Primitives

Lycée Berthollet, MPSI2 2023-24

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Sauf indication contraire, I et J désigneront deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, qu'on supposera **non triviaux** (*i.e.* différents du vide et des singletons).

I Fonctions à valeurs complexes

1 Définition

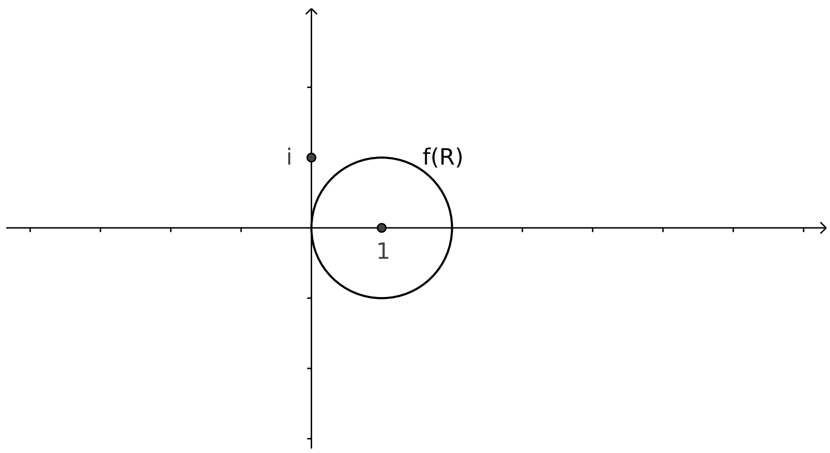
Définition 1 Une *fonction à valeurs complexes* f définie sur I est une “machine” qui associe à tout $x \in I$ un nombre complexe noté $f(x)$. En termes déjà évoqués, mais qu'on introduira formellement plus tard, c'est une *application* de I vers $\mathbb{C}$. On la note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$

Remarque 2 On peut représenter graphiquement une telle fonction par son image $f(I)$ qui est une courbe du plan complexe. Par exemple, la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & 2\cos(t)e^{it} \end{array} \right.$$

a comme image le cercle de centre 1 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$ (pour cela, utiliser la formule d'Euler) :



Exemples 3

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto e^{i\omega t}$ est une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on a défini la *fonction puissance* α sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme $x \longmapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
3. Si on choisit $n \in \mathbb{N}$ et une famille de complexes $(a_k)_{k=0}^n$ telle que $a_n \neq 0$, la *fonction polynôme de variable réelle* $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Si f_r et f_i sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur le même intervalle I, alors $f = f_r + i\, f_i$, qui associe à tout $x \in I$ la valeur $f(x) = f_r(x) + i\, f_i(x)$, est une fonction à valeurs complexes.

En “réponse” au dernier exemple, à toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$, on associe les fonctions *parties réelle et imaginaire* de f :

$$\mathrm{Re}(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)). \end{array} \right.$$

Remarque 4 Formellement, ce sont des composées d’applications : $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re} \circ f$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im} \circ f$.

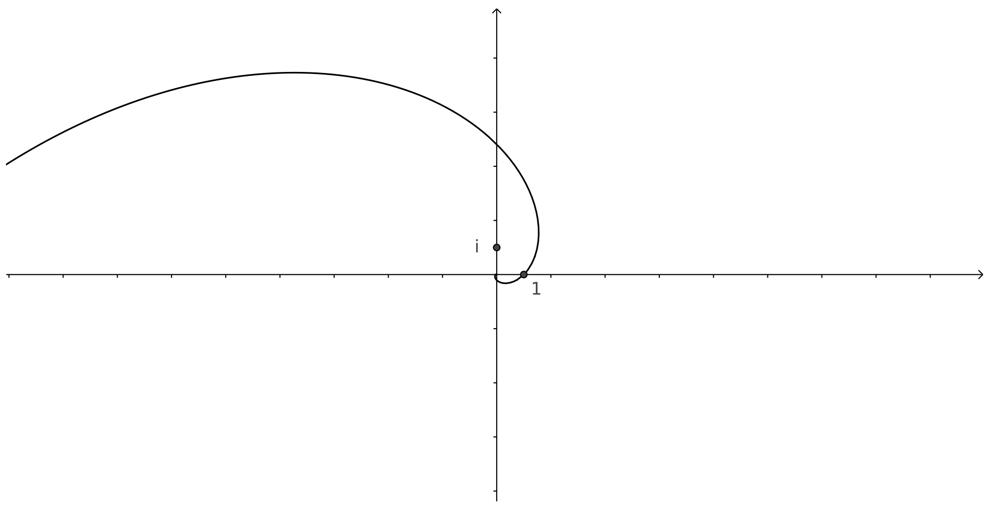
Exemples 5

1. $\mathrm{Re}\left(t \longmapsto e^{i\omega t}\right) = (t \longmapsto \cos(\omega t))$ et $\mathrm{Im}\left(t \longmapsto e^{i\omega t}\right) = (t \longmapsto \sin(\omega t))$.
2. Si $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec les notations de l’exemple ci-dessus, alors $\mathrm{Re}(P) : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(a_k) x^k$ et $\mathrm{Im}(P) : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(a_k) x^k$, puisque la variable x est ici réelle. Attention, si la variable était complexe, cela ne serait plus vrai !

Exercice 6 Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$, exprimer $\mathrm{Re}(p_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(p_\alpha)$.

(Réponse : $\mathrm{Re}(p_\alpha) : x \longmapsto x^{\mathrm{Re}(\alpha)} \cos(\mathrm{Im}(\alpha) \ln(x))$ et $\mathrm{Im}(p_\alpha) : x \longmapsto x^{\mathrm{Re}(\alpha)} \sin(\mathrm{Im}(\alpha) \ln(x))$.)

