Nombres réels et inégalités

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

I Nombres réels

$\bigoplus$ Il est demandé à la classe de "définir" les nombres réels. En général, il se dégage deux courants :

- Un réel positif peut être pensé comme la distance entre deux points d'une droite (après choix d'une unité), ce qui permet (après choix d'une origine et d'une orientation) d'établir une correspondance entre les réels et les points d'une droite.
- Un réel est un nombre représenté par un développement décimal éventuellement illimité.

Exemples 1 $\pi = 3,14592...$; 1 ; $-\frac{1}{2} = -0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333....$

Remarque 2 Dans les deux cas, on retrouve le fait que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Par ailleurs, on a vu dans le premier chapitre que $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc cette inclusion est stricte.

$\bigoplus$ Se posent alors plusieurs questions, auxquelles la classe est invitée à répondre :

1. Que dire des deux réels de développements décimaux $0,999\dots$ et $1,000\dots$?
2. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, comment définir le réel de développement décimal $0,a_1a_2\dots$ comme limite d'une suite de nombres rationnels ?
3. Comment reconnaître un rationnel à l'aide de son développement décimal ?

On supposera dans la suite que la notion de nombre réel est "bien connue", ainsi que les opérations usuelles sur leur ensemble $\mathbb{R}$.
Rappelons à cette occasion les propriétés vérifiées par ces opérations :

Proposition 3

- *L'addition ($+$) vérifie les propriétés suivantes :*
  - *elle est commutative ($\forall a,b \in \mathbb{R}, a+b = b+a$) ;*
  - *elle est associative ($\forall a,b,c \in \mathbb{R}, (a+b)+c = a+(b+c)$) ;*
  - *elle admet un élément neutre, 0 ($\forall a \in \mathbb{R}, a+0 = 0+a = a$) ;*
  - *tout réel a admet un opposé noté $-a$ (i.e. $a+(-a) = (-a)+a = 0$).*
- *La multiplication ($\times$ ou $\cdot$, symbole parfois omis) vérifie les propriétés suivantes :*
  - *elle est commutative ($\forall a,b \in \mathbb{R}, ab = ba$) ;*
  - *elle est associative ($\forall a,b,c \in \mathbb{R}, (ab)c = a(bc)$) ;*
  - *elle admet un élément neutre, 1 ($\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$) ;*
  - $1 \neq 0$;
  - *tout réel **non nul** a admet un inverse noté a^{-1} (i.e. $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$).*

— *La multiplication est distributive par rapport à l'addition* ($\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a(b+c) = ab+ac$ et $(a+b)c = ac+bc$).

Remarque 4 (**Terminologie**)

1. Un tel ensemble muni de deux opérations vérifiant toutes ces propriétés est appelé un *corps* :

$$\boxed{(\mathbb{R},+,\times) \text{ est un corps.}}$$

2. Les opérations $+$ et $\times$ sont deux instances de la notion générale de *loi de composition interne (LCI)* sur un ensemble E : une LCI n'est autre qu'une application de $E\times E$ vers E.
3. Pour une LCI $\star$ sur E possédant un neutre e, on dit que $a \in E$ admet un *symétrique* ssi

$$\exists a' \in E, \quad a\star a' = a'\star a = e.$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, l'*opposé* est le symétrique pour l'addition et l'*inverse* est le symétrique pour la multiplication.

Proposition 5 ***(Unicité du neutre et des symétriques)***

Soit $\star$ une LCI sur un ensemble E possédant un neutre. Alors :

1. *l'élément neutre est unique ;*
2. *si $\star$ est **associative** et un élément donné admet un symétrique, alors ce symétrique est unique.*

*Cela **justifie** que l'on attribue une notation pour le symétrique lorsqu'il existe et qu'on parle de **l'**opposé $-a$ de $a\in\mathbb{R}$ et de **l'**inverse a^{-1} de $a \in \mathbb{R}^\star$ (avec la notation usuelle $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}\setminus\{0\}$).*

Démonstration: en exercice $\bigoplus$

---

1. Soient e,e' deux neutres. Alors
$$e = e\star e' = e'.$$
2. Supposons $\star$ associative. Soit $a\in E$ admettant des symétriques b et b'. Alors,
$$b = b\star e = b\star(a\star b') = (b\star a)\star b' = e\star b' = b'.$$

$\square$

Exercice 6 Montrer, en ne se servant que des propriétés ci-dessus, que 0 est *absorbant* pour $\times$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\cdot x = x\cdot 0 = 0,$$

puis que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (-1)\cdot x = -x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + x + (-x) = 0 \cdot x + 1 \cdot x + (-x) = (0+1) \cdot x + (-x) = 1 \cdot x + (-x) = x + (-x) = 0,$$

et

$$(-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x + (-x) = (-1+1) \cdot x + (-x) = 0 \cdot x + (-x) = -x.$$

II Relation d'ordre $\leq$

On **admet** alors qu'il existe une "relation binaire" sur $\mathbb{R}$ notée $\leq$ (et prononcée "est inférieur ou égal à") telle qu'on ait les résultats décrits dans les trois propositions suivantes.

