Continuité

Lycée Berthollet 2021-22

I Définitions

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, *i.e.* non vide et non réduit à un point, et $a \in I$: la fonction f **est donc définie en** a.

Définition 1 On dit que la fonction f *est continue en* a ssi elle admet une limite en a (qui est alors nécessairement $f(a)$ comme on l'a déjà vu), *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

On peut reformuler cela en termes d'intervalles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (x \in [a-\alpha, a+\alpha] \Longrightarrow f(x) \in [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon])$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, f(I \cap [a-\alpha, a+\alpha]) \subset [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon].$$

Remarque 2 Comme pour les définitions de limites, on peut remplacer l'une, l'autre ou les deux inégalités larges de cette définition par des inégalités strictes. Cela donne la même notion de continuité, mais évidemment, pour un même ε, il faudra éventuellement prendre un α différent.

Remarque 3 Comme pour les limites, la continuité est une notion locale : si $\eta > 0$, f est continue en a ssi $f|_{I \cap [a-\eta, a+\eta]}$ l'est.

Cette remarque justifie l'extension de définition suivante :

Définition 4 Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. S'il existe $\eta > 0$ tel que $D_f \cap [a-\eta, a+\eta]$ soit un intervalle non trivial, on dit que f est continue en a ssi $f|_{D_f \cap [a-\eta, a+\eta]}$ l'est.

On peut aussi exprimer la continuité avec la limite par valeurs différentes :

Proposition 5 *La fonction f est continue en a ssi* $\lim\limits_{x \underset{\neq}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$.

Ce résultat mène naturellement aux notions de continuité à gauche et à droite :

Définition 6 On définit la continuité à gauche (resp. à droite) par le fait que $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ <}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} f(x) = f(a)$), c'est-à-dire $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$ (resp. $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$) et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a - \alpha \leq x < a \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$
$$(\text{resp. } \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a < x \leq a + \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon))$$

Il est facile de voir que :

— si a est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, la continuité de f en a équivaut à la continuité à droite (resp. à gauche) en a ;

— si a n'est pas une extrémité de I, la continuité de f en a équivaut à la continuité a gauche **et** la continuité à droite en a.

Exemples 7

1. Les fonctions constantes sont continues en tout point (pourquoi ?).
2. La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$: Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on choisit $\alpha = \varepsilon$. Soit alors $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$, comme $f(x) = x$ et $\alpha = \varepsilon$, on a $f(x) \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Exemples 8 La fonction $\mathbf{1}_{([0,+\infty[)} \cdot \exp$ n'est pas continue en 0 (tracer son allure). La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue non plus en 0. On parle alors de *discontinuité* de la fonction au point 0. On voit que ces deux discontinuités ont des natures différentes. Voyez-vous d'autres types de discontinuités ?$\bigoplus$

Exemple 9 Comme on l'a déjà "vu" sur son graphe, la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue en tout point non entier et continue à droite, mais pas à gauche, en tout point entier. Démontrez-le.

Exemple 10 La fonction sin est continue en 0 : En admettant qu'on sache définir la longueur d'un arc du cercle unité de manière "raisonnable", la longeur x de l'arc du cercle trigonométrique correspondant à $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sera plus grande que ou égale à la corde de cet arc, qui est elle-même l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont un des côtés a comme longueur $\sin x$. Donc $0 \leq \sin x \leq x$. Par imparité, on obtient aussi que $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], x \leq \sin x \leq 0$. Ainsi On peut alors en tirer que $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\sin x| \leq |x|$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, par l'exemple précédent, et la limite est une notion locale, on a $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$. (Remarquons cependant que l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ est en fait vérifiée sur $\mathbb{R}$, ce qui ne sert à rien ici.)

Exemple 11 La fonction cos est continue en 0 : pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \sin^2 x = \cos^2 x \leq \cos x \leq 1$, donc en appliquant la continuité de sin en 0 et le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$.

