DM 14

Note

Les petits points corespondent à des questions laissés sans finalité.

1. Développement Eulérien de la cotangente

Question 1

$$orall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(rac{1}{x+n} + rac{1}{x-n}
ight) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} rac{x}{x^2-n^2}$$

Or,

$$\left|\frac{x}{x^2-n^2}\right| \sim \left|\frac{x}{n^2}\right| \geq 0 \text{ et } |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge absolument}$$

Ainsi, comme la convergence absolue implique la convergence :

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(rac{1}{x+n} + rac{1}{x-n}
ight) ext{converge}
ight]$$

a.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(-x) = \pi \cot (\pi - x)$$

$$= \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)}$$

$$= \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)}$$

$$= -\pi \cot (\pi x)$$

$$= -f(x)$$

$$g(-x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{x+n}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$$

$$= -g(x)$$

Ainsi, g et f sont impaires

b.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x+1) = \pi rac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi rac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \pi \cot(\pi x) = f(x)$$

$$\boxed{f(x+1) = f(x)}$$

$$g(x+1) = \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

On pose:

$$G_N = rac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^N \left(rac{1}{x+1+n} + rac{1}{x+1-n}
ight)$$

Comme:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x-n}$$

Alors,

$$G_N = rac{1}{x+1} + \sum_{n=2}^{N+1} rac{1}{x+n} + \sum_{n=0}^{N-1} rac{1}{x-n} = \sum_{n=1}^{N+1} rac{1}{x+n} + \sum_{n=0}^{N-1} rac{1}{x-n}$$

Donc,

$$G_N = \sum_{n=1}^N \left(rac{1}{x+n} + rac{1}{x-n}
ight) + rac{1}{x} + rac{1}{x+N+1} - rac{1}{x-N}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, on a bien :

$$g(x+1) = g(x)$$

c.

f et g sont bien définies sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} ,

 $\mathsf{Comme} : x \mapsto \tfrac{1}{\sin(\pi x)} \ \mathsf{et} \ x \mapsto \cos(\pi x) \ \mathsf{sont} \ \mathsf{continues} \ \mathsf{sur} \ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \ \mathsf{alors, par produit de fonctions continues} \ \mathsf{sur} \ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$f$$
 est bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Plan de la démonstration :

Comme on a:

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$$

Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$,

On souhaite savoir si:

$$g$$
 est continue sur $I_{n_0} =]n_0, n_0 + 1[$

ce qui implique que g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Il suffit alors de montrer que pour tout segment de I_{n_0} de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, g est continue.

Démonstration:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Soit $a,b\in I_{n_0}$, [a,b] est donc un segment de I_{n_0} ,

On pose : $h_n: x \mapsto rac{1}{x+n} + rac{1}{x-n}$

$$\left|\left|h_n
ight|
ight|_{\infty,[a,b]}=2\sup_{x\in[a,b]}\left|rac{x}{x^2-n^2}
ight|$$

On a alors:

$$orall x \in [a,b], h_n'(x) = 2rac{x^2-n^2-2x^2}{(x^2-n^2)^2} = -2rac{n^2+x^2}{(x^2-n^2)^2} < 0$$

(car h_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)

Ainsi, comme h_n est strictement décroissante :

$$||h_n||_{\infty,[a,b]}=2\left|rac{a}{a^2-n^2}
ight| \mathop{\sim}\limits_{n o +\infty}rac{2\left|a
ight|}{n^2}\geq 0$$

et

$$2\left|a\right|\sum_{n=1}^{+\infty}rac{1}{n^2} ext{ converge}$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||h_n||_{\infty,[a,b]} ext{ converge}$$

Donc,

 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n$ converge normalement sur tout segment de I_{n_0}

Donc,

 $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} h_n$ converge unformément sur tout segment de I_{n_0}

Donc,

 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}h_n$ converge unformément sur I_{n_0}

Ainsi,

$$\left[\sum_{n\in\mathbb{N}^*}h_n \text{ converge unformément sur }\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}
ight]$$

Comme

 $orall n\in\mathbb{N}^*, x\mapsto rac{1}{x+n}+rac{1}{x-n}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et $x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\left(rac{1}{x+n}+rac{1}{x-n}
ight)$ converge uniformément,

