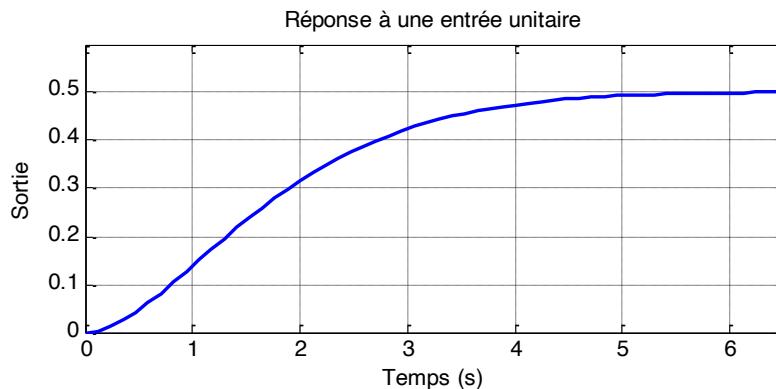


Figure I.5 – Réponse d'un système du second ordre pour une entrée unitaire à conditions initiales nulles ayant un temps de réponse à 95% de la valeur finale de 4s.

Spécifications de l'asservissement :

Pour les contraintes sur le système asservi, nous prendrons :

- Stabilité au sens EB-SB du système asservi.
- Marges de Module et de Phase désirées : $M_M \geq 0.5$ et $\varphi_M \geq 45^\circ$
Marge de retard désirée : $D_M \geq 0.03 \times (t_{rep})_{95\%}(H) = 0.03 \times 4s = 0.12s$.
- Gain du correcteur en hautes fréquences inférieur ou égal à $N_{max} = 20$.
- Dépassement de la sortie inférieur à 10%.

Pour les objectifs de commande dans l'ordre de priorité décroissante :

1. Satisfaire les contraintes énoncées ci-dessus.
2. Minimiser l'impact sur le système d'une perturbation de commande P_u constante.
3. Minimiser le temps de réponse de la sortie vis-à-vis d'un échelon de référence.

3.1 L'action proportionnelle P

L'action proportionnelle est l'action de base de tout correcteur. La commande délivrée par cette action est proportionnelle à l'écart de consigne :

$$U = K \times (R_f - Y_m)$$

Pour des entrées R_f , P_u et P_y constantes et une valeur moyenne du bruit de mesure P_b nulle, il vient, selon le théorème de la valeur finale, pour la valeur de l'écart de consigne et de la sortie du système en régime statique les expressions suivantes :

$$\varepsilon_\infty = \frac{1}{1 + KH(p=0)} [R_{f0} - P_{y0}] - \frac{H(p=0)}{1 + KH(p=0)} P_{u0}$$

$$Y_\infty = \frac{1}{\frac{1}{KH(p=0)} + 1} \left[R_{f0} + \frac{1}{K} P_{u0} + \frac{1}{KH(p=0)} P_{y0} \right]$$

Lorsque le gain statique du système est fini : $H(p=0) = G < \infty$, il vient :

$$\varepsilon_\infty = \frac{1}{1 + KG} [R_{f0} - P_{y0}] - \frac{G}{1 + KG} P_{u0}$$

$$Y_\infty = \frac{1}{\frac{1}{KG} + 1} \left[R_{f0} + \frac{1}{K} P_{u0} + \frac{1}{KG} P_{y0} \right]$$

L'écart de consigne ε ne s'annule pas mais est d'autant plus petit que le gain K est grand.

Lorsque le système $H(p)$ possède un pôle en zéro (système intégrateur), le gain statique du système est infini : $H(0) \rightarrow \infty$, il vient :

$$\varepsilon_\infty = -\frac{1}{K} P_{u0}$$

$$Y_\infty = R_{f0} + \frac{1}{K} P_{u0}$$

L'intégrateur du système $H(p)$ permet de rejeter la perturbation de sortie P_y alors que l'effet de la perturbation de commande P_u reste présent mais est atténué de la valeur du gain K . De manière générale, un intégrateur permet d'éliminer les perturbations constantes présentes en son aval (situées après lui dans la boucle).

Intérêt du correcteur P : action immédiate sur la commande et proportionnelle à l'écart de consigne (plus l'écart est important plus la commande est importante).

Inconvénient du correcteur P : n'élimine pas les perturbations constantes de commande. Ceci provient, en partie, du fait qu'avec un correcteur proportionnel l'action de commande est nulle pour un écart de consigne nul.

Détermination de la valeur maximum du gain K :

En pratique la valeur maximum K_{\max} de K est bornée par $\min(K_{\text{stabilité}}, N_{\max})$ où N_{\max} est la valeur de l'amplification maximum autorisée du bruit de mesure sur la commande et $K_{\text{stabilité}}$ est la valeur maximale du gain assurant les marges de stabilité désirées.

Dans le cas présent du système $H(p)$ donné par (I.3) et des contraintes données :

- le critère de Routh donne : $-2 < K_{\text{stabilité_routh}} < +\infty$;
- Marge de phase $\geq 45^\circ$ @ $\omega_c = 2.25 \text{ rad/s}$ pour $K_{\text{stabilité_phase}} \leq 11.45$;
d'où une Marge de retard $\geq 0.35 \text{ s} > D_M$ désirée = 0,12 s.
- Marge de module ≥ 0.5 pour $K_{\text{stabilité_module}} \leq 19.8$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } K_{\text{stabilité}} &= \min(\max(K_{\text{stabilité_routh}}), \max(K_{\text{stabilité_phase}}), \max(K_{\text{stabilité_module}})) \\ &= \min(+\infty, 11.45, 19.8) = 11.45 \end{aligned}$$

Il vient donc pour $K_{\max} = \min(K_{\text{stabilité}}, N_{\max}) = \min(11.45, 20) = 11.45$.

Réponse en boucle fermée vis-à-vis de l'entrée de consigne R avec $F(p)=1$

Les réponses en boucle fermée du système à une entrée de consigne unitaire lorsque le système de commande de la figure I.1 est utilisé avec $F(p)=1$ et $C(p)=K$ pour deux valeurs du gain proportionnel $K = \{ 4 ; 20 \}$ sont données sur la figure I.6. Attention, la valeur 20 pour le gain K est donnée à titre d'exemple mais dans le cas présent la contrainte de marge de phase désirée impose $K \leq 11.45$.

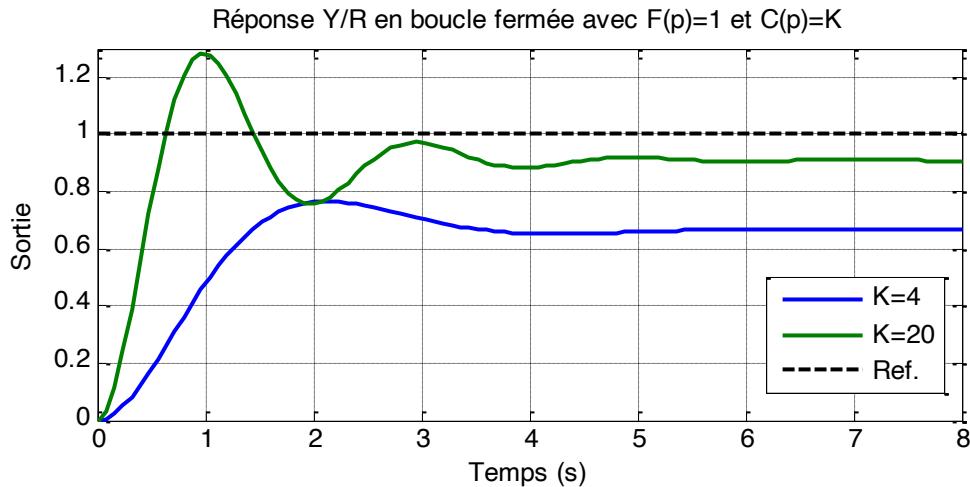


Figure I.6 – Réponse de la sortie du système $H(p)$ bouclé pour la commande de la figure I.1 avec $F(p)=1$ et $C(p)=K$ pour une entrée de consigne unitaire à perturbations et conditions initiales nulles.

Les conclusions que l'on peut tirer des réponses obtenues sur la figure I.6 sont très souvent valables concernant l'impact du gain proportionnel sur les réponses :

Augmentation du gain K	→	Diminution de l'erreur statique
		Diminution du temps de montée
		Mais Augmentation des oscillations

En l'absence de perturbations, la valeur finale de la sortie est donnée par :

$$Y_{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{KH(0)} + 1} R_{f0} = \frac{1}{\frac{1}{K \times 0.5} + 1} R_{f0} = \begin{cases} K = 4 : Y_{\infty} = \frac{2}{3} R_{f0} \\ K = 20 : Y_{\infty} = \frac{10}{11} R_{f0} \end{cases}$$

Réponse en boucle fermée vis-à-vis de l'entrée de consigne R avec filtre $F(p)$ adapté

Le plus souvent, il est demandé que la réponse de la sortie du système vis-à-vis de l'entrée de consigne ne dépasse pas la consigne, ou la valeur finale de la sortie quand celle-ci est différente de la consigne, d'une valeur donnée en pourcentage de la valeur finale.

Lorsqu'avec le correcteur $C(p)$ choisi il apparaît un dépassement supérieur au dépassement autorisé, le filtre $F(p)$ est alors déterminé pour obtenir la réponse désirée vis-à-vis de l'entrée de consigne. Typiquement, $F(p)$ sera un filtre du premier ordre de la forme :

$$F(p) = \frac{1}{\tau p + 1} \quad (I.4)$$

Dans le cas présent, le cahier des charges stipule que le dépassement maximum autorisé de la sortie est de 10% pour une entrée de consigne en échelon à valeurs initiales nulles. Par exemple, pour la valeur $K = 20$ du gain le dépassement par rapport à la valeur finale de la sortie est de l'ordre de 40% (voir figure I.6). Ce qui n'est pas conforme au cahier des charges. La constante de temps du filtre $F(p)$ donné par (I.4) peut être ajustée pour réduire le dépassement à une valeur désirée.

La figure I.7 compare la réponse de la sortie et de la commande vis-à-vis d'une entrée de consigne de type échelon unitaire, à conditions initiales et perturbations nulles, pour $K = 20$ dans les cas sans filtre $F(p)$, i.e. $F(p) = 1$, et avec filtre $F(p) = \frac{1}{0.6p+1}$.

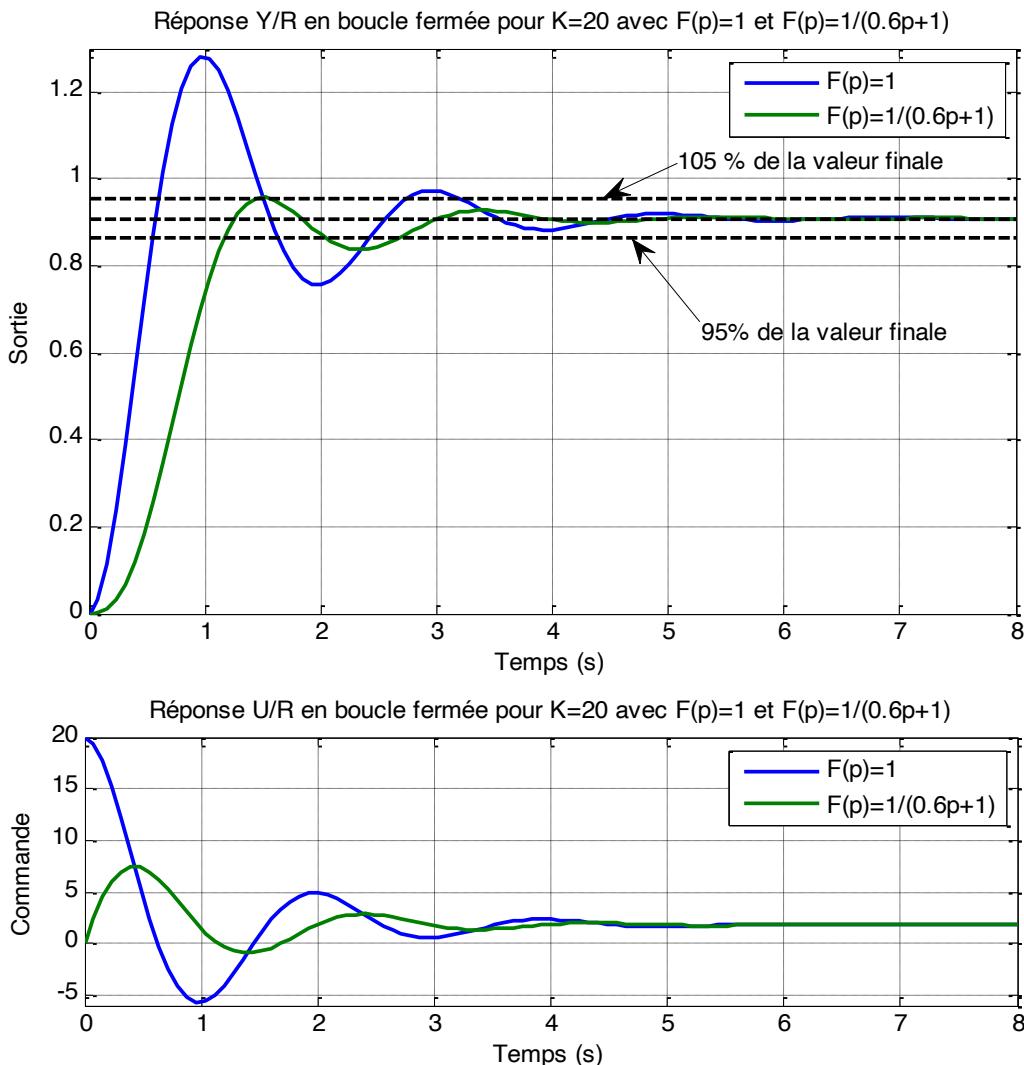


Figure I.7 – Réponse à une entrée de consigne unitaire de la sortie du système $H(p)$ bouclé et de la commande U pour le système de commande de la figure I.1 pour $C(p) = K = 20$ avec $F(p) = 1$ et $F(p) = 1 / (0.6p + 1)$. Perturbations et conditions initiales nulles.

L'utilisation du filtre $F(p)$ permet de :

- diminuer à une valeur désirée le dépassement de la sortie du système, ici il a été choisi un dépassement de 5% de la valeur finale de la sortie ;
- réduire le temps de réponse à 95% de la valeur finale, on obtient un petit peu moins de 3 secondes alors que sans le filtre on obtient un petit peu plus de 3 secondes ;
- réduire considérablement l'amplitude maximale de la commande, ici par 3 ;
- éviter la discontinuité de la commande à $t = 0$.

Ces deux derniers points sont très importants. En effet, une sollicitation excessive de la commande ou la discontinuité de celle-ci entraînent le plus souvent un fonctionnement non désiré en pratique. Il est donc primordial lors de la synthèse d'un système de commande de s'assurer que la commande du système évolue de manière acceptable. C'est l'une des raisons qui impose le gain maximum N_{\max} au correcteur en hautes fréquences.

Réponse en boucle fermée vis-à-vis de l'entrée de perturbation de commande P_u

La réponse de la sortie du système pour une entrée de perturbation de commande P_u unitaire est donnée sur la figure I.8 pour les deux valeurs du gain proportionnel $K = \{ 4 ; 20 \}$.

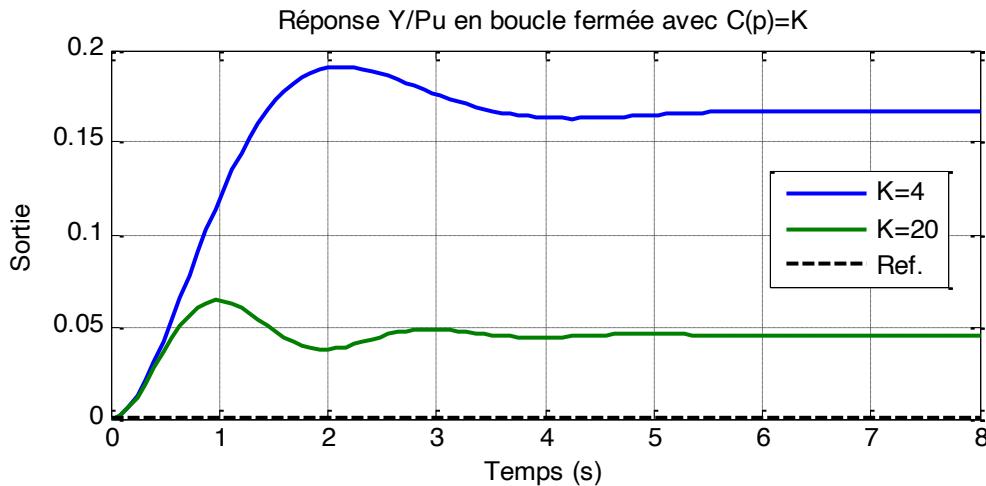


Figure I.8 – Réponse de la sortie du système $H(p)$ bouclé pour la commande de la figure I.1 avec $C(p)=K$ pour une entrée de perturbation P_u unitaire avec une entrée de consigne et conditions initiales nulles.

La figure I.8 montre que la perturbation constante de commande P_u n'est pas rejetée par le correcteur proportionnel (la sortie ne retourne pas à la valeur nulle de consigne après l'apparition de la perturbation). La valeur finale de la sortie vis-à-vis de l'entrée de perturbation est donnée par :

$$Y_\infty = \frac{1}{\frac{1}{KH(0)} + 1} \frac{1}{K} P_{u0} = \frac{1}{\frac{1}{0.5} + K} P_{u0} = \begin{cases} K = 4 : Y_\infty = \frac{1}{6} R_{f0} \\ K = 20 : Y_\infty = \frac{1}{22} R_{f0} \end{cases}$$

Les conclusions que l'on peut retirer des réponses obtenues sur la figure I.8 sont très souvent valables concernant l'impact du gain proportionnel sur les réponses :

Augmentation du gain K → **Diminution de l'impact de P_u sur la sortie**

Impact du bruit de mesure sur la commande

Le bruit présent sur la commande du système issu du bruit de mesure P_b doit absolument être maîtrisé. Pour cela, la contrainte de synthèse du correcteur N_{max} est définie.

La figure I.10 donne, pour les deux valeurs du gain proportionnel $K = \{ 4 ; 20 \}$, la commande obtenue en régime permanent pour une consigne unitaire lorsque l'amplitude du bruit de mesure P_b est de l'ordre de 0.1, représenté sur la figure I.9.

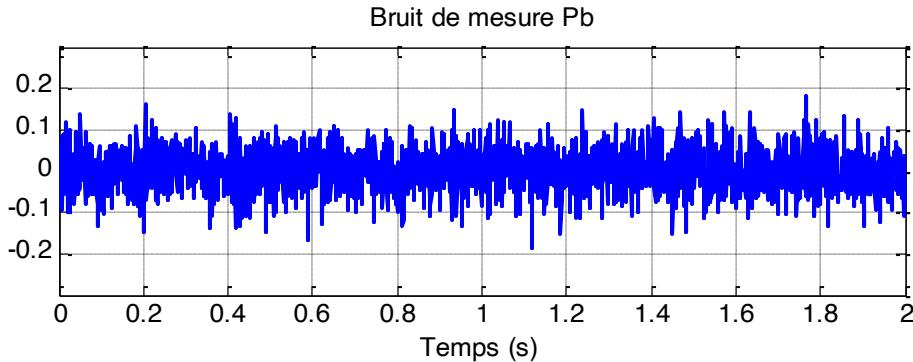


Figure I.9 – Bruit de mesure P_b utilisé pour évaluer l'impact du bruit sur la commande.

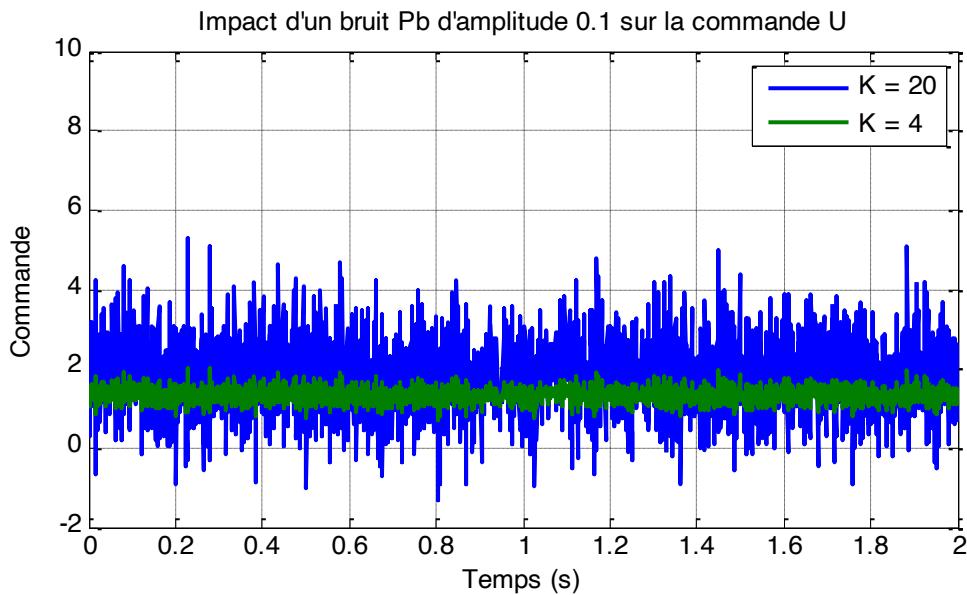


Figure I.10 – Commande en régime statique pour une consigne unitaire
en présence de bruit Pb, d'amplitude 0.1, sur la mesure pour K=4 et K=20.

Les résultats de la figure I.10 montrent clairement l'effet du bruit sur la commande pour de fortes valeurs du gain K. En effet, le transfert entre le bruit de mesure Pb et la commande est donné par :

$$\frac{U}{P_b} = \frac{-C}{1 + HC}$$

En hautes fréquences (fréquences du bruit), le gain du transfert peut être approché par :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{U(p)}{P_b(p)} \right| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{-K}{1 + \frac{0.5K}{p^2}} \right| = K$$

Le bruit présent sur la commande est donc directement proportionnel au bruit de mesure.

Sur la figure I.10, il apparaît que pour K = 20, l'amplitude crête-à-crête du bruit présent sur la commande est d'environ 4 ce qui correspond bien à la valeur 0.2 du bruit crête-à-crête Pb multipliée par la valeur 20 du gain.

3.2 Le correcteur PI

Le correcteur PI est sans aucun doute le correcteur le plus utilisé en pratique. Il est donc fondamental de parfaitement connaître ses propriétés. Ce correcteur est défini par la fonction de transfert suivante à temps continu :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \frac{T_i p + 1}{T_i p} = K \frac{p + p_0}{p} \quad (I.4)$$

où :

- K est le gain proportionnel ;
- $T_i = 1/p_0$ (en secondes) est la constante d'intégration.

Suivant la méthode de synthèse choisie pour la détermination des paramètres du correcteur PI, on utilisera la représentation avec la constante de temps d'intégration T_i ou la représentation équivalente avec le zéro p_0 .

A temps discret, le correcteur (I.4) sera donné par :

$$C_d(z) = K \left(1 + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} \right) = K \frac{(1 + K_i) - z^{-1}}{1 - z^{-1}} = K_1 \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Nous noterons par la suite le correcteur (I.4) :

$$C(p) = \frac{R(p)}{S(p)} \quad (I.5)$$

Selon le schéma de commande de la figure I.1, il vient les expressions suivantes de l'écart de consigne et de la sortie du système :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \frac{1}{1 + C(p)H(p)} [R_f(p) - H(p)P_u(p) - P_y(p) - P_b(p)] \\ &= \frac{A(p)S(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)} \left[R_f(p) - \frac{B(p)}{A(p)} P_u(p) - P_y(p) - P_b(p) \right] \\ Y(p) &= \frac{1}{1 + C(p)H(p)} \left[C(p)H(p) \left(R_f(p) - P_b(p) \right) + H(p)P_u(p) + P_y(p) \right] \\ &= \frac{A(p)S(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)} \left[\frac{B(p)R(p)}{A(p)S(p)} \left(R_f(p) - P_b(p) \right) + \frac{B(p)}{A(p)} P_u(p) + P_y(p) \right] \end{aligned}$$

En régime statique (i.e. $p = 0$), l'intégrateur du correcteur PI impose :

$$S(p = 0) = 0$$

Il vient donc en régime statique pour des entrées R_f , P_u , P_y et P_b constantes, selon le théorème de la valeur finale et à condition que le système bouclé soit stable au sens entrée bornée – sortie bornée, les expressions suivantes pour la valeur de l'écart de consigne et de la sortie du système :

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = 0$$

$$Y_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = R_{f0} - P_{b0}$$

Rôle de l'intégrateur du correcteur PI : Si le système bouclé est stable au sens EB-SB, l'intégrateur du correcteur PI permet d'imposer un écart de consigne nul en régime statique pour une entrée de consigne et des entrées de perturbation constantes.

Attention au fait que l'intégrateur impose $\varepsilon_\infty = 0$ en régime statique mais n'impose pas nécessairement que la valeur statique de la sortie Y_∞ soit égale à la référence R_f . En effet, si la valeur moyenne P_{b0} du bruit de mesure n'est pas nulle, il vient $Y_\infty = R_{f0} - P_{b0}$. Il est donc fondamental que la chaîne d'acquisition de la grandeur $y(t)$ à asservir n'introduise pas un biais constant (offset) dans cette mesure.

La figure I.11 donne le diagramme de Bode d'un correcteur PI pour $K = 10$ et $T_i = 2s$. Que ce soit pour le gain ou la phase, on constate que le diagramme de Bode asymptotique, en rouge pointillé,

est très proche du diagramme de Bode réel, en trait plein bleu. Cette constatation nous permet, pour certaines méthodes de synthèse du correcteur PI, d'utiliser le diagramme de Bode asymptotique, plus simple à tracer, plutôt que le diagramme de Bode réel sans commettre une erreur trop importante. Les points caractéristiques du diagramme de Bode d'un correcteur PI sont explicités sur le diagramme de la figure I.11.

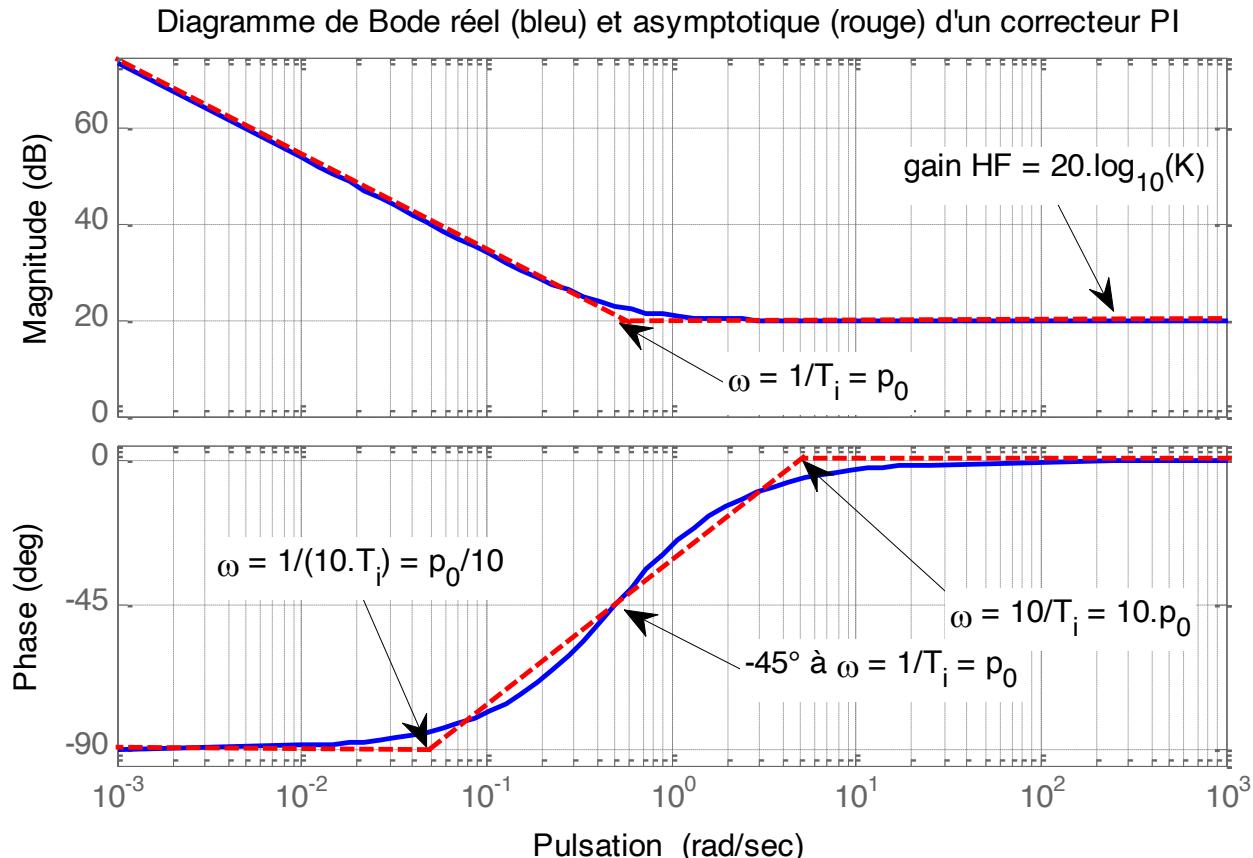


Figure I.11 – Diagramme de Bode d'un correcteur PI donné par $C(p) = 10 \frac{2p+1}{2p} = 10 \frac{p+0.5}{p}$.

