C12 - B - Continuité

I. Définitions

Propriété

Pour tout $\eta > 0$, f est continue en a ssi $f|_{[a-\eta, a+\eta]}$

Exemple 18

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

III. Opération sur les fonctions continues

Théorème 20 :

Démonstration :
On peut redémontrer dans le cadre de la continuité que si $g(a) \neq 0$ la fonction g est non nulle en tout point d'un voisinage de a (Intersecté avec I)

Exalibur 2

Supposons que $g(a) \neq 0$
Alors $\frac{|g(a)|}{2} > 0$
Par définition de la continuité en a, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], g(x) \in \left[g(a) - \frac{|g(a)|}{2}, g(a) + \frac{|g(a)|}{2}\right] \subset \mathbb{R}^*$$

En effet

$$|0 - g(a)| = |g(a)| > \frac{|g(a)|}{2}$$

Donc

$$0 \in \left[g(a) - \frac{|g(a)|}{2}, g(a) + \frac{|g(a)|}{2}\right]$$

C'est la boule de centre $g(a)$ et de rayon $\frac{|g(a)|}{2}$

Le reste est conséquence immédiate des opérations sur les limites.

IV. Continuité sur intervalle

Proposition 28 : $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$,
Pour $h \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a)$$

Comme $\sin$ et $\cos$ sont continues en 0 $h \mapsto \sin(a+h)$ est continue en 0 par combinaison linéaire
Donc :

$$\sin(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sin(a+0) = \sin(a)$$

$$\sin(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sin(a)$$

Donc $\sin$ est continue en a

De même $\cos$ est continue en a
(en utilisant $\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$)

Définition 29

Interprétation géométrique
Pour $x \neq y$,

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq k$$

i.e.

Excalibur 3
i.e.
les pentes des sécantes sont comprises entre $-k$ et k

Proposition 34

Démonstration
Soit f k-lip. sur I (pour un $k \in \mathbb{R}_+$)
Soit $a \in I$:
Pour tout $x \in I$,

$$0 \leq |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$$

lorsque $x \to a$,

$$|x - a| \to 0$$

Donc

$$k|x - a| \to 0$$

Par le théorème des gendarmes

$$|f(x) - f(a)| \to 0$$

i.e.

$$f(x) \to f(a)$$

Ainsi f est continue en a

V. TVI

Théorème 36

Excalibur 4

VI. Fonctions réciproques

VII. Stricte monotonie et injectivité

Théorème 50

Démonstration (avec le lemme) :
Soit I un intervalle,
Soit $f \in \mathbb{R}^I$ continue

Sens direct :

Montrons que SP est constante sur I
Pour $x, y \in I$ tel que $x \neq y$
On a :

$$(Txf)(y) = (Tyf)(x) \text{ donc } SP(x) = SP(y)$$

Lemme 51

Excalidraw 5
Idée de la preuve : Excalidraw 6

Soit $x \in \mathbb{R}$,
Si $J = I \cap]x, +\infty[$ est non vide
On applique le TVI à $(Txf)|_J$
Qui ne s'annule pas par injectivité de f, et est de signe constant
Ainsi Txf est de signe constant à droite de x.

De même Txf est de signe constant à gauche de x (Si la gauche existe)

S'il y a a la fois une droite et une gauche (x n'est pas une borne)
Mq le signe de Txf à gauche est celui de Txf à droite, par l'absurde.
Si ce n'était pas le cas, on aurait une situation, quitte a changer f en $-f$, du type :
Excalibur 7.

VII. Segments

Théorème 53

Démonstration :
On note $[a, b]$ ($a < b$) un segment et f une fonction continue sur $[a, b]$

On pose $\beta = sup(f([a,b])) \in \overline{\mathbb{R}}$
qui est $+\infty$ si f n'est pas majorée
qui appartient à $\mathbb{R}$ sinon (car $f([a,b])$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (en utilisant la propriété de la borne supérieure))

Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe
$(y_n) \in (f([a,b])^{\mathbb{N}}$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
y_n admet au moins un antécédent $x_n \in [a,b]$ par f. La suite (x_n) donc par la théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite bornée extraite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\phi(n)} \leq b$
Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite $l \in [a,b]$
Comme $x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
et f est continue en l (car $l \in [a,b]$)
Alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$
Or une suite extraite d'une suite qui admet une limite admet une même limite
et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$
Donc $y_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$
Par unicité de la limite $\beta = f(l)$
Donc d'une part $\beta < +\infty$
Donc f est majoré
D'autre part puisque β majore $f([a,b])$,
f admet un maximum en l

En appliquant ce résultat à $-f$, f est minorée et admet un minimum.

IX. Fonctions à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (où I est un intervalle non trivial et a une borne de I)
Soit $l \in \mathbb{C}$,

Définition

Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Pour $a = +\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Pour $a = -\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Proposition

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow (\lim_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(l) \text{ et } \lim_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(l))$$

Définition de la continuité complexe

f est continue en a ssi $\lim_a f$ existe

Propriétés : Opérations sur les limites et fonctions continues

La même que dans $\mathbb{R}$

Propriété composition a la source

On a aussi de même le fait qu'en composant f continue en a à la source par une fonction continue en b
h : $J \to \mathbb{R}$ tel que $h(J) \subset I$ et $h(b) = a$
On a alors : $f \circ h$ est continue en b

Propriété : Composition au but

Si f est continue en a (resp sur I)
Alors $|f|$ et $\exp \circ f$ le sont aussi
(et aussi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, ce qu'on a vu plus haut)

Démonstration :

$$|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2}$$

est la composé de $\sqrt{\cdot}$ avec la somme de 2 produits de fonctions continues en a (resp. sur I)
et

$$\exp \circ f = (\exp \circ(\mathrm{Re}(f))) \times (\cos \circ(\mathrm{Im}(f)) + i \sin \circ(\mathrm{Im}(f)))$$

est un produit de composé de $\exp$ avec $\mathrm{Re}(f)$ puis d'une CL de composés de $\cos$ et $\sin$ avec $\mathrm{Im}(f)$ avec $Re(f)$ et $Im(f)$ continue en a

Théorème

L’image d’un segment par une fonction continue à valeurs complexes et une partie bornée de $\mathbb{C}$.
i.e. :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$$

Excalibur 7.