Calcul de primitives

Exercice 1 Calculer les primitives suivantes :

1. $\int x^2 \mathrm{th}\,(x^3)\,\mathrm{d}x$
2. $\int x^3 \sin(5x^4+2)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)\sqrt{1-\tan^2(x)}}$
5. $\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^7(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\int 2x\sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$ pour $a>0$, $\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2

1. Déterminer quatre constantes réelles a, b, c et d telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus(\pm 1)$,
$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$
2. Calculer $\int \frac{x^3+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 Calculer les primitives suivantes :
$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x, \quad \int (2t^2-1)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 Trouver une formule de récurrence pour les nombres $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{Arcsin}\,x\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{Arctan}\,(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6

1. Pour $x \in]-\pi,\pi[$, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, montrer que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ à l'aide du changement de variables “$x = 2\mathrm{Arctan}\,(t)$”.
3. Plus généralement, calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\pi[$.

4. En déduire les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1+\sin x}$ sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x$ en se ramenant, par un changement de variables, à une intégrale de $\sqrt{u^2-1}$, puis en effectuant un autre changement de variables judicieux (penser aux fonctions trigonométriques hyperboliques).

On exprimera le résultat en fonction du nombre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\operatorname{ch}(\alpha) = 3$ après avoir justifié son existence et unicité.

Réponse $12\sqrt{2}-2\alpha$.