DM 4 : L'intégrale de Dirichlet

§ 1. **Le lemme d'Abel.—** Dans toute la suite, on note $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et E l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbf{C}$. Pour tout $f \in E$, on pose pour tout réel x :

$$I_f(x) = \int_0^{\pi/2} f(t)\exp(ixt)\mathrm{dt}.$$

Dans toute la suite, f désignera une fonction appartenant à E.

Q1/ (a) Expliquer pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur I.
On posera par la suite $M = \|f\|_\infty$ et $M' = \|f'\|_\infty$.

(b) A l'aide par exemple d'une intégration par parties, montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+$, que l'on exprimera en fonction de M et M', tel que $\forall x \neq 0, |I_f(x)| \leqslant \frac{A}{|x|}$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} f(t)\cos(xt)\mathrm{dt} = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} f(t)\sin(xt)\mathrm{dt} = 0.$

§ 2. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet.—** Pour tout entier naturel n, on pose

$$J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\mathrm{dt}.$$

Q2/ (a) Justifier pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'existence de J_n.

(b) Calculer J_0, J_1 et J_2.

Q3/ (a) Si a et b sont deux réels, factoriser $\sin a - \sin b$.

(b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n.

(c) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $J_{2N+1} = \frac{\pi}{2}$.

(d) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $J_{2N} = 2\sum\limits_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Q4/ (a) Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in E$ telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \qquad J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \psi(t)\cos\left((n-0.5)t\right)\mathrm{dt},$$

(b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n - J_{n-1})$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

Q5/ Déduire des résultats précédents l'égalité : $\boxed{\pi = \lim\limits_{N\to\infty} 4\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}.}$

Q6/ On définit l'application $g : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

A l'aide du théorème de la limite de la dérivée, montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Q7/ (a) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t} \mathrm{dt} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{dt} \right)$.

(b) En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{dt}$.

(c) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{dt}$.

Q8/ (a) Montrer que pour tout réel strictement positif x on a :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{dt} = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} \mathrm{dt}.$$

Vous penserez à prouver que la deuxième intégrale existe.

(b) Montrer que $\int_1^x \frac{1 - \cos t}{t^2} \mathrm{dt} \leqslant 2$ pour tout $x \geqslant 1$.

(c) En déduire que la fonction $\Psi : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} \mathrm{dt}$ admet une limite finie en $+\infty$.

(d) En déduire que la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{dt}$ admet en $+\infty$ une limite réelle, puis calculer la valeur de celle-ci.