Matrices et applications linéaires

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Tous les exemples sur ce chapitre sont à prendre dans la feuille d'exercices de préparation qui a été étudiée en préambule.

Dans tout le chapitre, E, F et G représentent sauf indication contraire des $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

I Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

1 Définition et linéarité

Définition

Définition 1 La matrice d'une famille de vecteurs dans une base e de E est la matrice des coordonnées des vecteurs dans la base e, présentées en colonnes :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_e((x_j)_{j=1}^p) = (e_i^\star(x_j))_{i,j}.}$$

Remarque 2 En particulier, si $x \in E$, $\mathrm{Mat}_e(x)$ est la matrice colonne des coordonnées de x dans la base e.

Définition 3 La matrice de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans le couple de bases (e,f), où $e = (e_j)_{j=1}^p$ est une base de E et $f = (f_i)_{i=1}^n$ est une base de F, est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \mathrm{Mat}_f(u(e)).}$$

Isomorphisme d'espaces vectoriels

Théorème 4 *L'application* $\mathrm{Mat}_{e,f}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $\mathcal{L}(E,F)$ *vers* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration: Pour $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$f_i^\star((\lambda u+v)(e_j)) = f_i^\star(\lambda u(e_j)+v(e_j)) = \lambda(f_i^\star(u(e_j))+f_i^\star(v(e_j)),$$

i.e. $\left(\mathrm{Mat}_{e,f}(\lambda u+v)\right)[i,j] = \lambda\left(\mathrm{Mat}_{e,f}(u)\right)[i,j] + \left(\mathrm{Mat}_{e,f}(v)\right)[i,j]$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(\lambda u+v) = \lambda \mathrm{Mat}_{e,f}(u) + \mathrm{Mat}_{e,f}(v).$$

Donc $\mathrm{Mat}_{e,f}$ est linéaire. Comme ses espaces de départ et d'arrivée ont tous deux même dimension np, il suffit de montrer que cette application est injective pour que ce soit un isomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = 0$. Alors, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) = 0$ et par linéarité, $u = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Mat}_{e,f} = \{0\}$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 5 Bien noter que p est la dimension de E, n celle de F et que cet isomorphisme dépend du choix des bases !

Calcul de la matrice des coordonnées de l'image

Théorème 6 ***(Image d'un vecteur)*** *Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, e une base de E et f une base de F.*

Pour $x \in E$, l'expression de $Y = \mathrm{Mat}_f(u(x))$ en fonction de $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ et de $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ est :

$$\boxed{Y = AX.}$$

Démonstration: avec la linéarité et la formule du produit matriciel (voir le cours). □

Remarque 7 Cela se généralise aux familles de vecteurs avec la formule $(Y_1 \dots Y_k) = A(X_1 \dots X_k)$.

Une propriété utile est la suivante :

Proposition 8 *Avec les notations du théorème précédent,* $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ *est l'unique matrice A vérifiant cette égalité pour tout $x \in E$.*

Démonstration: en utilisant la bijectivité de $\mathrm{Mat}_{e,f}$. □

2 Application aux calculs de noyaux et d'images

Noyau

Pour déterminer $\mathrm{Ker}\,u$, on résout le système $AX = 0$. La descente de la méthode du pivot par lignes, ou plus généralement, un échelonnement par lignes de ce système, *i.e.* de la matrice A, fournit alors, en supprimant les équations triviales $0 = 0$, une représentation cartésienne de $\mathrm{Ker}\,u$ (on *admet* que le nombre d'équations est minimal...). On a autant d'équations non triviales que de pivots et on *admet provisoirement* que leur nombre est égal au rang r de u. Par la formule du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} u$ est alors $\dim(E) - r = p - r$, qui est aussi le nombre d'inconnues secondaires.

L'achèvement de l'algorithme du pivot, ou plus généralement l'obtention d'une matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à la matrice A, fournit alors une base du noyau, puisqu'on obtient une famille de $p-r$ vecteurs engendrant $\operatorname{Ker} u$ de dimension $p-r$.

Plus précisément, en notant $z_1 = x_{j_1}, \dots, z_{p-r} = x_{j_{p-r}}$ les inconnues secondaires, N_k ($k \in [\![1, p-r]\!]$) la matrice colonne solution obtenue en prenant $z_i = \delta_{i,k}$ pour $i \in [\![1, p-r]\!]$ et $n_k \in E$ le vecteur défini par $\operatorname{Mat}_e(n_k) = N_k$, la famille $(n_1, \dots, n_{p-r})$ est une base de $\operatorname{Ker} u$.

