DS 1

vendredi 22/09/2023 - durée : 3h

Consignes générales :
Le sujet comporte deux exercices et un problème indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Noter clairement le titre des exercices et du problème ainsi que les numéros des questions traités.
Les calculs seront toujours menés **de façon littérale, et le résultat littéral** **encadré** .
Les applications numériques seront ensuite effectuées et les résultats soulignés.
Une partie du barème sera consacrée à la clarté de la copie et à la présence de **schémas clairs**.
La calculatrice est autorisée, tout document est interdit

Exercice 1 : puissance d'une bombe nucléaire

La légende dit que Geoffrey Ingram Taylor estima en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe nucléaire par analyse dimensionnelle. Cette information a été bien sur immédiatement classée secret défense. Pour ce calcul, Taylor raisonna sur la taille de la sphère de gaz qui s'étend dans l'atmosphère après l'explosion de la bombe (le fameux *champignon*). Il supposa a priori que le processus d'expansion de cette sphère dépend au minimum des paramètres suivants : le temps t, l'énergie E dégagée par l'explosion et la masse volumique de l'air ρ.

1. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de l'énergie dégagée E en fonction de t , ρ et du rayon r de la sphère de gaz. On cherchera E sous la forme $E = t^\alpha \rho^\beta r^\gamma$.
2. En mesurant le diamètre du nuage sur la photo réalisée après 15ms, faire l'application numérique de l'énergie E.
   On prendra pour densité de l'air $\rho = 1,2$ kg.m^{-3} et on donnera le résultat en masse équivalente de TNT (1kg de TNT libère une énergie de 4,6 MJ.)

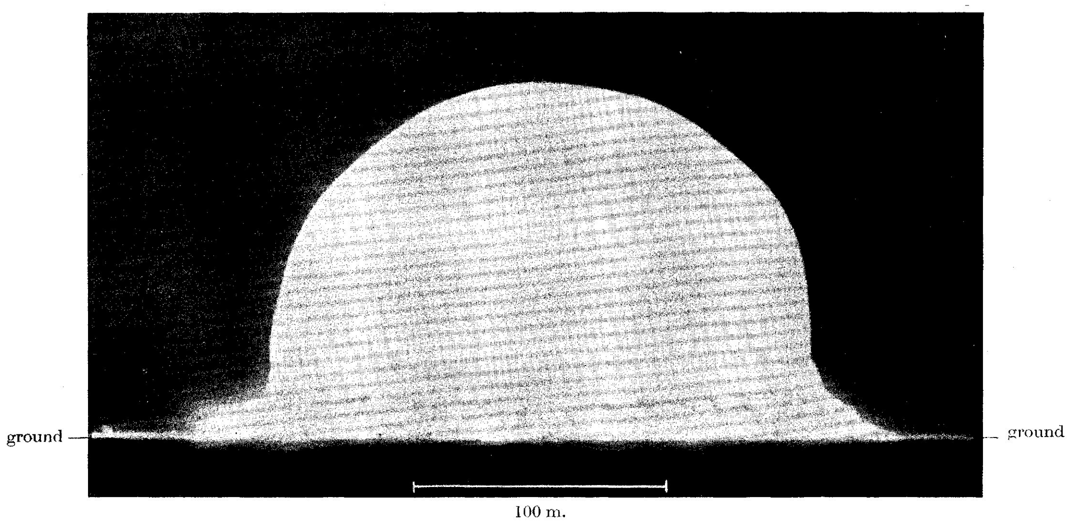


FIGURE 7. The ball of fire at $t = 15$ msec., showing the sharpness of its edge.

temps (ms)	rayon (m)
0,1	11,1
0,2	19,9
0,4	25,4
0,5	28,8
0,7	31,9
0,8	34,2
0,9	36,3
1,1	38,9
1,2	41,0
1,4	42,8
1,5	44,4
1,7	46,0
1,8	46,9

temps (ms)	rayon (m)
1,9	48,7
3,3	59,0
3,5	61,1
3,8	62,9
4,1	64,3
4,3	65,6
4,6	67,3
15,0	106,5
25,0	130,0
34,0	145,0
53,0	175,0
62,0	185,0

Mesures du rayon r du champignon en fonction du temps t après l'explosion

3. À l'aide des mesures ci-dessus du rayon r du nuage en fonction du temps t, vérifier la dépendance des paramètres t et r en traçant $\ln(r)$ en fonction de $\ln(t)$ sur le papier millimétré fourni.

