DM16

Note

Les lignes horizontales représentent les question ou il n'y a pas de finalité

Question 1

$$\forall m,n \in \mathbb{Z}, n \neq m \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-m)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)}e^{it(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2i\pi(n-m)}(e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}) = \frac{1}{\pi(n-m)}\sin(\pi(n-m)) =$$

$$\forall n,m \in \mathbb{Z}, m = n \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{\pi-(-\pi)}{2\pi} = 1$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}\,dt = \delta_n(m)}$$

Question 2

Soit $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \times \frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{-it/2}e^{-int}}{e^{-i(n+1/2)t}} \times \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ Ainsi, } \boxed{D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

Question 3

a.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)^4}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^4}\,dt \geq \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)^4}{t^4}\,dt}$$

car : $\forall t \in]-\pi,\pi[, \sin\left(\frac{t}{2}\right)^4 \leq \frac{t^4}{16}$ et par croissance de l'intégrale

---

b.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)^4}{\sin(t)^4}\,dt = 2\int_{0}^{\pi} t\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)^4}{\sin(t)^4}\,dt \text{ car l'intégrande est paire et centré en 0 :}$$

$$|t|\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)^4}{\sin(t)^4} \underset{t\to 0}{=} |t|\left(N+\frac{1}{2}\right)^4 + o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et en prolongeant par continuité l'intégrande l'intégrale existe bien.

On pose par changement de variable : $t = \frac{1}{N+\frac{1}{2}}x$ et $dt = \frac{1}{N+\frac{1}{2}}dx$
Alors,

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t^3}\,dt = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(x)^4}{\frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^3}x^3}\,\frac{dx}{N+\frac{1}{2}} = \left(N+\frac{1}{2}\right)^2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(x)^4}{t^3}\,dx$$

Ainsi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|D_N(t)^4\,dt \leq 2\pi^4\left(N+\frac{1}{2}\right)^2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t)^4}{t^3}\,dt$$

Alors comme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^4}{t^3}\,dt \text{ converge absolument car } \left|\frac{\sin(t)^4}{t^3}\right| \leq \frac{1}{t^3} \text{ est intégrable sur } [a,+\infty[\text{ pour } a \in \mathbb{R}_+^*, \text{ et en } 0 \frac{\sin(t)^4}{t^3} \underset{t\to 0}{=} t + o(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^4}{t^3}\,dt \text{ converge et puis comme } \forall t \in]0,+\infty[, \frac{\sin(t)^4}{t^3} \geq 0 \text{ Ainsi } \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} |t| D_N(t)^4\,dt \leq 2\pi^4 \left(N+\frac{1}{2}\right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^4}{t^3}\,dt}$$

c.

D'après la question a et b :

$$0 \leq \frac{1}{I_N} \int_{-\pi}^{\pi} |t| D_N^4(t)\,dt \leq 2\pi^4 \left(N+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^3}\,dt}{CN^3}$$

Question 1

$$\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{it(2^n - 2^{n_0})} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(t)$$

Alors,

$$||b_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |a_n| \text{ indépenant de } t$$

Donc, comme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ converge}, H \text{ converge normalement donc uniformément}$$

Puis, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$
Ainsi,

$$\boxed{H \text{ est continue sur } \mathbb{R}} \text{ et } \boxed{H(0) = 0} \text{ puis, } \boxed{H'(0) = F'(0) + F(0) = 0}$$

Question 2

Soit $k \in [\![-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]\!]$,
alors $2^{n_0} + k \in [\![2^{n_0-1}+1, 2^{n_0+1}-1]\!]$
Et puis,

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(t)e^{-ikt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(2^n-(2^{n_0}+k))t}\,dt \text{ comme : } \int_{-\pi}^{\pi} |a_n|\,dt \text{ converge, et que : } H \text{ simplement}$$

(car normalement d'après la question précédente)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(2^n-(2^{n_0}+k))t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n e^{i(2^n-(2^{n_0}+k))t}\,dt$$

Si $k = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i2^n t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n e^{i2^n t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{i(2^n - 2^{n_0})} (e^{i(2^n-2^{n_0})\pi} - e^{-i(2^n-2^{n_0})\pi}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{n-1} - 2^{n_0-1}} \sin((2^n - 2^{n_0})\pi)$$

Donc, tous les termes de la somme sauf n_0 sont nuls alors on pose : $X = 2^n - 2^{n_0}$ alors

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} H(t)\,dt = 2\pi a_{n_0} \lim_{X\to 0} \frac{\sin(\pi X)}{\pi X} = 2\pi a_{n_0}}$$

Si $k \neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(t)e^{-ikt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n e^{it(2^n-(2^{n_0}+k))}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(e^{i\pi(2^n-(2^{n_0}+k))} - e^{-i\pi(2^n-(2^{n_0}+k))})}{i(2^n-(2^{n_0}+k))} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin(\pi(2^n-(2^{n_0}+k)))}{2^n-(2^{n_0}+k)}$$

Ainsi, comme : $2^{n_0} + k \in [\![2^{n_0-1} + 1, 2^{n_0+1} - 1]\!]$ $\forall n \geq n_0, 2^n - (2^{n_0} + k) \neq 0$ car :

$$\forall n > n_0, 0 < 1 \leq 2^n - 2^{n_0+1} + 1 \leq 2^n - (2^{n_0} + k) \neq 0$$

$$\forall n < n_0, 2^n - (2^{n_0} + k) \leq -1 < 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}, 2^n - (2^{n_0} + k) = -k \neq 0$$

Ainsi, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(\pi(2^n - (2^{n_0} + k))) = 0 \text{ on a bien : } \boxed{k \neq 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} H(t)e^{-ikt}\,dt = 0}$$