# DM8 - Inégalité d'Hadamard

# Partie 1 : Questions préliminaires

#### **Question 1**

a.

#### Version endomorphisme

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,

ces assertions sont équivalentes

 $\begin{cases} f \in S(E) \\ f \text{ se diagonalise en BON} \\ f \text{ est DZ et ses sous-espaces propres sont 2 a 2 orthogonaux} \end{cases}$ 

#### Version matricielle

Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe une matrice diagonale  $D \in D_n(\mathbb{R})$  et une matrice orthogonale  $P \in O(n)$  telles que :

$$M = P^{-1}DP = P^{\perp}DP$$

b.

$$\chi_S = \det(XI_n - S) = egin{vmatrix} X - i & -1 \ -1 & X + i \end{bmatrix} = X^2$$

Comme  $\chi_S$  est scindé, montrons que :

$$2=\operatorname{Mult}(0)
eq \dim E_0(S)$$

$$\dim E_0(S) = \dim \operatorname{Ker}(S) = \dim \operatorname{Ker} egin{pmatrix} i & 1 \ i & 1 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker} egin{pmatrix} i & 1 \ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\dim \operatorname{Ker}(S) = \dim \operatorname{Vect} egin{pmatrix} 1 \ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Donc comme  $2 \neq 1$ ,

S n'est pas diagonalisable

#### **Question 2**

a.

Soit  $x \in E$ ,

$$egin{aligned} R_s(x) &= \langle s(x), x 
angle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i arepsilon_i, \sum_{i=1}^n x_i arepsilon_i 
ight
angle \ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i x_i x_k \, \langle arepsilon_i, arepsilon_k 
angle &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i x_i x_k \delta_{i,k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$R_s(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$$

b.

Soit  $x \in S(0,1)$ ,

$$||x||^2 \leq 1$$

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

### **Question 3**

a.

$$oxed{ orall i,j \in \llbracket 1,n
ceil, s_{i,j} = \langle \lambda_i arepsilon_i, arepsilon_j 
angle }$$

b.

$$orall i \in \llbracket 1, n 
rbracket, s_{i,i} = \lambda_i$$

comme  $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ Ainsi,

$$oxed{ orall i \in \llbracket 1, n 
rbracket, \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n }$$

# Partie 2 : Inégalité d'Hadamard

### **Question 4**

a.

 $\ln$  est concave sur  $I=]0,+\infty[$ , alors,

$$orall x,y \in I, orall \lambda \in [0,1], \ln(x(1-\lambda)+\lambda y) \geq \ln(x)(1-\lambda)+\lambda \ln(y)$$

Donc,

$$rac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n a_i
ight)^{1/n}
ight) \leq \ln\left(rac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i
ight)$$

Ainsi, comme exp est croissante

$$\left\lceil \left(\prod_{i=1}^n a_i
ight)^{1/n} \leq rac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i 
ight
ceil$$

b.

$$\det(S) = \prod_{i=1}^n s_{i,i}$$

 $\mathrm{car} \; \forall i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0 \; \mathrm{car} \; (\varepsilon_i)_{i=1}^n \; \mathrm{est} \; \mathrm{orthonorm\acute{e}e}.$ 

Donc d'après la question 4.a. :

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{i,i}$$

Ainsi,

$$\det(S) \leq \left(rac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)
ight)^n$$

### **Question 5**

a.

On a:

$$S_lpha^ op = (DSD)^ op = (SD)^ op D^ op = D^ op S^ op D^ op = DSD = S_lpha$$

puis,

$$orall X=(x_i)_{i\in[1,n]}\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},$$

$$X^ op DSDX = (lpha_1 x_1 \ldots lpha_n x_n) S egin{pmatrix} lpha_1 x_1 \ dots \ lpha_n x_n \end{pmatrix}$$

Donc comme

$$orall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^ op SX \geq 0$$

et que

$$egin{pmatrix} lpha_1x_1 \ dots \ lpha_nx_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi,

$$S_lpha\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

b.

$$oxed{\operatorname{Tr}(S_lpha) = \operatorname{Tr}(DSD) = \operatorname{Tr}(D^2S) = \sum_{k=1}^n lpha_i^2 s_{i,i}}$$

## **Question 6**

$$\det(D)^2\det(S) = \det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\times n\right)^n = 1$$

 $\begin{aligned} &\text{car } \forall i \in [\![1,n]\!], s_{i,i} > 0 \\ &\text{Donc,} \end{aligned}$ 

$$\det(S) \leq rac{1}{\prod_{k=1}^n lpha_i^2} = \prod_{k=1}^n s_{i,i}$$

Ainsi,

$$\det(S) \leq \prod_{k=1}^n s_{i,i}$$

# **Question 7**

$$(S + \varepsilon I_n)^{\top} = S + \varepsilon I_n$$

comme arepsilon>0 et  $orall i\in \llbracket 1,n
rbracket,s_{i,i}>0$ , alors  $S_arepsilon\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ 

Donc on a:

$$orall i \in \llbracket 1, n 
rbracket, s_{i,i} > 0, s_{i,i} + arepsilon > 0$$

Ainsi,

$$oxed{\det(S_arepsilon) \leq \prod_{k=i}^n (s_{i,i} + arepsilon)}$$

Puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,

$$\overline{\det(S) \leq \prod_{k=1}^n s_{i,i}}$$