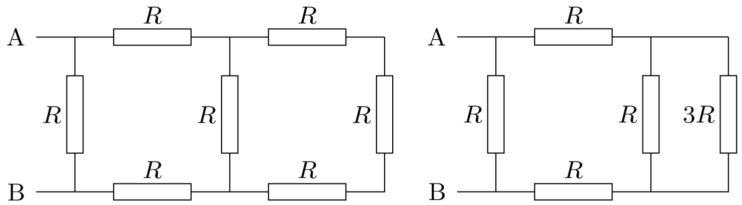
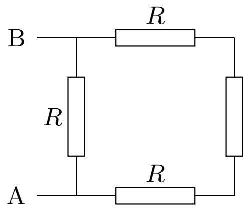
DM 3

Correction

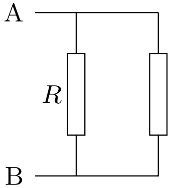
Exercice 1. Résistance équivalente

Les résistances équivalentes successives :





$$\frac{3R^2}{3R+R} = \frac{3R}{4}$$



$$R + R + \frac{3R}{4} = \frac{11R}{4}$$

Donc la résistance équivalente R_{eq} entre les point A et B est telle que $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{4}{11R} = \frac{15}{11R} \Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{11R}{15}}$

Exercice 2. Plaques à induction

1. Loi des mailles à $t \geq 0$: $e = ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e}{\tau r}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{r}}$
2. τ représente le temps caractéristique du circuit. AN : $\tau = \frac{100.10^{-3}}{200} = 0,5.10^{-3}$ s donc $\boxed{\tau = 0,5 \text{ ms}}$
3. Il y a continuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ car le circuit est ouvert pour $t < 0$.

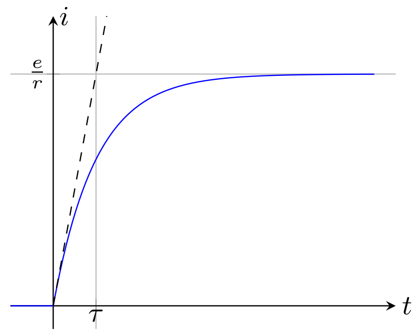
   Au bout d'un temps très long, le nouveau régime permanent est atteint donc la bobine se comporte comme un fil. Le circuit est donc équivalent à une résistance r en série avec la source de tension e et la loi des mailles donne $e = ri \Rightarrow \boxed{i(t = +\infty) = \frac{e}{r}}$
4. On cherche des solutions de la forme $i(t) = i_p + i_{SSM}(t)$ avec i_p une solution particulière et $i_{SSM}(t)$ la solution de l'équation sans second membre.
   On cherche un solution particulière constante (comme le second membre est une constante) donc $\underline{ß_p = \frac{e}{r}}$

   La solution de l'équation sans second membre est de la forme $\underline{i_SSM(t) = Ae^{-t/\tau}}$ avec A une constante.

   la solution complète est donc : $\underline{i(t) = \frac{e}{r} + i_SSM(t) = Ae^{-t/\tau}}$

   On trouve A grâce aux conditions initiale : $i(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{e}{r} + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{e}{r}}$ et

   $$\boxed{i(t) = \frac{e}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \text{avec} \boxed{\tau = L/r}$$
5. Évolution de $i(t)$:



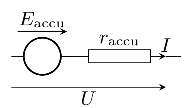
6. $\frac{di}{dt} = \frac{e}{L}e^{-t/\tau}$ donc $\boxed{\frac{di}{dt}(t = 0^+) = \frac{e}{L}}$
   La tangente à l'origine est une droite affine qui passe par l'origine de pente $\frac{e}{L}$, son équation est donc : $\boxed{i = \frac{e}{L}t}$ Cette tangente coupe l'asymptote de la courbe $i(t)$ en t_a tel que $\frac{e}{L}t_a = \frac{e}{r} \Rightarrow \boxed{t_a = \frac{L}{r} = \tau}$ l'instant τ.
7. $i(t = \tau) = \frac{e}{r}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow \boxed{i(\tau) = 0,632\frac{e}{r}}$
   $i(5\tau) = \frac{e}{r}\left(1 - \frac{1}{e^5}\right) \Rightarrow \boxed{i(\tau) = 0,993\frac{e}{r}}$.
8. On peut considérer que le circuit a atteint un nouveau régime permanent après $\boxed{5\tau = 2,5 \text{ ms}}$

Problème : stockage de l'énergie électrique

1. **Etude d'un accumulateur.**

   (a) D'après la caractéristique donnée dans l'énoncé l'accumulateur est un dipôle linéaire : sa caractéristique est une droite affine ; actif : sa caractéristique ne passe pas par l'origine ; polarisé (=non symétrique) : sa caractéristique n'est pas impaire.

