Espaces vectoriels

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

I Définition et exemples

1 Définition

Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Premières propriétés : $\lambda u = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E)$, $(-1)u = -u$. Exemples : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ e.v. sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$, de même pour $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$.

2 Produits d'espaces vectoriels

Produit de deux e.v., d'un nombre fini d'e.v., d'une famille quelconque d'e.v., cas particulier où les facteurs du produit sont identiques : espace E^I, où I est un ensemble quelconque. Exemples : espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, espace $\mathbb{R}^I$ des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})(= \mathbb{K}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]})$ des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Extension culturelle : l'espace vectoriel $\{0,1\}^X$ sur le corps a deux éléments et transport de la structure pour obtenir l'espace vectoriel $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cdot)$ où $0 \cdot A = \varnothing$ et $1 \cdot A = A$.

II Combinaisons linéaires

Combinaisons linéaires d'une famille finie, d'une famille quelconque avec une famille de coefficients presque nulle (notation $\mathbb{K}^{(I)}$). Remarque que $\mathbb{K}^{(I)}$ est lui-même un $\mathbb{K}$-e.v. Cas particulier de la combinaison linéaire "vide", qui est nulle.

III Sous-espaces vectoriels

1 Définition et caractérisation

Définition : partie F de E stable par $+$ et par la multiplication par les scalaires et qui, munie des loi induites, est un e.v. Caractérisation 1 : F est stable par combinaisons linéaires quelconques (la combinaison linéaire vide étant nulle, $0 \in F$). Caractérisation 2 : F est non vide, et stable par $+$ et par la multiplication par les scalaires. Caractérisation 3 : F est non vide et, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$, $\lambda u + v \in F$. Exemples : $\{0\}$, E, Quelles sont les droites de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ qui sont des sous-espaces vectoriels ? les plans de $\mathbb{R}^3$ qui en sont ? Autres exemples : sous-espaces de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites vérifiant une récurrence linéaire homogène d'ordre 2, solutions d'une équation différentielle linéaire homogène, solutions d'un système linéaire homogène. Si ces équations possèdent un second membre non nul, l'ensemble des solutions n'est plus stable par CL. Sous-espaces $\mathcal{P}$ et I de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions paires et impaires, matrices symétriques (S) et antisymétriques (A) dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Sous-espace $\mathbb{K}^{(I)}$ de $\mathbb{K}^I$. Sous-espace des fonctions continues (resp. dérivables, de classe $\mathcal{C}^k$) dans $\mathbb{R}^I$. Est-ce que $\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} | f(x_0) = \lambda\}$ est un ss-e.v. de $\mathbb{R}^I$?

2 Intersections de sous-espaces vectoriels

Toute intersection de sous-e.v. de E est un sous-e.v. de E (l'intersection de zéro sous-espaces est E). Définition de $\mathrm{Vect}(X)$ (resp. $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$) sous-e.v. engendré par une partie X (resp. une famille $(x_i)_{i\in I}$) de E comme intersection des ssev de E contenant X (resp. tous les x_i). C'est aussi le plus petit sous-espace vectoriel qui contienne X (resp. tous les x_i). C'est aussi l'ensemble des CL d'éléments de X (resp. des x_i), avec la convention que la combinaison linéaire "vide" vaut 0 pour le cas $X = \varnothing$. Propriétés de base : $X \subset \mathrm{Vect}(X)$, croissance pour $\subset$, si F est un sous-e.v., $\mathrm{Vect}(F) = F$. Exemples : droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, sous-e.v. engendré par trois vecteurs explicites de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$. Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, définition de $e_i = (\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$; qu'est $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$? $\mathrm{Vect}(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{K}[X]$, qu'est $\mathrm{Vect}(X^n)_{n\geq n_0}$?

IV Familles de vecteurs

1 Familles génératrices

Définition d'une partie (resp. famille) génératrice de E ($\mathrm{Vect} = E$), exemples dans $\mathbb{R}^3$ et parmi les exemples précédents (on voit apparaître en particulier les "bases canoniques" de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$), espace des solutions d'une EDL2H, d'un système linéaire homogène, d'une récurrence linéaire d'ordre 2.

Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

2 Familles libres

Idée de vecteurs "inutiles" dans une famille génératrice (ceux qui sont CL des autres), qui mène à la définition habituelle des familles et parties libres (toute CL nulle a forcément tous ses coefficient nuls). Vocabulaire : vecteurs linéairement indépendants, famille liée. Expression formelle de la négation de la définition précédente). Exemples : vecteurs explicites de $\mathbb{R}^3$. Une famille à un vecteur est libre ssi ce vecteur est non nul. Une famille de deux vecteurs est libre ssi ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de trois vecteurs est libre ssi ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Toute famille de vecteurs non nuls de $\mathbb{K}^n$ échelonnée (au sens où la matrice obtenue en les écrivant en lignes est échelonnée par lignes), toute famille (finie ou non) de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré ($0 \leq \mathrm{d}^\circ P_0 < \mathrm{d}^\circ P_1 < \ldots < \mathrm{d}^\circ P_k$) est libre (et plus généralement toute famille de polynômes de degrés deux-à-deux distincts en se ramenant au cas échelonné par réordonnancement), les "bases" canoniques (qui ne sont pas encore des bases !) de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont libres, la famille $(\cos, \sin, \exp)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est libre

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

3 Bases et coordonnées

Définition d'une base de E (libre et génératrice). Exemple : base canonique de $\mathbb{K}^3$. Caractérisation d'une base : tout vecteur s'écrit de manière unique comme CL de cette famille. Définition de la famille des coordonnées d'un vecteur u dans une base e. Pour une base finie, représentation sous forme de matrice colonne $Mat_e(u)$. Pour un e.v. produit fini ou de la forme $\mathbb{K}^{(I)}$, notion de base canonique. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$., de $\mathbb{K}[X]$. Autres exemples de bases dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

V Somme de sous-espaces vectoriels

1 Somme de sous-espaces

Somme de deux sous-e.v. : définition de la somme de F et G (les vecteurs de $F+G$ sont ceux qui se décomposent comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G), c'est un sous-e.v. de E, définition d'une somme directe (pour tout vecteur de la somme, la décomposition précédente est unique). Caractérisation : une somme de deux sous-e.v. est directe ssi $F \cap G = \{0\}$. Notation $F \oplus G$. Exemples dans $\mathbb{R}^3$, cas des fonctions paires et impaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Sous-espaces supplémentaires, exemples, $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}\,(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}} \oplus \text{Vect}\,(X^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.

Brève extension au cas d'un nombre fini de sous-espaces : somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$, somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ (la somme $\sum F_i$ est directe ssi la décomposition de chacun de ses vecteurs sous la forme $\sum x_i$, avec, pour tout i, $x_i \in F_i$, est unique.), caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

2 Bases adaptées

Si F est un ssev de E, une base de E adaptée à F est une base de E $(u_i)_{i\in J\sqcup K}$ telle que $(u_i)_{i\in J}$ soit une base de F.

Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ et, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est une base de F_k, alors $(u_i)_{i\in \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k}$ est une base de E, dite *adaptée* à cette décomposition en somme directe.

Exemple des sous-ev des matrices symétriques et des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Inversement, si $(u_i)_{i\in \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k}$ est une base de E, alors les $F_k = \text{Vect}\,(u_i)_{i\in I_k}$ sont en somme directe.

VI Complément sur les familles

Une famille de E est une base ssi elle est libre maximale ssi elle est génératrice minimale.