Programme de colle de la semaine 3 (du 2 au 6 octobre 2023)

Nota Bene 1 : Une partie de ce qui a été vu cette semaine est à la fois au programme du cours et des exercices (trigonométrie, module, argument).
Nota Bene 2 : La classification des similitudes n'a pas encore été faite.
Nota Bene 3 : Les exercices peuvent encore porter sur les fonctions en s'appuyant sur le programme de terminale. Insister sur la construction d'une fonction par les opérations usuelles et la composition et sa conséquence sur les domaines, les limites...

Programme des exercices

Chapitre 2 : Nombres réels et inégalités

1 Nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est supposé "connu", ainsi que les opérations usuelles. On admet que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps, ce dont on donne la définition sur cet exemple. Les élèves doivent savoir donner les axiomes d'un corps (toujours commutatif en CPGE) :

- La loi $+$ est associative, commutative, possède un neutre noté 0 et tout réel admet un opposé ;
- La loi $\times$ est commutative, associative, possède un neutre 1 tel que $1 \neq 0$ et tout réel non nul admet un inverse ;
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On montre en exercice de petites propriétés comme l'unicité du neutre, le fait que 0 est absorbant...

2 Relation d'ordre $\leq$

On admet les axiomes de base vérifiés par la relation $\leq$: c'est un ordre total (*i.e.* réflexivité, transitivité, antisymétrie, deux réels sont toujours comparables), compatibilité avec $+$ et $\times$.

3 Valeur absolue

Valeur absolue, parties positive et négative d'un réel, toutes définies de manière conditionnelle. Propriétés de base : $x^+ - x^- = x$, $x^+ + x^- = |x|$, $x \in \{-|x|, |x|\}$, $-|x| \leq x \leq |x|$. Propriétés de la valeur absolue : positivité, séparation, valeur absolue d'un produit, inégalité triangulaire, "seconde" inégalité triangulaire $|x+y| \geq ||x| - |y||$.

4 Maximum et minimum d'un nombre fini de réels

Maximum et minimum de deux réels défini de manière conditionnelle, $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, $\min(x,y) + \max(x,y) = x+y$, $|x| = \max(-x,x)$, $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = -\min(x,0)$.

Maximum de plus de deux nombres, défini par récurrence : pour une suite finie de réels $x_1, \ldots, x_n$, on pose $\max(x_1) = x_1$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\max(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \max\left(\max(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}\right).$$

De même pour le minimum de plus de deux nombres.

5 Intervalles réels

Intervalles à bornes réelles, extension aux bornes infinies. Intervalle ouvert (resp. fermé) centré en un point x et de rayon $\varepsilon > 0$, représentation graphique et expression à l'aide de la valeur absolue.

6 Majorants et minorants

Définitions, partie bornée, expression de la bornitude en termes de valeur absolue, notions de minimum et de maximum d'une partie, cohérence avec le maximum et le minimum d'une famille finie vus précédemment.

Attention : pas de définition de la borne supérieure dans ce chapitre (conformément au programme...).

Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie

1 "Définition" de $\mathbb{C}$

Les constructions sont maintenant hors programme.

Un nombre complexe est un objet de la forme "$a + \mathrm{i}b$", avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{i}^2 = -1$. Deux complexes sont égaux ssi leur écritures sont égales. On utilise les opérations avec les règles "usuelles". On admet que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition et de la multiplication, est un "corps", *i.e.* :

1. L'addition est associative et commutative, elle admet 0 pour élément neutre et tout nombre complexe admet un opposé ;
2. La multiplication est associative et commutative, elle admet $1 (\neq 0)$ pour élément neutre et tout nombre complexe non nul admet un inverse ;
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

2 Parties réelle et imaginaire

Définition de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, elles préservent la somme et la multiplication par un réel, effet sur les produits.

Conjugaison, $\overline{\overline{z}} = z$, caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison, la conjugaison préserve sommes, produits et quotients.

