DM4

Le lemme d'Abel

Question 1

a.

Comme f' est continue sur I alors par le théorème des valeurs intermédiaires $f'(I)$ est un segment ainsi

$$\boxed{f' \text{ est bornée.}}$$

Soit $x \in I$,
D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f' est continue, f' est intégrable et on a une primitive de f' qui est f,

$$\int_0^x f' = f(x) - f(0)$$

alors, comme f' est bornée,

$$||f'||_\infty \in \mathbb{R}$$

puis, par l'inégalité de la moyenne et les inégalités triangulaires :

$$|f(x)| - |f(0)| \leq \left|\int_0^x f'\right| = |f(x) - f(0)| \leq \int_0^x |f'| \leq ||f'||_\infty x$$

Donc,

$$|f(x)| \leq ||f'||_\infty x + |f(0)| \leq ||f'||_\infty \frac{\pi}{2} + |f(0)| \in \mathbb{R}$$

(ne dépend pas de x)

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien bornée.}}$$

b.

Soit $x \in I \setminus \{0\}$,

$$I_f(x) = -\frac{i}{x}[f(t)e^{ixt}]_0^{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)e^{ixt}\,dt$$

$$= i\frac{1}{x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)e^{ixt}\,dt + f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{ix\frac{\pi}{2}}\right)$$

Comme $\left|f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{ix\frac{\pi}{2}}\right| \geq 0$ et par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)e^{ixt}\,dt + f(0) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{ix\frac{\pi}{2}}\right| \leq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)e^{ixt}\,dt\right|$$

Alors, par les inégalités de la moyenne :

$$|I_f(x)| \leq \frac{1}{|x|}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)e^{ixt}\,dt\right| \leq \frac{1}{|x|}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f'(t)e^{ixt}\right|dt \leq \frac{||f'||_\infty}{|x|}\frac{\pi}{2}$$

De plus, on a par les inégalités de la moyenne :

$$|I_f(x)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leq ||f||_\infty \frac{\pi}{2}$$

Alors, en sommant les deux inégalités :

$$|I_f(x)| \leq \frac{\pi}{4}\left(\frac{||f'||_\infty}{|x|} + ||f||_\infty\right) = \frac{\pi}{4\,|x|}\left(||f'||_\infty + ||f||_\infty\,|x|\right)$$

Ainsi,

$$|I_f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \times \frac{\pi}{4}\left(||f'||_\infty + \frac{\pi}{2}||f||_\infty\right) = \frac{A}{|x|}$$

Avec

$$\boxed{A = \frac{\pi}{4}\left(M' + \frac{\pi}{2}M\right)}$$

c. Pas de finalité

Soit $x \in I \setminus \{0\}$,
On a :

$$I_f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(xt)\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(xt)\,dt$$

on pose : $\forall t \in I, f(t) = w(t) + iy(t)$, alors,

$$I_f(x) = \int_0^{\pi/2} (w(t)\cos(xt) - y(t)\sin(xt))\,dt$$
$$+i\int_0^{\pi/2} (y(t)\cos(xt) + w(t)\sin(xt))\,dt$$

Donc,

$$\sqrt{\mathrm{Re}(I_f(x))^2 + \mathrm{Im}(I_f(x))^2} = |I_f(x)| \leq \frac{A}{|x|}$$

alors,

$$0 \leq \mathrm{Re}(I_f(x))^2 + \mathrm{Im}(I_f(x))^2 \leq \frac{A^2}{x^2}$$

Par le théorème de convergence par encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Re}(I_f(x))^2 + \mathrm{Im}(I_f(x))^2) = 0$$

Donc,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Re}(I_f(x)) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Im}(I_f(x)) = 0 \end{cases}$$

(car $t \mapsto t^2$ est positive)
Alors,

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Question 2

a.

$$h : \begin{cases}]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \end{cases}$$

est continue,
puis,

$$\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{nt}{t} = n$$

Donc,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$$

Ainsi, en prolongeant par continuité h, on obtiens :

$$f : \begin{cases} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} n & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

qui est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \in \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right) \text{ donc, } J_n \text{ existe bien}}$$

b.

$$\begin{cases} J_0 = 0 \\ J_1 = \frac{\pi}{2} \\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sin(t)}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt = 1 \end{cases}$$

Question 3

a.

On pose : $p = a + b$ et $q = a - b$,
alors $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$,

$$\begin{aligned} \sin a - \sin b \quad &= \cos\left(\tfrac{q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{p}{2}\right)\sin\left(\tfrac{q}{2}\right) \\ &- \sin\left(\tfrac{p}{2}\right)\cos\left(\tfrac{q}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{p}{2}\right)\cos\left(\tfrac{q}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\tfrac{q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

b.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$J_n - J_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt) - \sin(nt-2t)}{\sin(t)}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((n-1)t)\sin(t)}{\sin(t)}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos((n-1)t)\,dt$$

$$= \frac{2}{n-1}\left[\sin((n-1)t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{J_n - J_{n-2} = \frac{2}{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)}$$

c.

