Devoir numéro 1, à rendre le vendredi 8 septembre 2022

Exercice 1 Lors d'une réunion pédagogique, on entend les affirmations suivantes, dont chacune est soit vraie, soit fausse :

— Chris : "$4+2\times 5 = \frac{48}{12}+\frac{28}{4}+19$."
— Smarty : "J'ai mangé un beignet à midi."
— Fred : "Smarty ment."
— J.-B. : "Si Fred dit la vérité, alors Chris aussi."

1. Combien y a-t-il d'affirmations fausses parmi les trois premières ?

$\boxed{\text{Chris ment}}$ car $14 \neq 30$. Si Smarty dit la vérité, la phrase de Fred est fausse, et si Smarty ment, la phrase de Fred est vraie. Dans tous les cas, il y a une phrase vraie et une fausse parmi celles de Smarty et Fred. Ainsi, il y a $\boxed{\text{deux affirmations fausses}}$ parmi les trois premières.

---

2. Montrer qu'il y a exactement une phrase fausse parmi celles de J.-B. et de Fred.

L'affirmation de J.-B. est une implication, qui est donc fausse si et seulement si sa prémisse est vraie et sa conclusion est fausse, soit si et seulement si Fred dit vrai et Chris ment. Or Chris ment, donc l'affirmation de J.-B. est fausse si et seulement si celle de Fred est vraie. Il y a donc exactement $\boxed{\text{une phrase fausse}}$ parmi celles de J.-B. et Fred.

On entend alors une cinquième affirmation, elle aussi vraie ou fausse :

— Denise : "Il y a exactement trois affirmations fausses parmi ces cinq."

3. J.-B. dit-il la vérité ?

Raisonnons par disjonction des cas suivant la valeur de vérité de l'affirmation de Denise :

— Si Denise dit vrai, son affirmation est juste et parmi la sienne et les trois premières, on a d'après 1 exactement deux affirmations fausses. Comme Denise dit vrai, celle de J.B. doit obligatoirement être fausse.
— Si Denise ment, son affirmation est fausse et parmi la sienne et les trois premières, on a d'après 1 exactement trois affirmations fausses. Comme Denise ment, celle de J.B. doit obligatoirement être fausse.

Dans tous les cas, on a donc que $\boxed{\text{J.-B. ment}}$.

---

4. Que peut-on en déduire sur Fred, Smarty et Denise ?

D'après 2, comme J.-B. ment, alors $\boxed{\text{Fred dit la vérité.}}$ D'après le raisonnement effectué en 1, comme Fred dit la vérité, alors $\boxed{\text{Smarty ment.}}$

On a donc les résultats suivants : Chris, Smarty et J.-B. mentent et Fred dit la vérité. Ces résultats sont compatibles avec les quatre premières affirmations. Quant à l'affirmation de Denise, on vérifie aisément que le fait qu'elle soit vraie ou fausse n'apporte aucune contradiction, donc les deux cas sont possibles, donc $\boxed{\text{on ne peut rien dire sur l'affirmation de Denise.}}$

Exercice 2 Déterminer l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$$

puis étudier ses variations et ses limites aux bornes et résumer le tout dans un tableau de variations.

Définition, continuité et dérivabilité.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, car c'est une fonction rationnelle. La fonction exp étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, leur composée $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est définie et dérivable (donc continue) sur les intervalles $\underline{]-\infty,0[\text{ et }]0,+\infty[}$.

La fonction $x \longmapsto x^2+2x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme. Par ailleurs, pour x réel, $x^2+2x = x(x+2)$, donc

$$\left\{x \in \mathbb{R} | x^2+2x \geq 0\right\} =]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[\quad \text{et} \quad \left\{x \in \mathbb{R} | x^2+2x > 0\right\} =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[,$$

le signe d'un trinôme à racines réelles étant celui de son coefficient dominant (ici 1) "à l'extérieur des racines". Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que les domaines de définition et de continuité de la composée $x \longmapsto \sqrt{x^2+2x}$ sont égaux à $\underline{]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[}$ et qu'elle est dérivable <u>au moins</u> sur les intervalles $\underline{]-\infty,-2[\text{ et }]0,+\infty[}$.

D'après les résultats sur la définition, la continuité et la dérivabilité d'un produit, on en déduit par intersection que :

— $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie et continue sur }]-\infty,-2]\cup]0,+\infty[\,;}$

— $\boxed{\text{elle est dérivable } \underline{\text{au moins}} \text{ sur les intervalles }]-\infty,-2[\text{ et }]0,+\infty[.}$

Pour savoir si la fonction est dérivable (à gauche) en -2, on peut chercher une limite du taux d'accroissement : pour $x < -2$,

$$T_{-2}f(x) = \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -e^{\frac{1}{x}}\sqrt{\frac{x^2+2x}{(x+2)^2}} = -e^{\frac{1}{x}}\sqrt{\frac{x}{x+2}} \underset{x\to-2^-}{\longrightarrow} -\infty,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable (à gauche) en } -2}$$

et que

$$\boxed{\text{son graphe admet une demi-tangente verticale au point } (-2,0).}$$

Dérivée et variations.
Calculons la dérivée : pour $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2+2x}+e^{\frac{1}{x}}\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{x^2+2x}{x^2\sqrt{x^2+2x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-(x+2)+x(x+1)}{x\sqrt{x^2+2x}}\right) \\ &= \boxed{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2+2x}}\right),} \end{aligned}$$

qui est du signe de

$$\frac{x^2-2}{x}=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x}.$$

En utilisant un tableau de signes, qu'on laisse le soin au lecteur de confectionner, on voit que le nombre dérivé $f'(x)$ est strictement négatif pour $x \in]-\infty,-2[\cup]0,\sqrt{2}[$, nul pour $x=\sqrt{2}$ et strictement positif pour $x \in]\sqrt{2},+\infty[$.
On en déduit d'abord que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,-2[$, puis, par continuité de f en -2, que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,-2].}$$

