DM 14

Note

Les petits points corespondent à des questions laissés sans finalité.

1. Développement Eulérien de la cotangente

Question 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - n^2}$$

Or,

$$\left| \frac{x}{x^2 - n^2} \right| \sim \left| \frac{x}{n^2} \right| \geq 0 \text{ et } |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge absolument}$$

Ainsi, comme la convergence absolue implique la convergence :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \text{ converge}}$$

a.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \pi \text{cotan}(\pi - x) \\ &= \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} \\ &= -\pi \text{cotan}(\pi x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\tfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{n-x} - \tfrac{1}{x+n} \right) \\ &= -\tfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{x+n} + \tfrac{1}{x-n} \right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, g et f sont impaires

b.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \pi \text{cotan}(\pi x) = f(x)$$

$$\boxed{f(x+1) = f(x)}$$

$$g(x+1) = \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,
On pose :

$$G_N = \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right)$$

Comme :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1+n}+\frac{1}{x+1-n}\right)=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}$$

Alors,

$$G_N=\frac{1}{x+1}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}$$

Donc,

$$G_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+N+1}-\frac{1}{x-N}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, on a bien :

$$\boxed{g(x+1)=g(x)}$$

c.

f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
Comme : $x\mapsto\frac{1}{\sin(\pi x)}$ et $x\mapsto\cos(\pi x)$ sont continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors, par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

<u>Plan de la démonstration</u> :
Comme on a :

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$$

Soit $n_0\in\mathbb{Z}$,
On souhaite savoir si :

$$g \text{ est continue sur } I_{n_0}=]n_0,n_0+1[$$

ce qui implique que g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
Il suffit alors de montrer que pour tout segment de I_{n_0} de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, g est continue.

<u>Démonstration</u> :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$,
Soit $a,b\in I_{n_0}$, $[a,b]$ est donc un segment de I_{n_0},
On pose : $h_n : x\mapsto\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}$

$$||h_n||_{\infty,[a,b]}=2\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{x}{x^2-n^2}\right|$$

On a alors :

$$\forall x\in[a,b], h_n'(x)=2\frac{x^2-n^2-2x^2}{(x^2-n^2)^2}=-2\frac{n^2+x^2}{(x^2-n^2)^2}<0$$

(car h_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)
Ainsi, comme h_n est strictement décroissante :

$$||h_n||_{\infty,[a,b]}=2\left|\frac{a}{a^2-n^2}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\,|a|}{n^2}\geq 0$$

et

$$2\,|a|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||h_n||_{\infty,[a,b]} \text{ converge}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I_{n_0}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur tout segment de } I_{n_0}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur } I_{n_0}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

Comme,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \mapsto \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et
$x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$ converge uniformément,

Donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$\boxed{g \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

Question 2

a.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi\text{cotan}\left(\pi\frac{1+x}{2}\right) = \pi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)} = -\pi\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{x}{2}\right) + f\left(\tfrac{1+x}{2}\right) &= \pi\left(\tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \tfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \pi\tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\pi\tfrac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}{\sin(x)} \\ &= 2\pi\tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= 2f(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x)}$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1+2n} + \frac{1}{x+1-2n}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x-2n}\right)\right)$$

De plus,

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1+2n}+\frac{1}{x+2n}\right)=\sum_{\substack{k=3\\ k \text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{x+k}+\sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{x+k}$$

$$=\sum_{k=2}^{2N+1}\frac{1}{x+k}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x+2N+1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{x+n}$$

De la même manière :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1-2n}+\frac{1}{x-2n}\right)=\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2N-1}\frac{1}{x-k}+\sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{x-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{x-k}=\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{x-n}$$

Donc, en notant :

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1-2n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x+1+2n}+\frac{1}{x+2n}\right)$$

$$S_N=\frac{1}{x+2N+1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$$

Ainsi,

$$g\left(\frac{x+1}{2}\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\lim_{N\to+\infty}S_N\right)=2g(x)$$

$$\boxed{g\left(\frac{x+1}{2}\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)=2g(x)}$$

