DS2 de mathématiques, partie raisonnement, vendredi 6 octobre 2023 (2h00)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*
On rappelle que l'application d'un théorème nécessite la vérification de ses hypothèses, ce qui sera systématiquement évalué. De manière générale, ce sera le cas pour toutes les étapes des raisonnements effectués.

Exercice 1 *Avoir l'esprit de contraposition*
Montrer qu'un nombre naturel, dont le cube est pair, est pair.

Exercice 2 *Donne ton max !*
On rappelle que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \longmapsto \max(\mathrm{e}^x, \cos(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Positivez*

1. Donner sans justification une traduction formelle du fait qu'il n'existe pas de partie de $\mathbb{R}$ majorée sans plus grand élément, **sans utiliser de négation**.
2. Cet énoncé est-il vrai ? On **justifiera** la réponse.

Exercice 4 *Stabilités par composition*
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer par des raisonnements directs que :

1. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
2. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 5 *Inéquation*
Déterminer les réels x pour lesquels l'inégalité $I(x)$ suivante est bien définie et vérifiée :

$$I(x) : \quad \frac{\sqrt{x+8} + |x-7|}{x+2} \leq 1.$$

Problème *Construction optimale d'un carré inscrit dans un cercle*
On se place dans le plan usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct, qui le met en correspondance avec $\mathbb{C}$ de la manière habituelle. Les points de $\mathcal{P}$ seront notés à l'aide de lettres capitales $A, B, \ldots$ et leurs affixes par les lettres minuscules correspondantes $a, b, \ldots$, sauf pour l'origine O d'affixe 0 et le point J d'affixe $-\mathrm{i}$ (on notera I le point d'affixe i). On note $\mathcal{C}_0$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre I et de rayon 1.

1. Faire une figure précise, qu'on complétera au long du problème.
2. Donner les "équations complexes" des cercles $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ et en déduire que ces deux cercles se coupent en deux points A et B dont on déterminera les formes algébriques des affixes, en convenant que $\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.

On note $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre A passant par B.

3. Déterminer le rayon de $\mathcal{C}_2$, puis $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0$. Vérifier graphiquement le résultat trouvé.

On note $\mathcal{D}_3$ la droite (OA).

4. Montrer que l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_3$ est $\left\{r\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}\right)\,;\ r \in \mathbb{R}\right\}$. En déduire que cette droite coupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en deux points C et D dont on déterminera les formes trigonométriques **et** algébriques des affixes, en convenant que $\mathrm{Re}\,(c) < \mathrm{Re}\,(d)$.
5. Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{J\}$. On note $\mathcal{D}_M$ la droite (JM).
   (a) Montrer que l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_M$ est $\{\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{C}_0 = \{J, N\}$ avec $n = \dfrac{2(1+\mathrm{Im}\,(m))}{|m+\mathrm{i}|^2}(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points de cette intersection et interpréter cela géométriquement.
6. En appliquant le résultat précédent pour $M = C$ et $M = D$, décrire une construction à la règle et au compas du carré inscrit dans $\mathcal{C}_0$ admettant I pour sommet, en 7 *lignes* (une *ligne* étant une droite ou un cercle).

   On suppose tracés, avant la construction, le cercle $\mathcal{C}_0$ et les deux points O et I, et uniquement ces objets. Un point *construit* est l'un des deux points initiaux ou un point obtenu par intersection de *lignes* tracées. Chaque tracé de *ligne* doit s'appuyer sur des points précédemment *construits* : le centre et un point du cercle pour tracer un cercle, deux points de la droite pour tracer une droite.

Exercice 6 *Digestif ayant du corps*

Les trois ensembles suivants, munis de l'addition et la multiplication usuelles, sont-ils des corps ?

$$X = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{N}\right\}, \quad Y = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}, \quad Z = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$