Image

Pour l'image, en échelonnant par colonnes la matrice A, par exemple par la méthode du pivot, on obtient un famille de vecteurs colonnes dont ceux qui sont non nuls sont les vecteurs coordonnées, dans la base f, d'une base de $\operatorname{Im} u$.

Si on veut seulement une représentation cartésienne de l'image, on peut appliquer la descente de la méthode du pivot par lignes, pour une matrice colonne générique, au système $AX = Y$, *i.e.* à la matrice augmentée $[A|Y]$. Les conditions de compatibilité fournissent alors une représentation cartésienne (minimale) de $\operatorname{Im} u$. Remarquons qu'en appliquant la méthode du pivot (complète) au nouveau système formé par les équations de cette représentation cartésienne, on peut déterminer ainsi une base de $\operatorname{Im} u$, mais ce n'est pas le moyen le plus direct (il vaut mieux utiliser pour cela l'échelonnement par colonnes décrit plus haut).

3 Composition et produit matriciel

Matrices et composition

Théorème 9 *Pour e, f, g des bases de E, F, G et des applications linéaires $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$:*

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{f,g}(v)\operatorname{Mat}_{e,f}(u).}$$

Démonstration: On regarde cette égalité colonne par colonne (voir le cours). □

On en déduit la

Proposition 10 *Soient E, F sont de dimensions finies, munis de bases e et f et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, u est un isomorphisme ssi $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ est carrée inversible et, dans ce cas,*

$$\boxed{(\operatorname{Mat}_{e,f}(u))^{-1} = \operatorname{Mat}_{f,e}(u^{-1}).}$$

Démonstration: Si u est un isomorphisme, $n = p$, donc la matrice est carrée, et le théorème précédent fournit une inverse à $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$.

Si $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ est carrée inversible d'inverse B, l'application linéaire $\operatorname{Mat}_{f,e}^{-1}(B)$ est application réciproque de u.

Voir le cours pour plus de détails. □

Cas des endomorphismes

Dans le cas des endomorphismes on note $\mathrm{Mat}_e(u) := \mathrm{Mat}_{e,e}(u)$.

Théorème 11 *L'application* Mat_e *est un "isomorphisme d'algèbres" de* $\mathcal{L}(E)$ *vers* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration: Cette notion est hors-programme, mais on décrit les propriétés voulues (préservation des CL, du produit et du neutre multiplicatif), qui ont en fait déjà été démontrées, sauf la préservation du neutre qui est évidente. □

Par conséquent, un endomorphisme est bijectif ssi sa matrice dans une base e est inversible, ce qui redémontre dans le cas des endomorphismes la proposition 10.

On a aussi le

Corollaire 12 *Pour une matrice carrée, l'inversibilité à gauche ou à droite suffit pour qu'elle soit inversible.*

Démonstration: On transporte par l'isomorphisme d'algèbre précédent la propriété analogue déjà vue concernant les endomorphismes en dimension finie. □

Calcul de l'inverse d'une matrice

On décrit différents formalismes et méthodes pour le calcul de l'inverse d'une matrice et on prouve ainsi la méthode du pivot par lignes sur matrice augmentée vue à la fin du chapitre précédent.

II Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Dans toute cette section, pour $q \in \mathbb{N}^\star$, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^q$ à des matrices colonnes (*i.e.* $\mathbb{K}^q$ à $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$).

1 Définitions

Définition 13 Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'<u>application linéaire canoniquement associée</u> à A est $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ admettant A pour matrice dans les bases canoniques. Grâce à l'identification entre vecteurs et matrices colonnes, elle s'écrit $X \longmapsto AX$.

Définition 14 On définit le noyau (resp. image, resp. rang) de A comme celui (resp. celle, resp. celui) de u_A.

Il découle immédiatement de ces deux définitions la

Proposition 15 *Les vecteurs colonnes de* A *sont les images des vecteurs de la base canonique par* u_A *et ils engendrent l'image de* A *(en particulier, leur rang est celui de* A*).*

2 Lien avec les systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On déduit immédiatement de la définition 13 la

Proposition 16 *Son noyau est exactement l'ensemble des solutions de $AX = 0$. Son image est l'ensemble des seconds membres B tels que $AX = B$ admette des solutions.*

On a, par ailleurs, les propriétes très importantes en pratique :

Proposition 17
Le noyau de A est invariant par toute opération élémentaire sur les lignes de A.
L'image de A est invariante par toute opération élémentaire sur les colonnes de A.

