Séries numériques

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Introduction

Zénon n'arrive pas à ses fins

Une flèche tirée en direction d'une cible commence par parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance restante, puis la moitié de la distance restante... comme cela fait une infinité d'étapes, certains (dont Zénon) en déduisent que la flèche n'atteint jamais la cible. En bon mathématiciens, disons que la distance entre la flèche et la cible est d'un mètre et que la vitesse de la flèche est d'un mètre par seconde. Alors, pour parcourir le premier segment, cela prend une demi-seconde, pour parcourir le second, cela prend un quart de seconde... Le temps total pour arriver au but, en secondes, est donc la somme infinie

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Comme par ailleurs la flèche parcourt au total un mètre avec une vitesse d'un mètre par seconde, on en déduit qu'en secondes,

$$T = 1.$$

Le but du présent chapitre est de construire un formalisme permettant d'écrire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Pour cela, il nous suffira de définir $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$, si elle existe. Or, pour $k \in \mathbb{N}$, comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui permet de conclure qu'on a effectivement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.}$$

On dit alors que la *série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ *converge* et que sa *somme* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est égale à 1. Les termes $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ sont appelés les *sommes partielles* de la série.

Remarquons qu'une telle série est appelée *série géométrique*.

Exercice 1 Pour quels $q \in \mathbb{R}_+$ la série géométrique $\sum_{n\geq 1} q^n$ converge-elle ?

Quick et Flupke jouent aux cubes

Quick prétend avoir empilé dans sa chambre une infinité de cubes, le premier de côté un mètre, le second de côté un demi-mètre, le troisième de côté un tiers de mètre... Flupke lui répond que c'est un menteur, et cela quelle que soit la taille de la chambre. De plus, il affirme avoir assez de peinture pour peindre cette suite infinie de cubes et assez d'eau pour pouvoir tous les remplir. Qui croyez-vous ?

Si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors on peut remarquer que, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_{2^p} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdot + \left(\frac{1}{2^{p-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{p-1}}{2^p} = 1 + \frac{p}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

donc la suite (S_n) n'est pas bornée, et comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$, *i.e.*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.}$$

On dit alors que la *série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge* et que sa *somme* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est égale à $+\infty$.

Attention, on verra par la suite qu'une série peut aussi diverger sans qu'on puisse définir sa somme.

Comme la hauteur de la pile de cubes est infinie, Quick est un menteur. Qu'en est-il de Flupke ?

On note $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et comme précédemment, la suite (T_n) est croissante. On remarque alors que, pour tout n,

$$T_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(j+1)^2} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2,$$

donc la suite (T_n) est majorée et, comme elle est croissante, elle converge.

Ainsi, la *série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge*.

On a de plus un encadrement pour sa somme qui est la limite de (T_n) : puisque (T_n) est croissante, sa limite est au moins $T_1 = 1$ et, par la majoration précédente, elle vaut au plus 2, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in [1,2]$.

Vous démontrerez probablement l'an prochain que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

On en déduit que les cubes de Quick et Flupke ont une surface totale inférieure à $6 \times 2 = 12$ mètres carrés, donc finie, et qu'ils peuvent donc être peints avec une quantité finie de peinture.

Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$, toujours par croissance de la suite des sommes partielles, la *série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ *converge* aussi, et les cubes ont un volume total fini, donc peuvent bien être remplis.

On en conclut que Flupke dit la vérité.

Imposture

On s'intéresse à l'éventuelle limite, quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Même si cela ressemble "de loin" à la limite d'une suite de sommes partielles de séries ce n'est pas le cas. Pouvez-vous dire pourquoi ?

On a essentiellement deux pistes pour résoudre un tel problème :

— il se peut que ces sommes soient "calculables", c'est-à-dire exprimables sans signe $\sum$, en une expression dont on puisse calculer la limite ;

— sinon, on essaie de se ramener à ce qu'on appellera dans un mois des *sommes de Riemann*, mais que vous avez déjà vu en informatique sous la terminologie de la *méthode des rectangles*, qui permet de calculer de manière approchée les intégrales de fonctions par exemple continues :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

En conclusion, attention aux "fausses séries" !

I Définitions

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition 2 Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la *série de terme général* a_n, notée $\sum a_n$, est la suite des *sommes partielles* (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

En conséquence, on dit que la série $\sum a_n$ *converge* (CV) ou *diverge* (DV) suivant que la **suite** (S_n) converge ou diverge.

En cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée la *somme de la série* et notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On appelle *nature* de la série le fait qu'elle soit convergente ou divergente.

Exemple 3 La série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge. Quelle est sa somme ?

Exercice 4 Quelle est la nature de la série $\sum(-1)^n$?

Remarque 5 Comme pour les suites, il se peut que le terme général d'une série ne soit défini qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on fait commencer la suite des sommes partielles et les sommations à n_0 : pour $n \geq n_0$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k$. La série est alors notée $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ et, lorsqu'elle existe, la somme est notée $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Remarque 6 On peut aussi, comme pour les suites, décider de changer le rang de départ ou un nombre fini de termes d'une série. Cela ne change pas sa nature, mais attention, cela change sa somme, lorsqu'elle existe.

