DS2 de mathématiques, partie raisonnement, vendredi 6 octobre 2023 (2h00)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*
On rappelle que l'application d'un théorème nécessite la vérification de ses hypothèses, ce qui sera systématiquement évalué. De manière générale, ce sera le cas pour toutes les étapes des raisonnements effectués.

Barème sur 120 points :

- Exercice 1 : 3 pts = 1 (contraposée correcte) + 1 (supposer n impair) + 1 (montrer n^3 impair)
- Exercice 2 : 4 pts = 1 (déf sur $\mathbb{R}$) + 1 (formule du max) + 1 (construction) + 1 (rédaction)
- Exercice 3 (5 pts) :
  1. 2 (dont 1 si l'une des deux sous-phrases est correcte)
  2. 3 = 1 (partie convenant) + 1 (justification majoration) + 1 (justification pas de max)
- Exercice 4 (8 pts) :
  1. 4 = 1 (supp f,g inj) + 1 (définition inj) + 1 (prendre correctement x,x'...) + 1 (utiliser l'injectivité de g puis f)
  2. 4 = 1 (supp f,g surj) + 1 (définition surj) + 1 (prendre correctement $z\in G$) + 1 (utiliser la surjectivité de g puis f)
- Exercice 5 (30 pts) :
  Général :
  5 = [2] (définition $x\geq -8$ et $x\neq -2$) + 1 (faire disj de cas) + 1 (présentation des cas) + 1 (récap finale $[-8,-2[\cup\left[\frac{17}{4},73\right]$)
  Résolution :
  - Cas $x\in[-8,-2[$: 5 =
    - soit remarquer qu'on peut déterminer le signe du numérateur et s'en servir correctement
    - soit 1 ($-x+7$) + 1 ($x+2<0$) + 1 ($\sqrt{x+8}\geq 2x-5$) + [2] (toujours vrai car $2x-5<0$)
  - Cas $x\in]-2,7]$: 14 = 1 ($-x+7$) + 1 ($x+2>0$) + 1 ($\sqrt{x+8}\leq 2x-5$) et
    - cas $x\in]-2,\frac{5}{2}[$: + [2] (toujours faux car $2x-5<0$)
    - cas $x\in[\frac{5}{2},7]$: + 1 ($2x-5\geq 0$) + 1 ($x+8\geq 0$) + 1 (stricte croissance de carré sur $\mathbb{R}_+$) + 1 ($4x^2-21x+17\geq 0$) + [2] (1 et $\frac{17}{4}$) + 1 (coeff dominant >0) + 1 (faux sur $\left[\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right[$) + 1 (vrai sur $\left[\frac{17}{4},7\right]$)
  - Cas $x\in]7,+\infty[$: 6 = 1 ($x-7$) + 1 ($x+2>0$) + 1 (stricte croissance de carré sur $\mathbb{R}_+$) + 1 ($x\leq 73$) + 1 (vrai sur $]7,73]$) + 1 (faux sur $]73,+\infty[$)
- Problème (60 pts) :
  1. 10 = 1 par *ligne* + 1 (précision) + 1 (soin)
  2. 5 = 1 (équations complexes) + [3] (résolution rigoureuse) + 1 ($\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$)
  3. 10 = 1 ($\sqrt{3}$) + 1 (équation complexe $\mathcal{C}_2$) + [6] (résolution rigoureuse) + [2] ($\cap=\{J,B\}$)
  4. 10 = 1 ($a=e^{i\frac{5\pi}{6}}$) + [2] ($z=ra$) + 1 ($|ra-a|=\sqrt{3}$) + 1 ($|r-1|=\sqrt{3}$) + 1 ($r=1\pm\sqrt{3}$) + 1 ($c=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{6}}$) + 1 ($c=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$) + 1 ($d=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$) + 1 ($d=(\sqrt{3}-1)e^{-i\frac{\pi}{6}}$)
  5. (a) 3 = 1 (expression vectorielle) + [2] (traduction complexe)
     (b) 12 = [10] (calculs) + 1 (cas singleton) + 1 (interprétation géométrique)
  6. 10 = [5] (calculs e et f, 3 pour un seul calcul) + [2] (deux dernières droites) + [3] (récapitulation propre)
- Exercice 6 : 10 pts = 1 + [3] + [6]

Exercice 1 *Avoir l'esprit de contraposition*
Montrer qu'un nombre naturel, dont le cube est pair, est pair.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que si n est impair, son cube l'est aussi.