Démonstration: La première assertion découle du fait que deux systèmes linéaires équivalents par lignes sont équivalents logiquement.

On a déjà vu que le sous-espace engendré par une famille de vecteurs colonnes est invariant par opérations élémentaires sur la matrice formée de ces vecteurs colonnes. En appliquant cela aux vecteurs colonnes de la matrice A, qui engendrent son image, on a la deuxième assertion. □

Remarque 18 Cela conforte dans ce cas particulier les méthodes de calcul de noyaux, d'images et de rangs vus précédemment par des équivalences sur les lignes ou les colonnes.

3 Caractérisation des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application u_A est alors un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. On déduit immédiatement des résultats sur les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie la proposition suivante :

Proposition 19 *Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *(i.e. u_A est bijective)*
2. $\mathrm{Ker} A = \{0\}$ *(i.e. u_A est injective)*
3. $\mathrm{Im} A = \mathbb{K}^n$ *(i.e. u_A est surjective)*
4. $\mathrm{rg} A = n$ *(i.e. $\mathrm{rg}(u_A) = n$)*

4 Théorème du rang

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$. On déduit directement du théorème du rang pour les applications linéaires, le résultat suivant.

Théorème 20 $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{rg} A + \dim \mathrm{Ker} A = p.}$

qui a en particulier comme conséquence :

Corollaire 21 *Le <u>rang</u> d'une matrice est <u>invariant</u> par <u>toute opération élémentaire</u> sur ses lignes ou sur ses colonnes.*

Enfin, maintenant que le rang d'une matrice est défini, on peut énoncer le

Théorème 22 *Soient E,F deux espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives e,f et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a alors*

$$\boxed{\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{e,f}(u).}$$

Démonstration: On a vu que les deux peuvent se calculer par un échelonnement par colonnes de $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$, le rang étant alors égal au nombre de vecteurs colonnes non nuls de la matrice échelonnée. □

III Matrices de formes particulières

1 Matrices diagonales

Rappellons que ce sont les matrices carrées telles que $\forall i,j, (i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.
Le résultat suivant est immédiat par la définition de la matrice d'une application linéaire :

Proposition 23 ***(Interprétation "géométrique" des matrices diagonales)***
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Mat}_e(u)$ est diagonale ssi, pour tout i, $\operatorname{Vect}(e_i)$ est stable par u (c'est-à-dire que $u(\operatorname{Vect}(e_i)) \subset \operatorname{Vect}(e_i)$).

2 Matrices triangulaires supérieures

On rappelle que ce sont les matrices carrées telles que $\forall i,j, (i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$. Le résultat suivant est facile par la définition de la matrice d'une application linéaire :

Proposition 24 ***(Interprétation "géométrique" des matrices triangulaires)*** *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Mat}_e(u)$ est triangulaire supérieure ssi, pour tout i, $\operatorname{Vect}(e_k)_{k=1}^{i}$ est stable par u.*

IV Matrices par blocs

On parle de matrice par blocs quand on considère une matrice obtenue par concaténation et juxtaposition de matrices plus petites (les blocs) de telle manière que les blocs soient le résultat d'un "découpage" de la matrice suivant un quadrillage non forcément régulier. On décrit cela ci-dessous de manière plus précise.

