DM 14

Note

Les petits points corespondent à des questions ou il y à un manque dans la démonstration

1. Développement Eulérien de la cotangente

Question 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - n^2}$$

Or,

$$\left| \frac{x}{x^2 - n^2} \right| \sim \left| \frac{x}{n^2} \right| \geq 0 \text{ et } |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge absolument}$$

Ainsi, comme la convergence absolue implique la convergence :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \text{ converge}}$$

a.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \pi \text{cotan}(\pi - x) \\ &= \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} \\ &= -\pi \text{cotan}(\pi x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\tfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{n-x} - \tfrac{1}{x+n} \right) \\ &= -\tfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{x+n} + \tfrac{1}{x-n} \right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, g et f sont impaires

b.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \pi \text{cotan}(\pi x) = f(x)$$

$$\boxed{f(x+1) = f(x)}$$

$$g(x+1) = \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,
On pose :

$$G_N = \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right)$$

Comme :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1+n}+\frac{1}{x+1-n}\right)=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}$$

Alors,

$$G_N=\frac{1}{x+1}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x-n}$$

Donc,

$$G_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+N+1}-\frac{1}{x-N}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, on a bien :

$$\boxed{g(x+1)=g(x)}$$

c.

f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
Comme : $x\mapsto\frac{1}{\sin(\pi x)}$ et $x\mapsto\cos(\pi x)$ sont continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors, par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$\boxed{f\text{ est bien continue sur }\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

Plan de la démonstration :
Comme on a :

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$$

Soit $n_0\in\mathbb{Z}$,
On souhaite savoir si :

$$g\text{ est continue sur }I_{n_0}=]n_0,n_0+1[$$

ce qui implique que g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
Il suffit alors de montrer que pour tout segment de I_{n_0} de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, g est continue.

Démonstration :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$,
Soit $a,b\in I_{n_0}$, $[a,b]$ est donc un segment de I_{n_0},
On pose : $h_n: x\mapsto\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}$

$$||h_n||_{\infty,[a,b]}=2\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{x}{x^2-n^2}\right|$$

On a alors :

$$\forall x\in[a,b],h_n'(x)=2\frac{x^2-n^2-2x^2}{(x^2-n^2)^2}=-2\frac{n^2+x^2}{(x^2-n^2)^2}<0$$

(car h_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)
Ainsi, comme h_n est strictement décroissante :

$$||h_n||_{\infty,[a,b]}=2\left|\frac{a}{a^2-n^2}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\,|a|}{n^2}\geq 0$$

et

$$2\,|a|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\text{ converge}$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||h_n||_{\infty,[a,b]} \text{ converge}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I_{n_0}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur tout segment de } I_{n_0}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur } I_{n_0}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ converge unformément sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

Comme,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, x \mapsto \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et
$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$ converge uniformément,

Donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$\boxed{g \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$$

Question 2

a.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi\text{cotan}\left(\pi\frac{1+x}{2}\right) = \pi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)} = -\pi\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\tfrac{x}{2}\right) + f\left(\tfrac{1+x}{2}\right) &= \pi\left(\tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \tfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \pi\tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= 2\pi\tfrac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}{\sin(x)} \\
&= 2\pi\tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x)}$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1+2n} + \frac{1}{x+1-2n}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x-2n}\right)\right)$$

De plus,

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1+2n}+\frac{1}{x+2n}\right)=\sum_{\substack{k=3\\ k \text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{x+k}+\sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{x+k}$$

$$=\sum_{k=2}^{2N+1}\frac{1}{x+k}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x+2N+1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{x+n}$$

De la même manière :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1-2n}+\frac{1}{x-2n}\right)=\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2N-1}\frac{1}{x-k}+\sum_{\substack{k=2\\ k \text{ pair}}}^{2N}\frac{1}{x-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{x-k}=\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{x-n}$$

Donc, en notant :

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+1-2n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x+1+2n}+\frac{1}{x+2n}\right)$$

$$S_N=\frac{1}{x+2N+1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$$

Ainsi,

$$g\left(\frac{x+1}{2}\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\lim_{N\to+\infty}S_N\right)=2g(x)$$

$$\boxed{g\left(\frac{x+1}{2}\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)=2g(x)}$$

Question 3

a.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, f(x)-\frac{1}{x}=\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}-\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{=}\frac{\pi}{\pi x+o(x)}-\frac{1}{x}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x}+o(1)}$$

b.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$g(x)-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$$

Posons : $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{x,-x\}, h_x(t)=\frac{1}{x+t}+\frac{1}{x-t}$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall t\in]k,k+1[,$$

$$\int_k^{k+1}h_x(t)dt\le\int_k^{k+1}h_x(k)dt\le\int_{k-1}^{k}h_x(t)dt$$

$$\int_2^{+\infty}h_x(t)dt\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right)\le\int_1^{+\infty}h_x(t)dt$$

On a alors :

$$\int_2^{N}\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t-x}\,dt=\ln\left(\left|\frac{x+N}{N-x}\right|\right)+\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{\frac{x}{N}+1}{1-\frac{x}{N}}\right|\right) + \ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right)$$

De même,

$$\int_1^{+\infty} h_x(t)\,dt = \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{x-k}\right) \leq \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\left|\frac{2-x}{x+2}\right|\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \ln\left(\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc,

$$g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ie

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(1)}$$

c.