Effets des gains du correcteur PI :

Modification	Effet sur la sortie du système	Effet des perturbations
Augmentation de K	Diminution du temps de réponse puis Apparition d'oscillations et augmentation du temps de réponse au-delà d'une certaine valeur de K	Diminution de l'influence des perturbations sur la sortie en amplitude et en durée puis Apparition de fortes oscillations au-delà d'une certaine valeur de K
Diminution de T_i	Diminution du temps de réponse puis Apparition d'oscillations et augmentation du temps de réponse en-deçà d'une certaine valeur de T_i	Diminution de l'influence des perturbations sur la sortie en durée puis Apparition de fortes oscillations en-deçà d'une certaine valeur de T_i

Différentes méthodes de réglage (choix des gains K et T_i) du correcteur PI existent. Néanmoins, lorsque le choix est possible entre plusieurs valeurs du couple (K, T_i) respectant les contraintes de synthèse (stabilité, marges de robustesse et bruit maximum autorisé sur la commande), on choisira le plus souvent, en priorité, celui qui permet d'avoir la plus grande valeur possible du gain K . En effet, c'est le gain K qui permet de réduire le plus efficacement l'impact de la perturbation de commande P_u sur la sortie du système.

Le principal avantage du correcteur PI est le rejet des perturbations constantes. Son principal inconvénient est sa phase de -90° en basses fréquences qui a pour effet de réduire la marge de phase du système bouclé et donc de diminuer la robustesse en stabilité du système asservi.

A titre d'exemple, un correcteur PI est appliqué à la commande du système du second ordre (I.3). La valeur du gain proportionnel $K = 4$ est reprise et les réponses du système asservi sont comparées pour plusieurs valeurs de la constante de temps d'intégration $T_i = \{ 1s, 1.4s, 3s \}$.

Pour les trois couples de valeurs du correcteur PI, le système bouclé est stable entre toutes ses entrées et sorties au sens EB-SB. Le tableau suivant donne les valeurs obtenues pour les contraintes de synthèse.

Contraintes	$K = 4$ et $T_i = 1s$	$K = 4$ et $T_i = 1.4s$	$K = 4$ et $T_i = 3s$
$M_{Module} \geq 0.5$	0.52	0.62	0.73
$M_{phase} \geq 45^\circ$	35°	46°	65°
$N_{max} = 20$	$K = 4 < 20$	$K = 4 < 20$	$K = 4 < 20$
Dépassement $\leq 10\%$	Non (30%)	Non (20%)	Oui (0%)

Le seul correcteur qui respecte toutes les contraintes est le correcteur avec $K = 4$ et $T_i = 3s$. Néanmoins, le correcteur avec $K = 4$ et $T_i = 1.4s$ ne satisfait pas la seule contrainte de dépassement de la réponse du système qui peut facilement être respectée en utilisant un filtre $F(p)$ de la consigne.

La figure I.12 donne, pour les trois couples de valeurs de K et T_i , les réponses de la sortie $y(t)$ du système pour une entrée en échelon unitaire sans filtre $F(p)$ et les commandes $u(t)$ associées.

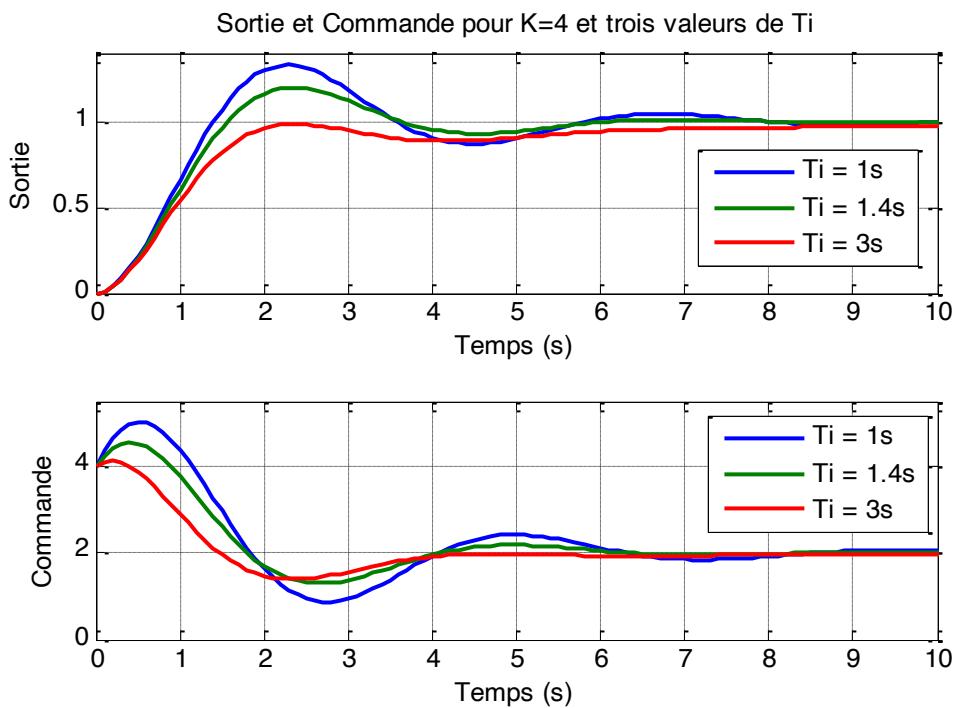


Figure I.12 – Réponses de la sortie $y(t)$ du système et les commandes $u(t)$ associées pour une consigne en échelon unitaire sans filtre $F(p)$ et sans bruit de mesure.

La figure I.13 donne, pour les trois couples de valeurs de K et T_i , les réponses de la sortie $y(t)$ du système vis-à-vis d'une entrée de perturbation de commande $P_u(t)$ en échelon unitaire et les commandes $u(t)$ associées. En régime statique (valeurs constantes), à entrée de consigne nulle, la commande $u(t)$ tend vers la valeur opposée de la perturbation de commande constante (ici de valeur unitaire).

Les paramètres du correcteur doivent être choisis de manière à satisfaire les contraintes de synthèse et à optimiser la réponse de la sortie vis-à-vis de la perturbation de commande P_u . Ainsi, les résultats de la figure I.13 montrent clairement que le couple de valeurs K et T_i le plus approprié au rejet de la perturbation de commande P_u est $K = 4$ et $T_i = 1.4s$. En effet, avec $T_i = 3s$, le rejet de la perturbation de commande est extrêmement lent (phénomène de traînage), et avec $T_i = 1s$, le dépassement de la sortie lors de son retour à zéro est beaucoup trop important.

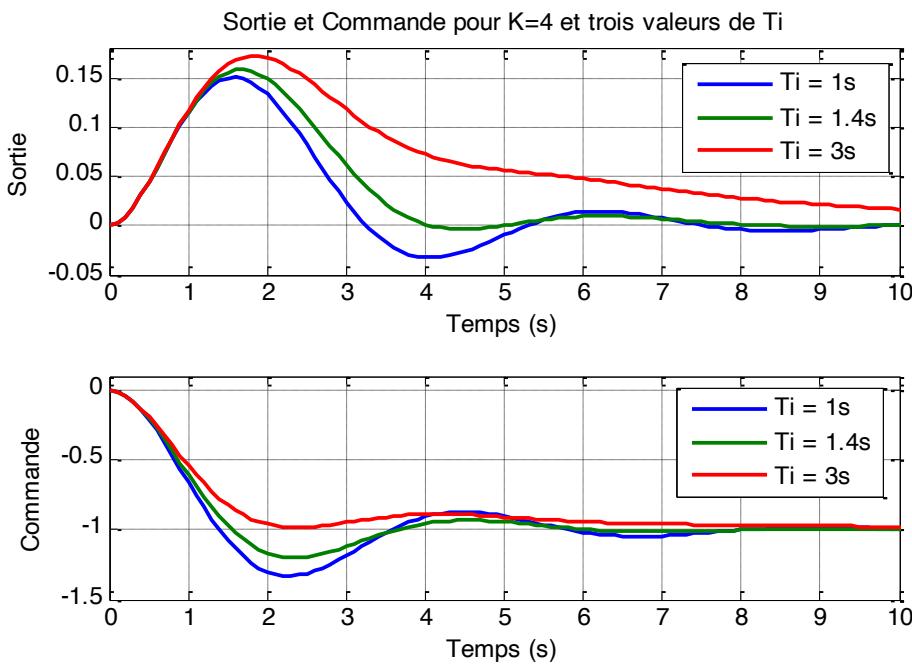


Figure I.13 – Réponses de la sortie $y(t)$ du système vis-à-vis d'une entrée de perturbation de commande $P_u(t)$ en échelon unitaire et les commandes $u(t)$ associées sans bruit de mesure.

Une fois les paramètres du correcteur déterminés, le filtre $F(p)$ est déterminé de manière à supprimer un éventuel dépassement trop important de la consigne par la sortie lors d'un échelon de référence. Avec $K = 4$ et $T_i = 1.4\text{s}$, le dépassement de la consigne par la sortie est de l'ordre de 20% sans filtre $F(p)$, voir la figure I.12. Afin de supprimer ce dépassement, la consigne en échelon est filtrée par un filtre $F(p)$ du premier ordre de constante de temps $\tau = 1\text{s}$ donné par :

$$F(p) = \frac{1}{p + 1}$$

La valeur de la constante de temps $\tau = 1\text{s}$ a été choisie en mesurant l'instant du 1^{er} maximum de la sortie pour un échelon de consigne sans préfiltre F et en divisant la valeur obtenue par 2,4. La valeur finale de la constante de temps τ est ensuite ajustée en pratique pour obtenir le comportement désiré.

La réponse de la sortie du système vis-à-vis d'une entrée de consigne en échelon unitaire avec $K = 4$, $T_i = 1.4\text{s}$ et $F(p) = \frac{1}{p+1}$ est donnée sur la figure I.14. Le filtre $F(p)$ permet d'une part, d'ajuster le dépassement de la sortie du système à la valeur désirée, et d'autre part, de supprimer la discontinuité de la commande $u(t)$ observée sur la figure I.12, ainsi que de diminuer l'amplitude nécessaire de la commande.

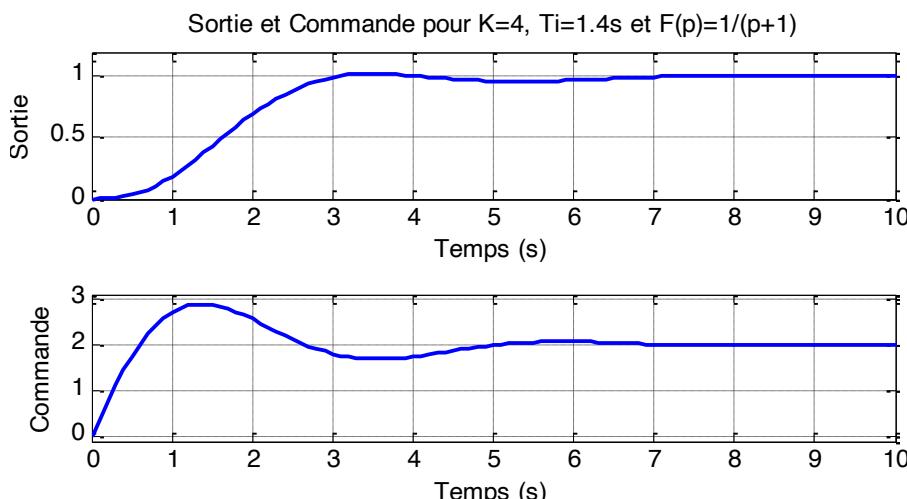


Figure I.14 – Réponses de la sortie $y(t)$ du système et la commandes $u(t)$ associée pour une consigne en échelon unitaire avec filtre $F(p)$ et sans bruit de mesure.

3.3 Le correcteur PD Filtré ou P-Avance de phase

Le correcteur Proportionnel-Dérivé Filtré, PD Filtré, est principalement utilisé lorsque le système asservi est proche de l'instabilité (marges de robustesse insuffisantes) avec un simple correcteur proportionnel. En effet, la principale caractéristique de ce correcteur est d'améliorer la marge de phase du système bouclé par l'introduction d'une avance de phase qui peut théoriquement aller jusqu'à +90°, plutôt de +30° à +60° en pratique.

Compte tenu du fait que le correcteur PD Filtré ne possède pas d'action intégrale, il ne permet de rejeter les perturbations de commande constantes. Il pourra donc être utilisé lorsque celles-ci n'ont pas une influence significative sur le comportement du système asservi.

La fonction de transfert, implantable en pratique, d'un correcteur PD Filtré est donnée par :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{T_d p}{\frac{T_d}{\alpha} p + 1} \right) \quad (\text{I.6})$$

où :

- K est le gain proportionnel ;
- T_d (en secondes) est la constante de dérivation ;
- α est la constante de filtrage du dérivateur.

En pratique, le réglage (choix des paramètres) du correcteur PD Filtré donnée par (I.6) n'est pas aisée. On préférera utiliser la forme « Avance de phase » donnée par :

$$C(p) = K \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad (\text{I.7})$$

où :

- K est le gain proportionnel ;
- T (en secondes) permet de définir la pulsation centrale : $\omega_0 = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$;
- a permet de fixer l'avance de phase φ à la pulsation centrale : $\sin(\varphi) = \frac{a-1}{a+1}$;
- le gain du correcteur à la pulsation centrale ω_0 est donné par : $G = K\sqrt{\alpha}$.

Les paramètres de la forme (I.6) sont liés à ceux de la forme (I.7) par :

$$T = \frac{T_d}{\alpha} \quad \text{et} \quad a = 1 + \alpha$$

Le gain en basses fréquences de ce correcteur est : $\lim_{p \rightarrow 0} C(p) = K$

Le gain en hautes fréquences de ce correcteur est : $\lim_{p \rightarrow +\infty} C(p) = a \cdot K$

A temps discret, le correcteur (I.7) sera donné par :

$$C_d(z) = K \cdot \frac{az + \left(1 - a - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

Principal intérêt de ce correcteur : Ajouter une avance de phase φ , déterminée par la valeur du paramètre a , à la pulsation centrale désirée ω_0 .

Inconvénient de ce correcteur : Gain fini en basses fréquences → n'élimine pas l'influence des perturbations constantes.

Utilisation de ce correcteur : Ce correcteur ne sera utilisé seul que si le rejet des perturbations de commande n'est pas une contrainte de synthèse.

Le plus souvent ce correcteur sera **associé en série** à un autre correcteur afin d'améliorer la marge de phase. La pulsation centrale ω_0 de ce correcteur sera alors prise égale à la pulsation de coupure ω_c obtenue avec le premier correcteur et le gain K de (I.7) sera pris égal à $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ de manière à ne pas changer la valeur de la pulsation de coupure ω_c . L'inconvénient est qu'un gain supplémentaire de valeur $\sqrt{\alpha}$ est ajouté en hautes fréquences.

La figure I.15 donne l'avance de phase introduite par ce correcteur en fonction du paramètre a.

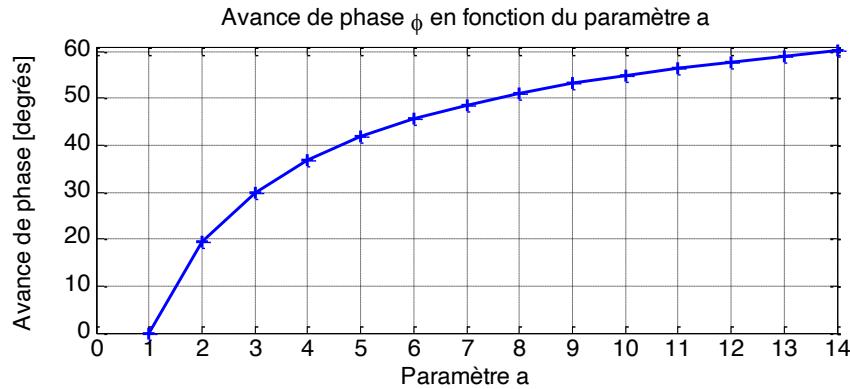


Figure I.15 – Avance de phase ϕ introduite par un correcteur P-Avance de phase à la pulsation centrale ω_0 en fonction du paramètre a.

La figure I.16 donne le diagramme de Bode du correcteur dans le cas suivant :

$$C(p) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

avec $a = 3$ et $\omega_0 = 2$ rad/s d'où : $T = \frac{1}{\omega_0\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29s$ et $C(p) = 0.577 \cdot \frac{1+0.87p}{1+0.29p}$.

Le terme $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$ de $C(p)$ permet d'obtenir un gain unitaire (0 dB) à la pulsation centrale ω_0 .

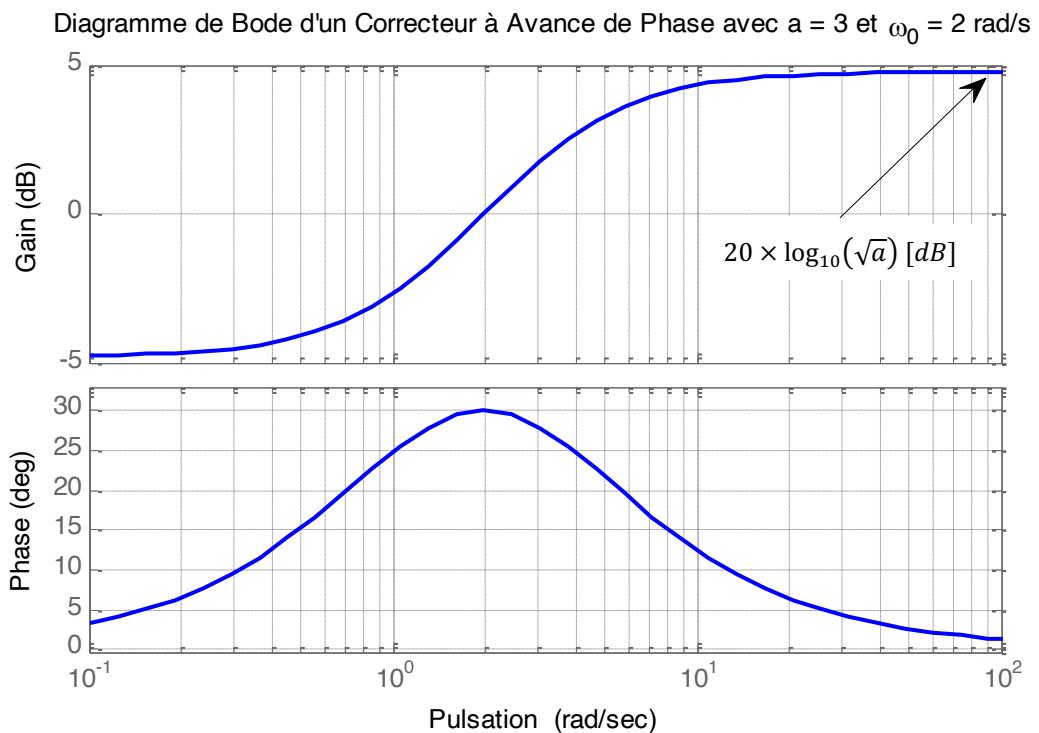


Figure I.16 – Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase avec $K = 0.577$, $a = 3$ et $\omega_0 = 2$ rad/s.

3.4 Approches pour la détermination des paramètres d'un correcteur de type PID Filtré

La structure parallèle générale d'un correcteur PID Filtré à temps continu est donnée par :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\alpha} \right) = K \frac{1 + \left(T_i + \frac{T_d}{\alpha} \right) p + T_i T_d \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) p^2}{T_i p \left(\frac{T_d}{\alpha} p + 1 \right)} \quad (I.8)$$

où : – K est le gain proportionnel ;

– T_i (en secondes) est la constante d'intégration ;

– T_d (en secondes) est la constante de dérivation ;

– α est la constante de filtrage du déivateur.

Les sections précédentes ont montré succinctement l'effet de chacune des actions :

- proportionnelle : l'action de base qui agit immédiatement sur la commande ;
- intégrale : permet de rejeter l'effet des perturbations constantes mais a un effet déstabilisant en raison du retard de phase de -90° introduit.
- dérivée ou avance de phase : permet d'améliorer les marges de robustesse, en particulier la marge de phase mais introduit un gain supplémentaire en hautes fréquences néfaste vis-à-vis du bruit de mesure.

En pratique, en fonction de l'application, les correcteurs de type PID les plus utilisés sont :

- Correcteur P : $C(p) = K$
- Correcteur PI : $C(p) = K \frac{1+T_i p}{T_i p}$
- Correcteur PI-Avance de phase : $C(p) = K \frac{1+T_i p}{T_i p} \cdot \frac{1+aTp}{1+Tp}$
- Correcteur PID Filtré : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\alpha} \right) = K \frac{1 + \left(T_i + \frac{T_d}{\alpha} \right) p + T_i T_d \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) p^2}{T_i p \left(\frac{T_d}{\alpha} p + 1 \right)}$

De manière générale, la détermination des gains d'un correcteur n'est pas une chose aisée. Néanmoins, compte tenu des nombreuses méthodes qui ont été développées pour la détermination des paramètres des correcteurs, la chose est relativement aisée si la structure du correcteur n'est pas imposée à priori. Par contre, si la structure est imposée et qu'il faut déterminer le correcteur optimal au sens d'un critère tout en respectant un nombre important de contraintes, la tâche peut vite devenir très difficile. Par exemple, si on désire asservir un système du troisième ordre et que le correcteur peut être librement choisi, alors le concepteur du correcteur aura tout intérêt à choisir un correcteur du même ordre que le système, c'est-à-dire 3, et utiliser l'une des nombreuses méthodes de synthèse existantes. Par contre, si pour la commande de ce même système d'ordre 3, il est imposé de n'utiliser qu'un correcteur PI ou PID Filtré, alors la difficulté est bien plus importante puisque l'ordre du correcteur sera inférieur à celui du système.

En pratique, deux situations peuvent être rencontrées :

Situation 1 : on ne dispose pas de modèle du système à commander ;

Situation 2 : on dispose d'un modèle plus ou moins précis du système à commander.

Dans le cas de la situation 2, des méthodes de synthèse de correcteurs basées sur la connaissance plus ou moins parfaite du modèle sont données dans la suite de ce cours. L'intérêt de cette approche est de pouvoir fixer un cahier des charges et ainsi avoir des garanties sur le fonctionnement pratique du système asservi.

Dans le cas de la situation 1, soit on met en œuvre une méthode d'estimation du modèle du système afin d'obtenir un modèle pour la synthèse du correcteur ; auquel cas on se retrouve dans la situation 2. Soit, on soumet le système à commander à des tests expérimentaux qui par l'analyse des résultats obtenus permettent de déterminer les paramètres d'un correcteur, le plus souvent de type PID, sans passer par l'identification du modèle du système. Cette approche peut être réalisée très rapidement. C'est là tout son intérêt. Par contre, on n'a aucune garantie sur le fonctionnement futur du système asservi dans des conditions différentes de celles du test car ne disposant pas de modèle, on ne peut pas évaluer les marges de robustesse, ni simuler le système dans des conditions différentes.

4. Synthèse de correcteurs de type PID Filtré par modelage de $H_{BO}(j\omega)$

Un modèle $H(p)$ du processus à commander est disponible et la structure générale de commande à deux degrés de liberté de la figure I.17 est utilisée pour l'asservissement de ce système.

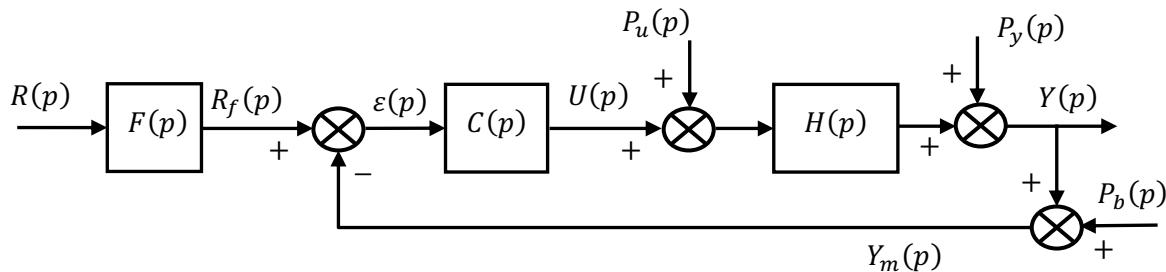


Figure I.17 – Structure de commande à contre-réaction négative pour la commande d'un système $H(p)$.

L'objectif de la synthèse de la commande (sous les contraintes fixées) est de déterminer les fonctions de transfert du préfiltre $F(p)$ et du correcteur de boucle $C(p)$.

La fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ est donnée par : $H_{BO}(p) = C(p)H(p)$.

4.1. Allure « idéale » de $H_{BO}(j\omega)$

La méthode de commande par modelage de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = C(p)H(p)$ du système bouclé consiste à imposer (modeler) une forme désirée à $H_{BO}(p = j\omega)$ grâce au correcteur. Cette forme désirée doit permettre d'obtenir la bande passante voulue et d'assurer des marges de robustesse suffisantes (marges de module, de phase et de retard).

Par rapport aux contraintes et objectifs de commande énoncés au **chapitre H. Structure de commande, contraintes et objectifs d'un système asservi** avec la structure de commande donné par la figure I.17, il est aisément de montrer qu'un « bon » choix du module de la fonction de transfert en boucle ouverte $|H_{BO}(\omega)| = |C(\omega)H(\omega)|$ est donné par la figure I.18. En outre, quelle que soit la méthode de synthèse du correcteur $C(p)$ qui sera choisie, on obtiendra l'allure générale de la fonction de transfert en boucle ouverte présentée sur la figure I.18 et les modules des fonctions de sensibilité $|S(\omega)|$ et de $|T(\omega)|$ qui y sont associées.

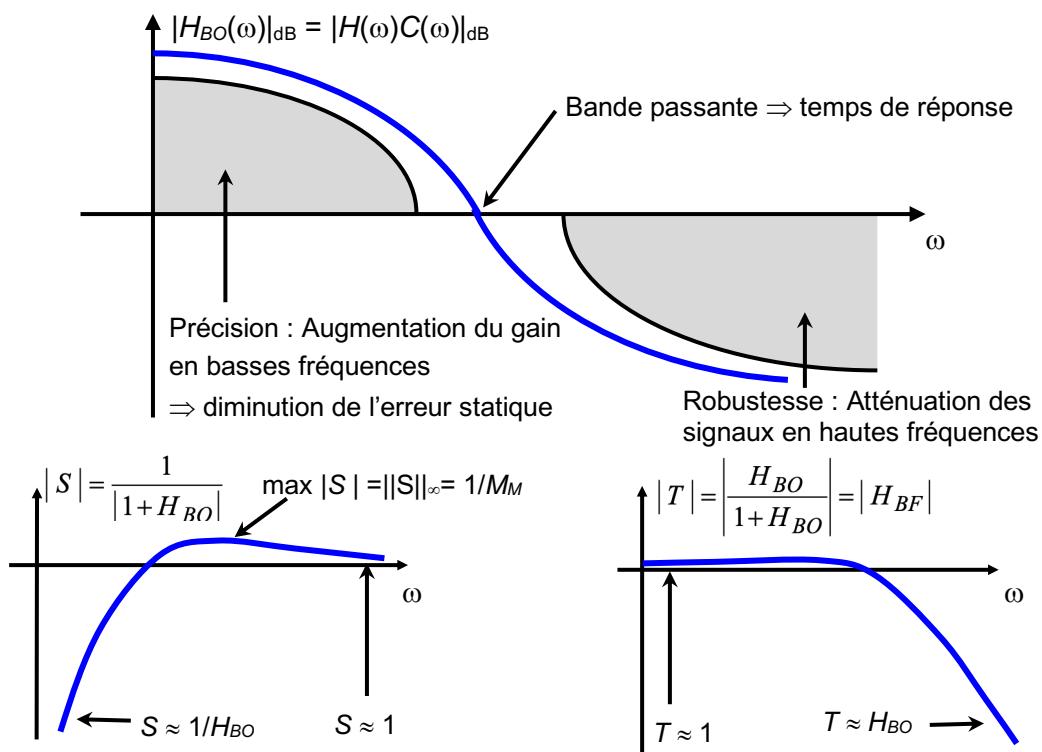


Figure I.18 – Allures « idéales » de la fonction de transfert en boucle ouverte $|H_{BO}(\omega)| = |C(\omega)H(\omega)|$ et des fonctions de sensibilité S et T associées.

En effet, un module de $H_{BO}(j\omega)$ de forte valeur en basses fréquences permet d'obtenir un système précis, i.e. sans erreur statique, alors qu'un module de très faible valeur en hautes fréquences permet d'augmenter la robustesse du système en atténuant les signaux à ces fréquences.

Cette analyse est confirmée par les relations liant les différents signaux du système bouclé de la figure I.17 en tenant compte de l'allure de $|H_{BO}(j\omega)|_{dB}$ représentée sur la figure I.18 :

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 \Rightarrow |CH| \gg 1 &\Rightarrow \begin{cases} Y \approx F.R + \frac{1}{C}P_u + \frac{1}{CH}P_y - P_b \\ U \approx \frac{F}{H}R - P_u - \frac{1}{H}P_y - \frac{1}{H}P_b \end{cases} \\ \omega \rightarrow +\infty \Rightarrow |CH| \ll 1 &\Rightarrow \begin{cases} Y \approx FCH.R + H.P_u + P_y - CH.P_b \\ U \approx FC.R - CH.P_u - C.P_y - C.P_b \end{cases} \end{aligned}$$

Si de plus, le correcteur $C(p)$ contient un intégrateur alors :

$$\text{en basses fréquences : } |C(\omega)| \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} +\infty \Rightarrow |CH| \gg 1 \Rightarrow Y \approx F.R - P_b$$

En outre, le système commandé $H(p)$ est le plus souvent de type passe-bas. Par conséquent :

$$\text{en hautes fréquences : } |H(\omega)| \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow |CH| \ll 1 \Rightarrow Y \approx P_y$$

De plus, la pulsation ω_c à laquelle $|H_{BO}(j\omega)|_{dB}$ coupe l'axe 0 dB correspond approximativement à la bande passante du système en boucle fermée, donc impose le temps de réponse vis-à-vis de la consigne.

4.2. Utilisation de la méthode de modelage de $H_{BO}(j\omega)$ et outils logiciels disponibles

Des méthodes très sophistiquées de modelage de $H_{BO}(j\omega)$ existent, elles ont souvent l'inconvénient de mener à des correcteurs d'ordre relativement élevé et ne sont pas d'un abord aisés.