Remarque 7 Ces formules permettent de représenter par exemple l’image de la fonction $x \longmapsto x^{1+i}$, qui est une spirale :



2 Dérivabilité

Définition 8 Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est *dérivable sur* I ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on définit la *fonction dérivée* de f par

$$f' = (\mathrm{Re}(f))' + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}(f))'.$$

Exemple 9

Si $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec les notations de l'exemple ci-dessus, alors $\mathrm{Re}(P)$ et $\mathrm{Im}(P)$ sont des fonctions polynômes à valeurs réelles, donc dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $(\mathrm{Re}(P))' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{Re}(a_k) x^{k-1}$ et $(\mathrm{Im}(P))' : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{Im}(a_k) x^{k-1}$. On en déduit que P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1}.$$

Exercice 10 Montrer que $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

(Réponse : $t \longmapsto \mathrm{i}\,\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$.)

On définit les opérations sur les fonctions à valeurs complexes (combinaison linéaire, produit, quotient) de la même manière que pour les fonctions à valeurs réelles et on a alors le résultat suivant.

Théorème 11 *(Opérations sur les fonctions dérivables)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables sur I. Alors

1. ***Combinaisons linéaires.*** *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2. ***Produit.*** *La fonction fg est dérivable sur I et*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. ***Quotient.*** *Si la fonction g **ne s'annule pas sur** I, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration: Ces résultats se démontrent aisément en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables à valeurs réelles. Le faire en exercice $\bigoplus$. $\square$

Comme on ne définit pas dans ce cours la dérivabilité des fonctions *de variable complexe*, on ne peut pas énoncer de résultat général sur les composées. On énonce cependant deux résultats : l'un pour le cas particulier de la composition à gauche par l'exponentielle complexe et l'autre pour la composition à droite par une fonction dérivable à valeurs réelles.

Théorème 12 *Si* $\varphi : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable sur I, alors* $\mathrm{e}^{\varphi} = \exp\circ\varphi$ *est dérivable sur I et*

$$(\mathrm{e}^{\varphi})' = \mathrm{e}^{\varphi}\,\varphi'.$$

Démonstration: Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. On prend les parties réelle et imaginaire de $f = \mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(\varphi)}$:

$$\mathrm{Re}\,(f) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)).$$

Comme φ est dérivable sur I, $\mathrm{Re}\,(\varphi)$ et $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ le sont aussi. D'après les résultats sur le produit et la composition des fonctions dérivables à valeurs réelles, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Re}\,(f))' &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\,(\mathrm{Re}\,(\varphi))'\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)) - \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))' \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\left(\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Re}\,(\varphi))' - \sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))'\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Im}\,(f))' &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\,(\mathrm{Re}\,(\varphi))'\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)) + \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))' \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\left(\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Re}\,(\varphi))' + \cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))'\right),
\end{aligned}$$

donc f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned}
f' &= (\mathrm{Re}\,(f))' + \mathrm{i}\,(Im(f))' \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\left[\left(\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Re}\,(\varphi))' - \sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))'\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathrm{i}\,\left((\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\mathrm{Re}\,(\varphi))' + \cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi))\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))'\right)\right] \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\,(\cos\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)) + \mathrm{i}\,\sin\circ(\mathrm{Im}\,(\varphi)))\left((\mathrm{Re}\,(\varphi))' + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))'\right) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(\varphi)}\varphi' \\
&= \mathrm{e}^{\varphi}\varphi'.
\end{aligned}$$

□

Exemple 13 Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \left(x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\right)$. On retrouve ainsi le cas particulier vu plus haut où $\lambda = \mathrm{i}\,\omega$ est imaginaire pur.

On déduit du théorème précédent la dérivabilité et les dérivées des fonctions puissances :

Corollaire 14 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$*, la fonction puissance* $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *de dérivée* $p'_\alpha : x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration: En mettant x^α sous forme exponentielle et en appliquant le résultat ci-dessus $\bigoplus$. □

On a aussi le théorème de composition à droite par une fonction dérivable à valeurs réelles :

Théorème 15 *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{C}$ *sont dérivables et vérifient* $f(I) \subset J$*, alors* $g \circ f$ *est dérivable et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

Démonstration: En exercice $\oplus$. $\square$

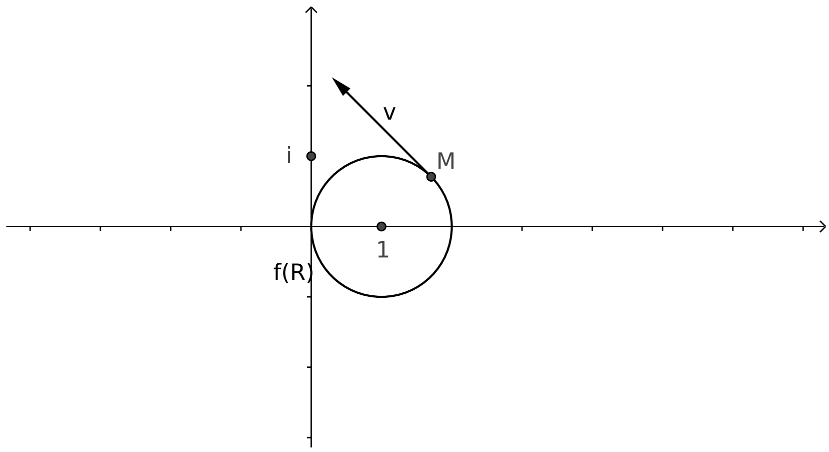
Exercice 16 Montrer la dérivabilité sur $]0,\pi[$ de la fonction $f : x \longmapsto (\sin(x))^{\mathrm{i}}$ et calculer sa dérivée.

(Réponse : $f' : x \longmapsto \mathrm{i}\,(\sin(x))^{\mathrm{i}-1}\cos(x)$.)