Notations : $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est découpée en NP blocs, soit N lignes (de blocs) de tailles $(n_I)_{I\in[\![1,N]\!]}$ et P colonnes (de blocs) de tailles $(p_J)_{J\in[\![1,P]\!]}$ (on a donc $\sum_{I=1}^{N} n_I = n$ et $\sum_{J=1}^{P} p_J = p$) et on la note $A = [A_{IJ}]_{(I,J)\in[\![1,N]\!]\times[\![1,P]\!]}$. Chaque bloc A_{IJ} est donc une matrice de taille $n_I \times p_J$, dont <u>on ne renumérote pas les indices</u> (qui ne partent donc pas de 1 en général). Les indices des lignes (resp. colonnes) de A entrant dans la confection du bloc A_{IJ} varient dans l'ensemble $\operatorname{Ind}_I^L = [\![\sum_{I'=1}^{I-1} n_{I'} + 1, \sum_{I'=1}^{I} n_{I'}]\!]$ (resp. $\operatorname{Ind}_J^C = [\![\sum_{J'=1}^{J-1} n_{J'} + 1, \sum_{J'=1}^{J} n_{J'}]\!]$). Interprétation géométrique : pour E (resp. F) de dimension p (resp. n) et de base $e = (e_j)$ (resp. $f = (f_i)$), on considère le sous-espace E_J (resp. F_I) engendré par la famille $e^J = (e_j)_{j\in \mathrm{Ind}^C_J}$ (resp. $f^I = (f_i)_{i\in \mathrm{Ind}^L_I}$) et p_I la projection sur F_I parallèlement à $\bigoplus_{I'\neq I} F_{I'}$, qu'on considère ici comme une application à valeurs dans F_I. Si $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$, on a alors la formule $A_{IJ} = \mathrm{Mat}_{e^J,f^I}(p_I \circ (u|_{E_J}))$.

Un cas particuiler est celui des matrices "carrées par blocs" ($n = p$, $N = P$ et pour tout I, $n_I = p_I$) : on définit de manière évidente les matrices diagonales par blocs (interprétation géométrique : les E_I sont stables par u) et les matrices triangulaires par blocs (interprétation géométrique à imaginer).

On **admet** le théorème :

Théorème 25 (**produit par blocs** *Au cas où le nombre de colonnes de blocs de la première matrice soit égal au nombre de lignes de blocs de la seconde et les largeurs des colonnes de blocs de la première soient égales aux hauteurs des lignes de blocs de la seconde, on a*

$$\boxed{[A_{I,J}]_{I,J} \cdot [B_{J,K}]_{J,K} = \left[\sum_J A_{I,J} B_{J,K}\right]_{I,K}.}$$

V Changements de bases

1 Matrices de passage

Définition 26 Pour e et e' deux bases de E, la matrice de passage de e à e' est la matrice

$$\boxed{P_e^{e'} = \mathrm{Mat}_e(e') = \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{Id})}$$

.

Remarque 27 Bien noter l'"inversion" des bases dans la formule.

Proposition 28 *Cette matrice est inversible et*

$$\boxed{(P_e^{e'})^{-1} = P_{e'}^{e}.}$$

Plus généralement, si e'' est une autre base, on a

$$\boxed{P_e^{e'} P_{e'}^{e''} = P_e^{e''}.}$$

Démonstration: La première assertion est une conséquence de la deuxième.

La deuxième est une conséquence immédiate du théorème 9. □

2 Changement de base pour un vecteur

Théorème 29 *Soient e, e' deux bases de E et $x \in E$.*
Avec les notations $P = P_e^{e'}$, $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, on a

$$\boxed{X = PX'.}$$

Démonstration: voir cours □

3 Changement de bases pour une application linéaire

Théorème 30 *Soient F un autre espace de dimension finie de bases f et f', $Q = P_f^{f'}$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u)$. Alors,*

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$$

Démonstration: voir cours □

Corollaire 31 *Dans le cas des <u>endomorphismes</u>, lorsqu'on choisit la <u>même base au départ et à l'arrivée</u>, $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$ vérifient*

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

VI Matrices équivalentes et rang

1 Relation d'équivalence et rang

Définition 32 Pour $r \leq \min(n, p)$, on définit la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant des 1 sur la diagonale pour les indices de lignes et colonnes inférieurs ou égaux à r et des 0 partout ailleurs.

Théorème 33 *Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ ($\dim E = p$ et $\dim F = n$) est de rang r si et seulement s'il existe une base e de E et une base f de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$.*

Démonstration: voir cours □

Définition 34 Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* ssi

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad M' = Q^{-1}MP.$$

Cela équivaut à ce qu'elles représentent la même application linéaire dans des couples de bases éventuellement différents.

Remarque 35 Remarquons qu'on peut supprimer l'exposant -1 dans la définition ci-dessus, ce qui donnerait la même notion d'équivalence de matrices, mais c'est moins beau.

Il est facile de voir que

Proposition 36 *L'**équivalence** est une relation d'équivalence.*

Une conséquence immédiate du théorème 33 est le

Théorème 37 *Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes ssi elles ont même rang.*

Remarque 38 On peut reformuler ces résultats ainsi : le rang est un invariant complet de l'*équivalence* et un système de représentants est fourni par les matrices J_r, $r \leq \min(n,p)$.