Exemple 7 On a vu que la *série harmonique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ convergent.

Exercice 8 Déterminer les natures des séries suivantes en calculant explicitement leurs sommes partielles et leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3+n^2-2n}$.

Remarque 9 Il est **important** de savoir qu'il y a différentes définitions de l'objet théorique série. Par exemple, certains auteurs définissent une série comme le couple $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$. En revanche les définitions des notions suivantes sont universelles :

— terme général d'une série ;
— sommes partielles d'une série ;
— convergence ou divergence d'une série ;
— somme éventuelle d'une série.

Pour cette raison, on exprimera **toujours** les résultats et raisonnements dans ce vocabulaire universel.

Par exemple, si le terme général d'un série est positif, on dira que la suite de ses sommes partielles est croissante **et non pas** que "la série est croissante", même si la définition théorique prise ici donnerait un sens à cette expression.

On rappelle que, dans le cas complexe, la convergence d'une suite équivaut à la la convergence de ses parties réelle imaginaire. Il en résulte immédiatement, en appliquant cela à la suite des sommes partielles, la

Proposition 10 *Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes. Alors*

$$\sum a_n \; CV \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum \mathrm{Re}\,(a_n)\; CV \text{ et } \sum \mathrm{Im}\,(a_n)\; CV\right).$$

Exemple 11 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, la convergence de $\sum \frac{e^{\mathrm{i}\lambda n}}{n^\alpha}$ équivaut aux convergences de $\sum \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$.

II Propriétés

Définition 12 **(Opérations sur les séries)**

Pour deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et un scalaire λ on définit :

— La série obtenue par *multiplication par un scalaire* $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$;

— La série obtenue comme *somme de deux séries* $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$.

On a alors trivialement :

Proposition 13 *L'ensemble des séries à termes dans $\mathbb{K}$, muni de ces deux lois, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Puis, la linéarité de la limite des suites entraîne celle des séries :

Proposition 14 ***(Linéarité de la somme)***

L'ensemble SCV des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace des séries et l'application "somme de la série"

$$\text{Somme} : \begin{cases} SCV & \longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ \sum a_n & \longmapsto \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \end{cases}$$

est une forme linéaire sur ce sous-espace, i.e. , pour $\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$:

— *la série $\lambda \sum a_n = \sum \lambda a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

— *la série $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*

Exemple 15 La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2 + (-1)^{n-1} n}{n^2}$ est convergente comme combinaison linéaire des séries convergente $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. La convergence de la première a été vue dans l'introduction et celle de la seconde sera démontrée plus loin.

On déduit du résultat précédent un corollaire très utile, et dont il faut retenir la preuve qui, bien que très simple, est difficile à obtenir des candidats aux oraux :

Corollaire 16 *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.*

Démonstration: Soient $\sum a_n$ une série CV et $\sum b_n$ une série DV. On montre par l'absurde que $\sum(a_n+b_n)$ DV : si ce n'était pas le cas, alors on aurait la convergence de $\sum a_n$ et $\sum(a_n+b_n)$, donc, par combinaison linéaire, la convergence de $\sum b_n = \sum(a_n+b_n) - \sum a_n$, ce qui contredit l'hypothèse sur $\sum b_n$. $\square$

Exemple 17 La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Remarque 18 **Attention**, la somme de plusieurs séries divergentes peut converger, par "simplification" : $\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$ DV et $\sum\left(-\frac{1}{n}\right)$ DV, mais $\sum \frac{1}{n^2}$ CV.

On remarque que toutes les séries convergentes exhibées jusqu'à présent ont leur terme général qui tend vers 0, ce qui est un fait général :

Proposition 19 ***(CN de convergence)***
Pour toute série convergente $\sum a_n$, on a $\lim a_n = 0$.

Démonstration: Il suffit de remarquer, pour $\sum a_n$ convergente, que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

$\square$

Remarque 20 **Attention**, cette condition n'est absolument pas suffisante puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ DV, comme vu dans l'introduction.

Cette condition nécessaire sert évidemment souvent à montrer qu'une série diverge. Cela donne même lieu à une terminologie :

Proposition 21 ***(Divergence grossière)***
Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 *diverge.*
On dit qu'une telle série diverge grossièrement (DVG).

Démonstration: Par contraposition de la condition nécessaire précédente. $\square$

Exemple 22 La série $\sum(-1)^n$ diverge

Exemple 23 Dans le cadre de notre cours, la série $\sum n$ diverge, bien que les physiciens théoriciens écrivent fréquemment que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} = -\frac{1}{12}$...

On formalise l'erreur commise en approchant la somme de série par les sommes partielles avec la notion de reste :

Définition 24 **(Reste d'une série CV)**

Soit $\sum a_n$ une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste d'ordre n* de cette série la quantité

$$R_n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p - S_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p.$$

On a évidemment

$$S_n + R_n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

La manière dont la suite des restes tend vers 0 qualifie la "vitesse de convergence" de la série.

Exemple 25 Les restes de la série géométrique vue dans l'introduction sont les $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^n}$. Leur suite tend vers 0 de manière géométrique, *i.e.* exponentielle en n, donc **très rapidement**.