3 Interprétation cinématique

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I et $\mathcal{P}$ le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé direct. On considère la correspondance habituelle entre $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$. On note $\widetilde{f} : I \to \mathcal{P}$ l'application qui associe, à $t \in I$, le point image du complexe $f(t)$. On obtient ainsi une courbe paramétrée du plan. Si le paramètre $t \in I$ représente le temps, alors le vecteur image de $f'(t)$ est le *vecteur vitesse* de cette courbe paramétrée. Lorsque $f'(t) \neq 0$, le vecteur vitesse, si on place son origine en $\widetilde{f}(t)$, est **tangent** à la courbe paramétrée.

On peut le visualiser avec la fonction $f : t \longmapsto 2\cos(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 2(-\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$. On peut voir cela plus simplement en simplifiant l'expression de f par la formule d'Euler : pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$, dont la dérivée est immédiate. Pour $a = \frac{\pi}{8}$, on trouve $f(a) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $M = \widetilde{f}(a)$ a comme couple de coordonnées dans le repère initial : $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Et $f'(a) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, dont le vecteur image v a comme coordonnées $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Cela donne la figure suivante :



II Primitives

Le calcul explicite de beaucoup d'intégrales (mais pas de toutes) peut se faire à l'aide d'une primitive de la fonction qu'on intègre. D'où l'intérêt de disposer d'outils efficaces pour trouver des primitives explicites, quand cela est possible. On donne dans ce chapitre les bases du calcul des primitives, sans pour autant être exhaustif dans ce domaine.

1 Définitions

Définition 17 Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Une *primitive* de f est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{K}$ telle que $F' = f$.

Un résultat fondamental est le suivant :

Théorème 18 ***(sur un intervalle, unicité à constante additive près)***
Si F est une primitive d'une fonction f définie sur un ***intervalle****, alors les primitives de f sont exactement les fonctions s'écrivant $F + C$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.*

Démonstration: Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et F une primitive de f. Pour $G : I \to \mathbb{K}$ dérivable, G est une primitive de f ssi $G' = F'$ *i.e.* $(G - F)' = 0$. On a admis dans un précédent chapitre (et on démontrera dans un chapitre ultérieur) qu'une fonction définie sur un intervalle est dérivable et de dérivée nulle ssi elle est constante. Ainsi G est une primitive de f ssi $G - F$ est constante, *i.e.* $G = F + C$, où $C \in \mathbb{K}$. $\square$

Exemple 19 Pour $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, les primitives de $x \longmapsto e^{\lambda x}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$, où $C \in \mathbb{C}$.

Notation classique.
On note usuellement $\int f$ une primitive de la fonction f, s'il en existe. Cette notation ne définit donc pas précisément une fonction. Cependant, par le théorème précédent, si on travaille sur un **intervalle**, cette notation définit une classe de fonctions, dont deux d'entre elles diffèrent d'une constante additive. Il est donc convenu que l'objet $\int f$ est une fonction définie à constante additive près. Par ailleurs, la valeur de cette "fonction" au point x est elle "abusivement" notée $\int f(x)\,dx$. Le choix est fait ici de garder cette notation classique, quelque peu perturbante, mais en réalité très pratique. On s'y habitue vite... Lorsqu'il n'y a plus de terme de la forme $\int f(x)\,dx$ dans une expression, on rajoute alors une constante pour bien signifier que les égalités sont valables seulement à constante additive près.

On peut par exemple reformuler le résultat de l'exemple précédent ainsi : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

2 Utilisation de la linéarité

La linéarité de la dérivation donne un premier moyen de recherche de primitives :

Proposition 20 *Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.*

Démonstration: triviale $\square$

Exemple 21 On cherche les primitives de $h : x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

On se place sur l'intervalle I qui est soit $]-\infty, -1[$, soit $]-1, 0[$, soit $]0, +\infty[$. On remarque alors que

$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Comme $x \longmapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur I et $x \longmapsto \ln|x+1|$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ sur I, alors, pour $x \in I$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que si on connaît I, on peut donner une expression sans valeur absolue :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{pour } x \in]-\infty,-1[, & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \ln\frac{x}{x+1} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}; \\ \text{pour } x \in]-1,0[, & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \ln\left(-\frac{x}{x+1}\right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}; \\ \text{pour } x \in]0,+\infty[, & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \ln\frac{x}{x+1} + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

Remarque 22 Le choix d'une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur le domaine entier $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$, qui n'est pas un intervalle, nécessite le choix de **trois constantes**, une par intervalle.

Cette linéarité est aussi implicite dans la définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexe en termes de parties réelles et imaginaires. On peut l'utiliser pour calculer des primitives de fonctions à valeurs réelles en passant par des fonctions à valeurs complexes, comme le montre l'exemple suivant.

Méthode de calcul de $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ et $\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$, où $a,b \in \mathbb{R}$.

On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\right)$ et $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\right)$. D'après les propriétés des dérivées des fonctions à valeurs complexes, il suffit donc de calculer $\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x$ et de prendre partie réelle ou partie imaginaire suivant le cas.

Exercice 23 Calculer $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$ est la fonction qui à x associe

$$\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\,(-1-2\mathrm{i})\,(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x)),$$

ce qui donne en prenant la partie réelle, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\,(2\sin(2x) - \cos(2x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

---

3 Primitivation “à vue”

Le premier cas de figure dans une recherche de primitives est le cas où la fonction dont on cherche une primitive est la dérivée d’une fonction classique. Il ne faut absolument pas rater ce cas sous peine de tourner longtemps en rond dans sa recherche. Il faut en conséquence bien connaître les dérivées des fonctions classiques et savoir les reconnaître même lorsqu’elles sont un peu déguisées (par exemple multipliées par une constante). On récapitule dans le tableau de la figure 1 les fonctions dont il faut connaître les primitives par cœur, à part les trois dernières, qu’il peut cependant être bon d’avoir déjà vues. Sauf remarque explicite, l’intervalle I de validité est $\mathbb{R}$.
Lorsque la fonction f dont on cherche une primitive n’est pas directement une dérivée d’une fonction classique, on cherche si ce n’est pas la dérivée d’une composée, *i.e.* de la forme $f = (g \circ u)u'$ avec g dont on connaît une primitive G. Si c’est le cas, un primitive de f est $G \circ u$.

