C10 Nombres réels et suites

I. Rappels et compléments sur $\mathbb{R}$

1. Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

- Pour $A \subset \mathbb{R}$, et $M \in \mathbb{R}$
  M majore A $\Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq M$
  Pour $A \subset \mathbb{R}$:A
  A est majoré $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leq M$
- Remarque 9 :
  - $\varnothing$ n'a pas de borne sup car tout réel majore $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus petit élément.
  - Une partie non majorée a pour ensemble de majorants $\varnothing$ qui n'admet pas de plus petit élément
  - Dans ($\mathbb{Q}$, $\leq$), il existe des parties non vides et majorée qui n'admettent pas de borne sup : $\{q \in \mathbb{q} | q^2 \leq 2\}$ ($\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$).
  - Tout corp totalement ordonné qui vérifie la propriété de la borne sup est "pareil" que $\mathbb{R}$ au sens ou il existe ϕ : $K \to \mathbb{R}$ tq

    $$\begin{cases} \forall x, y \in K, \begin{cases} \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \end{cases} \\ \phi(\mathbb{1}_{\mathbb{K}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

    ϕ est un morphisme de corp
- Proposition 12 : Démonstration
  On raisonne par disjonction de cas en utilisant la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$
  - Si $A \subset \mathbb{R}$
    - Si $A \neq \varnothing$ et A est majoré
      Alors l'ensemble des majorants dans $\mathbb{R}$, M admet un plus petit élément et son ensemble de majorants dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $M \cup \{+\infty\}$ (car $-\infty$ ne majore pas A puisque $A \neq \varnothing$ et

$A \subset \mathbb{R}$) et $sup_{\mathbb{R}}(A)$ est encore le plus petit élément de $M \cup \{+\infty\}$
Donc $sup_{\mathbb{R}}(A) = sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A)$
    - Si A est non majorée, l'ensemble de ses majorants dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$ et $min(\overline{\mathbb{R}}) = -\infty$
- Si $A \not\subset \mathbb{R}$
    - Si $+\infty \in A$ alors l'ensemble des majorants de A est $\{+\infty\}$ donc son plus petit élément existe ($+\infty$)
    - Si $+\infty \notin A$ Alors $-\infty \in A$
    -> Si A = $\{-\infty\}$, $sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{+\infty\} = -\infty$ existe
    -> Sinon $A = \{-\infty\} \cup B$ avec $b \subset \mathbb{R}$ et $B \neq \varnothing$
    et alors l'ensemble des majorants de A est celui de B donc $sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = sup_{\overline{\mathbb{R}}}(B)$ qui existe par ce qui précède.

2. Archimédianité et approximations décimales

- Exercice 19 : Excalibur 1

3. Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

4. Convexité

Excalibur 2

II. Généralités sur les suites réelles

1. Définition et exemples

- Exercice 36 : Excalibur 3
On conjecture :

    1. Si $u_0 < -1$, u_1 n'est pas définit
    2. Si $u_0 \in [-1; l[$ $u_n \to l$ et $(u_n) \uparrow$
    3. Si $u_n = l$ u est constante de valeur l
    4. Si $u_n > l$, $u_n \to l$ et $(u_n) \downarrow$

Puis on e démontre :

1. Rien a dire
2. Trivial (recurrence immédiate)
3. Par exemple, on montre par recurrence que $(u_n) \uparrow$ On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_n : \text{''} -1 \leq u_n < u_{n+1} < l \text{''}$$

Lemme :

$$\forall x \in [-1, l[, xwf(x) < l$$

Démonstration :
Etude de fonction ou
Calcul algébrique :
Soit $x \in [-1, l[$,

$$l - f(x) = f(l) - f(x) = \sqrt{1+l} - \sqrt{1+x} = \frac{l-x}{\sqrt{1+l}+\sqrt{1+x}}$$

Or

$$\sqrt{1+l} + \sqrt{1+x} \geq \sqrt{1+l} > 1$$

Comme $l - x > 0$,

$$0 < l - f(x) < l - x$$

Donc

$$f(x) > x$$

$$\square$$

Initialisation :
On a $u_0 \in [-1, l[$.
et $u_1 = f(u_0)$ donc par le lemme $+1 \leq u_0 < u_1 < l$
Hérédité :
Soit n tq A_n
Alors par le lemme :

$$-1 \leq u_n \leq f(u_n) < l$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$
Donc on a bien A_{n+1}

