**Programme de colle de la semaine 4 (du 9 au 13 octobre 2023)**

***Nota Bene :*** les exercices sont le chapitre entier des nombres complexes, similitudes comprises.

---

# Programme des exercices

---

# Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie

## 1 “Définition” de $\mathbb{C}$

**Les constructions sont maintenant hors programme.**

Un nombre complexe est un objet de la forme “$a+\mathrm{i}b$”, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}^2=-1$. Deux complexes sont égaux ssi leur écritures sont égales. On utilise les opérations avec les règles “usuelles”. On admet que l’ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l’addition et de la multiplication, est un “corps”, *i.e.* :

1. L’addition est associative et commutative, elle admet 0 pour élément neutre et tout nombre complexe admet un opposé ;
2. La multiplication est associative et commutative, elle admet $1(\neq 0)$ pour élément neutre et tout nombre complexe non nul admet un inverse ;
3. La multiplication est distributive par rapport à l’addition.

## 2 Parties réelle et imaginaire

Définition de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, elles préservent la somme et la multiplication par un réel, effet sur les produits.

Conjugaison, $\overline{\overline{z}}=z$, caractérisation des réels et des imaginaires purs à l’aide de la conjugaison, la conjugaison préserve sommes, produits et quotients.

Lien entre conjugaison et parties réelle et imaginaire :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \left\{\begin{array}{rcl} z+\overline{z} &=& 2\,\mathrm{Re}(z)\\ z-\overline{z} &=& 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)\end{array}\right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(z) &=& \dfrac{z+\overline{z}}{2}\\ \mathrm{Im}(z) &=& \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}\end{array}\right. .$$

Représentation géométrique des nombres complexes, notion d’affixe d’un point ou d’un vecteur, interprétation géométrique de la conjugaison.

# 3 Module

Définition et interprétation géométrique. Premières propriétés : coïncidence avec la valeur absolue sur l'axe réel ; module de l'opposé, du conjugué ; expression du carré du module à l'aide du conjugué. Application au calcul pratique des quotients. Autres propriétés : comparaison du module à la valeur absolue de la partie réelle (resp. imaginaire), cas d'égalité ; module d'un produit, d'un inverse, d'un quotient ; le module d'un complexe est nul ssi ce complexe est nul ; inégalité triangulaire, seconde inégalité triangulaire, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire en termes algébriques ($z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$).

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire en termes vectoriels (nombres complexes “positivement liés”).

# 4 Nombres complexes de module $1$ et trigonométrie

## 4.1 Cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique et ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

Savoir retrouver les périodicités et symétries des fonctions trigonométriques et résoudre les équations du type $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\tan x = c$ et inéquations correspondantes à l'aide du cercle trigonométrique. Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques.

On définit à cette occasion, $\text{Arccos}\,(a)$ lorsque $a \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}\,(b)$ lorsque $b \in [-1,1]$ et $\text{Arctan}\,(c)$ lorsque $c \in \mathbb{R}$, mais sans parler des fonctions $\text{Arccos}\,, \text{Arcsin}\,, \text{Arctan}$ !

## 4.2 Formules trigonométriques

Formules d'addition pour cos et sin. On en déduit alors les symétries déjà vues sur le cercle, les formules de soustraction, celle de l'arc double, les formules pour les produits $\cos a \cos b$, *etc.*, celles pour les sommes $\cos p + \cos q$, *etc.* (ces dernières ne sont pas exigibles par cœur mais l'étudiant doit savoir les retrouver), la formule d'addition pour la tangente.

# 5 Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition, formule d'addition, notation $e^{\mathrm{i}\theta}$, formules d'Euler (aussi expression de la tangente), formule de Moivre.

