C14 - Résumé

Définition : Taux d'accroissement

On appelle taux d’accroissement de f en a la fonction :

$$(T_a f)(x) = \begin{cases} I \backslash \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (T_a f)(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

Définition : Dérivabilité et nombre dérivé

La fonction f est dérivable an a ssi $(T_a f)(x)$ (resp $(\tilde{T}_a f)(h)$) admet une limite finie quand x tend vers a (resp. h tend vers 0)

Dans ce cas cette limite est appelée de nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$

Définition : Notion locale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$.
S'il existe $\eta > 0$ tq $D_f \cap [a-\eta, a+\eta]$
Soit un intervalle non trivial, on dit que f est dérivable en a ssi $f|_{[a-\eta,a+\eta]\cap D_f}$ l'est.

Définition : Tangente

La tangente a $\mathcal{G}_f$ au point de coordonnés $(a, f(a))$ est cette droite passant par $(a, f(a))$ de pente $f'(a)$

Propriété : Equation de la tangente

Si f est dérivable en a, l'équation de la tangente de $\mathcal{G}_f$ en $(a, f(a))$ est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Propriété : Dérivabilité par DL_1

f est dérivable en a ssi :
Il existe :

- $\alpha \in R$
- Un voisinage standard V de 0
- Une fonction ϵ définie sur $V = V \backslash \{0\}$

tels que :

$$\forall x \in I \cap (a + V), f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\epsilon(x - a)$$

et

$$\lim_0 \epsilon = 0$$

et dans le cas ou f est dérivable en a, on a $\alpha = f'(x)$

Dans ce cas de dérivabilité, le $DL_1(a)$ peut se réécrire :

$$\forall h \in I - a \cap \$V, f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h)$$

Ce qu'on peut noter avec le petit o :

$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h)$$

On restreint avec les x :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

Propriété : CN ponctuelle de continuité pour la dérivabilité

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a
(Réciproque fausse)

Définition : Dérivabilité à gauche et à droite

On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a ssi :

- $I \cap]-\infty, a[\neq 0$ (resp. $]a, +\infty[\neq 0$)
- $f|_{I\cap]a,+\infty[}$ (resp. $f|_{]-\infty,a[}$) est dérivable en a

Définition : Nombre dérivé à gauche et a droite

Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche de f en a et noté $f'(a)$ (resp. à droite)

Propriété

- Si $a = min(I)$ (resp. $max(I)$)
  Alors le dérivabilité de f en a équivaut à sa dérivé à droite (resp. à gauche) en a
- Sinon
  La dérivabilité de f en a équivaut à ce qu'elle soit à la fois dérivable à gauche et à droite en a et que de plus $f'_g(a) = f'_d(a)$

Définition : Dérivabilité sur un intervalle

f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout point de I.
Si c'est le cas on appelle fonction dérivé la fonction qui, pour tout $x \in I$ fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$ en f en x

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

Extension

$f : D_f \to \mathbb{R}$,
f est dérivable ssi elle l'est en tout point de D_f.

Définition : Intervalles séparés

Deux intervalles I_1, I_2 sont séparés ss'il existe $s \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall (x, y) \in I_1 \times I_2, x < s < y$$

ou

$$\forall (x, y) \in I_1 \times I_2, x > s > y$$

Propriété : Dérivabilité sur deux intervalles séparés

Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ et D_f est réunion finie d'intervalle non triviaux séparés deux a deux, alors elle est dérivable ssi elle l'est sur chacun de ses intervalles.

Propriété : Dérivable $\Rightarrow$ Continue

Si f est dérivable sur I elle est continue sur I

Théorème : Opérations de fonctions

Soient f et g définies sur I avec $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en a (resp sur I) Alors

1. La CL $\lambda f + \mu g$ l'est et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

2. Le produit fg l'est :

$$(fg)'(x) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

3. Si $g \neq 0$ (resp $\forall x \in I, g(x) \neq 0$)
   alors $\frac{f}{g}$ l'est et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Théorème : Dérivés de fonctions composés

Soient I et J deux intervalles non triviaux et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a (resp. sur I)
et g est dérivable en $f(a)$ (resp. sur J)
alors $(g \circ f)$ est dérivable en a (resp sur I) et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

resp.