Exemples 24

1. Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f = \frac{u'}{u}$: sur tout intervalle I où u ne s’annule pas, les primitives sont les fonctions $\ln|u| + C$ (*i.e.* $\ln \circ |u| + C$), où $C \in \mathbb{R}$.

Par exemple, si I ne contient ni 1 ni -2, pour $x \in I$,

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|x^2+x-2\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

---

2. Cas où $f = u^\alpha u'$, avec $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$: sur tout intervalle où u est strictement positive, les primitives sont les fonctions $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, où $C \in \mathbb{K}$.

Par exemple, si $I =]-\infty, -2[$ ou $I =]2, +\infty[$, pour $x \in I$,

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On retrouve un cas déjà vu en terminale lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$: les primitives de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ sont, sur tout intervalle où u est strictement positive, de la forme $\sqrt{u} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Par exemple, pour $x \in]-3, 3[$,

$$\int \frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\int \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{9-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

---

3. Cas où $f = \mathrm{e}^u u'$: les primitives sont les fonctions $\mathrm{e}^u + C$, où $C \in \mathbb{K}$. Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}$,

---

$$\int x^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5\mathrm{i}}\int (5\mathrm{i}x^4)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^5} + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

$f : x \longmapsto \dots$	$\int f : x \longmapsto \dots + C$	Remarques
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$ et $I = \mathbb{R}_+^\star$ (cas général),
		$I \subset \mathbb{R}^\star (\alpha \in \mathbb{Z}_-^\star \setminus \{-1\})$ ou $I = \mathbb{R} (\alpha \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$I \subset \mathbb{R}^\star$
$\exp(\lambda x)$	$\frac{\exp(\lambda x)}{\lambda}$	$\lambda \in \mathbb{K}^\star$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin}(x)$ ou $-\operatorname{Arccos}(x)$	$I =]-1, 1[$
$\tan(x)$	$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$I = \mathbb{R}_+^\star$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$	
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\operatorname{th}(x)$	
$1 - \operatorname{th}^2(x)$	$\operatorname{th}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2-1} \right\rvert$	$I \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

FIGURE 1 – Primitives classiques

4. Un cas qui sert très fréquemment.

Si $a \neq 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. Il faut parfois transformer la fonction pour reconnaître une primitivation à vue. Par exemple faire "apparaître" une dérivée.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \int (\cos^2(x)-1)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ou la tranformer pour se ramener à une forme connue.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4 Algorithme de calcul de $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Remarque importante : l'algorithme est ici décrit dans le cas général en utilisant des constantes littérales, mais le savoir-faire qu'il faut acquérir est l'exécution de cet algorithme sur des cas numériques concrets. En particulier, il serait contre-productif (et même idiot, pour dire les choses crûment) d'apprendre par cœur les formules littérales ci-dessous.

Soient $A, B, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^\star$. On cherche les primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$. On distingue d'abord deux cas suivant le signe du discriminant du trinôme $T(x)$ au dénominateur, $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta > 0$, alors T admet deux racines réelles x_1 et x_2 et on a, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, $T(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. **On admet** qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$,

$$\frac{Ax+B}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}.$$

Cela s'appelle une *décomposition en éléments simples*. On peut alors déterminer α de la manière suivante : on multiplie l'égalité par $x-x_1$, puis on fait tendre x vers x_1. À la limite, on obtient $\alpha = \frac{Ax_1+B}{a(x_1-x_2)}$. On peut procéder de la même manière pour calculer β. Si I est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2\}$, on a par linéarité, pour $x\in I$,

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \alpha\ln|x-x_1| + \beta\ln|x-x_2|\,.$$

— Si $\Delta \leq 0$, alors, si $A\neq 0$, on commence par se débarasser du terme en x au numérateur en faisant apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur : pour x n'annulant pas T,

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}$$

Comme le premier terme de la somme se primitive à vue (à une constante multiplicative près, il est de la forme $\frac{u'}{u}$) et $B-\frac{Ab}{2a}$ est une constante, on est ramené (sauf si cette constante est nulle, auquel cas on a terminé), par linéarité, à calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}.$$

On distingue deux sous-cas :

— Si $\Delta = 0$, alors T admet une racine réelle double x_0 et on a, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, $T(x) = a(x-x_0)^2$. Si I est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, on a, pour $x\in I$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a(x-x_0)^2} = \frac{1}{a}\int (x-x_0)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}(x-x_0)^{-1} + C = -\frac{1}{a(x-x_0)} + C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

— Si $\Delta < 0$, alors T n'admet pas de racine réelle. On commence par factoriser T par a, puis, comme dans le dernier des exemples 24, on reconnaît dans $x^2+\frac{b}{a}x$ le début d'une identité remarquable, puis on multiplie numérateur et dénominateur par une constante, pour obtenir une fonction du type $\frac{Cu'}{1+u^2}$: pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\\
&= \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}\\
&= \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\\
&= \frac{4a}{4ac-b^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2}\\
&= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\int\frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,\quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Voici trois exercices types qui montrent tous les cas d'application de cet algorithme.

Exercice 1 Calculer $\displaystyle\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x$.

