DS 1 Correction

Exercice 1

1. on cherche $E = t^{\alpha} \rho^{\beta} r^{\gamma}$ à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

$[E] = ML^2T^{-2}$ (énergie)

et $[E] = [t]^{\alpha} [\rho]^{\beta} [r]^{\gamma}$

avec $[t] = T$

$[\rho] = ML^{-3}$ masse volumique

et $[r] = L$

ainsi on obtient :

$$ML^2T^{-2} = T^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma}$$

$$\boxed{ML^2T^{-2} = M^{\beta} L^{-3\beta+\gamma} T^{\alpha}}$$

Comme M, T et L sont des dimensions indépendantes on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ -3\beta+\gamma = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 5 \end{cases}}$$

l'énergie de l'explosion s'exprime alors : $\boxed{E = \frac{\rho r^5}{t^2}}$

2. d'après la photographie pour $t = 15\,ms$ on a $\underline{r \approx 110\,m}$

ainsi on peut estimer E :

$$E = \frac{1{,}2 \times 110^5}{(1{,}5\ 10^{-3})^2}$$

$$= \frac{1{,}2 \times 1{,}1^5}{1{,}5^2} \times 10^{10} \times 10^4$$

$$E = 0{,}9\ 10^{14}\ J$$

$$\underline{E = 9\ 10^7\ MJ}$$

on nous donne $1\ kg$ de TNT $= 4{,}6\ MJ$

ainsi $E = \dfrac{9\ 10^7}{4{,}6}$

$$\boxed{E \simeq 2\ 10^7\ kg \text{ de TNT}}$$

une explosion nucléaire est équivalente à 20 millions de kg de TNT !

3. traçons $\ln r$ en fonction de $\ln t$. Les points forment une droite affine : $\ln r = a \ln t + b$

E et ρ étant supposées constantes, le résultat précédent peut se mettre sous la forme :

$$r^5 = \frac{E}{\rho} t^2$$

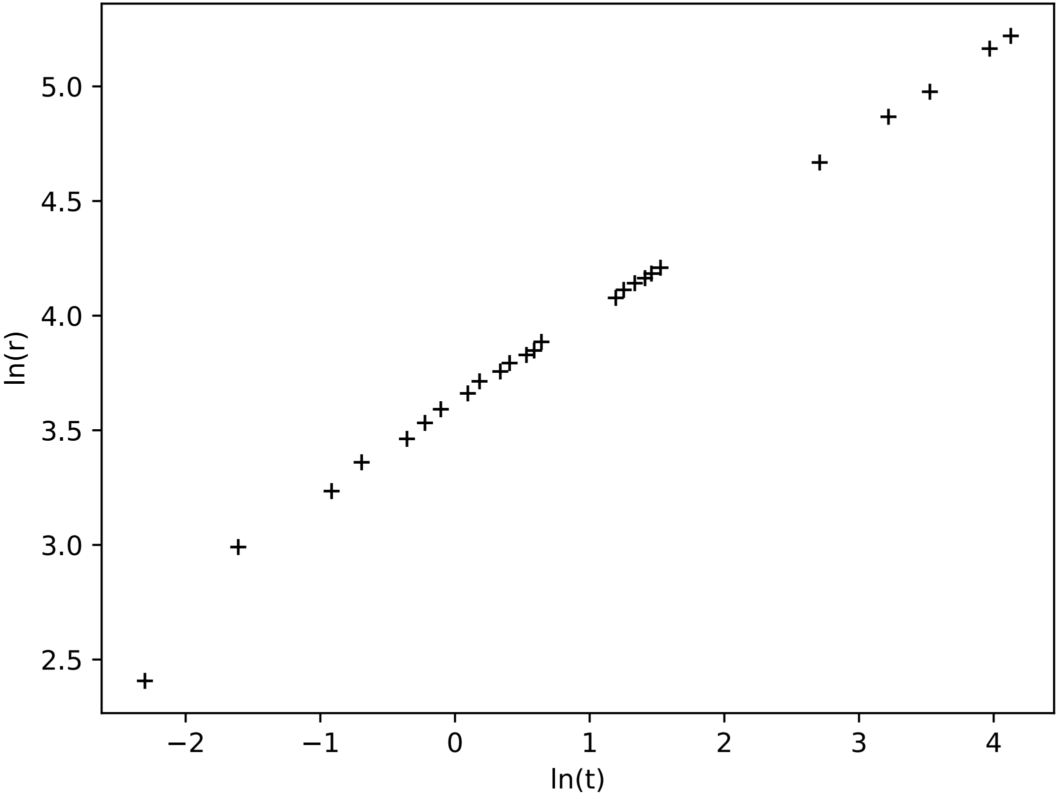
$$\Rightarrow 5 \ln r = \ln \frac{E}{\rho} + 2 \ln t$$