Exemple 12 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi : si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $\varphi(x) = 0$ et si $x \in \mathbb{Q}$, en notant $x = \frac{p}{q}$ sa forme irréductible, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{q}$. Montrer que cette fonction est discontinue en tout point rationnel et continue en tout irrationnel.$\bigoplus$

Définition 13 Lorsqu'une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ a une limite ℓ en a, on peut définir le *prolongement par continuité* de f en a, à savoir la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par $\widetilde{f}|_{I \setminus \{a\}} = f$ et $\widetilde{f}(a) = \ell$. Cette fonction est alors continue en a.

Exemple 14 La fonction $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$. En effet, pour $x \neq 0$, $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

II Caractérisation séquentielle

Une traduction immédiate de la caractérisation séquentielle des limites donne la

Proposition 15 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I et $a \in I$.*
f est continue en a ssi $\big(\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (\lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = f(a))\big)$.

Remarque 16 On se servira le plus souvent du sens direct, qui n'est autre qu'une composition de limites.

Une conséquence de cette proposition est le résultat qu'on a admis à propos des suites définies par une relation de récurrence :

Corollaire 17 ***(Théorème de la limite fixe)***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui est le cas en particulier si $f(I) \subset I$).
Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration: Dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on fait tendre n vers $+\infty$. On a d'une part $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$ et d'autre part, par continuité de f en ℓ, $\lim f(u_n) = f(\ell)$. □

Un autre exemple d'application de cette proposition est le résultat classique suivant :

Exemple 18 En supposant connues les fonctions exponentielle et logarithme, ainsi que la limite classique $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$, on peut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.$\bigoplus$

La proposition peut aussi servir à montrer la non-continuité ou l'impossibilité d'un prolongement par continuité :

Exercice 19 Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.$\bigoplus$

III Opérations sur les fonctions continues

On déduit immédiatement des théorèmes concernant les opérations sur les limites les résultats suivants :

Théorème 20 *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle non trivial I et $a \in I$.*
Si f et g sont continues en a, alors

1. *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.*
2. *La fonction fg est continue en a.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que la fonction $\frac{f}{g}$ soit définie sur $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$ et elle est alors continue en a.*

Théorème 21 *Soit g une fonction définie sur J et f une fonction définie I telle que $f(I) \subset J$, où I et J sont deux intervalles non triviaux. Soit $a \in I$.*
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

IV Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial.

Définition 22 On dit que f est continue sur I (ou tout simplement continue) ssi f est continue en tout point de I.

Les théorèmes de la section précédente donnent alors :

Théorème 23

1. *Toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue.*
2. *Un produit de fonctions continues est continue.*
3. *Un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continu..*
4. *La composée de deux fonctions continues est continue.*

Définition 24 Plus généralement, on dit que $f : D_f \to \mathbb{R}$ est continue si, pour tout $a \in D_f$, f est continue en a au sens étendu précédent, *i.e.*
— il existe $\eta > 0$ tel que $D_f \cap [a-\eta, a+\eta]$ soit un intervalle non trivial ;
— la fonction $f|_{D_f \cap [a-\eta, a+\eta]}$ est continue en a.

Le théorème précédent est alors encore valable dans ce cadre élargi.

Remarque 25 Attention, plus généralement, si $A \subset D_f$, dire que "f est continue sur A" est ambigu, car cela pourrait vouloir dire :
— soit que $f|_A$ est continue ;
— soit que f est continue en tout point $a \in A$.
Ces deux propriétés **ne sont pas équivalentes**. Par exemple, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^\star$ et 1 sur $\mathbb{R}_+$, n'est pas continue en 0, mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est continue. En revanche, ces deux propriétés sont équivalentes lorsque la partie A est réunion d'intervalles ouverts (on dit alors que A est un ensemble *ouvert*).

Par ailleurs, comme les fonctions constantes et la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit (par exemple par récurrence sur le degré, puis par quotient) les résultats suivants :

Proposition 26
Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fontion rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Exemple 27 Les fonctions sin et cos sont continues, en utilisant, pour l'une, un changement de variable "$x = a + h$" et les formules trigonométriques d'addition, et pour l'autre, la transformation $x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$.$\bigoplus$

On en déduit :

Proposition 28
Tout polynôme trigonométrique est continu sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle trigonométrique est continue sur son domaine de définition.

