Polynômes

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-2024

Il a été fait avant le cours une séquence exploratoire visant à motiver la distinction entre polynômes et fonctions polynômes (pour cela, on a considéré des polynômes sur le corps à deux éléments) et à faire construire par la classe une définition cohérente des objets “polynômes” et des opérations sur ces objets.

Cependant, on considère pour le cours les seuls polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), conformément au programme.

I Anneau $\mathbb{K}[X]$

Définition de l’addition (rappel) et d’une nouvelle LCI $\star$ (pour les initiés, la convolution) sur l’ensemble des suites d’éléments de $\mathbb{K}$ presque nulles (*i.e.* nulles à partir d’un certain rang). On obtient ainsi un anneau commutatif, appelé *anneau des polynômes à une indéterminée sur* $\mathbb{K}$. En notant la loi $\star$ multiplicativement et $X = (0,1,0\ldots)$, on a $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$, en considérant que la somme ne porte que sur les termes non nuls (qui sont en nombre fini). On **oublie** alors les notations initiales, pour ne travailler qu’avec ce nouveau formalisme. Identification de $\mathbb{K}$ avec les polynômes “constants” (ainsi $X^0 = 1_{\mathbb{K}}$).

Définition du degré d’un polynôme ($\mathrm{d}^\circ 0 = -\infty$). Si P est non nul de degré d, $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, ce qui permet de retrouver les règles de calcul usuelles sur les polynômes. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$, coefficient dominant, polynômes unitaires, degré d’une somme et d’un produit. Composition de polynômes, notations $Q \circ P = Q(P)$ (qui justifie au passage que $P = P(X)$), degré d’une composée.

II Divisibilité

Définition, propriétés de la relation $|$: réflexivité, transitivité, combinaison linéaire, produit membre à membre, caractérisation des couples de polynômes se divisant mutuellement (polynômes associés).

Théorème de division euclidienne.

III Fonctions polynomiales et racines

Définition de la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée à P, fonction polynomiale associée à une combinaison linéaire, un produit, une composée.

Sans identifier polynômes et fonctions polynômes, on appelle cependant *évaluation du polynôme P en* $\lambda \in \mathbb{K}$ la valeur $\widetilde{P}(\lambda)$, qu'on note aussi $P(\lambda)$, ce qui est correct par composition avec le polynôme constant λ.

Notion de racine. Un scalaire λ est une racine de P ssi $(X - \lambda)|P$. Un polynôme non nul a au plus $\mathrm{d}^\circ P$ racines. Si $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$, alors $P = Q$ (car $\mathbb{K}$ est infini). Multiplicité d'une racine (0 pour une non-racine) , racine simple.

Polynôme scindé : produit d'une constante non nulle et d'un produit (éventuellement vide) de polynômes unitaires de degré 1 (en particulier, les polynômes de degré 0 sont scindés). Racines décrites avec ou sans multiplicité et écritures correspondantes pour le polynôme scindé. Pour un polynôme scindé, relations entre coefficients et racines (formules de Viète).

IV Dérivation

Définition du polynôme dérivé d'un polynôme, $\widetilde{P'} = (\widetilde{P})'$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, opérations sur les dérivées : combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz, composition. Si P est non nul de degré d, $P^{(d)} \in \mathbb{K}^*$ et $P^{(d+1)} = O$.

Primitives d'un polynôme. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine de P en termes des dérivées de P.

V Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

On reprend rapidement le plan de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et les élèves sont priés de vérifier les détails : définition d'un PGCD ("par la divisibilité"); théorème d'existence et d'"unicité" du PGCD ($A \wedge B$ est le PGCD unitaire) et relation de Bézout; pour A et B non tous deux nuls, les PGCD sont les diviseurs communs de degré maximal; algorithme d'Euclide; polynômes premiers entre eux; théorème de Bézout, de Gauss, de la divisibilité par produit; extension du PGCD à plus de deux polynômes, théorème d'existence et d'"unicité", relation de Bézout; définition des PPCM, théorème d'existence et d'"unicité" et lien avec le PGCD.

VI Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Définition, ceux de degré 1 le sont. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: théorème de d'Alembert-Gauss (admis) et conséquences : tout polynôme non nul est scindé, les irréductibles sont ceux de degré 1, caractérisation de la divisibilité en termes de racines et multiplicité, existence et "unicité" de la décomposition. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: description des polynômes irréductibles, théorème de décomposition.

VII Interpolation de Lagrange

Présentation du problème, existence et unicité de la solution de degré convenable, description de toutes les solutions.

VIII Fractions rationnelles

1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Définition de la relation classique sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$, c'est une relation d'équivalence et, sur l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des classes d'équivalence, on peut définir de manière cohérente une addition et une multiplication qui en font un corps. Toutes les vérifications ont été laissées aux élèves. Notation $\frac{P}{Q}$ permettant de faire les calculs suivant les règles usuelles sur les fractions, injection de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$ et notation $\frac{P}{1} = P$. Écriture sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$ d'une fraction avec $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire.