$$\Leftrightarrow \underline{\ln r = \frac{2}{5} \ln t + \frac{1}{5} \ln \frac{E}{\rho}}$$

les données expérimentales sont en accord avec l'analyse dimensionnelle : il existe une relation affine entre $\ln t$ et $\ln r$

une régression linéaire donne la pente $= 0{,}4 = \frac{2}{5}$

Comme déterminé par l'analyse dimensionnelle.


5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
ln(r)
−2
−1
0
1
2
3
4
ln(t)

Exercice 2

1- $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$

analyse dimensionnelle

$$[n] = [A] + \left[\frac{B}{\lambda_0^2}\right] = [A] + \frac{[B]}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [A] = [n] = 1 \\ \frac{[B]}{L^2} = [n] = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} [A] = 1 \\ [B] = L^2 \end{cases}}$$

A est sans dimension

B est une longueur au carré

2- $\begin{cases} n_r = A + \frac{B}{\lambda_{0r}^2} & (1) \\ n_v = A + \frac{B}{\lambda_{0v}^2} & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow n_r - n_v = B\left(\frac{1}{\lambda_{0r}^2} - \frac{1}{\lambda_{0v}^2}\right)$

$$\Leftrightarrow n_r - n_v = B \frac{\lambda_{0v}^2 - \lambda_{0r}^2}{\lambda_{0r}^2 \lambda_{0v}^2}$$

$$\boxed{B = \lambda_{0r}^2 \lambda_{0v}^2 \frac{n_r - n_v}{\lambda_{0v}^2 - \lambda_{0r}^2}}$$

AN : $B = 768^2 \times 434^2 \times \frac{1,618 - 1,652}{434^2 - 768^2}$

$B = 9409 \text{ nm}^2 = 9,409\ 10^{-15}\ m^2$

et $A = n_r - \frac{B}{\lambda_{0r}^2}$

$$\boxed{A = n_r - \lambda_{0v}^2 \frac{n_r - n_v}{\lambda_{0v}^2 - \lambda_{0r}^2}}$$

AN $A = 1,618 - 768^2 \frac{1,618 - 1,652}{434^2 - 768^2}$

$A = 1,602$

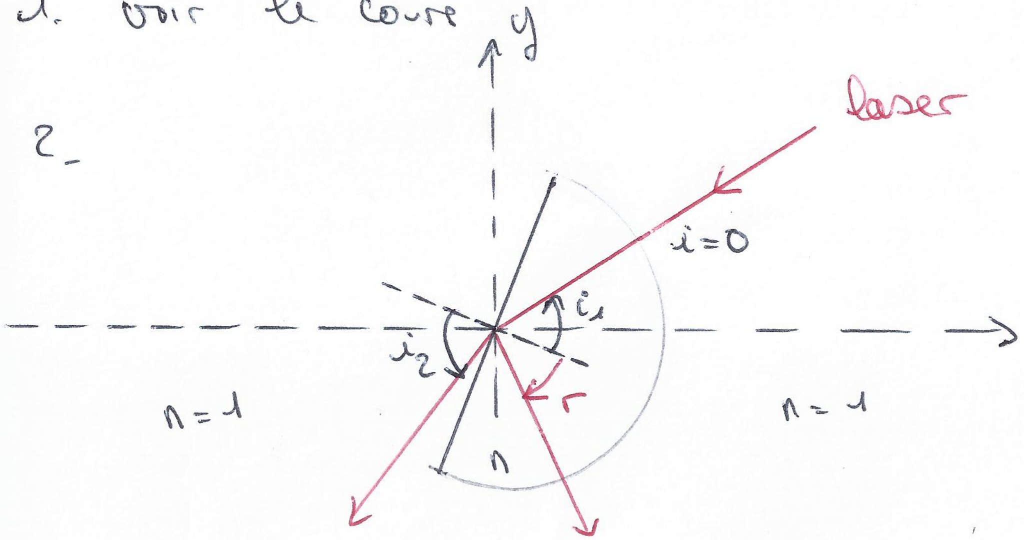
3. $\lambda_{0j} = 589 \text{ nm}$ et $n_j = A + \frac{B}{\lambda_{0j}^2}$

