Équations différentielles linéaires

Lycée Berthollet, MPSI1 2021-22

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Définitions

Une EDL1 est une équation fonctionnelle d'inconnue y de la forme $(E):\ y'+a(x)y=b(x)$, où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La fonction a s'appelle le *coefficient* (on parle de coefficient constant lorsque cette fonction est constante), la fonction b s'appelle le *second membre* et une *solution* est une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in I,\ \varphi'(x)+a(x)\varphi(x)=b(x).$$

Toute solution est automatiquement de classe $\mathcal{C}^1$.

2 Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée à (E) est $(H):\ y'+a(x)y=0$.

Analyse des solutions dans le cas où elles sont réelles et ne s'annulent pas, puis énoncé et démonstration du théorème décrivant toutes les solutions dans le cas réel ou complexe :

Théorème 1 Résolution des EDL1.
Si A est une primitive de a, les solutions de (H) sont les fonctions $K\mathrm{e}^{-A}$, où K parcourt $\mathbb{K}$.

Vocabulaire : notion de *solution générale* de l'équation homogène.

Cas particulier des coefficients constants, équation caractéristique $(C):\ r+a=0$.

Remarque que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène en est encore solution.

3 Résolution de l'équation avec second membre

Toute différence de solutions de (E) est une solution de (H), donc **la** solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'**une** solution particulière de l'équation avec second membre et de **la** solution générale de l'équation homogène.

Si on "devine" une solution particulière de l'équation avec second membre, on a terminé.

Dans le cas particulier du **coefficient constant** et d'un second membre du type produit d'une fonction polynôme par une fonction sinusoïdale ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou produit d'une fonction polynôme par une fonction exponentielle ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), il existe une solution particulière d'une forme spécifique, qu'on décrit.

Principe de superposition des solutions.

Théorème 2 ***Méthode générale : variation de la constante.***
Si $x \mapsto K(x)$ est une primitive de $b\mathrm{e}^{A}$, alors $x \mapsto K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est une solution de (E).

4 Problème de Cauchy pour les EDL1

Théorème d'existence et d'unicité d'une solution à un problème de Cauchy donné pour une EDL1 : pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

II Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Définitions

Une EDL2 à coefficients constants est une équation fonctionnelle d'inconnue y de la forme $(E) : \ y'' + ay' + by = f(x)$, où $a, b \in \mathbb{K}$ et f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les constantes a et b s'appellent les *coefficients*, la fonction f s'appelle le *second membre* et une *solution* est une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in I, \ \varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = f(x).$$

Toute solution est automatiquement de classe $\mathcal{C}^2$.

2 Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée à (E) est $(H) : \ y'' + ay' + by = 0$.

L'équation caractéristique de (H) est l'équation du second degré $(C) : \ r^2 + ar + b = 0$.

On admet les théorèmes donnant les solutions dans les deux cas, réel et complexe.

Remarque que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène en est encore solution.

3 Cas particuliers de résolution de l'équation avec second membre

Toute différence de solutions de (E) est une solution de (H), donc **la** solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'**une** solution particulière de l'équation avec second membre et de **la** solution générale de l'équation homogène.

Si on "devine" une solution particulière de l'équation avec second membre, on a terminé.

Dans le cas particulier d'un second membre du type produit d'une fonction polynôme par une fonction sinusoïdale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou produit d'une fonction polynôme par une fonction exponentielle ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), il existe une solution particulière d'une forme spécifique, qu'on décrit.

Principe de superposition des solutions.

La variation de la constante pour l'ordre 2 est hors programme en première année.

4 Problème de Cauchy pour les EDL2

Théorème d'existence et d'unicité d'une solution à un problème de Cauchy donné pour une EDL2 à coefficients constants (admis) : pour tout $(x_0, y_0, \widetilde{y_0}) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = \widetilde{y_0}$.