On peut voir que la suite des restes de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est équivalente à $\frac{1}{n}$, donc cette série converge **beaucoup plus lentement** que la série géométrique précédente.

Bien garder en mémoire ces deux ordres de grandeur pour estimer les convergences des séries à venir.

On traite maintenant le cas général des séries géométriques :

Proposition 26 *(**Séries géométriques**) Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle série géométrique de raison a la série $\sum a^n$. On a l'équivalence*

$$\sum a^n \text{ } CV \quad \Longleftrightarrow \quad |a| < 1.$$

Dans les cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-a}.$$

Démonstration: Si $|a| \geq 1$, $a^n \not\to 0$, donc $\sum a_n$ DVG. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a}.$$

□

Enfin, il peut être utile, pour étudier une suite, de se ramener à une série :

Proposition 27 *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors, (u_n) et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.*

Démonstration: Par simplification télescopique, les sommes partielles de la série sont, à une constante près, les termes de la suite, donc la suite et la série convergent ou divergent simultanément. □

Exemple 28 Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq 2^{-n}$. Alors la suite converge.

En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2.$$

Comme les différences $u_{n+1} - u_n$ sont positives ou nulles, la suite (S_n) est croissante. Comme elle est majorée par 2, elle converge, *i.e.* la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Par la proposition précédente, la suite (u_n) converge.

Cette preuve de convergence par comparaison est généralisable pour les séries **à termes positifs**, comme on le voit dans la section suivante.

III Séries à termes positifs

Définition 29 On appelle *série à termes positifs* une série réelle $\sum a_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

On utilise l'acronyme SATP dans ce cours, mais pour l'utiliser en devoir, il faut le redéfinir.

Les faits suivants sont évidents, mais fondamentaux.

Proposition 30 *Pour une SATP $\sum a_n$:*
- *La suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante ;*
- *Soit cette suite est majorée et la série converge, soit elle ne l'est pas et la série diverge ;*
- *Lorsque la série diverge, $\lim S_n = +\infty$, ce qu'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.*

Exemple 31 La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs, mais la *série harmonique alternée* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne l'est pas.

La plupart des séries précédentes étaient termes positifs, ce qui a permis des raisonnements de convergence par comparaison. On les institutionnalise :

Théorème 32 ***(Convergence d'une SATP par majoration)***

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries réelles telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

.

Alors la CV de $\sum b_n$ implique celle de $\sum a_n$ et, dans ce cas, $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Par contraposition, la DV de $\sum a_n$ implique celle de $\sum b_n$.

Démonstration: On suppose, avec les notations et hypothèses ci-dessus, que $\sum b_n$ CV.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. En sommant les inégalités de l'hypothèse, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq S_n \leq \widetilde{S}_n.$$

Comme les termes des deux séries sont positifs, les deux suites $(S_n)_n$ et $(\widetilde{S}_n)_n$ sont croissantes. Le fait que $\sum b_n$ CV signifie que $(\widetilde{S}_n)_n$ CV et comme cette suite est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{S}_n \leq \lim_{p \to +\infty} \widetilde{S}_p = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \ (\in \mathbb{R}).$$

En couplant les deux inégalités, on voit que $(S_n)_n$ est majorée, puis, comme elle est croissante, elle CV, *i.e.* $\sum a_n$ CV.

On remarque, en passant à la limite dans les inégalités ci-dessus et en changeant l'indice (muet) de la deuxième somme de série, que

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

□

Remarque 33 Il suffit que la majoration (et même la positivité) soient vérifiées à partir d'un certain rang pour avoir le résultat de convergence, puisque le changement d'un nombre fini de ses termes de change pas la nature d'une série. Attention, l'inégalité des sommes n'est alors plus vraie en général, à moins de sommer à partir du rang considéré.

Exemple 34 Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ DV et, pour $\alpha \leq 1$,

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}},$$

on en déduit que

$$\forall \alpha \leq 1, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}\ DV.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV et, pour $\alpha \geq 2$,

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^2},$$

on en déduit que

$$\forall \alpha \geq 2, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}\ CV.$$

On verra plus tard que

$$\forall \alpha \in]1,2[, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}\ CV,$$

ce qu'on résume dans la proposition suivante.

Proposition 35 ***(Séries de Riemann)***
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \; CV \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.}$$

Démonstration: On vient de voir la preuve lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus]1,2[$.

La preuve complète sera obtenue par comparaison série-intégrale dans une section ultérieure. □

On peut aussi utiliser les équivalents pour comparer les SATP :

Théorème 36 ***(Convergence d'une SATP par équivalent)***
*Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries réelles **à termes positifs** telle que*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$

.

Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature.

Démonstration: On raisonne par disjonction de cas.

Soit les deux séries divergent et on a terminé. Soit l'une des deux converge et on montre la convergence de l'autre. Quitte à changer les notations, on suppose que $\sum b_n$ converge. Comme $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, par définition de la limite (en prenant "$\varepsilon = 1 > 0$"), il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{a_n}{b_n} \leq 2$, et en multipliant par $b_n \geq 0$, on obtient $0 \leq a_n \leq 2b_n$. Le théorème de convergence d'une SATP par majoration affirme alors que $\sum a_n$ CV. □

Exemple 37 Comme, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n(n-\sqrt{n})} \geq 0$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$, $\frac{1}{n(n-\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV, alors $\sum \frac{1}{n(n-\sqrt{n})}$ CV.

