Question 1

Pour Ω l'univers, on a : $\forall\alpha \in \{r, v, b\}, X_\alpha(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

Pour le dé rouge comme on a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de tomber sur 4 et que les autres sont équiprobables il existe un $k \in [0, 1]$ tel que :
Comme $P(X_r \in X_r(\Omega)) = 1$ et par additivité disjointe :

$$\sum_{i=1}^{4} P(X_r = i) = \frac{1}{2} + 3k = 1$$

Alors, $P(X_r = 1) = P(X_r = 2) = P(X_r = 3) = k = \frac{1}{6}$

Comme les dés verts sont équilibrés leurs résultat sont équiprobables, on a directement :

$$\forall k \in [\![1, 4]\!], P(X_v = k) = \frac{1}{4}$$

On note $p \in [0, 1]$ (respectivement $i \in [0, 1]$) la probabilité de tomber sur un résultat pair (respectivement impair)

Comme le nombre de face paire et impaire forment distinctement des faces différentes du dé, d'après l'additivité disjointe :

$$p + i = 1$$

Et comme $p = 2i$ d'après l'énoncé,

$$\begin{cases} i = \frac{1}{3} \\ p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Comme les résultats pairs sont équiprobables et les résultats impairs sont équiprobables et qu'on a exactement 2 faces paires et impaires :

$$\begin{cases} P(X_b = 1) = P(X_b = 3) = \frac{1}{6} \\ P(X_b = 2) = P(X_b = 4) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

On a ainsi la loi de toutes les variables aléatoires réelles (VAR) :

α	$P(X_\alpha = 1)$	$P(X_\alpha = 2)$	$P(X_\alpha = 3)$	$P(X_\alpha = 4)$
r	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
v	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
b	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Question 2

a)

```
def Xr():
        tmp = randint(1, 3)
```

```
        if tmp == 1 :
                return 4
        else :
                return randint(1, 4)

def Xv():
        return randint(1, 5)

def Xb():
        tmp = randint(1, 4)
        tmp2 = randint(1, 3)
        if tmp == 1 :
                if tmp2 == 1 :
                        return 1
                else :
                        return 3
        else :
                if tmp2 == 2 :
                        return 2
                else :
                        return 4
```

b)

On vérifie la fréquence d'apparition des valeurs entre 1 et 4 en répétant un grand nombre de fois $n \in \mathbb{N}$ le lancé de dé.

```
def valide(Xa, n):
        def frequenceApparition(Xa, n):
```

```
                '''Calcul le nombre d'apparition
de chaque valeur entre 1 et 4 de la VAR Xa '''
                frequenceApparition = [0, 0, 0,
0]
                while n > 0:

frequenceApparition[Xa()-1] += 1
                        n -= 1
                return frequenceApparition

        # Transforme les fréquences d'apparition
en probabilité :
        freqApp = frequenceApparition(Xa, n)
                for i in range(len(freqApp)):
                        freqApp[i] = freqApp[i]/n

        return freqApp
```

Appliquer la fonction aux trois VAR :

```
print(valide(Xr, 1000000), valide(Xv, 1000000),
valide(Xb, 1000000))
```

On obtiens bien approximativement les probabilités voulues.

Question 3

On définit l'univers :

Ω : "On tire un unique dé"

On note les événements :

$$\begin{cases} R : \text{"Tirer un dé de couleur Rouge"} \\ V : \text{"Tirer un dé de couleur Vert "} \\ B : \text{"Tirer un dé de couleur Bleu "} \end{cases}$$

Comme,

$R \sqcup V \sqcup B = \Omega$

(car l'urne ne contient que des dés rouge, verts et bleus)

et

$R \cap V = \varnothing$ et $R \cap B = \varnothing$ et $V \cap B = \varnothing$

(car on ne tire qu'un dé et que les dés sont d'une couleur unie)

(R, V, B) est bien un système complet d'événements :

