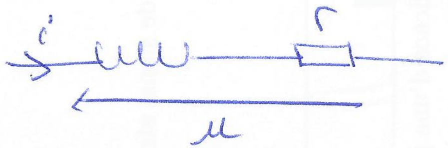
TD4 Correction

Ex 1.

1. bobine réelle :



$$\boxed{u = L\frac{di}{dt} + ri}$$

2. à BF

$\Rightarrow$

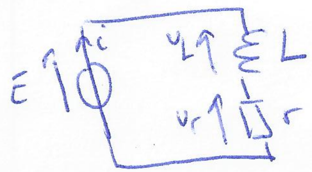
bobine réelle $\Leftrightarrow$

à HF

$\Rightarrow$

bobine réelle $\Leftrightarrow$

3.



Loi des mailles :

$$E - u_L - u_r = 0$$

$$\Rightarrow E = u_L + u_r = L\frac{di}{dt} + ri$$

on multiplie par i :

$$Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + ri^2$$

or $i = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{L}{r}$

on intègre entre $t=0$ et $t=\tau$ pour avoir l'énergie pendant l'alimentation :

$$W_G = \int_0^\tau E i \, dt = \frac{E^2}{r}\int_0^\tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt$$

$$W_G = \frac{E^2}{r}\left[t + \tau e^{-t/\tau}\right]_0^\tau$$

$$W_G = \frac{E^2}{r}\left[\tau + \tau e^{-1} - \tau\right]$$

$$\boxed{W_G = \frac{E^2}{r}\tau e^{-1}}$$

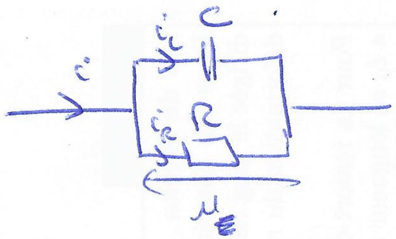
$$W_B = \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) dt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^\tau$$

$$\boxed{W_B = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{r^2}\left(1 - e^{-1}\right)^2}$$

$$W_J = W_G - W_B$$

Ex 2

1. Condensateur réel :



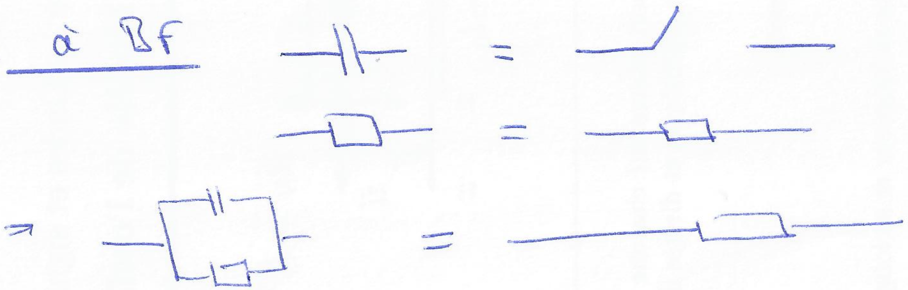
$$i = i_C + i_R = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

