

Énoncé du DM 7

Problème 1 : Plaque de cuisson à induction

Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une table en céramique, un bobinage (inducteur) alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même.

Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation par effet Joule dans le fond des récipients tout en limitant l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif, un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

Avertissement :

- Ce problème conduit à comparer le comportement d'un fond en acier «amagnétique» à celui d'un fond en acier «magnétique» (ces termes sont des expressions simplifiées ; en réalité, on distingue les matériaux ferromagnétiques doux et durs, paramagnétiques, diamagnétiques...), cependant aucune connaissance des milieux magnétiques n'est nécessaire. Les comparaisons seront abordées en utilisant les valeurs des perméabilités magnétiques relatives μ_r données ci-après, sachant que la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ sera systématiquement remplacée par la perméabilité magnétique absolue du métal : $\mu = \mu_0 \times \mu_r$.
- On désignera par i le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$. A toute grandeur harmonique $a(M, t) = A(M) \cos(\omega t + \Phi(M))$, on associera le nombre complexe $\underline{a}(M, t) = \underline{A}(M) \exp(i\omega t)$ où $\underline{A}(M)$ représente l'amplitude complexe $\underline{A}(M) = A(M) \exp(i\Phi(M))$.

Données :

- pour l'acier amagnétique : $\mu_{r,a} = 1,0$ et $\gamma_a = 1,0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$;
- pour l'acier magnétique : $\mu_{r,m} = 350$ et $\gamma_m = 5,0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$;

Un inducteur alimenté par un courant i_1 génère un champ magnétique \vec{B}_1 sinusoïdal de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz (Figure 1) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial dont la face en regard de l'inducteur est centrée en O .

I. Modèle très simplifié

On suppose tout d'abord (*uniquement dans ce I*) que le champ \vec{B}_1 est le même que celui qui serait créé par un solénoïde de longueur infinie et de rayon b , comprenant une densité linéique de spires n («nombre de spires par mètre»), parcourues par un courant d'intensité $i_1 = I_m \cos(\omega t)$. On suppose aussi (*uniquement dans ce I*) que les courants sont induits dans toute la plaque circulaire, assimilée à un cylindre de longueur ℓ et de rayon b (section de surface S), avec $\ell \gg b$.

1. Exprimer la loi qui permet de prévoir qualitativement le sens de rotation des courants induits dans le cylindre. Préciser ce sens. Quelle est la fréquence des courants induits ?
2. Rappeler l'expression de $\vec{B}_1(t)$. En déduire l'expression du champ électrique \vec{E}_1 , puis la densité volumique de courants \vec{j} (induits en tout point du cylindre conducteur par ce champ \vec{B}_1) en utilisant la loi d'Ohm locale.
3. En déduire la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_{tot} \rangle$ dissipée dans la plaque.

4. On remplace le cylindre par un grand nombre N de tiges cylindriques isolées de même métal, de longueur ℓ et de section $s \sim S/N$. Exprimer la puissance $\langle \mathcal{P}'_{tot} \rangle$ dissipée dans l'ensemble des tiges, en fonction de $\langle \mathcal{P}_{tot} \rangle$. Commentaires ?
5. On considère à nouveau un seul cylindre métallique, de rayon b . En considérant les courants induits dans la plaque cylindrique entre les cylindres de rayon r et $r + dr$, déterminer le champ magnétique $d\vec{B}$ créé par ces courants induits, puis le champ total \vec{B} créé (en un point quelconque du cylindre) par tous les courants induits.

Montrer que l'amplitude de \vec{B} est négligeable devant celle de \vec{B} si $b \ll \sqrt{2} \times \delta$ en précisant l'expression de δ (épaisseur de peau).

Dans tout le reste du problème, cette condition n'est pas vérifiée ; on se propose d'étudier le phénomène se produisant alors (connu sous le nom d'effet de peau), en repartant du cadre général de l'électromagnétisme (de façon générale dans la suite de ce problème, on ne considère plus le modèle simplifié décrit dans le I).

