DS5 de mathématiques, partie raisonnement, mardi 13 décembre 2022 (1h25)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
N.B.1 : le sujet s'arrête à la fin de la première page (Q35 incluse). Suite à poursuivre à la maison.
N.B.2 : remplacer le mot "est" de la question 24 par le mot "induit".

Etude d'une fonction

21. Etudier sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.

22. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f. Préciser la valeur de f en 0.

23. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

24. Montrer que f est une bijection de $]0, \mathrm{e}]$ sur $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.

25. La fonction réciproque de f est-elle continue, dérivable sur $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$?

Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_n$ de la manière suivante

$$t_0 = 1, \qquad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la suite $(t_n)_n$ est convergente on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

26. Si $x = 1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$?

27. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite $(t_n)_n$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $\underline{x > 1}$:

28. Montrer que pour $x \in]1, +\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

29. Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

30. On suppose que $x \in]1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire que dans ce cas la suite $(t_n)_n$ est convergente.

31. On suppose $x > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, et on veut montrer que la suite $(t_n)_n$ a pour limite $+\infty$. On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions **27.** et **21.** aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas $\underline{x \in]0, 1[}$:

32. Montrer que pour $x \in]0, 1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?

33. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

34. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_n$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_n$ est croissante.

35. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0, 1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0, 1]$.

Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$. Pour cela on pose $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$, on admettra le résultat suivant :

$$g'(t) = \Phi_x'(t).\left(\Phi_x' \circ \Phi_x\right)(t) - 1 = (\ln x)^2.\Phi_x(t).\left(\Phi_x \circ \Phi_x\right)(t) - 1$$

36. Dans le cas $x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$ on admet que l'on obtient le tableau suivant :

t	0		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x		$x^x - 1$

Préciser le signe de $g'(0)$. Quelle est la monotonie de g sur $[0,1]$? Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0,1]$. Conclusion pour la convergence de la suite $(t_n)_n$.

37. Dans le cas $x \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ on admet que l'on a le tableau suivant :

t	0		α		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$
$g(t)$	x				$x^x - 1$

où α est l'unique racine de g'' sur $]0,1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-1}\ln x - 1$. Préciser le signe de β lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ lorsque $x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$?

38. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[$. Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

t	0		γ		α		δ		1
$g'(t)$	$(\ln x)^2 x - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\beta > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(\ln x)^2 x^{x+1} - 1 < 0$
$g(t)$	x	$\searrow$	$g(\gamma)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$g(\delta)$	$\searrow$	$x^x - 1$

avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que Φ_x possède un unique point fixe dans $]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ que l'on note p, donc $\Phi_x(p) = p$. Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$. En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p, p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_2 \leqslant t_{2n}$, et que la suite $(t_{2n})_n$ est convergente vers p_2.

40. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $t_{2n+1} \leqslant p$. Pour cela, on supposera qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p < t_{2n_0+1}$ et on aboutira à une contradiction. Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_n$? La suite $(t_n)_n$ est-elle convergente ?