Supposons que n soit impair. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. On a donc $n^3 = 2(4p^3+6p^2+3p)+1$ qui est impair.
Par contraposition, $\boxed{\text{tout entier naturel de cube pair est pair.}}$

Exercice 2 *Donne ton max !*
On rappelle que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \longmapsto \max(e^x, \cos(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : x \longmapsto \max(e^x, \cos(x))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puisque exp et cos le sont et l'application max est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{e^x + \cos(x) + |e^x - \cos(x)|}{2}.$$
On en déduit que f est continue, comme combinaison linéaire des fonctions exp, cos, toutes deux continues, et de la composée d'une combinaison linéaire de exp et cos (elle aussi continue puisque exp et cos le sont) avec la fonction valeur absolue, elle aussi continue.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } x \longmapsto \max(e^x, \cos(x)) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 3 *Positivez*

1. Donner sans justification une traduction formelle du fait qu'il n'existe pas de partie de $\mathbb{R}$ majorée sans plus grand élément, **sans utiliser de négation**.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ ((\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leq M) \Longrightarrow (\exists a \in A, \forall x \in A,\ x \leq a)).}$$

---

2. Cet énoncé est-il vrai ? On **justifiera** la réponse.

$\boxed{\text{Non,}}$ car par exemple $\mathbb{R}_-^\star$ est majorée (par 0) et ne possède pas de plus grand élément, par l'absurde : si x était son plus grand élément, on aurait $x < x/2 < 0$, donc x ne serait pas le plus grand élément de $\mathbb{R}_-^\star$, $\boxed{\text{contradiction !}}$
Un contrexemple encore plus simple est l'ensemble vide, qui est majoré par n'importe quel réel et qui n'admet pas de plus grand élément car il n'admet pas d'élément tout court.

Exercice 4 *Stabilités par composition*
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer par des raisonnements directs que :

1. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;

Supposons f et g injectives.
Soient $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, *i.e.* $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, $f(x) = f(x')$, puis, comme f est injective, $x = x'$.
Ainsi $\boxed{g \circ f \text{ est injective.}}$

---

2. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Supposons f et g surjectives.
Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $(g \circ f)(x) = z$.
Ainsi $\boxed{g \circ f \text{ est surjective.}}$

Exercice 5 *Inéquation*
Déterminer les réels x pour lesquels l'inégalité $I(x)$ suivante est bien définie et vérifiée :

$$I(x) : \quad \frac{\sqrt{x+8} + |x-7|}{x+2} \leq 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, les termes de l'inégalité $I(x)$ sont bien définis si et seulement si $(x+8 \geq 0$ et $x+2 \neq 0)$, *i.e.* $\boxed{x \in [-8, +\infty[\setminus \{-2\}.}$
Soit un tel $x \in [-8, +\infty[\setminus \{-2\}$. Raisonnons par disjonction de cas.

— Si $x \in [-8, -2[$, on peut remarquer que, le numérateur de la fraction étant positif ou nul, comme somme de termes positifs ou nuls, et son dénominateur étant strictement négatif, la fraction est strictement négative et l'inégalité vérifiée :

$$\boxed{\text{si } x \in [-8, -2[\text{, alors } I(x).}$$

Remarque. La méthode “sans imagination”, qu'on utilise plus bas dans les autres cas, consisterait ici à se débarasser de la valeur absolue (en mettant des signes moins), multiplier par le dénominateur (en changeant le sens de l'inégalité), isoler la racine et chercher alors le signe de l'autre membre, qui est négatif. C'est systématique, mais plus long dans le cas présent.