II. Courants de Foucault - Effet de peau

6. Pour modéliser ces courants, on recherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées en rotation autour de l'axe Oz , avec une vitesse angulaire $\Omega(z)$, uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire. Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé $Oxyz$, l'axe Oy non représenté sur la figure 1 étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

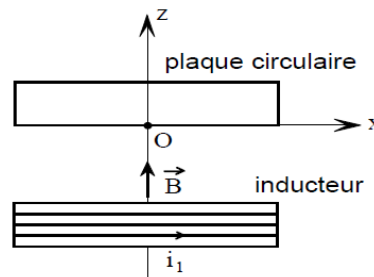


FIGURE 1 –

- (a) Exprimer la vitesse \vec{v} des charges électriques en un point $M(x, y, z)$ du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur \vec{OM} et du vecteur rotation $\vec{\Omega}(z)$, orienté selon Oz .
- (b) En déduire les composantes j_x et j_y de la densité de courant \vec{j} en fonction de la densité de porteurs de charges mobiles n (de charge élémentaire e), de la vitesse angulaire $\Omega(z)$ et des coordonnées du point M .
- (c) Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$.

7. Équations de Maxwell

- (a) Écrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue μ .
- (b) À partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.
- (c) Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges ρ_0 soit présente à l'instant $t = 0$, montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Évaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.
- (d) Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement (terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) sont négligeables devant les courants de conduction (terme \vec{j}). Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.

- (e) En déduire une relation entre la dérivée de la densité de courant \vec{j} par rapport au temps et son laplacien vectoriel $\vec{\Delta}(\vec{j})$ (équation de diffusion).
8. On recherche pour les composantes j_x et j_y de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire : $\underline{J}_x(z) \exp(i\omega t)$ et $\underline{J}_y(z) \exp(i\omega t)$.
Monter alors, en projetant l'équation de diffusion et en utilisant les résultats obtenus question 6c, que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :
- $$\frac{d^2 \underline{J}_x}{dz^2} = f(\underline{J}_x) \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{J}_y}{dz^2} = f(\underline{J}_y) \quad (2)$$
9. Résoudre ces équations (on introduira une grandeur δ homogène à une longueur et on donnera l'expression générale des amplitudes complexes \underline{J}_x et \underline{J}_y en faisant apparaître, dans chaque cas, deux constantes d'intégration notées $C_{\pm x,y}$).
Simplifier cette expression en ne conservant que la partie non divergente. δ est alors caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz («épaisseur de peau»).
10. L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence $f = 25$ kHz. La plaque a une épaisseur égale à $\ell = 1,0$ cm.
- (a) Montrer que $\delta \simeq \frac{503,3}{\sqrt{\gamma \mu_r f}}$.
- (b) Calculer la profondeur de pénétration des courants dans les deux cas, acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.
- (c) Comparer à l'épaisseur de la plaque et justifier ainsi que, malgré la petitesse de cette épaisseur, on puisse considérer la plaque comme illimitée en z .
11. Donner, en notation réelle, l'expression de la norme du vecteur densité de courant $\vec{j}(z)$, sous la forme $\|\vec{j}(z,t)\| = J_0 \exp(g(z)) \cos(h(z,t))$.

III. Transfert d'énergie électrique par mutuelle induction

12. Caractérisation de l'inducteur

L'inducteur, dont le rayon extérieur mesure 10 cm, comporte 20 spires. Pour des raisons techniques, elles sont généralement enroulées en spirale. Cependant, on considérera ici qu'il est équivalent à un bobinage ordinaire, chaque spire ayant un rayon moyen égal à $a = 5,0$ cm. Le fil électrique dont le rayon mesure $r_0 = 2,0$ mm est réalisé avec du cuivre multibrins (fils de Litz, rendant négligeable l'effet de peau *dans ces fils*). On considérera que la section de cuivre est égale à la moitié de la section du fil.