Ainsi :
$(u_n) \uparrow$ et est majoré par l
Par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $l' \in [-1, l]$
Pour cela on admet le Théorème de la limite finie :
Si $(u_n)_{n \backslash \in \mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers l' avec f continue en l', alors $f(l') = l'$

Ici f est continue en l' car d est continue sur $[-1, l]$, donc l' est fixe et comme le point fixe est unique, $l' = l$
Ainsi
$(u_n) \uparrow$ et $u_n \to l$

4. Même chose

2. Propriété générales des suites

Exercice 40

$$\text{u est majorée} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$$

$$\text{u est croissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \uparrow$$

$$\text{u est stationnaire} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

$$\text{u est périodique} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$$

III. Limite d'une suite réelle

1. Définition

Proposition 58 (Démonstration)

Soir $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $l \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$$

En prenant "$\epsilon = 1 > 0$" dans cette def, On obtiens $N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq 1$$

A fortiori, pour $n \geq N$,

$$|u_n| - |l| \leq 1$$

i.e.

$$|u_n| \leq 1 + |l|$$

En posant : $M = max(|u_0|, \ldots, |u_{n-1}|, 1 + l) \in \mathbb{R}$
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M$$

Ainsi u est bornée.

Exemple 64

Soit $A \in \mathbb{R}$,
On pose $N = \lceil A^2 \rceil \in \mathbb{N}$
Pour tout $n \geq N$,
$n \geq A^2$
Donc,

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{A^2} = |A| \geq A$$

Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sqrt{n} \geq A$$

i.e.

$$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

Corollaire 67 (Démonstration)

$$\begin{cases} (\lambda)_{n \in \mathbb{N}} \to \lambda \\ (\mu)_{n \in \mathbb{N}} \to \mu \end{cases}$$

Puis some de produits de limites.

2. Opérations sur les limites

Montrons que $(-1)^n$ n'admet pas de limite

- Si $l \in \mathbb{R}$
  On suppose par l'absurde que $(-1)^n \underset{+\infty}{\rightarrow} l$
  $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$$
  On a alors en prenant $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$
  On obtiens $N \in \mathbb{N}$ tq
  $$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \frac{1}{2}$$
  On a alors
  $$2 = |u_n - u_{n+1}| = |u_n - l + l - u_{n+1}| \leq |u_n - l| + |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
  Contradiction
- Si $l = +\infty$
  On suppose par l'absurde que $(-1)^n \underset{+\infty}{\rightarrow} l$
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$
  En prenant $A = 2$ on obtiens N tq
  $$\forall n \geq N, u_n \geq 2$$
  Mais
  $$2 \leq u_n \in \{-1, 1\}$$
  Contradiction
- Si $l = -\infty$
  La même

Théoreme 72 Démonstration

Dans le cas ou $lim\ u = -\infty$ et $l < 0$

- $l \in \mathbb{R}_-^*$
  Soit $A \in \mathbb{R}_-^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$
  Par définition de $lim\ u = -\infty$ et $l < 0$
  $\forall n \geq N, u_n \leq \frac{2A}{l}$
  Par déf de $lim\ v = l$, comme $-\frac{l}{2} > 0$
  Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq,

$$\forall n \geq N', v_n \in \left[\frac{3l}{2}, \frac{l}{2}\right]$$

  Soit $N'' = max(N, N')$
  Pour $n \geq N''$,

$$\begin{cases} u_n \leq \frac{2A}{l} < 0 \\ v_n \leq \frac{l}{2} < 0 \end{cases}$$

  Donc

$$u_n v_n \geq \frac{2A}{l}\frac{l}{2} = A$$

  Ainsi

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', u_n v_n \geq A$$

  i.e.

$$lim\ uv = +\infty$$

Propriété limites exposants et Démonstration

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$

- Si $\alpha < 0$, $n^\alpha \to 0^+$
- Si $\alpha = 0$, $n^\alpha \to 1$
- Si $\alpha > 0$, $n^\alpha \to +\infty$

Démo:

- Cas $\alpha = 0$
  $(n^0)_n$ est constante de solution 1
  Donc

$$n^0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

- Cas $\alpha > 0$
  Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$
  On pose $N = \lceil A^{1/\alpha} \rceil$
  Soir $n \geq N$,
  On a :
  $n \geq A^{1/\alpha}$
  Ainsi