On a :

$$\lim_{x\to 0} D(x) = 0$$

car

$$f(x) - g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + o(1) - o(1) = o(1)$$

De plus comme f et g sont 1-périodiques, D l'est aussi donc,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to z} D(x) = 0$$

Ainsi, on peux prolonger D par continuité sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{\tilde{D} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} D(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}}$$

En effet $\tilde{D}$ est bien continue car $\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to z} D(x) = 0$
$\tilde{D}$ est bien 1-périodique car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \tilde{D}(x+1) = D(x+1) = D(x) = \tilde{D}(x) & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \tilde{D}(x+1) = 0 = \tilde{D}(x) & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et $\forall k \in \mathbb{Z}, \tilde{D}(z) = 0$,

Question 4

a.

$\sup_{x\in[0,1]} \tilde{D}(x)$ existe bien et est réel car : $\tilde{D}(x)$ est continue sur $[0,1]$ qui est un intervalle fermé.
Comme : $\tilde{D}$ est continue sur $[0,1]$, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que :

$$\boxed{\tilde{D}(\alpha) = \sup_{x\in[0,1]} \tilde{D}(x)}$$

par le TVI.

....

b.

Plan de la démonstration :

- On montre que : $\tilde{D}(\alpha) = 0$
- On montre que $\forall x \in]0,1[, \tilde{D}(x) = 0$
- Conclusion

Démonstration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{D}(\alpha) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\tilde{D}(\alpha) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right) = \tilde{D}(\alpha) - \lim_{n\to+\infty} \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 0$$

or :

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - g\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

car : $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2^n}{\alpha} + o(1)$ et $g\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2^n}{\alpha} + o(1)$
d'après la question 3a. et 3b.
Donc, $\tilde{D}(\alpha) = 0$

On a pour $x \in]0,1[$,

$$1 \leq \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n x} < 1 + \frac{1}{2^n x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ donc } \lfloor 2^n x \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n x \text{ i.e. } \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

puis comme :

$$\frac{\lfloor 2^n x \rfloor + \alpha - 1}{2^n} \leq x + \frac{\alpha}{2^n} - 1 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} < 1$$

Alors,

$$\forall x \in]0,1[, \tilde{D}(\alpha) = \tilde{D}(\alpha + \lfloor 2^n x \rfloor - 1) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha + \lfloor 2^n x \rfloor - 1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{D}(x)$$

$$\forall x \in]0,1[, \tilde{D}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{D}(x) \text{ et comme } \tilde{D}(\alpha) = 0 \text{ alors } \tilde{D}(x) = 0$$

Finalement comme $\tilde{D}$ est 1 périodique

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{D}(x) = 0}$$

2. Les valeurs de la fonction zeta aux entiers pairs

Question 5

a.

Soit $y \in]-4\pi^2, 4\pi^2[\setminus \{0\}$,
On pose :

$$x = \frac{y}{2\pi} \text{ et } S(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} y^{2k}$$

Alors,

$$S(y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}n^{2k}}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2\right)^k$$

$$\text{car la série de terme général : }\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{y^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\times\frac{1}{n^{2k}}\geq 0\text{ Converge}$$

et :

$$n\geq 7\Rightarrow r=\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2<1$$

puis grâce au théorème de Fubini positif
Donc,

$$S(y)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}{n^2-\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}$$

Donc comme $\frac{y}{2\pi}\in]-2\pi,2\pi[$, d'après la question 4.b

$$1-S(y)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2-n^2}=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}=\pi x\text{cotan}(\pi x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{y}{2}\text{cotan}\left(\frac{y}{2}\right)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}y^{2k}}$$

b.

Soit $x\in]-2\pi,2\pi[\setminus\{0\}$,

$$\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=i\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}=i\frac{e^{ix}+1+(1-1)}{e^{ix}-1}$$

$$=i+\frac{2i}{e^{ix}-1}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\frac{x}{2}\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{ix}{2}+\frac{ix}{e^{ix}-1}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{ix}{e^{ix}-1}=1-\frac{ix}{2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}}$$

Question 6

Comme dans la question précédent $|x|<2\pi$,
On pose :

$$z=|ix|<2\pi$$

et grâce au fait que $i^2=-1$:
Ainsi,

$$\boxed{z=(e^z-1)\left(1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}\right)}$$