Exercice 2 : Loi de Cauchy

La formule de Cauchy $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ donne l'indice optique n d'un matériau en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0. A et B sont des constantes positives.

1. Quelles sont les dimensions et unités de A et B ?

   On mesure l'indice d'un même matériau pour deux radiations :

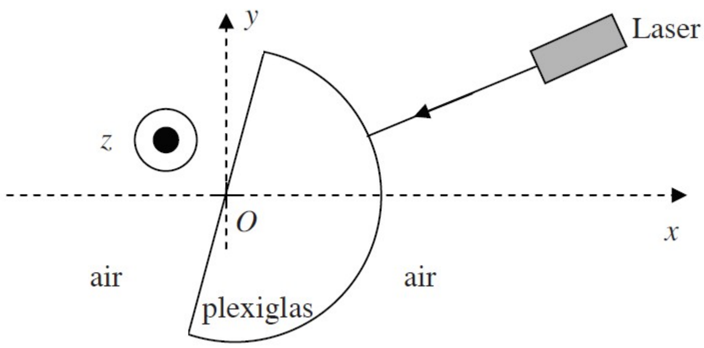
longeur d'onde dans le vide	couleur	indice optique mesuré
$\lambda_{0r} \;=\; 768,0$ nm	rouge	$n_r \;=\; 1,618$
$\lambda_{0v} \;=\; 434,0$ nm	violet	$n_v \;=\; 1,652$

2. Calculer les valeurs de A et B.
3. En déduire la valeur de l'indice optique pour une radiation jaune de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0j} \;=\; 589,0$ nm.

Problème : la fibre optique

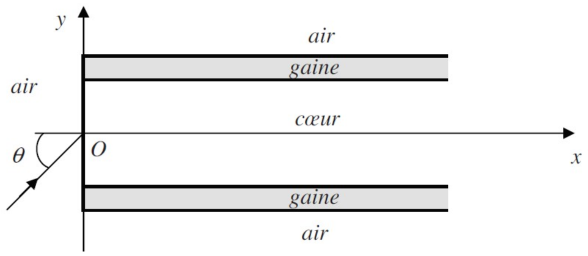
Dans toute cette partie on notera $c = 3,00.10^8$ m.s^{-1} la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Énoncer les lois de Snell – Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant de schémas.
2. Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe (Oz), O étant le centre du disque.



Reproduire la figure ci-dessous et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelles lois peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

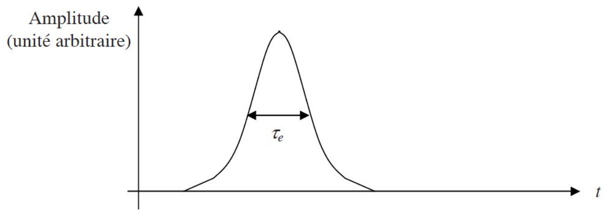
Une fibre optique à saut d'indice, représentée ci-contre, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1,500$ et de rayon r_c, entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1,485$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox, on se restreint à une étude dans le plan (xOy).



3. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air dans le plan (xOy), pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence θ. Reproduire la figure sur votre copie et tracer le rayon qui se propage dans la fibre optique. On notera I le premier point d'incidence à l'interface cœur/gaine et i l'angle d'incidence du rayon en I.
4. Montrer que $\sin\theta = \dfrac{n_c}{n_a}\cos i$
5. Montrer que le rayon reste dans le cœur si l'angle θ est inférieur à un angle limite θ_L, appelé angle d'acceptance de la fibre optique, dont vous donnerez l'expression en fonction de n_c et de n_g. Calculer la valeur numérique de θ_L. L'indice de l'air vaut $n_a = 1,000$.

   On considère maintenant une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_L.
6. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de L, c et n_c, la durée de parcours T_1 de ce rayon.
7. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de L, c, n_g et n_c, la durée de parcours T_2 de ce rayon.
8. En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L, c, n_g et n_c. Calculer la valeur numérique de δT pour $L = 10$ km.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e, représentée ci-contre, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L.



9. Reproduire la figure précendente sur votre copie et représenter par dessus l'allure de l'impulsion en sortie de fibre. Préciser sa durée approximative τ_s.
10. Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses, appelées bits, périodiquement avec une fréquence f. En supposant τ_e négligeable devant δT , quelle est la fréquence maximale de transmission f_{max} qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?
11. En considérant L_{max} la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit$B = L_{max} \times f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B en fonction de c, n_c et des indices optiques. Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur.
12. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.