Modeler $H_{BO}(j\omega)$ en agissant « à la main » sur les paramètres d'un correcteur afin de satisfaire un cahier des charges donné est une tâche difficile. Les correcteurs de base utilisés pour cela sont les correcteurs PI, PIDF ou PI-AP (PI avec terme d'Avance de Phase). Ces trois correcteurs ont été décrits précédemment.

En pratique, deux cas de figure peuvent être rencontrés. Dans le premier cas, le correcteur est du même ordre que le système à asservir. C'est typiquement le cas pour des systèmes du 1^{er} et 2nd ordre contrôlés respectivement par des correcteurs du 1^{er} (PI) et 2nd ordre (PIDF). Si le correcteur peut être du même ordre que l'ordre du système, il est alors possible d'utiliser des méthodes de synthèse algébriques du correcteur. Ce sont les méthodes de synthèse telles que la méthode de placement des pôles de la boucle fermée.

Dans le deuxième cas, souvent pour des raisons de simplicité d'implantation pratique du correcteur, l'ordre du correcteur est inférieur à l'ordre du système. Par exemple, un système du 4^{ème} ordre contrôlé par un correcteur PI qui est du 1^{er} ordre. L'ordre du correcteur étant inférieur à l'ordre du système, il n'y a pas de méthode « exacte » qui existe, il faut alors résoudre un problème d'optimisation non linéaire et non convexe sous contraintes. Des outils efficaces ont été développés pour cela mais si on ne dispose pas de ces outils, les paramètres du correcteur dont la structure a été choisie (PI, PIDF, PI-AP...) doivent être déterminés en agissant « à la main » sur chacun des paramètres du correcteur.

Un certain nombre d'outils logiciels ont été développés au laboratoire LCIS afin de faciliter la synthèse « à la main » de correcteurs de type PIDF par modelage de $H_{BO}(j\omega)$.

Ces outils sont le logiciel PIDcontSynth pour la synthèse de correcteurs de type PIDF à temps continu (le logiciel PIDdiscSynth a été développé pour les correcteurs de type PIDF à temps discret) et PIAPcontSynth pour la synthèse de correcteurs de type PIAP à temps continu. L'ensemble de ces logiciels sont distribués avec une documentation qui décrit comment les utiliser et les formes (structures) des correcteurs utilisés. Ces logiciels sont utilisés au cours des séances de travaux pratiques.

La figure I.19 donne les diagrammes utilisés par les logiciels d'aide à la synthèse de correcteurs. Les contenus de chaque diagramme sont définis dans les documentations des logiciels.

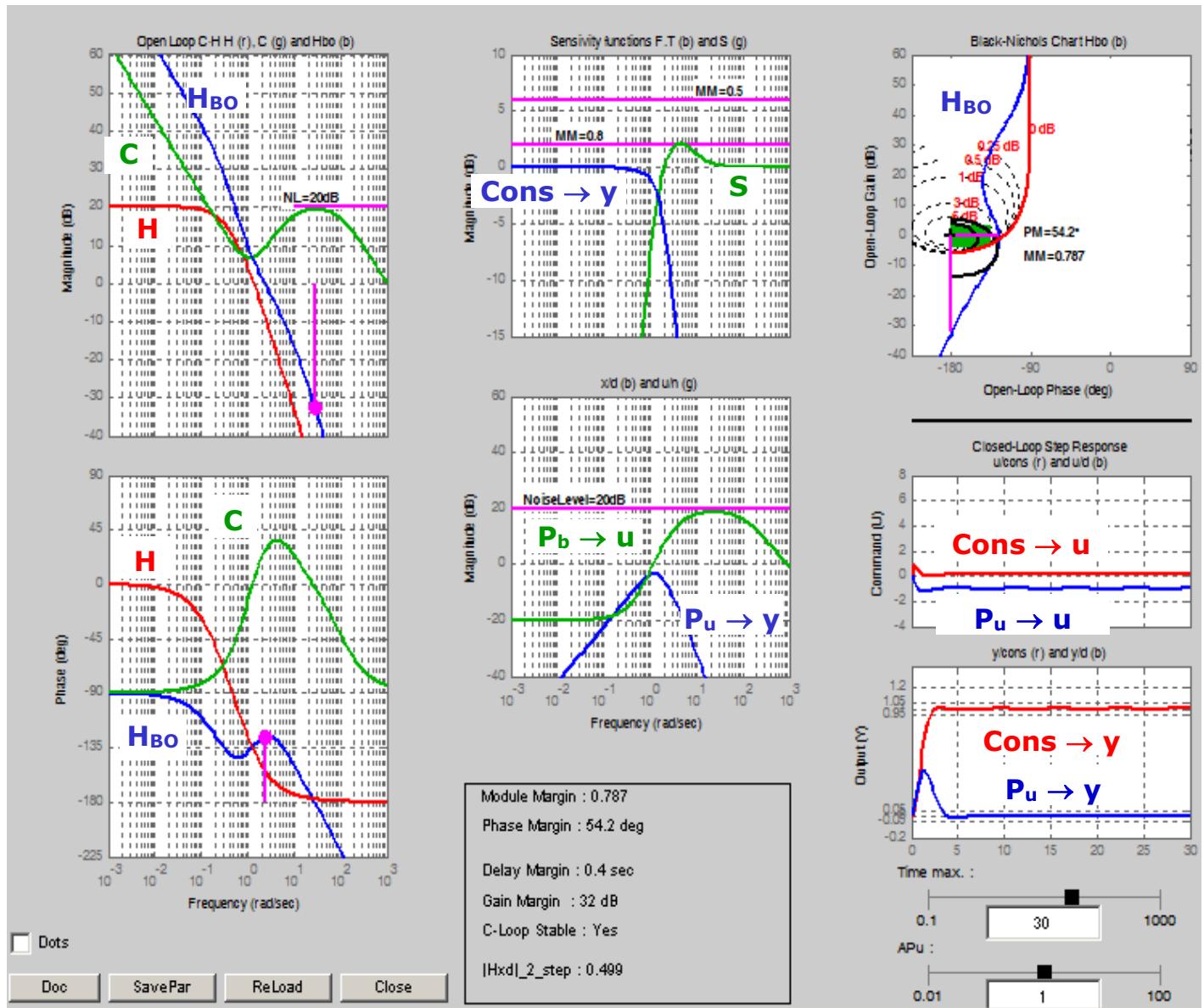


Figure I.19 – Diagrammes utilisés par les logiciels d'aide à la synthèse de correcteurs de type PIDF.

4.3. Analyse de $H_{BO}(j\omega)$ dans le diagramme de Black-Nichols

Le diagramme privilégié pour la synthèse « à la main » d'un correcteur par modelage de $H_{BO}(j\omega)$ est le diagramme de Black-Nichols. Dans les outils d'aide à la synthèse PIDcontSynth et PIAPcontSynth, le diagramme de Black-Nichols de base a été « enrichi » de repères qui facilitent le modelage de $H_{BO}(j\omega)$.

La figure I.20 donne le diagramme de Black-Nichols « enrichi » utilisé par les logiciels PIDcontSynth et PIAPcontSynth.

Le diagramme de Black-Nichols est une représentation de $H_{BO}(j\omega) = C(j\omega).H(j\omega)$ avec en abscisse son argument en degrés et en ordonnées son gain en décibels.

Le point (0dB, -180°) correspond au point critique (-1, j0) dans le diagramme de Nyquist. Selon le critère du revers, lorsque celui-ci est applicable, le système sera stable en boucle fermée si l'image de $H_{BO}(j\omega)$ (en bleu sur la figure I.20) laisse le point (0dB, -180°) sur sa gauche.

Sur le diagramme de Black-Nichols de la figure I.20 sont représentés :

- Les marges de phase et de gain (traits violets), ainsi que PM la valeur de la marge de phase.
- Une bande de marge de phase à 45° (bande verte) ; si la courbe image de H_{BO} passe à droite de cette bande verte, la marge de phase sera meilleure que 45°.
- Les courbes iso marge de module 0.5 et 0.8 (demi-ellipses noires) ; si la courbe image de H_{BO} passe à droite de l'une de ces courbes iso marge de module alors la marge de module sera supérieure ; la valeur MM de la marge de module est également indiquée.
- La courbe de dépassement inférieur à 5% en boucle fermée (trait rouge) ; si la courbe image de H_{BO} passe à droite de cette courbe, le dépassement de la réponse de la sortie du système pour un échelon de consigne sera inférieur à 5% sans filtre F(p).

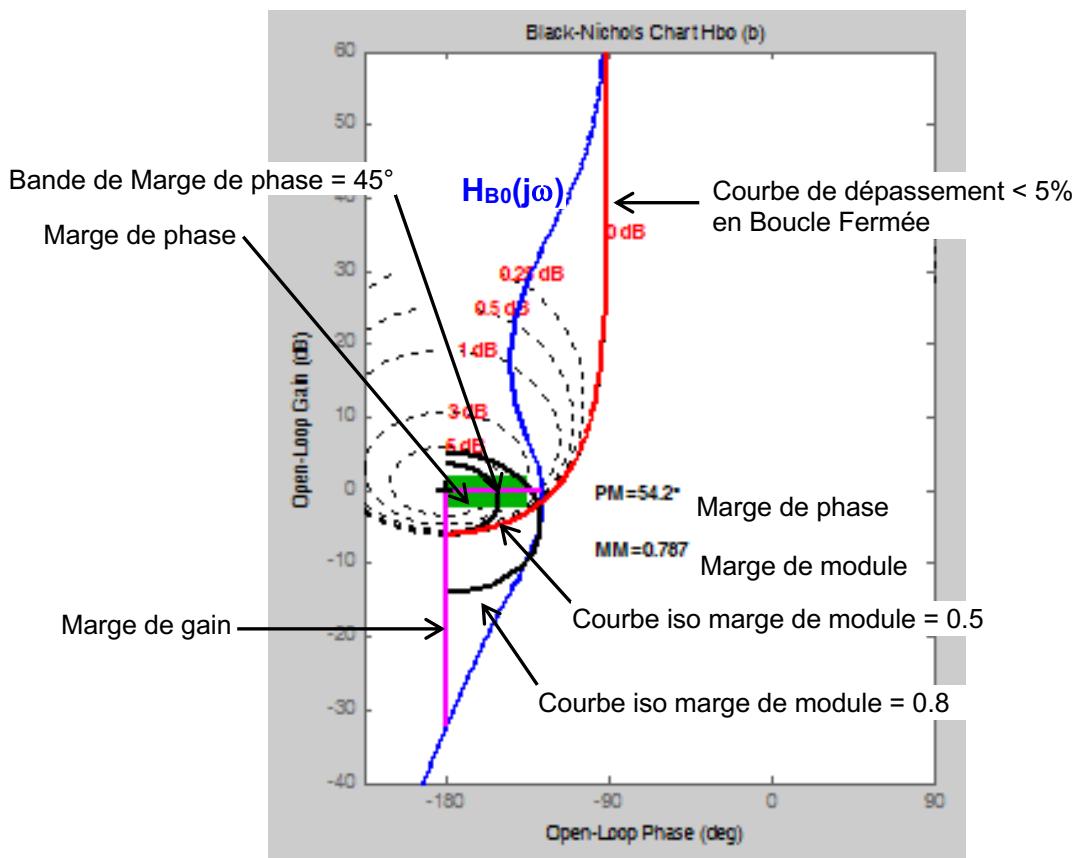


Figure I.20 – Diagramme de Black-Nichols « enrichi » utilisé par les logiciels PIDcontSynth et PIAPcontSynth.

5. Détermination des gains d'un correcteur PID par des essais expérimentaux

5.1. Méthode expérimentale de Ziegler-Nichols à temps continu

La méthode de Ziegler–Nichols (1942) a pour but de déterminer les gains d'un régulateur de type P, PI ou PID afin de réguler la sortie d'un processus dont la réponse est apériodique sans avoir besoin de connaître le modèle du système.

L'intérêt de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la connaissance d'un modèle du procédé à commander. Les gains du correcteur choisi (P, PI ou PID) sont déterminés à partir d'essais expérimentaux simples à réaliser.

Le régulateur préconisé par Ziegler et Nichols prend la forme suivante (avec des actions intégrale et dérivée qui peuvent être supprimées suivant le type de correcteur choisi) :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad (\text{I.9})$$

On remarquera immédiatement que dans le cas du correcteur PID, l'action dérivée n'est pas filtrée entraînant une amplification très importante des bruits de mesure qui cause, la plupart du temps, un très mauvais fonctionnement pratique de la structure PID.

Les réglages indiqués dans le tableau I.1 donnent en général un comportement relativement satisfaisant en régulation (rejet des perturbations constantes) mais un comportement transitoire vis-à-vis de l'entrée de consigne présentant un important dépassement pouvant atteindre 30 à 50% pour une réponse indicielle. Il faudra alors ajouter un filtre $F(p)$ de la consigne.

Les valeurs des gains proposées par Chien, Hrones et Reswick, ainsi que celles obtenues par la méthode IMC (Internal Model Control) sont également données. Ces valeurs de gains permettent, dans certains cas, d'améliorer le comportement transitoire.

Les valeurs des gains du régulateur sont déterminées à partir soit d'un essai d'instabilité (pompage) en boucle fermée, soit d'un essai indiciel en boucle ouverte détaillés par la suite.

Méthode de pompage en boucle fermée		Méthode de l'essai indiciel en boucle ouverte			
		Paramètres à mesurer : G, L et T (a = G.L / T)			
Ziegler–Nichols	Ziegler–Nichols		Chien-Hrones-Reswick		IMC
Régulation ou Poursuite	Régulation ou Poursuite	Régulation	Poursuite	$(t_{rep})_{BF} = L + 3\lambda$ avec $\lambda > 0,2T$	
P	$K = 0,5 K_0$	$K = 1/a$	$K = 0,3/a$	$K = 0,3/a$	
PI	$K = 0,45 K_0$ $T_i = 0,83 T_0$	$K = 0,9/a$ $T_i = 3,3L$	$K = 0,6/a$ $T_i = 4L$	$K = 0,35/a$ $T_i = 1,2T$	$K = (2T+L) / (2\lambda G)$ $T_i = T + L/2$ et $\lambda > 1,7L$
PID	$K = 0,6 K_0$ $T_i = 0,5 T_0$ $T_d = 0,125 T_0$	$K = 1,2/a$ $T_i = 2L$ $T_d = 0,5L$	$K = 0,95/a$ $T_i = 2,4L$ $T_d = 0,4L$	$K = 0,6/a$ $T_i = T$ $T_d = 0,5L$	$K = (2T+L) / [2G(\lambda+L)]$ $T_i = T + L/2$ $T_d = LT / (2T+L)$ et $\lambda > 0,25L$

Tableau I.1 – Paramètres de correcteurs de type PID obtenus à partir d'essais expérimentaux du processus à commander dans le cas de la structure (I.9) du correcteur.

5.1.1 Essai de pompage en boucle fermée

L'essai de pompage en boucle fermée consiste à mettre en oscillation entretenue le système à commander à l'aide d'un gain proportionnel K . La figure I.21 donne le schéma de commande.

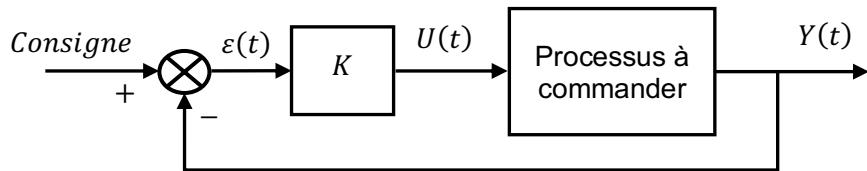


Figure I.21 – Structure de commande pour l'essai de pompage en boucle fermée avec un gain proportionnel K .

Avec le schéma de commande de la figure I.21, la valeur de consigne est choisie de manière à fixer un point de fonctionnement désiré proche duquel va évoluer la sortie et le gain K est modifié jusqu'à obtenir la valeur $K = K_0$, appelé gain critique, qui met la sortie du système en oscillation entretenue à une période T_0 (voir figure I.22).

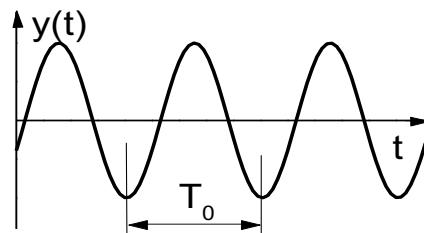


Figure I.22 – Oscillation entretenue de la sortie du système lorsque $K = K_0$ (gain critique).

L'essai de pompage en BF (Boucle Fermée) est extrêmement dangereux puisqu'on recherche le gain K_0 qui met en oscillation entretenue (i.e. pompage) le système bouclé. Or, si le gain est supérieur à K_0 le système bouclé est instable rendant ainsi possible, dans certains cas, une destruction du système. De plus, maintenir une oscillation entretenue est très difficile en pratique.

Pour pallier ce problème, une solution consiste à utiliser un élément de commutation à la place du gain K délivrant une commande $U+$ ou $U-$ suivant le signe de l'erreur $\varepsilon(t)$, figure I.23.

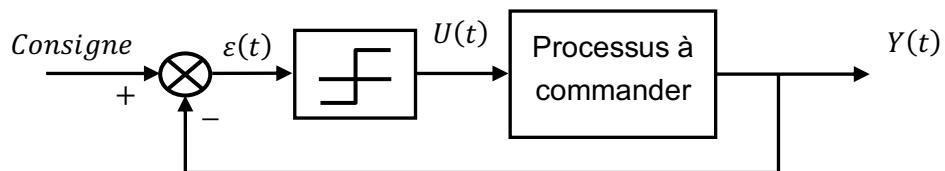


Figure I.23 – Structure de commande pour l'essai de pompage en boucle fermée avec un élément à commutation.

Dans le cas d'un système numérique de commande, la commande à commutation s'implante à l'aide de l'algorithme suivant :

(Répéter toutes les T_e secondes)

Erreur = Consigne – Mesure Si (Erreur ≥ 0) Commande = $U+$ Sinon Commande = $U-$
--

avec $U+$ et $U-$ des valeurs à choisir autour de la valeur U_0 de commande permettant de positionner le système autour du point de fonctionnement désiré donné par la consigne.

Selon la théorie du premier harmonique, sous certaines conditions (principalement d'ordre suffisamment élevé du système), le gain équivalent ($K_0)_{equ}$ à l'élément de commutation tel que décrit par l'algorithme est donné par :

$$(K_0)_{equ} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(U(t))_{crête-à-crête}}{(\varepsilon(t))_{crête-à-crête}}$$

Outre le fait que cette méthode, basée sur un élément à commutation, permette de réaliser, en pratique, un essai de pompage en toute sécurité, elle permet de plus d'automatiser la procédure de réglage des régulateurs. En effet, il est aisément de mettre en œuvre un système de commande qui dans un premier temps contrôle le processus à l'aide d'une fonction de commutation dans le but de déterminer les gains du régulateur, puis qui, dans un second temps, commute sur un régulateur PI ou PID dont les gains ont été déterminés à partir de la mise en oscillation. Cette procédure est implantée dans certains régulateurs industriels "auto-réglant".

5.1.2 Essai indiciel en boucle ouverte

Les paramètres du régulateur de type PID peuvent aussi être déterminés à l'aide d'un essai indiciel en boucle ouverte. Pour cela, le système à commander doit être stable au sens Entrée Bornée – Sortie Bornée.

Cet essai consiste à appliquer au système une entrée de commande en échelon variant entre deux valeurs constantes qui permettent de faire évoluer la sortie entre deux valeurs autour du point de fonctionnement désiré. La figure I.24 donne un exemple d'essai réalisé. A partir des relevés expérimentaux, tels que ceux de la figure I.24, les paramètres suivants sont déterminés :

- T : le temps de montée déterminé par la tangente au point d'inflexion ;
- L : le retard du système ;
- $G = \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{Y_{finale} - Y_{initiale}}{U_{finale} - U_{initiale}}$: le gain statique du système
- $a = GL/T$

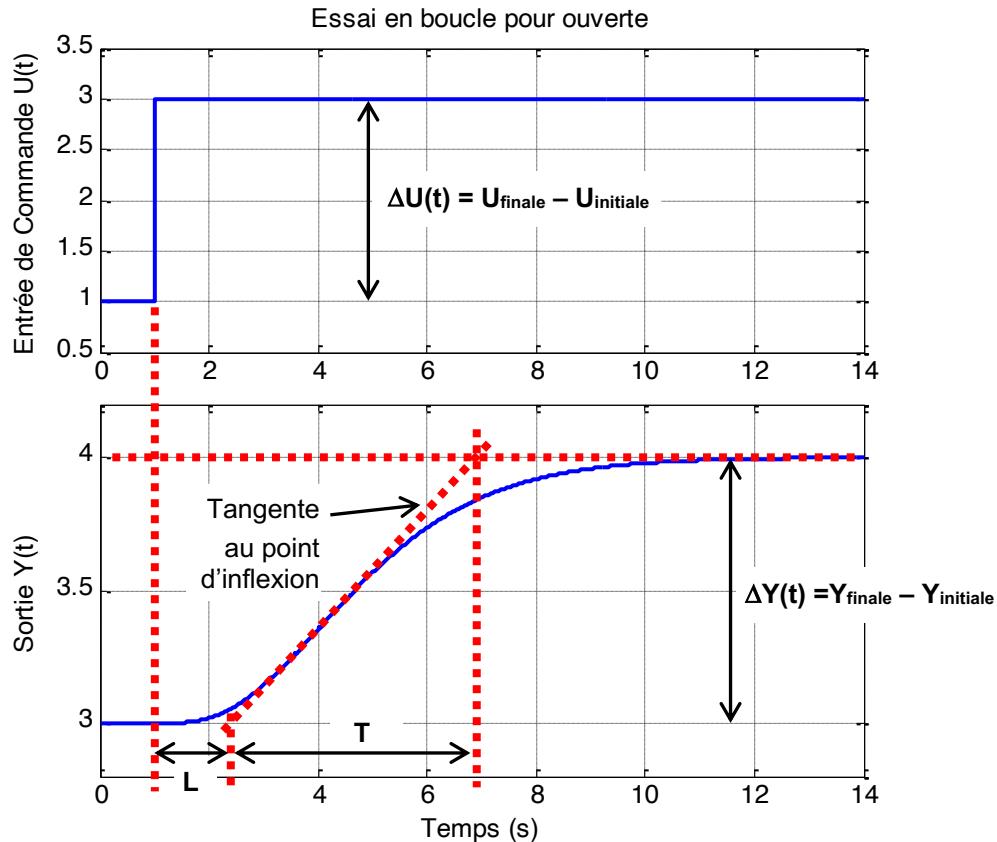


Figure I.24 – Essai en boucle ouverte avec un échelon de commande.
[haut] : Commande du système $U(t)$; [bas] : Sortie du système $Y(t)$.

5.1.3 Remarques sur les essais de la méthode de Ziegler-Nichols

5.1.3.1 Conditions d'application de la méthode

La mise en pompage (i.e. oscillation entretenue de la sortie) d'un système physique bouclé par un gain pur K ne peut se faire que pour des systèmes stables ayant un ordre supérieur ou égal à 3. Un tracé de $K \cdot H(p)$ dans le plan de Nyquist le confirme très rapidement puisqu'il ne peut pas y avoir d'encerclement du point $(-1, j0)$ pour des systèmes du 1^{er} et 2nd ordre.

Si l'essai de pompage est mené avec un système numérique, le retard introduit par ce système peut permettre de mettre en pompage des systèmes du 1^{er} ou du 2nd ordre, mais alors ce ne sont plus seulement les caractéristiques du système physique que l'on prend en compte mais aussi le retard de la commande.

Lors d'un essai de type échelon en boucle ouverte, pour un système du premier ordre le retard L est nul, et pour un système du 2nd ordre il est très difficilement mesurable.

En conclusion, la méthode expérimentale de Ziegler-Nichols pour la détermination des paramètres d'un correcteur de type PID n'est applicable qu'aux systèmes ayant un ordre supérieur ou égal à 3.

5.1.3.2 Point de fonctionnement

La plupart des systèmes physiques sont non-linéaires. Néanmoins, on les approche le plus souvent avec une bonne précision par des modèles linéaires autour des points de fonctionnement désirés. Ainsi, que ce soit l'essai de pompage en boucle fermée ou l'essai de type échelon en boucle ouverte, il faudra tout d'abord positionner le système autour du point de fonctionnement désiré puis effectuer l'essai en vérifiant qu'il n'y a pas de saturation de la sortie du système ni de la commande (i.e. de l'actionneur).

Dans le cas de l'essai en échelon en boucle ouverte, pour positionner le système, il faudra tout d'abord appliquer une valeur constante à la commande de manière à obtenir à peu près la valeur désirée en sortie du système.

Dans le cas de l'essai de pompage en boucle fermée, il suffit de positionner l'entrée de consigne à une valeur adéquate puis de la laisser constante lors de l'essai de pompage.

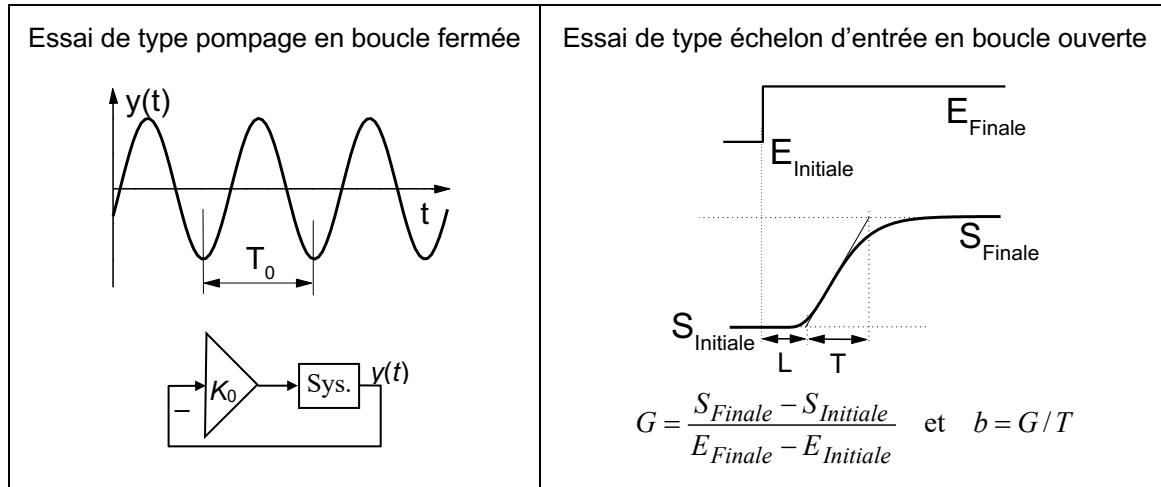
5.2. Méthode expérimentale de Takahashi à temps discret

La méthode de Takahashi est une extension aux correcteurs à temps discret de la méthode de Ziegler-Nichols utilisée pour la détermination des gains des correcteurs de type P, PI ou PID en temps continu. Les réglages préconisés par Takahashi sont obtenus par minimisation du critère :

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |c(k) - y(k)|$$

où $c(k)$ et $y(k)$ sont respectivement l'entrée de consigne et la sortie du processus à l'instant $t = k \cdot T_e$.

Le tableau ci-dessous donne les réglages préconisés par Takahashi obtenus à partir d'un essai de mise en oscillation (pompage) en boucle fermée ou d'un essai de type échelon en boucle ouverte.



Régulateur	Pompage en BF : K_0, T_0	Réponse de type échelon : b, L ($L \geq 0,5 T_e$)
$u_k = K(c_k - y_k)$	$K = 0,5 K_0$	$K = \frac{1}{b(L + T_e)}$
$u_k = u_{k-1} + K[(y_{k-1} - y_k) + K_i(c_k - y_k)]$	$K = K_0 \left(0,45 - 0,27 \frac{T_e}{T_0} \right)$ $K_i = 0,54 \frac{K_0}{K} \frac{T_e}{T_0}$	$a = L + 0,5 T_e$ $K = \frac{0,9}{ba} - \frac{0,135}{ba^2} T_e$ $K_i = \frac{0,27}{ba^2} \frac{T_e}{K}$
$u_k = u_{k-1} + K[(y_{k-1} - y_k) + K_i(c_k - y_k) + K_d(2y_{k-1} - y_k - y_{k-2})]$	$K = 0,6 K_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_0} \right)$ $K_i = 1,2 \frac{K_0}{K} \frac{T_e}{T_0}$ $K_d = \frac{3}{40} \frac{K_0}{K} \frac{T_0}{T_e}$	$a = L + 0,5 T_e ; A = L + T_e$ $K = \frac{1,2}{bA} - \frac{0,3 T_e}{ba^2}$ $K_i = \frac{0,6}{ba^2} \frac{T_e}{K}$ $K_d = \frac{0,5}{bKT_e}$ ou $\frac{0,6}{bKT_e}$ si $\frac{L}{T_e}$ entier

Remarques :

- avec les régulateurs PI et PID les actions proportionnelle et dérivée n'agissent pas sur l'entrée de consigne c_k ,
- Un dispositif anti-windup de saturation de l'intégrateur et une limitation du gain en hautes fréquences du correcteur doivent être ajoutés.

J. Synthèse de correcteurs par compensation des pôles dominants

1. Principe de la méthode à temps continu

Considérons la structure générale de commande de la figure J.1.

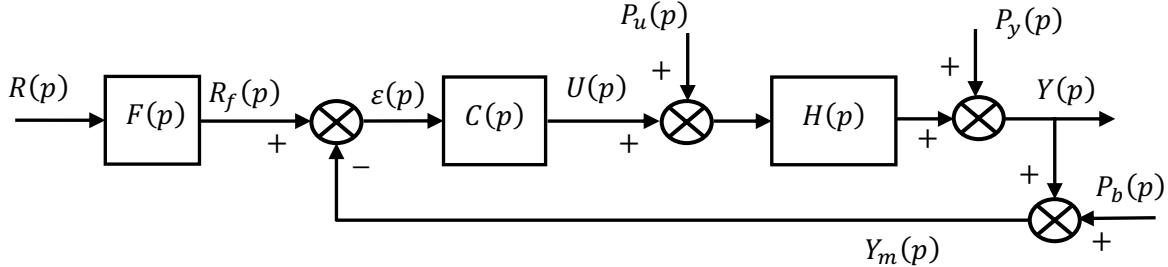


Figure J.1 – Structure de commande à contre-réaction négative pour la commande d'un système $H(p)$.