relation des condensateurs

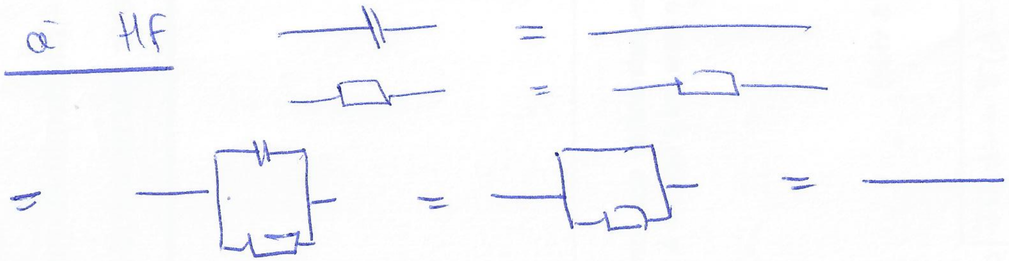
↳ loi d'Ohm

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{i}{C}}$$

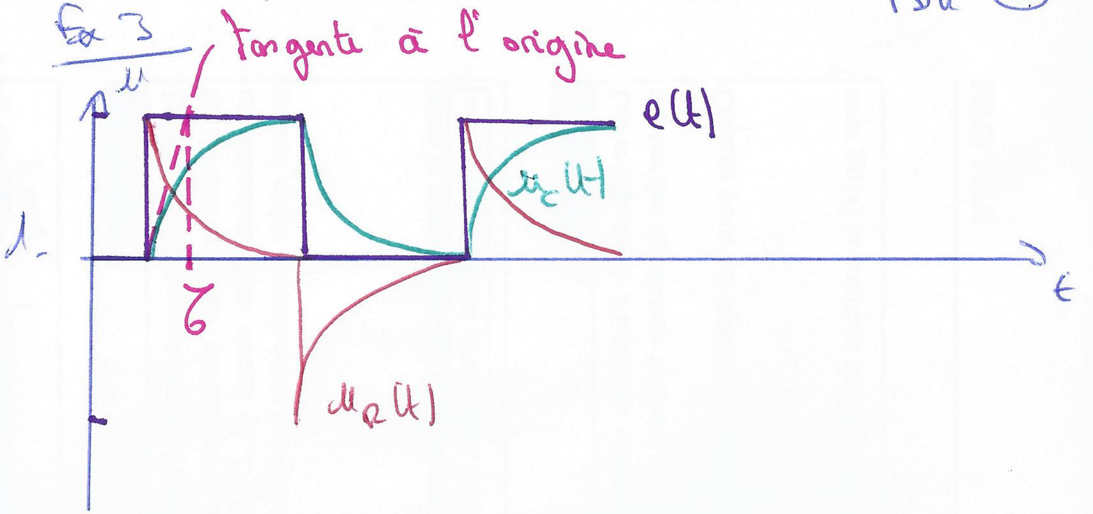
2. à BF



à HF



Ex 3



$e(t)$ = tension créneau du GBF

$u_C(t)$ = tension <u>continue</u> du condensateur

$u_R(t) = R\,i(t)$ <u>discontinue</u> comme i

2 - d'après le graphique $\underline{T = 1\,ms} = 10^{-3}\,s$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \underline{f = 1\,kHz}$$

$\underline{e_{min} = 0V}$ et $\underline{e_{max} = 10V}$

3. τ est le temps correspondant au croisement entre la tangente à l'origine et l'asymptote.

et on lit $\underline{\tau = 0{,}12\,ms}$

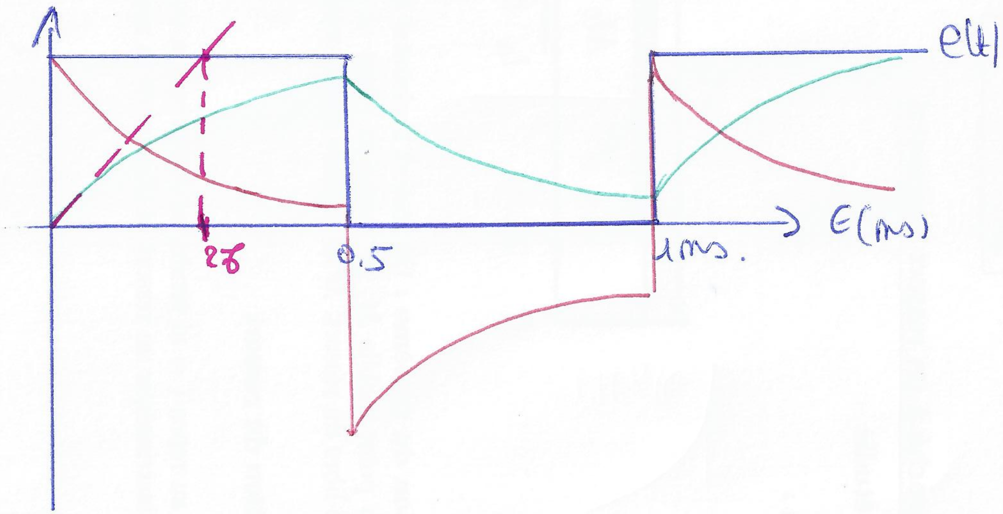
4. pour un circuit RC le temps caractéristique vaut $\tau = RC \Rightarrow \boxed{R = \frac{\tau}{C}}$

$$R = \frac{0,12\ 10^{-3}}{200\ 10^{-9}} = 0,6\ 10^{4}\ \Omega$$

$\underline{R = 600\ \Omega}$

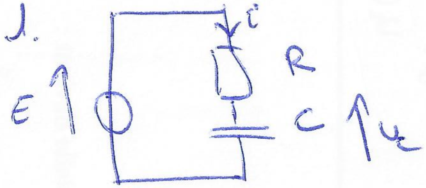
5. si R devient $2R$ alors τ devient 2τ

le temps de montée augmente ainsi :



Ex 4.

