DM2

A - Préliminaires

Question 1

(a)

$\Leftarrow$: Trivial
$\Rightarrow$:
Supposons que :

$$X^\top X = 0$$

Soit $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, tels que :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors,

$$X^\top X = \left(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2\right) = (0)$$

Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i^2 \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0$$

Ainsi,

$$X = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ fois}$$

(b).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),&\\ X \in \operatorname{Ker}(M) &\Leftrightarrow MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\\ &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} (M^\top M)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Ker}(M^\top M)\end{aligned}$$

$(\star)$, $\Leftarrow$:
car :

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1},\quad &(M^\top M)X = 0\\ &\Rightarrow X^\top M^\top MX = 0\\ &\Rightarrow (MX)^\top MX = 0\\ &\overset{(\star\star)}{\Rightarrow} MX = 0\end{aligned}$$

$(\star\star)$: Car $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Question 2

(a).

$$\boxed{M \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}}$$

(b).

$$\begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Comme c'est une matrice triangulaire à coefficients tous non nuls à la diagonale, alors cette matrice est inversible, donc,

$$\operatorname{rg}\left(M \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rg}(M)$$

Comme $A \in GL_r(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}(A) = r$.
Comme :

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire inférieure,

$$\det(G) = \det(A) + \det(D - CA^{-1}B) = r + \det(D - CA^{-1}B)$$

Ainsi,

$$\det(G) = \det(M) \geq r$$

Si $D = CA^{-1}B = 0$ alors, $\det(D - CA^{-1}B) = 0$
Ainsi,

$$\boxed{\det(G) = r}$$

Question 3

On pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \to W_r \\ (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \end{cases}$$

φ est bien définie par définition de W_r.
On montre que cette application est bijective :
Soit $(X, Y) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$,

$$\varphi(X, Y) = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^\top & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $X = 0$ et $Y = 0$, par unicité des blocs dans des matrices par blocs.

Soit $Y \in W_r$,
il existe alors par définition de W_r, $(A, B) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ tels que :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\tau & A \end{pmatrix} = \varphi(A, B)$$

Alors, $W_r \subset \mathrm{Im}(u)$, et comme : $\mathrm{Im}(u) \subset W_r$,
Donc, $W_r = \mathrm{Im}(\varphi)$

Alors, φ est bijective donc

$$\dim(\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})) = \dim(W_r)$$

Donc,

$$\dim(W_r) = (n-r)^2 + r(n-r) = (n-r)(n-r+r) = n(n-r)$$

Ainsi,

$$\boxed{\dim(W_r) = n(n-r)}$$

B - Dimension maximale

Question 4

(a).

Posons :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \in V$$

car CL de deux éléments de V.
Montrons que :

$$A = B^\top B = 0$$

On a :

$$\mathrm{rg}(M) \leq r$$

Comme $\lambda I_r \in GL_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $B^\top \in \mathcal{M}_{n-r,r}$ puis $A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$
d'après la question 2,

$$\mathrm{rg}(M) \geq r$$

Donc, $\mathrm{rg}(M) = r$,
Alors,
encore d'après la question 2 :

$$A = B^\top I_r B = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{A = B^\top B = 0}$$

(b).

On a montré que :

$$\boxed{W_r \cap V = \{0\}}$$

(c).

On a alors par la formule de Grassmann :

$$\dim(W_r + V) = \dim(W_r) + \dim(V)$$

Car $W_r \cap V = \{0\}$
Et alors :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \leq \dim(W_r + V) = \dim(W_r) + \dim(V)$$

la somme de deux matrices (en particulier de W_r et V) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est toujours dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi,

$$n^2 \geq n^2 - nr + \dim V \Leftrightarrow \boxed{\dim V \leq nr}$$

Question 5 : Pas de conclusion

Question 6

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On pose :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \in W_r \text{ (Par définition)}$$

et :

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C - B^\top & 0 \end{pmatrix} \in V$$

car :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A \\ C - B^\top \end{pmatrix} \leq r$$

car le nombres de colonnes de de cette matrice est égale à r. (soit ces vecteurs forment une famille libre à r vecteurs soit une famille liée, donc le nombre de vecteurs formant une base de $\mathrm{Im}(u)$ sera inférieur à r)
alors,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C - B^\top & 0 \end{pmatrix} \leq r$$

Ainsi,

$$X = F + G$$

Donc,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = W_r + V$$

Comme :

$$W_r \cap V = \{0\}$$

D'après la question 4.b.,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = W_r \oplus V$$

Alors d'après la formule de Grassmann,

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim W_r + \dim V$$

Ainsi,

$$\boxed{\dim V = nr}$$