Nous noterons par la suite :

$$C(p) = \frac{R(p)}{S(p)} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

La méthode de compensation des pôles dominants de $H(p)$ par les zéros de $C(p)$ consiste à « éliminer » les pôles les plus lents de $H(p)$ par des zéros de $C(p)$.

Cette méthode n'est applicable que si la fonction de transfert $H(p)$ est stable au sens EB-SB, c'est-à-dire que tous les pôles de $H(p)$ (racines de $A(p)$) sont à parties réelles négatives.

La première étape de la méthode consiste à factoriser $A(p)$, le dénominateur de $H(p)$, sous la forme de produits de polynômes du premier ordre (pour les pôles réels) et du second ordre (pour les pôles complexes conjugués) :

$$A(p) = (p + p_0)(p + p_1)(p^2 + p_{21}p + p_{22}) \cdots (p + p_n)$$

où les p_i sont les pôles réels de $H(p)$ et p_{jj} les carrés des modules des pôles complexes conjugués.

Les pôles sont ensuite classés du plus lent (pôle dominant, plus petit module) au plus rapide (plus grand module) :

$$0 < p_0 \leq p_1 \leq \sqrt{p_{22}} \cdots \leq p_n$$

Compte-tenu de la complexité désirée pour le correcteur $C(p)$ (choix des degrés de $R(p)$ et de $S(p)$), les racines du polynôme $R(p)$ sont prises égales aux premiers pôles dominants de $H(p)$. Par exemple, un polynôme $R(p)$ de degré 2 permettra de compenser les deux premiers pôles dominants de $H(p)$.

Enfin, la troisième et dernière étape consistera à déterminer $S(p)$ pour assurer le rejet des perturbations (utilisation d'un intégrateur, racine en $p=0$) et les marges de robustesse.

Le degré de $S(p)$ sera choisi au moins égal à celui de $R(p)$ afin d'obtenir un correcteur propre de manière à gérer l'amplification des bruits de mesure en hautes fréquences.

Cette méthode est extrêmement simple à mettre en œuvre mais amène à un rejet des perturbations de commande ayant la même dynamique que celle des pôles dominants de $H(p)$. En pratique, cette méthode amène le plus souvent à un rejet des perturbations insuffisamment rapide. On restreindra donc l'utilisation de cette méthode au cas des systèmes peu ou pas perturbés.

Cette méthode peut être utilisée pour obtenir le correcteur initial utilisé par une autre méthode de synthèse qui elle permettra de correctement rejeter les perturbations de commande.

1.1. Exemple d'application de la méthode

Système à asservir et cahier des charges.

Le système à asservir est :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{0.5}{p^2 + 1.8p + 1}$$

avec le cahier des charges suivant :

Pour les contraintes sur le système asservi, nous prendrons :

- Stabilité au sens EB-SB du système asservi.
- Marges de Module et de Phase désirées : $M_M \geq 0.5$ et $\varphi_M \geq 45^\circ$.
- Gain du correcteur en hautes fréquences inférieur ou égal à $N_{max} = 20$.
- Erreur statique nulle entre la consigne et la mesure de la sortie pour une consigne constante et une perturbation de commande constante.
- Dépassement de la sortie inférieur à 10%.

Pour les objectifs de commande dans l'ordre de priorité décroissante :

1. Satisfaire les contraintes énoncées ci-dessus.
2. Minimiser l'impact d'une perturbation de commande P_u constante sur le système.
3. Minimiser le temps de réponse de la sortie vis-à-vis d'un échelon de référence.

Détermination du correcteur $C(p)$ par la méthode de compensation des pôles dominants.

Étape 1 – Factorisation de $A(p)$:

Les racines de $A(p)$, pôles de $H(p)$, sont complexes conjugués : pôles $= -0.9 \pm 0.435j$ et ont pour module 1 rad/s.

Le polynôme $A(p)$ est donc laissé sous la forme : $A(p) = p^2 + 1.8p + 1$.

Étape 2 – Classement des racines de $A(p)$ et choix de $R(p)$:

Il n'y a que deux pôles complexes conjugués, ce sont les pôles dominants. Il n'y a donc pas de classement à faire. Les racines du polynôme $R(p)$ sont prises égales à celles du polynôme $A(p)$ afin de compenser les pôles dominants, d'où :

$$R(p) = K \cdot (p^2 + 1.8p + 1)$$

Étape 3 – Choix de $S(p)$ et du gain K :

Le cahier des charges spécifie une erreur statique nulle entre la consigne et la mesure de la sortie pour une consigne et une perturbation de commande constantes. Le polynôme $S(p)$ doit donc posséder une racine en $p = 0$.

Le degré de $S(p)$ doit être supérieur ou égal à celui de $R(p)$ afin d'obtenir un correcteur propre qui permet une maîtrise de l'amplification des bruits de mesure en hautes fréquences. Nous prendrons le degré de $S(p)$ égal à celui de $R(p)$, c'est-à-dire 2, afin de simplifier l'implantation du correcteur.

Au total, nous obtenons donc la forme suivante pour $S(p)$:

$$S(p) = p(p + s_0)$$

A ce stade, le correcteur $C(p)$ est donné par :

$$C(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{K \cdot (p^2 + 1.8p + 1)}{p(p + s_0)}$$

et la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ par :

$$H_{BO}(p) = C(p)H(p) = \frac{R(p)}{S(p)} \cdot \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{K \times 0.5}{p(p + s_0)}$$

Il nous faut donc maintenant déterminer les paramètres K et s_0 qui permettront de satisfaire les contraintes du cahier des charges et d'atteindre au mieux les objectifs de commande.

Le gain en hautes fréquences ($p \rightarrow +\infty$) du correcteur est donné par : $\lim_{p \rightarrow +\infty} C(p) = K$

Et la contrainte du cahier des charges $N_{max} = 20$, nous donne la limite : $K \leq N_{max} = 20$

En pratique, on a tout intérêt à choisir une valeur du gain K la plus élevée possible afin de rejeter au mieux les perturbations de commande. Nous prendrons donc K = 20 et recherchons la valeur de la pulsation s_0 qui satisfait au mieux le cahier des charges. On pourra prendre pour s_0 une valeur proche du module des pôles complexes conjugués de $H(p)$.

Avec K = 20 et les trois valeurs suivantes de s_0 , $s_0 = \{ 1 \text{ rad/s}, 3 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s} \}$, les diagrammes de Bode du correcteur $C(p)$ sont donnés sur la figure J.2 ainsi que le diagramme de Bode de la fonction de transfert du système $H(p)$.

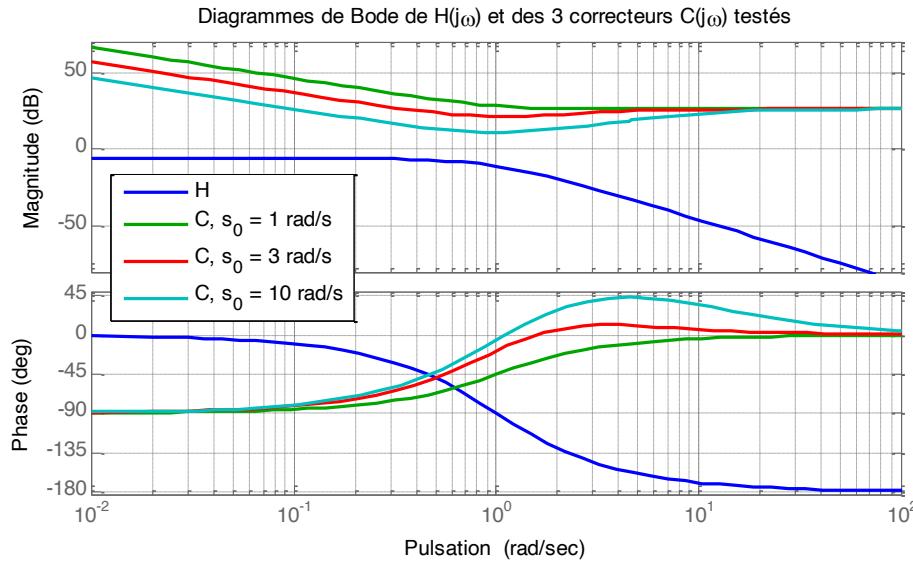


Figure J.2 – Diagrammes de Bode de $H(p)$ et de $C(p)$ avec $K = 20$ et $s_0 = \{ 1 \text{ rad/s}, 3 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s} \}$.

Pour ces trois correcteurs testés, les diagrammes de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte correspondantes $H_{BO}(p) = C(p).H(p)$ nous permettent de déterminer la marge de phase obtenue avec chaque correcteur. La figure J.3 représente ces diagrammes de Bode.

Les marges de phase obtenues sont : 84° avec $s_0 = 10 \text{ rad/s}$, 50° avec $s_0 = 3 \text{ rad/s}$, 18° avec $s_0 = 1 \text{ rad/s}$. La marge de phase diminue lorsque s_0 diminue.

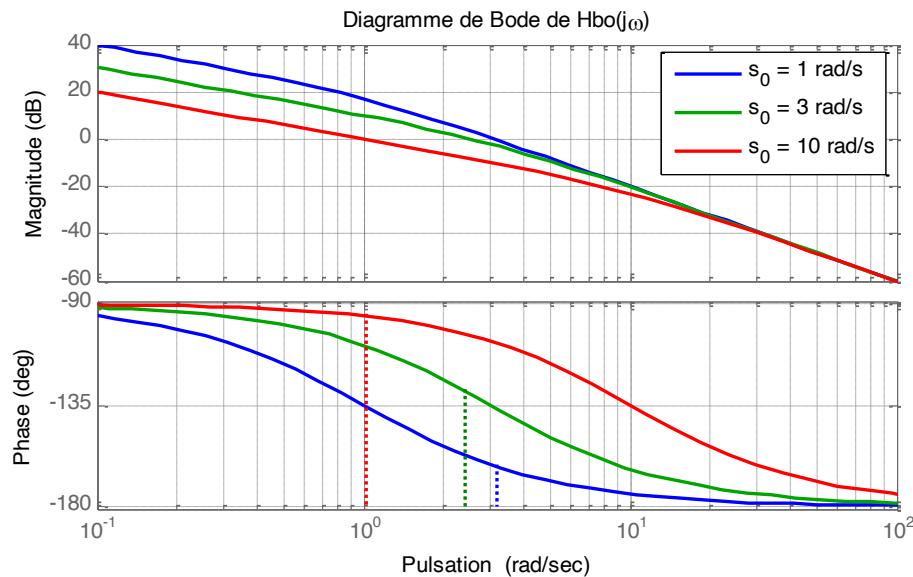


Figure J.3 – Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $H(p)$ pour les 3 correcteurs $C(p)$ testés avec $K = 20$ et $s_0 = \{ 1 \text{ rad/s}, 3 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s} \}$.

Les diagrammes de Bode en amplitude, figure J.4, des fonctions de sensibilité de sortie $S(p) = \frac{1}{1+C(p).H(p)}$ obtenues avec chaque correcteur permettent de déterminer les marges de module obtenues pour les 3 correcteurs testés.

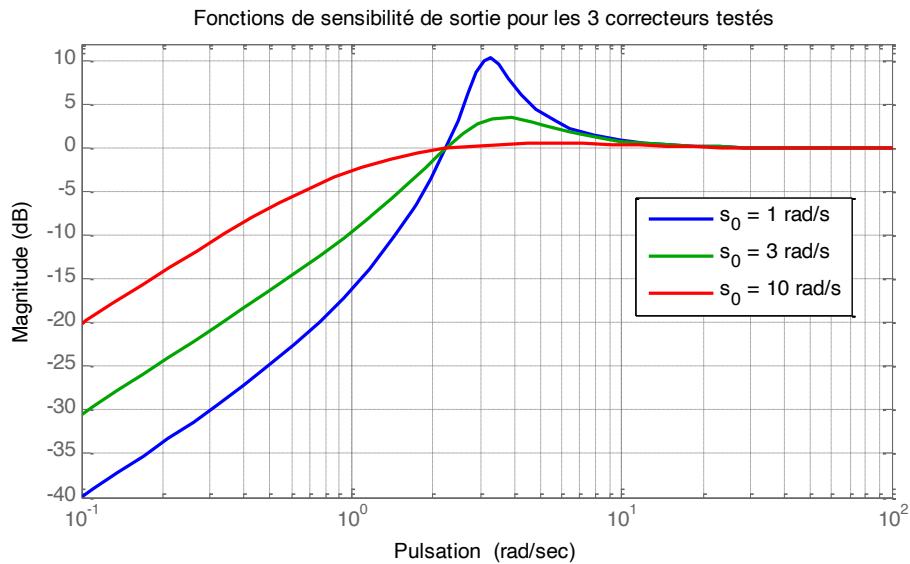


Figure J.4 – Diagrammes de Bode en amplitude des fonctions de sensibilité de sortie obtenues pour les 3 correcteurs $C(p)$ testés avec $K = 20$ et $s_0 = \{ 1 \text{ rad/s}, 3 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s} \}$.

A partir de la mesure de $|S(j\omega)|_{\max}$ obtenue pour chaque correcteur, les marges de module sont calculées par $M_M = 10^{-\frac{|S(j\omega)|_{\max}}{20}}$.

Le tableau J.1 donne les marges de robustesse obtenues avec les trois correcteurs testés.

Correcteur	$K=20$ et $s_0 = 1 \text{ rad/s}$	$K=20$ et $s_0 = 3 \text{ rad/s}$	$K=20$ et $s_0 = 10 \text{ rad/s}$
Marge de phase $M_\phi [^\circ]$	18°	50°	84°
$ S(j\omega) _{\max} [\text{dB}]$	10.5	3.5	0.59
Marge de Module M_M	0.3	0.67	0.93

Tableau J.1 : Marges de phase et de module obtenues pour les 3 correcteurs $C(p)$ testés.

Les résultats du tableau J.1 nous indiquent que deux ($s_0 = 3 \text{ rad/s}$ et $s_0 = 10 \text{ rad/s}$) des trois correcteurs testés satisfont le cahier des charges concernant les aspects de stabilité, d'erreur statique nulle, de marges de robustesse et d'amplification maximum du bruit en hautes fréquences. Afin de choisir le correcteur parmi les deux restants, nous allons comparer les réponses temporelles des deux correcteurs vis-à-vis de l'entrée de perturbation de commande $P_u(t)$.

La figure J.5 donne la réponse de la sortie du système pour une perturbation de commande en échelon unitaire. On obtient bien un rejet de la perturbation (la sortie retourne à son état initial). Le correcteur avec $s_0 = 3 \text{ rad/s}$ est celui qui permet d'obtenir le meilleur rejet de la perturbation $P_u(t)$.

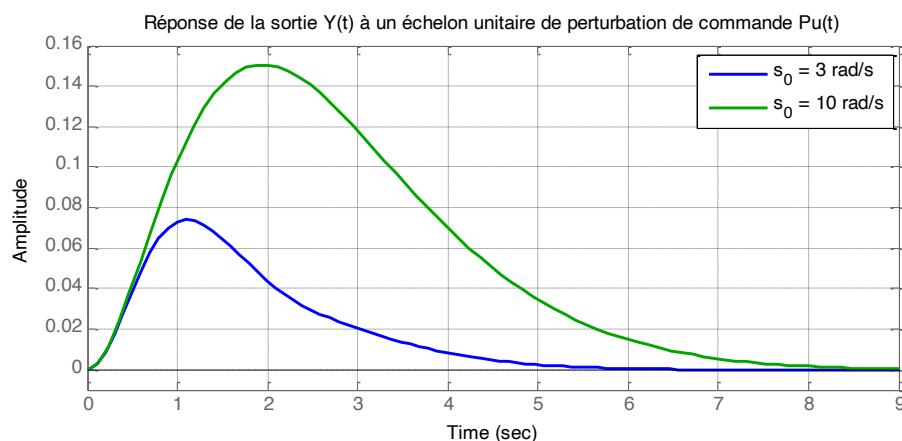


Figure J.5 – Réponse temporelle de la sortie du système vis-à-vis d'un échelon unitaire de la perturbation de commande P_u pour 2 correcteurs $C(p)$ testés avec $K = 20$ et $s_0 = \{ 3 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s} \}$.

Le correcteur $C(p)$ finalement retenu est donné par :

$$C(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{20 \cdot (p^2 + 1.8p + 1)}{p(p + 3)}$$

La commande est totalement déterminée lorsque le filtre $F(p)$ de la consigne est choisi. La figure J.6 donne la réponse de la sortie $y(t)$ et de la commande $u(t)$ pour un échelon de consigne unitaire sans filtre $F(p)$ (i.e. $F(p) = 1$) et avec un filtre $F(p)$ du premier ordre donné par :

$$F(p) = \frac{2}{p + 2} = \frac{1}{0.5p + 1}$$

La valeur de la constante de temps $\tau = 0,5 \text{ s}$ a été choisie en mesurant l'instant du 1^{er} maximum de la sortie pour un échelon de consigne sans préfiltre F et en divisant la valeur obtenue par 2,4. La valeur finale de la constante de temps τ est ensuite ajustée en pratique pour obtenir le comportement désiré.

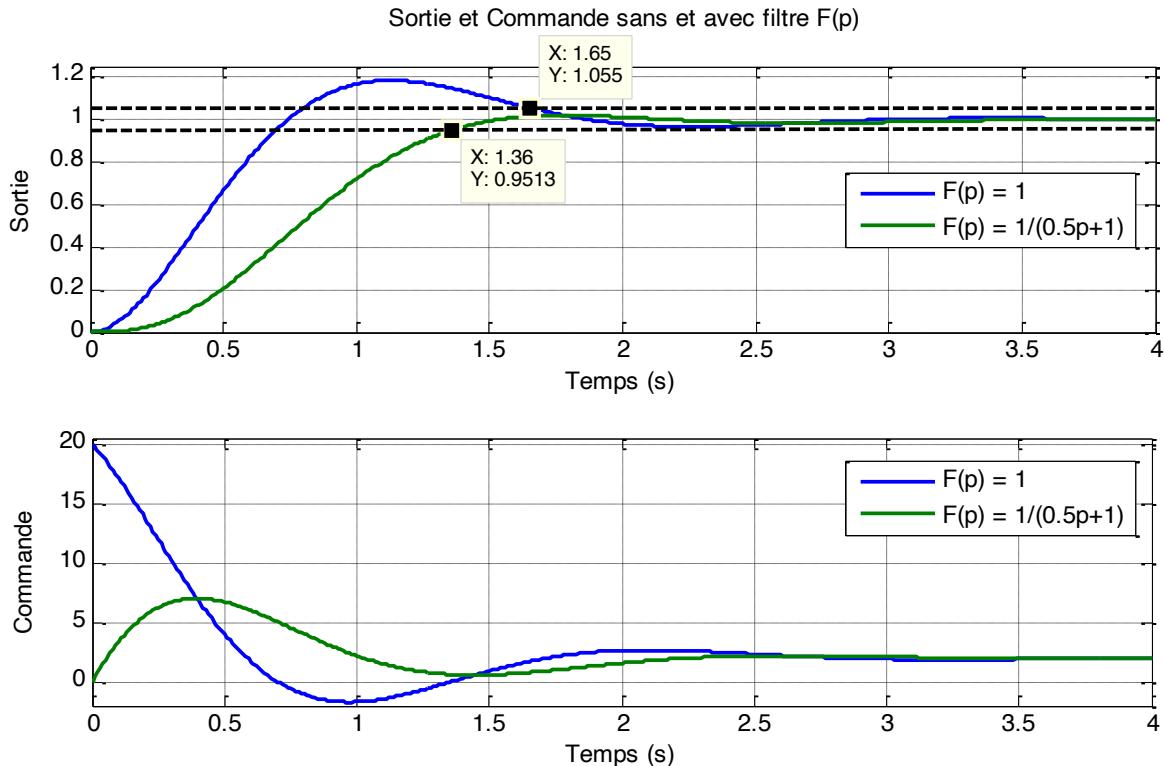


Figure J.6 – Réponses de la sortie $Y(t)$ [haut] et de la commande $U(t)$ [bas] du système pour une entrée de consigne en échelon unitaire sans filtre $F(p)$ et avec un filtre $F(p)$ du premier ordre de constante de temps 0.5 s.

Le choix du filtre $F(p)$ du premier ordre donné permet de satisfaire la contrainte du cahier des charges portant sur le dépassement maximum de la sortie pour une entrée de consigne en échelon. De plus, avec ce filtre le temps de réponse à 95 % de la valeur finale de la sortie est de 1.36 s au lieu de 1.65 s sans ce filtre, et l'amplitude maximale de la commande est divisée par 3 et n'est plus discontinue.

Les figures J.5 et J.6 permettent de clairement mettre en évidence le principal défaut de la méthode de synthèse de correcteurs par compensation des pôles dominants. En effet, le temps de réponse à 95% de la valeur finale de la consigne est de 1.36 s lors d'un échelon de consigne (figure J.6) alors que le temps de rejet d'un échelon de perturbation de commande (figure J.5) est de l'ordre de 5 s ce qui correspond au temps de réponse propre du système $H(p)$. Ainsi, cette méthode de synthèse permet d'obtenir des résultats très satisfaisants vis-à-vis de l'entrée de consigne mais très médiocres vis-à-vis de l'entrée de perturbation de commande $P_U(t)$. En pratique si le système est fortement perturbé, la sortie du système ne sera que très rarement à sa valeur de consigne en raison du temps trop important mis par le correcteur pour rejeter ces perturbations.

2. Principe de la méthode à temps discret

Considérons la structure de commande de la figure J.7.

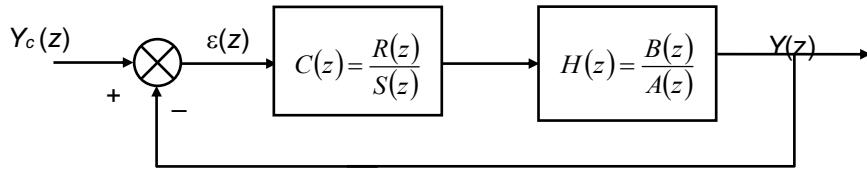


Figure J.7 – Commande d'un processus $H(z)$ par un correcteur $C(z)$.

La méthode de compensation des pôles dominants de $H(z)$ par $C(z)$ consiste à « éliminer » les pôles les plus lents de $H(z)$ par le choix des zéros de $C(z)$. Cette méthode n'est applicable que si la fonction de transfert $H(z)$ est stable au sens EB-SB, c'est-à-dire que tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

La méthode à temps discret suit la même procédure que la méthode à temps continu.

La première étape de la méthode consiste à factoriser $A(z)$ (produit de polynômes du premier et second ordre) :

$$A(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 - 2\Re(z_2).z + |z_2|^2) \cdots (z - z_n)$$

Où les z_i sont les pôles de $H(z)$.

Les pôles stables sont classés du plus grand module (pôle dominant, dynamique lente) au plus petit module :

$$1 > |z_0| \geq |z_1| \geq |z_2| \cdots \geq |z_n|$$

Compte tenu de la complexité désirée pour le correcteur $C(z)$ (degrés de $R(z)$ et de $S(z)$), le polynôme $R(z)$ sera pris égal aux premiers pôles dominants de $H(z)$. Par exemple, un polynôme $R(z)$ de degré 2 permettra de compenser les deux premiers pôles dominants de $H(z)$.

Enfin, la troisième et dernière étape consistera à déterminer $S(z)$ pour assurer le rejet des perturbations (utilisation d'un intégrateur, racine en $z=1$) et les marges de robustesse. Le degré de $S(z)$ sera choisi au moins égal à celui de $R(z)$ afin d'obtenir un correcteur propre de manière à gérer l'amplification des bruits de mesure en hautes fréquences.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

1. Structure générale de commande et structure de commande RST

Nous considérons la structure générale de commande à deux degrés de liberté donnés par le préfiltre F de la consigne et le correcteur de boucle C de la figure K.1.

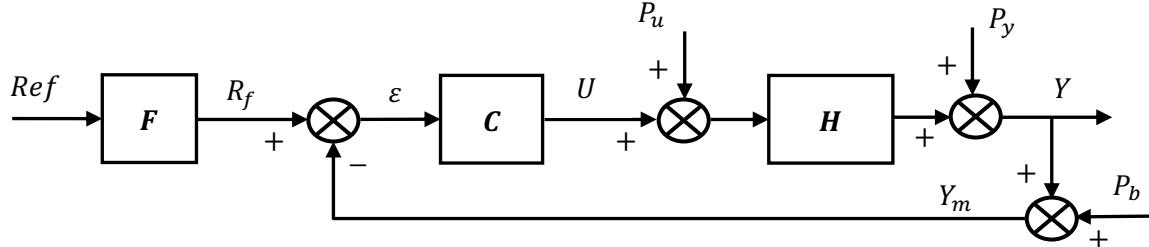


Figure K.1 – Structure de commande à deux degrés de liberté (F et C) pour la commande du système H .

Dans le cadre des fonctions de transfert décrivant des systèmes linéaires invariants causaux, nous noterons par la suite, sans aucune hypothèse particulière, que les fonctions de transfert sont constituées par le rapport de polynômes de la variable considérée suivant le cas :

$$F = \frac{T}{R}, \quad C = \frac{R}{S} \quad \text{et} \quad H = \frac{B}{A} \quad (\text{K.1})$$

Ces fonctions de transfert peuvent être à temps continu (de la variable p) ou à temps discret (de la variable z) suivant le cas traité.

En utilisant les notations des fonctions de transfert données en (K.1), la structure générale de commande de la figure K.1 peut être mise sous la forme de la structure dite RST de la figure K.2.

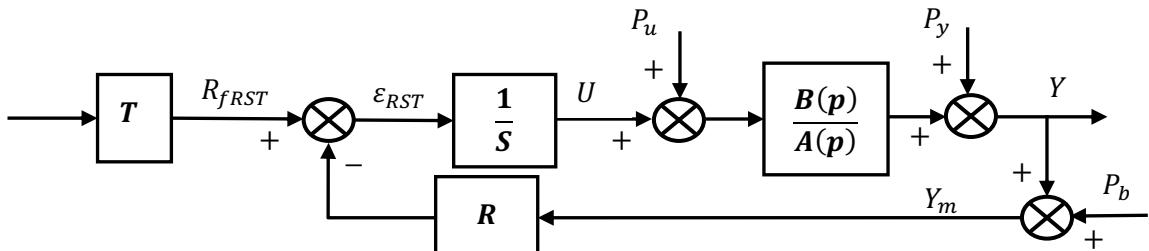


Figure K.2 – Structure de commande à deux degrés de liberté sous forme RST.

La sortie Y et la commande U peuvent s'exprimer en fonction des polynômes des fonctions de transfert et des entrées exogènes :

$$Y = \frac{1}{AS + BR} [BT \cdot \text{Ref} + BS \cdot P_u + AS \cdot P_y - BR \cdot P_b] \quad (\text{K.2})$$

$$U = \frac{1}{S} [T \cdot \text{Ref} - R \cdot Y_m] = \frac{1}{S} [T \cdot \text{Ref} - R \cdot (Y + P_b)]$$

La relation (K.2) montre que les pôles de la boucle fermée sont les racines du polynôme :

$$D = AS + BR$$

La synthèse d'un correcteur par placement (par choix) des pôles de la fonction de transfert de la boucle fermée consiste à choisir les pôles de la boucle fermée du système (les racines de D) puis à en déduire les paramètres du correcteur, ici les coefficients des polynômes R et S nécessaires pour obtenir les racines désirées pour D . Le polynôme T est ensuite déterminé afin d'obtenir le comportement souhaité entre la consigne et la sortie du système.

Le choix des pôles de la boucle fermée n'est pas unique. Une fois les pôles choisis qui respectent les contraintes du cahier des charges (marges de robustesse, amplification maximum du bruit de mesure en hautes fréquences...), le calcul des paramètres des polynômes R et S peut ensuite être effectué de manière unique et automatique.

2. Synthèse d'une commande à temps continu sous forme RST par placements des pôles de la boucle fermée

Dans la suite nous considérons une fonction de transfert du procédé à contrôler mise sous la forme irréductible suivante :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

avec $A(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$: polynôme de la variable p de degré n

et $B(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m$: polynôme de la variable p de degré m

avec $n > m$ (système physique strictement causal).

Les polynômes R(p) et S(p) seront notés :

avec $R(p) = r_0p^r + r_1p^{r-1} + \dots + r_r$: polynôme de la variable p de degré r

et $S(p) = p^s + s_1p^{s-1} + \dots + s_s$: polynôme de la variable p de degré s

avec $s \geq r$ (correcteur causal).

2.1 Degré du polynôme de régulation

Le polynôme de régulation $D(p)$, nommé aussi polynôme caractéristique, correspond au dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée de (K.2). Dans le cas de la structure RST, il est donné par l'équation dite de Bezout (équation diophantine) suivante :

$$D(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p)$$

Le degré du polynôme $D(p)$ est donné par :

$$d = \deg(D(p)) \leq \max[\deg(A(p)) + \deg(S(p)), \deg(B(p)) + \deg(R(p))] = \max[n+s, m+r]$$

Sachant que pour des raisons de causalité $\deg(S(p)) \geq \deg(R(p))$ et $\deg(A(p)) > \deg(B(p))$, il vient :

$$d = \deg(D(p)) \leq \deg(A(p)) + \deg(S(p)) = n+s$$

En pratique, sauf cas particulier, on choisira :

$$d = \deg(D(p)) = n+s \quad (\text{K.3})$$

2.2 Rejet asymptotique des perturbations P_u et P_y constantes

Rappelons l'équation (K.2) de la sortie du système en boucle fermée en fonction des entrées :

$$Y(p) = \frac{1}{AS+BR} [BT.\text{Ref} + BS.P_u + AS.P_y - BR.P_b]$$

Le polynôme S(p) est au numérateur des fonctions de transfert entre les entrées de perturbation P_u et P_y , et la sortie Y. Donc, pour rejeter asymptotiquement l'effet des entrées de perturbations constantes sur la sortie, il suffit, d'après le théorème de la valeur finale, que le polynôme S(p) comporte une racine en $p = 0$. Ainsi, avec S(p) de la forme :

$$S(p) = p.S_p(p)$$

les perturbations constantes P_u et P_y seront asymptotiquement rejetées car nous aurons $S(p=0) = 0$.

