DM 15

Question 1

a.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroit, alors par le critère de Leibniz, } \boxed{T(x) \text{ converge donc T est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

et puis par le critère de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq 1$$

et comme T est de même signe que : $(-1)^{1+1}$,

$$\boxed{T(\mathbb{R}_+^*) = [0,1]}$$

b.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |T(x) - 1| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leq \frac{1}{2^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi,

$$\boxed{T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Question 2

a.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,
On pose :

$$h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x} \text{ alors } h' : t \mapsto \frac{t^{x-1} - \ln(t)xt^{x-1}}{t^{2x}}$$

Donc,

$$\exists t \in \mathbb{R}_+^*, h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^{x-1} \geq \ln(t)xt^{x-1} \Leftrightarrow 1 \geq \ln(t^x) \Leftrightarrow t \leq e^{\frac{1}{x}} \text{ de même } \exists t \in \mathbb{R}_+^*, h'(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq e^{\frac{1}{x}} \geq \left\lceil e^{\frac{1}{x}} \right\rceil$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq \left\lceil e^{\frac{1}{x}} \right\rceil \Rightarrow \left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\geq1} \text{ est strictement croissante}}$$

b.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n'(x) = \frac{x(-1)^n}{n^{x+1}} \text{ de plus } \left(\frac{f_n'}{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroit alors } \sum_{n\geq1} f_n' \text{ est une série de libniz qui converge}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x) + \sum_{k=1}^{n} f_n'(x)\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^{a+1}} \text{ car } x > a \text{ et } n+1 \geq 1$$

Ainsi, on a obtenu une majoration indépendante de x donc,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'\right\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n' \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[}$$

donc,

$$\sum_{n\geq 1} f_n' \text{ converge uniformément sur tout segment de } [a,+\infty[\text{ donc sur }]0,+\infty[$$

puis,

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge simplement sur : }]0,+\infty[\text{ ansi : } \boxed{T\in\mathcal{C}^1}$$

Question 3

a.

$$\forall x>1, T(x)-Z(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^x}=-2\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pairs}}}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^x}=\boxed{-2^{1-x}Z(x)}$$

b.

D'après la question précédente :

$$\boxed{\forall x>1, T(x)=(1-2^{x-1})Z(x)}$$

c.

$$\boxed{T(2)=\frac{1}{2}Z(2)=\frac{\pi^2}{12}}$$

Question 4

a.

$$\text{On a : } T(x)\underset{x\to 1}{=}T(1)+T'(1)(x-1)+o(x-1) \text{ par Taylor-Lagrange}$$

Car d'après la question précédente $T\in\mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ en posant $a=T'(1)$ qui existe

b.

$$\boxed{1-2^{1-x}=1-e^{(1-x)\ln(2)}\underset{x\to 1}{=}-(1-x)\ln(2)-\frac{(1-x)^2\ln(2)^2}{2}+o((1-x)^2)}$$

c.

D'après la question 3.b :

$$Z(x)=\frac{T(x)}{1-2^{1-x}}\underset{x\to 1}{=}\frac{\ln(2)+a(x-1)+o(x-1)}{-(1-x)\ln(2)+o(x-1)}\underset{x\to 1}{=}\frac{1}{x-1}+\frac{a(x-1)}{(x-1)\ln(2)}+o(1)\underset{x\to 1}{=}\boxed{\frac{A}{x-1}+B+o(1) \text{ où } A=1 \text{ et } B=\frac{a}{\ln(2)}}$$

Question 5

a.

$$\forall x\in[1,2],\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in[n,n+1], n^x\leq t^x\leq(n+1)^x\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}\Leftrightarrow 0\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\boxed{\forall x\in[1,2], 0\leq v_n(x)\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}}$$

b.

D'après la question précédente :

$$v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

et comme :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) \text{ converge car c'est une série télescopique}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n(x) \text{ converge}}$$

c.

$$\forall x \in]1,2], \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dx = \frac{1}{n^x} + \frac{1}{x-1}((n+1)^{1-x} - n^{1-x})$$

Alors,

$$\forall x \in]1,2], \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = Z(x) + \frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right) = Z(x) - \frac{1}{x-1} \text{ Ainsi, } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = Z(x) + \frac{1}{1-x}}$$

d.

On pose : $f : t \mapsto t^{-x}$ alors comme f est continue et sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$,

$$\exists c \in]n, n+1[, f'(c) = f(n+1) - f(n)$$

Donc,

$$-\frac{x}{c^{x+1}} = \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x}$$

Alors on a : $v_n(x) \leq \frac{x}{c^{x+1}}$ par la question 5.a donc,

e.

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge uniformément, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to 1^+}\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) \text{ par continuité de } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n$$

$$\text{Et, d'après la question 5.c : } \forall x \in]1,2], Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) + \frac{1}{x-1}$$

Ainsi,

$$\boxed{Z(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)}$$

Question 6

D'après la question 5.e et la question 4.c

$$Z(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x\to 1}{=} \gamma + o(1) \underset{x\to 1}{=} \frac{a}{\ln(2)} + o(1)$$

alors, comme $a = T'(1)$,

$$\boxed{a = \gamma \ln(2)}$$