Remarque 38 **Attention**, la positivité est indispensable. Par exemple, on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais on peut montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV, ce qui entraîne aussi, par divergence de la série harmonique, que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$ DV.

Remarque 39 Comme pour la comparaison par majoration, la positivité n'est nécessaire qu'à partir d'un certain rang.

Remarque 40 On a vu dans le chapitre d'analyse asymptotique que deux suites à termes non nuls équivalentes étaient automatiquement de même signe à partir d'un certain rang, donc il suffit de vérifier que l'**une des deux** séries est à termes positifs (et même à partir d'un certain rang) pour appliquer ce théorème.

Par comparaison avec une série géométrique, on montre le

Théorème 41 ***(Règle de d'Alembert)***

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

- *si $\ell < 1$, $\sum a_n$ CV;*
- *si $\ell = 1$, "tout peut arriver" (on dit que c'est le cas douteux);*
- *si $\ell > 1$, $\sum a_n$ DVG.*

Démonstration:

- Cas $\ell < 1$. Par définition de la limite (en prenant "$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$"), il existe un rang N à partir duquel $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1+\ell}{2}$. Par positivité de a_n, pour $n \geq N$, $a_{n+1} \leq \frac{1+\ell}{2} a_n$. Par récurrence immédiate,
$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq a_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} a_N = C\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.$$
Comme $\left|\frac{1+\ell}{2}\right| < 1$, la série géométrique de raison $\frac{1+\ell}{2}$ converge. Par le théorème de convergence d'une SATP par majoration, $\sum a_n$ CV.
- Cas $\ell = 1$. Voir la remarque suivant la démonstration.
- Cas $\ell > 1$. Par définition de la limite (en prenant "$\varepsilon = \ell - 1 > 0$"), il existe un rang à partir duquel $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Par positivité de a_n, la suite croît à partir du rang N et, comme $a_N > 0$, la suite (a_n) ne tend pas vers 0, *i.e.* $\sum a_n$ DVG.

□

Remarque 42 Le cas douteux est parfaitement illustré avec les séries de Riemann, pour lesquelles la limite du quotient est toujours 1, indépendemment de l'exposant α, ce qui fournit à la fois des cas de convergence et des cas de divergence.

Une autre règle classique est celle vue dans l'exercice suivant.

Exercice 43 (**Règle de Cauchy**)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs telle que $\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

- si $\ell < 1$, $\sum a_n$ CV;
- si $\ell = 1$, le cas est douteux;
- si $\ell > 1$, $\sum a_n$ DV.

IV Complément au théorème de convergence par équivalent

Comme on a un contrôle de la somme dans le cas du théorème de convergence d'une SATP par majoration, on peut se demander ce qu'on peut dire dans le cas du théorème de convergence d'une SATP par équivalent. Le résultat suivant est au programme de deuxième année et nous en démontrerons peut-être une partie en exercice si le temps le permet.

Théorème 44 ***(Avant-première)***

Soient deux séries à termes généraux ***positifs*** *équivalents. Elles sont donc de même nature.*
Si elles convergent, alors les suites des restes sont équivalentes.
Si elles divergent, alors les suites des sommes partielles sont équivalentes.

Exemples 45

1. Les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ ont leurs termes généraux positifs et équivalents. Comme $2>1$, la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et, par le théorème de convergence d'une SATP par équivalent, la deuxième série converge aussi. De plus, leur suites de restes sont équivalentes. Notons R_n les restes de la première série et $\widetilde{R}_n$ ceux de la deuxième. On a, pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $q\geq n+1$,

$$\sum_{p=n+1}^{q}\frac{1}{p(p+1)}=\sum_{p=n+1}^{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1},$$

donc, en faisant tendre q vers $+\infty$,

$$\widetilde{R}_n=\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$R_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

2. Les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ont leurs termes généraux positifs et équivalents. Comme la série harmonique diverge, par le théorème de convergence d'une SATP par équivalent, la deuxième série diverge aussi. De plus, leur suites de sommes partielles sont équivalentes. Notons S_n les sommes partielles de la première série et $\widetilde{S}_n$ celles de la deuxième. On a, pour $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$\widetilde{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1).$$

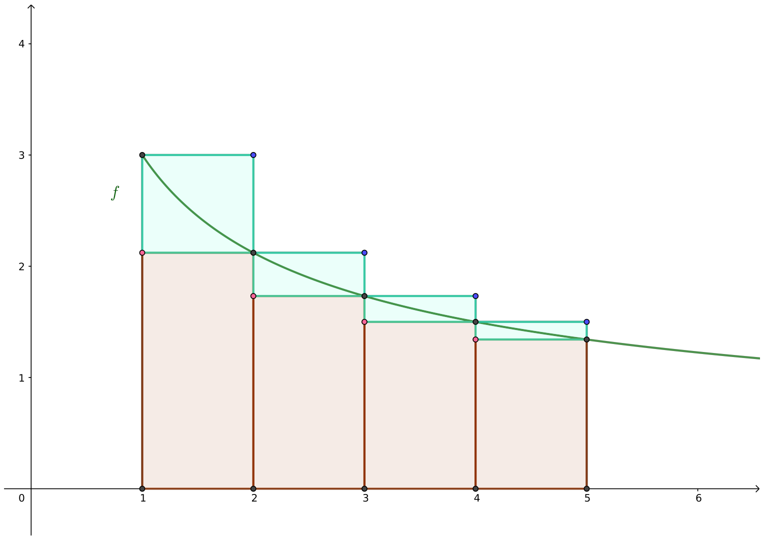
Or $\ln(n+1)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)\sim\ln(n)$, car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}=o(\ln(n))$, donc

$$S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).$$

Nous allons généraliser ces deux résultats par une méthode fondamentale et très fructueuse.