1.



loi des mailles :

$$E = Ri + u_c$$

et

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec } \boxed{\tau = RC}$$

2. solution générale : $u_c(t) = E + Ae^{-t/\tau}$

avec A une constante

à $t = 0^-$ $u_c(0^-) = 0$ car C est initialement déchargé.

et $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ car la tension aux bornes du condensateur est continue.

$\Rightarrow u_c(0^+) = 0 = E + A \Rightarrow \underline{A = -E}$

et on obtient : $\boxed{u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$

TD 4 (4)

la charge du condensateur vaut : $q = C u_c(t)$

$$\Rightarrow \boxed{q = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

et $i(t) = C \dfrac{du_c}{dt} = CE \dfrac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$$\boxed{i(t) = \frac{CE}{\tau} e^{-t/\tau}}$$

3. loi des mailles :

$$E = Ri + u_c$$

on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + u_c i$$

et comme $i = C \dfrac{du_c}{dt}$

$$\underset{P_G}{Ei} = \underset{P_J}{Ri^2} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c^2\right)}_{P_E = \frac{d}{dt}(W_E)}$$

avec P_G = puissance fournie par le générateur

P_J = puissance dissipée dans la résistance

et W_E l'énergie électrique stockée par le condensateur.

4. Intégrons l'équation précédente entre 0 et $+\infty$, pour l'ensemble de la charge :

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} Ei\,dt}_{W_{gén}} = \underbrace{\int_0^{+\infty} Ri^2\,dt}_{\mathcal{E}_R} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c^2\right) dt}_{\mathcal{E}_C}$$

$$\mathcal{E}_C = \left[\frac{1}{2} C u_c^2\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CE^2}$$

$$W_{gén} = \int_0^{+\infty} Ei\,dt = \frac{CE^2}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau}\,dt$$

$W_{gene} = -CE^2\left[e^{-t/\tau}\right]_0^{+\infty}$.

$\boxed{W_{gene} = CE^2}$

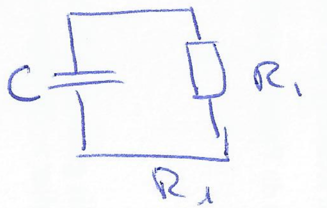
et $\mathcal{E}_R = W_{gene} - \mathcal{E}_c = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2}CE^2}$

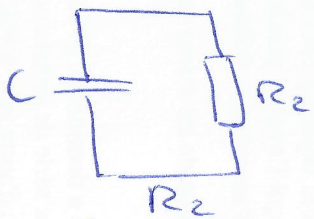
aucune de ces expressions ne dépendent de R

Ex 5

1.



<



$\tau_1 = RC_1 < \tau_2 = RC_2$

dans les deux circuits :

$u_{C_1} = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau_1}$ $\qquad u_{C_2} = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau_2}$

$u_{C_1}(t_{1,90}) = 10\% \frac{q_0}{C_1} = \frac{q_0}{C_1} e^{-\frac{t_{1,90}}{\tau_1}}$

$\Rightarrow e^{-\frac{t_{1,90}}{\tau_1}} = 0,1 = \frac{1}{10}$

$\boxed{t_{1,90} = \tau_1 \ln 10}$

de même $\boxed{t_{2,90} = \tau_2 \ln 10}$

comme $\tau_1 < \tau_2$ alors $\boxed{t_{1,90} < t_{2,90}}$

2. pour une décharge à 60% on obtiendrait le même résultat : $\begin{cases} t_{1,60} = \tau_1 \ln 40 \\ t_{2,60} = \tau_2 \ln 40 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{t_{1,60} < t_{2,60}}$

3. $\begin{cases} u_{C_1} = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau_1} \\ u_{C_2} = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau_2} \end{cases}$

comme $\tau_1 < \tau_2$ à tout instant $e^{-t/\tau_1} < e^{-t/\tau_2}$

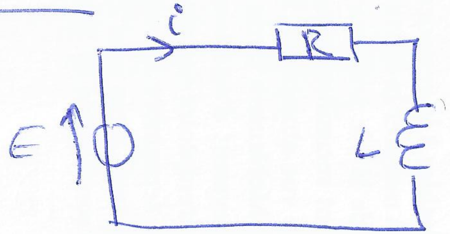
$\Rightarrow \boxed{u_{C_1} < u_{C_2}}$ à tout instant

4. l'énergie totale dissipée correspond à l'énergie initiale stockée dans les condensateurs. or les condensateurs sont identiques et initialement ils ont la même charge, ils ont donc la même énergie initiale.

