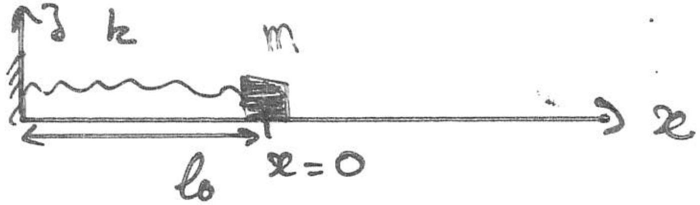
TD5 Correction

Ex 1

1.



- <u>système étudié</u> : masse m accrochée au ressort
- <u>référentiel</u> terrestre supposé galiléen :
- <u>bilan des forces</u>

poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

réaction du support $\vec{R} = R\vec{e_z}$

force de rappel du ressort : $\vec{F_{el}} = -k(l-l_0)\,\vec{e_x}$

- 2ᵉ loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{el}}$

on projette sur l'axe Ox, il reste :

$$m\ddot{x} = -k(l-l_0)$$

et comme on pose $x = l - l_0$ on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx$$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

2. La solution de cette équation est de la forme : $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

avec A et B des constantes.

à $t=0$ on a $x(0) = 0 = A$

$\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}}$

d'où la loi d'évolution $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

l'amplitude de $x(t)$ est $\boxed{X_m = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}$

la pulsation vaut $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

la fréquence vaut $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

et la période vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

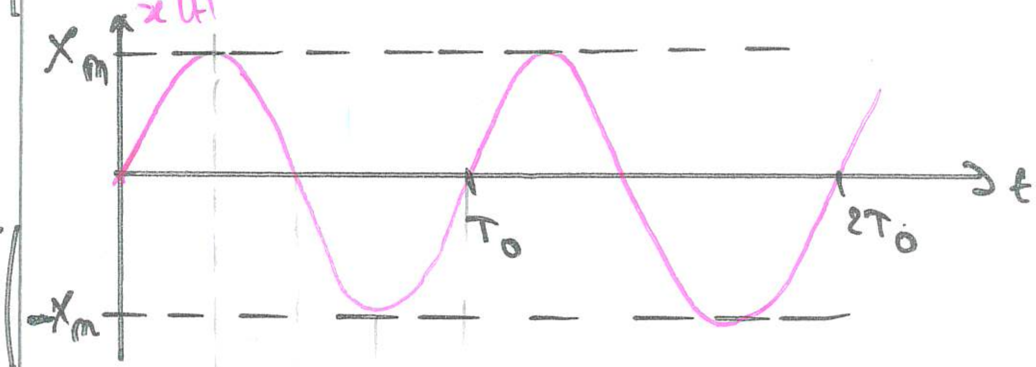
3_ l'élongation du ressort est donnée par $\ell(t) = x(t) + \ell_0$ d'après l'énoncé

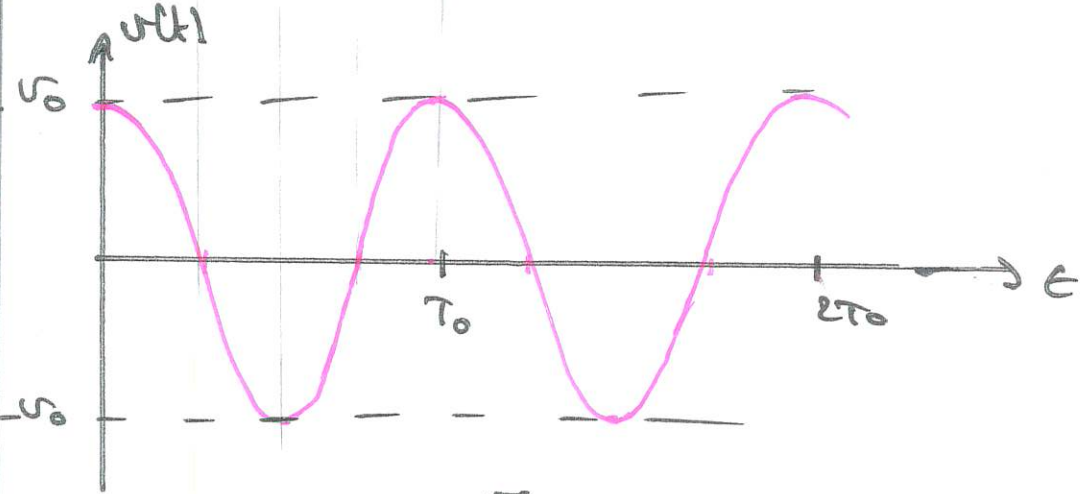
$$\Rightarrow \boxed{\ell(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