V Comparaison série-intégrale

Le principe de cette méthode est très simple : si une fonction f définie sur un intervalle $[n_0,+\infty[$, avec $n_0\in\mathbb{N}$, est continue et monotone, alors la méthode des rectangles entre n_0 et n, dans ses versions “point gauche” et “point droit”, fournit un encadrement de $\int_{n_0}^{n} f$, comme on peut le voir sur la figure suivante.



On peut alors changer de point de vue et en faire un encadrement des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$, qui permet, grâce au calcul intégral, de prouver, suivant les cas, la convergence ou la divergence de la série, voire de trouver des équivalents des sommes partielles ou des restes.

Plus précisément, on a le résultat suivant, qu'il ne faut pas apprendre par cœur, mais savoir retrouver à l'aide d'un dessin et aussi savoir redémontrer en détail lorsque c'est demandé :

Théorème 46 *Pour une fonction f continue et décroissante sur $[m, n+1]$ ($m \leq n$ entiers),*

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \quad \text{et} \quad \int_{m+1}^{n+1} f \leq \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f.$$

Démonstration: Soit $k \in [\![m, n]\!]$. Par décroissance de la fonction f,

$$\forall x \in [k, k+1], \quad f(k) \geq f(x) \geq f(k+1).$$

La fonction f est continue sur $[k, k+1]$, donc on peut calculer son intégrale entre k et $k+1$ et, par croissance de l'intégrale (on a bien $k \leq k+1$) :

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\, \mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\, \mathrm{d}t = f(k+1).$$

En sommant ces inégalités pour $k \in [\![m, n-1]\!]$, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \geq \int_m^n f(t)\, \mathrm{d}t \geq \sum_{k=m}^{n-1} f(k+1).$$

Par un changement d'indice dans la deuxième somme et une présentation des inégalités dans l'autre sens,

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

La première de ces inégalités est aussi la seconde du deuxième encadrement. Pour la première du second encadrement, il suffit de sommer, pour $k \in [\![m+1, n]\!]$, les inégalités

$$\int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t \leq f(k).$$

□

Remarque 47 Pour une fonction f continue et croissante sur $[m,n+1]$, en appliquant le théorème à $-f$, on obtient les inégalités inverses :

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \leq \int_m^n f \leq \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \quad \text{et} \quad \int_m^n f \leq \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_{m+1}^{n+1} f.$$

On utilise ces résultats pour l'étude complète des séries de Riemann, en redémontrant au passage les résultats que l'on a déjà vu.

VI Application aux séries de Riemann

Pour cela, on prend $\alpha \in \mathbb{R}$, on note S_n (resp. R_n) les sommes partielles (resp. restes, lorsqu'ils existent) de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et on applique le résultat précédent à la fonction continue et positive

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{-\alpha} \end{array} \right.$$

en distinguant plusieurs cas :

1. Cas $\alpha > 1$. La fonction f est alors décroissante et on a en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, en utilisant le fait que $\alpha - 1 > 0$,

$$0 \leq S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq 1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Comme la suite (S_n) est majorée et la série est à termes positifs, $\boxed{\text{la série converge}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Mais en réutilisant le théorème, on peut aussi obtenir un équivalent du reste. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $q \geq n$,

$$\int_{n+1}^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{p=n+1}^{q} f(p) \leq \int_n^q f(t)\,\mathrm{d}t,$$

i.e.

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - (q+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \sum_{p=n+1}^{q} f(p) \leq \frac{n^{1-\alpha} - q^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

En divisant par $\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} > 0$,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n \leq 1.$$

Comme $\lim \frac{n+1}{n} = 1$ et $x \longmapsto x^{1-\alpha}$ est continue en 1, alors $\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1$, donc, par le théorème des gendarmes, $\lim (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n = 1$, *i.e.*

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

2. Cas $\alpha = 1$. La fonction f est alors décroissante et on a en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Comme $\lim \ln(n+1) = +\infty$, la suite (S_n) tend vers $+\infty$, *i.e.* $\boxed{\text{la série diverge}}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Mais si on utilise l'encadrement complet, on obtient un équivalent de la suite des sommes partielles. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\ln(n+1) \leq S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq 1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \ln(n).$$

En divisant, pour $n \geq 2$, cet encadrement par $\ln(n) > 0$, on obtient

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

On a démontré à la fin de la section IV que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ et on sait que $\lim \frac{1}{\ln(n)} = 0$, donc, par le théorème des gendarmes, $\lim \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$, *i.e.*

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

De plus, l'encadrement précédent peut s'écrire

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq S_n - \ln(n) \leq 1,$$

donc la suite $(S_n - \ln(n))$ est bornée. On peut montrer qu'elle converge. Sa limite est appelée la constante d'Euler $\gamma \simeq 0,577$.