$\Rightarrow$ l'énergie totale dissipée est <u>identique</u> dans les 2 circuits

---

<u>Ex. 6</u>



loi des mailles $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L} i = \dfrac{E}{L}$

$\Rightarrow i = \dfrac{E}{R} + Ae^{-t/\tau}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$

à $t=0$ $\quad i(0^-) = i(0^+) = 0$

$\Rightarrow A = -\dfrac{E}{R}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$i_{max} = \dfrac{E}{R}$

à $t = t_1$ $\quad i(t_1) = 10\% \dfrac{E}{R} = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$

$\Rightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}1$

$e^{-t_1/\tau} = 0{,}9$

$\underline{t_1 = -\tau \ln 0{,}9}$

à $t = t_2$ $\quad i(t_2) = 90\% \dfrac{E}{R} = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t_2/\tau}\right)$

$\Rightarrow \underline{t_2 = -\tau \ln 0{,}1}$

donc $t_2 - t_1 = -\tau(\ln 0{,}1 - \ln 0{,}9)$

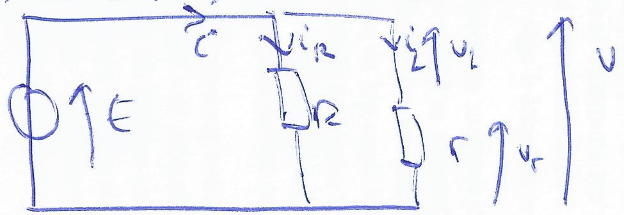
$= \tau(\ln 0{,}9 - \ln 0{,}1)$

$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{0,9}{0,1}$

$\boxed{t_2 - t_1 = \tau \ln 9}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

Ex 7

1. RP atteint donc le circuit est equivalent à :



avec i le courant de la branche principale
i_R le courant traversant R
i_L le courant traversant la bobine et r.

$i = i_R + i_L$

$u = R i_R = r i_L = u_r + \underbrace{u_L}_{=0}$

et on a aussi $\boxed{u = E}$

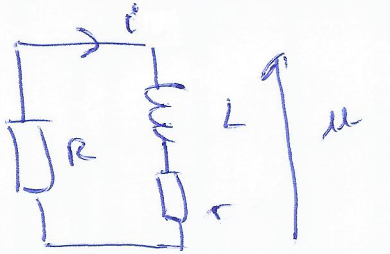
$\Rightarrow R i_R = E$
$r i_L = E$

$\Rightarrow \boxed{i_L = \frac{E}{r}}$ et $\boxed{i_R = \frac{E}{R}}$

et $i = i_L + i_R = \frac{E}{r} + \frac{E}{R}$

$\boxed{i = \frac{rR}{r+R} E}$

2. le nouveau circuit est :



loi des mailles : $u_L + Ri + ri = 0$

or $u_L = L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$

de plus $u = u_L + ri = -Ri$

donc $i = -\frac{u}{R}$ et en remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{\tau}\left(-\frac{u}{R}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R+r}$$

3. on resoud l'equation differentielle sur $i(t)$

$i(t) = Ae^{-t/\tau}$

→ determinée en 1.

et à $t=0$ $i(0) = i_L = \frac{E}{r}$ car i est continu (intensité du courant traversant la bobine)

$\Rightarrow A = \frac{E}{r}$ — $\boxed{i(t) = \frac{E}{r}e^{-t/\tau}}$

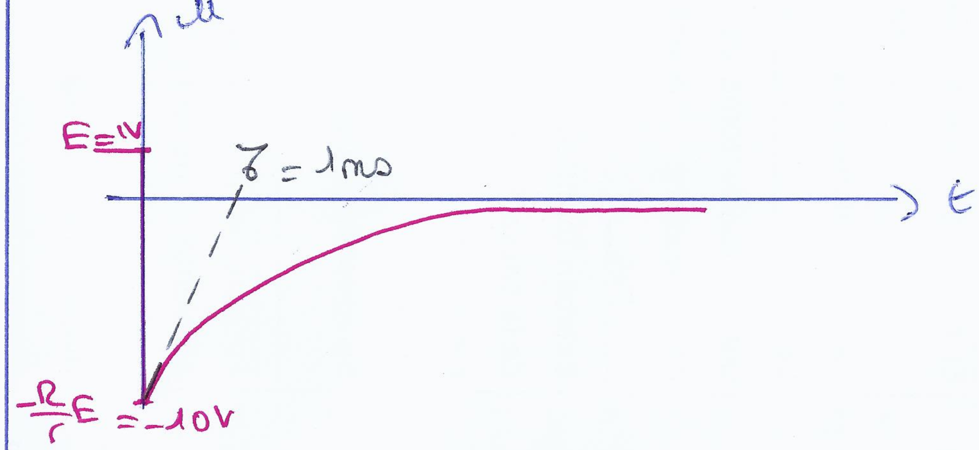
et $u = -Ri$

$\Rightarrow \boxed{u(t) = -\frac{R}{r}Ee^{-t/\tau}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$