$\Rightarrow \boxed{n_j = 1,629}$

Problème

1. voir le cours

2_



le laser n'est pas dévié lorsqu'il arrive sur le demi-cylindre car il arrive le long de la normale du dioptre.

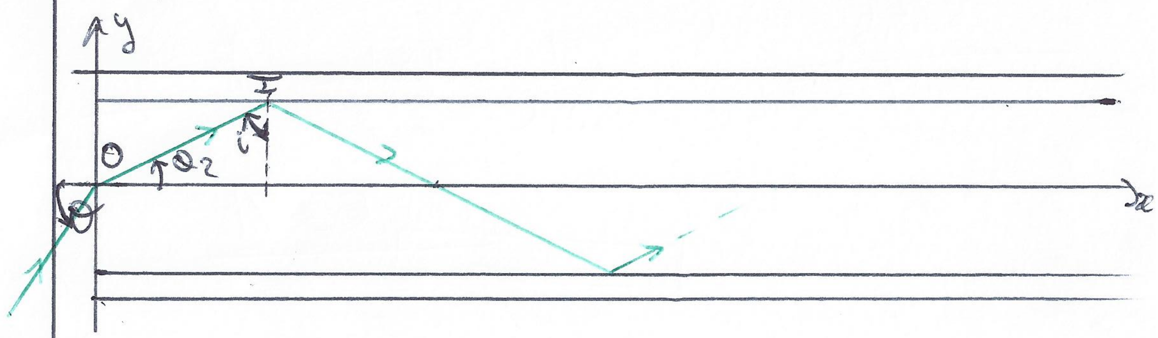
de l'autre côté, le rayon lumineux est réfracté dans l'air et réfléchi dans le plexiglas.

Cette expérience permet de vérifier la 2e et 3e lois de Descartes ainsi que le phénomène de réflexion totale.

on utilise un rayon laser pour avoir un faisceau très fin et arrivant avec 1 seul angle d'incidence.

de plus la lumière monochromatique du laser permet d'éviter le phénomène de dispersion.

3\. $n_a < n_c$ donc en O le rayon se rapproche de la normale : $\theta_2 < \theta$



4- appliquons la 3e loi de Descartes en O :

$$n_a \sin\theta = n_c \sin\theta_2$$

et on a aussi $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i$

$\Rightarrow$ $n_a \sin\theta = n_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n_c \cos i$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sin\theta = \frac{n_c}{n_a}\cos i}$

5. Le rayon reste dans la fibre si il y a reflexion totale en I

$\Leftrightarrow$ $i > i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)$

$\Leftrightarrow$ $\cos i < \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right)$ (cos ↘ sur $[0, \pi]$)

$\Leftrightarrow$ $\cos i < \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right)}$

$$\frac{n_c}{n_a}\cos i < \frac{n_c}{n_a}\sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$$

$$\sin\theta < \frac{n_c}{n_a}\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\theta < \theta_L = \arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{n_c}{n_a}\right)^2 - \left(\frac{n_g}{n_a}\right)^2}\right)}$

ainsi le rayon reste confiné dans la fibre si l'angle θ est plus faible que l'angle limite $\boxed{\theta_L = \arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{n_c}{n_a}\right)^2 - \left(\frac{n_g}{n_a}\right)^2}\right)}$

autres expression :