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, n^\alpha \geq A$$

  i.e.

$$n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- Cas $\alpha < 0$
  Comme $n^{-\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  Par inverse de la limite,

$$n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$$

3. Limites et ordre

Théorème 81 Démonstration

On raisonne par l'absurde (ordre total)
Supposons que $l > l'$
Montrons que $u - v$ admet une limite appartenant a $\mathbb{R}_+^* \cup \{-\infty\}$
Par disjonction de cas :

- Si $l, l' \in \mathbb{R}$, $u - v \to l - l' > 0$

- Si $l = +\infty$, comme $l' < +\infty$
  v est majorée donc -v est minorée
  et comme $u \to +\infty$, $u + (-v) \to +\infty$!!!!!!!!!!!!!
  i.e. $u - v \to +\infty > 0$
- Si $l \in \mathbb{R}$ et $l' = -\infty$
  On a $-v \to -\infty$
  et u est minorée (car bornée)
  donc $u - v = u + (-v) \to +\infty > 0$

Notons $l'' = lim(u - v) \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$

- Si $l'' \in \mathbb{R}_+^*$
  Par définition de l'', $u_n - v_n \geq l'' - \frac{l''}{2} > 0$
  APDC Rang N_0 Ainsi $u_n > v_n$
  ce qui contredit $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \leq v_n$
- Si $l'' = +\infty$
  APDC Rang, $u_n - v_n \geq 1$ définition de la limite
  Donc $u_n > v_n$
  ce qui contredit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$

Ainsi $l \leq l'$

On peut le noter aussi :

$$\begin{array}{cccc} & u_n & < & v_n \\ n \to +\infty & \downarrow & & \downarrow \\ & l & \leq & l' \end{array}$$

Théorème 85 Démonstration

Soit $\epsilon > 0$
Comme $lim\ u = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq
$\forall n \geq N$, $u_n \in [l - \epsilon,\ l + \epsilon]$
Comme $lim\ w = l$, il existe $N' \in \mathbb{N}$. tq
$\forall n \geq N'$, $w_n \in [l - \epsilon,\ l + \epsilon]$
On pose $N'' = max(N, N')$

Pour $n \geq N''$

$$l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$$

car $n \geq N'$
Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N'' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'', v_n \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$$

i.e.

$$lim\ v = l$$

Propriété sur les limites des suites géométriques

- Si $a > 1$, $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1$ Donc $1^n \to 1$
- Si $a \in]-1, 1[$, $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- Si $a = -1$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (périodique est divergente)
- Si $a < -1$, $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Diverge sans limite et n'est pas bornée (et même $|a^n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

Démonstration :

- Cas $a > 1$
  On pose $\epsilon = a - 1 > 0$
  Pour $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = (1 + \epsilon)^n$$

$$\overset{binome}{=} 1 + n\epsilon + \cdots \geq 0$$

$$\leq 1 + n\epsilon \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Donc $a^n \to +\infty$ d'après le théorème de convergence par encadrement
- Cas $a = 1$ trivial
- Cas $a \in]-1, 1[/\{0\}$
  On a $\frac{1}{|a|} > 1$, donc $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  Donc $\frac{1}{|a^n|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc $|a^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$
Donc $|a^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- Cas a = 0 Trivial
- Cas a < -1
On a $|a^n| = |a|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $|a| > 1$
et même

$$a^{2k} = (a^2)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$a^{2k+1} = a(a^2)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Elle ne peut donc pas tendre vers $-\infty$ ou vers $+\infty$
Elle ne peut pas non plus converger car elle n'est pas bornée.
Donc elle n'admet pas de limite

IV. Suites monotones

Théorème 90 Démonstration

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et majorée
Alors $u(\mathbb{N})$ est en partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure :
$l = sup(u(\mathbb{N})) \in \mathbb{R}$

Soit $\epsilon > 0$
Comme $l - \epsilon < l$ et l est le plus petit majorant de $u(\mathbb{N})$, alors $l - \epsilon$ ne majore pas $u(\mathbb{N}) = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et
$u_n > l - \epsilon$
A fortiori $u_n \geq l - \epsilon$
Par ailleurs l majore $u(\mathbb{N})$
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$
Comme la suite est croissante, pour $n \geq N$

$$l - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq l \leq l + \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ u_n \in [l-\epsilon, l+\epsilon]$$