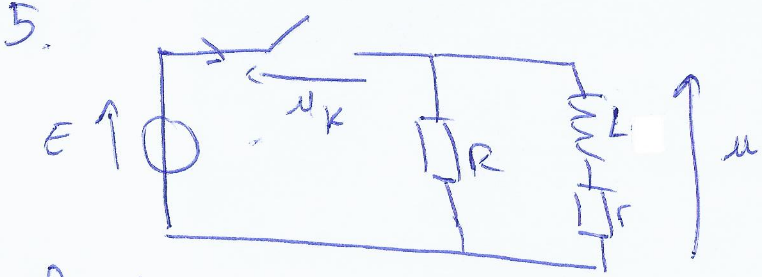
4. AN : $\frac{R}{r}E = \frac{100}{10}\times 1 = \underline{10V}$ TD4 (8)

$\tau = \frac{0,11}{100+10} = \frac{0,11}{110} = 10^{-3}s$

$\underline{\tau = 1ms}$



5.



loi des mailles dans la maille principale :

$E = u_K + u(t)$

$\Rightarrow u_K = E - \frac{R}{r}Ee^{-t/\tau}$

$\boxed{u_{r\,max} = E}$ en $t = +\infty$

6. bilan de énergie dans la maille contenant L :

loi des maille : $Ri + ri + u_L = 0$

$$(R+r)\,i + u_L = 0$$

on multiplie par i :

$$\underbrace{(R+r)\,i^2}_{P_J} + u_L\, i = 0$$

P_J = puissance dissipée par effet Joule

on intègre entre 0 et $+\infty$ $\int_0^{+\infty} P_J\,dt = W_J$

énergie dissipée par effet Joule

et $W_J = -\int_0^{+\infty} u_L\, i\, dt = -\int_0^{+\infty} L\frac{di}{dt}\, i\, dt$

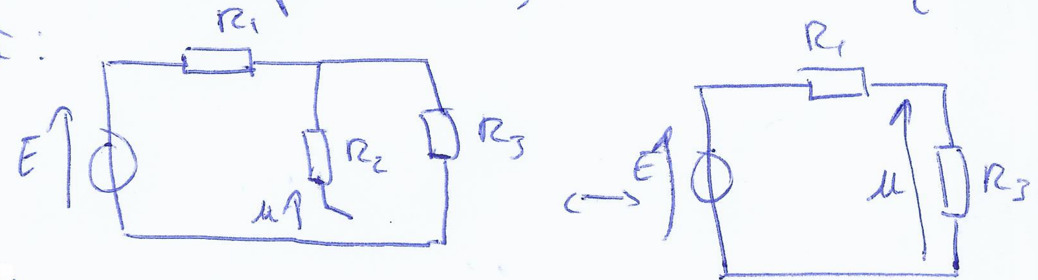
$$W_J = -\frac{L}{2}\int_0^{+\infty} \frac{di^2}{dt}\,dt = -\frac{L}{2}\left[i^2\right]_0^{+\infty}$$

$$W_J = -\frac{L}{2}\left(i^2(+\infty) - i^2(0)\right)$$

$$\boxed{W_J = +\frac{L}{2}\,\frac{E^2}{r^2}}$$

Ex 8.

1. à $t = +\infty$ on est en RP donc le condensateur est un interrupteur ouvert, le circuit est equivalent à :



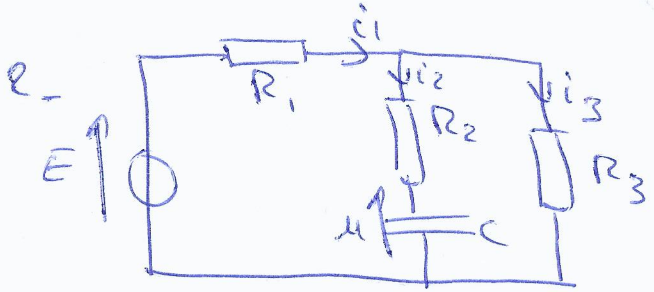
donc u est la tension aux bornes de R_3 :

$$\boxed{u = \frac{R_3}{R_1+R_3}E}$$ (pont diviseur de tension)