Proposition 7 *($\leq$ est une "relation d'ordre".)*
La relation $\leq$ est :
- *réflexive ($\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$) ;*
- *antisymétrique ($\forall a, b \in \mathbb{R}, ((a \leq b \text{ et } b \leq a) \Longrightarrow a = b)$) ;*
- *transitive ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ((a \leq b \text{ et } b \leq c) \Longrightarrow a \leq c)$).*

Proposition 8 *(Cet ordre est "total".)*
$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ ou } b \leq a)$.

Proposition 9 *($\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$.)*
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c)$;
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ((a \leq b \text{ et } 0 \leq c) \Longrightarrow ac \leq bc)$.

On pourrait alors redémontrer toutes les propriétés usuelles vérifiées par la relation $\leq$. Nous en donnons quelques-unes en exercice et en démontrons d'autres pour donner une idée de ce qu'il faudrait faire pour être exhaustif, mais surtout pour s'habituer progressivement aux raisonnements mathématiques eux-mêmes.

Pour simplifier les textes, on introduit la notation $b \geq a$ ("b est supérieur ou égal à a") pour $a \leq b$, et on pose la définition suivante :

Définition 10 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que a est *strictement inférieur* à b et on note $a < b$ si et seulement si $a \leq b$ et $a \neq b$.

On note aussi cette propriété $b > a$ et on dit que b est strictement supérieur à a.

Exercice 11 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, montrer les propriétés suivantes :

1. non $(a < b \text{ et } a > b)$;
2. $a \leq b \iff (a < b \text{ ou } a = b)$;
3. $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$;
4. non $(a \leq b) \iff a > b$.

1. par l'absurde et antisymétrie ;
2. par définition de l'inégalité stricte et distributivité de "et" par rapport à "ou" ;
3. par totalité de l'ordre et la question précédente ;
4. par double implication : sens direct par la question précédente et réciproque en reformulant le premier membre avec la seconde question et de Morgan, puis en utilisant la première question.

Exercice 12 Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, montrer les propriétés suivantes :

1. $(a < b \text{ et } b \leq c) \Longrightarrow a < c$;
2. $(a \leq b \text{ et } b < c) \Longrightarrow a < c$;
3. $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Longrightarrow a + c \leq b + d$;
4. $(a < b \text{ et } c > 0) \Longrightarrow ac < bc$.

---

1. par transitivité de $\leq$, puis en excluant l'égalité par l'exercice précédent ;
2. idem ;
3. en ajoutant c à la première inégalité, b et la seconde et en utilisant la transitivité ;
4. par compatibilité de $\leq$ avec le produit, puis excluant l'égalité en la divisant par $c \neq 0$.

Proposition 13 $\forall a, b \in \mathbb{R}, [(a \leq b \iff -a \geq -b) \text{ et } (a < b \iff -a > -b)]$.

Démonstration: $\oplus$

En ajoutant $-a - b$ à l'inégalité pour les sens directs, puis appliquant le sens direct à $-a$ et $-b$ pour les réciproques.

$\square$

Proposition 14 $1 > 0$

Démonstration: $\oplus$

On a $1 < 0$ ou $1 = 0$ ou $1 > 0$ par un exercice précédent (parce que l'ordre est total !). Comme $1 \neq 0$ par axiome, il suffit de montrer que $1 < 0$ est impossible.

Supposons que $1 < 0$. On a alors, par la proposition précédente, $-1 > -0$. Or $-0 = (-1) \cdot 0 = 0$, donc $-1 > 0$. En multipliant l'inégalité $1 < 0$ par -1, on obtient alors $-1 = (-1) \cdot 1 < (-1) \cdot 0 = 0$. On a alors à la fois $-1 > 0$ et $-1 < 0$, ce qui est une contradiction d'après un exercice précédent.

$\square$

Proposition 15 $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, ((a \leq b \text{ et } c \leq 0) \Longrightarrow ac \geq bc)$ et $((a < b \text{ et } c < 0) \Longrightarrow ac > bc)$.

