Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

On note encore $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Structure affine d'un espace vectoriel

D'après le programme, les seuls espaces affines considérés sont les espaces vectoriels eux-mêmes. La notion de "structure affine" n'est introduite que de manière "informelle".
Sur un espace vectoriel E, j'ai donc dit que les éléments de E seront parfois considérés comme des *points* (dans un premier temps, notés par des grandes lettres A, B, *etc*.) et leur ensemble sera alors noté $\mathcal{E}(=E)$ et qu'ils seront parfois considéré comme des *vecteurs* (notés dans un premier temps avec des flèches) et leur ensemble sera alors noté E. À partir de deux points A et B on peut alors former un unique vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(=B-A)$ qui vérifie $A+\vec{u}=B$.
Cette définition donne immédiatement la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (qu'on utilise aussi sous la forme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$). J'ai aussi fait remarquer que "l'action" des vecteurs sur les points définie par $(A,\vec{u})\longmapsto A+\vec{u}$ vérifiait que $\vec{0}$ agissait trivialement et que $A+(\vec{u}+\vec{v})=(A+\vec{u})+\vec{v}$. Après avoir défini la translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$, on a vu que l'application $\tau:(E,+)\longrightarrow(\mathcal{S}(\mathcal{E}),\circ)$ qui à $\vec{u}$ fait correspondre $T_{\vec{u}}$ est un morphisme de groupe injectif (notion de morphisme de groupe introduit à cette occasion). Quelques exemples de translations.
À partir de maintenant, la distinction entre points et vecteurs dans les notations disparaît sauf cas de grande nécessité.

II Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Un *sous-espace affine* de E est une partie $\mathcal{F}$ de E qui peut s'écrire $\mathcal{F}=a+F$ avec $a\in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. Dans cette écriture, le point a n'est pas unique car on peut le remplacer par tout point de $\mathcal{F}$. En revanche, on montre que le sous-espace vectoriel F est lui unique car il est égal à $\{c-b;(b,c)\in\mathcal{F}^2\}$ et on l'appelle la *direction* de $\mathcal{F}$.
Exemples : les singletons et l'espace E sont des sous-espaces affines de E, mais $\varnothing$ n'en est pas un.
On dit que deux sous-espaces affines sont *parallèles* ss'ils ont la même direction et par extension, on dit qu'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est *parallèle à* un sous-espace affine $\mathcal{F}'$ ssi leur directions vérifient $F\subset F'$.
Lorsque F est de dimension finie, on dit que $\mathcal{F}$ l'est aussi et on définit $\dim\mathcal{F}=\dim F$.
Classification des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par leurs dimensions.

Une intersection de sous-espaces affines est soit vide soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines dont on prend l'intersection.

III Hyperplans affines et représentations cartésiennes

Un *hyperplan affine* de E est un sous-espace affine de E de direction un hyperplan de E.
Dans le cas de la dimension finie, *équation* d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$ dans une base de E. Passage de l'équation de sa direction à l'équation d'un hyperplan affine et réciproquement.
Conséquences :

- unicité à un facteur multiplicatif non nul de l'équation d'un hyperplan affine ;
- tout sous-espace affine de dimension $n-m$ possède une représentation cartésienne formée de m équations d'hyperplans affines et on obtient une représentation cartésienne de sa direction en enlevant les seconds membres constants.

IV Équations linéaires avec second membre

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $a \in F$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$.
Application aux différents cas déjà rencontrés cette année : systèmes linéaires (les élèves sont chargés de revoir la méthode du pivot), équations différentielles linéaires déjà vues (ordre 1 et cas des coefficients constants pour l'ordre 2) pour lesquelles les théorèmes du cours affirment que l'ensemble des solutions n'est pas vide, polynômes solutions d'un problème d'interpolation en $n+1$ points (avec pour solution particulière le polynôme de Lagrange associé, dont les élèves sont chargés de revoir l'expression).

V Repères affines

Repères de l'espace ou d'un sous-espace affine. *Coordonnées d'un point* dans un repère.
Représentation paramétrique d'un sous-espace affine.