3. Cas $\alpha \in]0,1[$. Le raisonnement est la même que dans le cas précédent. Seul le calcul de l'intégrale change.
Par décroissance de f, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Comme $1-\alpha > 0$ et $\lim (n+1)^{1-\alpha} = +\infty$, la suite (S_n) tend vers $+\infty$, *i.e.* $\boxed{\text{la série diverge}}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

En utilisant l'encadrement complet, on obtient un équivalent de la suite des sommes partielles. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leq S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq 1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

En divisant, pour $n \geq 2$, cet encadrement par $\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} > 0$, on obtient

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{n^{1-\alpha}-1} \leq \frac{(1-\alpha)S_n}{n^{1-\alpha}-1} \leq 1 + \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}-1}$$

et par le théorème des gendarmes, $\lim \frac{(1-\alpha)S_n}{n^{1-\alpha}-1} = 1$, *i.e.*

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

4. Cas $\alpha = 0$. Dans ce cas, $\boxed{\text{la série diverge grossièrement}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.}$

   On peut remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\boxed{S_n = n \quad \left(= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).}$

5. Cas $\alpha < 0$. Comme dans le cas précédent, $\boxed{\text{la série diverge grossièrement}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.}$

   Par croissance de f, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$1 + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   i.e.

$$1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

   On en tire comme avant l'équivalent

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

Exemple 48 Ainsi, on a $\sum_{k=1}^{n} k \sim \frac{n^2}{2}$, ce qu'on savait déjà car cette somme vaut $\frac{n(n+1)}{2}$, mais aussi $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{3}$, ce qu'on ne savait pas.

VII Convergence absolue

Lorsqu'une série n'est pas à termes positifs, une première approche consiste à étudier la série des valeurs absolues (resp. des modules) de ses termes :

Définition 49 **(Convergence absolue)**

On dit qu'un série $\sum a_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est *absolument convergente* (ACV) ou qu'elle *converge absolument* (CVA) si et seulement si la série $\sum |a_n|$ est convergente.

Un premier exemple est celui des séries géométriques, qui sont absolument convergentes dès qu'elles convergent, (ce qui n'est pas un fait général comme on le voit par la suite) :

Proposition 50 ***(Convergence absolue des séries géométriques)***

Pour $a \in \mathbb{C}$,

$$\sum a^n \text{ ACV} \iff \sum a^n \text{ CV} \iff |a| < 1.$$

Démonstration: C'est évident puisque $\sum |a^n| = \sum |a|^n$ est elle-même géométrique, donc converge si et seulement si $|a| = ||a|| < 1$. □

Exemple 51 D'après ce qu'on a vu, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.

On peut montrer qu'elle converge si et seulement si $\alpha > 0$.

En particulier, elle converge dans tous les cas de convergence absolue. C'est un fait général très pratique (puisqu'on a des outils pour l'étude des SATP), qu'on démontre maintenant.

Théorème 52 *Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,*

$$\boxed{\textit{la convergence absolue d'une série à termes dans } \mathbb{K} \textit{ entraîne sa convergence.}}$$

Démonstration: On fait la démonstration en deux étapes : on démontre d'abord le résultat sur $\mathbb{R}$, puis on en déduit le résultat sur $\mathbb{C}$.

On rappelle les définitions de parties positive et négative d'un réel x :

$$x^+ = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0),$$

ce qui entraîne que

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-$$

et

$$0 \leq x^+ \leq |x| \quad \text{et} \quad 0 \leq x^- \leq |x|.$$

<u>Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u>. Supposons que $\sum a_n$ soit une série à termes réels absolument convergente, *i.e.* $\sum |a_n|$ CV. Alors, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|,$$

le théorème de convergence des SATP par majoration assure que $\sum a_n^+$ CV et $\sum a_n^-$ CV. Comme combinaison linéaire de séries convergentes, $\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-)$ CV.

<u>Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u>. Supposons que $\sum a_n$ soit une série à termes complexes absolument convergente, *i.e.* $\sum |a_n|$ CV. Alors, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |\mathrm{Re}\,(a_n)| \leq |a_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq |\mathrm{Im}\,(a_n)| \leq |a_n|,$$

le théorème de convergence des SATP par majoration assure que $\sum |\mathrm{Re}(a_n)|$ CV et $\sum |\mathrm{Im}(a_n)|$ CV. Comme $\sum \mathrm{Re}(a_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(a_n)$ sont deux séries à termes réels absolument convergentes, on peut leur appliquer le cas précédent, donc elles sont convergentes. Puis, comme $\sum \mathrm{Re}(a_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(a_n)$ convergent, alors $\sum a_n$ CV. □

Remarque 53 **Attention**, la réciproque est fausse, comme on l'a vu dans l'exemple introduisant le théorème.

Exemple 54 La série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in}}{n^3}$ converge car elle est absolument convergente.