Le résultat suivant est alors rapide :

Corollaire 39 *Une matrice et sa transposée ont même rang.*

Démonstration: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors il existe $(P,Q) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = Q^{-1}J_r^{n,p}P$, donc $A^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}J_r^{p,n}\ (Q^{-1})^{\mathrm{T}} = \left(\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} J_r^{p,n}\ \left(Q^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. En posant $P' = \left(Q^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q' = \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, on a $A^{\mathrm{T}} = Q'^{-1}J_r^{p,n}P'$, donc A^{T} est équivalente à $J_r^{p,n}$ donc de rang $r = \mathrm{rg} A$. □

Comme conséquence directe, on a le résultat utile admis précédemment :

Corollaire 40 *Le rang d'une matrice est le nombre de pivots obtenus, que l'on applique l'algorithme du pivot par lignes ou par colonnes. C'est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.*

2 Matrices extraites et rang

Définition 41 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle *matrice extraite* de A toute matrice $(a_{i_k,j_l})_{(k,l)\in[\![1,N]\!]\times[\![1,P]\!]}$ avec $(i_k)_k$ et $(j_l)_l$ deux suites finies strictement croissantes à valeurs dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ ou, de manière équivalente, toute matrice $(a_{\varphi(i),\psi(j)})_{i,j}$ où $\varphi : [\![1,N]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ et $\psi : [\![1,P]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ sont strictement croissantes.

Remarque 42 Autrement dit, une matrice extraite de A est une matrice obtenue à partir de A en sélectionnant certaines lignes et certaines colonnes, ou, si l'on préfère, en barrant certaines lignes et certaines colonnes.

Exemple 43 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 42 & 42 & 42 & 42 & 42 & 42 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices suivantes sont extraites de A :

$$A,\ (42),\ (42\ 42),\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 42 & 42 & 42 & 42 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a le premier résultat fondamental :

Théorème 44 *Le rang d'un matrice extraite d'une matrice A est au plus le rang de A.*

qu'on démontre à l'aide du lemme :

Lemme 45 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in [\![1,p]\!]$ et $\psi ; [\![1,P]\!] \to [\![1,p]\!]$ strictement croissante.*
Alors $\operatorname{rg}\left(a_{i,\psi(j)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,P]\!]} \leq \operatorname{rg} A$.

Démonstration: Démontrons d'abord le lemme. Puisqu'en notant C_j les vecteurs colonnes de A, la famille $(C_\psi(j))_{1\leq j\leq P}$ est une sous famille de $(C_j)_{1\leq j\leq p}$, alors $\operatorname{Im}\left(a_{i,\psi(j)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,P]\!]} \subset \operatorname{Im} A$, donc $\operatorname{rg}\left(a_{i,\psi(j)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,P]\!]} \leq \operatorname{rg} A$.
Démontrons maintenant le théorème. Soit $\left(a_{\varphi(i),\psi(j)}\right)_{i,j}$ extraite de A. Alors en utilisant deux fois le lemme et le corollaire 39, on obtient

$$\operatorname{rg}\left(a_{\varphi(i),\psi(j)}\right)_{i,j} \leq \operatorname{rg}\left(a_{\varphi(i),j}\right)_{i,j} = \operatorname{rg}\left(a_{\varphi(i),j}\right)_{j,i} \leq \operatorname{rg}\left(a_{i,j}\right)_{j,i} = \operatorname{rg}\left(a_{i,j}\right)_{i,j} = \operatorname{rg} A.$$

□

On a le résultat plus fort suivant :

Théorème 46 *Le rang d'une matrice non nulle A est le maximum des tailles des matrices carrées inversibles extraites de A.*
C'est aussi le rang maximum de ses matrices extraites carrées.

Démonstration: D'après le résultat précédent, le rang de toute matrice carrée extraite, inversible ou non, est inférieur au rang de A, donc $\operatorname{rg} A$ est supérieur ou égal au deux maxima de l'énoncé.