la vitesse est $v(t) = \frac{dx}{dt}$

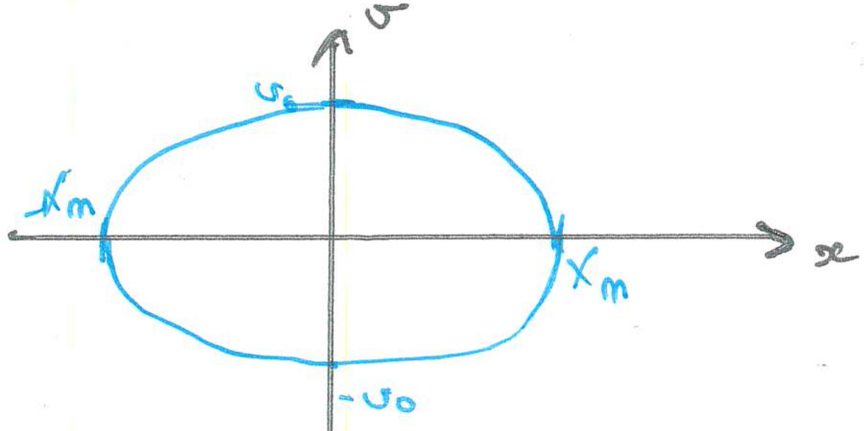
$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0\cos \omega_0 t}$$

4. allures de $x(t)$ et $v(t)$





5.



courbe fermée, ellipse

6. $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega_0 t$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega_0 t}$$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$ et $x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2} k \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t} = \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2 \omega_0 t$

car $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$E_m = E_c + E_p$

$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t$

or $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}$

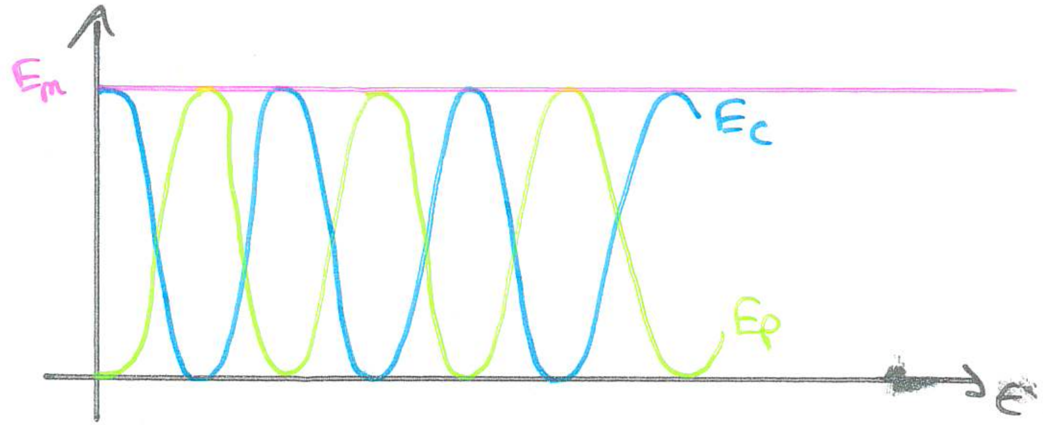
$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k \times \frac{m}{k} v_0^2 \sin^2 \omega_0 t$

$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2 \omega_0 t$

$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 (\underbrace{\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t}_{=1})$

$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_m(t=0)}$

l'energie mécanique se conserve et est égale à l'energie mecanique initiale



Ex 2

$x(t) = 3 \cos(20t + \pi/4)$

1. periode $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \approx 0{,}31 \text{ s}}$

fréquence $\boxed{f = \frac{1}{T_0} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz} \approx 3{,}2 \text{ Hz}}$

pulsation $\boxed{\omega_0 = 20 \text{ rad/s}}$

amplitude $\boxed{X_m = 3 \text{ cm}}$

2- $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3 \times \left(-20 \sin\left(20t + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$\boxed{v(t) = -60 \sin\left(20t + \dfrac{\pi}{4}\right)}$ en $\underline{\text{cm/s}}$

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -60 \times 20 \cos\left(20t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{a(t) = -1200 \cos\left(20t + \dfrac{\pi}{4}\right)}$ en $\underline{\text{cm/s}^2}$