Finalement,

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$$

Théorème 94 Suites adjacentes

Excalibur 4.
Démonstration :
Comme $lim\ v - u = 0$
Alors (comme 1 > 0):

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |v-u| \leq 1$$

En particulier $u_N - v_N \leq |v_N - u_N| \leq 1$
Donc

$$\begin{cases} u_N \leq 1 + v_N \leq 1 + v_0 & (v \downarrow) \\ v_N \geq u_N - 1 \geq u_0 - 1 & (u \uparrow) \end{cases}$$

Ainsi u est croissante et majorée donc Converge par le théorème de la limite monotone et v est décroissante et minorée donc converge de même.
De plus on a alors

$$0 = lim(v-u) = lim\ v - lim\ u$$

Donc

$$lim\ v = lim\ u$$

Lemme 97 Démonstration

Vue dans le théorème de la limite monotone (car $l = sup(u(\mathbb{N}))$)
Mais se montre aussi de manière plus élémentaire
Soit $n \in \mathbb{N}$,
Pour tout $p \geq n$, $u_n \leq u_p$
En faisant tendre p vers $+\infty$ $u_n \leq l$

Théorème 103

Preuve dans le cas de $l \in \mathbb{R}$:
Soit $\epsilon > 0$
Comme $lim\, u = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq
$\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$
Et pour $n \geq N$, $\phi(n) \geq n \geq N$
Donc $|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$
Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq, |u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$$

i.e.

$$lim\, u = l$$

Preuve dans le cas de $l = +\infty$ et $l = -\infty$

Théorème 106

Cas ou $l = +\infty$
Soit $A \in \mathbb{R}$
Soit $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall k \geq N, u_{2k} \geq A$$

Soit N' tel que

$$\forall k \geq N', u_{2k+1} \geq A$$

Soit $N'' = max(2N, 2N' + 1)$

- Si n est pair

  $$\frac{n}{2} \geq N$$

  Donc

  $$u_n = u_{2(\frac{n}{2})} \geq A$$

- Si n est impair

$$\frac{n-1}{2} \geq N'$$

Donc

$$u_n = u_{2(\frac{n-1}{2})+1} \geq A$$

Dans les 2 cas :
$u_n \geq A$

Ainsi

$$u_n \to +\infty$$

Exemple 107 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!

On pose $(a_n) = (w_{2n})$ la suite extraite de w rang pair
et $(b_n) = (w_{2n+1})$ la suite extraite de w de rang impair

Montrons que $(a_n) \uparrow$
Soit $n \in \mathbb{N}$
On a :

$$a_{n+1} - a_n = w_{2n+2} - w_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} =$$

Donc

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

Ainsi $a \uparrow$
De même, pour $n \in \mathbb{N}$
$b_{n-1} - b_n \leq 0$
Donc $b \downarrow$

De plus pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n - a_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

i.e. :

$$b-a \to 0$$

Ainsi a et b sont adjacentes.
Par le théorème des suites adjacentes,
a et b convergent et ont la même limite l.
Par le théorème de convergence par les suites extraites des rangs pairs et de rangs impairs
w converge vers l ("$l=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$")

Théorème 108

Etape 1 : Construction des 2 suites

On construit par récurrence 2 suites a et b qui vérifient :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n : \begin{cases} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ I_n = \{i \in \mathbb{N} | u_i \in [a_n, b_n]\} \end{cases}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n : a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$
   - Initialisation :
     On pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = a \end{cases}$
     \1. est clairement vérifié
   - Hérédité :
     Soit $n \in \mathbb{N}$
     Supposons avoir construit
     $a_0; \ldots ; a_n$ et $b_0; \ldots ; b_n$
     tq A_n
     Comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} > 0$
     alors $a_n \leq \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_n$

     On a 2 cas :
     - Si $\left\{i \in \mathbb{N} | u_i \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ est infini
       On pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

- Sinon
  Comme par H.R. I_n est infini, alors $\left\{i \in \mathbb{N} | u_i \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$ est infini
  On pose

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

  Dans les deux cas,

$$\begin{cases} b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} \overset{H.R.}{=} \frac{b-a}{2^{n+1}} \\ I_{n+1} = \{i \in \mathbb{N} | u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\} \text{ est infini} \end{cases}$$

  i.e.
  A_{n+1} est vérifiée
  De plus par construction $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ et $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$
  i.e.
  B_{n+1} est vérifiée