Commençons pas simplifier le calcul : pour x "convenable",

$$\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x,$$

car le dénominateur a deux racines distinctes 1 et -2 (l'une est évidente et on déduit l'autre du produit, qui est -2) et son coefficient dominant est 1. On effectue alors la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle : il existe deux constantes $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ telles que, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$,

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-1}.$$

En mutipliant par $x+2$, puis en faisant tendre x vers -2, on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$. En mutipliant par $x-1$, puis en faisant tendre x vers 1, on obtient $\beta = \frac{2}{3}$. Ainsi, si $I \subset \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, pour $x \in I$,

$$\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{4}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \frac{2}{9}\ln|x+2| + \frac{4}{9}\ln|x-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\text{pour } x \in]-\infty,-2[, & \displaystyle\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln(-x-2) + \frac{4}{9}\ln(1-x) + C_1, & C_1 \in \mathbb{R}; \\[2ex]
\text{pour } x \in]-2,1[, & \displaystyle\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln(x+2) + \frac{4}{9}\ln(1-x) + C_2, & C_2 \in \mathbb{R}; \\[2ex]
\text{pour } x \in]1,+\infty[, & \displaystyle\int \frac{2x+2}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln(x+2) + \frac{4}{9}\ln(x-1) + C_3, & C_3 \in \mathbb{R}.
\end{array}}$$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int \frac{x-4}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, le dénominateur de la fraction s'écrit $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$ et admet donc $\frac{1}{2}$ comme racine double. Soit $I \in \left\{\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[,\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right\}$. Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-4}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1} \\
&= \frac{1}{8}\ln|4x^2-4x+1| - \frac{7}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x-1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{7}{8x-4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\text{pour } x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[, & \displaystyle\int \frac{x-4}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(1-2x) + \frac{7}{8x-4} + C_1, & C_1 \in \mathbb{R}; \\[2ex]
\text{pour } x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[, & \displaystyle\int \frac{x-4}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x-1) + \frac{7}{8x-4} + C_2, & C_2 \in \mathbb{R}.
\end{array}}$$

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ici, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est toujours strictement positif. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right) + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.}
\end{aligned}$$

---

5 Algorithme de primitivation des polynômes trigonométriques

Définition 25 Un *polynôme trigonométrique* est une fonction "polynôme" en sin et cos, c'est-à-dire une combinaison linéaire de monômes de la forme $\sin^p \cos^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Exemple 26 La fonction $x \longmapsto 2\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x) + \sin(x) - 1$ est un polynôme trigonométrique.

Méthode de primitivation

Par linéarité, il suffit de savoir trouver les primitives des monômes. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer $\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x$. On a plusieurs cas de figures, qui ne sont pas exclusifs :

- Si $p = q = 0$, la fonction est constante égale à 1, de primitives $x \longmapsto x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
- Si p est impair, la fonction peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto P(\cos(x))\cos'(x)$, où P est un polynôme. Sous cette forme, on primitive à vue;
- Si q est impair, la fonction peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto Q(\sin(x))\sin'(x)$, où Q est un polynôme. Sous cette forme, on primitive à vue;
- Si p et q sont pairs, on linéarise et l'expression linéarisée se primitive à vue.

Remarque 27 Dans le cas où p et q sont impairs, deux méthodes sont possibles et, si $p \neq q$, l'une des deux donnera un calcul plus simple. Laquelle ?

(Réponse : si $p > q$ mettre sous la forme $Q(\sin)\sin'$ et *vice-versa*.)

Voici un exemple qui montre les différents cas de figure.

Exercice 28 Calculer $\int \left(\sin^5(x)\cos^3(x) - \sin^3(x)\cos^2(x) + 2\sin^2(x)\cos^4(x) - \cos^2(x) + 2\sin(x) - \pi\right)\,\mathrm{d}x$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\sin^5(x) - \sin^7(x)\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin^6(x) - \frac{1}{8}\sin^8(x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},\\
\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\cos^4(x) - \cos^2(x)\right)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cos^5(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},\\
\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R},\\
\int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + C_5, \quad C_5 \in \mathbb{R},\\
\int \mathrm{d}x &= x + C_6, \quad C_6 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right) = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8},\\
\cos^6(x) &= \frac{1}{2^6}\left(e^{i6x} + 6e^{i4x} + 15e^{i2x} + 20 + 15e^{-i2x} + 6e^{-i4x} + e^{-i6x}\right)\\
&= \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{5}{16},\\
\cos^4(x) - \cos^6(x) &= -\frac{\cos(6x)}{32} - \frac{\cos(4x)}{16} + \frac{\cos(2x)}{32} + \frac{1}{16},
\end{aligned}$$

donc

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\cos^4(x) - \cos^6(x)\right)\mathrm{d}x = -\frac{\sin(6x)}{192} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin(2x)}{64} + \frac{x}{16} + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Par combinaison linéaire, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\int \left(\sin^5(x)\cos^3(x) - \sin^3(x)\cos^2(x) + 2\sin^2(x)\cos^4(x) - \cos^2(x) + 2\sin(x) - \pi\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\frac{1}{6}\sin^6(x) - \frac{1}{8}\sin^8(x)\right) - \left(\frac{1}{5}\cos^5(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x)\right) + 2\left(-\frac{\sin(6x)}{192} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin(2x)}{64} + \frac{x}{16}\right)\\
&\qquad - \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right) - 2\cos(x) - \pi x + C, \quad C \in \mathbb{R}\\
&= \boxed{-\frac{\sin^8(x)}{8} + \frac{\sin^6(x)}{6} - \frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^3(x)}{3} - 2\cos(x) - \frac{\sin(6x)}{96} - \frac{\sin(4x)}{32} - \frac{7\sin(2x)}{32} - \left(\frac{3}{8} + \pi\right)x + C, \quad C \in \mathbb{R}.}
\end{aligned}$$

---

6 Intégrale

On suppose ici qu'on sait définir l'*intégrale* $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\in \mathbb{K}$) d'une fonction f **continue** sur un intervalle I contenant les réels a et b, ce qui sera fait dans un chapitre ultérieur. En conséquence, les résultats qui suivent, en particulier le théorème fondamental reliant l'intégration au calcul des primitives, ne peuvent être qu'admis à ce stade. Cette sous-section ne comporte donc quasiment pas de démonstrations. Celles-ci viendront plus tard.

Remarque 29 Si f est continue sur un segment $[a,b]$, en prenant $I=[a,b]$, $\int_a^b f$ est bien définie.

Remarque 30 La variable d'intégration est muette : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (avec les notations et hypothèses précédentes).