3- amplitude de la vitesse : $\boxed{V_m = 60 \text{ cm/s}}$

amplitude de l'accélération $\boxed{A_m = 1200 \text{ cm/s}^2}$

4- à $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = 3 \cos \dfrac{\pi}{4} \\ v(0) = -60 \sin \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x(0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ cm $v(0) = -\dfrac{60}{\sqrt{2}}$ cm/s

TD5 4

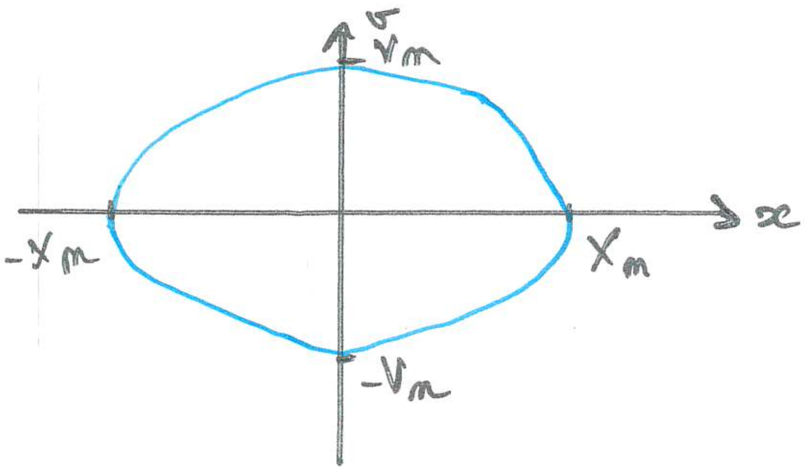
$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x(0) \simeq 2{,}1 \text{ cm} \\ v(0) = -42{,}4 \text{ cm/s} \end{array}}$

à $t = 4$ s $x(4) = 3 \cos\left(80 + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$a(4) = -60 \sin\left(80 + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{\begin{array}{l} x(4) \simeq 1{,}9 \text{ cm} \\ v(4) = 46{,}9 \text{ cm/s} \end{array}}$

5- portrait de phase = courbe $v(x)$:



6- on cherche $\omega = k^\alpha m^\beta$

$[\omega] = [k]^\alpha [m]^\beta$

$$[k] = \frac{[F]}{L} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

$$[\omega] = T^{-1}$$

et $[m] = M$

$$\Rightarrow T^{-1} = M^{\alpha+\beta} T^{-2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases}}$$

d'où $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la réponse (3) est correcte

7. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

avec $x = X_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$v = -X_m \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

on ne connaît pas k mais on connaît m et ω donc on peut écrire

$$k = m\omega^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 \cos^2(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2}$$

AN : $E_m = \frac{0{,}1 \times 20^2 \times (3\ 10^{-2})^2}{2}$

$E_m = 2 \times 9 \times 10^{-1+2-4} = 18\ 10^{-3}$

$$\boxed{E_m = 18\ mJ}$$

Ex 3

1. A l'equilibre on a $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

et le bilan des forces donne :

le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

la force de rappel du ressort : $\vec{F}_{el} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$

donc à l'équilibre $\ell = \ell_{eq}$ et

$$-mg + k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$$

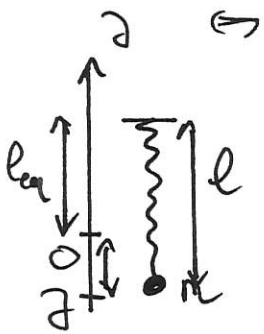
$$\Leftrightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

2_ 2e loi de Newton : $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

l'origine des positions z est prise en $z = -\ell_{eq}$

$$\Rightarrow \ell(t) = \ell_{eq} - z(t) \quad (\text{si } z < 0 \ \ell > \ell_{eq})$$

$$\Leftrightarrow z(t) = \ell_{eq} - \ell(t)$$



$$\Rightarrow m\vec{a} = -mg\vec{e}_z + k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$$

on projette sur l'axe Oz :

$$m\ddot{z} = -mg + k(\ell_{eq} - z - \ell_0)$$

or $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg + k\left(\frac{mg}{k} - z\right)$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -kz$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et on obtient

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0}$$

3_ les solutions de cette équation sont de la forme : $\boxed{z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$ avec A et B des constantes

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ est la pulsation propre du mouvement

la période vaut $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

on retrouve une solution de même forme que pour un ressort horizontal car nous avons pris l'origine des positions à la position d'équilibre

4. $z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

à $t=0$ $\begin{cases} \ell(0) = 2\ell_0 = \ell_{eq} - z(0) \\ v(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z(0) = -\ell_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\ell_0 \\ B = 0 \end{cases}$