Linéarisation. Application de la formule de la tangente en fonction de l'exponentielle complexe (laissée en exercice) : expression des fonctions trigonométriques en $x$ comme fractions rationnelles en $\tan \frac{x}{2}$. Calcul des expressions de $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ et $\tan(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$. Factorisation de $1 \pm e^{\mathrm{i}\theta}$, $e^{\mathrm{i}a} \pm e^{\mathrm{i}b}$, application : retrouver les formules des cosinus et sinus de l'arc double et les expressions factorisées de $\cos p + \cos q$. Calculs des sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kt}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

# 6 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Pour $z \neq 0$, l'ensemble des $\theta$ tels que $z = |z| e^{i\theta}$ est de la forme $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ ; $\operatorname{Arg}(z)$ désigne l'un des éléments de cet ensemble, qu'on ne connaît donc que modulo $2\pi$. À cette occasion introduction de la définition de la congruence de deux réels modulo $2\pi$. Tous les calculs sur les arguments se feront donc modulo $2\pi$. Propriétés : caractérisation de $\mathbb{R}_+^\star$, $\mathbb{R}_-^\star$, $i\mathbb{R}_+^\star$ et $i\mathbb{R}_-^\star$ ; argument de l'opposé, du conjugué, de l'inverse, d'un produit, d'un quotient ; CNS d'égalité de deux complexes en fonction de leurs modules et arguments.

Calcul pratique de l'argument d'un nombre complexe sous forme algébrique, module et argument d'une somme (ou différence) de nombres complexes de module 1 sous forme trigonométrique. Interprétation géométrique dans le cas $1 \pm e^{i\theta}$ (cas particulier du théorème de l'angle au centre).

Application à la physique : une somme de signaux sinusoïdaux de même fréquence est encore un signal sinusoïdal (expression de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$, calcul de $A$ et $\varphi$ par la trigonométrie ou les exponentielles complexes).

# 7 Équations du second degré

Cas particulier de l'extraction de racine carrée : preuve de l'existence sous la forme trigonométrique, calcul pratique quand le nombre est sous forme algébrique, cas général des équations du second degré : théorème, résolution pratique. Somme et produit des racines en fonction des coefficients, savoir trouver deux complexes connaissant leur somme et leur produit.

# 8 Racines *n*-ièmes

Proposition décrivant les racines $n$-ièmes de 1 puis d'un complexe quelconque. Résultat sur la somme des racines $n$-ièmes de 1.

# 9 Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe quelconque ($\exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$), exponentielle d'une somme, puissance complexe d'un réel strictement positif sous forme exponentielle, conséquence $\exp(z) = e^z$, condition pour que $\exp z = \exp z'$, résolution de $\exp z = a$.

# 10 Traduction complexe de problèmes affines

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct (ROND) et on utilise la correspondance usuelle avec $\mathbb{C}$ en notant $z_M$ l'affixe de chaque point $M \in \mathcal{P}$. On note $d$ la distance sur $\mathcal{P}$ et $(PQ)$ la droite passant par deux points distincts $P$ et $Q$.

**Proposition 1** *Si $A, B, C \in \mathcal{P}$ sont tels que $B \neq A$ et $C \neq A$, en notant $z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, on a*

$$\begin{cases} |z| & = & \dfrac{d(A,C)}{d(A,B)} \\ \\ \operatorname{Arg}(z) & \equiv & \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi] \end{cases}$$

**Proposition 2** *Trois points $A, B, C \in \mathcal{P}$ sont alignés si et seulement si $(z_c - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathbb{R}$.*

**Proposition 3** *Pour $A, B, C \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \iff (z_c - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.*

# 11 Similitudes directes

**Proposition 4** *Une application $F$ (i.e. une "fonction") de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ est uniquement déterminée par la donnée de l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à tout complexe $z_M$ fait correspondre le complexe $z_{F(M)}$.*

**Définition 5** Avec les notations ci-dessus, on appellera $f$ la *traduction complexe* de $F$.

**Définition 6** Une *similitude directe* est une bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ préservant les angles orientés de vecteurs. Nous noterons $\mathrm{Sim}_+$ l'ensemble des similitudes directes.

**Proposition 7** *En particulier, une similitude directe préserve l'alignement, le non-alignement et l'orthogonalité.*

**Théorème 8** *Les similitudes directes sont les applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant une traduction complexe de la forme $z \longmapsto az + b$, $a \neq 0$.*

**Proposition 9** *Pour une similitude directe $F$ de traduction complexe $z \longmapsto az + b$, les nombres complexes $a$ et $b$ sont uniquement déterminés par $F$.*

**Définition 10** Avec ces notations, on appelle *rapport complexe* (ou simplement *rapport*) de $F$ le nombre complexe non nul $a$.

On appelle aussi parfois *rapport positif* de $F$ le nombre strictement positif $|a|$.