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$$

Propriétés : Fonctions trigonométriques

- Tout polynôme trigonométrique est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle trigonométrique est dérivable sur son domaine de définition

Propriétés : Fonctions trigonométriques hyperboliques

- Tout polynôme trigonométrique hyperbolique est dérivable sur son domaine de définition
- Toute fonction rationnelle trigonométrique hyperbolique est dérivable sur son domaine de définition

Théorème des fonctions réciproques

Soit f,

- Continue
- Strictement monotone
- I un intervalle non trivial
- $a \in I$
  Par le TFR (continu),
  f admet une fonction réciproque :

$$f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$$

Ajout d'hypothèses supplémentaires :

- f est dérivable en a (resp sur I)
- $f'(x) \neq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$)

alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ (resp sur $f(I)$)
et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \iff (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Lemme CN d'extremum global sur un intervalle (Utile démonstration du TH de Rolle)

Soit f dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ ou $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$
Si f admet un maximum global en $c \in]a, b[$ alors $f'(c) = 0$
Idem pour le minimum

Théorème de Rolle

Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$,
tq :

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{cases}$$

Alors

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Théorème de l'égalité des accroissements finis

Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$,
tq :

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{cases}$$

Alors,

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle non trivial, et $a \in I$.
Soit f,

- continue sur I
- dérivable sur $I \backslash \{a\}$

telle que $\lim_a f' = l \in \overline{\mathbb{R}}$
Alors

$$\lim_{x \to a} (T_a f)(x) = l$$

et cela entraîne que

- Si $l \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = l$
- Si $l \notin \mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en a, mais son graphe admet une tangente verticale en $(a, f(a))$

Théorème : k-lipschitzienne et dérivée

Soit f dérivable sur un intervalle non trivial I
Si $|f'|$ est majoré par un $k \in \mathbb{R}_+$, alors f est k-lipschitzienne

Propriété : Convergence par contractance

Soit f contractante sur un intervalle I, ie k-lipschitzienne avec $k < 1$ et telle que $f(I) \subset I$.

On suppose que f admet un point fixe $\lambda \in I$.
Alors

- Ce point fixe est unique
- Toute suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(u_n) \end{cases}$$

  est bien définie et converge vers λ
- $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \lambda| \leq k^n |u_0 - \lambda|$

Théorème : Existence du point fixe par complétude (Hors programme)

Si f est contractante sur un intervalle fermé I et $f(I) \subset I$, alors f admet un point fixe

Soit f défini sur in intervalle non trivial I possédant un point fixe λ intérieur a I dérivable en λ et vérifiant :

$$|f'(\lambda)| < 1$$

Alors il existe $V \in \mathcal{V}(\lambda)$ tel que $V \subset I$ et un $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x \in V, |f(x) - \lambda| \leq k|x - \lambda|$$

De plus si $u_0 \in V$ et ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$) alors (u_n) est bien définie et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \lambda| \leq k^n |u_0 - \lambda|$$

Donc en particulier $u_n \to \lambda$

(λ est un point fixe attractif)

Théorème : Variations

(I DOIT ETRE UN INTERVALLE)
Alors

- f est constante $\Leftrightarrow f' = 0$
- f est croissante $\Leftrightarrow f' \geq 0$
- f est décroissante $\Leftrightarrow f' \leq 0$

et
$f' > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante
$f' < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante

Propriété stricte croissance

Si $f' \geq 0$ et s'annule en un nombre fini de points alors f est strictement croissante

Définition maximum et minimum

- f admet un maximum (resp. min) (global) en a ssi

$$f(a) = max(f(I))$$

- f admet un maximum (resp. min) local en a ssi
il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tq $f|_V$ admette un maximum (resp. min)
- f admet un extremum ssi f admet un maximum ou un minimum (globaux ou locaux)
- Un extremum est dit strict ssi la valeur $f(a)$ n'est atteinte qu'en a

Théorème : CN d'extremum local

Soit f définie sur I non trivial
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I et f est dérivable en a, alors $f'(a)$

Définition : Point critique

Un tel point annulant la dérivé de f est appelé un point critique

Lemme

Si $g : I \to \mathbb{R}$ est continue et $g(a) > 0$, il existe $\eta > 0$ tq
$g|_{I\cap[a-\eta,a+\eta]} > 0$

Théorème : CS d'extremum local

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, (ie 2 fois dérivables et de dérivée seconde continue) et soit $a \in I$.
Si a est un point critique de f et $f''(a) < 0$ (resp. $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum (resp. minimum) local strict en a.

RATTRAPER

Lemme 1 (Convexité)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y; \lambda \in [0, 1]\}$$

Lemme 2 (Convexité)

Soit g une fonction affine sur $\mathbb{R}$,
Alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1], g((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$$

Définition : Convexité

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Définition

f est concave ssi f est non convexe

Théorème de Jensen

Supposons que f est convexe

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \in I^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n$$

Lemme

Si $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ avec

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$$

Théorème convexité par croissance des pentes

Si f est convexe, alors pour tout $x, y, y \in I$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \overset{1.}{\leq} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \overset{2.}{\leq} \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Réciproquement

- Si pour tous $x, y, z \in I$, tq $x < y < z$ l'inégalité $1.$ est vérifiée, alors f est convexe

- La même pour l'inégalité 2.