Question 3

a.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, f(x)-\frac{1}{x}=\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}-\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{=}\frac{\pi}{\pi x+o(x)}-\frac{1}{x}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x}+o(1)}$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$g(x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$$

Posons : $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{x,-x\}, h_x(t)=\frac{1}{x+t}+\frac{1}{x-t}$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall t\in]k,k+1[,$$

$$\int_k^{k+1}h_x(t)dt\le\int_k^{k+1}h_x(k)dt\le\int_{k-1}^{k}h_x(t)dt$$

$$\int_2^{+\infty}h_x(t)dt\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right)\le\int_1^{+\infty}h_x(t)dt$$

On a alors :

$$\int_2^N\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t-x}\,dt=\ln\left(\left|\frac{x+N}{N-x}\right|\right)+\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{\frac{x}{N}+1}{1-\frac{x}{N}}\right|\right) + \ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right)$$

De même,

$$\int_1^{+\infty} h_x(t)\,dt = \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{x-k}\right) \leq \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$$

Donc,

$$g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$$

ie

$$\boxed{g(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x} + o(1)}$$

c.

On a :

$$\lim_{x\to0} D(x) = 0$$

car

$$f(x) - g(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + o(1) - o(1) = o(1)$$

De plus comme f et g sont 1-périodiques, D l'est aussi donc,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to z} D(x) = 0$$

Ainsi, on peux prolonger D par continuité sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{\tilde{D} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} D(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}}$$

En effet $\tilde{D}$ est bien continue car $\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to z} D(x) = 0$
$\tilde{D}$ est bien 1-périodique car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \tilde{D}(x+1) = D(x+1) = D(x) = \tilde{D}(x) & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \tilde{D}(x+1) = 0 = \tilde{D}(x) & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et $\forall k \in \mathbb{Z}, \tilde{D}(z) = 0$,

Question 4

a.

$\sup_{x\in[0,1]} \tilde{D}(x)$ existe bien et est réel car : $\tilde{D}(x)$ est continue sur $[0,1]$ qui est un intervalle fermé.
Comme : $\tilde{D}$ est continue sur $[0,1]$, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que :

$$\boxed{\tilde{D}(\alpha) = \sup_{x\in[0,1]} \tilde{D}(x)}$$

par le TVI.

---

b.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{D}(\alpha) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\tilde{D}(\alpha) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) = \tilde{D}(\alpha) - \lim_{n\to+\infty}\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$$

or :

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - g\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

car : $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2^n}{\alpha} + o(1)$ et $g\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2^n}{\alpha} + o(1)$
d'après la question 3a. et 3b.
Donc,

$$\tilde{D}(\alpha) = 0$$

---

2. Les valeurs de la fonction zeta aux entiers pairs

Question 5

a.

Soit $y \in]-4\pi^2, 4\pi^2[\backslash\{0\}$,
On pose :

$$x = \frac{y}{2\pi} \text{ et } S(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} y^{2k}$$

Alors,

$$S(y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2\right)^k$$

car la série de terme général :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \times \frac{1}{n^{2k}} \geq 0$$

Converge et :

$$n \geq 7 \Rightarrow r = \left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2 < 1$$

puis d'après Fubini positif
Donc,

$$S(y) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}{n^2 - \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}$$

Donc comme $\frac{y}{2\pi} \in]-2\pi, 2\pi[$, d'après la question 4.b

$$1 - S(y) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 - n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2 - n^2} = \pi x \mathrm{cotan}(\pi x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{y}{2}\mathrm{cotan}\left(\frac{y}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}y^{2k}}$$

b.

Soit $x \in]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$,

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = i\frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = i\frac{e^{ix} + 1 + (1-1)}{e^{ix} - 1}$$
$$= i + \frac{2i}{e^{ix} - 1}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{ix}{2} + \frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}}$$

Question 6

Comme dans la question précédent $|x| < 2\pi$,
On pose :

$$z = |ix| < 2\pi$$

et grâce au fait que $i^2 = -1$:
Ainsi,

$$\boxed{z = (e^z - 1)\left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} z^{2k}\right)}$$