2.3 Choix des degrés des polynômes de correction R(p) et S(p)

2.3.1 Solution minimale pour R(p) et S(p)

On parle de solution minimale lorsque les degrés des polynômes R(p) et S(p) sont les plus petits possibles. L'identité de Bezout possède une solution unique minimale pour :

$$\deg(S(p)) = \deg(R(p)) = v - 1 \quad (\text{réglateur propre})$$

$$\text{avec } v = \max[\deg(A(p)), \deg(B(p))] = \max[n, m]$$

Pour les systèmes physiques, on a toujours $\max[n, m] = n$ donc $v = n$.

Et avec la relation (K.3) il vient : $d = \deg(D(p)) = n+s = v+v-1 = 2v-1$

2.3.2 Correcteur strictement propre avec solution minimale pour $R(p)$

On recherche une solution minimale telle que le correcteur $C(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$ soit strictement propre, i.e. $\deg(S(p)) > \deg(R(p))$, avec un degré minimum pour le polynôme $R(p)$.

Une solution unique de l'identité de Bezout est obtenue avec : $\deg(R(p)) = v - 1$.

En fonction du degré s choisi pour le polynôme $S(p)$, le degré d du polynôme de régulation $D(p)$ sera donné par :

$$d = v + \deg(S(p)) = v + s = n + s$$

Il est souvent recommandé de choisir un correcteur strictement propre afin d'atténuer les bruits en hautes fréquences grâce à l'effet passe-bas d'une fonction de transfert strictement propre. On a en effet une atténuation de $k \times (-20\text{db/décade})$, avec $k = \deg(S(p)) - \deg(R(p))$.

2.3.3 Correcteur avec effet intégral

On recherche maintenant une solution telle que le correcteur $C(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$ possède un effet intégral, i.e. $S(p=0) = 0$, afin de rejeter asymptotiquement les perturbations constantes.

Puisqu'on impose une racine au polynôme $S(p)$, on perd un degré de liberté pour l'imposition du polynôme de régulation $D(p)$. Par conséquent, l'identité de Bezout possède maintenant une solution unique si les degrés des polynômes $R(p)$ et $S(p)$ satisfont :

$$\text{Correcteur propre :} \quad \deg(R(p)) = \deg(S(p)) = v = n$$

$$\text{Correcteur strictement propre :} \quad \deg(R(p)) = v = n \quad \text{et} \quad \deg(S(p)) > v = n$$

et dans les deux cas : $d = v + \deg(S(p)) = v + s = n + s$.

2.4 Détermination des coefficients des polynômes $R(p)$ et $S(p)$

Si les degrés des polynômes $R(p)$ et $S(p)$ sont choisis comme indiqué à la section 2.3, alors les coefficients de ces polynômes peuvent être déterminés de manière unique à partir de la connaissance des autres polynômes de l'identité de Bezout par la résolution d'un système de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues. Pour cela, ce système d'équations peut être mis sous forme matricielle :

$$M \cdot [x] = [d_i] \quad \Rightarrow \quad [x] = M^{-1} \cdot [d_i]$$

avec M la matrice, dite de Sylvester, composée des coefficients a_i et b_i des polynômes $A(p)$ et $B(p)$, $[x] = [1 \ s_1 \ r_1]^T$ le vecteur des coefficients inconnus, et $[1 \ d_i]$ le vecteur des coefficients du polynôme $D(p)$ qui fixe les pôles de la boucle fermée.

Dans le cas d'un correcteur propre à effet intégral (section 2.3.3), les polynômes sont donnés par :

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$B(p) = b_1 p^{n-1} + \cdots + b_n$$

$$R(p) = r_0 p^n + r_1 p^{n-1} + \cdots + r_n$$

$$S(p) = p^n + s_1 p^{n-1} + \cdots + s_{n-1} p \quad \text{avec} \quad S(0) = 0$$

$$D(p) = p^{2n} + d_1 p^{2n-1} + \cdots + d_d \quad \text{avec} \quad d = 2n$$

Par identification du polynôme $D(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p)$ au polynôme $D(p) = p^{2n} + d_1 p^{2n-1} + \cdots + d_d$, il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & 0 \\ a_n & \vdots & \ddots & a_1 & b_n & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_n & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ d_{n+1} \\ \vdots \\ d_{d-1} \\ d_d \end{bmatrix}$$

La section 2.5 expose deux méthodes de choix des pôles de $D(p)$ donc des coefficients d_i .

Lorsque le degré du polynôme $D(p)$ est élevé, typiquement supérieur à 3, les pôles de ce polynôme sont très sensibles aux arrondis des coefficients d_i . Il faudra donc être particulièrement attentif à conserver le maximum de chiffres significatifs pour les coefficients d_i .

2.5 Choix du polynôme de régulation $D(p)$

Le choix de $D(p)$ permet d'imposer les pôles du système en boucle fermée. Ainsi les polynômes $R(p)$ et $S(p)$ seront choisis de manière à imposer le polynôme de régulation $D(p)$ désiré avec, le plus souvent, la contrainte $S(p=0) = 0$ afin de rejeter les perturbations constantes.

De manière générale, le polynôme de régulation prend la forme suivante :

$$D(p) = p^d + d_1 p^{d-1} + \cdots + d_d$$

où d est le degré du polynôme $D(p)$.

Le choix des coefficients d_i , avec $i = 1 \dots d$, impose les racines de $D(p)$ donc les pôles du système en boucle fermée.

2.5.1 Polynôme de régulation $D(p)$ ayant d pôles multiples

La forme la plus simple pour le polynôme de régulation $D(p)$ est donnée par :

$$D(p) = (p + p_0)^d$$

Cette forme impose un d -tuple pôle p_0 en boucle fermée. Les coefficients d_i du polynôme $D(p)$ sont ensuite déduits de cette expression.

Le pôle p_0 peut être choisi de manière à imposer un temps de réponse à 95%, $(t_{rep})_{95\%}$, désiré pour le rejet des perturbations à l'aide de la relation suivante :

$$p_0 = \frac{a}{(t_{rep})_{95\%}}$$

où le paramètre a est donné par le tableau ci-dessous en fonction du degré d du polynôme de régulation $D(p)$.

degré d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5	12	13,2	14,6	16

Tableau K.1 : Détermination du paramètre a afin de calculer le d -tuple pôle d'un polynôme afin d'imposer un temps de réponse désiré.

Attention : Le choix du temps de réponse en boucle fermée n'est pas un critère suffisant pour la détermination du d -tuple pôle p_0 . Il faudra s'assurer que toutes les autres contraintes de synthèse sont satisfaites (i.e. marges de robustesse, amplification du bruit...). En pratique, le d -tuple pôle p_0 sera déterminé de manière à minimiser le temps de rejet de la perturbation de commande P_u tout en assurant les contraintes de synthèse (i.e. marges de robustesse, amplification du bruit...).

2.5.2 Choix des pôles du polynôme de régulation $D(p)$ par placement dit robuste

La forme la plus simple pour le polynôme de régulation $D(p)$ est donnée par $D(p) = (p + p_0)^d$ mais quelques fois avec ce choix il est n'est pas possible d'obtenir les marges de robustesse (stabilité) désirées quel que soit le d -tuple pôle p_0 choisi. Afin d'obtenir les marges de robustesse désirées, il peut être nécessaire de choisir les pôles de l'équation caractéristique de manière plus appropriée. Nous décrivons dans cette section la méthode de placement robuste proposée par P. De Larminat (Cf. Références). Cette méthode est dite placement robuste par LTR (Loop Transfer Recovery).

Avec cette méthode, si on souhaite que le correcteur possède une action intégrale, plutôt que de prendre en compte cette action dans $S(p)$, on augmentera le polynôme $A(p)$ d'un degré : $A'(p) = pA(p)$. La synthèse du correcteur sera ainsi effectuée sans la contrainte d'un pôle en $p=0$. Lorsque les paramètres des polynômes $R(p)$ et $S(p)$ seront déterminés, on réintègrera le pôle en 0 dans $S(p)$: $S'(p) = pS(p)$ pour obtenir le correcteur final.

La méthode proposée consiste à factoriser $D(p)$ en $D(p) = F(p) \cdot C(p)$ (attention ce $F(p)$ n'a rien à voir avoir le filtre de la consigne utilisé à différents endroits et ce $C(p)$ n'a rien à voir avec le correcteur) avec :

- $F(p)$ « proche » de $A(p)$ et $|F(j\omega)| \geq |A'(j\omega)|$
- $C(p)$ « proche » de $B(p)$

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

On règle la proximité de $F(p)$ avec $A(p)$ par l'intermédiaire d'un « horizon dominant » T_0 . Pour cela on choisit les racines de $F(p)$ identiques à celles de $A(p)$ avec les règles suivantes dans le plan p (notons que les racines de $A(p)$ sont les pôles du système) :

- les pôles instables sont remplacés par leurs symétriques par rapport à l'axe des imaginaires,
- les pôles stables situés à droite de la droite verticale passant par $-\frac{1}{T_0}$ sont ramenés sur cette droite (les pôles les plus lents sont « accélérés »),
- les pôles rapides situés à gauche de $-\frac{1}{T_0}$ sont laissés à leurs places.

La figure K.3 décrit graphiquement les règles énoncées ci-dessus de placement robuste des pôles dominants (pôles lents).

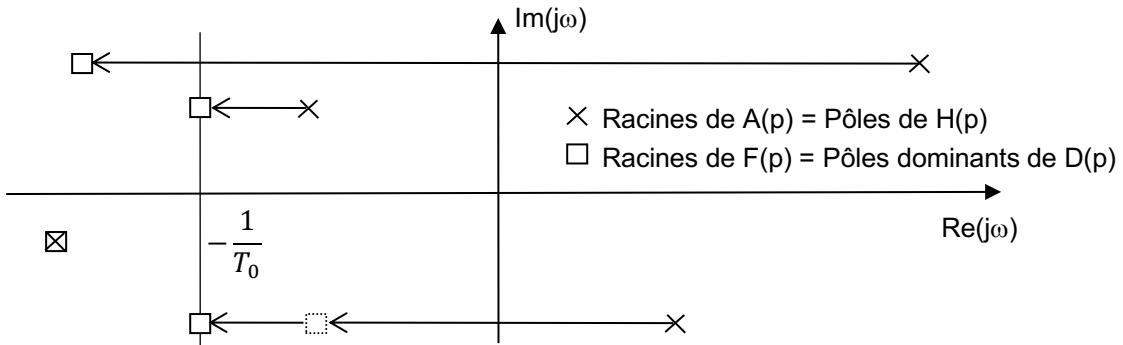


Figure K.3 – Placement robuste des pôles dominants (pôles lents).

Lors de la construction de $F(p)$, on n'oubliera pas de prendre en compte le pôle en zéro de $A'(p)$ qui aura été ajouté à $A(p)$ si tel était le cas. Ce pôle devenant, suivant la procédure ci-dessus, une racine en $-\frac{1}{T_0}$ de $F(p)$.

On utilise ensuite un « horizon auxiliaire » T_c pour régler la proximité de $C(p)$ par rapport à $B(p)$. Pour cela on choisit les racines de $C(p)$ identiques à celles de $B(p)$ avec les règles suivantes dans le plan p (notons que les racines de $B(p)$ sont les zéros du système) :

- Les zéros à partie réelle positive sont remplacés par leurs symétriques par rapport à l'axe des imaginaires.
- Les zéros à gauche de la droite $-\frac{1}{T_c}$ sont remplacés par des pôles dont la partie imaginaire reste inchangée mais dont la partie réelle vaut $-\frac{1}{T_c}$.
- Les zéros plus lents restent inchangés.

La figure K.4 décrit graphiquement les règles énoncées ci-dessus de placement robuste des pôles accessoires.

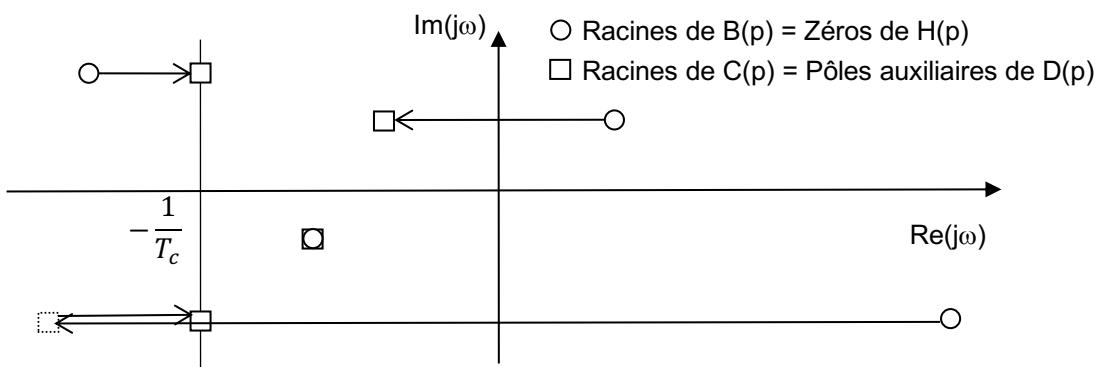


Figure K.4 – Placement robuste des pôles accessoires.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

Le degré de $D(p)$ est généralement supérieur à la somme des degrés de $A(p)$ et de $B(p)$. Dans ce cas, on complète les pôles nécessaires à $D(p)$ par autant de pôles que nécessaires en $-\frac{1}{T_c}$.

Le choix de T_c peut être fait par rapport à T_0 , on définit alors un « facteur de restauration » k_c , tel que :

$$T_0 = k_c T_c$$

En pratique, $k_c = 5$ est un bon compromis entre sensibilité aux bruits en hautes fréquences et obtention de marges satisfaisantes, l'horizon T_0 permettant de fixer le temps de réponse désiré.

Explication qualitative de la méthode de placement robuste des pôles de la boucle fermée :

La méthode consiste d'une part à stabiliser et à « accélérer » les pôles lents (imposition d'une partie réelle inférieure à $-\frac{1}{T_0}$) du système sans modifier les pôles stables déjà suffisamment rapides et d'autre part à stabiliser et à « ralentir » les zéros du système (imposition d'une partie réelle supérieure à $-\frac{1}{T_c}$ mais inférieure à 0).

Les pôles de la boucle fermée sont donc ainsi placés dans une bande comprise entre $-\frac{1}{T_c}$ et $-\frac{1}{T_0}$. C'est de là que la méthode tire sa robustesse car on ne déplace que les pôles et zéros nécessaires. Dans le cas où $T_0 = T_c$, donc $k_c = 1$, on retrouve la méthode de la section 2.5.1.

2.6 Choix de $T(p)$

Le polynôme ou fonction de transfert de filtrage $T(p)$ est utilisée afin d'imposer le comportement de la sortie du système vis-à-vis de l'entrée de consigne. En effet, nous avons :

$$Y(p) = \frac{B(p)T(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)} Ref(p) = \frac{B(p)T(p)}{D(p)} Ref(p)$$

2.6.1 Erreur statique nulle

Afin d'obtenir une erreur statique nulle entre l'entrée de consigne $Ref(p)$ et la sortie du système $Y(p)$, il est nécessaire de respecter, d'après le théorème de la valeur finale, la condition suivante :

$$1 = \frac{B(0)T(0)}{A(0)S(0) + B(0)R(0)} = \frac{B(0)T(0)}{D(0)} \quad \Rightarrow \quad T(0) = \frac{D(0)}{B(0)} = \frac{A(0)S(0) + B(0)R(0)}{B(0)}$$

Si le correcteur possède un intégrateur, i.e. $S(0) = 0$, alors nous devrons avoir : $T(0) = R(0)$.

2.6.2 Calcul de $T(p)$

Le choix le plus simple pour $T(p)$ consiste à prendre une constante t_0 donnée par :

$$T(0) = t_0 = R(0)$$

Ce choix permet une implantation aisée tout en assurant une erreur statique nulle. La fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée de consigne et la sortie du système sera alors donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Ref(p)} = \frac{t_0 B(p)}{D(p)}$$

$T(p)$ peut également être utilisé de manière à imposer un modèle de référence (de comportement) désiré au système bouclé à condition que le processus commandé ne possède pas de zéros instables (i.e. toutes les racines de $B(p)$ sont à parties réelles négatives). Pour cela, on commence par définir un modèle désiré $H_m(p)$ pour le système en boucle fermée sous la forme suivante :

$$H_m(p) = \frac{B_m(p)}{A_m(p)}$$

Si maintenant, on prend pour $T(p)$:

$$T(p) = \frac{D(p)}{B(p)} H_m(p) = \frac{D(p)B_m(p)}{B(p)A_m(p)}$$

alors la fonction de transfert en boucle fermée du système devient :

$$H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Ref(p)} = \frac{T(p)B(p)}{D(p)} = H_m(p)$$

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

Attention, comme indiqué plus haut, ceci n'est possible que si le processus commandé ne possède pas de zéros instables car le polynôme $B(p)$ apparaît au dénominateur de la fonction de transfert $T(p)$. Par conséquent, si $B(p)$ possède des racines à parties réelles positives alors la fonction de transfert $T(p)$ sera instable. Dans ce cas, cette méthode n'est pas utilisable telle quel.

Dans le cas, où le polynôme $B(p)$ possède des zéros instables, on procède tout d'abord à une factorisation de ce polynôme sous la forme suivante :

$$B(p) = B^+(p) \cdot B^-(p)$$

où $B^+(p)$ contient les zéros stables de $B(p)$ et $B^-(p)$ contient les zéros instables.

La fonction de transfert stable $T(p)$ sera maintenant donnée par :

$$T(p) = \frac{D(p)}{B^+(p)} H_m(p) = \frac{D(p)B_m(p)}{B^+(p)A_m(p)}$$

et la fonction de transfert en boucle fermée du système devient :

$$H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Ref(p)} = \frac{T(p)B(p)}{D(p)} = B^-(p)H_m(p)$$

2.7 Application de la méthode de placement des pôles de la boucle fermée en temps continu

Système à asservir et cahier des charges.

Comme exemple d'application de la méthode, le système à asservir est donné par :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{0.5}{p^2 + 1.8p + 1}$$

Avec le cahier des charges suivant :

Pour les contraintes sur le système asservi, nous prendrons :

- Stabilité au sens EB-SB du système asservi.
- Marges de Module et de Phase désirées : $M_M \geq 0.5$ et $\varphi_M \geq 45^\circ$.
- Gain du correcteur en hautes fréquences inférieur ou égal à $N_{max} = 20$.
- Erreur statique nulle entre la consigne et la mesure de la sortie pour une consigne constante et une perturbation de commande constante.
- Dépassement de la sortie inférieur à 10%.

Pour les objectifs de commande dans l'ordre de priorité décroissante :

1. Satisfaire les contraintes énoncées ci-dessus.
2. Minimiser l'impact d'une perturbation de commande P_u constante sur le système.
3. Minimiser le temps de réponse de la sortie vis-à-vis d'un échelon de référence.

Étape 1 : Choix de degrés des polynômes R, S et T

On va synthétiser une commande d'ordre minimal (la moins complexe possible) qui satisfait les contraintes de synthèse.

La contrainte d'erreur statique nulle en présence de perturbations impose un effet intégrateur du correcteur. Le polynôme $S(p)$ doit donc contenir une racine en $p = 0$.

Dans le cas d'un correcteur propre à effet intégral l'ordre minimal des degrés des polynômes $R(p)$ et $S(p)$ sont (voir section 2.3.3) :

$$\deg(R(p)) = \deg(S(p)) = \deg(A(p)) = n = 2$$

Les polynômes $R(p)$ et $S(p)$ prendront donc la forme suivante avec $S(0) = 0$ (intégrateur) :

$$R(p) = r_0 p^2 + r_1 p + r_2$$

$$S(p) = p \cdot (p + s_1)$$

Et en tenant compte de la racine en $p = 0$ de $S(p)$, le polynôme $T(p)$ sera pris sous sa forme la plus simple :

$$T(0) = t_0 = R(0) = r_2$$

Étape 2 : Degré du polynôme de régulation D(p)

Afin d'obtenir une solution unique, le degré d du polynôme de régulation D(p) doit satisfaire :

$$d = n + \deg(S(p)) = 2 + 2 = 4$$

D'où l'expression générale de D(p) :

$$D(p) = p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4$$

Étape 3 : Construction du système linéaire à résoudre

Pour obtenir les coefficients des polynômes R(p) et S(p) qui permettront d'imposer à la boucle fermée le polynôme de régulation choisi, il faut exprimer le lien entre les coefficients de R(p) et S(p) et ceux de D(p).

Nous avons :

$$\begin{aligned} D(p) &= A(p)S(p) + B(p)R(p) \\ &= (p^2 + 1.8p + 1) \cdot p \cdot (p + s_1) + 0.5(r_0 p^2 + r_1 p + r_2) \\ &= p^4 + (1.8 + s_1)p^3 + (1 + 1.8s_1 + 0.5r_0)p^2 + (s_1 + 0.5r_1)p + (0.5r_2) \end{aligned}$$

D'où le système linéaire à résoudre faisant apparaître la matrice de Sylvester :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.8 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons la solution simple qui consiste à imposer un d-uple pôle au système en boucle fermée, il vient alors pour D(p) :

$$D(p) = (p + p_0)^4 = p^4 + 4p_0 p^3 + 6p_0^2 p^2 + 4p_0^3 p + p_0^4$$

Le système à résoudre s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.8 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4p_0 \\ 6p_0^2 \\ 4p_0^3 \\ p_0^4 \end{bmatrix}$$

Le choix du pôle p_0 permettra de déterminer de manière unique les coefficients des polynômes R(p) et S(p).

Étape 4 : Détermination des coefficients des polynômes R(p), S(p) et T(p)

Le pôle p_0 a été choisi à $p_0 = 1,88$ rad/s de sorte que le gain en hautes fréquences du correcteur, donné par r_0 , prenne la valeur maximale autorisée $N_{MAX} = 20$.

Les polynômes R(p), S(p) et T(p) obtenus sont :

$$R(p) = 20p^2 + 42p + 25$$

$$S(p) = p \cdot (p + 5.7)$$

$$T(p) = 25$$

Avec les marges de stabilité suivantes : $M_M = 0.82$, $\varphi_M = 65.1^\circ$.

La figure K.5 donne les résultats temporels obtenus avec cette commande vis-à-vis des entrées de consigne et de la perturbation de commande.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

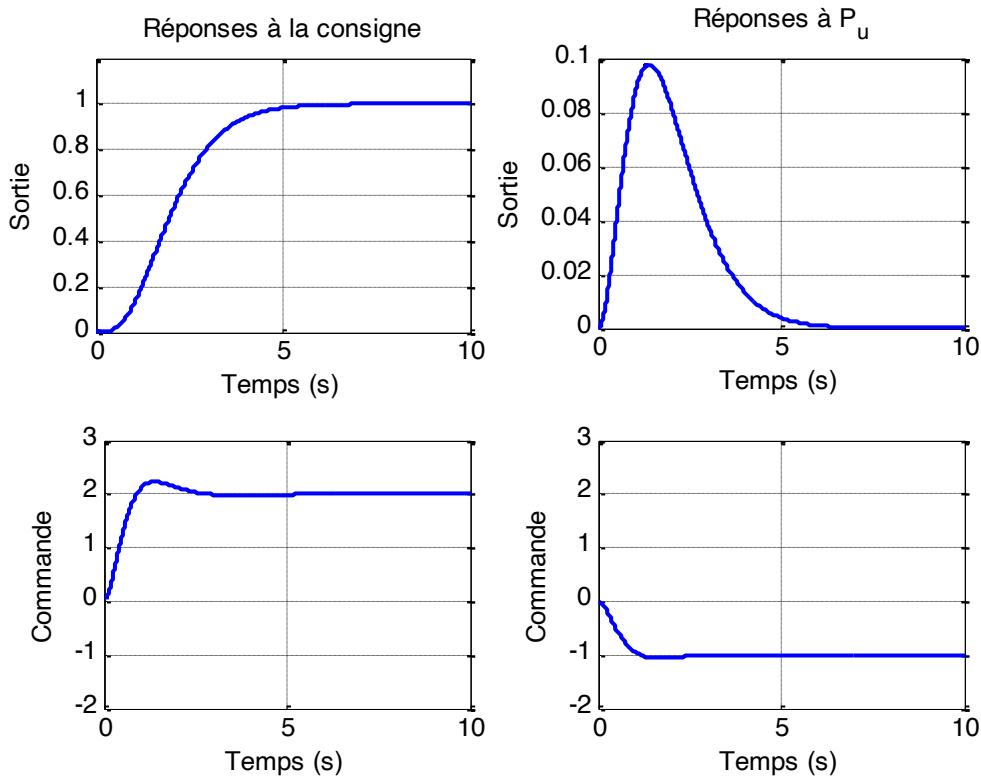


Figure K.5 – Réponses obtenues avec une synthèse de la commande par placement des pôles de la boucle fermée en un pôle unique p_0 d'ordre 4.

[Courbes de gauche] Sortie et Commande pour un échelon de consigne unitaire,
 [Courbes de droite] Sortie et Commande pour un échelon de perturbation de commande P_u unitaire.

3. Synthèse d'une commande à temps discret sous forme RST par placements des pôles de la boucle fermée

La méthode de placement de pôles de la boucle fermée à temps discret est très proche de celle à temps continu. Les principes et les étapes de détermination de la commande RST sont identiques dans les deux cas. Pour autant, pour faciliter la lecture, on reprend dans cette section la méthode appliquée au cas du temps discret avec ses spécificités.

La figure K.6 représente sous forme de schéma bloc un système bouclé à temps discret ayant une structure de commande RST où $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ sont des polynômes de la variable z ($T(z)$ peut également être une fonction de transfert en z), et $H(z) = B(z)/A(z)$ représente la fonction de transfert à temps discret du procédé.

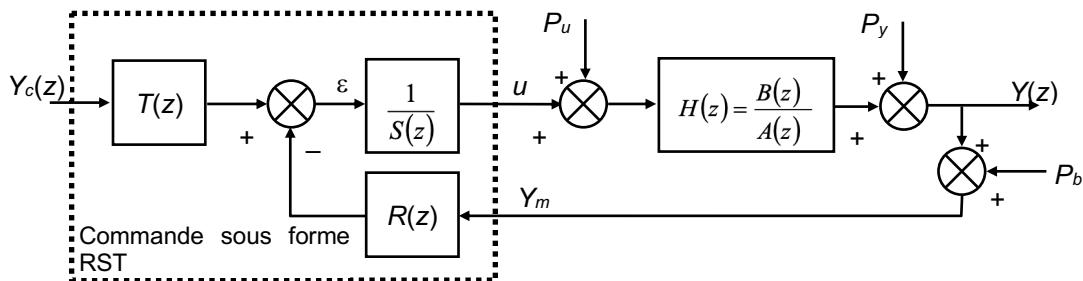


Figure K.6 – Système bouclé à temps discret à structure de commande RST.

Avec la structure RST décrite par la figure K.3.1, nous avons les relations suivantes :

$$Y(z) = \frac{1}{AS + BR} [BT \cdot Y_c + BS \cdot P_u + AS \cdot P_y - BR \cdot P_b] \quad (\text{K.4})$$

$$U(z) = \frac{1}{S} [T.Y_c - R.Y_m] = \frac{1}{S} [T.Y_c - R.(Y + P_b)]$$

La relation (K.4) montre que les pôles de la boucle fermée sont les racines du polynôme :

$$D(z) = A(z)S(z) + B(z)R(z)$$

La synthèse d'un correcteur par placement (par choix) des pôles de la fonction de transfert de la boucle fermée consiste à choisir les pôles de la boucle fermée du système (les racines de D) puis à en déduire les paramètres du correcteur, ici les coefficients des polynômes R et S nécessaires pour obtenir les racines désirées pour D . Le polynôme T est ensuite déterminé afin d'obtenir le comportement souhaité entre la consigne et la sortie du système.

Le choix des pôles de la boucle fermée n'est pas unique. Une fois les pôles choisis qui respectent les contraintes du cahier des charges (marges de robustesse, amplification maximum du bruit de mesure en hautes fréquences...), le calcul des paramètres des polynômes R et S peut ensuite être effectué de manière unique et automatique.

Dans la suite nous considérons une fonction de transfert à temps discret du procédé à contrôler mise sous la forme irréductible suivante :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

avec $A(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$: polynôme de la variable **z** de degré **n** ;

et $B(z) = b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m$: polynôme de la variable z de degré m :

avec: $n \geq m$ (système physique strictement causal sans retard)

Les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ seront notés :

$R(z) = r_0z^r + r_1z^{r-1} + \dots + r_n$: polynôme de la variable z de degré r :

$$\zeta(z) = z^s + s_1 z^{s-1} + \cdots + s : \quad \text{polynôme de la variable } z \text{ de degré } s :$$

avec $s \geq r$ (correcteur causal)

3.1 Degré du polynôme de régulation

Le polynôme de régulation $D(z)$, nommé aussi *polynôme caractéristique* ou *polynôme de régulation*, correspond au dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée. Dans le cas de la structure RST, il est donné par l'équation dite de *Bezout* (équation diophantine) suivante :

$$D(z) = A(z)S(z) + B(z)R(z)$$

De manière générale, nous avons les relations suivantes :

- $\deg(S(z)) \geq \deg(R(z))$ pour des raisons de causalité ;
- $d = \deg(D(z)) \leq \max[\deg(A(z)) + \deg(S(z)), \deg(B(z)) + \deg(R(z))] = \max[n+s, m+r]$ d'après l'équation de Bezout.