Donc, comme $x\mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

g est bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Question 2

a.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{split} f\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \pi \mathrm{cotan}\left(\pi\frac{1+x}{2}\right) = \pi\frac{\mathrm{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}{\mathrm{sin}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)} = -\pi\frac{\mathrm{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \pi\left(\frac{\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{sin}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\mathrm{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \pi\left(\frac{\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sin}\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\ &= 2\pi\frac{2\mathrm{cos}\left(\frac{x}{2}\right)^{2} - 1}{\mathrm{sin}(x)} \\ &= 2\pi\frac{\mathrm{cos}(x)}{\mathrm{sin}(x)} \\ &= 2f(x) \end{split}$$

Ainsi,

$$f\left(rac{x}{2}
ight) + f\left(rac{1+x}{2}
ight) = 2f(x)$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$egin{split} g\left(rac{x+1}{2}
ight) &= 2\left(rac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(rac{1}{x+1+2n} + rac{1}{x+1-2n}
ight)
ight) \ g\left(rac{x}{2}
ight) &= 2\left(rac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(rac{1}{x+2n} + rac{1}{x-2n}
ight)
ight) \end{split}$$

De plus,

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1+2n} + \frac{1}{x+2n} \right) = \sum_{k=3}^{2N+1} \frac{1}{x+k} + \sum_{k=2 \atop k \text{ pair}}^{2N} \frac{1}{x+k}$$
$$= \sum_{k=2}^{2N+1} \frac{1}{x+k} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x+2N+1} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{x+n}$$

De la même manière :

$$\begin{split} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1-2n} + \frac{1}{x-2n} \right) &= \sum_{k=1 \atop k \text{ impair}}^{2N-1} \frac{1}{x-k} + \sum_{k=2 \atop k \text{ pair}}^{2N} \frac{1}{x-k} \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{x-k} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{x-n} \end{split}$$

Donc, en notant :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(rac{1}{x+1-2n} + rac{1}{x-2n} + rac{1}{x+1+2n} + rac{1}{x+2n}
ight)$$
 $S_N = rac{1}{x+2N+1} - rac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{2N} \left(rac{1}{x+n} + rac{1}{x-n}
ight)$

Ainsi,

$$g\left(rac{x+1}{2}
ight) + g\left(rac{x}{2}
ight) = 2\left(rac{1}{x} + rac{1}{x+1} + \lim_{N o + \infty} S_N
ight) = 2g(x)$$
 $\left[g\left(rac{x+1}{2}
ight) + g\left(rac{x}{2}
ight) = 2g(x)
ight]$

Question 3

a.

$$orall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f(x) - rac{1}{x} = \pi rac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - rac{1}{x} = rac{\pi}{\pi x + o(x)} - rac{1}{x}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x \to 0} \frac{1}{x} + o(1)$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$$

Posons : $orall t \in \mathbb{R} \setminus \{x, -x\}, h_x(t) = rac{1}{x+t} + rac{1}{x-t}$

$$egin{aligned} orall k \in \mathbb{N}^*, orall t \in]k,k+1[, \ \int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq \int_k^{k+1} h_x(k) dt \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt \ \int_2^{+\infty} h_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(rac{1}{x+k} + rac{1}{x-k}
ight) \leq \int_1^{+\infty} h_x(t) dt \end{aligned}$$

On a alors:

$$\int_2^N rac{1}{x+t} - rac{1}{t-x} \, dt = \ln \left(\left| rac{x+N}{N-x}
ight|
ight) + \ln \left(\left| rac{2-x}{x+2}
ight|
ight)$$

$$= \ln \left(\left| \frac{\frac{x}{N}+1}{1-\frac{x}{N}} \right| \right) + \ln \left(\left| \frac{2-x}{x+2} \right| \right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \ln \left(\left| \frac{2-x}{x+2} \right| \right)$$

De même,

$$\int_1^{+\infty} h_x(t)\,dt = \ln\left(\left|rac{1-x}{x+1}
ight|
ight)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{x-k}\right) \leq \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|rac{2-x}{x+2}
ight|
ight) \underset{x o 0}{\longrightarrow} 0 ext{ et } \ln\left(\left|rac{1-x}{x+1}
ight|
ight) \underset{x o 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc,

$$g(x)-rac{1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(rac{1}{x+n}+rac{1}{x-n}
ight)
ightarrowtail 0$$

ie

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{x \to 0} \, \frac{1}{x} + o(1)}$$

c.