à $t = 0^+$ la tension u aux bornes de C est continue donc $u(0^+) = u(0^-)$

or le condensateur est initialement déchargé donc $u(0^-) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(0^+) = 0}$$



lois des mailles : $E = u + R_2 i_2 + R_1 i_1$

$0 = u + R_2 i_2 - R_3 i_3$

loi des noeuds $i_1 = i_2 + i_3$

loi du condensateur $i_2 = C\dfrac{du}{dt}$

donc $0 = u + R_2 C\dfrac{du}{dt} + R_3(i_2 - i_1)$

$0 = u + (R_2 + R_3)C\dfrac{du}{dt} - R_3 i_1 \quad (1)$

or $R_1 i_1 = E - u - R_2 i_2 = E - u - R_2 C\dfrac{du}{dt}$

$\Rightarrow R_3 i_1 = \dfrac{R_3 E}{R_1} - \dfrac{R_3}{R_1}u - \dfrac{R_3 R_2}{R_1}C\dfrac{du}{dt}$

donc on remplace i_1 dans l'équation (1) :

$$0 = u + (R_3 + R_2)C\frac{du}{dt} - \frac{R_3}{R_1}E + \frac{R_3}{R_1}u + \frac{R_3 R_2}{R_1}C\frac{du}{dt}$$

$$\left(R_3 + R_2 + \frac{R_3 R_2}{R_1}\right)C\frac{du}{dt} + u\left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) = \frac{R_3}{R_1}E$$

$$\left((R_3 + R_2)R_1 + R_3 R_2\right)C\frac{du}{dt} + (R_1 + R_3)u = R_3 E$$

sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{C}\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}u = \frac{R_3 E}{C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}\frac{E}{C}}$$

avec $\boxed{\tau = \dfrac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_3}C}$

La solution de cette équation est de la forme :

$$u(t) = u_{p} + u_{h} = \frac{R_3}{R_1+R_3}E + Ae^{-t/\tau}$$

à $t=0$ $u(0)=0 = \frac{R_3}{R_1+R_3}E + A$

$$\Rightarrow \underline{A = -\frac{R_3}{R_1+R_3}E}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{R_3}{R_1+R_3}E\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_3}C}$

$$i_2 = C\frac{du}{dt} = C\frac{R_3}{R_1+R_3}E \times \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{R_3E}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}e^{-t/\tau}}$$

$$i_1 = \frac{1}{R_1}\left(E - u - R_2C\frac{du}{dt}\right)$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{R_3}{R_1+R_3}\frac{E}{R_1}\left(1-e^{-t/\tau}\right) - \frac{R_2C}{R_1}\frac{R_3}{R_1+R_3}\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{R_3E}{(R_1+R_3)R_1}\left(1-e^{-t/\tau} + \frac{R_2C}{\tau}e^{-t/\tau}\right)$$

$$= \frac{E}{R_1} - \frac{R_3E}{(R_1+R_3)R_1}\left(1+e^{-t/\tau}\left(\frac{R_2C}{\tau}-1\right)\right)$$

$$= \frac{E}{R_1+R_3} + \frac{R_3E}{(R_1+R_3)R_1}e^{-t/\tau}\left(1 - R_2\frac{R_1+R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\right)$$

$$= \frac{E}{R_1+R_3}\left[1 + \frac{R_3}{R_1}e^{-t/\tau}\left(\frac{R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\right)\right]$$

$$\boxed{i_1 = \frac{E}{R_1+R_3}\left[1 + \frac{R_3^2e^{-t/\tau}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\right]}$$

$i_3 = i_1 - i_2$ loi des noeuds

$$= \frac{E}{R_1+R_3} + \frac{R_3 E e^{-t/\tau}}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}\underbrace{\left(\frac{R_3}{R_1+R_3} - 1\right)}_{-\frac{R_1}{R_1+R_3}}$$

$$\boxed{i_3 = \frac{E}{R_1+R_3}\left(1 - \frac{R_1R_3}{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3} e^{-t/\tau}\right)}$$