En pratique, sauf cas particulier, on choisira :

$$d = \deg(D(z)) \leq \max[n+s, m+r]$$

3.2 Rejet asymptotique des perturbations P_u et P_y constantes

Rappelons l'équation du système en boucle fermée en fonction des entrées :

$$Y(z) = \frac{BT}{AS+BR} Y_c(z) + \frac{BS}{AS+BR} P_u(z) + \frac{AS}{AS+BR} P_y(z) - \frac{BR}{AS+BR} P_b(z)$$

Le polynôme $S(z)$ est au numérateur des fonctions de transfert entre les entrées de perturbation (P_u et P_y) et la sortie. Alors, afin de rejeter asymptotiquement les entrées de perturbations constantes, d'après le théorème de la valeur finale, il est nécessaire que le polynôme $S(z)$ comporte une racine égale à 1. Ainsi, avec $S(z)$ de la forme :

$$S(z) = (z - 1)S_p(z)$$

les perturbations constantes seront asymptotiquement rejetées car $S(1) = 0$.

3.3 Choix des degrés des polynômes de correction $R(z)$ et $S(z)$

3.3.1 Solution minimale pour $R(z)$ et $S(z)$

On parle de solution minimale lorsque les degrés des polynômes $R(z)$ et $S(z)$ sont les plus petits possibles. L'identité de Bezout possède une solution unique minimale pour :

$$\deg(S(z)) = \deg(R(z)) = v - 1 \text{ (régulateur propre)}$$

$$\text{avec } v = \max[\deg(A(z)), \deg(B(z))] = \max[n, m]$$

$$\text{Mais } d = \deg(D(z)) \leq \max[n+s, m+r], \text{ il vient donc : } d \leq 2v - 1$$

On choisira donc : $d = 2v - 1$.

3.3.2 Régulateur strictement propre avec solution minimale pour $R(z)$

On recherche maintenant une solution telle que le correcteur $R(z)/S(z)$ soit strictement propre, i.e. $\deg(S(z)) > \deg(R(z))$, avec un degré minimum pour le polynôme $R(z)$.

Une solution unique de l'identité de Bezout sera obtenue avec : $\deg(R(z)) = v - 1$.

En fonction du degré s du polynôme $S(z)$ choisi, le degré d du polynôme de régulation $D(z)$ sera donné par :

$$d = v + \deg(S(z)) = v + s$$

Il est souvent recommandé de choisir un correcteur strictement propre afin d'atténuer les bruits en hautes fréquences grâce à l'effet passe-bas d'une fonction de transfert strictement propre. On a en effet une atténuation de $k \times (-20\text{db/décade})$, avec $k = \deg(S(z)) - \deg(R(z))$.

3.3.3 Régulateur avec effet intégral

On recherche maintenant une solution telle que le correcteur $R(z)/S(z)$ possède un effet intégral, i.e. $S(1) = 0$, afin de rejeter asymptotiquement les perturbations constantes.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

Puisqu'on impose une racine au polynôme $\mathbf{S}(z)$, on perd un degré de liberté pour l'imposition du polynôme de régulation $\mathbf{D}(z)$. Par conséquent, l'identité de Bezout possède maintenant une solution unique si les degrés des polynômes $\mathbf{R}(z)$ et $\mathbf{S}(z)$ satisfont :

$$\text{Régulateur propre :} \quad \deg(S(z)) = \deg(R(z)) = v$$

$$\text{Régulateur strictement propre :} \quad \deg(R(z)) = v \text{ et } \deg(S(z)) > v$$

et dans les deux cas : $d = v + \deg(S(z)) = v + s$.

3.4 Détermination des coefficients des polynômes $\mathbf{R}(z)$ et $\mathbf{S}(z)$

Si les degrés des polynômes $\mathbf{R}(z)$ et $\mathbf{S}(z)$ sont choisis comme indiqué à la section 3.3, alors les coefficients de ces polynômes peuvent être déterminés de manière unique à partir de la connaissance des autres polynômes de l'identité de Bezout par la résolution d'un système de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues. Pour cela, ce système d'équations peut être mis sous forme matricielle :

$$M \cdot [x] = [d_i] \quad \Rightarrow \quad [x] = M^{-1} \cdot [d_i]$$

avec M la matrice, dite de Sylvester, composée avec les coefficients a_i et b_i des polynômes $\mathbf{A}(z)$ et $\mathbf{B}(z)$, $[x]$ le vecteur des coefficients inconnus $[s_i \ r_i]$, et $[d_i]$ le vecteur des coefficients de $\mathbf{D}(z)$ qui fixe les pôles de la boucle fermée. La section 3.6 expose deux méthodes de choix des pôles de $\mathbf{D}(z)$ donc des coefficients d_i .

Lorsque le degré du polynôme $\mathbf{D}(z)$ est élevé, typiquement supérieur à 3, les pôles de ce polynôme sont très sensibles aux arrondis des coefficients d_i . Il faudra donc être particulièrement attentif à conserver le maximum de chiffres significatifs pour les coefficients d_i .

3.5 Choix de $T(z)$

Le polynôme ou fonction de transfert de filtrage $T(z)$ peut être utilisé afin d'imposer le comportement de la sortie du système vis-à-vis de l'entrée de consigne. En effet, nous avons :

$$Y(z) = \frac{B(z)T(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} Y_c(z) = \frac{B(z)T(z)}{D(z)} Y_c(z)$$

3.5.1 Erreur statique nulle

Afin d'obtenir une erreur statique nulle entre une entrée de consigne $Y_c(z)$ constante et la sortie du système $Y(z)$, il est nécessaire de respecter, d'après le théorème de la valeur finale, la condition suivante :

$$\frac{Y(z=1)}{Y_c(z=1)} = 1 = \frac{B(1)T(1)}{A(1)S(1) + B(1)R(1)} = \frac{B(1)T(1)}{D(1)}$$

Par conséquent, $T(z)$ devra respecter : $T(1) = \frac{D(1)}{B(1)}$

Si le correcteur possède un intégrateur, i.e. $S(1) = 0$, alors nous aurons aussi : $T(1) = R(1)$

3.5.2 Choix de $T(z)$

3.5.2.1 $T(z)$ pris égal à une constante

Le choix le plus simple pour $T(z)$ consiste à prendre une constante t_0 donnée par :

$$T(z) = t_0 = \frac{D(1)}{B(1)}$$

Ce choix permet une implantation aisée tout en assurant une erreur statique nulle. La fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée de consigne et la sortie du système sera alors donnée par :

$$H_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = t_0 = \frac{t_0 B(z)}{D(z)}$$

3.5.2.2 $T(z)$ pour obtenir un modèle de référence en boucle fermée

$T(z)$ peut également être utilisé de manière à imposer le comportement désiré au système bouclé à condition que le processus commandé ne possède pas de zéros instables (i.e. toutes les racines de $B(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité). Pour cela, on commence par définir un modèle désiré $H_m(z)$ pour le système en boucle fermée donné par :

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Si maintenant, on prend pour $T(z)$:

$$T(z) = \frac{D(z)}{B(z)} H_m(z) = \frac{D(z)B_m(z)}{B(z)A_m(z)}$$

alors la fonction de transfert en boucle fermée du système devient :

$$H_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{T(z)B(z)}{D(z)} = H_m(z)$$

Attention, comme indiqué plus haut, ceci n'est possible que si le processus commandé ne possède pas de zéros instables car le polynôme $B(z)$ apparaît à dénominateur de la fonction de transfert $T(z)$. Par conséquent, si $B(z)$ possède des racines à l'extérieur du cercle unité alors la fonction de transfert $T(z)$ sera instable. Dans ce cas, cette méthode n'est pas utilisable telle quel.

Dans le cas, où le polynôme $B(z)$ possède des zéros instables, on procède tout d'abord à une factorisation de ce polynôme sous la forme suivante :

$$B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z)$$

où $B^+(z)$ contient les zéros stables de $B(z)$ et $B^-(z)$ contient les zéros instables.

La fonction de transfert stable $T(z)$ sera maintenant donnée par :

$$T(z) = \frac{D(z)}{B^+(z)} H_m(z) = \frac{D(z)B_m(z)}{B^+(z)A_m(z)}$$

et la fonction de transfert en boucle fermée du système devient :

$$H_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{T(z)B(z)}{D(z)} = B^-(z)H_m(z)$$

3.5.2.3 $T(z)$ pour obtenir une réponse en temps fini

Afin d'obtenir une fonction de transfert en boucle fermée prenant la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) et donc un temps de réponse fini en boucle fermée, on pourra choisir :

$$T(z) = \frac{D(z)}{B(1)}$$

D'où l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{BF}(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{T(z)B(z)}{D(z)} = \frac{B(z)}{B(1)}$$

Ce choix amène le plus souvent à des valeurs de la commande du processus très importantes qui ne sont pas compatibles avec les actionneurs réels.

3.6 Choix du polynôme de régulation $D(z)$

Le choix de $D(z)$ permet d'imposer les pôles du système en boucle fermée. Ainsi les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ seront choisis de manière à imposer le polynôme de régulation $D(z)$ désiré avec, le plus souvent, la contrainte $S(1) = 0$ afin de rejeter les perturbations constantes.

De manière générale, le polynôme de régulation prend la forme suivante :

$$D(z) = z^d + d_1 z^{d-1} + \cdots + d_d$$

où d est le degré du polynôme $D(z)$.

Le choix des coefficients d_i impose les racines de $D(z)$ donc les pôles du système en boucle fermée.

3.6.1 Polynôme de régulation $D(z)$ ayant d pôles multiples

La forme la plus simple pour le polynôme de régulation $D(z)$ est donnée par :

$$D(z) = (z - z_0)^d$$

Cette forme impose un d -tuple pôle z_0 en boucle fermée. Les coefficients d_i du polynôme $D(z)$ sont ensuite déduits de cette expression.

Le pôle z_0 peut être choisi de manière à imposer un temps de réponse à 95% désiré pour le rejet des perturbations à l'aide de la relation suivante :

$$z_0 = \exp\left(-\frac{aT_e}{(t_{rep})_{95\%}}\right)$$

où : T_e est la période d'échantillonnage ;

$(t_{rep})_{95\%}$ est le temps de réponse à 95% désiré pour le rejet des perturbations ;

et le paramètre a est donné par le tableau ci-dessous en fonction du degré d du polynôme $D(z)$.

degré d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5	12	13,2	14,6	16

Rappelons que le degré d dépend des degrés choisis pour $R(z)$ et $S(z)$.

Attention : Le choix du temps de réponse en boucle fermée n'est pas un critère suffisant pour la détermination du pôle z_0 . Il faudra s'assurer que toutes les autres contraintes de synthèse sont satisfaites (i.e. marges de robustesse, amplification du bruit...).

3.6.2 Choix des pôles du polynôme de régulation $D(z)$ par placement dit robuste

La forme la plus simple pour le polynôme de régulation $P(z)$ est donnée par $D(z) = (z - z_0)^d$ mais il arrive qu'avec ce choix il n'est pas possible d'obtenir les marges de robustesse (stabilité) désirées quel que soit le pôle z_0 choisi. Le seul degré de liberté pour le réglage (i.e. z_0) n'est pas suffisant. Afin d'obtenir ces marges, il faut choisir les pôles de l'équation caractéristique de manière plus appropriée.

La méthode de placement robuste LTR (*Loop Transfer Recovery*) proposée par (P. De Larminat, Cf. Références) peut être utilisée pour un choix plus approprié de $D(z)$. Cette méthode a été présentée à la section 2.5.2 pour les systèmes à temps continu. La méthode est ici transposée au cas à temps discret.

Si on souhaite que le régulateur ait une action intégrale, plutôt que de prendre en compte cette action dans $S(z)$, on augmentera le polynôme $A(z)$ d'un degré ($A'(z) = (z-1).A(z)$). La synthèse du correcteur sera ainsi effectuée sans la contrainte d'un pôle en 1. Lorsque les paramètres des polynômes $R(z)$ et $S(z)$ seront déterminés, on réintégrera le pôle en 1 dans $S(z)$ ($S'(z) = (z-1).S(z)$) pour obtenir le correcteur final.

Nous transformons tout d'abord les pôles et zéros à temps discret de $H(z)$ en leur équivalent à temps continu par : $p_0 = \ln(z_0)/T_e$

Nous appliquons ensuite la même procédure qu'en temps continu (cf. 2.5.2.) pour obtenir les racines de $D(p)$.

Les racines de $D(p)$ sont ensuite transformées en leur équivalent à temps discret par :

$$z_0 = \exp(p_0 T_e)$$

Nous obtenons ainsi les racines de $D(z)$.

3.7 Application des méthodes de commande par placement de pôles à temps discret

3.7.1. Exemple 1

Considérons le système à temps continu suivant :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p) = \frac{3}{p \left(1 + \frac{0.9}{50}p + \left(\frac{p}{50} \right)^2 \right)}$$

Avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,01$ s et un bloqueur d'ordre zéro, la fonction de transfert à temps discret du système est donnée par :

$$Z[BOZ(p) \cdot H(p)] = H_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.001108z^2 + 0.003924z + 0.0008839}{z^3 - 2.44z^2 - 2.078z - 0.6376}$$

Le diagramme de Bode de $H_d(z)$ est donné par la figure K.7.

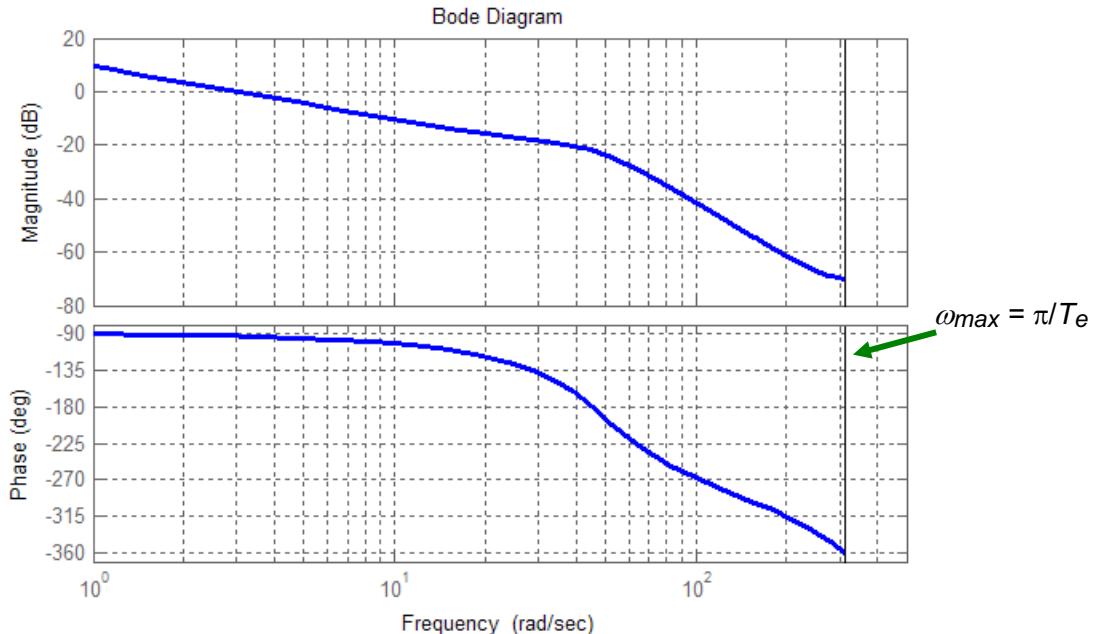


Figure K.7 – Diagramme de Bode de $H_d(z)$.

Nous souhaitons rejeter les perturbations constantes de commande et de sortie. Le polynôme $S(z)$ doit donc comporter une racine en $z = 1$ (effet intégrateur).

Nous souhaitons un correcteur strictement propre afin d'atténuer les bruits en hautes fréquences, le degré de $S(z)$ sera donc choisi égal à celui de $R(z)$ plus un.

En suivant la procédure indiquée à la section 3.3.3, il vient :

$$r = \deg(R(z)) = \max[\deg(A(z)), \deg(B(z))] = \max[3, 2] = 3$$

$$s = \deg(S(z)) = r + 1 = 4 \text{ (régulateur strictement propre)}$$

$$d = \deg(D(z)) = \max[(\deg(A(z)) + s), (\deg(B(z)) + r)] = \max[3 + 4, 2 + 3] = 7$$

Choisissons par exemple un temps de rejet des perturbations en boucle fermée ($t_{rep_BF}^{95\%} = 1$ s). Ce qui est relativement lent par rapport au système considéré puisqu'outre le pôle intégrateur, le système possède deux pôles complexes conjugués de module 50 rad/s.

Pour des raisons de simplicité on choisira un polynôme caractéristique $D(z)$ ayant un pôle multiple, ici de multiplicité 7. Le degré de $D(z)$ étant $d = 7$, il vient, d'après le tableau de la section 3.6.1, $a = 12$ d'où le calcul du pôle multiple de l'équation caractéristique :

$$z_0 = e^{p_0 T_e} = \exp\left(-\frac{12T_e}{(t_{rep})_{95\%}}\right) = 0.8869$$

Donc :

$$\begin{aligned} D(z) &= (z - 0.8869)^7 \\ &= z^7 - 6.2084z^6 + 16.5192z^5 - 24.4187z^4 + 21.6574z^3 - 11.5250z^2 + 3.4073z - 0.4317 \\ &= z^7 + d_1z^6 + d_2z^5 + d_3z^4 + d_4z^3 + d_5z^2 + d_6z + d_7 \end{aligned}$$

Attention : les 4 chiffres après la virgule utilisés ci-dessus ne sont pas suffisants pour décrire les coefficients du polynôme $D(z)$ afin que les racines de ce polynôme soient bien en 0.8869. Il faudrait en effet, dans le pire cas, vingt-huit (28) chiffres après la virgule pour obtenir les racines du polynôme avec une précision de 4 chiffres après la virgule et vingt et un (21) chiffres après la virgule pour obtenir les racines du polynôme avec une précision de 3 chiffres après la virgule (voir le [L. chapitre Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur](#)). Il faudra donc bien veiller en pratique à ce que le logiciel de calcul maintienne le plus de chiffres significatifs possible tout au long des différents calculs. Lorsque la précision du calculateur n'est plus suffisante, il faut alors faire appel à des algorithmes plus sophistiqués que la simple construction puis inversion de la matrice de Sylvester pour la détermination des coefficients des polynômes $R(z)$ et $S(z)$.

Les paramètres des polynômes $R(z)$ et $S(z)$ sont déterminés de manière à satisfaire :

$$D(z) = A(z)S(z) + B(z)R(z)$$

avec :

$$D(z) = z^7 + d_1z^6 + d_2z^5 + d_3z^4 + d_4z^3 + d_5z^2 + d_6z + d_7 \quad (\text{valeurs } d_i \text{ données par le choix des pôles})$$

$$A(z) = z^3 - 2.44z^2 - 2.078z - 0.6376$$

$$B(z) = 0.001108z^2 + 0.003924z + 0.0008839$$

$$R(z) = r_0z^3 + r_1z^2 + r_2z + r_3$$

$$S(z) = (z - 1)(z^3 + s_1z^2 + s_2z + s_3) = z^4 + (s_1 - 1)z^3 + (s_2 - s_1)z^2 + (s_3 - s_2)z + (-s_3)$$

Les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ obtenus sont :

$$R(z) = 0.82964841 z^3 - 3.5655045 z^2 + 4.6444965 z - 1.9086005$$

$$S(z) = z^4 - 3.7679872 z^3 + 5.2445756 z^2 - 3.1509996 z + 0.67441119$$

Avec ces valeurs, les racines de $D(z)$ sont :

$$\{ 0.9547 ; 0.9459 \pm 0.0502j ; 0.8793 \pm 0.0925j ; 0.8016 \pm 0.0452j \}$$

qui en raison des imprécisions numériques ne sont pas exactement celles désirées. Néanmoins, ces racines sont stables car leurs modules est inférieur à 1.

Nous pouvons déterminer $T(z)$ sous sa forme la plus simple qui est un simple gain donné par :

$$T(z) = t_0 = R(z=1) = 3.9910 \cdot 10^{-5}$$

Avec les valeurs de $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ déterminées, les réponses simulées à une entrée de consigne en échelon et une perturbation de commande échelon sont données par la figure K.8 où l'on obtient bien un temps de réponse à 95% de 1s pour le temps de réponse à l'échelon de consigne.

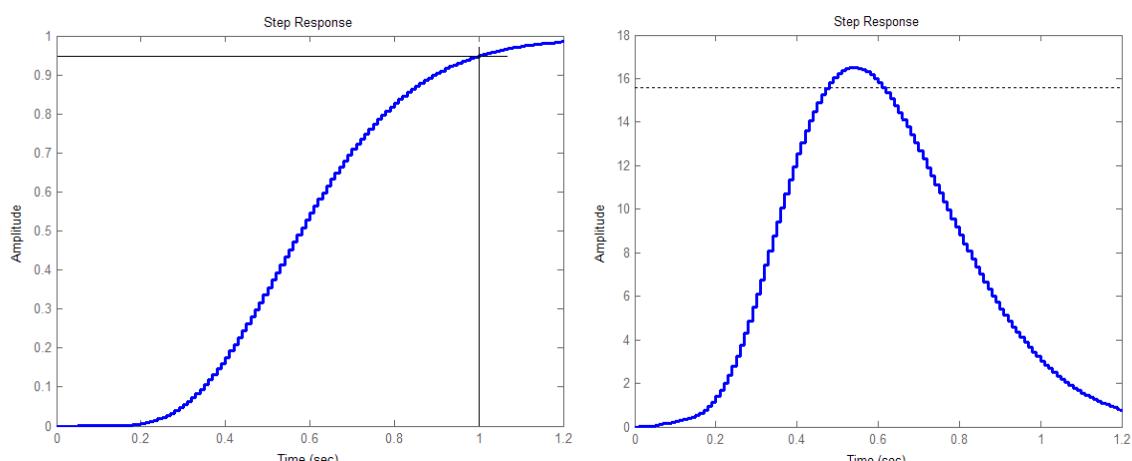


Figure K.8 – (gauche) Réponse simulée à une entrée de consigne en échelon et (droite) à une perturbation de commande en échelon.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

Bien que l'objectif d'un temps de réponse en boucle fermée de 1s soit atteint, les autres contraintes de synthèses, n'ont pas été explicitement prises en compte, et ne sont absolument pas satisfaites. En effet, nous obtenons les valeurs suivantes :

- Marge de phase = -1,2° à 9,04 rad/s
- Marge de gain = 0.2 dB à 5.6 rad/s
- Marge de module = 0.0206
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande = 42 dB

Avec ces marges, il est évident que l'implantation pratique de ce correcteur conduira à un fonctionnement sans aucun doute instable du système.

On peut conclure de cela que l'imposition de pôles multiples stables et un temps de réponse désirés en BF n'est absolument pas suffisant pour garantir l'obtention d'un correcteur efficace expérimentalement.

Par essais successifs, on trouve que le pôle multiple qui permet d'obtenir les meilleures marges de stabilité est $z_0 = 0.5379$, ce qui correspond à un pôle équivalent à temps continu de $p_0 = 62$ rad/s. Nous obtenons ainsi les paramètres suivants :

- Marge de phase = 40° à 24.3 rad/s
- Marge de gain = 7.9 dB à 72 rad/s
- Marge de module = 0.589
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande = 38 dB
- Temps de réponse à 95% = 0,21 s

Avec la méthode de placement robuste des pôles de $D(z)$ décrite à la section 3.6.2, avec l'horizon dominant $T_0 = 12$ s donnant un pôle dominant $z_0 = 0.8869$ et un facteur de restauration $k_c = 5$, les performances suivantes sont obtenues :

- Marge de phase = 44° à 13 rad/s
- Marge de gain = 9.6 dB à 37 rad/s
- Marge de module = 0.589
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande = 17 dB
- Temps de réponse à 95% = 0,5 s

Ces performances satisfaisantes sont obtenues très rapidement en suivant la méthode de placement robuste des pôles de la boucle fermée.

3.7.2 Exemple 2

Dans cet exemple, on reprend le système de l'exemple 1 avec le même cahier des charges mais en prenant en compte que le temps de réponse souhaité en boucle fermée est de 1 s. De ce fait, les dynamiques en hautes fréquences (50 rad/s) du processus seront négligées par le modèle de synthèse ce qui permettra en outre d'obtenir un correcteur de degré moins élevé plus simple à mettre en œuvre. Le correcteur sera donc déterminé à l'aide du modèle réduit mais il faudra vérifier qu'avec le modèle complet du processus les marges de robustesse sont satisfaites avec ce correcteur.

En négligeant les dynamiques en hautes fréquences du processus, le modèle réduit utilisé pour la synthèse du correcteur est donné par :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H_r(p) = \frac{3}{p}$$

Le domaine de validité de ce modèle est $\omega \leq \frac{50}{10} = 5$ rad/s où 50 rad/s est la valeur du pôle négligé. Voir à ce sujet la **section 4. Validité d'un modèle identifié du chapitre F. Méthodes élémentaires d'identification de modèles linéaires**.

La comparaison des diagrammes de Bode des modèles complet et réduit du processus $H(p)$ donnée par la figure K.9 montre que la valeur de pulsation maximale de validité du modèle réduit prise égale à 5 rad/s est une bonne approximation puisque jusqu'à cette pulsation les gains sont quasiment identiques et que l'écart de phase à 5 rad/s n'est que de 5° entre les deux modèles.

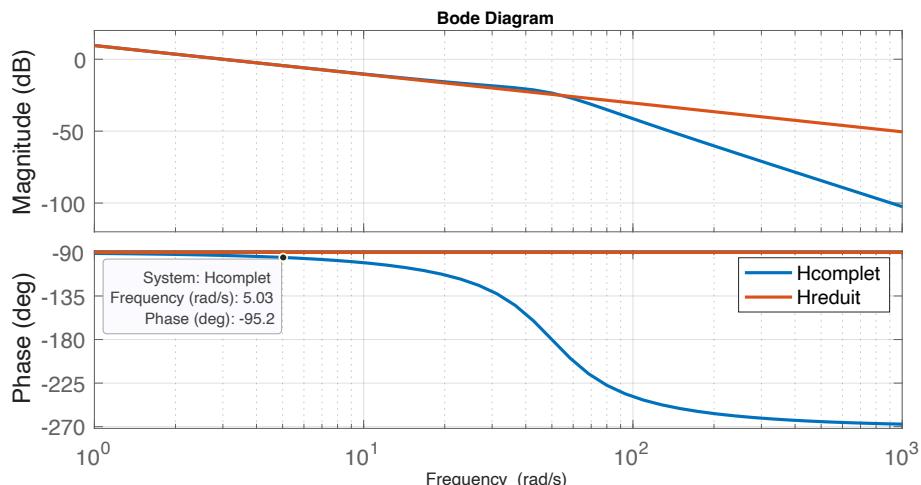


Figure K.9 – Comparaison des diagrammes de Bode des modèles complet et réduit du processus $H(p)$.

Avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,01$ s et un bloqueur d'ordre zéro, la fonction de transfert à temps discret du modèle réduit est donnée par :

$$Z[B0Z(p) \cdot H_r(p)] = H_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.03}{z - 1}$$

Le diagramme de Bode de $H_d(z)$ est donné par la figure K.10.

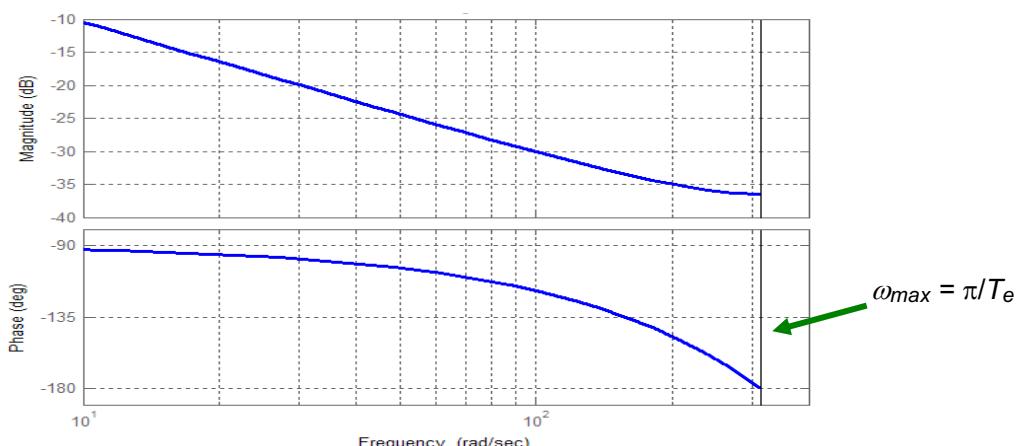


Figure K.10 – Diagramme de Bode de $H_d(z)$.

K. Synthèse de correcteurs par placement des pôles de la boucle fermée, structure RST

Nous souhaitons rejeter les perturbations constantes de commande et de sortie. Le polynôme $S(z)$ doit donc comporter une racine en $z = 1$ (effet intégrateur).

Nous souhaitons un correcteur strictement propre afin d'atténuer les bruits en hautes fréquences, le degré de $S(z)$ sera donc choisi égal à celui de $R(z)$ plus un.

En suivant la procédure indiquée à la section 3.3.3, il vient :

$$r = \deg(R(z)) = \max[\deg(A(z)), \deg(B(z))] = \max[1, 0] = 1$$

$$s = \deg(S(z)) = r + 1 = 2 \text{ (régulateur strictement propre)}$$

$$d = \deg(D(z)) = \max[(\deg(A(z)) + s), (\deg(B(z)) + r)] = \max[1 + 2, 0 + 1] = 3$$

Choisissons comme pour l'exemple 1 un temps de rejet des perturbations en boucle fermée $(t_{rep_BF})_{95\%} = 1$ s. A nouveau, pour des raisons de simplicité on choisira un polynôme caractéristique $D(z)$ ayant un pôle multiple. Le degré de $D(z)$ étant $d = 3$, il vient, d'après le tableau de la section 3.6.1, $a = 6,3$ d'où le calcul du pôle multiple de l'équation caractéristique :

$$z_0 = e^{p_0 T_e} = \exp\left(-\frac{6,3 T_e}{(t_{rep})_{95\%}}\right) = 0.9389$$

Donc : $D(z) = (z - z_0)^3 = (z - 0.9389)^3 = z^3 - 2.8168z^2 + 2.6448z - 0.8278$

Attention : le nombre de chiffres significatifs des coefficients de $D(z)$ doivent être bien supérieurs à 4.