On en déduit ensuite, par continuité en $\sqrt{2}$, que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,\sqrt{2}] \text{ et strictement croissante sur } [\sqrt{2},+\infty[.}$$

Remarquons que le graphe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\sqrt{2}$.
On a comme valeur remarquable $\boxed{f(-2)=0}$ et on peut éventuellement calculer $\boxed{f(\sqrt{2})\simeq 4,46.}$
Limites.
Lorsque x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.
De plus, $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$, donc par composition $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}=+\infty$.
Enfin, par produit de limites, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.}$
Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x)=+\infty$, on déduit de manière analogue que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$
Pour la limite en 0 par valeurs positives, on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en posant le changement de variables "$y=\frac{1}{x}$" pour se ramener à un résultat de croissance comparée "exponentielle-polynôme". On considère donc la fonction $y \longmapsto e^y\sqrt{y^{-2}+2y^{-1}}$ lorsque y tend vers $+\infty$.
Or pour $y>0$,

$$e^y\sqrt{y^{-2}+2y^{-1}}=\frac{e^y}{y}\sqrt{1+2y}\geq\frac{e^y}{y}.$$

Comme $\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}=+\infty$ d'après les théorèmes usuels de croissance comparée, on obtient d'après le théorème des gendarmes (version "infinie") que $\lim_{y\to+\infty}e^y\sqrt{y^{-2}+2y^{-1}}=+\infty$. En composant à la source avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, on obtient $\boxed{\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty.}$

On laisse au lecteur le soin de tracer le tableau de variations.

Exercice 3 Soient a et b deux paramètres réels. On considère l'inéquation

$$-x^2 + 2x + 3 \geq ax + b,$$

dont on note $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des solutions.

1. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé l'ensemble

$$E = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \mathcal{S}_{a,b} \neq \emptyset\right\}.$$

L'inéquation d'inconnue x équivaut à $x^2 + (a-2)x + (b-3) \leq 0$ et comme le coefficient dominant du trinôme est strictement positif (1>0), la parabole (graphe du trinôme) étant donc orientée "vers le haut", cette inéquation aura donc des solutions si et seulement si la parabole coupe l'axe des x, c'est-à-dire si et seulement si le trinôme $x^2 + (a-2)x + (b-3)$ a des racines réelles, ce qui équivaut à ce que son discriminant $\Delta = (a-2)^2 - 4(b-3)$ soit positif ou nul. En développant on obtient une CNS pour que $\mathcal{S}_{a,b} \neq \emptyset$:

$$\boxed{E = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | b \leq \frac{a^2}{4} - a + 4\right\}.}$$

Graphiquement, cet ensemble est donc la zone située sous une autre parabole (rien à voir avec la précédente), celle ayant pour équation $b = \frac{a^2}{4} - a + 4$ dans le plan des couples (a,b). On laisse au lecteur le soin de faire le dessin.

---

2. Pour $(a,b) \in E$, déterminer $\mathcal{S}_{a,b}$ et calculer l'aire du domaine

$$D_{a,b} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ax + b \leq y \leq -x^2 + 2x + 3\right\}$$

délimité inférieurement par le graphe de la fonction $x \longmapsto ax + b$ et supérieurement par celui de la fonction $x \longmapsto -x^2 + 2x + 3$. On exprimera cette aire à l'aide uniquement de la quantité $\Delta = (a-2)^2 - 4(b-3)$ (plus de a ni de b hormis ceux de Δ).

Soit $(a,b) \in E$. Déterminons $\mathcal{S}_{a,b}$, l'ensemble de solutions de l'inéquation de départ : c'est l'ensemble des x tels que $x^2 + (a-2)x + (b-3) \leq 0$ et d'après les considérations de la question précédente, c'est le segment ayant pour extrémités les deux racines du trinôme qu'on note α et β :

$$\boxed{\mathcal{S}_{a,b} = [\alpha, \beta] = \left[\frac{(2-a)-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{(2-a)+\sqrt{\Delta}}{2}\right].}$$

Ces deux valeurs sont aussi les abscisses dans $\mathbb{R}^2$ des points d'intersection de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$ et de la droite d'équation $y = ax + b$, qui existent (éventuellement confondus) puisque $(a,b) \in E$. Entre ces abscisses, la parabole est située au dessus de la droite et la zone comprise entre les deux est celle dont on cherche l'aire. Cette aire est donc

$$\int_\alpha^\beta \left((-x^2 + 2x + 3) - (ax + b)\right) dx = \int_\alpha^\beta \left(-x^2 + (2-a)x + (3-b)\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - (a-2)\frac{x^2}{2} - (b-3)x\right]_\alpha^\beta.$$

On voit qu'on aura besoin dans le calcul de $\beta-\alpha$, $\beta^2-\alpha^2$ et $\beta^3-\alpha^3$. On essaie alors de les exprimer en fonction de Δ : $\beta-\alpha=\sqrt{\Delta}$, $\beta^2-\alpha^2=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=(2-a)\sqrt{\Delta}$ et

$$\beta^3-\alpha^3=(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)(\beta-\alpha)=\frac{3(2-a)^2+\Delta}{4}\sqrt{\Delta}.$$

L'aire recherchée est donc

$$\mathcal{A}(D_{a,b})=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2-a)^2+\Delta}{4}\sqrt{\Delta}-\left(\frac{a-2}{2}\right)(2-a)\sqrt{\Delta}-(b-3)\sqrt{\Delta},$$

soit en simplifiant

$$\boxed{\mathcal{A}(D_{a,b})=\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}.}$$