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a}\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)$$

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a}\cos\left(\arcsin\frac{n_g}{n_c}\right)\right)$$

AN $\theta_L = \arcsin\left(\sqrt{1.5^2 - 1{,}485^2}\right)$

$\underline{\theta_L = 0{,}2132 \text{ rad} = 12{,}22°}$

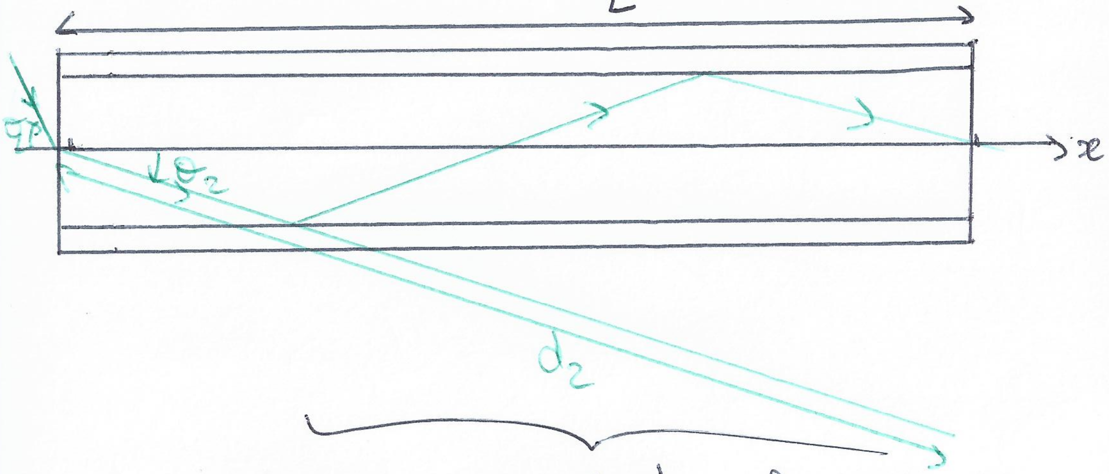
6. Le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre est celui arrivant avec un angle d'incidence $\underline{\theta = 0}$. Ce rayon parcourt la distance $d_1 = L$

à la vitesse $v = \frac{c}{n_c}$

$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{L}{v}$

$$\boxed{T_1 = n_c \frac{L}{c}}$$

7. Le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre est celui qui arrive avec l'angle d'incidence θ_L (ou $-\theta_L$)



on déplie le rayon en zig-zag dans la fibre.

$\Rightarrow$ le rayon parcourt la distance d_2 telle que $d_2 \cos\theta_2 = L$

$\Rightarrow \quad d_2 = \frac{L}{\cos\theta_2}$

et la vitesse de la lumière est toujours $v = \frac{c}{n_c} \Rightarrow T_2 = \frac{d_2}{v}$

$\Rightarrow T_2 = \frac{n_c}{\cos\theta_2} \frac{L}{c}$

or on sait que $\cos\theta_2 = \sin i = \sin i_{lim}$

avec $i_{lim} = \arcsin \frac{n_g}{n_c}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta_2 = \frac{n_g}{n_c}$