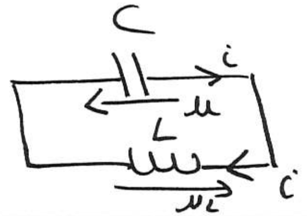
$\Leftrightarrow \boxed{z(t) = -\ell_0 \cos\omega_0 t}$

$\boxed{v_z(t) = \dot{z}(t) = \omega_0 \ell_0 \sin\omega_0 t}$

et $\boxed{a_z(t) = \ddot{z}(t) = \omega_0^2 \ell_0 \cos\omega_0 t}$

Ex 4 Cours !

1.



$\begin{cases} u + u_L = 0 \\ i = C\dfrac{du}{dt} \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$

$\Rightarrow u + L\dfrac{di}{dt} = 0$

$u + LC\dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

2. solution : $u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

à $t=0$ $\begin{cases} u(0) = U_0 & \text{continuité de } u \\ i(0) = 0 & \text{continuité de } i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(0) = U_0 = A \\ \dfrac{du}{dt}(0) = 0 = B\omega_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{u(t) = U_0 \cos\omega_0 t}$

amplitude des oscillations $\boxed{U_m = U_0}$

période des oscillations : $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$

fréquence des oscillations : $\boxed{f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

3. $i(t) = C\frac{du}{dt} = C \times V_0 \times (-\omega_0 \sin \omega_0 t)$

$$\boxed{i(t) = -V_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\omega_0 t}$$

amplitude $\boxed{I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}}$

4. $W_E = \frac{1}{2}Cu^2$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t}$$

$W_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\,U_0^2\,\frac{C}{L}\sin^2\omega_0 t$

$$\boxed{W_B = \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t}$$

energie totale $W_C + W_B = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t$

$= \frac{1}{2}CU_0^2\underbrace{(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)}_{=1}$

$\Rightarrow \boxed{W_C + W_B = \frac{1}{2}CU_0^2} =$ constante

Ex 5.

1. Amplitude du signal 1 $\boxed{S_1 = 1V}$

Amplitude du signal 2 $\boxed{S_2 = 3V}$

valeur moyenne $\boxed{\langle S_1\rangle = \langle S_2\rangle = 0V}$

2. signal 1 période $T_1 = 5 \times 200\,\mu s$

$$\boxed{T_1 = 1ms}$$

frequence $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10^{-3}}$

$$\boxed{f_1 = 10^3 Hz}$$

signal 2 période $T_2 = 5 \times 200\,\mu s$

$\Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 = 1ms \text{ et } f_2 = 1kHz}$

3. dephasage $\Delta\phi = \Delta t \times \frac{2\pi}{T_1} = \Delta t \times \frac{2\pi}{T_2}$

et $\Delta t = 0{,}8 \times 200\,\mu s = 160\,\mu s$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{0,8}{5} \times 2\pi = \frac{1.6}{5}\pi$$

$$\boxed{\Delta\phi \simeq \frac{\pi}{3}}$$

Ex 6.

1. $M_{Cl} \gg M_H \iff$ la masse du chlore est très grande devant celle de l'hydrogène donc seul l'atome d'hydrogène va se déplacer, on peut considérer l'atome de chlore fixe.

2 – $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m_H}}$

$\iff k = m_H 4\pi^2 f_0^2$ avec m_H = masse de l'atom d'hydrogène : $m_H = \frac{M_H}{N_A}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 4\pi^2 \frac{M_H f_0^2}{N_A}}$$

AN ⚠ à bien mettre les masses en kg : TD5 9

$$k = 4\pi^2 \times \frac{10^{-3} \times (8{,}5\ 10^{13})^2}{6{,}02\ 10^{23}}$$

$$= 474 \times \underbrace{10^{-3-23+26}}_{=10^0 = 1}$$

$$\boxed{k = 474\ N/m}$$

3 – $E_m = \frac{h f_0}{2} = \frac{1}{2} k X_m^2$ par analogie avec l'energie mécanique d'un ressort attaché à la masse m_H

$$\Rightarrow \boxed{X_m = \sqrt{\frac{h f_0}{k}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h N_A}{f_0 M_H}}}$$

AN $X_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6{,}63\ 10^{-34} \times 6{,}02\ 10^{23}}{8{,}5\ 10^{13} \times 10^{-3}}}$

