Travail 11-11-24

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Comme $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(t)\,dt$$

Alors,

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 2$$

Donc comme :

$$\ln(n+1) \sim \ln(n)$$

Ainsi, par le théorème de convergence par encadrement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)}$$

Exercice 2

a.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 \geq 0$$

car $\ln(t+1) \sim \ln(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(t)$,
Ainsi, comme $-2 < 1$, par le critère des intégrales de Riemann :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \boxed{F_2(x) \text{ diverge}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
Comme $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to x} f(t) \in \mathbb{R}$ Ainsi

$$\boxed{F_1(x) \text{ converge}}$$

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

comme $2 > 1$ par le critère des intégrales de Riemann :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \boxed{G_2(x) \text{ converge}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
Comme $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$ et $\lim_{t\to x} g(t) \in \mathbb{R}$ Ainsi

$$\boxed{G_1(x) \text{ converge}}$$

b.

On a :

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$$

Alors,

$$\int_x^{+\infty} g(x)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}$$

Ainsi,

$$\boxed{G_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}}$$

Donc,
comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$ et que $F_2(x)$ diverge :

$$F_1(x) \sim \int_0^x t^2\,dt = \frac{1}{3}x^3$$

Ainsi,

$$\boxed{F_1(x) \sim \frac{1}{3}x^3}$$

Exercice 3

a.

Comme : $g \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[)$, on a : $g' \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[)$ alors,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|\,dt \text{ existe}$$

Comme g est décroissante et tend vers 0 elle est positive, or $g' \leq 0$ car g est décroissante alors,

$$\forall x \in [1,+\infty[, -\int_1^x g'(t)\,dx = -(g(x)-g(1))$$

donc,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|\,dt = g(1) \in \mathbb{R}_+$$

car $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

Ainsi,

$$\boxed{g' \text{ est une fonction intégrable sur } [1,+\infty[}$$

b.

On effectue une intégration par parties :

$$\forall b > 1, \int_1^b \sin(t)g(t)\,dx = [-\cos(t)g(t)]_1^b + \int_1^b \cos(t)g'(t)\,dt$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall b > 1, \int_1^b \sin(t)g(t)\,dt = \cos(1)g(1) - \cos(b)g(b) + \int_1^b \cos(t)g'(t)\,dt}$$

c.

Soit $b > 1$,
on a :

$$\int_1^b \cos(t)g'(t)\,dt \leq -\int_1^b g'(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

par linéarité de l'intégrale et car $g' \leq 0$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (donc $\int_1^{+\infty} g'$ converge) alors,

$$\int_1^b \sin(t)g(t)\,dt \leq g(1)\cos(1) - g(b)\cos(b) - \int_1^b g'(t)\,dt$$

puis en faisant tendre b vers $+\infty$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \sin(t)g(t)\,dt \leq g(1)\cos(1) - \int_1^{b} g'(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \sin(t)g(t)\,dt \text{ converge}}$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante car $\alpha > 0$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \text{ converge}}$$