On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in [\![1, 4]\!],$$

$$P(X = i) = \sum_{E \in \{R, V, B\}} P(E) P((X = i) | E) = \sum_{\alpha \in \{r, v, b\}} p_\alpha P(X_\alpha = i)$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} P(X = 1) = \frac{1}{6} p_r + \frac{1}{4} p_v + \frac{1}{6} p_b \\ P(X = 2) = \frac{1}{6} p_r + \frac{1}{4} p_v + \frac{1}{3} p_b \\ P(X = 3) = \frac{1}{6} p_r + \frac{1}{4} p_v + \frac{1}{6} p_b \\ P(X = 4) = \frac{1}{2} p_r + \frac{1}{4} p_v + \frac{1}{3} p_b \end{cases}}$$

Par la définition de l'espérance :

$$m = \sum_{x \in \{1,2,3,4\}} xP(X = x)$$

Donc,

$$\begin{array}{lcccc} m & = & \frac{1}{6}p_r & +\frac{1}{4}p_v & +\frac{1}{6}p_b \\ & + & \frac{1}{3}p_r & +\frac{1}{2}p_v & +\frac{2}{3}p_b \\ & + & \frac{1}{2}p_r & +\frac{3}{4}p_v & +\frac{1}{2}p_b \\ & + & 2\ p_r & +\ \ p_v & +\frac{4}{3}p_b \end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{m = 3p_r + \frac{5}{2}p_v + \frac{7}{2}p_b}$$

Par la définition de la variance :

Comme l’espérance est linéaire :

$$\sigma^2 = E((X - m)^2) = E(X^2) - E(mX) + m^2 = E(X^2)$$

Alors,

Comme l'espérance ne dépend que de la loi, il suffit de trouver la loi de X^2 :

Comme on a :

$$\begin{cases} (X^2 = 1) = (X = 1) \\ (X^2 = 4) = (X = 2) \\ (X^2 = 9) = (X = 3) \\ (X^2 = 16) = (X = 4) \end{cases}$$

$(\text{car } X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\} \text{ On a aucun chiffre négatif})$

Donc,

$$\begin{cases} P(X^2 = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}p_r + \frac{1}{4}p_v + \frac{1}{6}p_b \\ P(X^2 = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{6}p_r + \frac{1}{4}p_v + \frac{1}{3}p_b \\ P(X^2 = 9) = P(X = 3) = \frac{1}{6}p_r + \frac{1}{4}p_v + \frac{1}{6}p_b \\ P(X^2 = 16) = P(X = 4) = \frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_v + \frac{1}{3}p_b \end{cases}$$

Ainsi, par la définition de l'espérance :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sigma^2 & = \frac{1}{6}p_r & +\frac{1}{4}p_v & +\frac{1}{6}p_b \\ & +\frac{2}{3}p_r & + \quad p_v & +\frac{4}{3}p_b \\ & +\frac{3}{2}p_r & +\frac{9}{4}p_v & +\frac{3}{2}p_b \\ & +8p_r & +4p_v & +\frac{16}{3}p_b \end{array}}$$

Question 4

Comme on tire avec remise on a bien : $X \sim Y \sim Z$
et X, Y, Z sont mutuellement indépendantes.
On a comme l'espérance est linéaire :

$$E(W) = E(X^2) + E((Y + Z)^2) + 2E(X(Y + Z))$$

Ensuite

$E(W) = \sigma^2 + E(Y^2) + E(Z^2) + 2E(YZ) + 2E(XY) + 2E(XZ)$

Donc, comme l'espérance ne dépend que de sa loi ($E(X) = E(Y) = E(Z)$) et que X, Y et Z sont deux a deux indépendantes, on a :

$$E(W) = \sigma^2 + 6m^2 + E(Y^2) + E(Z^2)$$

Comme la variance ne dépend que de la loi :