Pour les séries à termes réels non positifs, ou complexes, on peut étudier leur convergence absolue en utilisant les théorèmes de comparaison. Il y une manière très pratique de regrouper à la fois la convergence absolue et les deux types de comparaison qu'on a étudié dans le cas positif en se servant des "grands o" :

Théorème 55 ***(Convergence absolue par domination)***
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\text{Si } \sum b_n \text{ CVA et } a_n = O(b_n), \text{ alors } \sum a_n \text{ CVA.}}$$

Démonstration: Supposons que $\sum b_n$ CVA et $a_n = O(b_n)$. En particulier, les termes b_n sont non nuls. Alors il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M$$

et par multiplication par $|b_n| > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |a_n| \leq M\,|b_n|\,.$$

D'après le théorème de convergence d'une SATP par majoration, $\sum |a_n|$ CV, *i.e.* $\sum a_n$ CVA. □

Remarque 56 Comme annoncé en préambule, ce résultat recouvre le théorème de convergence d'une SATP par majoration, dans le cas où les b_n ne s'annulent pas (du moins à partir d'un certain rang), puisqu'alors si, pour tout n, $0 \leq a_n \leq b_n$, on a $a_n = O(b_n)$. Cette restriction est seulement due au fait que la définition des "grands o" donnée en CPGE est partielle et elle disparaît avec la définition générale qu'on donne pour la culture :

$$a_n = O(b_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |a_n| \leq M\,|b_n|\,.$$

Ce théorème recouvre aussi celui de convergence d'une SATP par équivalent, puisque si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$.

Remarque 57 **Attention**, il est primordial que la série $\sum b_n$ converge **absolument**, sinon on ne sait rien de la convergence (même non absolue) de $\sum a_n$.

Remarque 58 On se sert en général de ce théorème pour montrer la convergence, *via* la convergence absolue.

Exercice 59 Montrer que la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in}\ln(n)}{n^{3/2}}$ converge.

VIII Représentation décimale des réels

Les séries permettent de définir rigoureusement la notion de développement décimal d'un réel. Pour des raisons pratiques, on s'autorise ici à considérer des séries dont le rang de départ est négatif, ce qui ne pose pas de problème théorique particulier, la définition des notions de sommes partielles, de convergence et de reste s'étendant sans difficulté.

Définition 60 Un développement décimal d'un réel x est une écriture

$$x = \varepsilon \sum_{n=n_0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

où $\varepsilon \in \{+,-\}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geq n_0, d_n \in [\![0,9]\!]$.

Le symbole ε est appelé le *signe* du développement et les d_n ses chiffres.

Remarque 61 Les séries ci-dessus sont toujours absolument convergentes, puisque la valeur absolue de leur terme général est inférieure ou égale à $9 \cdot 10^{-n}$ qui est le terme général d'une SATP convergente, puisque $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$.

Remarque 62 Un nombre réel peut avoir plusieurs développements décimaux : pour 0 on peut prendre comme signe $+$ ou $-$; on a, par exemple,

$$1 = 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} \cdots = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} \cdots$$

et on peut commencer le développement à différents endroits quitte à rajouter des chiffres 0 au début. On remédie à cela avec la notion suivante de développement "propre".

Exercice 63 Montrer l'égalité ci-dessus entre les deux développements de 1.

Définition 64 Le développement décimal

$$x = \varepsilon \sum_{n=n_0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

est *propre* dans les deux cas suivants :

— si $x = 0$, $\varepsilon = +$, $n_0 = 0$ et $\forall n \geq 0, d_n = 0$;

— si $x \neq 0$, $((n_0 < 0 \text{ et } d_{n_0} \neq 0) \text{ ou } n_0 = 0)$ et la suite (d_n) n'est pas stationnaire en 9.

On décide alors d'une écriture plus simple des développements décimaux :

Conventions d'écriture des développements décimaux propres

— On met le signe devant, puis les "premiers" chiffres d_n (au moins toux ceux tels que $n \leq 0$) sont placés les uns à la suite des autres de gauche à droite, avec une virgule séparant d_0 et d_1, et on met trois petits points à la suite :

$$-\pi = -3,141592...$$

— Si le signe est $+$, on l'omet :

$$\pi = 3,141592...$$

— On arrête l'écriture à d_n si $n \geq 0$ et $\forall m > n,\ d_m = 0$:

$$\frac{\lfloor 10^5\pi \rfloor}{10^5} = 3,14159$$

— Pour les entiers, on ne met pas la virgule;

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

— Pour les développement décimaux périodiques (suite (d_n) périodique à partir d'un certain rang), on souligne la première période située après la virgule et on s'arrête :

$$\frac{23}{42} = 0,5\underline{476190}$$

On admet le résultat suivant :

Théorème 65

Tout réel admet un unique développement décimal propre.

Pour $x > 0$, les chiffres d_n du développement propre de x sont donnés par la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad d_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$$

et $n_0 = \min(0, \min\{n \in \mathbb{Z} \mid d_n \neq 0\})$.