— Si $x \in]-2, 7]$, alors $|x-7| = -x+7$ et $x+2 > 0$, donc :

$$\begin{aligned} I(x) &\iff \sqrt{x+8} - x + 7 \leq x+2 \\ &\iff \sqrt{x+8} \leq 2x - 5. \end{aligned}$$

On distingue alors deux sous-cas :

— si $x \in]-2, \frac{5}{2}[$, alors $2x - 5 < 0 \leq \sqrt{x+8}$, ainsi,

$$\boxed{\text{si } x \in \left]-2, \tfrac{5}{2}\right[\text{, alors non } I(x).}$$

— si $x \in [\frac{5}{2}, 7]$, alors $2x - 5 \geq 0$ et $x + 8 \geq 0$, donc, par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} I(x) &\iff x + 8 \leq (2x-5)^2 \\ &\iff x + 8 \leq 4x^2 - 20x + 25 \\ &\iff 4x^2 - 21x + 17 \geq 0. \\ &\iff 4(x-1)\left(x - \frac{17}{4}\right) \geq 0. \\ &\iff \left(x \leq 1 \text{ ou } x \geq \frac{17}{4}\right) \end{aligned}$$

Comme $x \geq \frac{5}{2} > 1$, $I(x)$ équivaut à $x \geq \frac{17}{4}$, ainsi,

$$\boxed{\text{si } x \in \left[\tfrac{5}{2}, \tfrac{17}{4}\right[\text{, alors non } I(x)\text{, et si } x \in \left[\tfrac{17}{4}, 7\right]\text{, alors } I(x).}$$

— si $x \in]7, +\infty[$, alors $|x-7| = x-7$ et $x+2 > 0$, donc, par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$I(x) \iff \sqrt{x+8} + x - 7 \leq x + 2$$

$$\begin{aligned} &\iff \sqrt{x+8} \leq 9 \\ &\iff x+8 \leq 81 \\ &\iff x \leq 73 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } x \in \,]7,73],\text{ alors } I(x),\text{ et si } x \in \,]73,+\infty[,\text{ alors non } (I(x)).}$$

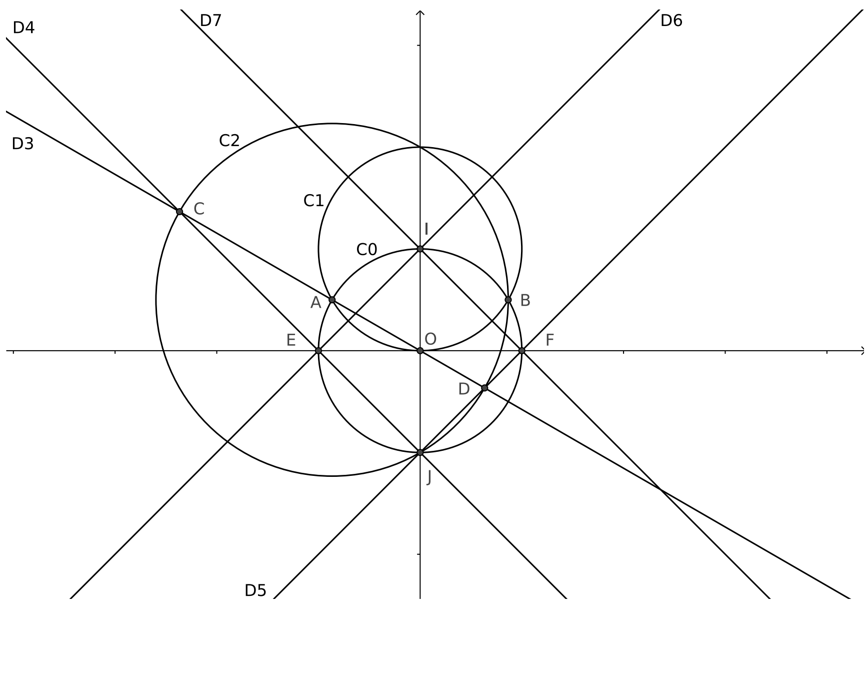
En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation $I(x)$ est

$$\boxed{[-8,-2[\cup\left[\frac{17}{4},73\right].}$$

Problème *Construction optimale d'un carré inscrit dans un cercle*

On se place dans le plan usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct, qui le met en correspondance avec $\mathbb{C}$ de la manière habituelle. Les points de $\mathcal{P}$ seront notés à l'aide de lettres capitales $A, B, \ldots$ et leurs affixes par les lettres minuscules correspondantes $a, b, \ldots$, sauf pour l'origine O d'affixe 0 et le point J d'affixe $-\mathrm{i}$ (on notera I le point d'affixe i). On note $\mathcal{C}_0$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre I et de rayon 1.