- (a) Calculer la résistance R_1 de l'inducteur sachant que le fil de cuivre utilisé a une conductivité $\gamma_1 = 55,5 \cdot 10^6$ S.m⁻¹.
- (b) L'inducteur, alimenté loin de la plaque, sous une tension efficace de 24 volts, à la fréquence de 25 kHz, est traversé par un courant de valeur efficace égale à 5,1 A.
Exprimer littéralement son auto-inductance L_1 puis en donner la valeur numérique.
13. Caractérisation de la plaque (induit)
- La plaque de résistance R_2 et d'auto-inductance L_2 , a un rayon $b = 10,0$ cm et une épaisseur égale à $\ell = 1,0$ cm. Elle peut être assimilée à une spire unique refermée sur elle-même ayant pour rayon la moitié de la valeur précédente soit $a = 5,0$ cm et une section de conduction circulaire d'aire S_{cond} égale à la section de passage des courants induits dans l'épaisseur de peau du disque soit $S_{cond} = 2a\delta$.
- L'auto-inductance de la spire est évaluée selon la formule $L_2 = \mu_0 a \left(\ln \left(\frac{8a}{r_{cond}} \right) - \frac{7}{4} \right)$ où r_{cond} représente le rayon de la section de conduction, supposé très inférieur à a .

- (a) Calculer la résistance R_2 de la plaque réalisée en acier magnétique.
- (b) Calculer l'auto-inductance L_2 de la plaque réalisée en acier magnétique.
- (c) Montrer que pour la fréquence utilisée (25 kHz), on peut négliger $(R_2)^2$ devant $(L_2\omega)^2$ avec une erreur inférieure à 5 %.

Par la suite, tous les calculs numériques seront à effectuer dans le cadre de cette approximation.

14. L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$. Sachant que l'ensemble inducteur-plaque se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance M :
 - (a) Écrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et le courant $i_2(t)$ parcourant la plaque (Figure 2).

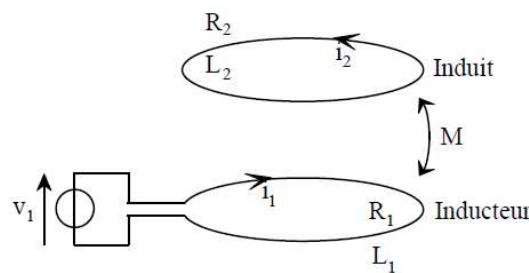


FIGURE 2 –

- (b) En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$.
 - (c) En déduire aussi l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe $\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}$ du système.
15. Simplifier les deux expressions précédentes puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2,0\mu\text{H}$.

IV. Influence de la nature du matériau formant la plaque.

16. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 watts. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ?
En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité du courant dans la plaque et la puissance de chauffe développée dans celle-ci.
17. Lorsqu'on reprend les mêmes calculs mais avec les données de l'acier amagnétique, on trouve $R_2 \simeq 1,0\text{m}\Omega$, $I_2/I_1 \simeq 16,5$ et $Z_e \simeq 0,56\Omega$, les impédances ayant baissé à cause de l'épaisseur de peau plus grande.
Reprendre la question précédente et montrer qu'utiliser l'acier amagnétique revient à diminuer nettement la puissance de chauffe de la plaque, malgré une très nette augmentation de l'intensité du courant dans celle-ci.
18. La tension d'alimentation est réglée à $V_1 = 110$ volts, valeur efficace proche du maximum toléré, en vue de recevoir une plaque en acier magnétique. Dans le cas où un utilisateur déposerait sur la table un récipient en acier amagnétique, montrer qu'il existe un risque d'échauffement excessif de l'inducteur (on pourra évaluer un ordre de grandeur de cet échauffement, étant données les capacités thermiques massiques à pression constante du fer et de l'eau : $c_f = 0,45\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $c_e = 4,18\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Proposer une solution pour éviter tout accident de ce type.