   (b) La caractéristique de l'accumulateur a pour équation : $U = aI + b$ avec $a < 0$ et b des constantes. On peut donc modéliser l'accumulateur comme un générateur de Thévenin composé d'une f.e.m de valeur $E_{\text{accu}} = b$ et d'une résistance de valeur $r_{\text{accu}} = a$ d'où le schéma équivalent :



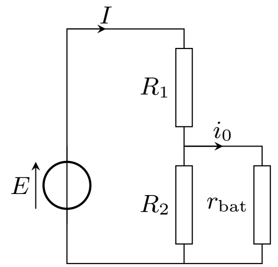
   (c) $\boxed{U = E_{\text{accu}} - r_{\text{accu}}I}$

   (d) Par lecture graphique : $\boxed{E_{\text{accu}} = 2,0 \text{ V}}$ et $\boxed{r_{\text{accu}} = 0,05\ \Omega}$

2. **Charge de la batterie.**

(a) $e_{\text{bat}} = 0$, donc la batterie se comporte comme l'association en série de 6 résistances de valeurs r_{accu} ainsi $\boxed{r_{\text{bat}} = 6r_{\text{accu}} = 0,3\ \Omega}$

Le circuit est donc équivalent su circuit ci-contre. On reconnaît un pont diviseur de courant et $i_0 = \dfrac{R_2}{R_2 + r_{\text{bat}}} I$ et comme la loi des mailles donne $E = \left(R_1 + \dfrac{R_2 r_{\text{bat}}}{R_2 + r_{\text{bat}}}\right) I$ ainsi $I = \dfrac{R_2 + r_{\text{bat}}}{R_1 R_2 + r_{\text{bat}}(R_1 + R_2)} E$ et ainsi

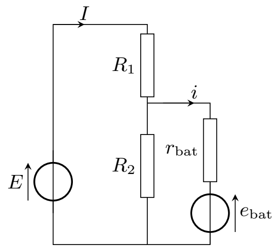


$$\boxed{i_0 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + r_{\text{bat}}(R_1 + R_2)} E}$$

AN. : $i_0 = \dfrac{16 \times 5}{2 \times 5 + 0,3(5+2)} = \underline{6,6\ \text{A}}$

(b) Le circuit est donc équivalent su circuit ci-contre. On Si $e_{\text{bat}>0}$ le circuit les lois des mailles donnent :

$$\boxed{\begin{array}{l} E = R_1 I + R_2(I - i) \\ e_{\text{bat}} = -r_{\text{bat}} i + R_2(I - i) \end{array}}$$



(c) La deuxième équation obtenue précédemment donne $I = \dfrac{1}{r_2}\left(e_{\text{bat}} + (R_2 + r_{\text{bat}}) i\right)$ Donc en injectant dans le première équation on a :

$$E = \frac{R_1}{R_2} e_{\text{bat}} + R_1\left(1 + \frac{r_{\text{bat}}}{R_2}\right) i + e_{\text{bat}} + r_{\text{bat}} i$$

$$\Rightarrow R_2 E = R_1 e_{\text{bat}} + R_1 \left(R_2 + r_{\text{bat}}\right) i + R_2 e_{\text{bat}} + r_{\text{bat}} R_2 i$$

$$\Rightarrow R2(E - e_{\text{bat}}) - R_1 e_{\text{bat}} = i\left(R_2(R_2 - r_{\text{bat}}) + r_{\text{bat}} R_2\right)$$

$$\Rightarrow i\left(R_1 R_2 + r_{\text{bat}}(R_1 + R_2)\right) = E R_2 - e_{\text{bat}}(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{R_2 E - (R_1 + R_2) e_{\text{bat}}}{R_1 R_2 + r_{\text{bat}}(R_1 + R_2)}}$$

(d) $i = 0 \Leftrightarrow R_2 E = (R_1 + R_2) e_{\text{bat}} \Leftrightarrow \boxed{e_{\text{bat}} = \dfrac{R_2 E}{R_1 + R_2}}$

On retrouve le pont diviseur de tension entre R_1 et R_2 en série comme il n'y a plus de courant dans la branche de r_{bat}.

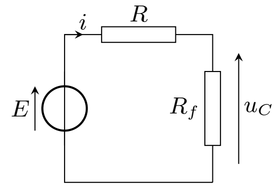
AN. $\underline{e_{\text{bat}} = 11,4\ \text{V}}$, cette tension correspond à $11,4/6 = 1,9$ V pour chaque accumulateur, et d'après la figure de la charge cela correspond à $\underline{10\ \%\ \text{de charge}}$.

