Structures algébriques usuelles

Lycée Berthollet 2023-2024

Ce chapitre comporte essentiellement du vocabulaire, mais il est intéressant de faire jouer les élèves avec les propriétés de base pour les habituer aux manipulations abstraites.

I Lois de composition internes

1 Définition et exemples

Définition d'une LCI, d'un magma.

Exemples : $+$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\times$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$, $\circ$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sur l'ensemble des bijections d'un ensemble dans lui-même, addition "sans retenue" sur $\mathbb{N}$, produit vectoriel, addition et multiplication des matrices 2×2, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$ sur $\mathcal{P}(E)$, pgcd sur $\mathbb{Z}$, le produit scalaire n'est pas une LCI.

2 Propriétés des LCI

Associativité, commutativité, élément neutre, symétrique (inverse, opposé), distributivité d'une loi par rapport à une autre. Test sur les exemples précédents.

Unicité du neutre. En cas d'associativité : unicité du symétrique, symétrisabilité d'un produit de symétrisables et formule. Test de ces propriétés sur certains des exemples précédents.

3 Construction de nouvelles LCI

Définition d'une partie stable par une LCI et notion de loi induite sur cette partie.

Produit cartésien de deux LCI.

Étant donné une LCI sur M et E un ensemble, loi "produit" sur M^E.

II Groupes

1 Structure de groupe

Définition. Notion de groupe commutatif (ou abélien). Notations additive (seulement dans le cas abélien) et multiplicative, notation correspondante nx et x^n pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in G$.

Test des exemples de LCI précédents. Autres groupes multiplicatifs $\{\pm 1\}$, $\mathbb{Q}^\star$, $\mathbb{Q}_+^\star$, $\mathbb{R}^\star$, $\mathbb{R}_+^\star$, $\mathbb{C}^\star$. Groupes produits $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Groupe des similitudes directes du plan. Groupe $GL_2(\mathbb{K})$ et formule explicite de l'inverse, notation $\det(A)$. Groupe $\mathcal{S}_X$ des permutations d'un ensemble X.

Groupe $\mathcal{S}_n$: notation d'une permutation sous forme de matrice $2 \times n$, notion de cycle, pratique de la décomposition en produit de cycles disjoints (résultat théorique admis), description de $\mathcal{S}_n$, pour $n \in [\![1,4]\!]$.

2 Sous-groupes

Définition comme partie stable telle que la loi induite en fasse un groupe.

Exemples : le sous-groupe des similitudes directes formé des homothéties et translations, sous-groupe des permutations de X qui fixent un point, si $F \subset E$, $(\mathcal{P}(F), \triangle)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{P}(E), \triangle)$, sous-groupe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes, des suites convergeant vers 0.

Caractérisations des sous-groupes H de G : (H non vide et stable par produit et passage à l'inverse) ou (H contenant le neutre de G et $\forall (x,y) \in H^2, xy^{-1} \in H$), démonstration au passage que le neutre de H est forcément celui de G.

Exemple : les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

3 Morphismes de groupes

Définition. Préservation du neutre et du symétrique. Composition de morphismes. Exemples : injection canonique d'un sous-groupe, morphismes de $\mathbb{Z}$ vers un groupe G, déterminant sur $GL_2(\mathbb{K})$, $\widetilde{\exp}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^\star$, $\widetilde{\widetilde{\exp}}$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^\star$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{U}$, cas d'une application linéaire explicite de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et de l'intégrale entre 0 et 1 des fonctions continues et évocation d'une "surstructure" (espace vectoriel) préservée.

Images directes et réciproques de sous-groupes par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme de gtoupes. Caractérisation de la surjectivité par l'image et de l'injectivité par le noyau. Images et noyaux des exemples précédents.

Notion d'isomorphisme, d'automorphisme. L'application réciproque est automatiquement un morphisme. Exemples : $\widetilde{\exp}$ et ln, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (en définissant à la main l'addition des classes modulo 4) et $\mathbb{U}_4$, automorphismes de conjugaison sur un groupe $(G, \cdot)$, évocation rapide du théorème de Cayley : tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

En avant-première admise et **non exigible** : il existe un unique morphisme non trivial de $\mathcal{S}_n$ vers $\{\pm 1\}$ lorsque $n \geq 2$, la signature d'un r-cycle est alors $(-1)^r$ et la signature d'une permutation se calcule aisément à l'aide de la décomposition en cycles. Son noyau est le groupe alterné $\mathcal{A}_n$, sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

III Anneaux et corps

1 Anneaux

Définition d'un anneau ($(A,+)$ groupe abélien (neutre 0), $\times$ associative et ayant un neutre $1 \neq 0$, distributivité de $\times$ par rapport à $+$ à gauche et à droite).

Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_2(\mathbb{R})$, $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ en liaison avec $\{0,1\}^E$ par construction de la seule structure d'anneau sur l'ensemble à deux éléments.

Propriété : 0 est absorbant.

Formules de Bernoulli et du binôme de Newton lorsque deux éléments commutent (démonstration à revoir en exo car identique à celle sur $\mathbb{C}$).

Groupe $(A^\times, \times)$ des éléments inversibles d'un anneau.

2 Corps

Définition d'un corps : anneau commutatif tel que $K^\times = K \setminus \{0\}$.
Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\{0,1\}$, mais pas $\mathbb{Z}$, $M_2(\mathbb{R})$.

3 Sous-anneaux et morphismes

Définition : un sous-anneau est un sous-groupe additif qui contient 1 et est stable par multiplication. Exemple des ensembles de nombres.

Caractérisation d'un sous anneau : il contient le neutre multiplicatif et est stable par addition, passage à l'opposé et produit.

Définition d'un morphisme d'anneau : il envoie 1 sur 1 et préserve addition et multiplication. Image, noyau, isomorphismes. Image d'un corps par un morphisme d'anneaux.