Lien entre conjugaison et parties réelle et imaginaire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z+\overline{z} & = & 2\,\mathrm{Re}(z) \\ z-\overline{z} & = & 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) \end{array} \right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(z) & = & \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ \mathrm{Im}(z) & = & \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} \end{array} \right. .$$

Représentation géométrique des nombres complexes, notion d'affixe d'un point ou d'un vecteur, interprétation géométrique de la conjugaison.

Programme des exercices et des questions de cours

---

3 Module

Définition et interprétation géométrique. Premières propriétés : coïncidence avec la valeur absolue sur l'axe réel ; module de l'opposé, du conjugué ; expression du carré du module à l'aide du conjugué. Application au calcul pratique des quotients. Autres propriétés : comparaison du module à la valeur absolue de la partie réelle (resp. imaginaire), cas d'égalité ; module d'un produit, d'un inverse, d'un quotient ; le module d'un complexe est nul ssi ce complexe est nul ; inégalité triangulaire, seconde inégalité triangulaire, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire en termes algébriques ($z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$).

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire en termes vectoriels (nombres complexes "positivement liés").

4 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

4.1 Cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique et ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

Savoir retrouver les périodicités et symétries des fonctions trigonométriques et résoudre les équations du type $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\tan x = c$ et inéquations correspondantes à l'aide du cercle trigonométrique. Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques.

On définit à cette occasion, $\mathrm{Arccos}(a)$ lorsque $a \in [-1,1]$, $\mathrm{Arcsin}(b)$ lorsque $b \in [-1,1]$ et $\mathrm{Arctan}(c)$ lorsque $c \in \mathbb{R}$, mais sans parler des fonctions $\mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$!

4.2 Formules trigonométriques

Formules d'addition pour cos et sin. On en déduit alors les symétries déjà vues sur le cercle, les formules de soustraction, celle de l'arc double, les formules pour les produits $\cos a \cos b$, *etc.*, celles pour les sommes $\cos p + \cos q$, *etc.* (ces dernières ne sont pas exigibles par cœur mais l'étudiant doit savoir les retrouver), la formule d'addition pour la tangente.

5 Exponentielle d'un imaginaire pur

Définition, formule d'addition, notation $e^{\mathrm{i}\theta}$, formules d'Euler (aussi expression de la tangente), formule de Moivre.

Linéarisation. Application de la formule de la tangente en fonction de l'exponentielle complexe (laissée en exercice) : expression des fonctions trigonométriques en x comme fractions rationnelles en $\tan \frac{x}{2}$. Calcul des expressions de $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ et $\tan(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$. Factorisation de $1 \pm e^{\mathrm{i}\theta}$, $e^{\mathrm{i}a} \pm e^{\mathrm{i}b}$, application : retrouver les formules des cosinus et sinus de l'arc double et les expressions factorisées de $\cos p + \cos q$. Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kt}$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

6 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Pour $z \neq 0$, l'ensemble des θ tels que $z = |z|\, e^{\mathrm{i}\theta}$ est de la forme $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$; $\mathrm{Arg}\,(z)$ désigne l'un des éléments de cet ensemble, qu'on ne connaît donc que modulo 2π. À cette occasion introduction de la définition de la congruence de deux réels modulo 2π. Tous les calculs sur les arguments se feront donc modulo 2π. Propriétés : caractérisation de $\mathbb{R}_+^\star$, $\mathbb{R}_-^\star$, $\mathrm{i}\,\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathrm{i}\,\mathbb{R}_-^\star$; argument de l'opposé, du conjugué, de l'inverse, d'un produit, d'un quotient ; CNS d'égalité de deux complexes en fonction de leurs modules et arguments.

Calcul pratique de l'argument d'un nombre complexe sous forme algébrique, module et argument d'une somme (ou différence) de nombres complexes de module 1 sous forme trigonométrique. Interprétation géométrique dans le cas $1 \pm e^{\mathrm{i}\theta}$ (cas particulier du théorème de l'angle au centre).