Question 7

<u>Plan de la démonstration :</u>

- Généralisation du résultat de la question 6 pour les $z\in\mathbb{R}^*$

- Preuve de la convergence simple pour les $2n-1$ premieres dérivées
- Preuve de la convergence uniforme pour la $2n$ ieme dérivée
- Déduction de la dérivée $2n$ ieme de h
- Calcul de $h^{(2n)}(0)$

Démonstration :
D'après la question 6. :

$$\forall z \in]-2\pi, 2\pi[, h(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} z^{2k}$$

On étend cette égalité pour les : $z \in \mathbb{R}^*$
Car la preuve de l'existence de la limite des sommes partielles dans l'expression précédente repose sur l'existence d'un certain rang $n_0 = \left\lfloor \frac{|z|}{2\pi} \right\rfloor + 1$ (D'après la question 5.a) pour lequel

$$\boxed{\forall n > n_0, \left(\frac{z}{2\pi n}\right)^2 < 1}$$

Ce qui est vrai car :

$$\forall n > n_0, \frac{|z|}{2\pi} \leq n_0 < n \Rightarrow \frac{1}{2\pi n} < \frac{1}{2\pi n_0} \leq \frac{1}{|z|} \Rightarrow \left(\frac{z}{2\pi n}\right)^2 < 1$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}} x^{2n}$$

Étudions la dérivabilité de :

$$G(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

En premiers lieux :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

car c'est un polynôme.
de plus,

$$\forall p \in [\![0, 2n-1]\!], \sum_{n\geq 1} g_n^{(p)} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}$$

....

Montrons que :

$$\sum_{n\geq 0} g_n^{(2n)} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}$$

$$g_n^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} x$$

Montrons que la série converge normalement sur tout segment :
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ou $a < b$

$$\left|\left|g_n^{(2n)}\right|\right|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g_n^{(2n)}(x)| = \frac{\zeta(2n)(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} b$$

....

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [\![0, 2n]\!], G^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}(2k-p)!} x^{2k-p}$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, G^{(2n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}(2k-2n)!} x^{2k-2n}$$

Donc,

$$\boxed{G^{(2n)}(0) = h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)(2n!)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}}$$

b.

$$\boxed{\text{Pour } n = 0 : \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = b_0 = 1}$$

c.

$$\boxed{b_2 = \frac{1}{6}} \text{ et } \boxed{b_4 = -24\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}} \text{ et } \boxed{b_6 = \frac{1}{42}}$$

Puis,

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}} \text{ et } \boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}} \text{ et } \boxed{\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}}$$

3. Développement Eulérien de sinus

Question 8

D'après la question 4.b.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \pi x \text{cotan}(\pi x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \pi \text{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}}$$

Question 9

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(x \mapsto \frac{1}{n^2 - x^2}\right) \in \mathcal{C}^0(]-1,1[) \text{ et } (x \mapsto 2x) \in \mathcal{C}^0(]-1,1[) \text{ par produit de fonctions continues } f_n \in \mathcal{C}^0(]-1,1[)$$

Soit $a \in]0,1[$,
On prouve la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[-a,a]$,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est dérivable sur $[-a,a]$ par produit de fonctions dérivables sur $[-a,a]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a,a], f_n'(x) = 2\frac{n^2 + x^2}{(n^2 - x^2)^2} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est strictement croissante donc,

$$||f_n||_{\infty,[-a,a]} = 2\sup_{x\in[-a,a]} \left|\frac{x}{n^2 - x^2}\right| = \frac{2a}{n^2 - a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2a}{n^2} \geq 0$$

et comme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2a}{n^2} \text{ converge car } 2>1, \sum_{n\geq 1} ||f_n||_{\infty,[-a,a]} \text{ converge, i.e. } \boxed{\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge normalement}}$$

Question 10

Soit $a, b \in]0,1[$, tels que : $a < b$,

$$\int_a^b \pi\text{cotan}(\pi x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx - \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\, dx$$

$$\text{Or comme } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de }]0,1[\text{, car normalement d'après la question précédente}$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur l'intervalle : }]0,1[$$

et comme $f_n \in \mathcal{C}^0(]0,1[)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^0(]0,1[) \text{ et } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge simplement sur }]0,1[\text{ (car converge uniformément sur }]0,1[)$$

D'après le théorème d'intégration termes a termes positif,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b \frac{2x}{n^2 - x^2}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 - a^2}{n^2 - b^2}\right)$$

Alors,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx - \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\, dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 - a^2}{n^2 - b^2}\right)$$

Et puis,

$$\int_a^b \pi\text{cotan}(\pi x)\, dx = \int_a^b \frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx = \ln\left(\frac{\sin(\pi b)}{\sin(\pi a)}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{n}\right)^2}\right)$$

Alors,

$$\forall a, b \in]0,1[, \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{n}\right)^2} = \frac{b\sin(\pi a)}{a\sin(\pi b)} \text{ i.e. } \frac{\sin(\pi b)}{\pi b} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{b}{n}\right)^2\right)$$

Donc en posant : $x = \pi a$,

$$\boxed{\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2\right)}$$