$X_m \simeq 0{,}4 \times 10^{-10{,}5}\ m$

$$\boxed{X_m \simeq 10^{-11}\ m = 0{,}1\ \text{Å}}$$

1. $E_m = (n + \frac{1}{2}) h f_0 \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Delta E = E_m(n=1) - E_m(n=0) = h f_0 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

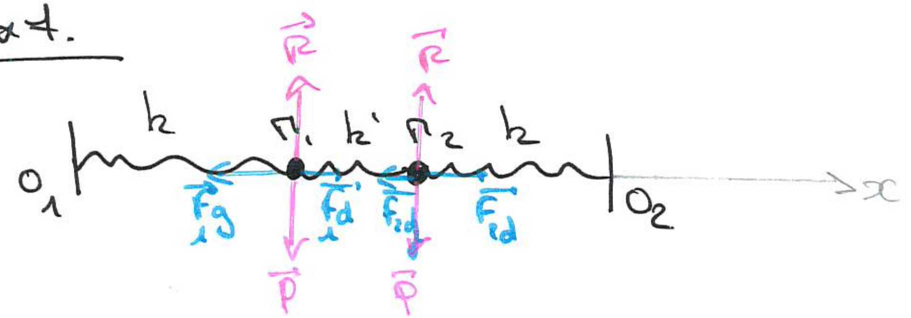
$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3\ 10^8}{8{,}5\ 10^{13}}$$

$$\lambda = 0{,}35\ 10^{-5}\ m$$

$$\underline{\lambda = 3{,}5\ \mu m} \quad \underline{IR}$$

la radiation correspondant à cette transition <u>n'est pas visible</u>

Ex 4.

1. 

bilan des forces sur M_1 :

poids $\vec{P} = m\vec{g}$

reaction du support $\vec{R}$

force de rappel du ressort de gauche $\vec{F}_{1g} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{e_x}$

force de rappel du ressort de droite : $\vec{F}_{1d} = k'(\ell_2 - \ell_0)\vec{e_x}$

bilan des forces sur M_2 :

poids $\vec{P} = m\vec{g}$

reaction du support $\vec{R}$

force de rappel du ressort de gauche $\vec{F}_{2g} = -k'(\ell_2 - \ell_0)\vec{e_x}$

force de rappel du ressort de droite $\vec{F}_{2d} = k(\ell_3 - \ell_0)\vec{e_x}$

2. à l'equilibre $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

pour M_1 : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{1g} + \vec{F}_{1d} = \vec{0}$

sur Ox : $-k(\ell_{1eq} - \ell_0) + k'(\ell_{2eq} - \ell_0) = 0$

pour M_2: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{2g} + \vec{F}_{2d} = \vec{0}$

sur Ox $-k'(\ell_{2eq} - \ell_0) + k(\ell_{3eq} - \ell_0) = 0$

on a donc $\begin{cases} k(\ell_{1eq}-\ell_0) = k'(\ell_{2eq}-\ell_0) \\ k(\ell_{3eq}-\ell_0) = k'(\ell_{2eq}-\ell_0) \end{cases}$

et $\ell_{1eq}+\ell_{2eq}+\ell_{3eq} = 3\ell_0$

$\Rightarrow \quad \ell_{1eq}-\ell_0 = \ell_{3eq}-\ell_0 \Rightarrow \underline{\ell_{1eq}=\ell_{3eq}}$

$\Rightarrow \quad \ell_{2eq} + 2\ell_{1eq} = 3\ell_0$

et $k(\ell_{1eq}-\ell_0) = k'(\ell_{2eq}-\ell_0)$

$\Rightarrow \quad k(\ell_{1eq}-\ell_0) = 2k'(\ell_0-\ell_{1eq})$

$\Leftrightarrow \quad (\ell_{1eq}-\ell_0)\underbrace{(k+2k')}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell_{1eq}=\ell_0}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell_{3eq}=\ell_{1eq}=\ell_0}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell_{2eq}=\ell_0}$

3. $x_1 = \ell_1 - \ell_{1eq} = \ell_1 - \ell_0$

$x_2 = \ell_3 - \ell_{3eq} = \ell_3 - \ell_0$

2e loi de Newton sur M_1 projetée directement sur Ox :

$m a_{1x} = -k(\ell_1-\ell_0) + k'(\ell_2-\ell_0)$

la position de M_1 peut être repérer à partir du point fixe O_1 : $\overrightarrow{OM_1} = \ell_1 \overrightarrow{e_x}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{a_1} = \frac{d^2\ell_1}{dt^2}\overrightarrow{e_x}$

