DM6 - Série de Hardy

Question 1

Supposons que $\alpha > 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

alors, comme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

(car $\alpha > 1$ par le critère des séries de Riemann)
et que $|a_n| \geq 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ Converge absolument}$$

et donc,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ Converge pour } \alpha > 1}$$

Question 2

On pose :

$$I_x = \int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\, dt$$

a.

$$\boxed{\int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\, dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}}\, du}$$

car $x > 1 > 0$, et $\sqrt{t} > 0$.

b.

On effectue une integration par parties :
On pose par integration par parties :

$$\begin{cases} v = \frac{1}{u^{2\alpha-1}} \\ dv = -\frac{2\alpha-1}{u^{2\alpha}}du \end{cases} \text{ et } \begin{cases} w = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi u) \\ dw = \sin(\pi u)du \end{cases}$$

Alors,

$$\boxed{I_x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{x}} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\, du}$$

c.

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\, du \text{ converge}$$

car on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \left|\frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\right| du \leq \lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{u^{2\alpha}}\, dx$$

puis, comme : $2\alpha > 1$, et que :

$$\forall u \in [1,+\infty[, \left|\frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\right| > 0$$

On a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2\alpha}}\, du \text{ qui converge}$$

Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\, du \text{ est intégrable, donc converge}$$

Ainsi,
comme :

$$I_x = \frac{2}{\pi}\left(1 - \sqrt{x}\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{x^\alpha} - (2\alpha-1)\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\, du\right)$$

et que :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^{\alpha-1/2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{x^{\alpha-1/2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1/2}} = 0$$

car $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$,

$$\lim_{x\to+\infty} I_x = \frac{2}{\pi}\left(1 - (2\alpha-1)\lim_{x\to+\infty}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\, du\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{I_x \text{ Converge}}$$

d.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_n = I_n$$

Par la relation de Chasles.
Alors, Comme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} I_n$$

Et que I_n converge,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} b_n \text{ Converge}}$$

e.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} - \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\, dt\right|$$

Or,

$$\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\, dt = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$$

Alors,

$$|a_n - b_n| = \left|\int_n^{n+1} \left(\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha} - \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right) dt\right|$$

car $|\cdot|$ est paire.
Donc, par l'inégalité de la moyenne intégrale :

$$\boxed{|a_n - b_n| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\, dt}$$

f.

φ est bien dérivable sur $[1, +\infty[$ car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi'(t) &= \pi \tfrac{\cos(\pi\sqrt{t})}{2t^{\alpha+1/2}} - \alpha \tfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^{\alpha+1}} \\ &= \tfrac{1}{t^{\alpha+1/2}} \left(\tfrac{\pi}{2}\cos(\pi\sqrt{t}) - \tfrac{\alpha \sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Puis,

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{t^{\alpha+1/2}}}$$

Ainsi,

$$\boxed{K = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$

qui est strictement positif car : $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 < \frac{\pi}{2}$,

g.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Soit $t \in [1, +\infty[$,
On a montré dans la question précédente que :

$$|\varphi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+1/2}}$$

Donc par croissance de l'intégrale et inégalité de la moyenne et précédente.

$$|\varphi(t) - \varphi(n)| = \left| \int_n^t \varphi'(x)\, dx \right| \leq \int_n^t |\varphi(x)|\, dx \leq K \int_n^t \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\, dx$$

.....

Question 3

Soit $n \in \mathbb{N}$,

a.

(1)

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Alors,

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$$

(2)

$$e^{i\pi\sqrt{1+n}} = e^{i\pi\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+O(n^2)\right)} = e^{i\pi\sqrt{n}} e^{i\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)}$$

$$= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(1+\frac{i\pi}{2\sqrt{n}}+\frac{\left(i\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\right)^2}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= e^{i\pi\sqrt{n}}\left(1+\frac{i\pi}{2\sqrt{n}}-\frac{\pi^2}{8n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$$

Alors,

$$\boxed{e^{i\pi\sqrt{n+1}}-e^{i\pi\sqrt{n}}=\frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}-\frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$$

(3)

Il suffit de prendre la partie réelle du calcul précédent (qui fonctionne bien grace à la $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle)
Comme :

$$\mathrm{Re}(e^{i\pi\sqrt{n+1}}-e^{i\pi\sqrt{n+1}})=\cos(\pi\sqrt{n+1})-\cos(\pi\sqrt{n})$$

On a ainsi:

$$\boxed{\cos(\pi\sqrt{n+1})-\cos(\pi\sqrt{n})=-\frac{\pi\sin(\pi\sqrt{n})}{2\sqrt{n}}-\frac{\pi^2\cos(\pi\sqrt{n})}{8n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$$

b.

On pose :

$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ p\mapsto(2p)^2\end{cases}$$

$$\psi:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ p\mapsto(2p+1)^2\end{cases}$$

Qui sont bien définies et strictement croissantes. Ce sont alors des extractrices.
Donc,

$$\begin{cases}(\cos(\pi\sqrt{\varphi(p)}))_{p\in\mathbb{N}}=(1)_{p\in\mathbb{N}}\\ (\cos(\pi\sqrt{\psi(p)}))_{p\in\mathbb{N}}=(-1)_{p\in\mathbb{N}}\end{cases}$$

qui sont des suites extraites constantes
Ainsi, leurs deux limites diffèrent donc la suite :

$$\boxed{(\cos(\pi\sqrt{p}))_{p\in\mathbb{N}}\text{ Diverge}}$$

c.

On a prouvé que :

$$\cos(\pi\sqrt{n+1})-\cos(\pi\sqrt{n})=-\frac{\pi\sin(\pi\sqrt{n})}{2\sqrt{n}}-\frac{\pi^2\cos(\pi\sqrt{n})}{8n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Puis comme :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\cos(\pi\sqrt{k+1})-\cos(\pi\sqrt{k}))=\cos(\pi\sqrt{n})+1$$

Alors,

$$\cos(\pi\sqrt{n})+1=-\frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}+\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\pi\sqrt{k})}{k}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)-\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\pi\sqrt{k})}{k}-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\sqrt{n})$$

En faisant tendre n vers l'infini, comme :

$$\left(O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)-\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\cos(\pi\sqrt{k})}{k}-\frac{2}{\pi}\right)_{p\in\mathbb{N}}\text{ Converge}$$

(D'après l'hypothèse de l'énoncé puis $\frac{1}{p^{3/2}}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$)

et que :

$$\left(-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\sqrt{p})\right)_{p\in\mathbb{N}}\text{ Diverge}$$

On a ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n\text{ Converge pour }\alpha=\frac{1}{2}}$$

Question 4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

a.

$$\frac{A_n}{n^{1/2-\alpha}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{A_k}{k^{1/2-\alpha}}-\frac{A_{k+1}}{(k+1)^{1/2-\alpha}}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{(k+1)^{1/2-\alpha}}$$

$$=\frac{A_n}{n^{1/2-\alpha}}-\frac{A_n}{n^{1/2-\alpha}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(\pi\sqrt{k+1})}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$$

Par télescopage, changement de variable et ajout d'un terme nul à la somme.

b.