DM2 de mathématiques, à rendre le lundi mardi 25 septembre 2023

Exercice 1 *Logique sentimentale*
On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. On définit la relation "être amoureux" : pour tout h de $\mathcal{H}$ et f de $\mathcal{F}$, on note $h\heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on note $f\heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. *On notera donc bien que la relation $\heartsuit$ n'est en général pas symétrique*. Enfin, la négation de cette relation se note $\not\heartsuit$. Ainsi, $h\not\heartsuit f$ signifie que h n'aime pas f.
À titre d'exemple, l'assertion "chaque homme est amoureux d'une femme", qui dit que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f, s'écrit formellement :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h\heartsuit f.$$

Remarques :
- On rappelle qu'en mathématiques, "une" signifie "au moins une", et non pas "exactement une" ;
- Il y aura parfois plusieurs réponses possibles ;
- Pour cet exercice, **on ne demande pas de justifier les résultats**, mais uniquement d'écrire les assertions demandées ;
- On ne se préoccupera pas de savoir si les assertions manipulées sont vraies ou fausses.

1. *Thème.* Écrire les assertions suivantes en language formel (*i.e.* en language mathématique) :
   (a) Les hommes aiment toutes les femmes.
   (b) Tout le monde aime tout le monde.
   (c) Certains hommes aiment plusieurs femmes.
2. *Version.* Que signifient, en français, les phrases suivantes :
   (a) $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H},\ h\heartsuit f$.
   (b) $\exists h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h\heartsuit f$.
   (c) $\forall h \in \mathcal{H},\ \exists f, f' \in \mathcal{F},\ (f \neq f' \text{ et } h\heartsuit f \text{ et } f'\heartsuit h)$.
3. *Négation.* On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces personnages par son initiale.
   Écrire la négation de chacune des phrases suivantes en language formel.
   Indication : ici, écrire d'abord la phrase en language formel vous aidera à écrire la négation.
   (a) Brenda aime Mike ou Dick.
   (b) Certains hommes aiment Brenda et Jenny.
4. *Implications.* Traduire, du français en language formel ou inversement, les assertions suivantes :
   (a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.
   (b) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.
   (c) $\forall h \in \mathcal{H}, ((\forall f \in \mathcal{F}, h\heartsuit f) \Longrightarrow h\heartsuit J)$.
5. *Négations d'implications.* Écrire en langage formel la négation des assertions de la question précédente.

Exercice 2 *Besoin d'une injection... ou d'une surjection, voire d'une bonne correction*
Soient E,F,G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.
On définit en outre l'application h de E vers G par : $\quad \forall x \in E,\ h(x) = g(f(x))$.
Montrer que

1. si h est injective, alors f est injective ;
2. si h est surjective, alors g est surjective.

Exercice 3 *Racines à gogo*

1. Résoudre par analyse-synthèse l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_1) : \ \sqrt{x^3 - x} + \sqrt{4x - x^3} = \sqrt{3x}.$$

2. Montrer par l'absurde que l'équation

$$(E_2) : \ \sqrt{x^3 - x} + \sqrt{4x - x^3} = \sqrt{3\,|x|}$$

   n'admet pas de solutions strictement négatives.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).

Exercice 4 *Des suites à la Pell*
Soient les suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} P_0 = 0,\ P_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_0 = 2,\ Q_1 = 2 \\ \forall n \geq 2,\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$$

On veut montrer que pour tous $m,n \in \mathbb{N}$, $P_{m+n} = \frac{1}{2}\left(P_n Q_m + P_m Q_n\right)$.

1. Montrer le résultat pour $n = 0$ et m quelconque.
2. Montrer le résultat pour $n = 1$ et m quelconque, en faisant une récurrence double sur m.
3. Montrer le résultat pour m et n quelconques.