3. energie dissipée pendant la charge

loi des mailles : $E = Ri_1 + Ri_2 + u$

on multiplie par i_1, intensité du courant de la branche verticale :

$$E i_1 = \underbrace{R i_1^2 + R i_1 i_2}_{P_J \text{ puissance dissipée par effet Joule}} + u i_1$$

on integre entre 0 et $+\infty$:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} E i_1 \, dt}_{W_g} = W_J + \underbrace{\int_0^{+\infty} u i_1 \, dt}_{W_E}$$

W_g : énergie fournie par le generateur

W_E = energie stockée par C

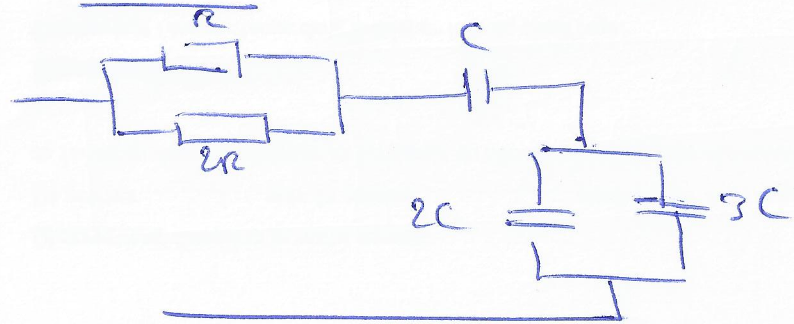
W_J = energie dissipée par effet Joule.

or $i_1 = cte + cte' e^{-t/\tau}$

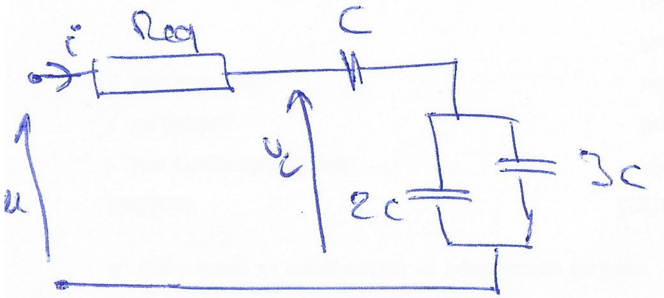
$\Rightarrow$ $W_g = +\infty$ quand on intègre ent 0 et $+\infty$.

$\Rightarrow$ $\boxed{W_J = +\infty}$

Ex 9.



on peut déjà utiliser la résistance équivalente.

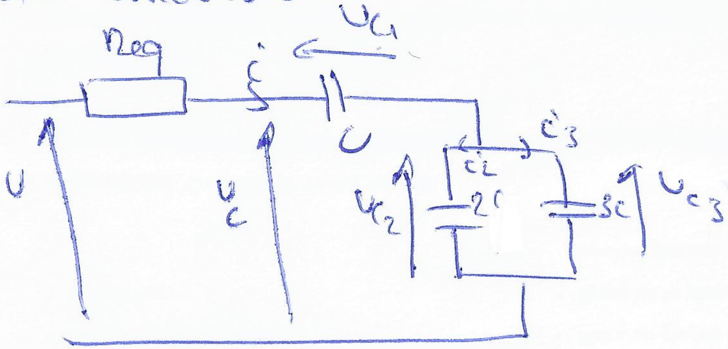


avec $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$

$= \frac{3}{2R}$

$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{2R}{3}}$

exprimons l'intensité i en fonction de la tension u_c aux bornes de l'ensemble des condensateur



$u_c = u_{c2} + u_{c1} = u_{c3} + u_{c1}$ et $i = i_2 + i_3$

$i = C\frac{du_{c1}}{dt}$

$i_2 = 2C\frac{du_{c2}}{dt}$ et $i_3 = 3C\frac{du_{c3}}{dt}$

$i = 2C\frac{du_{c2}}{dt} + 3C\frac{du_{c3}}{dt}$

$i = 2C\frac{du_c}{dt} - 2C\frac{du_{c1}}{dt} + 3C\frac{du_c}{dt} - 3C\frac{du_{c1}}{dt}$

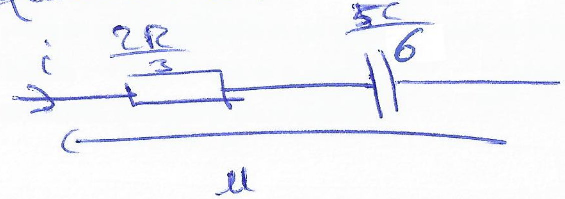
$= 5C\frac{du_c}{dt} - 5C\frac{du_{c1}}{dt}$