Démonstration: $\oplus$ $\square$

Comme conséquence des propositions précédentes, on obtient la "règle des signes" :

Proposition 16 $\forall a,b \in \mathbb{R}, ((a < 0 \text{ et } b < 0) \Longrightarrow ab > 0)$.

Démonstration: $\oplus$ $\square$

Remarquons qu'on a aussi les autres cas :

Exercice 17

1. $\forall a,b \in \mathbb{R}, ((a > 0 \text{ et } b < 0) \Longrightarrow ab < 0)$;
2. $\forall a,b \in \mathbb{R}, ((a > 0 \text{ et } b > 0) \Longrightarrow ab > 0)$.

Voici encore deux autres conséquences de ce qui précède :

Proposition 18 $\left(\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0\right)$ et $\left(\forall a \in \mathbb{R}^\star, a^2 > 0\right)$.

Démonstration: $\oplus$ $\square$

Proposition 19

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \left(a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0\right)$;
2. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \left(0 < a \leq b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}\right)$.

Démonstration: $\oplus$ $\square$

III Valeur absolue

Définition 20 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa *partie positive*, sa *partie négative* et sa *valeur absolue* ainsi :

— Si $x \geq 0$, $x^+ = x$ et sinon, $x^+ = 0$;
— Si $x \leq 0$, $x^- = -x$ et sinon, $x^- = 0$;
— Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et sinon, $|x| = -x$.

Remarque 21 Malgré son nom, la partie négative est positive, de la même manière que la partie imaginaire d'un nombre complexe est réelle...

Exemples 22 $(-2,5)^+ = 0$, $(-2,5)^- = 2,5$, $|-\pi| = \pi$, $|4| = 4$.

Remarque 23
- On définit ainsi trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $\cdot^+$, $\cdot^-$ et $|\cdot|$.
- Pour chacune de ces fonctions, les deux formules sont valides en 0 : par exemple, $|0| = 0 = -0$. Une fois définie la notion de continuité, cela assurera que ces trois fonctions sont en fait continues sur $\mathbb{R}$.

Remarque 24 La fonction valeur absolue est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$.

Remarque 25 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, $x = |x|$ et sinon $x = -|x|$, donc $x \in \{-|x|, |x|\}$. En particulier, $-|x| \leq x \leq |x|$.

Proposition 26 $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= x^+ - x^- \\ |x| &= x^+ + x^- \end{cases}$

Démonstration: $\bigoplus$ par disjonction de cas. □

La valeur absolue vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 27

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ *(positivité)*
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| = 0 \iff x = 0)$ *(séparation)*
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$ *(homogénéité)*
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \geq ||x| - |y||$ *(seconde inégalité triangulaire)*

Démonstration:

1. distinguer les deux cas : $x \geq 0$ ou non.
2. distinguer les trois cas : $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$.
3. distinguer quatre cas...
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :
   - Si $x + y \geq 0$, comme $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, alors $|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$.
   - Si $x + y < 0$, on applique ce qui précède à $-x$ et $-y$ (car $(-x) + (-y) \geq 0$), ce qui donne $|-x-y| \leq |-x| + |-y|$. On conclut par parité de la valeur absolue.
5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$. Donc $|x+y| \geq |x| - |y|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $|x+y| \geq |y| - |x|$. Comme $||x| - |y|| \in \{|x| - |y|, |y| - |x|\}$, alors $|x+y| \geq ||x| - |y||$.

□

Remarque 28 L'inégalité tire son nom du fait que si $x, y, z \in \mathbb{R}$, en l'appliquant à $x - y$ et $y - z$, on obtient $|x - z| = |(x-y) + (y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$. En interprétant cela en terme de distances, la distance de x à z est inférieure à la somme de la distance de x à y et de la distance de y à z. C'est encore plus parlant avec des modules dans $\mathbb{C}$: on a alors un "véritable" triangle et cela dit qu'un côté d'un triangle est toujours inférieur ou égal à la somme des deux autres. Faites un dessin.

Certaines propriétés se généralisent au cas de plus de deux nombres :

Proposition 29 *Soient $n \geq 1$ et $x_1,\ldots,x_n$ n réels. Alors*

$$|x_1 \cdots x_n| = |x_1| \cdots |x_n| \quad \text{et} \quad |x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Remarque 30 Comme on peut le voir dans le chapitre sur les calculs algébriques, on note aussi cela : $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

IV Maximum et minimum d'un nombre fini de réels

Définition 31 On définit, pour $x,y \in \mathbb{R}$, leur *maximum* et leur *minimum* par :
$\max(x,y) = x$ si $x \geq y$ et y sinon.
$\min(x,y) = y$ si $x \geq y$ et x sinon.