Reformulation du Théorème

f est convexe ssi
Pour tout $a \in I$ la fonction, $T_a f$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$

Propriété

Supposons f convexe
Pour une sécante en deux points à son graphe, le graphe est :

- En dessous de la sécante entre les deux points d'intersection
- Au dessus de la sécante a l’extérieur des deux points d'intersection

Définition de stricte convexité (Hors programme)

Lorsque

$$\forall x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[, f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Propriété : Convexité par variation de la dérivé

Si f (définie sur I) est dérivable
alors elle est convexe ssi f' est croissante

Propriété : Convexité par position des tangentes

Soit f dérivable sur I,
Alors f est convexe ssi son graphe est au dessus de ses

tangentes

Propriété : Convexité par le signe de la dérivée seconde

Soit f deux fois dérivable sur I,
Alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$

Propriété : Stricte convexité (Dérivée simple)

Soit f dérivable sur I,
Alors f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante

Propriété : Stricte convexité (Dérivée seconde)

Soit f deux fois dérivable sur I,
Si $f'' > 0$ Alors f est strictement convexe

Définition : Classes

Pour $k \in \mathbb{N}$,
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
ssi
elle est k fois dérivable sur I
et $f^{(k)}$ est continue sur I

On dit que f est de classe C^∞ sur I
ssi
elle est indéfiniment dérivable ce qui n'équivaut pas a ce que f soit classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

On note $\mathcal{C}^k(I)(=\mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}(I))$
l’ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Extension

Si f : $D_f \to \mathbb{R}$,
On dira qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D_f
ssi
elle est k fois dérivable et sa k^{ieme} dérivée est continue sur D_f
lorsque $k \in \mathbb{N}$
et
de classe $\mathcal{C}^\infty$
ssi
elle est indéfiniment dérivable sur D_f

Théorèmes : Opérations sur les classes

$\mathcal{C}^k(I)$ est stable par CL et produit.
De plus si $f \in \mathcal{C}^k(I)$ ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^k(I)$

Corollaire

Les fonctions polynômes et rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire du Corollaire

$\ln \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*_+)$ puisque sa dérivée est une fonction rationnelle.

Théorème Composition de classes

Si $f \in \mathcal{C}^k(I)$, $g \in \mathcal{C}^k(J)$ et $f(I) \subset J$
Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I)$

Théorème : Corollaire des précédents

Les fonctions :

- polynômes
- trigonométriques
- rationnelles trigonométriques
- polynômes trigonométriques
- polynômes trigonométriques hyperbolique
- rationnelles trigonométriques hyperbolique

sont de classe C^∞

Théorème : réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Supposons $k \geq 1$,
si $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et f' ne s'annule pas sur I
Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(f(I))$

Propriété : Fonctions puissances de classe $\mathcal{C}^k$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x \mapsto x^\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

Théorème : Prolongement de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I \backslash \{a\})$,
Si pour tout $0 \leq p \leq k$, $f^{(p)}$ admet une limite finie
Alors f admet un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^k$

Définition de la dérivabilité complexe en $a \in I$

f est dérivable en a ssi $(T_a f)$ admet une limite finie en a
$(T_a f)$ est complexe

Proposition

f est dérivable en a ssi $\mathrm{Re} f$ est dérivable en a et $\mathrm{Im} f$ est dérivable en a
et si c'est le cas,

$$f'(a) = (\mathrm{Re} f)'(a) + i(\mathrm{Im} f)'(a)$$

Théorème : Inégalité des accroissements finis complexe

Si f est dérivable sur I,
Soit $x \in I$, et pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$,
Si $|f'(x)| \leq k$
Alors f est k-lipschitzienne

Théorème : Opération sur les fonctions dérivables et les compositions "possibles"

Revoir le chapitre sur les primitives

Définition

Identique a celle des fonctions réelles,

Notation : $\mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(I)$

Propriété

$$f \in \mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(I) \Leftrightarrow \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}(I)$$

Conséquence

Les fonctions polynômes ou rationnelles à coefficient complexes (à variable réelle) sont de casse $\mathcal{C}^\infty$.

Composition

Les résultats du début du chapitre sur les primitives s'étendent facilement aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
(A la source)
(et au but avec $\exp$)

Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$

Il s’énonce de la même manière que pour $\mathbb{R}$