$\Rightarrow \quad a_{1x} = \frac{d^2\ell_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$ car $\ell_0 = cte$

$\Rightarrow \quad \underline{m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(\ell_2-\ell_0)}$

de plus $\ell_2 = 3\ell_0 - \ell_1 - \ell_3 = \ell_0 + \underbrace{(\ell_0-\ell_1)}_{-x_1} + \underbrace{(\ell_0-\ell_3)}_{-x_2}$

$\ell_2 = \ell_0 - x_1 - x_2$

$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(\ell_0 - x_1 - x_2 - \ell_0)$

$$\iff m\ddot{x}_1 = -(k+k')x_1 - k'x_2$$

$$\iff \boxed{\ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}x_1 + \frac{k'}{m}x_2 = 0} \quad (1)$$

2ᵉ loi de Newton sur M_2 projetée sur Ox :

$$ma_{2x} = -k'(\ell_2 - \ell_0) + k(\ell_3 - \ell_0)$$

$$ma_{2x} = +k'(x_1 + x_2) + k x_2$$

et $\vec{a}_2 = \frac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = \frac{d^2(\ell_1+\ell_2)}{dt^2}\vec{e_x}$

$$\ell_1 + \ell_2 = 3\ell_0 - \ell_3 = 2\ell_0 - x_2$$

$$\Rightarrow \vec{a_2} = -\ddot{x}_2\,\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow -m\ddot{x}_2 = (k'+k)x_2 + k'x_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}x_2 + \frac{k'}{m}x_1 = 0} \quad (2)$$

4. $\begin{cases} u = x_1 + x_2 \\ v = x_2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \\ \ddot{v} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \end{cases}$

TD5 (12)

$(1)+(2) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \frac{k+k'}{m}(x_1+x_2) + \frac{k'}{m}(x_1+x_2) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \frac{k+2k'}{m}u = 0}$$

$(2)-(1) \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + \frac{k+k'}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k'}{m}(x_1 - x_2) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{v} + \frac{k}{m}v = 0}$$

on peut alors écrire :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{u} + \omega_I^2 u = 0 \\ \ddot{v} + \omega_{II}^2 v = 0 \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} \omega_I = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \\ \omega_{II} = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}}$$

Comme $k' > 0$ on a $\boxed{\omega_I > \omega_{II}}$

<u>u oscille plus vite que v.</u>

5. $\begin{cases} u(t) = A\cos\omega_I t + B\sin\omega_I t \\ v(t) = A'\cos\omega_{II} t + B'\sin\omega_{II} t \end{cases}$

à $t=0$ $\begin{cases} \ell_1(0) = \ell_0 + a \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(0) = a$

et $\ell_2(0) = \ell_0 \Rightarrow \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

ainsi $\begin{cases} u(0) = a \\ v(0) = -a \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{v}(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = a \\ A' = -a \end{cases}$ et $\begin{cases} B = 0 \\ B' = 0 \end{cases}$

ainsi $\boxed{\begin{matrix} u(t) = \cos \omega_I t \\ v(t) = -a \cos \omega_{II} t \end{matrix}}$

6. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{u-v}{2} = \dfrac{a}{2}\left(\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t\right) \\ x_2 = \dfrac{u+v}{2} = \dfrac{a}{2}\left(\cos \omega_I t - \cos \omega_{II} t\right) \end{cases}$

or on sait que :

$\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t = 2 \cos \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} t \cos \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2} t$

et $\cos \omega_I t - \cos \omega_{II} t = -2 \sin \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} t \sin \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2} t$

donc en posant $\omega_0 = \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}$ et $\Omega = \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}$

on a :

$\boxed{\begin{matrix} x_1 = a \cos \omega_0 t \cos \Omega t \\ x_2 = -a \sin \omega_0 t \sin \Omega t \end{matrix}}$

cas limites :

$k' \to 0$ $\quad \omega_I = \omega_{II} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \omega_{II}$, $\Omega = 0$

donc $\boxed{\begin{cases} x_1 = a \cos \omega_{II} t \\ x_2 = 0 \end{cases}}$ seule Π_1 se déplace

$k' \to +\infty$ $\quad \omega_I = \sqrt{\frac{2k'}{m}} \gg \omega_{II}$

$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \approx \frac{\omega_I}{2} \\ \Omega \approx \frac{\omega_I}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = a \cos^2 \frac{\omega_I}{2} t \\ x_2 = -a \sin^2 \frac{\omega_I}{2} t \end{cases}}$ Π_1 et Π_2 sont en opposition de phase