Remarque 31 La définition de l'intégrale assure les égalités $\int_a^a f = 0$ et $\int_a^b f = -\int_b^a f$ (avec les notations et hypothèses précédentes) ainsi que la relation de Chasles : pour un troisième point $c \in I$, non nécessairement entre a et b,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Un premier résultat important est la linéarité, sans laquelle quasiment aucun calcul ne serait possible.

Proposition 32 ***Linéarité.***
Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ continues sur I, $a,b \in I$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Rappelons que dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ **et** $a \leq b$, on interprète géométriquement $\int_a^b f$ comme l'aire de la zone délimitée verticalement par l'axe des abscisses d'une part et le graphe de la fonction f d'autre part, et horizontalement par les deux droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$. Les parties situées au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement et celles situées au-dessous de cet axe sont comptées négativement. Les propriétés suivantes sont alors très intuitives :

Proposition 33 ***Positivité***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs ***positives ou nulles*** *et $a,b \in I$. Alors*

$$a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0.$$

Proposition 34 ***Croissance***
Soient $f,g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f \leq g$ et $a,b \in I$. Alors

$$a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Remarque 35 L'hypothèse $a \leq b$ est **indispensable** pour ces deux résultats.

On déduit de ces propriétés un résultat (appelé parfois “inégalité de norme”) qui sert fréquemment en analyse :

Proposition 36 *Soient $f,g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues et $a,b \in I$. Alors*

$$a \leq b \Longrightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Remarque 37 Ici aussi, l'hypothèse $a \leq b$ est **indispensable**.

Le résultat reliant intégrales et primitives est le suivant.

Théorème 38 ***Théorème fondamental du calcul intégral.***
*Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Alors la fonction*

$$x \longmapsto \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I.

Ce théorème a plusieurs conséquences immédiates et importantes :

Corollaire 39 ***Existence de primitives***
Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Démonstration: triviale. □

Corollaire 40 ***Calcul d'une intégrale par primitive***
Si f est continue sur I, F est une primitive de f et $a,b \in I$, alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad (=: [F]_a^b)).$$

Démonstration: On note $G : x \longmapsto \int_a^x f$, qui est une primitive de f d'après le théorème fondamental, puisque f est continue sur I. Les fonctions F et G étant deux primitives de f sur l'intervalle I, elles diffèrent d'une constante additive, donc

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f.$$

□

Exemple 41 On vu précédemment que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{1+x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+x+x^2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\ln(3)}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Corollaire 42 ***Intégrale d'une fonction continue strictement positive***
*Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** et **strictement positive** (i.e. telle que $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+^\star$). Alors*

$$\int_a^b f > 0.$$

Démonstration: On note $F : x \longmapsto \int_a^x f$, qui est une primitive de f sur $[a,b]$ puisque f est continue sur cet intervalle. Comme $F' = f$ est strictement positive sur cet intervalle, F est strictement croissante, donc $F(b) > F(a)$ (puisque $b > a$), *i.e.* $\int_a^b f > 0$. □

Exemple 43 Il serait illusoire de vouloir calculer $C = \int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide de primitives de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ car celles-ci ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions classiques (certains mathématiciens ont pu prouver cela !). On peut cependant dire que $C > 0$ par le théorème précédent.

Remarque 44 Les hypothèses de ce dernier corollaire sont beaucoup trop fortes, comme on le verra dans le chapitre d'intégration. En effet, pour une fonction continue positive ou nulle sur $[a,b]$, il suffit qu'elle soit strictement positive **en un point** pour que son intégrale soit positive.

7 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On a besoin de quelques définitions pour pouvoir énoncer les théorèmes d'intégration par parties et de changement de variables. La première est en fait une propriété, qu'on prend ici comme définition à défaut de savoir définir proprement la continuité d'une fonction à valeurs réelles pour l'instant. Les définitions correctes viendront dans un chapitre ultérieur.

Définition 45 Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est *continue* ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Définition 46 Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^1$ ssi elle est dérivable et sa dérivée f' est continue. On note $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(I)$ l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{K}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples 47

1. Toutes les fonctions classiques sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle où elles sont dérivables.
2. Cependant, une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$, comme le montre le contrexemple suivant. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. On peut montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$. Cependant $f'(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc f' n'est pas continue en 0, et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

8 Intégration par parties

Théorème 48 IPP, version intégrales

$$\forall u, v \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(I),\ \forall a, b \in I, \quad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Démonstration: Remarquons que les intégrales ci-dessus sont bien définies puisque uv' et $u'v$ sont continues sur I comme produits de fonctions continues. La fonction uv est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables, de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$. La fonction $u'v + uv'$ est continue comme somme de fonctions continues et elle admet comme primitive uv par ce qui précède. On peut donc lui appliquer le corollaire 40, qui nous donne

$$[uv]_a^b = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv',$$

ce qui donne le résultat voulu en soustrayant $\int_a^b u'v$ de chaque membre. □

En pratique, il est indispensable de signifier quelles sont les fonctions u et v auxquelles on applique l'intégration par parties. Cela se fait souvent par le biais d'un formalisme ancien, mais très pratique, qu'on montre dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 49 Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x$.

On effectue l'intégration par parties suivante :

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & x \\ \mathrm{d}v & = & e^x \,\mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & \mathrm{d}x \\ v & = & e^x. \end{array}\right.$$

qui est justifiée car les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v = \exp$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire

$$\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = \boxed{1.}$$

On a un résultat similaire pour les primitives :

Théorème 50 ***IPP, version primitives***

$$\forall u, v \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(I), \quad \int uv' = uv - \int u'v.$$

Démonstration: La fonction uv est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables, de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$. Comme $u'v$ et uv' sont continues comme produits de fonctions continues, elles admettent des primitives et, par linéarité, $\int u'v + \int uv' = \int (u'v + uv') = uv + C,\ C \in \mathbb{R}$, puis, en soustrayant $\int u'v$ de chaque membre, $\int uv' = uv - \int u'v + C,\ C \in \mathbb{R}$. On convient d'enlèver la constante car chaque membre n'est défini qu'à constante additive près. □

Remarque 51 Comme on le voit à la fin de la démonstration ci-dessus, cette formule se "lit" ainsi : en soustrayant à uv **une** primitive de $u'v$, on obtient **une** primitive de uv'.