Exemple 66 Le développement propre de π est déterminé par : :

— pour $n \leq -1$, $d_n = \lfloor 10^n\pi \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1}\pi \right\rfloor = 0 - 10 \times 0 = 0$;

— pour $n = 0$, $d_0 = \lfloor \pi \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{-1}\pi \right\rfloor = 3 - 10 \times 0 = 3$;

— pour $n = 1$, $d_1 = \lfloor 10\pi \rfloor - 10 \lfloor \pi \rfloor = 31 - 10 \times 3 = 1$;

— pour $n = 2$, $d_2 = \lfloor 100\pi \rfloor - 10 \lfloor 10\pi \rfloor = 314 - 10 \times 31 = 4$;

...

donc $n_0 = \min(0,0) = 0$ et $\pi = 3,14....$

IX Séries alternées

1 Définition

Définition 67 Une *série alternée* est une série dont le terme général est alternativement dans $\mathbb{R}_+$ et dans $\mathbb{R}_-$, *i.e.* de la forme $\sum(-1)^n \alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, avec (α_n) une suite de réels positifs.

Exemple 68 La série $\sum(-1)^n$ est alternée. Une série alternée n'est donc pas forcément convergente.

Exemple 69 La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n}$ est alternée et son terme général tend vers 0, mais elle ne converge pas non plus (le démontrer lorsque vous connaîtrez le critère de Leibniz).

L'exemple archétypique de série alternée est le suivant.

2 La série harmonique alternée

On rappelle que la *série harmonique alternée* est $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle de rang n (on a alors $S_0 = 0$).

On considère alors les suites extraites des rangs pairs, (a_p), et des rangs impairs, (b_p), de (S_n), qui sont donc définies par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = S_{2p} \text{ et } b_p = S_{2p+1}.$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes :

— pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{p+1} - a_p = S_{2p+2} - S_{2p} = \frac{(-1)^{(2p+1)-1}}{2p+1} + \frac{(-1)^{(2p+2)-1}}{2p+2} = \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \geq 0,$$

donc la suite a est croissante ;

— pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$b_{p+1} - b_p = S_{2p+3} - S_{2p+1} = \frac{(-1)^{(2p+2)-1}}{2p+2} + \frac{(-1)^{(2p+3)-1}}{2p+3} = -\frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+3} \leq 0,$$

donc la suite b est décroissante ;

— pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$b_p - a_p = S_{2p+1} - S_{2p} = \frac{(-1)^{(2p+1)-1}}{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites a et b sont donc adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par le théorème de limite par les suites extraites de rangs pairs et impairs, comme les suites extraites de rangs pairs et impairs de (S_n) admettent une limite commune ℓ, alors $\lim S_n = \ell$ et, comme $\ell \in \mathbb{R}$, (S_n) converge, *i.e.*

$$\boxed{\text{la série harmonique alternée converge.}}$$

Remarque 70 On peut montrer de différentes manières accessibles en CPGE que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \ln(2).}$$

3 Critère de Leibniz

Si on regarde le raisonnement précédent, les seules propriétés dont on se soit servi sont que le terme général s'écrit sous la forme $(-1]^{n-1}\alpha_n$, avec (α_n) une suite de nombres **positifs** qui **décroît** et **tend vers** 0. Cela fonctionne évidemment, quitte à changer de signe, avec des termes du type $(-1]^n\alpha_n$, où (α_n) a les mêmes propriétés.

Cela donne le résultat suivant :

Théorème 71 ***(Critère de Leibniz)***
Soit (α_n) une suite de réels positifs décroissante et de limite nulle.
Alors la série alternée $\sum(-1)^n\alpha_n$ converge.

Démonstration: On note S_n les sommes partielles de cette série. On a alors :

— pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+2} - S_{2p} = -\alpha_{2p+1} + \alpha_{2p+2} \leq 0$, donc la suite (S_{2p}) est décroissante ;
— pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+3} - S_{2p+1} = \alpha_{2p+2} - \alpha_{2p+3} \geq 0$, donc la suite (S_{2p+1}) est croissante ;
— pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p} - S_{2p+1} = \alpha_{2p+1} \longrightarrow 0$.

Les suites (S_{2p+1}) et (S_{2p}) sont donc adjacentes. donc, par le théorème des suites adjacentes, elles convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par le théorème de limite par les suites extraites de rangs pairs et impairs, $\lim S_n = \ell$ et, comme $\ell \in \mathbb{R}$, la série converge. □

Exemple 72 La série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge, puisque $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ est une suite de réels positifs qui décroît et tend vers 0.

4 Majoration du reste

Complétons la démonstration précédente.

Une fois prouvée la convergence de la série, les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k\alpha_k$ (pour $n \in \mathbb{N}$) sont bien définis et vérifient $R_n = \ell - S_n$.

Comme les suites sont adjacentes, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p}$, donc $\left|R_{2p}\right| = S_{2p} - \ell \leq S_{2p} - S_{2p+1} = \alpha_{2p+1}$, et aussi $S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p+2}$, donc $\left|R_{2p+1}\right| = \ell - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = \alpha_{2p+2}$. Cela se résume ainsi :

Théorème 73 ***(Majoration du reste)***
Pour une série alternée $\sum(-1)^n\alpha_n$ ***qui vérifie les hypothèses du critère de Leibniz****, la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme négligé :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq \alpha_{n+1}.$$

Exemple 74 On a ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1}$.