(e) On souhaite que $i = 0$ pour 100 % de charge alors $\boxed{e_{\text{bat}} = 6 \times 2,25 = 13,5\ \text{V}}$ et on a toujours $R_2 E = (R_1 + R_2) e_{\text{bat}} \Rightarrow R_2(E - e_{\text{bat}}) = R_2 e_{\text{bat}} \Rightarrow \boxed{R_2 = \dfrac{R_1 e_{\text{bat}}}{E - e_{\text{bat}}} = 10,8\ \Omega}$

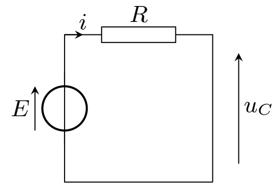
3. **Utilisation d'un condensateur.**

(a) Continuité de la tension aux bornes du condensateur $\Rightarrow \boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \text{V}}$

à $t = +\infty$ le nouveau régime permanent est atteint donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et le circuit est équivalent à :



en utilisant un pont diviseur de tension on a alors $\boxed{u_C(+\infty) = \dfrac{R_f}{R + R_f} E \approx E = 12\ \text{V}}$



(b) Comme $u_C(0^+) = 0$ R_f est court-circuitée, le circuit à $t = 0^+$ devient :
et la loi des mailles et la loi d'Ohm donnent immédiatement $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R} = 1,2\ \text{A}}$
à $t = +\infty$ on a toujours le circuit équivalent de la question précédente, donc la loi des mailles donne : $\boxed{i(+\infty) = \dfrac{E}{R + R_f} = 1,2\mu\ \text{A}}$

(c) On note i_C l'intensité traversant le condensateur et i_{R_f} celle traversant la résistance R_f. Loim des noeuds $\Rightarrow$ $i(t) = i_C(t) + i_{R_f}(t)$, or $i_{R_f} = \dfrac{U_c}{R_f}$ et $i_C = C\dfrac{dU_c}{dt}$, on obtient donc

$$\boxed{i(t) = C\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{R_f}}$$

(d) loi des mailles : $E = Ri + u_C$ donc en utilisant l'expression de $i(t)$ déterminée précédemment :

$$E = \left(\frac{R}{R_f} + 1\right) U_c + RC\frac{dU_c}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{RC}} \text{avec} \boxed{\tau = \frac{RC}{1 + R/R_f}}$$

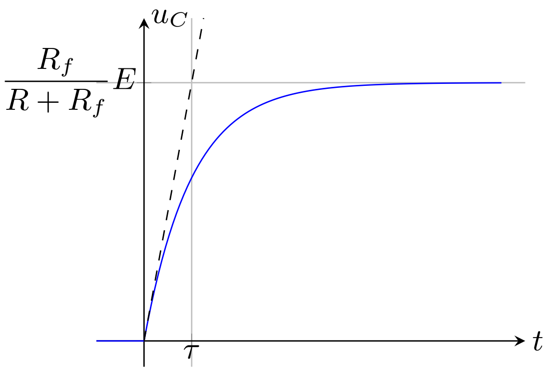
AN : $\tau = \dfrac{10 \times 100.10^{-6}}{1 + 10.10^{-7}} = \dfrac{10^{-3}}{1 + 10^{-6}} \approx 10^{-}3$ s $\Rightarrow \boxed{\tau = 1\ \text{ms}}$

(e) On cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme : $u_C = u_p + u_{SSM}$ avec $u_p = \dfrac{\tau}{RC} E$ une solution particulière et $u_{SSM} = Ae^{-t/\tau}$ la solution de l'équation sans second membre, avec A une constante. Ainsi :

$$u_C(t) = \frac{R_f}{R + R_f} E + Ae^{-t/\tau}$$

à $t = 0^+$ $u_C(0^+) = 0 = \dfrac{R_f}{R + R_f} E + A \Rightarrow \boxed{A = -\dfrac{R_f}{R + R_f} E}$ et la solution complète est

$$\boxed{u_C(t) = \frac{R_f}{R + R_f} E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \text{ avec } \boxed{\tau = \frac{RC}{1 + R/R_f}}$$



(f)

(g) $W_C = \int_0^{+\infty} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right)dt = \dfrac{1}{2}C[u_C^2]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}C[u_C^2(+\infty) - u_C^2(0^+)]$

$\Rightarrow \boxed{W_C = \dfrac{1}{2}C\dfrac{R_f^2E^2}{(R+R_f)^2}}$

AN. : $W_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{100 \times 12^2}{(10^7+10)} \approx \underline{7,2\,\mathrm{mJ}}$ La quantité d'énergie stockée est faible.

(h) Lorsque sa charge est terminée le condensateur est un interrupteur ouvert, donc $\mathcal{P}_J = R_f i_{R_f}^2(+\infty) = R_f i^(+\infty) = R_f\left(\dfrac{E}{R+R_f}\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_J = \dfrac{R_fE^2}{(R+R_f)^2}}$

AN. : $\mathcal{P}_J = \dfrac{10^7 \times 12^2}{(10+10^7)^2} = 1,4.10^{-5}$ W $\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_J = 14\,\mu\mathrm{W}}$ Valeur très faible mais constante, donc l'énergie du condensateur est constamment dissipée jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.