On a donc construit par recurrence deux suites $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n$$

Comme
$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$
et $(a_n) \uparrow$ et $(b_n) \downarrow$
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$

Par le théorème des suites adjacentes et stabilité des inégalités larges par passage à la limite,
$(a_n), (b_n)$ convergent vers une limite commune $l \in [a, b]$

Etape 2 : Extraction

Comme pur tout $n \in \mathbb{N}$,
$I_n = \{i \in \mathbb{N} | u_i \in [a_n, b_n]\}$ est infini

Alors on peut construire ϕ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
strictement croissante par récurrence ainsi :
$\phi = 0$ ($\in \mathbb{N} = I_0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n+1) = min(I_{n+1} \cap]\phi(n); +\infty[)$$

Partie non vide de $\mathbb{N}$ car I_{n+1} est infini (et $\mathbb{N}$ n'est pas majoré)
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$$

et par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{\phi(n)} = l \in [a, b]$$

Donc u converge

VI. Traductions séquentielles

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$
On dit que A est dense ssi elle rencontre tout intervalle ouvert non vide I

Propriété

Soit $A \subset \mathbb{R}$
A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

Propriétés

Supposons A dense dans $\mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$,
Excalibur 5

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[$
RATTRAPER

On a alors a fortiori :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x - \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq x + \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème des gendarmes

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

Supposons avoir à disposition pour tout $x \in \mathbb{R}$,
une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$
Soit $x \in I$.
Comme I est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tq $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subset I$
Or lui aussi
RAATRAPPPPERRRRRR

Propriété

Soit $A \subset \mathbb{R}$ bornée non vide et $b \in \mathbb{R}$ Alors

$$b = sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{b marjore a} \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \to b \end{cases}$$

Démonstration :
Par double implication

Soit $b = sup(A)$
Par définition de la borne supérieure, b majore A
Pour $n \in \mathbb{N}, b - \frac{1}{n+1} < b$
Donc ... ne majore pas A, don il existe $a_n \in]b - \frac{1}{n+1}, b]$
A fortiori $b - \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq b$
Par le théorème des gendarmes, $a_n \to b$

Soit b majorant A
tel qu'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \to b$
Soit b un majorant de A
On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b'$$

Ainsi b est le plus petit majorant de A i.e.

$$b = sup(A)$$

Propriété ("Cas infini")

Soit $A \subset \mathbb{R}$
Alors A est non majoré ssi
$(\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \to +\infty)$

Démonstration en exercice

VII. Itération de fonctions

Proposition Hors Programme (Exercice 113)

Si $f \downarrow$ et $E \subset D_f$ et stable par f alors pour u vérifiant * et $u_n \in E$, les suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont de monotonies "opposées"

Démonstration :
Sous ces hypothèses,

- Si $u_0 \leq u_2$, $u_1 = f(u_0) \geq f(u_2) = u_3$
  puis en ré appliquant f, $u_2 \leq u_4, u_3 \geq u_5 \dots$
  Donc $(u_{2k}) \uparrow$ et $(u_{2k+1}) \downarrow$
- Si $u_0 > u_2$
  De même $(u_{2k}) \downarrow$ et $(u_{2k+1}) \uparrow$

VIII Suites a valeurs complexes

Définition 115

Excalidraw 6

Définition 123

Excalibur 7

Théorème 126

Démonstration "Extraction successive"
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Bornée
i.e.
Il existe

$$M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } (\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M)$$

On a alors
$|Re(u_n)| \leq |u_n| \leq M$
$|Im(u_n)| \leq |u_n| \leq M$

Comme $Re(u)$ est bornée il existe une extractrice ϕ tq $(Re(u_{\phi(n)}))$ converge
De plus $(Im(u_{\phi(n)}))$ est bornée
Donc on peut trouver une extractrice ϕ tq $(Im(u_{\phi(n)}))$ converge
Comme $(Re(u_{(\phi\circ\psi)(n)}))$ est extraite de la suite convergente $(Re(u_{\phi(n)}))$ alors elle converge
Comme $(Re(u \circ (\phi \circ \psi)) = (Re(u)) \circ \phi \circ \psi$ et
$(Im(u \circ (\phi \circ \psi)) = (Im(u)) \circ \phi \circ \psi$ convergent
Alors $u \circ (\phi \circ \psi)$ converge.
Comme c'est une suite extraite de u on a fini