1. Faire une figure précise, qu'on complétera au long du problème.



---

2. Donner les "équations complexes" des cercles $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ et en déduire que ces deux cercles se coupent en deux points A et B dont on déterminera les formes algébriques des affixes, en convenant que

$\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.

L'équation complexe de $\mathcal{C}_0$ est $\boxed{|z| = 1}$ (ou $|z|^2 = 1$) et celle de $\mathcal{C}_1$ est $\boxed{|z - \mathrm{i}| = 1}$ (ou $|z - \mathrm{i}|^2 = 1$). Soit $Z \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}\,y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
Z \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ x^2 + (y-1)^2 & = \ 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ (y-1)^2 - y^2 & = \ 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ -2y + 1 & = \ 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 & = \ \frac{3}{4} \\ y & = \ \frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y & = \ \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 = \{A, B\}, \text{ où } a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}.}$

On note $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre A passant par B.

3. Déterminer le rayon de $\mathcal{C}_2$, puis $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0$. Vérifier graphiquement le résultat trouvé.

Le rayon de $\mathcal{C}_2$ est $d(A, B) = |b - a| = \left|\sqrt{3}\right| = \boxed{\sqrt{3}.}$

L'équation complexe de $\mathcal{C}_2$ est donc $|z - a| = \sqrt{3}$, ou encore $|z - a|^2 = 3$. Soit $Z \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}\,y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
Z \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 & = \ 3 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ x^2 + y^2 + \sqrt{3}x - y + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & = \ 3 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 & = \ 1 \\ \sqrt{3}x - y & = \ 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (\sqrt{3}x - 1)^2 & = \ 1 \\ y & = \ \sqrt{3}x - 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2 - 2\sqrt{3}x & = \ 0 \\ y & = \ \sqrt{3}x - 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & = \ 0 \\ y & = \ \sqrt{3}x - 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad (x, y) \in \left\{(0, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0 = \{J, B\}.}$

On note $\mathcal{D}_3$ la droite (OA).

4. Montrer que l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_3$ est $\left\{r \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}\right)\,;\ r \in \mathbb{R}\right\}$. En déduire que cette droite coupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en deux points C et D dont on déterminera les formes

trigonométriques **et** algébriques des affixes, en convenant que $\mathrm{Re}(c) < \mathrm{Re}(d)$.

Remarquons que $\boxed{a = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}.}$ Pour $Z \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} Z \in \mathcal{D}_3 &\iff \exists r \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OZ} = r\overrightarrow{OA} \\ &\iff \exists r \in \mathbb{R},\ z = ra \\ &\iff \exists r \in \mathbb{R},\ z = re^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, \end{aligned}$$

donc l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_3$ est $\boxed{\left\{ r\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}\right)\ ;\ r \in \mathbb{R} \right\}.}$

Comme $|a| = 1$, on a, pour $Z \in \mathcal{D}_3$ d'affixe ra, avec $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} Z \in \mathcal{C}_2 &\iff |ra - a| = \sqrt{3} \\ &\iff |r-1| = \sqrt{3} \\ &\iff r = 1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{C}_2 = \{C, D\},}$ où

$$c = \boxed{(1+\sqrt{3})e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \boxed{-\frac{3+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

et

$$d = (1-\sqrt{3})a = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3}-1)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.}$$

---

5. Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{J\}$. On note $\mathcal{D}_M$ la droite (JM).
   (a) Montrer que l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_M$ est $\{\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour $Z \in \mathcal{P}$ d'affixe z,

$$\begin{aligned} Z \in \mathcal{D}_M &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{JZ} = \lambda\overrightarrow{JM} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z - (-\mathrm{i}) = \lambda(m - (-\mathrm{i})) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z = \lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}, \end{aligned}$$

donc l'ensemble des affixes des points de la droite $\mathcal{D}_M$ est $\boxed{\{\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$