Après la résolution, nous obtenons les polynômes suivants :

$$R(z) = 0.37278994 z - 0.36520285$$

$$S(z) = z^2 - 1.8168304 z + 0.81683042$$

$$T(z) = t_0 = R(1) = 0.0075870863$$

Les performances suivantes sont obtenues :

- Temps de réponse à 95% = 1 s
- Marge de phase = 51° à 6.11 rad/s (pulsation de coupure)
- Marge de gain = 23 dB à 40.5 rad/s
- Marge de module = 0.735
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande = 8 dB

On vérifie bien que les pulsations auxquelles sont déterminées les marges de phase et de gain sont bien supérieures au domaine de validité (5 rad/s) du modèle réduit utilisé pour la synthèse du correcteur.

Les performances ci-dessus sont obtenues avec le processus réduit. Avec le correcteur obtenu, l'évaluation des performances avec le processus complet donne :

- Temps de réponse à 95% = 1 s
- Marge de phase = $44,6^\circ$ à 6.15 rad/s (pulsation de coupure)
- Marge de gain = 13,4 dB à 21.5 rad/s
- Marge de module = 0.64
- Amplification maximum du bruit de mesure sur la commande = 8 dB

Pôles du système en BF : { 0.9624 ; $0.9367 \pm 0.0464j$; 0.7107 $\pm 0.3324j$ }

Ces résultats montrent qu'il est tout à fait justifié de négliger les pôles en hautes fréquences du système à commander. Cela a permis d'obtenir un correcteur extrêmement simple (i.e. un PI avec filtre hautes fréquences) qui satisfait parfaitement les attentes. On peut remarquer que les pôles conjugués de valeurs $0.7107 \pm 0.3324j$ sont très proches des pôles négligés du système

L. Implantation d'algorithmes de commande sur calculateur

L'implantation sur calculateur d'une fonction de transfert à temps discret (un filtre, un correcteur...) utilise la représentation de cette fonction sous forme d'équation aux différences basée sur la propriété de translation de la transformée en z .

Ainsi, la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

pourrait être implantée par l'équation aux différences suivante :

$$y(k) = \frac{1}{a_0} [b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n)]$$

La sortie $y(k)$ à l'instant $t = k \cdot T_e$ est déterminée par l'entrée $u(k)$ à l'instant k et les valeurs précédentes de la sortie et de l'entrée.

En pratique, il faudra donc prévoir :

- **(m+1) + n = (m+n+1)** cases de mémoire pour stocker les valeurs prises par y et u aux différents instants ;
- **(m+1 + n+1)** cases de mémoire pour les coefficients $(a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n)$.

Pour des raisons de précision numérique, cette forme n'est utilisée que pour des fonctions de transfert de degré 1 ou 2. Pour des degrés supérieurs ($n > 2$), la fonction de transfert doit tout d'abord être factorisée. Ceci permet en outre de tenir compte des éventuels intégrateurs contenus dans la fonction de transfert qui sont en limite de stabilité et dont l'implantation sur calculateur demande des précautions particulières.

Ce qui caractérise une fonction de transfert sont les valeurs prises par son gain statique, ses pôles et ses zéros (racines du dénominateur et du numérateur). Il est absolument primordial que l'implantation sur calculateur gère correctement la précision avec laquelle ces éléments caractéristiques sont implantés.

Concernant le gain statique, trois cas de figure peuvent se présenter :

- **$0 < G_s < \infty$** : Gain statique ayant une valeur non nulle finie, on fixera alors une précision désirée pour ce gain. Typiquement, une précision allant de 1% à 5% est souvent choisie.
- **$G_s = 0$** : la fonction de transfert possède un terme de dérivation, c'est-à-dire qu'elle possède au moins un zéro en $z = 1$. Il faudra veiller à ce que l'implantation assure bien la présence de ce ou de ces zéros en $z = 1$.
- **$G_s \rightarrow \infty$** : la fonction de transfert possède au moins un terme d'intégration, c'est-à-dire qu'elle possède au moins un pôle en $z = 1$. Il faudra veiller à ce que l'implantation assure bien la présence de ce ou de ces pôles en $z = 1$.

Concernant les pôles et les zéros, deux cas de figure peuvent se présenter :

- **Pôles et/ou zéros en $z = 1$** : la précision d'implantation de racines en $z = 1$ doit être absolue, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'implanter exactement ces racines.
- **Pôles et/ou zéros en $|z| < 1$** : ces racines peuvent être implantées avec une précision relative choisie par l'utilisateur. Il faut faire ici attention au fait que cette précision relative dépend de la période d'échantillonnage. Il est donc nécessaire de remonter à la racine équivalente à temps continu pour pouvoir appliquer une précision relative, de l'ordre de 5% à 10% en général, sur cette racine à temps continu pour ensuite déduire la précision relative correspondante à temps discret.

Les sections suivantes reviennent en détail sur ces problèmes délicats d'implantation et finalement une procédure systématique d'implantation sera exposée.

1. Sensibilité des racines des polynômes aux incertitudes d'implantation

Considérons un polynôme $P(z)$ ayant une racine de multiplicité n reliant l'entrée $U(z)$ à la sortie $Y(z)$:

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (z - z_0)^n \quad (\text{L.1})$$

Ce polynôme peut être décrit sous une forme développée :

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (\text{L.2})$$

Avec par exemple : $a_n = (-z_0)^n$.

Les calculateurs effectuent leurs calculs avec une précision finie. Lorsque l'équation (L.2) est implantée sur un calculateur sous la forme d'une équation aux différences, il faudra déterminer les coefficients a_i et les planter avec une précision suffisante (nombre suffisant de chiffres significatifs).

Prenons donc ces valeurs approchées pour les coefficients a_i et évaluons le polynôme $P(z)$ en $z = z_0$ par l'équation (L.2). Sauf cas exceptionnel, en raison de l'approximation des coefficients a_i , l'évaluation de $P(z)$ en $z = z_0$ ne donnera pas zéro mais une certaine valeur, notée ε :

$$P(z) \Big|_{z=z_0} = \varepsilon$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'impact de l'imprécision sur les coefficients sur la racine multiple z_0 de $P(z)$. Pour cela reprenons (L.1) et notons Δz_0 la variation du pôle liée à la précision finie de l'implantation sous la forme (L.2) :

$$\text{de (L.1) et (L.2) il vient : } (z - (z_0 - \Delta z_0))^n \Big|_{z=z_0} = \varepsilon \Rightarrow \Delta z_0 = \varepsilon^{1/n} \quad (\text{L.1})$$

La relation (L.3) montre que la sensibilité aux incertitudes d'implantation, sous la forme développée (L.2), est d'autant plus grande que la multiplicité des racines est élevée.

Par exemple, pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et $n = 4$, la racine réellement implantée est déplacée de $\Delta z_0 = 0.1778$ par rapport à la racine voulue alors que les coefficients du polynôme sont implantés avec une précision de l'ordre de 10^{-3} . Une telle sensibilité est inacceptable car en pratique les racines sont souvent très proches du cercle unité. Par conséquent, le polynôme $P(z)$ ne devra pas être implanté sous la forme développée (L.2) mais sous la forme factorisée (L.1). Nous reviendrons sur cela dans la **section 2. Cellules élémentaires**.

Considérons maintenant un polynôme $P(z)$ ayant n racines distinctes :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (\text{L.2})$$

Ce polynôme peut être implanté sous une forme développée :

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (\text{L.3})$$

Une incertitude numérique d'implantation d'un coefficient de (L.5), $a_i \rightarrow a_i + \delta a_i$, induit un changement des racines du polynôme $z_i \rightarrow z_i + \delta z_i$. Évaluons, au premier ordre, l'influence d'une incertitude d'implantation δa_i du coefficient a_i sur une racine z_k :

$$\begin{aligned} P(z, a_i + \delta a_i) \Big|_{z=z_k} &= P(z, a_i) \Big|_{z=z_k} + \frac{\partial P}{\partial a_i} \Bigg|_{z=z_k} \delta a_i + O^2 \\ &\approx P(z_k, a_i) + z_k^{n-i} \delta a_i \end{aligned}$$

De la même façon, évaluons, au premier ordre, l'influence d'une incertitude δz_k du coefficient z_k de la forme factorisée :

$$\begin{aligned} P(z, z_k + \delta z_k) \Big|_{z=z_k} &= P(z, z_k) \Big|_{z=z_k} + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=z_k} \delta z_k + O^2 \\ &\approx P(z_k, z_k) + \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^n (z_k - z_j) \delta z_k \end{aligned}$$

Par définition :

$$P(z, a_i) \Big|_{z=z_k} = P(z, z_k) \Big|_{z=z_k}$$

et

$$P(z, a_i + \delta a_i) \Big|_{z=z_k} = P(z, z_k + \delta z_k) \Big|_{z=z_k}$$

d'où au 1^{er} ordre :

$$\delta z_k \approx \frac{z_k^{n-i}}{\prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^n (z_k - z_j)} \delta a_i$$

et dans le cas d'une racine de multiplicité m :

$$\delta z_k \approx \left(\frac{z_k^{n-i}}{(m!) \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^n (z_k - z_j)} \delta a_i \right)^{1/m} \quad (\text{L.4})$$

La relation (L.6) montre que la sensibilité augmente avec l'ordre de multiplicité m et qu'elle est d'autant plus grande que les racines sont proches.

En conclusion, ceci montre que les polynômes des fonctions de transfert (filtres ou correcteurs) doivent être implantés sous forme factorisée donnée par (L.4).

2. Cellules élémentaires

2.1 Implantation de polynômes

La section précédente a montré que pour éviter une trop grande dispersion des racines des polynômes, il faut planter ces polynômes sous forme factorisées. Ainsi, par exemple, le polynôme suivant :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$$

qui lie une entrée $U(z)$ à une sortie $Y(z)$ par la relation suivante :

$$z^2 Y(z) = P(z) U(z)$$

pourra être écrit de la façon suivante en multipliant de part et d'autre par z^{-2} :

$$Y(z) = (1 - z_1 z^{-1}) \cdot (1 - z_2 z^{-1}) \cdot U(z)$$

D'où la décomposition :

$$U_1(z) = (1 - z_2 z^{-1}) U(z)$$

$$Y(z) = (1 - z_1 z^{-1}) U_1(z)$$

qui permet d'obtenir directement les équations de récurrence qui seront implantées en utilisant la propriété de translation de l'opérateur z^{-1} :

$$u_1(k) = u(k) - z_2 \cdot u(k-1)$$

$$y(k) = u_1(k) - z_1 \cdot u_1(k-1)$$

Il est à noter que dans le cas de racines complexes conjuguées, le polynôme factorisé fait apparaître des polynômes élémentaires du second ordre. On appellera « cellule élémentaire » une équation de récurrence du premier ou du second ordre.

L'intérêt de l'implantation sous forme factorisée est que la précision d'implantation (nombre de chiffres significatifs des coefficients) est directement liée à celle des racines des polynômes.

Un autre phénomène à prendre en compte est le bruit numérique lié aux calculs (troncatures et arrondis). Afin de minimiser l'influence de ce bruit, les racines ayant le plus faible module (les modes les plus rapides) sont tout d'abord calculées. Ainsi dans l'exemple précédent $|z_2| < |z_1|$ donc l'équation faisant intervenir le pôle z_2 est calculée en premier.

2.2 Implantation de fonctions rationnelles de polynômes

Dans le cas d'une fonction de transfert, rapport de deux polynômes en z , les cellules élémentaires sont constituées de fonctions rationnelles du premier ou du second ordre. La même procédure est utilisée que pour l'implantation de polynômes simples.

Ainsi, à titre d'exemple, considérons la fonction de transfert rationnelle suivante qui lie une entrée $U(z)$ à une sortie $Y(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z^2-p_2z-p_3)}$$

Si les modules des zéros et des pôles sont tels que :

$$|z_2| > |z_1| \quad \text{et} \quad |p_1| > \sqrt{|p_3|}$$

alors $H(z)$ sera décomposée de la manière suivante :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)} \frac{U_1(z)}{U(z)} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \frac{N_2(z)}{D_2(z)} = \frac{(z-z_2)}{(z-p_1)} \frac{z(z-z_1)}{(z^2-p_2z-p_3)}$$

où des cellules élémentaires sont mises en évidence avec des pôles et des zéros regroupés selon leurs modules.

La décomposition en cellules élémentaires de $H(z)$ permet d'obtenir les équations de récurrence suivantes :

$$u_1(k) = p_2 \cdot u_1(k-1) + p_3 \cdot u_1(k-2) + u(k) - z_1 \cdot u(k-1)$$

$$y(k) = p_1 \cdot y(k-1) + u_1(k) - z_2 \cdot u_1(k-1)$$

Ce sont ces équations qui seront implantées sur le calculateur.

Outre l'intérêt lié à la précision numérique, cette forme d'implantation a l'avantage d'être totalement générique et permet l'écriture d'un code informatique générique pour les cellules élémentaires.

3. Sensibilité et précision d'implantation

En automatique, comme cela a été souligné au début de ce chapitre, ce qui caractérise une fonction de transfert ce sont les valeurs prises par le gain statique, les pôles et les zéros (racines du dénominateur et du numérateur). Il est absolument primordial que l'implantation sur calculateur gère correctement la précision avec laquelle ces éléments caractéristiques sont implantés.

Concernant les racines à temps discret (pôles et zéros), il est nécessaire d'évaluer la précision d'implantation par rapport à des racines à temps continu. Les pôles ou zéros réels p_i en temps continu et les pôles ou zéros z_i en temps discret sont reliés par les relations suivantes :

$$z_i = e^{p_i T_e} \tag{L.5}$$

$$p_i = \frac{\ln|z_i|}{T_e} \tag{L.6}$$

La période d'échantillonnage T_e joue le rôle d'un facteur d'échelle entre le temps continu et le temps discret. Par conséquent, les pôles et zéros qui ont l'unité de rad/s en temps continu, seront sans

dimension en temps discret. C'est pourquoi il est nécessaire d'évaluer la précision d'implantation des racines à temps discret par rapport aux racines à temps continu. Pour cela, évaluons la sensibilité d'une racine p_i en temps continu par rapport à la racine z_i :

$$\frac{\partial z_i}{\partial p_i} = T_e z_i$$

D'où : $\frac{\partial p_i}{p_i} = \frac{1}{p_i T_e} \frac{\partial z_i}{z_i} = \frac{1}{\ln|z_i|} \frac{\partial z_i}{z_i}$ (L.9)

La relation (L.9) montre que la sensibilité d'implantation du pôle z_i est d'autant plus grande que la période d'échantillonnage est petite.

Par exemple, prenons un pôle $p_i = -10 \text{ rad/s}$ et une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ ms}$. Nous obtenons $1/|p_i T_e| = 100$. Ainsi, une incertitude d'implantation de 1% du pôle z_i correspondra à une incertitude de 100% sur le pôle en temps continu ce qui n'est absolument pas acceptable en pratique.

La relation (L.9) est au cœur du choix du nombre de chiffres significatifs nécessaires à l'implantation sur calculateur des coefficients des polynômes.

La démarche suivie est la suivante pour des racines (pôles ou zéros) à temps discret différentes de l'unité :

Connaissant la racine à temps discret z_i ,

Connaissant une précision d'implantation à temps continu désirée $\frac{\Delta p_i}{p_i}$, typiquement :

$$\frac{\Delta p_i}{p_i} \in [0,01; 0,1] = [1\%; 10\%],$$

La précision minimum nécessaire d'implantation de la racine est donnée par :

$$\Delta z_i = \frac{\Delta p_i}{p_i} \times z_i \times \ln|z_i| \quad (\text{L.6})$$

Dans le cas d'une racine $z_i = 1$, la racine à temps continu correspondante est nulle. Il s'en suit une difficulté pour le calcul de Δz_i . Cela montre que la racine doit être implantée avec une précision $\Delta z_i = 0$. Par conséquent, un polynôme possédant une racine en 1 tel que :

$$P(z) = 1 - z^{-1}$$

reliant une entrée $U(z)$ à une sortie $Y(z)$ par la relation $Y(z) = P(z)U(z)$, devra être implanté de la manière suivante :

$$y(k) = u(k) - u(k-1)$$

où la racine en 1 apparaît explicitement.

4. Procédure d'implantation d'une fonction de transfert

La procédure d'implantation d'une fonction de transfert à temps discret est la suivante :

1. Détermination des pôles et des zéros de la fonction de transfert à temps discret.
2. Détermination du nombre de chiffres significatifs nécessaires pour les pôles et les zéros en fonction de la précision désirée des équivalents à temps continu (cf. relation (L.10)).
3. Détermination du gain statique avec la précision voulue à partir de la factorisation de la fonction de transfert à l'aide des pôles et zéros déterminés à l'étape précédente avec la précision voulue.
4. Classement et regroupement des pôles et des zéros suivant leurs modules afin d'obtenir un ensemble de produits de cellules élémentaires.
5. Vérification de l'exactitude de la fonction de transfert obtenue par la comparaison de son diagramme de Bode avec celui de la fonction de transfert initiale.
6. Écriture des équations de récurrence de chaque cellule élémentaire.

Dans la suite, nous donnons un exemple d'implantation de fonction de transfert à temps discret : un filtre du troisième ordre.

4.1 Implantation d'un filtre du troisième ordre

On souhaite planter un filtre du troisième ordre défini par la fonction de transfert à temps continu suivante :

$$H_c(p) = \frac{10}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

On désire que le gain statique de cette fonction de transfert soit implanté avec une précision meilleure que 1% et que les pôles soient implantés avec une précision meilleure que 5% avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,1$ s.

Le calcul de la fonction de transfert à temps discret par la transformée en z avec un bloqueur d'ordre 0 donne :

$$H_d(z) = \frac{0.00158498611114z^2 + 0.00602923332895z + 0.00143415474043}{z^3 - 2.80016650412698z^2 + 2.61980209462301z - 0.81873075307798}$$

Il nous faut maintenant obtenir les équations de récurrence à planter en suivant la procédure décrite ci-dessus.

1. Pôles et zéros de $H_d(z)$:

- H_d possède deux zéros (racines du numérateur) réels :

$$\{n_1 = -3.54901124202457 ; n_2 = -0.25495479059677\}$$

- H_d possède un pôle réel et deux pôles complexes conjugués :

$$\{z_1 = 0.90483741803592 ; z_{2,3} = 0.94766454304553 \pm i 0.08227594964691\}$$

2. Nombre de chiffres significatifs nécessaires pour les pôles et les zéros sachant qu'une précision meilleure que 5% de l'équivalent à temps continu est demandée.

À partir de la relation (L.10), il vient :

- Zéros : $\Delta n_1 = 0,05 \times n_1 \times \ln|n_1| = -0,2$ et $\Delta n_2 = 0,05 \times n_2 \times \ln|n_2| = 0,017$

Il suffira de garder un chiffre significatif après la virgule pour n_1 et deux chiffres significatifs pour n_2 , donc : $\{n_1 = -3,5 ; n_2 = -0,25\}$.

- Pôles : $\Delta z_1 = 0,05 \times z_1 \times \ln|z_1| = -0,004$, il faudra maintenir trois chiffres significatifs après la virgule pour le pôle z_1 .

Pour les pôles z_2 et z_3 , complexes conjugués, le calcul sera fait par rapport au module : $\Delta z_{2,3} = 0,05 \times |z_{2,3}| \times \ln|z_{2,3}| = -0,002$. Là aussi il faudra garder 3 chiffres après la virgule pour les coefficients de ce polynôme du second ordre. Strictement, pour les polynômes du second ordre, il faut ajouter un chiffre significatif obtenu à l'aide de la relation (L.10).

3. Détermination du gain statique avec une précision meilleure que 1% :

L'étape précédente a fourni les pôles et zéros avec la précision nécessaire, il vient alors pour la forme factorisée de $H_d(z)$:

$$H_{dr}(z) = \frac{K(z+3,5)(z+0,25)}{(z-0,905)(z^2 - 1,895z + 0,905)}$$

Le gain statique de H_c et de H_d doivent être identiques : $H_c(p=0) = H_d(z=1) = G_s = 10$.

Il vient donc la relation suivante pour la détermination du coefficient K :

$$H_{dr}(z=1) = 10 = \frac{K(1+3,5)(1+0,25)}{(1-0,905)(1^2 - 1,895 \times 1 + 0,905)}$$

D'où $K = 0,00168$ qui devra être implanté avec 5 chiffres significatifs après la virgule pour obtenir la précision désirée de 1%.

4. Classement et regroupement des pôles et zéros :

Nous avons : $|n_1| > |n_2|$ et $|z_1| < |z_{2,3}|$, d'où H_d mis sous la forme suivante en cellules élémentaires :

$$H_{dr}(z) = H_{dr1}(z) \times H_{dr2}(z) = \frac{0,00168 \times (z + 3,5)}{z^2 - 1,895z + 0,905} \times \frac{z + 0,25}{z - 0,905}$$

5. Tracés des diagrammes de Bode :

Les tracés des diagrammes de Bode de la fonction de transfert initiale $H_d(z)$ et de $H_{dr}(z)$ obtenue en factorisant $H_d(z)$ et réduisant le nombre de chiffres significatifs sont superposés.

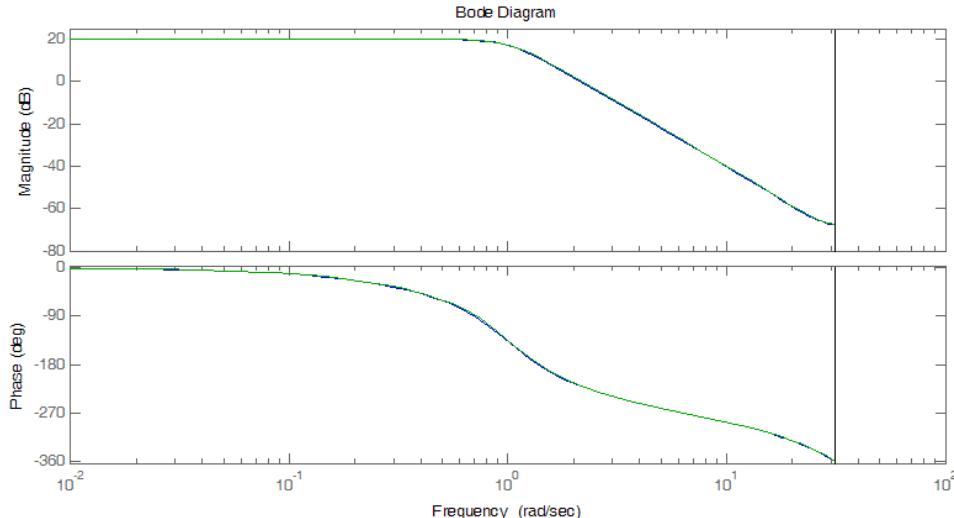


Figure L.1 – Comparaison des diagrammes de Bode de $H_d(z)$ et $H_{dr}(z)$ avec $H_{dr}(z)$ mise sous forme de produits de cellules élémentaires avec le minimum de chiffres significatifs pour les paramètres.

6. Écriture des équations de récurrence de chaque cellule élémentaire

En multipliant la forme factorisée précédente par z^{-2} en haut et en bas, d'une part, et par z^{-1} d'autre part, il vient :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H_{dr}(z) = H_{dr1}(z) \times H_{dr2}(z) = \frac{0,00168 \times (1 + 3,5z^{-1})}{1 - 1,895z^{-1} + 0,905z^{-2}} \times \frac{1 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,905z^{-1}}$$

Puis en faisant apparaître une variable intermédiaire $U_1(z)$, il vient :

$$\frac{Y(z)}{U_1(z)} = \frac{0,00168 \times (z^{-1} + 3,5z^{-2})}{1 - 1,895z^{-1} + 0,905z^{-2}} ; \quad \frac{U_1(z)}{U(z)} = \frac{1 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,905z^{-1}}$$

Il en découle directement les équations de récurrence à implanter sur calculateur :

$$u_1(k) = 0,905.u_1(k-1) + u(k) + 0,25.u(k-1)$$

$$y(k) = 1,895.y(k-1) - 0,905.y(k-2) + 0,00168.(u_1(k-1) + 3,5.u_1(k-2))$$

ANNEXES

A1. Étude algébrique de la stabilité des systèmes linéaires invariants

A1.1 Critère algébrique de Routh pour les systèmes à temps continu

L'étude de la stabilité d'une fonction de transfert $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ revient à l'étude des racines du dénominateur $D(p)$. La détermination des racines de $D(p)$ devient rapidement difficile lorsque le degré de ce polynôme est élevé. Le critère algébrique de Routh permet de déterminer le signe des parties réelles des racines, donc de juger de la stabilité du système, sans avoir à déterminer explicitement les racines de $D(p)$.

Considérons le polynôme suivant :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

Le tableau de Routh est construit de la manière suivante jusqu'à avoir une ligne de zéros :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...
:	:	:	⋮

$$\text{Avec : } b_1 = \frac{a_{n-1} \times a_{n-2} - a_n \times a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1} \times a_{n-4} - a_n \times a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad b_i = \frac{a_{n-1} \times a_{n-2i} - a_n \times a_{n-2i-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \times a_{n-3} - b_2 \times a_{n-1}}{b_1}, \quad c_i = \frac{b_1 \times a_{n-2i-1} - b_{i+1} \times a_{n-1}}{b_1}.$$

Théorème – Critère de Routh :

Le polynôme $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ aura toutes ses racines à parties réelles négatives si et seulement si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Le polynôme $D(p)$ a autant de racines à parties réelles positives qu'il y a de changement de signe dans la première colonne.

♦

Exemple : $D(p) = p^4 + 4p^3 + p^2 + 2p + 10$

La construction du tableau de Routh donne :

1	1	10
4	2	0
0.5	10	
-78		
10		

Dans la première colonne il y a deux changements de signe ($0.5 \rightarrow -78$) et ($-78 \rightarrow 10$). Il y a donc deux racines à partie réelle positive.

Le calcul avec Matlab « roots([1 4 1 2 10]) » donne :

-3.6744 ; -1.5639 ; 0.6192 + 1.1648i ; 0.6192 - 1.1648i

On a bien deux racines à parties réelles positives. La fonction de transfert qui a pour dénominateur $D(p)$ est donc instable.

A1.2 Critère algébrique de Jury pour les systèmes à temps discret

L'étude de la stabilité d'une fonction de transfert $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ revient à l'étude des racines du dénominateur $D(z)$ de $H(z)$. La détermination des racines de cette équation devient rapidement difficile lorsque le degré est élevé. Le critère de Jury permet de juger de la stabilité du système sans que l'on ait à trouver explicitement les racines de cette équation. C'est l'équivalent du critère de Routh utilisé pour les systèmes à temps continu.

Considérons le polynôme suivant en puissances décroissantes de z (avec $a_0 > 0$) :

$$T(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Construisons le tableau « triangulaire » de Jury à $2n+1$ lignes :

N° de lignes	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
1	a_0						
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	\dots	c_{n-1}	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-1}	\dots	c_1	c_0		
:	:	:	:		.	.	
$2n-3$	q_0	q_1	q_2				
$2n-2$	q_2	q_1	q_0				
$2n-1$	r_0	r_1					
$2n$	r_1	r_0					
$2n+1$	s_0						

avec : $b_0 = a_0 - \frac{a_n}{a_0} a_n, b_1 = a_1 - \frac{a_n}{a_0} a_{n-1}, b_k = a_k - \frac{a_n}{a_0} a_{n-k}$
 $c_k = b_k - \frac{b_{n-1}}{b_n} b_{n-1-k}, \dots$

Théorème – Critère de Jury : Le polynôme $T(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$ aura toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité si et seulement si tous les premiers coefficients des lignes de rang impair du tableau de Jury sont positifs (i.e. $a_0 > 0, b_0 > 0, c_0 > 0, \dots s_0 > 0$).

♦

Exemple d'utilisation du critère de Jury :

Soit le polynôme du second ordre :

$$T(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

On cherche à déterminer pour quelles valeurs de a_1 et a_2 , les racines de $T(z)$ sont en module inférieures à 1.

Le tableau de Jury s'écrit :

N° de lignes	1	a_1	a_2
1	1		
2	a_2	a_1	1
3	$1 - a_2^2$	$a_1 - a_1 a_2$	
4	$a_1 - a_1 a_2$	$1 - a_2^2$	
5	$\frac{(1 - a_2^2)^2 - a_1^2(1 - a_2)^2}{1 - a_2^2}$		

Les conditions de stabilité s'écrivent :
$$\begin{cases} 1 - a_2^2 > 0 \\ (1 + a_2)^2 > a_1^2 \end{cases}$$
 équivalentes à
$$\begin{cases} 1 - a_2^2 > 0 \\ 1 + a_2 > a_1 \\ 1 + a_2 > -a_1 \end{cases}$$

Les valeurs admissibles pour a_1 et a_2 , telles que les racines de $T(z)$ soient de module inférieur à 1, sont à l'intérieur du triangle de la figure A1.1.

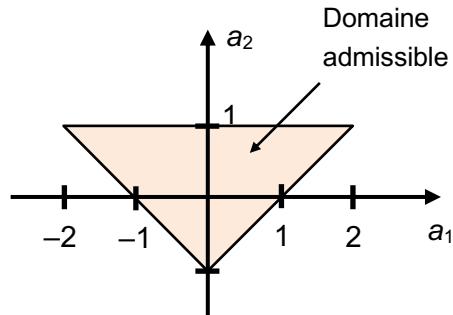


Figure A1.1 – Triangle de stabilité d'un système discret du second ordre.

A2. Méthodes approchées de calcul de la transformée en z

A2.1. Correspondance entre les plans p et z

Soient $x(t)$ un signal à temps continu de transformée de Laplace $X(p)$ et $x(k) = x(t = kT_e)$ le signal à temps discret obtenu par échantillonnage à la cadence T_e du signal $x(t)$. A ce signal discret est associée une transformée en z : $X(z) = Z[x(k)]$. Quel est le lien entre $X(p)$ et $X(z)$?