$$\sigma^2 = E((Y - E(Y))^2) = E(Y^2) - 2E(YE(Y)) + E(E(Y)^2)$$

Alors,

$$E(Y^2) = \sigma^2 + 3m^2$$

Par analogie : $E(Z^2) = \sigma^2 + 3m^2$
Ainsi,

$$\boxed{E(W) = 3\sigma^2 + 12m^2}$$

$$E(T) = E(XYZ)$$

Comme X, Y et Z sont mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions, (XY) et Z sont indépendantes alors,

$$E((XY)Z) = E(XY)E(Z) = E(X)E(Y)E(Z)$$

et comme $X \sim Y \sim Z$,

$$E(T) = E(X)^3 = m^3$$

Ainsi,

$$\boxed{E(T) = m^3}$$

Question 5

En utilisant les notations de la Question 3 :
Comme (R, V, B) est un système complet d'événement et que $P(X = 4) \neq 0$ par la question 3,
Par la formule de Bayes :

$$P(R|(X = 4)) = \frac{P(R)P((X = 4)|R)}{P(X = 4)}$$

Or la probabilité que le résultat du dé tiré soit 4 sachant qu'il est rouge est $P(X_r = 4)$
Ainsi,

$$P(R|(X = 4)) = p_r \frac{P(X_r = 4)}{P(X = 4)} = \frac{p_r}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}p_r + \frac{1}{4}p_v + \frac{1}{3}p_b}$$

Alors,

$$\boxed{P(R|(X = 4)) = \frac{p_r}{p_r + \frac{1}{2}p_v + \frac{2}{3}p_b}} = \frac{24}{35}$$

Question 6

On note pour $\alpha \in \{r, v, b\}$: $m_{\alpha+1}$ l'espérance lorsqu'on a ajouté un dé de couleur α à l'urne.

On ajoute un dé rouge dans l'urne

On a alors :

$$m_{r+1} = \frac{3(N_r+1) + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b}{N+1}$$

Alors,

$$m_{r+1} = \frac{3N_r + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b}{N+1} + \frac{3}{N+1}$$

Comme,

$$m = \frac{3N_r + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b}{N}$$

Alors,

$$\begin{aligned} m_{r+1} - m \quad &= \tfrac{3}{N+1} - \tfrac{3N_r + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b}{N(N+1)} \\ &= \tfrac{3}{N(N+1)} \times \left(N - \left(N_r + \tfrac{5}{6}N_v + \tfrac{7}{6}N_b\right)\right) \\ &= \tfrac{3}{N(N+1)} \times \left(N_v + N_b - \tfrac{5}{6}N_v - \tfrac{7}{6}N_b\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$m_{r+1} - m = \frac{1}{2N(N+1)} \times (N_v - N_b)$$

Comme $\frac{1}{2N(N+1)} > 0$,

Ainsi, l'espérance dépendra donc du nombre de boules vertes et du nombre de boules bleues

- Si $N_v > N_b$, l'espérance va donc augmenter si on ajoute une boule rouge.
- Si $N_v < N_b$ l'espérance diminuera.
- Si $N_v = N_b$ elle restera la même.

On ajoute un dé vert dans l'urne

Par analogie au raisonnement précédent on a :

$$m_{v+1} - m = \frac{1}{2N(N+1)} \times -(2N_b + N_r)$$

Ainsi,
Comme $\frac{2N_b+N_r}{2N(N+1)} \geq 0$ Car $N_b \geq 0$, $N_r \geq 0$ et $N > 0$

- Si $N_b = N_r = 0$, l'espérance reste la même
- Sinon,l'espérance diminue

On ajoute un dé bleu dans l'urne

Par analogie au raisonnement précédent on a :

$$m_{b+1} - m = \frac{1}{2N(N+1)} \times (N_r + 2N_v)$$

Comme N, N_r et N_v sont positifs,
$m_{b+1} - m_r \geq 0$

Ainsi,

- <u>Si</u> $N_v = N_r = 0$, <u>l'espérance reste la même</u>
- <u>Sinon, l'espérance augmente</u>