On peut utiliser ce résultat pour trouver une primitive de la fonction ln (*cf* le tableau des primitives classiques).

Exemple 52 Calculer $\displaystyle\int \ln$.

On fait l'intégration par parties

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & \ln(x) \\ \mathrm{d}v & = & \mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ v & = & x \end{array}\right.$$

qui est justifiée car $u = \ln$ et $v : x \longmapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\int \ln(x) \,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = \boxed{x\ln(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Remarque 53 Comme on le voit dans cet exemple, on utilise souvent l'IPP pour faire "disparaître" une fonction génante (ici, la fonction ln). Ne pas hésiter non plus à considérer, comme ici, une IPP pour calculer une intégrale ou une primitive d'une fonction qui n'est pas *a priori* un produit, en faisant "apparaître" la fonction constante égale à 1.

Exercice 54 Montrer par une IPP que $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$.

Remarque 55 Lorsqu'on fait des IPP successives, certaines fonctions sont "immortelles" (exp, cos, sin, ch, sh), certaines sont "mutables" (ln, Arctan, Arccos, Arcsin) et les fonctions polynômes sont "mortelles". On a déjà vu dans les exemples précédent comment faire muter une fonction pour pouvoir calculer une primitive ou une intégrale.

Lorsqu'on veut primitiver le produit d'une fonction immortelle par un polynôme (ou calculer son intégrale entre deux points), des IPP successives vont permettre de tuer le polynôme, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 56 Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (x^2-x)\cos x\,\mathrm{d}x$ (exprimer le résultat comme un polynôme en π).

On effectue une <u>double intégration par parties</u> pour faire disparaître le polynôme. Les hypothèses seront bien vérifiées car les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, donc en particulier <u>de classe $\mathcal{C}^1$</u> sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$.

On effectue d'abord l'intégration par parties suivante :

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & x^2-x \\ \mathrm{d}v & = & \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & (2x-1)\,\mathrm{d}x \\ v & = & \sin x \end{array}\right.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (x^2-x)\cos x\,\mathrm{d}x = \big[(x^2-x)\sin x\big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (2x-1)\sin x\,\mathrm{d}x,$$

puis l'intégration par parties

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & 2x-1 \\ \mathrm{d}v & = & \sin x\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & 2\,\mathrm{d}x \\ v & = & -\cos x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} I &= \big[(x^2-x)\sin x\big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} - \big[(2x-1)(-\cos x)\big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \big[(x^2-x-2)\sin x + (2x-1)\cos x\big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi}{6} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi}{3} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3} - 1\right) \\ &= \boxed{\pi^2\left(\frac{1}{72} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) + \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}.} \end{aligned}$$

---

9 Changement de variables

Les intégrations "à vue" considérées précédemment sont un cas particulier simple de ce qu'on appelle un changement de variables. Le résultat général nécessite plus d'hypothèses. Il s'énonce ainsi :

***Théorème 57** Changement de variable, version intégrales*
Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$, f est une fonction continue sur $\varphi(I)$ et $a, b \in I$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

*La fonction φ est appelée le **changement de variable**.*

Démonstration: Comme φ est continue (car dérivable) et I est un intervalle, alors $\varphi(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires). Puisque f est continue sur l'intervalle $\varphi(I)$, elle y admet des primitives. On note F l'une d'entre elles. Par composition de fonctions dérivables, $F \circ \varphi$ est dérivable, de dérivée $(F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Cette dérivée est continue comme produit d'une composée de deux fonctions continues et d'une fonction qui est la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc, par le corollaire 40,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Comme f est continue de primitive F, on a, toujours par le corollaire 40,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 58 Étant données les hypothèses à vérifier pour effectuer un changement de variables, on préfèrera intégrer à vue chaque fois que c'est possible, comme dans les exemples vus précédemment. La rédaction en est grandement simplifiée.

Losrqu'on est "contraint" d'utiliser le théorème ci-dessus, on exprime le changement de variables par le biais d'un formalisme ancien, mais très pratique, qu'on montre dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 59 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose le changement de variables

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & \sin(t) \\ \mathrm{d}x & = & \cos(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

qui est justifié car la fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1] = \sin(\mathbb{R})$, $0 = \sin(0)$, $1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ avec $0, \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$. On obtient alors, puisque $\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$$

Remarque 60 Dans le cas particulier ou le changement de variable est une fonction affine, les hypothèses du théorème sont automatiquement vérifiées, à condition bien sûr que la première intégrale soit bien définie (par continuité de f, avec les notations du théorème). Dans ce cas, on donnera comme **seule justification** qu'on fait un **changement de variable affine**.

Exemple 61 Étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$.

La suite est définie sur $\mathbb{N}^\star$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on effectue le changement de variables affine

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & nu \\ \mathrm{d}x & = & n\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$$

qui donne

$$u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_0^1 = n\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

On en déduit que $\lim u_n = +\infty$, mais surtout que son comportement est linéaire.

Sans faire de changement de variables, on aurait pu remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $\forall x \in [0,n]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \leq 1$, donc $\frac{n}{\mathrm{e}} \leq u_n \leq n$, ce qui est moins précis.

On peut aussi utiliser les changements de variables pour calculer des primitives. Cependant, comme la primitive doit être finalement exprimée avec la variable initiale, ce retour ne peut se faire que si le changement de variable φ admet une réciproque. Pour s'en assurer, on rajoute une hypothèse forte qui implique l'existence et la dérivabilité de φ^{-1} (remarquer que φ' étant continue sur un intervalle, si elle ne s'annule pas, elle est de signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires). Cela donne le résultat suivant :

Théorème 62 Changement de variable, version primitives

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$, f est une fonction continue sur $\varphi(I)$ et si de plus $(\forall t \in I,\ \varphi'(t) \neq 0)$, alors pour toute primitive ψ de $(f\circ\varphi)\varphi'$, la composée $\psi\circ\varphi^{-1}$ est une primitive de f.