2 Fonctions rationnelles

Si $F \in \mathbb{K}(X)$, la fonction rationnelle associée $\widetilde{F}$ est obtenue en prenant la **forme irréductible** $\frac{P}{Q}$ de F et en considérant la fonction qui à tout $x \in \mathbb{K}$ non racine de Q associe $\frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$. Abus de notation : ici, de la même manière que pour les polynômes, on notera assez rapidement $F(x)$ au lieu de $\widetilde{F}(x)$ pour l'*évaluation* de la fraction rationnelle F en x. Comme $\mathbb{K}$ est infini, si $\widetilde{F} = \widetilde{G}$, alors $F = G$.

3 Degré d'une fraction rationnelle

Degré d'une fraction rationnelle et partie entière (qui ne dépendent pas du représentant choisi), zéros et pôles (après mise sous forme irréductible) d'une fraction rationnelle et leur multiplicités.

4 Décomposition en éléments simples

Théorèmes réels et complexes d'existence et d'unicité de la décomposition admis. Aucune pratique pour l'instant. (Ils ont appris au moment des primitives à traiter le cas des pôles simples par multiplication-évaluation.) Mutilplication-évaluation : la seule méthode de décomposition explicitement au programme est celle consistant à déterminer le ou les coefficients d'un élément simple comportant un polynôme irréductible P à la puissance maximale α en multipliant l'égalité par P^α puis en évaluant en une racine de P. On soustrait alors l'élément simple déterminé à l'égalité et on recommence.

Décomposition de $\frac{P'}{P}$ pour $P \neq 0$ à l'aide du morphisme "dérivée logarithmique" $P \longmapsto \frac{P'}{P}$ de $(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \cdot)$ dans $(\mathbb{K}(X), +)$.

Deux démonstrations

Théorème 1 $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (Q \circ P)' = (Q' \circ P)P'$.

Ce théorème est une conséquence *immédiate* [1] du résultat sur la dérivation d'une combinaison linéaire de polynômes et du lemme suivant :

Lemme 2 $\forall P \in \mathbb{K}[X], \begin{cases} (P^0)' = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, (P^n)' = nP^{n-1}P' \end{cases}$

Démonstration: Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a, par définition des puissances de polynômes, $P^0 = 1$ et donc $(P^0)' = 0$.

On prouve ensuite par récurrence que la propriété $\mathcal{A}_n$: $\left(\forall P \in \mathbb{K}[X], (P^n)' = nP^{n-1}P'\right)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
Initialisation : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $(P^1)' = P' = 1 \cdot P^0 \cdot P'$, donc $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est vérifiée.}}$
Héridité : on suppose que $\mathcal{A}_n$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. En appliquant le résultat concernant la dérivation d'un produit et l'hypothèse de récurrence, on a

$$(P^{n+1})' = (PP^n)' = P'P^n + P(nP^{n-1}P') = (P^n + nP^n)P' = (n+1)P^nP'.$$

La propriété $\boxed{\mathcal{A}_{n+1} \text{ est donc vérifiée.}}$

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{A}_n$ est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Théorème 3 ***(Formule de Taylor polynômiale au point*** $a \in \mathbb{K}$***)***
Pour tous $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on a $P = \sum_{k=0}^{\mathrm{d}^\circ P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Démonstration: On raisonne par récurrence sur le degré d de P, en posant, pour $d \in \mathbb{N}$, l'assertion de récurrence $\mathcal{A}_d$: "Pour tout polynôme P de degré d, $P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$".
Initialisation : Si $\mathrm{d}^\circ P = 0$, P est un polynome constant, donc $P = P(a) = \sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
Donc la proposition $\boxed{\mathcal{A}_0 \text{ est vérifiée.}}$
Hérédité : Supposons que $\mathcal{A}_d$ soit vérifiée pour un certain $d \in \mathbb{N}$. Soit alors $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d+1$. Comme P' est de degré d, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence ce qui donne

$$P' = \sum_{k=0}^{d} \frac{(P')^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

En primitivant cette égalité, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(X-a)^{k+1} + \lambda.$$

En évaluant les deux membres en a, on obtient $P(a) = 0 + \lambda$, donc $\lambda = P(a)$ et

$$P = P(a) + \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(X-a)^{k+1} = P(a) + \sum_{j=1}^{d+1} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(X-a)^j = \sum_{j=0}^{d+1} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(X-a)^j.$$

1. Vous assurer cependant que vous sauriez le détailler...

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{d+1} \text{ est vérifiée.}}$

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\mathcal{A}_d \text{ est vérifiée pour tout } d \in \mathbb{N}.}$ $\square$

Remarque 4 Avec les notations ci-dessus, **pour tout** $n \geq \mathrm{d}^\circ P$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. En effet, les termes rajoutés à la somme initiale sont tous nuls puisque $P^{(k)} = 0$ pour $k > \mathrm{d}^\circ P$.

Remarque 5 Avec les conventions que $\mathrm{d}^\circ 0 = -\infty$ et qu'une somme vide est nulle, la formule de Taylor est encore valable pour le polynôme nul.