On a:

$$\lim_{x\to 0} D(x) = 0$$

car

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + o(1) - o(1) = o(1)$$

De plus comme f et g sont 1-périodiques, D l'est aussi donc,

$$orall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x o z} D(x) = 0$$

Ainsi, on peux prolonger D par continuité sur $\mathbb Z$ par :

$$egin{aligned} ilde{D}: egin{cases} \mathbb{R}
ightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto egin{cases} D(x) & ext{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \ 0 & ext{ si } x \in \mathbb{Z} \ \end{cases} \end{aligned}$$

En effet $ilde{D}$ est bien continue car $orall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x o z} D(x) = 0$

 $ilde{D}$ est bien 1-périodique car :

$$orall x \in \mathbb{R}, egin{cases} ilde{D}(x+1) = D(x+1) = D(x) = ilde{D}(x) & ext{si } x
otin \mathbb{Z} \ ilde{D}(x+1) = 0 = ilde{D}(x) & ext{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et $orall k \in \mathbb{Z}, ilde{D}(z) = 0$,

Question 4

a.

 $\sup_{x\in[0,1]} \tilde{D}(x)$ existe bien et est réel car : $\tilde{D}(x)$ est continue sur [0,1] qui est un intervalle fermé. Comme : \tilde{D} est continue sur [0,1], il existe $\alpha\in[0,1]$ tel que :

$$\left| ilde{D}(lpha) = \sup_{x \in [0,1]} ilde{D}(x)
ight|$$

b.

$$orall n\in\mathbb{N}, ilde{D}(lpha)= ilde{D}\left(rac{lpha}{2^n}
ight)=M$$
 $\lim_{n o +\infty}\left(ilde{D}(lpha)- ilde{D}\left(rac{lpha}{2^n}
ight)
ight)= ilde{D}(lpha)-\lim_{n o +\infty} ilde{D}\left(rac{lpha}{2^n}
ight)=0$

or:

$$ilde{D}\left(rac{lpha}{2^n}
ight) = f\left(rac{lpha}{2^n}
ight) - g\left(rac{lpha}{2^n}
ight) \mathop{=}\limits_{n o +\infty} o(1)$$

$$\operatorname{car}: f\left(\tfrac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \ \tfrac{2^n}{\alpha} + o(1) \ \operatorname{et} \ g\left(\tfrac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \ \tfrac{2^n}{\alpha} + o(1)$$

d'après la question 3a. et 3b.

Donc,

$$\tilde{D}(\alpha) = 0$$

2. Les valeurs de la fonction zeta aux entiers pairs

Question 5

a.

Soit
$$y \in]-4\pi^2, 4\pi^2[\setminus\{0\},$$

On pose:

$$x = rac{y}{2\pi} ext{ et } S(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} rac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} y^{2k}$$

Alors,

$$S(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} rac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left(rac{y}{2\pi n}
ight)^2
ight)^k$$

car la série de terme général :

$$orall k\in\mathbb{N}^*, rac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} imesrac{1}{n^{2k}}\geq 0$$

Converge et:

$$n \geq 7 \Rightarrow r = \left(rac{y}{2\pi n}
ight)^2 < 1$$

puis d'après Fubini positif

Donc,

$$S(y)=2\sum_{n=1}^{+\infty}rac{\left(rac{y}{2\pi n}
ight)^2}{1-\left(rac{y}{2\pi n}
ight)^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}rac{\left(rac{y}{2\pi}
ight)^2}{n^2-\left(rac{y}{2\pi}
ight)^2}$$

Donc comme $rac{y}{2\pi} \in]-2\pi, 2\pi[$, d'après la question 4.b

$$1-S(y)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}rac{\left(rac{y}{2\pi}
ight)^2}{\left(rac{y}{2\pi}
ight)^2-n^2}=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}rac{x^2}{x^2-n^2}=\pi x \mathrm{cotan}(\pi x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{y}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{y}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}y^{2k}}$$

b.

Soit $x\in]-2\pi,2\pi[\setminus\{0\}$,

$$\begin{split} \cot \left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = i \frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = i \frac{e^{ix} + 1 + (1-1)}{e^{ix} - 1} \\ &= i + \frac{2i}{e^{ix} - 1} \end{split}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\frac{x}{2} \mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{ix}{2} + \frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{ix}{e^{ix}-1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}}$$

Question 6

Comme dans la question précédent $|x| < 2\pi$,

On pose :

$$z=|ix|<2\pi$$

et grâce au fait que $i^2=-1$:

Ainsi,

$$\left|z=(e^z-1)\left(1-rac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}rac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}
ight)
ight|$$