DM8 - Inégalité d'Hadamard

Partie 1 : Questions préliminaires

Question 1

a.

Version endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,
ces assertions sont équivalentes

$$\boxed{\begin{cases} f \in S(E) \\ f \text{ se diagonalise en BON} \\ f \text{ est DZ et ses sous-espaces propres sont 2 a 2 orthogonaux} \end{cases}}$$

Version matricielle

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale $D \in D_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telles que :

$$\boxed{M = P^{-1}DP = P^{\perp}DP}$$

b.

$$\chi_S = \det(XI_n - S) = \begin{vmatrix} X-i & -1 \\ -1 & X+i \end{vmatrix} = X^2$$

Comme χ_S est scindé, montrons que :

$$2 = \mathrm{Mult}(0) \neq \dim E_0(S)$$

$$\dim E_0(S) = \dim \mathrm{Ker}(S) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\dim \mathrm{Ker}(S) = \dim Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Donc comme $2 \neq 1$,

$$\boxed{S \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Question 2

a.

Soit $x \in E$,

$$R_s(x) = \langle s(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i x_k \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i x_k \delta_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

Ainsi,

$$\boxed{R_s(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2}$$

b.

Soit $x \in S(0,1)$,

$$||x||^2 \leq 1$$

$$R(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Question 3

a.

$$\boxed{\forall i, j \in [\![1, n]\!], s_{i,j} = \langle \lambda_i \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle}$$

b.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} = \lambda_i$$

comme $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$
Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n}$$

Partie 2 : Inégalité d'Hadamard

Question 4

a.

$\ln$ est concave sur $I =]0, +\infty[$, alors,

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \ln(x(1-\lambda) + \lambda y) \geq \ln(x)(1-\lambda) + \lambda \ln(y)$$

Donc,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

Ainsi, comme $\exp$ est croissante

$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

b.

$$\det(S) = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

car $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$ car $(\varepsilon_i)_{i=1}^{n}$ est orthonormée.
Donc d'après la question 4.a. :

$$\det(S)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}$$

Ainsi,

$$\boxed{\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(S)\right)^n}$$

Question 5

a.

On a :

$$S_\alpha^\top = (DSD)^\top = (SD)^\top D^\top = D^\top S^\top D^\top = DSD = S_\alpha$$

car S et D sont symétriques

puis,

$$\forall X = (x_i)_{i\in[1,n]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},$$

$$X^\top DSDX = (\alpha_1 x_1 \dots \alpha_n x_n) S \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix}$$

Donc comme

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top SX \geq 0$$

et que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi,

$$\boxed{S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

b.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \mathrm{Tr}(DSD) = \mathrm{Tr}(D^2 S) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}}$$

Question 6

$$\det(D)^2 \det(S) = \det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times n\right)^n = 1$$

car $\forall i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} > 0$
Donc,

$$\det(S) \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \alpha_i^2} = \prod_{k=1}^{n} s_{i,i}$$

Ainsi,

$$\boxed{\det(S) \leq \prod_{k=1}^{n} s_{i,i}}$$

Question 7

$$(S + \varepsilon I_n)^\top = S + \varepsilon I_n$$

comme $\varepsilon > 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} > 0$, alors $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
Donc on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} > 0, s_{i,i} + \varepsilon > 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{k=i}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)}$$

Puis en faisant tendre ε vers 0,

$$\boxed{\det(S) \leq \prod_{k=1}^{n} s_{i,i}}$$