Espaces vectoriels de dimension finie

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

I Deux lemmes-clés

Lemme A : Dans un espace vectoriel quelconque, soient $(x_i)_{i\in K}$ une famille génératrice et $(x_i)_{i\in I}$ une sous-famille libre ($I \subset K$). Alors de deux choses l'une : soit $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E, soit il existe $i_0 \in K \setminus I$ tel que $(x_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ soit libre.

Lemme B : Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

II Espaces de dimension finie

Définition : existence d'une partie génératrice finie.
À l'aide des lemmes-clés, on démontre alors :

— Version "forte" du théorème de la base incomplète que j'ai aussi appelé théorème "de la base intermédiaire" : si $(x_i)_{i=1}^n$ est génératrice finie et $(x_i)_{i\in I}$, avec $I \subset [\![1,n]\!]$, est libre, alors il existe un ensemble $I \subset J \subset [\![1,n]\!]$ tel que $(x_i)_{i\in J}$ soit une base ;
— Le théorème de la base extraite : en dimension finie, on peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E ;
— Le théorème de la base incomplète : en dimension finie, on peut compléter toute famille libre de E en une base de E ;
— Existence de bases : tout espace de dimension finie possède une base.

III Dimension

1 Définition de la dimension

Une conséquence facile du lemme B est le

Théorème de la dimension : toutes les bases d'un e.v. E de dimension finie ont le même cardinal, appelé dimension de E.

En dimension n, toute famille libre a au plus n vecteurs et toute famille génératrice en a au moins n.

En dimension n, une famille de n vecteurs est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.

2 Exemples

Dimensions des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de l'espace des suites vérifiant une récurrence linéaire homogène d'ordre 2, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 (rappel : le programme se restreint au cas des coefficients constants pour ce dernier cas).

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie (par exhibition d'une base).

IV Rang d'une famille finie de vecteurs

Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-e.v. qu'ils engendrent.

Un famille de p vecteurs est libre ssi elle est de rang p.

Calcul pratique du rang par manipulations des colonnes de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base donnée à l'aide des quatre faits suivants : si l'on ajoute à un des vecteurs de la famille une CL des autres, cela ne change pas le sous-espace engendré, de même si l'on multiplie l'un des vecteurs par une constante non nulle, si l'on change l'ordre des vecteurs de la famille ou si l'on supprime un vecteur de cette famille lorsqu'il est nul. Application de ces remarques : méthode du pivot.

V Sous-espaces et dimension

On se place ici dans un espace vectoriel E de dimension finie n.

Un sous-espace F de E est de dimension finie $p \leq n$. De plus, $p = n$ ssi $F = E$.

Tout sous-espace F de E possède un supplémentaire G. Existence de bases adaptées à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Si $F \oplus G \subset E$, alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$. Conséquences : tous les supplémentaires de F ont la même dimension ; F et G sont supplémentaires ssi leur intersection est $\{0\}$ et $\dim F + \dim G = n$.

Formule de Grassmann pour la somme non forcément directe de deux sous-espaces de E. Conséquence : F et G sont supplémentaires ssi leur somme est E et $\dim F + \dim G = n$.

Existence de bases adaptées à une décomposition de E en somme directe de k sous-espaces.

Dans E, la dimension d'une somme directe (finie) est la somme des dimensions des sous-espaces.

La dimension d'une somme (finie) de sous-espaces de E est inférieure ou égale à la somme des dimensions et il y a égalité ssi cette somme est directe.