Le maximum et le minimum peuvent s'exprimer à l'aide de la valeur absolue :

Proposition 32 *Pour $x,y \in \mathbb{R}$, on a les trois égalités suivantes :*

1. $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$
2. $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
3. $\min(x,y) + \max(x,y) = x+y$

Démonstration: $\bigoplus$ distinguer deux cas... □

Et la valeur absolue peut s'exprimer à l'aide du maximum :

Proposition 33 $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |x| &= \max(-x,x) \\ x^+ &= \max(x,0) \\ x^- &= -\min(x,0) \end{cases}$

Pour le maximum de plus de deux nombres, on peut le définir par récurrence : pour une suite finie de réels $x_1,\ldots,x_n$, on pose $\max(x_1) = x_1$ et pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$,

$$\max(x_1,\ldots,x_{k+1}) = \max\left(\max(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1}\right).$$

On ferait de même pour définir le minimum de plus de deux nombres.

Exercice 34 Trouver une formule pour exprimer le maximum de trois nombres.

V Intervalles réels

Définition 35 Pour $a,b \in \mathbb{R}$, on définit les *intervalles bornés* suivants :
— le *segment* $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
— l'*intervalle ouvert* $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
— l'*intervalle semi-ouvert* $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

— l'*intervalle semi-ouvert* $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

On étend cette définition aux "bornes infinies" (ce qui donne des intervalles *non bornés*) :

Définition 36 Pour $a,b \in \mathbb{R}$, on définit

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}\,,\ ]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}\,,$$

$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}\,,\ ]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}\,.$$

On note $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+^\star =]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_-^\star =]-\infty,0[$.
Attention, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_-^\star \cup \mathbb{R}_+^\star$ **n'est pas** un intervalle.
On pose aussi $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque 37 Un autre point de vue pour construire ces intervalles non bornés est le suivant : on définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ et on prolonge la relation d'ordre $\leq$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décidant que $-\infty$ est plus petit que tous les autres éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $+\infty$ plus grand que tous les autres éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On peut alors définir directement les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 38 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, L'intervalle ouvert (resp. le segment) *centré en x de rayon* ε est $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ (resp. $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$).

Exercice 39

1. Dessiner les deux types d'intervalles définis ci-dessus.
2. Montrer que $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[= \{y \in \mathbb{R} |\ |y-x| < \varepsilon\}$ et $[x-\varepsilon,x+\varepsilon] = \{y \in \mathbb{R} |\ |y-x| \leq \varepsilon\}$.

VI Majorants et minorants

Définition 40 Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est *un majorant* de A ssi $\forall x \in A, x \leq M$.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est *un minorant* de A ssi $\forall x \in A, m \leq x$.

Remarque 41 Si une partie admet un majorant, elle admet une infinité de majorants.

Définition 42 Une partie qui admet un majorant (resp. minorant) est dire *majorée* (resp *minorée*). Une partie à la fois majorée et minorée est dite *bornée*.

$\bigoplus$ Décrire des parties de $\mathbb{R}$ majorées, non majorées, minorées, non minorées, bornées, non bornées. L'intervalle $[0,\pi[$ est-il majoré ? minoré ? Que dire de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $]0,+\infty[\cap\mathbb{Q}$?

Proposition 43 *Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, A est bornée ss'il existe un $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.*

Démonstration: $\bigoplus$ $\square$

Proposition 44
*Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ admet un majorant qui **appartient à** A, alors un tel majorant est unique. On l'appelle le plus grand élément de A, ou le maximum de A, et on le note* $\max(A)$.
*Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ admet un minorant qui **appartient à** A, alors un tel minorant est unique. On l'appelle le plus petit élément de A, ou le minimum de A, et on le note* $\min(A)$.

Démonstration: $\bigoplus$ $\square$

$\bigoplus$ Parmi tous les exemples vus plus haut, lesquels admettent un plus grand ou un plus petit élément ?

Proposition 45 *La définition ci-dessus étend la définition du maximum d'un nombre fini de réels vue précédemment. Plus précisément, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ est finie, elle admet un plus grand élément qui vérifie* $\max(A) = \max(a_1, \ldots, a_n)$.

Démonstration: $\bigoplus$ en exercice $\square$

Exemple 46 On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(-x, x) = \max(\{-x, x\})$.