Définition 29 Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on dit que la fonction f est *lipschitzienne de rapport k* sur l'intervalle I ssi

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

(On dit aussi que f est *k-lipschitzienne*.)

Remarque 30 Géométriquement, cela signifie que toutes les cordes du graphe de f ont des pentes comprises entre $-k$ et k. Faire un dessin.

Exemples 31

1. La fonction cos est 1-lipschitzienne.
2. La fonction $x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Remarque 32 Lorsque f est dérivable, cela implique, selon la définition "géométrique" de la dérivée, que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. On verra que ce résultat admet une réciproque grâce à l'*inégalité des accroissements finis*.

Remarque 33 Les fonctions lipschitziennes de rapport 0 sont les constantes.

Proposition 34 *Toute fonction lipschitzienne est continue.*

Démonstration: En exercice.$\bigoplus$ $\square$

Exemple 35 La fonction $|\cdot|$ est lipschitzienne de rapport 1, donc continue. C'est aussi le cas plus généralement de la fonction "distance à un point $a \in \mathbb{R}$" : $x \longmapsto |x-a|$. En faire la démonstration en exercice.$\bigoplus$

V Valeurs intermédiaires

Théorème 36 *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ ($a < b$) telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*
Complément : *si de plus f est strictement monotone, alors un tel c est unique.*

Démonstration: On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la propriété $\mathcal{P}_n$: "$a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}$, $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$".

Pour cela, on pose évidemment $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si on suppose avoir construit les deux suites jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et qu'elles vérifient $\mathcal{P}_k$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on aura alors $a_n < b_n$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, soit parce que $n = 0$ et que c'est dans les hypothèses du théorème, soit parce que $n \geq 1$ et $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a alors deux cas :

— Si $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

— Sinon $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$. Alors $f(a_n) \neq 0$ donc $f(a_n)^{-2} > 0$. En multipliant alors l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ successivement par les nombres positifs $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2})$ et $f(a_n)^{-2}$, on obtient $f(\frac{a_n+b_n}{2})f(b_n) \leq 0$. On pose alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans les deux cas, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est bien vérifiée (en particulier, l'inégalité stricte $a_{n+1} < b_{n+1}$ est vraie car $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ et $a_n < b_n$) et on a construit les suites voulues au rang $n+1$.

On obtient ainsi par récurrence les deux suites (a_n) et (b_n) cherchées. Comme elles vérifient les propriétés $\mathcal{P}_n$ pour tout n, ces suites sont adjacentes (on a, pour tout n, $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ par une récurrence immédiate), donc elles convergent et ont la même limite c. Cette limite est évidemment dans $[a_0, b_0] = [a, b]$, donc f est continue en c. Comme on a, pour tout n, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, on obtient par passage à la limite $f(c)^2 \leq 0$, donc $f(c) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone, elle ne peut pas prendre la même valeur en deux points différents, donc la racine est unique. □

Remarque 37 On verrait en appliquant ce théorème à $f - \lambda$ que toute valeur λ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte.

On peut alors reformuler ce théorème ainsi :

Théorème 38 *L'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle.*
Complément (Théorème de la bijection) : *si f est continue et strictement monotone, alors elle* ***induit*** *une bijection $\tilde{f}$ de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$:*

$$\tilde{f} : \begin{cases} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) = f(x) \end{cases}$$

et on peut décrire précisément $f(I)$ suivant les différents cas :
- *Si f est strictement croissante :*
  - *Si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$;*
  - *Si $I =]a, b]$, alors $f(I) =]\lim_a f, f(b)]$;*
  - *Si $I = [a, b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim_b f[$;*
  - *Si $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\lim_a f, \lim_b f[$.*
- *Si f est strictement décroissante :*
  - *Si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(b), f(a)]$;*
  - *Si $I =]a, b]$, alors $f(I) = [f(b), \lim_a f[$;*
  - *Si $I = [a, b[$, alors $f(I) =]\lim_b f, f(a)]$;*
  - *Si $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\lim_b f, \lim_a f[$.*