$i = 5C\frac{du_c}{dt} - 5i$

$\Rightarrow 6i = 5C\frac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{i = \frac{5C}{6}\frac{du_c}{dt}}$

ainsi l'association des 3 condensateurs est équivalent à un unique condensateur de capacité $C_{eq} = \frac{5C}{6}$, le circuit est alors équivalent à :

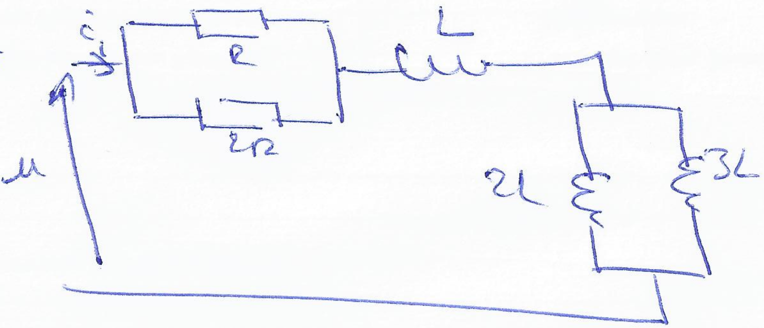


Le temps caractéristique vaut donc :

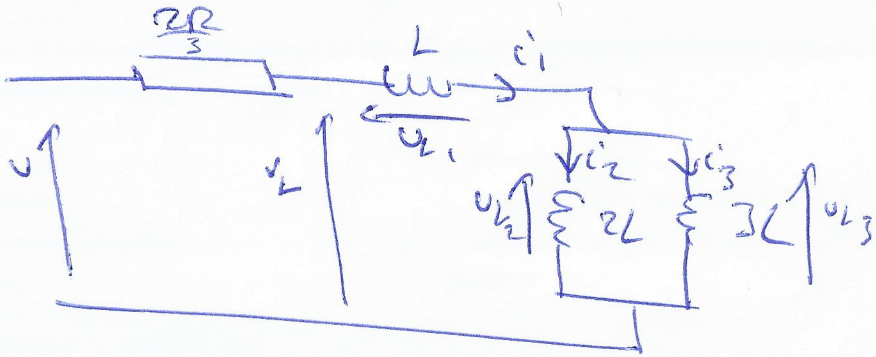
$$\tau = \frac{5C}{6} \times \frac{2R}{3}$$

$$\boxed{\tau = \frac{5}{9} RC}$$

2e circuit



équivalent à :



exprimons u_L en fonction de i_1

on a $u_L = u_{L_1} + u_{L_2} = u_{L_1} + u_{L_3}$

$i_1 = i_2 + i_3$

TD 16

et $u_{L_1} = L \frac{di_1}{dt}$

$u_{L_2} = 2L \frac{di_2}{dt}$

$u_{L_3} = 3L \frac{di_3}{dt}$

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} + 2L\frac{di_2}{dt} = 3L\frac{di_1}{dt} - 2L\frac{di_3}{dt}$$

or $i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$

et $u_{L_2} = u_{L_3} \Rightarrow 2L\frac{di_2}{dt} = 3L\frac{di_3}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{2}{3}\frac{di_2}{dt} = \frac{5}{3}\frac{di_2}{dt}$$

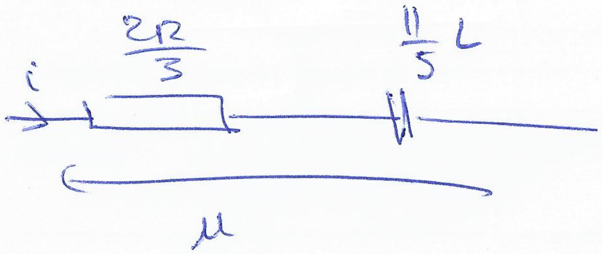
$$\Rightarrow \boxed{\frac{di_2}{dt} = \frac{3}{5}\frac{di_1}{dt}}$$

et en remplaçant l'expression de $\frac{di_2}{dt}$ dans la formule donnant u_L on a :

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} + 2L \times \frac{3}{5}\frac{di_1}{dt}$$

$$\boxed{u_L = \frac{11}{5} L \frac{di_1}{dt}}$$

l'association des 3 bobines se comporter comme un unique bobine d'inductance equivalente $L_{eq} = \frac{11}{5} L$:



ainsi le temps caractéristique correspondant est.

$$\tau = \frac{\frac{11}{5} L}{\frac{2R}{3}} = \frac{33}{10} \frac{L}{R}$$

$$\boxed{\tau = \frac{33}{10} \frac{L}{R}}$$