Feuille d'exercices sur les inégalités réelles

Exercice 1 Sans étudier de fonction, trouver un réel M tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} \leq M$.
Trouver ensuite la meilleure majoration possible grâce à une étude de fonction.

Exercice 2
1. Trouver une constante réelle $m > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1 < x < 2 \Longrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{x^2-3x+2} \geq m\right).$$

2. Trouver une constante réelle $M < 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x \leq -2 \Longrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{x^2-3x+2} \leq M\right).$$

3. Quelles sont les meilleures constantes possibles ?

Exercice 3 On considère, pour un réel a vérifiant $-\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$, la quantité

$$Q_a = \frac{2a^4-6a^3-a^2+1}{a^2-1}.$$

1. Majorer, puis minorer explicitement Q_a indépendamment de a, sans utiliser de valeurs absolues.
2. Montrer directement que Q_a est bornée indépendamment de a en utilisant des valeurs absolues.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{x-2}{x+1} \leq |3x-4|.$$

Exercice 5 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit leur moyennes arithmétique $m_a(a,b)$, géométrique $m_g(a,b)$ et harmonique $m_h(a,b)$ par les formules suivantes :

$$m_a(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad m_g(a,b) = \sqrt{ab}, \quad m_h(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

1. Comparer ces trois moyennes en décrivant les cas d'égalité.
2. Exprimer la moyenne géométrique en fonction de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique.

Exercice 6 Soient a, b, c et d quatre réels.
1. Montrer que $ab+cd \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$.
2. Proposer une conjecture dans le cas de six réels et prouvez-la.

Exercice 7 Déterminer le comportement de la suite de terme général $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{k}}$.

Exercice 8 Soit $\alpha > 0$ un réel. Trouver deux constantes réelles $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad C_1 n^{\alpha+1} \leq \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \leq C_2 n^{\alpha+1}.$$

Exercice 9 Montrer que la suite de terme général $\frac{10^n}{n!}$ tend vers 0, puis que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n}\frac{10^k}{k!}$ est majorée, puis convergente.

Exercice 10 Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x,y) tels que

$$\begin{cases} |y| & \leq & x^2 \\ |x| & \leq & y \end{cases}$$

Exercice 11 Soit $\lambda > 0$ fixé.
1. Montrer qu'il existe une valeur maximale et une valeur minimale (indépendantes de a et b) pour la quantité ab, lorsque a et b sont deux réels positifs ou nuls tels que $a+b=\lambda$ et les déterminer.
2. Existe-t-il une valeur maximale et une valeur minimale (indépendantes de a et b) pour la quantité $a+b$, lorsque a et b sont deux réels strictement positifs tels que $ab=\lambda$?

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que $|\cos x| + |\sin x| \leq 2$.
2. Montrer que $|\cos x| + |\sin x| \geq 1$.
3. Peut-on trouver de meilleures constantes permettant de minorer et de majorer $|\cos x| + |\sin x|$ pour tout x réel ?

Exercice 13 Soient x_1, x_2, ... x_n des réels. Montrer qu'il existe $I \subset [\![1,n]\!]$ tel que

$$\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Que peut-on dire dans le cas de nombres complexes ?

Exercice 14 Pour $U \subset \mathbb{R}$, montrer que U est réunion d'une famille quelconque d'intervalles ouverts $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si et seulement si

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

Montrer que cela équivaut aussi à

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon' > 0, \ [x-\varepsilon', x+\varepsilon'] \subset U.$$

Remarque pour l'an prochain : un tel ensemble est appelé un *ouvert* de $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Montrer qu'une intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert. Que dire dans le cas d'une intersection infinie d'intervalles ouverts ?