Devoir numéro 5, à rendre le vendredi 20 octobre 2023

1 Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit la fonction cosinus hyperbolique par $\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, la fonction sinus hyperbolique par $\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et la fonction tangente hyperbolique par $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.

1. Donner des expressions simples des fonctions $\mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ et $\mathrm{ch} - \mathrm{sh}$.
2. Les graphes de ch et sh admettent-ils des symétries ?
3. Montrer que ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer simplement leur dérivées.
4. En déduire leurs variations.
5. Déterminer leurs limites en $\pm\infty$.
6. Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{sh}\,(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq \mathrm{ch}\,(x)\right)$ et déterminer le comportement de $\mathrm{ch} - \mathrm{sh}$ au voisinage de $+\infty$.
7. Tracer leurs graphes dans un même repère orthonormé.
8. Faire une étude complète de la fonction th.

2 Trigonométrie hyperbolique

Soient a et b dans $\mathbb{R}$.

1. Exprimer à l'aide de la fonction exponentielle $\mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b$, $\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b$, $\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b$ et $\mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b$, puis en déduire des expressions de $\mathrm{ch}\,(a+b)$ et $\mathrm{sh}\,(a+b)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,a$, $\mathrm{sh}\,a$, $\mathrm{ch}\,b$ et $\mathrm{sh}\,b$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur de $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.
3. Déduire de la première question une expression de $\mathrm{th}\,(a+b)$ en fonction uniquement de $\mathrm{th}\,(a)$ et $\mathrm{th}\,(b)$.
4. Pour $p, q \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q$ sous la forme $2f\left(\frac{p+q}{2}\right) g\left(\frac{p-q}{2}\right)$, où f et g sont des fonctions trigonométriques hyperboliques à déterminer.

3 Fonction Argth

1. Montrer que la fonction th admet une fonction réciproque dérivable, qu'on notera Argth et dont on précisera l'ensemble de définition D_{Argth}.
2. Montrer que pour tout $x \in D_{\mathrm{Argth}}$, $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Retrouver ainsi les variations de Argth et donner ses limites aux bornes de D_{Argth}.
3. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$
4. On rappelle qu'une *primitive* d'une fonction f est une fonction F dérivable telle que $F' = f$.
Trouver une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.
5. En déduire une expression de Argth à l'aide de la fonction ln.

4 Fonctions de variables complexes

On étend la fonction exponentielle en une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, qu'on note encore exp, par la formule suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Im} z)\right).$$

On étend ensuite ch, sh, cos et sin en des applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par les formules suivantes, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}, \operatorname{sh}(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}, \cos(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)+\exp(-\mathrm{i}z)}{2}, \sin(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)-\exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que, pour $a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, exprimer les valeurs de ch, sh, cos et sin en $-z$ à l'aide de leurs valeurs en z.
3. Démontrer que les formules de la section 2 s'étendent à $\mathbb{C}$.
4. Pour $z \in \mathbb{C}$, exprimer $\cos(z)$ et $\sin(z)$ avec ch et sh, puis $\operatorname{ch}(z)$ et $\operatorname{sh}(z)$ avec cos et sin.
5. En déduire, pour $a, b, z, p, q \in \mathbb{C}$, des formules pour
   (a) $\cos(a+b)$;
   (b) $\sin(a+b)$;
   (c) $\tan(a+b)$;
   (d) $\cos^2(z) + \sin^2(z)$;
   (e) $\sin(p) - \sin(q)$.
6. Expliquer comment "déduire" toute formule de trigonométrie hyperbolique de la formule de trigonométrie classique correspondante.