Montrons les inégalités inverses. Soit $r = \operatorname{rg} A$. Comme la famille des vecteurs colonnes C_j de A engendre le sous-espace $\operatorname{Im} A$ de $\mathbb{R}^n$ de dimension r, en appliquant le théorème de la base extraite, on obtient une extractrice $\psi : [\![1,r]\!] \to [\![1,p]\!]$ telle que $(C_{\psi(j)})$ soit une base de $\operatorname{Im} A$. La matrice $\left(a_{i,\psi(j)}\right)^{\mathrm{T}}_{i,j} = \left(a_{i,\psi(j)}\right)_{j,i}$ étant de même rang que $\left(a_{i,\psi(j)}\right)_{i,j}$, c'est-à-dire r, on peut en extraire à nouveau r colonnes linéairement indépendantes, *i.e.* une matrice $\left(a_{\varphi(i),\psi(j)}\right)_{j,i}$ de rang r, avec une extractrice $\varphi : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!]$. La matrice transposée de celle-ci, $\left(a_{\varphi(i),\psi(j)}\right)_{i,j}$ est alors carrée d'ordre r et de rang r, donc aussi inversible, ce qui prouve à la fois les deux inégalités inverses. □

VII Matrices semblables et trace

1 Similitude

Définition 47 Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* ssi

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A' = P^{-1}AP.$$

Cela équivaut à ce qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases éventuellement différentes :

Exercice 48 Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 42 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 49 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer toutes les matrices semblables à $\lambda \mathrm{I}_n$.

Remarque 50 On ne peut pas supprimer l'exposant -1 dans la définition ci-dessus, contrairement aux cas des matrices équivalentes. Cependant, on aurait pu choisir l'égalité $A' = PAP^{-1}$, qui aurait donné la même relation de similitude.

Les résultats suivants sont évidents :

Proposition 51 *La similitude implique l'équivalence.*

Corollaire 52 *Le rang est invariant par similitude.*

Encore plus facilement que pour l'*équivalence* :

Proposition 53 *La similitude est une relation d'équivalence.*

De plus, on voit que

Proposition 54 *Pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, l'application*

$$c_P : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & P^{-1}AP \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres, i.e. elle préserve les combinaisons linéaires, les produits, la matrice I_n et est bijective.

Démonstration: Pour les combinaisons linéaires, cela découle immédiatement de la bilinéarité du produit matriciel.

Pour le produit, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $c_P(AB) = P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = c_P(A)c_P(B)$.

Enfin, $c_P(\mathrm{I}_n) = P^{-1}P = \mathrm{I}_n$ et $c_{P^{-1}}$ est application réciproque de c_P □

On en déduit la

Proposition 55 *Les faits d'être inversible, une matrice de projection ou une matrice de symétrie sont invariants par similitude.*

Démonstration: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, toute matrice semblable à A s'écrit $P^{-1}AP$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc appartient aussi au groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Si $A^2 = A$ toute matrice $P^{-1}AP$ semblable à A vérifie $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP$.

Si $A^2 = \mathrm{I}_n$ toute matrice $P^{-1}AP$ semblable à A vérifie $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}\mathrm{I}_nP = \mathrm{I}_n$. □

2 Trace

Définition 56 Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa *trace* comme la somme de ses coefficients diagonaux

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exemple 57 $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1+5+9 = 15.$

Il est clair que

Proposition 58 *L'application* $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une forme linéaire non nulle.*

Remarque 59 Son noyau, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de trace nulle, est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (dimension n^2-1).

On a le résultat très important suivant :

Théorème 60 *Pour deux matrices* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$*,* $\mathrm{tr}\,(BA) = \mathrm{tr}\,(AB)$.

Démonstration:

$$\mathrm{tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} B[i,j]A[j,i] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} A[j,i]B[i,j] = \mathrm{tr}\,(AB).$$

□

qui a les conséquences suivantes :

Corollaire 61 *La trace est un invariant de similitude.*

Démonstration: Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}\,(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}\,(A).$$

□

et on peut donc définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie :

Définition 62 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Toutes les matrices représentant u par un choix d'un base de E ont la même trace, puisqu'elles sont semblables.
Ce nombre est appelé la *trace* de u et noté $\mathrm{tr}\,(u)$.

On a facilement, comme conséquence des résultats analogues sur les matrices, la

Proposition 63 *Pour E de dimension finie, l'application* $u \longmapsto \mathrm{tr}\,(u)$ *est une forme liinéaire non nulle sur* $\mathcal{L}(E)$.
De plus, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$*,* $\mathrm{tr}\,(v \circ u) = \mathrm{tr}\,(u \circ v)$.