   (b) En déduire que $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{C}_0 = \{J, N\}$ avec $n = \dfrac{2(1+\mathrm{Im}(m))}{|m+\mathrm{i}|^2}(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points de cette intersection et interpréter cela géométriquement.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}| = 1 &\iff |\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i}|^2 = 1 \\ &\iff (\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i})\,\overline{(\lambda(m+\mathrm{i}) - \mathrm{i})} = 1 \\ &\iff \lambda^2|m+\mathrm{i}|^2 + \lambda\mathrm{i}\left((m+\mathrm{i}) - \overline{(m+\mathrm{i})}\right) = 0 \\ &\iff \lambda\left(\lambda|m+\mathrm{i}|^2 + 2\mathrm{i}^2\mathrm{Im}(m+\mathrm{i})\right) = 0 \\ &\iff \lambda\left(\lambda|m+\mathrm{i}|^2 - 2\mathrm{Im}(m+\mathrm{i})\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \quad \boxed{\lambda \in \left\{0, \frac{2(1+\mathrm{Im}\,(m))}{|m+\mathrm{i}\,|^2}\right\}},$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\mathcal{D}_M \cap \mathcal{C}_0 = \{J, N\} \text{ avec } n = \frac{2(1+\mathrm{Im}\,(m))}{|m+\mathrm{i}\,|^2}(m+\mathrm{i}\,) - \mathrm{i}\,.}$$

De plus, comme $m+\mathrm{i} \neq 0$ (puisque $M \neq J$),

$$N = J \iff n = -\mathrm{i} \iff \frac{2(1+\mathrm{Im}\,(m))}{|m+\mathrm{i}\,|^2}(m+\mathrm{i}\,) = 0 \iff 1+\mathrm{Im}\,(m) = 0 \iff \mathrm{Im}\,(m) = -1.$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}_M$ coupe le cercle $\mathcal{C}_0$ en deux points, sauf si M est situé sur la tangente en J au cercle $\mathcal{C}_0$ (droite "horizontale" passant par J, d'équation $y = -1$), auquel cas l'intersection $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{C}_0$ est le singleton $\{J\}$.

---

6. En appliquant le résultat précédent pour $M = C$ et $M = D$, décrire une construction à la règle et au compas du carré inscrit dans $\mathcal{C}_0$ admettant I pour sommet, en 7 *lignes* (une *ligne* étant une droite ou un cercle).
   On suppose tracés, avant la construction, le cercle $\mathcal{C}_0$ et les deux points O et I, et uniquement ces objets. Un point *construit* est l'un des deux points initiaux ou un point obtenu par intersection de *lignes* tracées. Chaque tracé de *ligne* doit s'appuyer sur des points précédemment *construits* : le centre et un point du cercle pour tracer un cercle, deux points de la droite pour tracer une droite.

Pour $M = C$: On note $\mathcal{D}_4 = (JC)$ et on trouve par la question précédente $\mathcal{D}_4 \cap \mathcal{C}_0 = \{J, E\}$, avec

$$e = \frac{2\left(1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}{|c+\mathrm{i}\,|^2}(c+\mathrm{i}\,) - \mathrm{i}\,.$$

Or $c+\mathrm{i} = -\frac{3+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}(\mathrm{i}-1)$, donc $|c+\mathrm{i}\,|^2 = 2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2$, et

$$e = \frac{2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2}\frac{3+\sqrt{3}}{2}(\mathrm{i}-1) - \mathrm{i} = \boxed{-1.}$$

Pour $M = D$: On note $\mathcal{D}_5 = (JD)$ et on trouve, comme ci-dessus, par la question précédente $\mathcal{D}_5 \cap \mathcal{C}_0 = \{J, F\}$, avec $\boxed{f = 1.}$

Les droites $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$ tracent donc les deux côtés du carré cherché qui correspondent aux ordonnées négatives. Il ne reste plus qu'à tracer $\mathcal{D}_6 = (EI)$ et $\mathcal{D}_7 = (FI)$ pour terminer le tracé du carré.

On récapitule la construction :

(a) On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre I passant par O (points initiaux). Son intersection avec le cercle initial $\mathcal{C}_0$ fournit les points A et B ;

(b) On trace le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre A passant par B. Son intersection avec le cercle initial $\mathcal{C}_0$ fournit le point J ;

(c) On trace la droite $\mathcal{D}_3 = (OA)$. Son intersection avec $\mathcal{C}_2$ donne les points C et D ;

(d) On trace la droite $\mathcal{D}_4 = (JC)$. Son intersection avec $\mathcal{C}_0$ donne le point E ;

(e) On trace la droite $\mathcal{D}_5 = (JD)$. Son intersection avec $\mathcal{C}_0$ donne le point F ;

(f) On trace la droite $\mathcal{D}_6 = (EI)$;

(g) On trace la droite $\mathcal{D}_7 = (FI)$.