Si on ne considère un signal ayant des pôles simples, $X(p)$ peut être décomposée en éléments simples de la forme :

$$X(p) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{p + a_i} \quad \text{d'où} \quad x(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-a_i t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Par conséquent, le signal discret $x(k)$ est donné par : $x(k) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-a_i k T_e} \quad \text{pour } k \geq 0.$

et la transformée en z par : $X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$

mais $Z\left[e^{-a_i k T_e}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} e^{-a_i k T_e} = \frac{1}{1 - e^{-a_i T_e} z^{-1}}$

et de part la linéarité de la transformée en z, il vient :

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{-a_i T_e} z^{-1}} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{-a_i T_e}}$$

Conclusion : A chaque terme élémentaire $\frac{1}{p + a_i}$ de $X(p)$ est associé un terme élémentaire du type

$\frac{z}{z - e^{-a_i T_e}}$ de $X(z)$. Donc un pôle $p_i = -a_i$ de $X(p)$ donne lieu à un pôle $z_i = e^{p_i T_e} = e^{-a_i T_e}$ de $X(z)$.

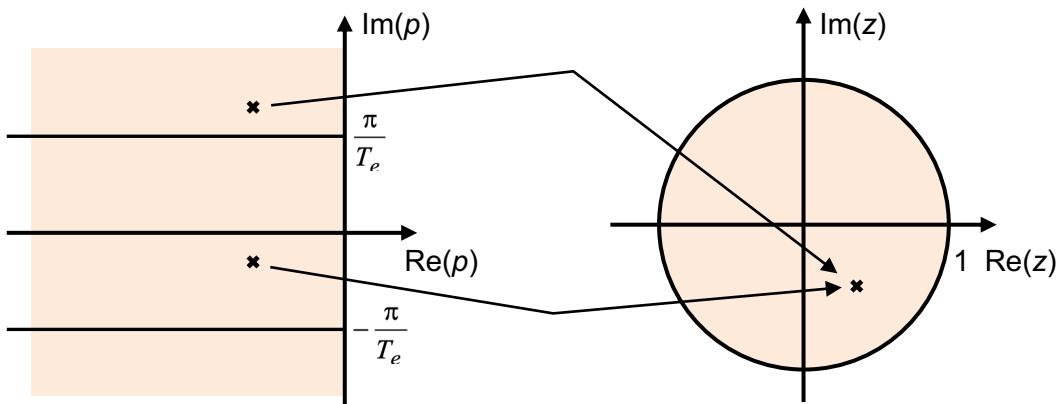


Figure A2.1 – Correspondance entre plans p et z.

Remarques :

- deux pôles à temps continu $-a_i$ et $-a_j$ dont les parties imaginaires diffèrent de $2\pi/T_e$ donnent le même pôle à temps discret $z_i = z_j = e^{-a_i T_e} = e^{-a_j T_e}$ (voir figure A2.1), c'est une illustration du repliement de spectre ;

- l'image dans le plan en z de l'axe imaginaire $p = j\omega$ du plan en p est le cercle unité $|z| = 1$.

A2.2. Méthodes approchées de discréétisation des fonctions de transfert

Le passage à temps discret de fonctions de transfert à temps continu (modèles de processus, filtres, correcteurs) est utilisé dans le cas de fonctions de transferts déterminées dans une première étape à temps continu. L'expression à temps discret des fonctions de transfert peut être obtenue par l'utilisation directe de la transformée en z ou par l'utilisation de méthodes approchées.

Le choix de la période d'échantillonnage aura une grande influence sur la fidélité de la fonction de transfert à temps discret à celle à temps continu. Un critère de choix de la période d'échantillonnage T_e est :

$$T_e \leq \frac{\pi}{10^{Ndécades} \times |pôle ou zéro le plus rapide du système|}$$

Avec typiquement $Ndécades \geq 2$.

Dans tous les cas la validité de la fonction de transfert à temps discret obtenue doit être vérifiée par comparaison des diagrammes de Bode des fonctions de transfert à temps continu et à temps discret.

Lorsque des méthodes approchées de discréétisation en temps sont utilisées pour discréétiser les fonctions de transfert à temps continu, on utilise l'opérateur q qui représente l'avance d'une période d'échantillonnage et q^{-1} est l'opérateur de retard d'une période d'échantillonnage.

A2.2.1 Discréétisation par la méthode du rectangle arrière – Euler explicite

La méthode de discréétisation dite du *rectangle arrière* est aussi appelée méthode d'*Euler explicite* ou *transformation en δ* . La transformation de p en q et vice-versa est donnée par :

$$p = \frac{q-1}{T_e} \quad \leftrightarrow \quad q = 1 + T_e p$$

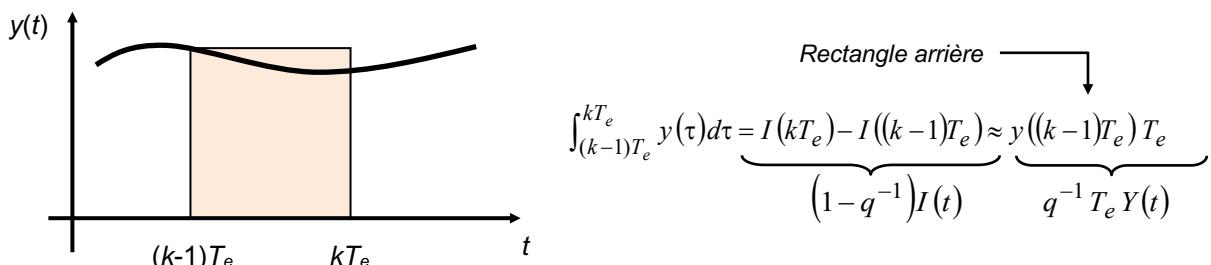
L'origine de cette transformation peut être décrite de différentes façons :

a) Développement limité au premier ordre de $z = e^{T_e p}$,

si la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est suffisamment grande par rapport à la bande passante du système, alors $e^{T_e p}$ peut être approché par son développement limité au premier ordre,

$$z = e^{T_e p} = 1 + T_e p + O^2 \approx 1 + T_e p = q$$

b) Méthode d'intégration graphique, considérons la grandeur $y(t)$ et l'aire hachurée représentées sur la figure suivante :



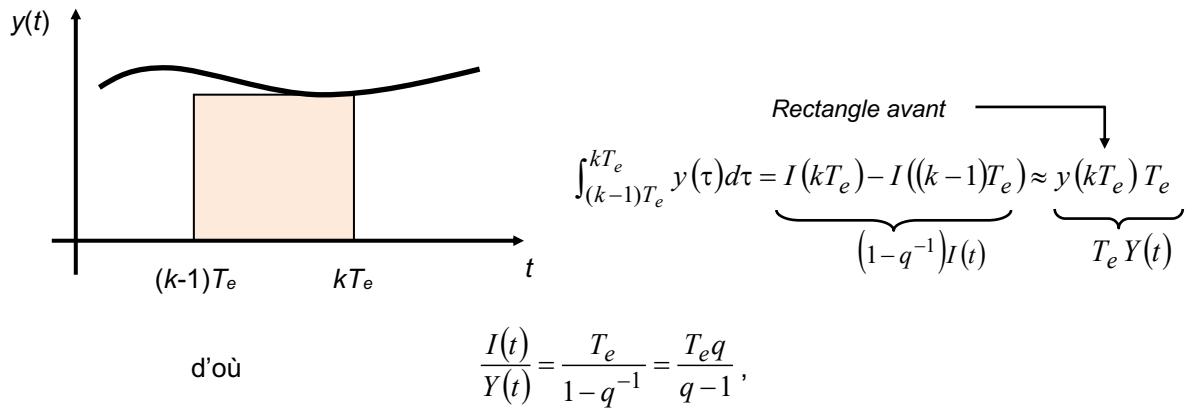
d'où $\frac{I(t)}{Y(t)} = \frac{T_e q^{-1}}{1 - q^{-1}} = \frac{T_e}{q - 1}$ et sachant qu'en temps continu $\frac{I(p)}{Y(p)} = \frac{1}{p}$, il vient : $p = \frac{q-1}{T_e}$.

A2.2.2 Discrétisation par la méthode du rectangle avant – Euler implicite

La méthode de discrétisation dite du *rectangle avant* est aussi appelée méthode d'*Euler implicite*. La transformation de p en q et vice-versa est donnée par :

$$p = \frac{q-1}{T_e q} \quad \leftrightarrow \quad q = \frac{1}{1-T_e p}$$

De même que précédemment l'origine de cette transformation peut être décrite de manière graphique. Considérons la grandeur $y(t)$ et l'aire hachurée représentées sur la figure suivante :

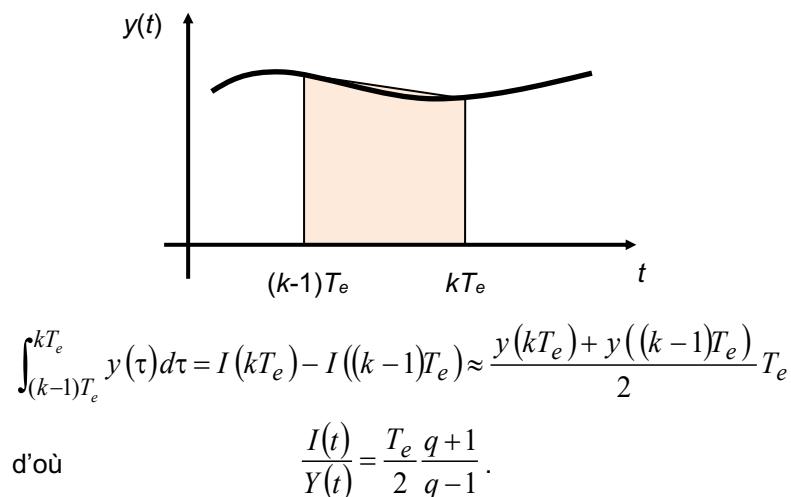


A2.2.3 Discrétisation par la méthode de Tustin

La méthode de discrétisation dite de *Tustin* est aussi appelée méthode *Trapézoïdale, bilinéaire ou homographique*. La transformation de p en q et vice-versa est donnée par :

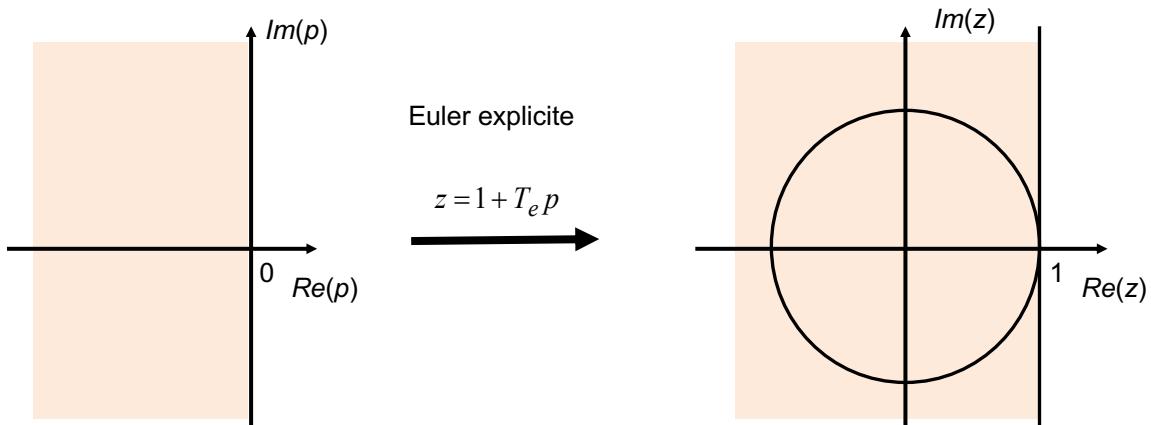
$$p = \frac{2}{T_e} \frac{q-1}{q+1} \quad \leftrightarrow \quad q = \frac{2+T_e p}{2-T_e p} = \frac{1+\frac{T_e}{2} p}{1-\frac{T_e}{2} p}$$

De même que précédemment l'origine de cette transformation peut être décrite de manière graphique. Considérons la grandeur $y(t)$ et l'aire hachurée représentées sur la figure suivante :

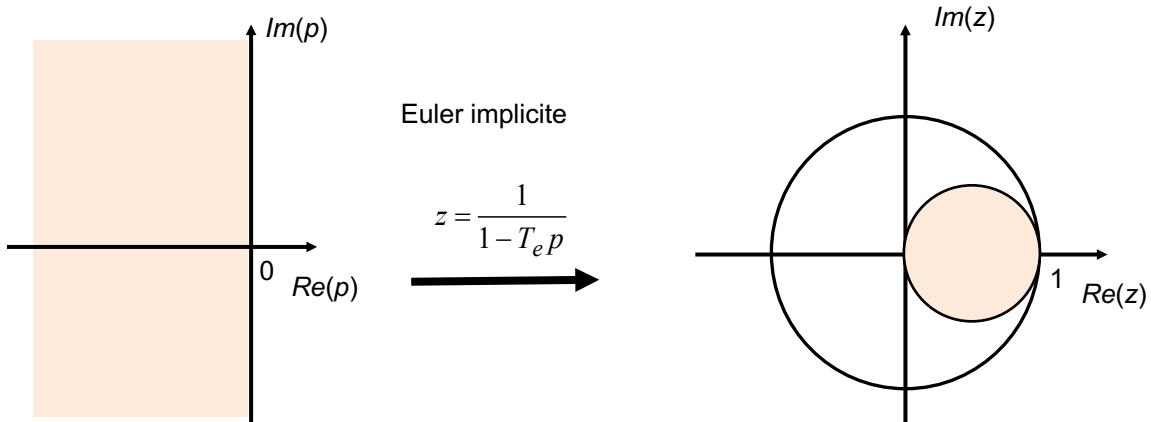


A2.3 Comparaison des méthodes de discréétisation

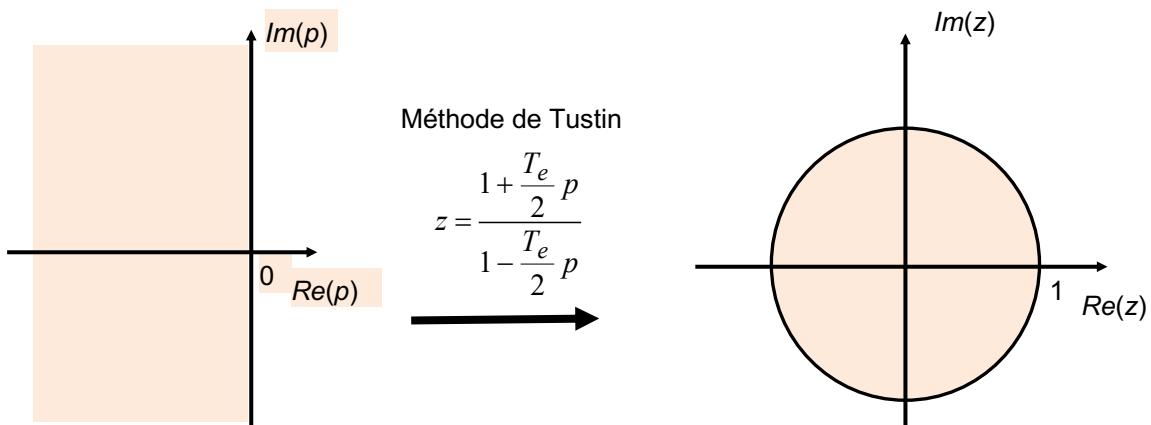
Que deviennent les pôles stables dans le domaine en p dans le plan z par ces transformations ?



Des pôles stables (i.e. $\text{Re}(p) < 0$) dans le domaine en p peuvent devenir instables dans le plan en z par cette transformation si la période d'échantillonnage T_e est trop grande.



Cette transformation est inconditionnellement stable par rapport à la valeur de la période d'échantillonnage T_e .



Cette transformation est inconditionnellement stable par rapport à la valeur de la période d'échantillonnage T_e .

Comparaison des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert à temps continu discrétisée par les différentes méthodes. Considérons la fonction de transfert à temps continu d'un correcteur de type PID avec filtrage de l'action dérivée et du gain en hautes fréquences :

$$C_{cont}(p) = \frac{10}{1+0.001p} \cdot \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{0.1p}{1+0.01p} \right]$$

Les différentes méthodes de discréttisation (Transformée en z avec BOZ, méthodes d'Euler explicite et implicite, et méthode de Tustin) donnent les diagrammes de Bode suivants avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,001\text{s}$ puis pour $T_e = 0,01\text{s}$.

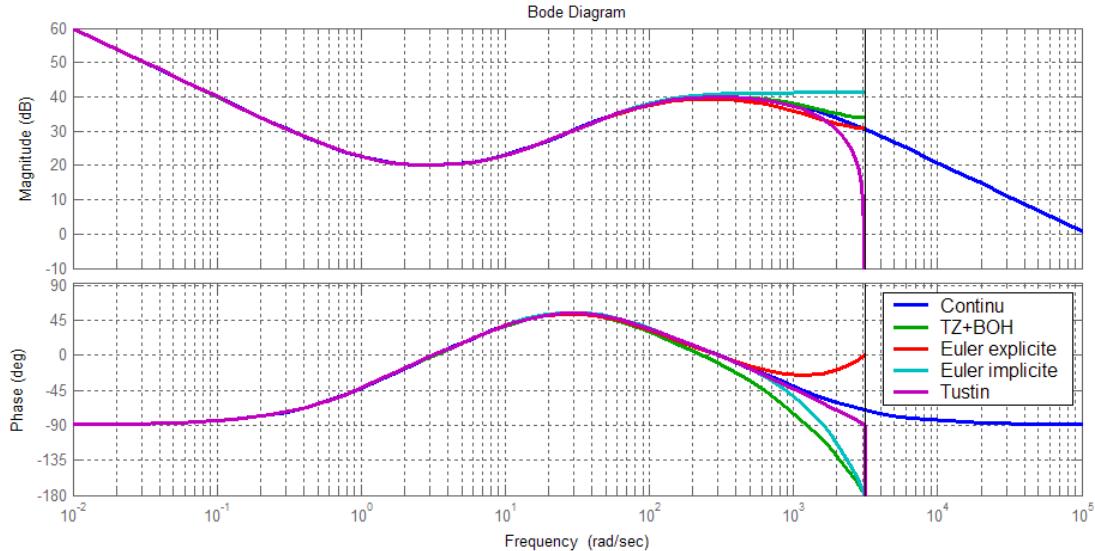


Figure A2.2 – Comparaison des diagrammes de Bode d'un correcteur PID à temps continu discrétisé par différentes méthodes avec $\mathbf{T_e = 0,001s}$.

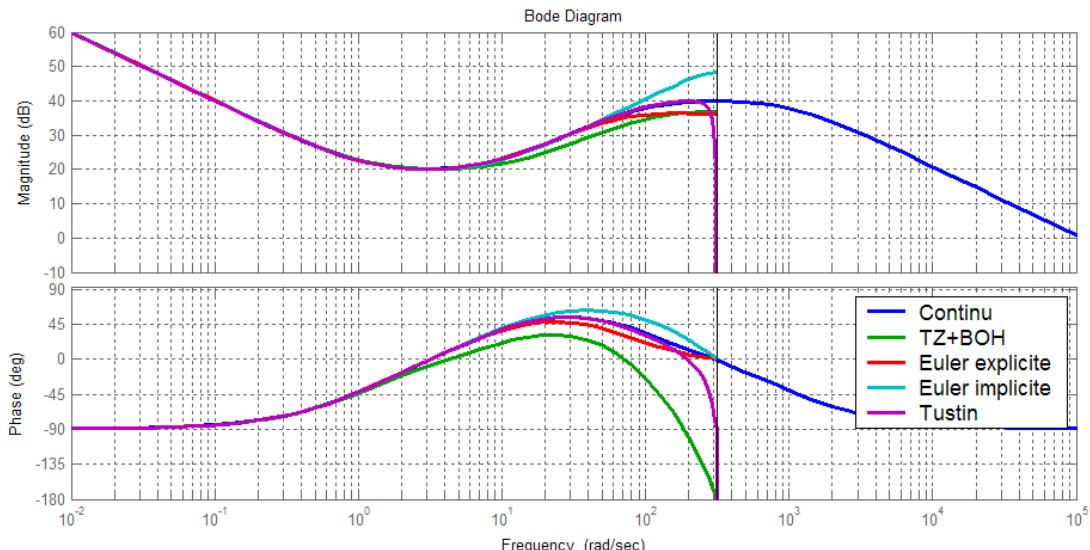


Figure A2.3 – Comparaison des diagrammes de Bode d'un correcteur PID à temps continu discrétisé par différentes méthodes avec $\mathbf{T_e = 0,01s}$.

Les figurent ci-dessus montrent clairement que la méthode de Tustin est celle qui donne une phase la plus fidèle au comportement à temps continu. De plus, avec cette méthode le gain décroît très rapidement à l'approche de la fréquence de Shannon ce qui permet d'autant mieux de ne pas être sensible aux bruits en hautes fréquences.

La méthode de Tustin (bilinéaire) est la méthode à privilégier pour la discréttisation des correcteurs déterminés à temps continu.

A3. Notion de filtrage et Filtres

Tout système dynamique linéaire peut être interprété comme étant un filtre. Une fonction de transfert est un filtre. Néanmoins, on ne donne le nom de filtre à une fonction de transfert que lorsque le but premier de cette fonction de transfert est effectivement de filtrer.

On appelle filtre un système linéaire qui a pour but de réduire ou augmenter le contenu fréquentiel d'un signal dans une bande de fréquences. **Cette action s'appelle un filtrage.**

On appelle Bande Passante, l'étendue de fréquences pour lesquelles le signal d'entrée du filtre n'est pas ou peu modifié par le filtrage (sauf dans le cas du filtre Peak-Notch). Dans la bande passante du filtre, l'amplitude du signal de sortie est très proche de celle du signal d'entrée.

La Bande Passante est définie par une ou plusieurs pulsations de coupure, pulsations auxquelles la valeur du gain du filtre dans la bande passante est divisé par $\sqrt{2}$.

La Bande atténuee est définie comme l'étendue de fréquences où le signal d'entrée est fortement atténue par le filtre. Dans cette bande le gain du filtre est proche de zéro et le signal de sortie a une amplitude très inférieure à celle du signal d'entrée.

Filtres élémentaires

On note ω_c la pulsation caractéristique du filtre qui correspond le plus souvent à la pulsation qui délimite la bande passante de la bande atténuee.

- **Filtre Passe-Bas (low pass) :**

- Pas d'atténuation des composantes en basses fréquences du signal d'entrée dans la bande passante ($0 \rightarrow \omega_c$), atténuation au-delà de ω_c .

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} , \quad H(j\omega) = \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{\omega_c})^n} , \quad H(j\omega) = \frac{1}{1+j2m\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2} \dots$$

- **Filtre Passe-Haut (high pass) :**

- Pas d'atténuation des composantes du signal d'entrée en hautes fréquences dans la bande passante ($\omega_c \rightarrow +\infty$), atténuation en dessous de ω_c .

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} , \quad H(j\omega) = \frac{(j\frac{\omega}{\omega_c})^n}{(1+j\frac{\omega}{\omega_c})^n} , \quad H(j\omega) = \frac{(j\frac{\omega}{\omega_c})^2}{1+j2m\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2} \dots \quad (2m = 1/Q)$$

- **Filtre Passe-Bande (band pass) :**

- Pas d'atténuation des composantes du signal d'entrée dans une bande finie de fréquence $[f_1, f_2]$

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2} \dots$$

- **Autres filtres plus spécifiques :**

- Filtre Coupe-Bande (notch) : $H(j\omega) = \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_c})^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2} \dots$

- Passe-Tout (all pass) : $H(j\omega) = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad H(j\omega) = \frac{1 - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2} \dots$

- Peak-Notch : $H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{A}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2}{1 + j\frac{1}{A,Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2}$

- LowShelf : $H(j\omega) = \frac{A(A + j\frac{\sqrt{A}}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2)}{1 + j\frac{\sqrt{A}}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - A(\frac{\omega}{\omega_c})^2}$

- HighShelf : $H(j\omega) = \frac{A(1 + j\frac{\sqrt{A}}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - A(\frac{\omega}{\omega_c})^2)}{1 + j\frac{\sqrt{A}}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - (\frac{\omega}{\omega_c})^2}$

On pourra remarquer que pour un filtre d'ordre donné, ce qui diffère entre les différents types de filtres est uniquement le numérateur, sauf pour les filtres de type Shelf (escalier).

A4. Le décibel et son intérêt

Le décibel exprime un **gain sans unité** dans une échelle logarithmique.

Un gain sans unité est un **rapport** entre deux grandeurs de même unité.

Le décibel exprime l'amplification ou l'atténuation d'une grandeur :

- Dans le cas du **rapport de deux grandeurs de puissances**, ce rapport en décibels est appelé G_{dB} et est donné par :

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_e} \right) \text{ avec } P_S \text{ et } P_e \text{ en Watts}$$

- Dans le cas où c'est le **rapport de deux grandeurs de champs** (qui ne sont pas des puissances) qui est calculé, ce rapport en décibels est aussi appelé G_{dB} et est donné par :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{U_S}{U_e} \right) \text{ avec par exemple } U_S \text{ et } U_e \text{ en Volts}$$

Grandeurs de champs : Tensions (Volt), Courants (Ampère), Pression acoustique (Pascal)...

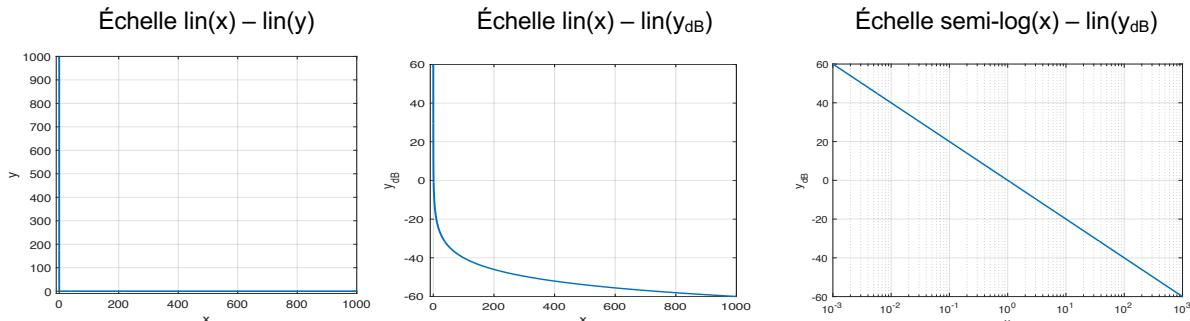
Le décibel permet de représenter de grandes étendues de gains avec une plage réduite de valeurs (compression d'échelle) :

Gain	1/10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10
G_{dB}	-20 dB	-6 dB	-3 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB

Gain	10^{-4}	10^{-3}	1/100	1	100	1000	10^4
G_{dB}	-80 dB	-60 dB	-40 dB	0 dB	40 dB	60 dB	80 dB

Cette compression d'échelle est très utile pour les graphiques, voire indispensable pour certains.

Par exemple, représenter : $y = \frac{1}{x}$ pour $x \in [10^{-3}, 10^3]$ $\Rightarrow y_{dB} = -20 \log_{10}(x)$



Avec l'échelle semi-log(x) – lin(y_{dB}), il est possible de lire très facilement sur l'ensemble de la plage d'intérêt les valeurs du graphique.

Le décibel avec unité

A la base, le dB exprime un gain sans unité dans une échelle logarithmique :

- Pour les grandeurs de puissance : $G_{dB} = 10 \log_{10} G$
- Pour les grandeurs de champs : $G_{dB} = 20 \log_{10} G$

On peut adjoindre au dB une unité. Il faut alors définir une **valeur de référence** pour laquelle on obtient **0 dBUnité**.

Exemples :

- Électronique :
 - dBW : grandeur de puissance. La puissance de référence est 1 W.
 - dBm : grandeur de puissance. La puissance de référence est 1 mW.
 - dBV : grandeur de champ, valeur efficace de la tension.
La tension de référence est 1 volt RMS.
 - dB μ V : grandeur de champ, valeur efficace de la tension.
La tension de référence est 1 μ volt RMS.
- Acoustique :
 - dBSPL : grandeur de champ, valeur efficace de pression acoustique.
La pression de référence est 20 μ Pascals (seuil d'audibilité à 1kHz).
- Audionumérique :
 - dBFS : grandeur de champ, amplitude du signal numérique
L'amplitude de référence est l'amplitude max (FS : Full Scale).

Références

- [1] E. Goday et coll., « Régulation Industrielle », Série EEA, L'usine Nouvelle, Dunod Editeur, 200A1.
- [2] P. Prouvost, « Automatique : contrôle et régulation : cours et exercices corrigés, Sciences sup, 2^{ème} éd., Dunod Editeur, 2010.
- [3] P. de Larminat, « Automatique appliquée », 2^{ème} édition revue et augmentée, Hermès Lavoisier, 2009.
- [4] P. De Larminat, « Des régulateurs PID à la commande LQG-LTR : une approche robuste par placements de pôles », Chap. 3 du livre Conception de commandes robustes, 2002, Hermès.
- [5] S. Le Ballois, P. Codron, « Automatique : systèmes linéaires et continus : cours et exercices corrigés », 2^{ème} éd., Dunod, 2006.
- [6] V. Minzu, B. Lang, « Commande automatique des systèmes linéaires continus : cours avec applications utilisant MATLAB », Technosup, Ellipses Editeur, 2001.
Beaucoup d'autres ouvrages dans la collection Technosup d'Ellipses.
- [7] H. Bülher, « Réglages échantillonnés », Vol. 1 et 2, 1982, Presses Polytechniques Romandes.
- [8] I.D. Landau, « Identification et commande des systèmes », 1988, Hermès
- [9] P. Vanheege, C. Sueur, P. Borne, « Automatique des systèmes échantillonnés », 2001, Technip
- [10] K.J. Aström, B. Wittenmark, « Computer-Controlled Systems », 1997, Prentice Hall
- [11] B. d'Andréa-Novel, M. Cohen de Lara, « Commande linéaire des systèmes dynamiques », 1994 Masson
- [12] D. C. Karnopp et al., « System Dynamics, Modeling and Simulation of Mechatronics Systems », 4th Edition, Wiley