Il est très important de remarquer et retenir le résultat suivant :

Proposition 64 *En dimension finie, pour toute projection vectorielle* p*,* $\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$.

Démonstration: Comme p est une projection, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires. On choisit alors une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Dans cette base, la matrice de p est la matrice carrée d'ordre n décrite par blocs ainsi, avec $r = \operatorname{rg}(p)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

dont la trace égale le rang. □

Exercice 65 Déterminer parmi les matrices suivantes lesquelles sont semblables ou non :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

VIII Rappels et compléments sur les opérations élémentaires

1 Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels

Matrices élémentaires (transpositions, dilatations et transvections)

On note comme précédemment $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

Définition 66 On définit les *matrices de transpositions* $\tau_q(k,l) = I_q - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk}$ ($k \neq l$), les *matrices de dilatations* $\mu_q(k,\lambda) = I_q + (\lambda - 1)E_{kk}$ ($\lambda \neq 0$) et les *matrices de transvections* $\alpha_q(k,l,\lambda) = I_q + \lambda E_{k,l}$ ($k \neq l$) et $\beta_q(k,l,\lambda) = \alpha_q^{\mathrm{T}}(k,l,\lambda) = \alpha_q(l,k,\lambda)$ ($k \neq l$). Toutes ces matrices sont appelées des *matrices élémentaires*.

Proposition 67

Les opérations sur les lignes de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $L_k \leftrightarrow L_l$ ($k \neq l$), $L_k \leftarrow \lambda L_k$ ($\lambda \neq 0$) et $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_l$ ($k \neq l$) sont obtenues en multipliant à gauche la matrice A respectivement par $\tau_n(k,l)$, $\mu_n(k,\lambda)$ et $\alpha_n(k,l,\lambda)$.

Les opérations sur les colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $C_k \leftrightarrow C_l$ ($k \neq l$), $C_k \leftarrow \lambda C_k$ ($\lambda \neq 0$) et $C_k \leftarrow C_k + \lambda C_l$ ($k \neq l$) sont obtenues en multipliant à droite la matrice A respectivement par $\tau_p(k,l)$, $\mu_p(k,\lambda)$ et $\beta_p(k,l,\lambda)$.

Il est presque immédiat que

Proposition 68 *Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est une matrice élémentaire de même type.*

Cela redémontre immédiatement que la relation binaire d'équivalence par lignes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est symétrique (on rappelle que c'est une relation d'équivalence).

Redémonstration géométrique de résultats connus

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies p, n et munis de bases e, f.
Notation : on associe à chaque matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $u_{e,f}(A) \in \mathcal{L}(E,F)$ admettant cette matrice dans les bases e et f.

Lemme 69 *Le noyau (resp. l'image, resp. le rang) de $u_{e,f}(A)$ est invariant(e) par multiplication à gauche (resp. à droite, resp à gauche et à droite)) de A par une matrice inversible.*

Corollaire 70 *Les opérations élémentaires sur les lignes de A préservent* $\operatorname{Ker}(u_{e,f}(A))$ *et les opérations élémentaires sur les colonnes de A préservent* $\operatorname{Im}(u_{e,f}(A))$. *Aussi, les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A préservent* $\operatorname{rg}(u_{e,f}(A))$.

Cela justifie par un autre biais les calculs d'image et de noyau qu'on faisait jusqu'à présent et cela permet les calculs de rangs en utilisant successivement et indifféremment des opérations sur les lignes et les colonnes.

2 Conséquence matricielle de l'algorithme du pivot

L'algorithme du pivot prouve de manière constructive la

Proposition 71 *Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe des matrices élémentaires de taille n, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ et une matrice R échelonnée réduite par lignes telles que*

$$\varepsilon_m \varepsilon_{m-1} \cdots \varepsilon_1 A = R.$$

On a de plus annoncé dans le chapitre sur les systèmes linéaires que, si l'on obtient une telle écriture par d'autres opérations élémentaires sur les lignes que celles du pivot, la matrice R sera toujours la même :

Théorème 72 *Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A.*

Démonstration: L'existence provient de la proposition ci-dessus.

Prouvons l'unicité. On note e (resp. f) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u son application linéaire canoniquement associée.et $R = (r_{i,j})_{i,j}$ échelonnée réduite par ligne équivalente par lignes à A.