Exercice 6 *Digestif ayant du corps*
Les trois ensembles suivants, munis de l'addition et la multiplication usuelles, sont-ils des corps ?

$$X = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{N}\right\}, \quad Y = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}, \quad Z = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Remarquons que, pour les trois ensembles, 0 est élément neutre pour l'addition et 1 est élément neutre pour la multiplication.
Montrons par l'absurde que 1 n'admet pas d'opposé dans X. Sinon, il existerait $a, b \in \mathbb{N}$, tels que $1 + a + b\sqrt{2} = 0$, ce qui est faux puisque ce nombre est strictement positif. Comme il existe un élément sans opposé dans X,

$$\boxed{(X, +, \times) \text{ n'est pas un corps.}}$$

Montrons par l'absurde que 2 n'admet pas d'inverse dans Y. Sinon, il existerait $a, b \in \mathbb{Z}$, tels que $2a + 2b\sqrt{2} = 1$. On raisonne alors par disjonction de cas :

- si $b = 0$, $a = \frac{1}{2}$, ce qui contredit que a est entier ;
- si $b \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{1-2a}{2b}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Dans tous les cas, on arrive à une $\boxed{\text{contradiction,}}$ ce qui prouve que 2 n'a pas d'inverse dans Y, et comme $2 \neq 0$,

$$\boxed{(Y, +, \times) \text{ n'est pas un corps.}}$$

On montre alors que $(Z, +, \times)$ est un corps.

- On commence par remarquer que les deux opérations $+$ et $\times$ sont bien définies de $Z \times Z$ vers Z. Pour la somme, c'est évident puisque la somme de deux rationnels est rationnelle. Pour le produit, un calcul immédiat le prouve.
- On remarque ensuite que la commutativité et l'associativité des deux lois, et la distributivité du produit par rapport à la somme, découlent immédiatement des propriétés analogues dans le corps $\mathbb{R}$.
- Pour les éléments neutres, comme on l'a déjà dit, c'est la même chose, puisque $0, 1 \in Z$. On remarque aussi que $1 \neq 0$.
- Tout élément de Z admet un opposé, ce qui est trivial : pour $a, b \in \mathbb{Q}$, $(-a) + (-b)\sqrt{2} \in Z$ est l'opposé de $a + b\sqrt{2}$.
- Il ne reste plus qu'à montrer que tout élément non nul de Z admet un inverse.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ fixé et $z = a + b\sqrt{2}$. Soient $a', b' \in \mathbb{Q}$. On a

  $$z(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}.$$

  Ainsi, $a' + b'\sqrt{2}$ est inverse de z si et seulement si le système suivant est vérifié :

  $$(S) \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0. \end{cases}$$

  On raisonne alors par disjonction de cas :
  - si $b = 0$, comme $(a, b) \neq (0, 0)$, $a \neq 0$ et, dans ce cas, $a' = \frac{1}{a}$ et $b' = 0$ conviennent, *i.e.* $\frac{1}{a}$ est l'inverse de $z = a$ dans Z ;
  - si $b \neq 0$, en effectuant l'opération sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{b}L_2$, puis en remarquant que $2b - \frac{a^2}{b} \neq 0$ par irrationalité de $\sqrt{2}$, on obtient les équivalences :

  $$(S) \iff \begin{cases} \left(2b - \frac{a^2}{b}\right) b' = 1 \\ a' = -\frac{ab'}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} b' = \frac{1}{2b - \frac{a^2}{b}} \\ a' = -\frac{a}{2b^2 - a^2}. \end{cases}$$

  Ainsi z admet un inverse dans Z.

On a donc montré par disjonction de cas que tout élément non nul de Z est inversible dans Z.
Par vérification de tous les axiomes de corps, on a montré que

$$\boxed{(Z,+,\times) \text{ est un corps.}}$$

Remarque 1. On dit que Z est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
Remarque 2. Ne pas confondre avec $\mathbb{Z}$, qui n'est lui pas un sous-corps de $\mathbb{R}$, mais un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