**Proposition 11** *Une similitude directe de rapport complexe $a$ multiplie les distances par $|a|$.*

**Classification des similitudes directes par le rapport complexe $a$.**

Soit $F \in \mathrm{Sim}_+$ de traduction complexe $f : z \longmapsto az + b$. Pour alléger, on notera $M' = F(M)$.

— **cas** $a = 1$ : en notant $\overrightarrow{v}$ le vecteur d'affixe $b$, pour $M \in \mathcal{P}$,

$$z_{M'} - z_M = (z_M + b) - z_M = b \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}.}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant, $F$ est appelée *la translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$\boxed{T_{\overrightarrow{u}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M + \overrightarrow{v} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad t_b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array} \right. .}$$

On alors deux sous-cas :

— cas particulier $b = 0$ : dans ce cas $T_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et tous les points de $\mathcal{P}$ sont fixés par $T_{\overrightarrow{0}}$ ;

— cas $b \neq 0$ : dans ce cas, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et aucun point n'est fixé par $T_{\overrightarrow{v}}$.

— **cas** $a \neq 1$ : dans ce cas, il y a (trivialement) un seul pont fixe $C$, qui est d'affixe $c = \frac{b}{1-a}$ et qu'on appelle le *centre* de la similitude $F$.
Pour $M \in \mathcal{P} \setminus \{C\}$, un calcul immédiat donne

$$\boxed{a = \frac{z_{M'} - c}{z_M - c}}$$

et, par la proposition 1,

$$\boxed{\mathrm{d}(C, M') = |a| \; \mathrm{d}(C, M) \quad \text{et} \quad \widehat{MCM'} \equiv \mathrm{Arg}\,(a) \; [2\pi],}$$

la première relation étant déjà connue puisque $F(C) = C$ et $F$ multiplie les distances par $|a|$. Remarquons qu'on a aussi la formule très utile :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = c + a(z - c).}$$

On a alors plusieurs cas particuliers :

— cas particulier $a \in \mathbb{R}^\star \setminus \{1\}$ : dans ce cas, on note classiquement $k = a$ et on a immédiatement, pour tout $M \in \mathcal{P}$,

$$\boxed{\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}.}$$

La similitude $F$ est alors appelée l'*homothétie* de *centre* $C$ et de *rapport* $k$ et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$\boxed{H_{C,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & C + k\overrightarrow{CM} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h_{c,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c + k(z-c) \end{array} \right. .}$$

— cas particulier $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ : dans ce cas, on note $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et on a immédiatement, pour tout $M \in \mathcal{P} \setminus \{C\}$,

$$\boxed{\mathrm{d}(C, M') = \; \mathrm{d}(C, M) \quad \text{et} \quad \widehat{MCM'} \equiv \theta \; [2\pi].}$$

La similitude $F$ est alors appelée la *rotation* de *centre* $C$ et de *mesure d'angle* $\theta$ et on la note, ainsi que sa traduction complexe :

$$\boxed{R_{C,\theta} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \quad \text{et} \quad r_{c,\theta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-c) \end{array} \right. .}$$

**Attention, ce cas n'est pas disjoint du précédent, comme le montre le**

— cas très particulier $a = -1$ : dans ce cas, on a à la fois une homothétie de rapport $-1$ et une rotation de mesure d'angle $\pi$, qui est aussi la *symétrie de centre* $C$, qu'on note, ainsi que sa traduction complexe :

$$\boxed{S_C : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & C - \overrightarrow{CM} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad s_c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c - (z-c) = 2c - z \end{array} \right. .}$$

— cas général : en notant $k = |a|$ et $\theta \equiv \operatorname{Arg} a\ [2\pi]$, on voit que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= c + a(z-c) \\ &= c + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-c) \\ &= c + k((c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-c)) - c) \\ &= h_{c,k}(r_{c,\theta}(z)) \end{aligned}$$

et aussi, de manière analogue

$$\begin{aligned} f(z) &= c + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}((c + k(z-c)) - c) \\ &= r_{c,\theta}(h_{c,k}(z)) \end{aligned}$$