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,
Pour $\alpha \in \{r, v, b\}$ on note $m_{\alpha+k}$ l'espérance de X lorsqu'on ajoute k dés de couleur α.
Comme :

$$m_{r+k} = \frac{3N_r + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b}{N+k} + \frac{3k}{N+k}$$

et que $3N_r + \frac{5}{2}N_v + \frac{7}{2}N_b$ et N sont des constantes
On a :

$$\lim_{k \to +\infty} m_{r+k} = \frac{3k}{N+k} = \frac{3}{\frac{N}{k} + 1} = 3$$

Par analogie :

$$\lim_{k \to +\infty} m_{v+k} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{N}{k} + 1} = \frac{5}{2}$$

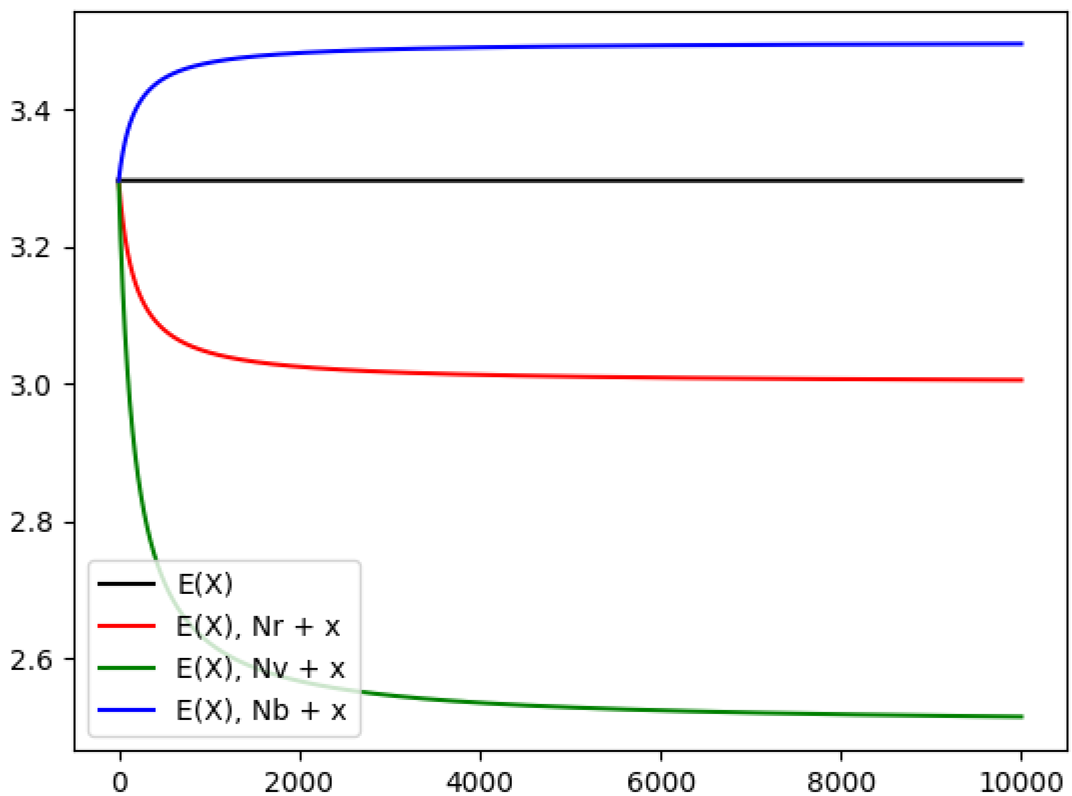
et

$$\lim_{k \to +\infty} m_{b+k} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{N}{k} + 1} = \frac{7}{2}$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\forall \alpha \in \{r, v, b\}, \lim_{k \to +\infty} m_{\alpha+k} = \sum_{i=1}^{4} iP(X_\alpha = i)z = E(X_\alpha)}$$