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, J_{2N+1} - J_{2N-1} = \frac{1}{N}\sin(\pi N) = 0$$

Alors,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, J_{2N+1} = J_{2N-1}$$

i.e. tous les termes impairs de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sont égaux
Donc, en prenant $N = 1$,

$$J_{2N-1} = J_1 = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, J_{2N+1} = \frac{\pi}{2}$$

(fonctionne aussi pour $N \in \mathbb{N}$)

d.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} J_{2N} - J_{2(N-1)} &= \tfrac{2}{2N-1} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}(2N-1)\right) \\ &= \tfrac{2}{2N-1}\left(\sin(\pi N)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi N)\right) \\ &= (-1)^{N-1}\tfrac{2}{2N-1} \end{aligned}$$

On somme tous ces termes :

$$J_{2N} = J_{2N} - J_0 = \sum_{n=1}^{N}(J_{2n} - J_{2(n-1)}) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Ainsi,

$$\boxed{J_{2N} = 2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Question 4

a.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} J_n - J_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt) - \sin((n-1)t)}{\sin(t)}\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t)}\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)}{\cos\left(\frac{t}{4}\right)}\,dt \end{aligned}$$

alors, on pose :

$$\psi : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{4}\right)} \end{cases}$$

ψ est bien $\mathcal{C}^1$ car :
en notant $h : t \mapsto \frac{t}{4}$, $h(I) = \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$
alors, $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ ne s'annule pas et est positive sur I.
Donc ψ est continue sur I. (car $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est sur I)
Puis comme $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ est dérivable sur I, et sa dérivée ne s'annule pas sur I,
$\psi \in \mathcal{C}^1(I)$,

Ainsi,

$$\boxed{J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \psi(t) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right) dt}$$

b.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
On pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \psi(t) e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)t}\, dt$$

Alors,

$$\mathrm{Re}(W_n) = \int_0^{\pi/2} \psi(t) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

(car $\psi(I) \subset \mathbb{R}$)
comme $\psi \in \mathcal{C}^1(I)$, d'après le lemme d'Abel,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Re}(W_n) = 0}$$

c.

Comme :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} J_{n-1}$$

Donc, comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{\pi}{2}$ si n est impair ou $J_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ si n est pair,
J_n et J_{n-1} ont la même limite, et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$$

Question 5

On distingue deux cas,
Si $n = 2N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} (J_n - J_{n-1}) = \lim_{N\to+\infty} \left(2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Donc,

$$\pi = \lim_{N\to+\infty} 4\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

et comme :

$$-\frac{1}{2N+1} \leq \frac{(-1)^N}{2N+1} \leq \frac{1}{2N+1}$$

par le théorème de convergence par encadrement :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(-1)^N}{2N+1} = 0$$

Ainsi, par linéarité de la limite,

$$\pi = \lim_{N\to+\infty} 4\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Si $n = 2N-1$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, comme on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) &= \lim_{n\to+\infty}(J_{n-1} - J_n) \\ &= \lim_{N\to+\infty}(J_{2(N-1)} - J_{2N-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

C'est le même raisonnement que celui exposé au dessus.

Ainsi, dans tous les cas on a bien :

$$\boxed{\pi = \lim_{N\to+\infty} 4\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Question 6

On a $g \in \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, car :

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t} - \lim_{t\to0}\frac{1}{t} = 0$$

car $\sin(t) \underset{t\to0}{\sim} t$,

Puis, comme :

- $t \mapsto \frac{1}{\sin t} \in \mathcal{C}^1\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$,
- $t \mapsto \frac{1}{t} \in \mathcal{C}^1\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

On a : $g \in \mathcal{C}^1\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, et

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], g'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t - t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t}$$

Alors, comme :

$$\begin{aligned} \sin^2(t) - t^2\cos(t) &\underset{t\to 0}{=} \left(t - \tfrac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 - t^2\left(1 - \tfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &\underset{t\to 0}{=} t^2 - \tfrac{t^4}{3} - t^2 + \tfrac{t^4}{2} + o(t^4) \\ &\underset{t\to 0}{=} \tfrac{t^4}{6} + o(t^4) \end{aligned}$$

Alors,

$$\sin^2(t) - t^2\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^4}{6}$$

et puis :

$$t^2 \sin^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^4$$

Donc,

$$\frac{\sin^2 t - t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{6}$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

En appliquant le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{g' \in \mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)}$$

Question 7

a.

Soit $n \in \mathbb{N}$,
On pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} g(t)e^{int}\,dt$$

Alors,

$$\mathrm{Im}(W_n) = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin(nt)\,dt$$

(car $g(I) \subset \mathbb{R}$)
Donc, comme $g \in \mathcal{C}^1(I)$, par le lemme d'Abel,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(W_n) = 0}$$

b.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

c.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
On fait un changement de variable :

$$\gamma : T \mapsto \frac{T}{n}$$

Alors,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{nt}\,ndt = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

Question 8