Application à la physique : une somme de signaux sinusoïdaux de même fréquence est encore un signal sinusoïdal (expression de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$, calcul de A et φ par la trigonométrie ou les exponentielles complexes).

Programme des questions de cours

---

7 Équations du second degré

Cas particulier de l'extraction de racine carrée : preuve de l'existence sous la forme trigonométrique, calcul pratique quand le nombre est sous forme algébrique, cas général des équations du second degré : théorème, résolution pratique. Somme et produit des racines en fonction des coefficients, savoir trouver deux complexes connaissant leur somme et leur produit.

8 Racines n-ièmes

Proposition décrivant les racines n-ièmes de 1 puis d'un complexe quelconque. Résultat sur la somme des racines n-ièmes de 1.

9 Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe quelconque ($\exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$), exponentielle d'une somme, puissance complexe d'un réel strictement positif sous forme exponentielle, conséquence $\exp(z) = \mathrm{e}^z$, condition pour que $\exp z = \exp z'$, résolution de $\exp z = a$.

10 Traduction complexe de problèmes affines

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct (ROND) et on utilise la correspondance usuelle avec $\mathbb{C}$ en notant z_M l'affixe de chaque point $M \in \mathcal{P}$. On note d la distance sur $\mathcal{P}$ et (PQ) la droite passant par deux points distincts P et Q.

Proposition 1 *Si $A, B, C \in \mathcal{P}$ sont tels que $B \neq A$ et $C \neq A$, en notant $z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, on a*

$$\begin{cases} |z| & = \dfrac{d(A,C)}{d(A,B)} \\ \mathrm{Arg}(z) & \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Proposition 2 *Trois points $A, B, C \in \mathcal{P}$ sont alignés si et seulement si $(z_c - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathbb{R}$.*

Proposition 3 *Pour $A, B, C \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \iff (z_c - z_A)\overline{(z_B - z_A)} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.*

11 Similitudes directes

Proposition 4 *Une application F (i.e. une “fonction”) de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ est uniquement déterminée par la donnée de l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à tout complexe z_M fait correspondre le complexe $z_{F(M)}$.*

Définition 5 Avec les notations ci-dessus, on appellera f la *traduction complexe* de F.

Définition 6 Une *similitude directe* est une bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ préservant les angles orientés de vecteurs. Nous noterons Sim_+ l'ensemble des similitudes directes.

Proposition 7 *En particulier, une similitude directe préserve l'alignement, le non-alignement et l'orthogonalité.*

Théorème 8 *Les similitudes directes sont les applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant une traduction complexe de la forme $z \longmapsto az+b$, $a \neq 0$.*

Proposition 9 *Pour une similitude directe F de traduction complexe $z \longmapsto az+b$, les nombres complexes a et b sont uniquement déterminés par F.*

Définition 10 Avec ces notations, on appelle *rapport complexe* (ou simplement *rapport*) de F le nombre complexe non nul a.

On appelle aussi parfois *rapport positif* de F le nombre strictement positif $|a|$.

Proposition 11 *Une similitude directe de rapport complexe a multiplie les distances par $|a|$.*

Attention, la classification n'a pas encore été faite !

Toutes les définitions et tous les énoncés sont **exigibles**.

Démonstrations de cours/exercices exigibles

- Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ avec caractérisation algébrique du cas d'égalité ;
- Les trois formules pour les produits $\cos a \cos b$, *etc.*, puis une des 4 formules du type $\cos p + \cos q$, *etc.*, méthode au choix de l'élève ;
- Calculs des sommes $\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$;
- Démonstration du théorème de résolution des équations du second degré ;
- Résolution complète explicite de l'équation $\mathrm{i}z^2 + (1+\mathrm{i})z + 5 = 0$.