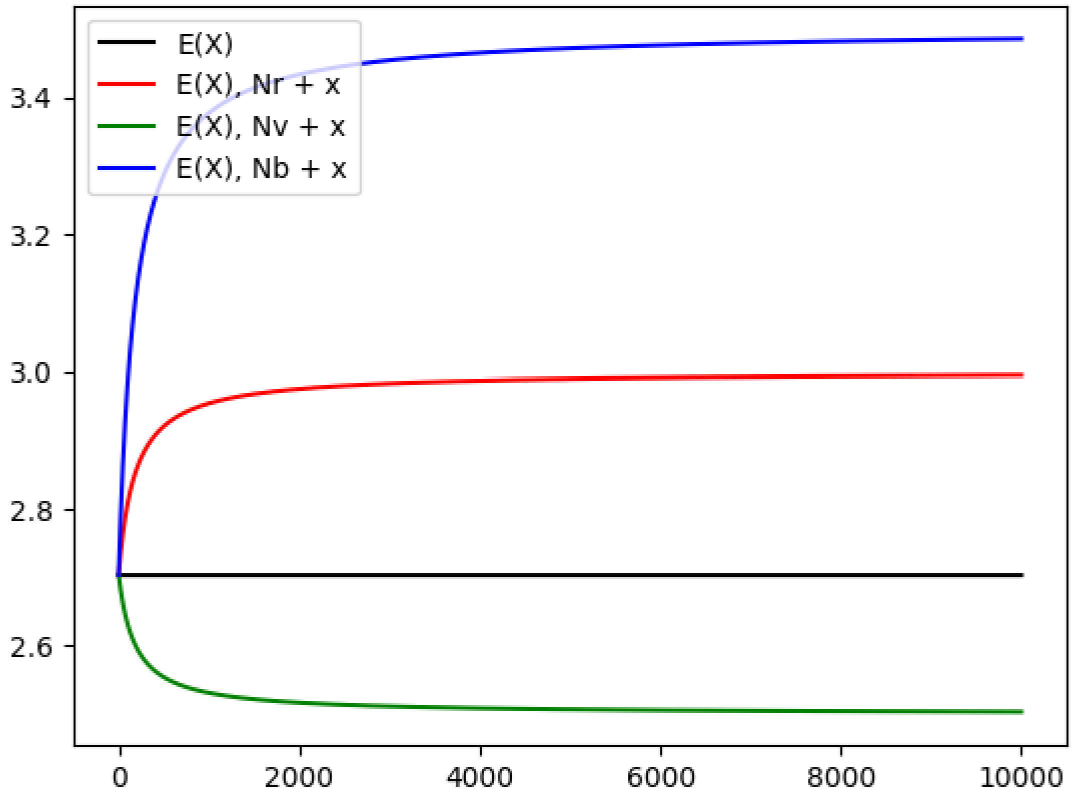
On Prends le cas ou $N_v < N_b$



On a bien pour $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} m \geq m_{r+x} \\ m \geq m_{v+x} \\ m \leq m_{b+x} \end{cases}$$

On Prends le cas ou $N_v > N_b$



On a bien pour $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} m \leq m_{r+x} \\ m \geq m_{v+x} \\ m \leq m_{b+x} \end{cases}$$

Question 7

Comme les tirages sont physiquement indépendants car on tire avec remise, R, V et B sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Mais comme :

$$P(R=4, V=5, B=6) = P((R=4) \cap (V=5) \cap (B=6))$$

et que R, V et B sont mutuellement indépendantes :

$$P(R=4, V=5, B=6) = P(R=4)P(V=5)P(B=6)$$

or

- $P(R=4) = \frac{4}{15} = \frac{N_a}{N} = p_r$
- $P(V=5) = \frac{5}{15} = \frac{N_v}{N} = p_v$
- $P(B=6) = \frac{6}{15} = \frac{N_b}{N} = p_b$

Ainsi,

$$\boxed{P(R=4, V=5, B=6) = p_r p_v p_b}$$