et on obtient $\Rightarrow$ $\boxed{T_2 = \frac{n_c^2}{n_g} \frac{L}{c}}$

8. $\delta T = T_2 - T_1 = \frac{L}{c}\left(\frac{n_c^2}{n_g} - n_c\right)$

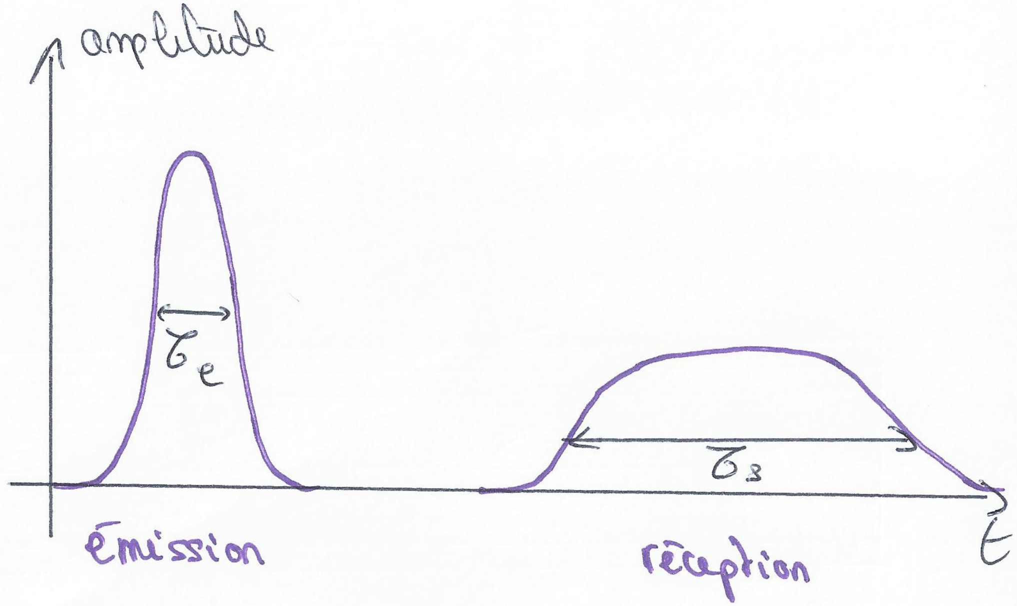
$$\boxed{\delta T = n_c \frac{L}{c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right)}$$

AN $\quad \delta T = 1{,}5 \, \frac{10 \times 10^3}{3 \times 10^8} \left(\frac{1.5}{1.485} - 1\right)$

$$\delta T = 0.5\ 10^{-4} \left(\frac{1.5}{1.485} - 1\right)$$

$$\delta T \approx 5.051\ 10^{-7}\ s$$

$$\underline{\delta T = 0,5051\ \mu s}$$

9. 

l'impulsion de sortie s'étale à cause des différents temps mis par les rayons pour sortir de la fibre

$$\boxed{\tau_s = \tau_e + \delta\tau}$$

10. on suppose que $\tau_e \ll \delta\tau$

$\Leftarrow$ $\boxed{\tau_s \approx \delta\tau}$

si on veut qu'il n'y ait pas de mélange en sortie il faut que la période T du signal soit supérieure à $\tau_s = \delta\tau$

$$\Leftarrow \quad T = \frac{1}{f} > \delta T$$

$$\Leftrightarrow \quad f < \frac{1}{\delta T}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f < f_{max} = \frac{c}{n_c L} \frac{1}{\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right)}}$$

11. $B = L_{max} f = L_{max} \dfrac{c}{n_c L_{max}} \dfrac{1}{\frac{n_c}{n_g} - 1}$

$$\boxed{B = \frac{c}{n_c} \frac{1}{\frac{n_c}{n_g} - 1}}$$

cette grandeur permet de bien caractériser la fibre car elle ne dépend que des matériaux constituants la fibre, et pas de sa longueur, fréquence des signaux ...

12. par définition $L_{max} = \frac{B}{f}$

$$\Rightarrow \boxed{L_{max} = \frac{c}{f n_c} \frac{1}{n_c/n_g - 1}}$$

AN. $$L_{max} = \frac{3\ 10^8}{1.5 \times 100\ 10^6} \frac{1}{\frac{1.5}{1.485} - 1}$$

$$= 2 \times \frac{1.485}{0,015}$$

$$= 200 \times \frac{1.485}{1.5}$$

$L_{max} \simeq 200 m$

Cette longueur maximale ne suffit pas à une utilisation globale des fibres optiques !

$\Rightarrow$ fibre à gradient d'indice pour augmenter L_{max}