La similitude $F$ est ainsi la composée "commutative" d'une homothétie et d'une rotation de même de centre :

$$\boxed{F = H_{C,k} \circ R_{C,\theta} = R_{C,\theta} \circ H_{C,k} \quad \text{et} \quad f = h_{c,k} \circ r_{c,\theta} = r_{c,\theta} \circ h_{c,k}.}$$

***Théorème 12*** *Il existe une unique similitude directe envoyant un premier couple de points distincts donné sur un second couple de points distincts donné,*

---

# Programme des questions de cours

---

# Chapitre 4 : Calculs algébriques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux objets suivants : le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

## 1 Suites à terme général exprimable

### 1.1 Notion de suite

Définition d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, de son terme général, notation $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

### 1.2 Suites arithmétiques et suites géométriques

Rappel des définitions et propriétés vues au Lycée.

### 1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition, raisons géométrique et arithmétique, méthode de calcul du terme général.

### 1.4 Récurrence linéaire homogène d'ordre $2$ à coefficients constants

Définition, méthode de calcul du terme général passant par la résolution de l'équation caractéristique dans les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

## 2 Symboles $\sum$

### 2.1 Notion de famille

Famille $u = (u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, finie ou infinie, exemples, cas ou $I$ est un intervalle d'entiers.

### 2.2 Somme d'une famille finie de nombres

Définition de $\sum\limits_{i \in I} u_i$ pour $I$ fini, somme vide (nulle), cas d'une famille constante.

### 2.3 Propriétés des sommes

Analogie aves les intégrales. linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles, sommation par paquets,

### 2.4 Exemples de changements d'indices et sommes télescopiques

Exemples de changement d'indices $k = i + p$ et $k = (n+1) - i$. Résultat de simplification télescopique et démonstration par un changement d'indice. Exemples de simplifications télescopiques.

### 2.5 Sommes doubles et interversions

Cas des sommes "rectangulaires" : expression de $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ de deux manières comme une somme double.

Cas des sommes "triangulaires" : expression de $\sum\limits_{p \leq i \leq j \leq q} u_{i,j}$ et $\sum\limits_{p \leq i < j \leq q} u_{i,j}$ de deux manières comme des sommes doubles. Exemples.

## 3 Coefficients binômiaux

Définition de la factorielle, des coefficients binômiaux : $\binom{n}{k}$ pour $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ (0 hors du triangle de Pascal). Propriétés : valeurs pour $k = 0, 1, 2$ ; symétrie ; formule de Pascal ; les binômiaux sont entiers. Formule du binôme de Newton.

Valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

## 4 Autres formules

Formule de Bernoulli : $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^{k}$. Somme des termes des suites arithmétiques et géométriques, sommes des carrés des premiers entiers et de leurs cubes.

**Attention, pas encore de produits !**

Toutes les définitions et tous les énoncés sont **exigibles**.

# Démonstrations de cours/exercices exigibles

Pour vérification, les exercices sont tirés du cours...

— Donner l'expression du terme général de la suite complexe $(u_n)$ définie par : $u_0=0, u_1=1+4\mathrm{i}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=(3-2\mathrm{i})u_{n+1}-(5-5\mathrm{i})u_n)$ ;

— Donner l'expression du terme général de la suite réelle $(v_n)$ définie par $v_0=3$, $v_1=-2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^\star, v_{n+1}=-4(v_n+v_{n-1}))$ ;

— Donner l'expression du terme général de la suite réelle $(w_n)$ définie par $w_0=42$, $w_1=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, w_n=2w_{n-1}-2w_{n-2})$ ;

— Calcul de la somme $S_{p,q}=\sum_{k=p}^{q}2^k$, pour $p,q\in\mathbb{Z}$ $(p\leq q)$ par changement d'indice, en connaissant **seulement** la formule suivante : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_n=\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1$ ;

— Calcul de $\sum_{k=1}^{n}k$ d'abord avec des “petits points”, puis formellement, avec des symboles $\sum$ et un changement d'indice ;

— $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i)=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$ (connaissant la somme des $n$ premiers carrés), par les deux changements d'indices $j=k+i$, puis $i=(n+1)-p$, **donnés par le colleur/la colleuse** ;

— La formule de Pascal et le fait que les coefficients binômiaux sont des entiers naturels (**avec une assertion de récurrence explicite et précise !**) ;

— Formule du binôme de Newton.