Outils mathématiques

Identités remarquables, Trigonométrie, Equations du 2nd degré

Correction des exercices

Ex. 1. Conducteurs en série et en parallèle (équation du 2nd degré)

1. On part des 2 équations de départ : $r = R_1 + R_2$ et $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Le but est d'obtenir une équation sur R_1 (ou R_2, ce sera la même équation), en fonction de r et R.

En remplaçant $R_2 = r - R_1$ dans la seconde : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{r - R_1} = \dfrac{r}{R_1\,(r - R_1)}$

$\Rightarrow\ R_1\,(r - R_1) = r\,R\ \Rightarrow\ \boxed{R_1^2 - r\,R_1 + r\,R = 0}$

Résolution de ce trinome du 2nd degré : $\Delta = r^2 - 4\,r\,R\ \Rightarrow\ \boxed{R_{1,2} = \dfrac{r \pm \sqrt{r^2 - 4\,r\,R}}{2}}$

pourvu que $\Delta > 0$ c'est-à-dire $\boxed{r > 4\,R}$

2. Avec $r = 100\ \Omega$ et $R = 10\ \Omega$: $R_1 = 88,7\,\Omega$ et $R_2 = 11,3\,\Omega$.

3. On n'aurait pas pu mesurer $r = 100\ \Omega$ et $R = 50\ \Omega$, car alors le discriminant serait négatif : $\Delta < 0$ donc il n'y a aucun couple de résistances (R_1,R_2) qui puisse donner ce résultat (car les résistances sont à valeurs forcément réelles !)

4. cf 1.

Ex. 2. Kylian Mbappé et son ballon (trigonométrie)

Hauteur de l'échelle : $L = 4\,\text{m}$
Taille du petit Kylian le bras levé : $\ell = 2,28$ m
Hauteur de la gouttière : $H = 6,75$ m
Angle échelle-sol : $\alpha = 75°$donc angle échelle-mur : $\beta = 90 - \alpha = 15°$.
Inclinaison du toit : $\theta = 10°$
Longeur du batiment : $D = 6\,\text{m}$

1. Hauteur totale échelle inclinée + Kylian le bras levé : $\ell + L\,\cos\beta = \ell + L\,\sin\alpha = 6,14\,\text{m}$
Il lui manque donc $H - (\ell + L\,\sin\alpha) = 0,61\,\text{m}$ soit 61 cm

2. Hauteur du toit de l'autre côté du batiment : $H' = H + D\,\tan\theta = 7,81\,\text{m}$

Ex. 3. Astuce (trigonométrie)

1ère méthode :

$$\tan(\pi/12) = \tan(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi/6))}}{\sqrt{\frac{1}{2}\,(1+\cos(\pi/6))}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 0,268$$

2ème méthode :

$$\tan(\pi/12) = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})\,\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})\,\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\,\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 0,268$$

Outils mathématiques

Identités remarquables, Trigonométrie, Equations du 2nd degré

Correction des exercices

Ex. 1. Conducteurs en série et en parallèle (équation du 2nd degré)

1. On part des 2 équations de départ : $r = R_1 + R_2$ et $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Le but est d'obtenir une équation sur R_1 (ou R_2, ce sera la même équation), en fonction de r et R.

En remplaçant $R_2 = r - R_1$ dans la seconde : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{r - R_1} = \dfrac{r}{R_1\,(r - R_1)}$

$\Rightarrow\ R_1\,(r - R_1) = r\,R\ \Rightarrow\ \boxed{R_1^2 - r\,R_1 + r\,R = 0}$

Résolution de ce trinome du 2nd degré : $\Delta = r^2 - 4\,r\,R\ \Rightarrow\ \boxed{R_{1,2} = \dfrac{r \pm \sqrt{r^2 - 4\,r\,R}}{2}}$

pourvu que $\Delta > 0$ c'est-à-dire $\boxed{r > 4\,R}$

2. Avec $r = 100\ \Omega$ et $R = 10\ \Omega$: $R_1 = 88,7\,\Omega$ et $R_2 = 11,3\,\Omega$.

3. On n'aurait pas pu mesurer $r = 100\ \Omega$ et $R = 50\ \Omega$, car alors le discriminant serait négatif : $\Delta < 0$ donc il n'y a aucun couple de résistances (R_1,R_2) qui puisse donner ce résultat (car les résistances sont à valeurs forcément réelles !)

4. cf 1.

Ex. 2. Kylian Mbappé et son ballon (trigonométrie)

Hauteur de l'échelle : $L = 4\,\text{m}$
Taille du petit Kylian le bras levé : $\ell = 2,28$ m
Hauteur de la gouttière : $H = 6,75$ m
Angle échelle-sol : $\alpha = 75°$donc angle échelle-mur : $\beta = 90 - \alpha = 15°$.
Inclinaison du toit : $\theta = 10°$
Longeur du batiment : $D = 6\,\text{m}$

1. Hauteur totale échelle inclinée + Kylian le bras levé : $\ell + L\,\cos\beta = \ell + L\,\sin\alpha = 6,14\,\text{m}$
Il lui manque donc $H - (\ell + L\,\sin\alpha) = 0,61\,\text{m}$ soit 61 cm

2. Hauteur du toit de l'autre côté du batiment : $H' = H + D\,\tan\theta = 7,06\,\text{m}$

Ex. 3. Astuce (trigonométrie)

1ère méthode :

$$\tan(\pi/12) = \tan(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi/6))}}{\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi/6))}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 0,269$$

2ème méthode :

$$\tan(\pi/12) = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})\,\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})\,\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\,\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 0,267$$