La traduction matricielle des opérations élémentaires fournit une matrice produit de matrices élémentaires de taille n telle que son produit avec A vaille R. Comme ces matrices élémentaires sont inversibles, leur produit aussi et, en appelant Q son inverse, on a $R = Q^{-1}A$. Comme $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base f' de $\mathbb{K}^n$ telle que $Q = P_f^{f'}$. On a alors $R = \mathrm{Mat}_{e,f'}(u)$. En notant $j_1, j_2, \dots, j_r$ les indices de colonnes des pivots de R, le fait que R soit échelonnée réduite par lignes implique les faits suivants :

- j_1 est le plus petit indice de $[\![1,p]\!]$ tel que $u(e_{j_1}) \neq 0$;
- pour tout $k \in [\![1,r-1]\!]$, j_{k+1} est le plus petit indice de $[\![j_k+1,p]\!]$ tel que $u(e_{j_{k+1}}) \notin \operatorname{Vect}\left(u(e_{j_l})_{l=1}^{k}\right)$;
- pour tout $j > j_r$, $u(e_j) \in \operatorname{Vect}(u(e_{j_k})_{k=1}^{r}$;

Ces conditions portant uniquement sur l'application u (*i.e.* sur A) déterminent de manière unique les indices de colonnes des pivots (ainsi que leur nombre, ce qu'on savait déja puisque $\mathrm{rg}(R) = \mathrm{rg}(A)$). Les colonnes d'indices j_k de R correspondant aux pivots et R étant échelonnée réduite par lignes, elles ont tous leurs coefficients nuls sauf celui de la ligne d'indice k, qui vaut 1 (*i.e.* $u(e_{j_k}) = f'_k$). Les indices et coefficients des colonnes des pivots sont donc uniquement déterminées.

De plus, la famille $(f'_k)_{k=1}^r = u(e_{j_k})_{k=1}^r$ est elle aussi déterminée de manière unique par u. Elle est libre et engendre $\mathrm{Im}\, u$ (par échelonnement de R), donc c'est une base de $\mathrm{Im}\, u$.

Soit maintenant une colonne d'indice j ne correspondant pas à un pivot. Par échelonnement de R, pour tout $i > r$, $r_{i,j} = 0$ est déterminé de manière unique par u. Par ailleurs, $(r_{i,j})_{i=1}^r$ est la famille des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $((f'_k)_{k=1}^r$ de $\mathrm{Im}\, u$, dons est elle aussi déterminée de manière unique par u.

Ainsi, la matrice R est déterminée de manière unique par u, donc par A. □

Remarque 73 On s'aperçoit que, même si la matrice Q n'est, elle, pas unique, ses vecteurs colonnes d'indices k, $k \in [\![1, r]\!]$, le sont (*i.e.* les coordonnées dans f des vecteurs f'_k pour $k \in [\![1, r]\!]$). Les autres vecteurs colonnes sont arbitraires pourvu que la matrice Q soit inversible.

Quitte à transposer la matrice A et lui appliquer ce qui précède, on a immédiatement les résultats analogues concernant l'équivalence par colonnes.

Définition 74 Deux matrices sont *équivalentes par colonnes* ssi on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes.

Proposition 75 *La relation d'équivalence par colonnes est une relation d'équivalence.*

Proposition 76 *Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe des matrices élémentaires de taille p, $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_{m'}$ et une matrice R' échelonnée réduite par colonnes telles que*

$$A\varepsilon'_1\varepsilon'_2 \cdots \varepsilon'_{m'} = R'.$$

Théorème 77 *Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite par colonnes équivalente par colonnes à A.*

3 Systèmes de Cramer et inversibilité

Théorème 78 *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *;*
2. *A est un produit fini de matrices élémentaires ;*
3. $A \underset{L}{\sim} I_n$ *;*
4. $A \underset{C}{\sim} I_n$ *;*
5. *le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;*
6. *il existe $B \in \mathbb{K}^n$ tel que le système $AX = B$ admette une unique solution,*
7. *pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une unique solution,*
8. *pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.*

Définition 79 Un système de n équations à n inconnues est appelé *système de Cramer* lorsque sa matrice est inversible, *i.e.* lorsqu'il admet une unique solution.

Remarque 80 L'équivalence entre les deux premières propriétés se reformule ainsi : le groupe linéaire est engendré par les matrices élémentaires.