*Cela se traduit par l'**abus de notation** suivant*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t) + C^{te} = \psi\circ\varphi^{-1}(x) + C^{te}.$$

Démonstration: En exercice. □

Exemple 63 Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, à l'aide du changement de variables "$u = \sin(x)$".

On donne trois méthodes, dont les rédactions sont de plus en plus courtes :

1. La première méthode consiste à appliquer le théorème sans imagination, ce qu'il est nécessaire de savoir faire lorsque c'est la seule méthode possible : puisqu'on veut calculer une primitive "en x", on exprime x en fonction de u.
   On pose le changement de variable, pour $u \in]0,1[$,

$$\left[\!\left[\begin{array}{rcl} x & = & \mathrm{Arcsin}\,(u) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \end{array} \right.\right.$$

   qui est justifié car $\mathrm{Arcsin}\,|_{]0,1[} \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[), x \longmapsto \frac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[= \mathrm{Arcsin}\,(]0,1[)$ et $\left(\forall u \in]0,1[,\ \mathrm{Arcsin}'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} > 0\right)$. On remarque que, pour $u \in]0,1[$, comme $\mathrm{Arcsin}\,(u) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos(\mathrm{Arcsin}\,(u)) \geq 0$, donc $\cos(\mathrm{Arcsin}\,(u)) = \sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Arcsin}\,(u))} = \sqrt{1-u^2}$. Le changement de variables donne donc, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)(\sin(x)+1)} & = & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(u+1)\sqrt{1-u^2}} \\ & = & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} \\ & = & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u+1} \\ & = & \ln|u| - \ln|u+1| + C \\ & = & \ln(u) - \ln(u+1) + C \\ & = & \boxed{\ln \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.} \end{array}$$

2. On remarque que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)(\sin(x)+1)} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)(\sin(x)+1)}\,\mathrm{d}x$, et on reconnaît au numérateur la dérivée de sin. En posant le changement de variables dans l'autre sens,

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & \sin(x) \\ \mathrm{d}u & = & \cos(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

   et en vérifiant les hypothèses du théorème (laissé au lecteur), on obtient, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)(\sin(x)+1)}\,\mathrm{d}x.$$

   Mais, pour $u \in]0,1[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln(u) - \ln(u+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   En revenant en la variable x, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)(\sin(x)+1)} = \ln \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Si on a remarqué la dérivée de sin au numérateur, il est encore mieux d'intégrer à vue, ce qui évite la vérification délicate des hypothèses.
   Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan(x)(\sin(x)+1)} \quad = \quad \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)(\sin(x)+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|\sin(x)| - \ln|1+\sin(x)| + C, \\
&= \ln(\sin(x)) - \ln(1+\sin(x)) + C, \\
&= \ln\frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

---

10 Stratégie de primitivation

Pour calculer les primitives d'une fonction ou calculer une intégrale sans indication, on devrait se poser, dans l'ordre, les questions suivantes, en s'arrêtant quand on a trouvé une méthode qui convient :

1. La fonction est-elle dans le tableau des primitives classiques ?
2. La fonction s'intègre-t-elle à vue (*i.e.* est-elle de la forme $f = (g \circ u)u'$ avec g dont on connaît une primitive) ?
3. La fonction est-elle d'une forme spécifique pour laquelle on a un algorithme dans le cours ($x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, $x \longmapsto \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, polynôme trigonométrique) ?
4. La fonction est-elle combinaison linéaire de fonctions plus simples (auquel cas on applique la présente stratégie à chaque “morceau”) ?.
5. Une transformation arithmétique simple (du genre “ajouter et soustraire quelque chose”) ou l'usage de formules trigonométriques permet-elle de se ramener à une primitive classique, ou à une primitivation à vue ?
6. Est-on en présence du produit d'une fonction “immortelle” par une fonction polynôme (auquel cas des IPP successives permettent de “tuer” la fonction polynôme) ?
7. Peut-on faire une IPP pour supprimer un facteur génant mutable (ln, Arctan , Arcsin, Arccos) ?
8. Peut-on faire une IPP pour faire apparaître une primitivation à vue ?
9. S'il y a un paramètre $n \in \mathbb{N}$, peut-on trouver une formule de récurrence par une IPP ?
10. Peut-on faire une IPP pour se ramener à calculer une primitive ou intégrale de la même fonction, mais avec un facteur différent de 1, (ce qui permet, par résolution d'une équation linéaire du premier degré, d'obtenir le résultat) ?
11. Peut-on simplifier le problème par un changement de variables “naturel” ? Par exemple, il est bon de savoir (même si ce n'est pas au programme) que s'il y a dans la fonction un radical $\sqrt{1-x^2}$, les changements de variables $x = \sin(u)$ ou $x = \cos(u)$ peuvent aider et que pour primitiver une fraction rationnelle en e^x, $\mathrm{ch}\,(x)$ et $\mathrm{sh}\,(x)$, le changement de variables $u = \mathrm{e}^x$ permet de se ramener à la primitivation d'une fraction rationnelle classique. Pour les fractions rationnelles trigonométriques, il y a des changements de variables classiques (hors programme) dont on parlera un peu dans la sous-section suivante.

11 Compléments

Rien de tout cela n'est exigible !

On évoquera rapidement la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et la méthode de calcul de $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ avec $n \geq 2$.

Des changements de variables appropriés à différents cas de figure permettent de se ramener à des fractions rationnelles : fractions rationnelles en exp, sh et ch, fractions rationnelles en sin et cos (règles de Bioche, seulement évoquées, mais non décrites, pour savoir à quels différents changement de variables s'attendre, et changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$).