Devoir numéro 15, à rendre le lundi 18 mars 2023

Il est demandé d'apporter le plus grand soin à la précision de la rédaction.

Les résultats démontrés ici forment une partie du cours sur les applications linéaires. À ce titre, il devront être connus parfaitement et seront au prochain progamme de colle. Le fait que je vous demande de les découvrir par vous même doit être vu comme une méthode pédagogique et non comme une indication que ces résultats sont de moindre importance que le reste du cours : ils sont bien au contraire primordiaux !

Projections et symétries vectorielles

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Définitions et propriétés

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, *i.e.* vérifiant

$$\forall x \in E, \exists\,!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G.$$

On appelle *projection sur F parallèlement à G* et *projection sur G parallèlement à F* les deux applications

$$p_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p_G : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_G \end{array} \right. .$$

1. Montrer que p_F et p_G sont des endomorphismes de E.

On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* et *symétrie par rapport à G parallèlement à F* les deux applications

$$s_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right. \quad \text{et} \quad s_G : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_G - x_F \end{array} \right. .$$

2. Exprimer s_F et s_G en fonction de p_F et p_G et en déduire que ce sont des endomorphismes de E.
3. Calculer $p_F + p_G$ et $s_F + s_G$.
4. En déduire une expression de s_F en fonction de p_F, mais plus de p_G, puis une expression de s_F en fonction de p_G, mais plus de p_F. Faire de même pour s_G.
5. Exprimer p_F en fonction de s_F, mais pas de s_G, puis en fonction de s_G, mais pas de s_F. Faire de même pour p_G.
6. Déterminer les noyaux et images des applications p_F, p_G, s_F et s_G.
7. Déterminer $\operatorname{Ker}(p_F - \operatorname{Id}_E)\,(= \{x \in E | p_F(x) = x\})$ et $\operatorname{Ker}(p_G - \operatorname{Id}_E)$.
8. Déterminer $\operatorname{Ker}(s_F - \operatorname{Id}_E)$, $\operatorname{Ker}(s_F + \operatorname{Id}_E)$, $\operatorname{Ker}(s_G - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s_G + \operatorname{Id}_E)$.

2 Exemples

1. On prend ici $E = \mathbb{R}^2$, $F = \operatorname{Vect}((1,0))$ et $G = \operatorname{Vect}((1,1))$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
   (b) Expliciter les images de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par les applications p_F, p_G, s_F et s_G.

   (c) Représenter sur un graphique le vecteur $(3,2)$ et ses images par toutes ces applications.
   (d) Faire de même sur un autre graphique pour le vecteur $(-1,2)$.

2. On prend ici $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ et $G=\mathrm{Vect}((1,1,1))$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.
   (b) Expliciter les images de $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par les applications p_F, p_G, s_F et s_G.
   (c) Représenter soigneusement sur un graphique (en perspective) le vecteur $(1,-1,1)$ et ses images par toutes ces applications.

3. On prend ici $E=\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}$ et I sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^\mathbb{R}=\mathcal{P}\oplus I$.
   (c) Expliciter les images de $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ par les applications $p_\mathcal{P}$, p_I, $s_\mathcal{P}$ et s_I.
   (d) Les calculer pour $f : x\longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$.

3 Caractérisations

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On note ici $f^2=f\circ f$.

1. Montrer que f est une projection vectorielle si et seulement si $f^2=f$ (on dit que f est *idempotente*). Préciser dans ce cas les sous-espaces caractéristiques de cette projection, *i.e.* celui sur lequel on projette et celui parallèlement auquel on projette.

Remarquons qu'on appelle parfois *projecteur* un endomorphisme idempotent de E. Dans ce cas, le résultat ci-dessus s'énonce ainsi : *les projecteurs sont les projections*.

2. Montrer que f est une symétrie vectorielle si et seulement si $f^2=\mathrm{Id}_E$ (on dit que f est *involutive*, ou est une *involution*). Préciser dans ce cas les sous-espaces caractéristiques de cette symétrie, *i.e.* celui par rapport auquel on symétrise et celui parallèlement auquel on symétrise.
3. Soit f l'application définie par

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & & \\ \frac{3}{4}x & -\frac{1}{20}y & +\frac{3}{20}z \\ \frac{1}{4}x & -\frac{7}{20}y & +\frac{21}{20}z \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

   Montrer brièvement que l'application f est un endomophisme de $\mathbb{R}^3$ et en donner une interprétation géométrique.