Démonstration: On montre que l'image est convexe en utilisant le théorème précédent. On note f la fonction et I l'intervalle. Soient deux points $f(x)$ et $f(y)$ de $f(I)$ $(x, y \in I)$ tels que $f(x) \leq f(y)$. Si $f(x) = f(y)$, $[f(x), f(y)] \subset f(I)$. Si $f(x) < f(y)$, on considère z un point quelconque de $[f(x), f(y)]$, dont on veut montrer qu'il est dans $f(I)$. On définit $a = \min(x, y)$ et $b = \max(x, y)$. Comme $f(x) \neq f(y)$, $x \neq y$ donc $a < b$. La fonction auxiliaire g définie sur $[a, b]$ par $g(t) = f(t) - z$ est continue sur $[a, b]$ et vérifie $g(a)g(b) = g(x)g(y) = (f(x) - z)(f(y) - z) \leq 0$. En lui appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve bien un antécédent de z par f. Ainsi $f(I)$ est convexe, donc c'est un intervalle.

Dans le cas strictement monotone, la surjectivité de $\tilde{f}$ découle de sa définition et son injectivité découle de la stricte monotonie.

Pour l'expression de $f(I)$, quitte à composer à la source ou au but f par $x \longmapsto -x$, on peut se ramener au cas où f est strictement croissante. Dans le cas d'une borne appartenant à I, c'est trivial : par exemple si $a = \inf(I) \in I$, alors $f(a) \in f(I)$ est clairement le plus petit élément de $f(I)$ par croissance de f. Traitons maintenant le cas d'une borne n'appartenant pas à I, par exemple, supposons que $a \notin I$. Pour $x \in I$, $a < x$, donc il existe $x' \in I$ tel que $x' < x$. Pour tout $t \in]a,x']$, $f(t) \leq f(x')$ et par passage à la limite lorsque t tend vers a, $\lim_a f \leq f(x')$. Par stricte croissance de f, $\lim_a f < f(x)$. Ainsi $\lim_a f$ est un minorant de $f(I)$ qui n'appartient pas à $f(I)$. Par ailleurs, si m minore $f(I)$, pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$, donc par passage à la limite, $m \leq \lim_a f$, donc $\lim_a f = \inf(f(I))$, avec $\lim_a f \notin f(I)$. □

Exemple 39 L'image de l'intervalle $]0,+\infty[$ par la fonction ln est $]-\infty,+\infty[$.

Remarque 40 Attention, dans le cas non strictement monotone, l'intervalle image n'est pas forcément de même nature que l'intervalle de départ.

Exemple 41 L'image de l'intervalle $]-2,2[$ par la fonction $x \longmapsto x^2$ est $[0,4[$.

Exemple 42 L'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ est $[0,\frac{1}{e}]$.⊕

VI Fonctions réciproques

On se sert du théorème des valeurs intermédiaires pour montrer le théorème des fonctions réciproques "version continue", déjà vu en début d'année.

Théorème 43 *Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.*

*Alors il existe une **unique** fonction **continue** et **strictement monotone** (de même sens de variation que f) sur l'intervalle $f(I)$, notée (abusivement) f^{-1} et appelée **fonction réciproque** de f telle que*

$$\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in f(I), f(f^{-1}(y)) = y.$$

Remarque 44 On fait ainsi un léger abus de langage et de notation, car la fonction f a $\mathbb{R}$ pour ensemble d'arrivée et n'est donc en général pas bijective au sens propre. En revanche, elle *induit* (ou *réalise*) une bijection $\tilde{f} : I \to f(I)$ comme on l'a vu dans le théorème de la bijection.

Remarque 45 Dans les conditions précédentes, on a alors

$$\forall (x,y) \in I \times f(I), \;\; y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

ce qui se reformule avec l'application $\tilde{f}$ ci-dessus :

$$\tilde{f}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} f(I) & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right. .$$

Démonstration: L'unicité d'une l'application $g : f(I) \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in f(I), f(g(y)) = y$$

est automatique et n'utilise ni continuité, ni monotonie. Supposons qu'on ait deux telles applications g et h et prenons $y \in f(I)$. Alors $y = f(h(y))$ donc $g(y) = g(f(h(y))) = h(y)$.

L'existence de f^{-1} vérifiant ces formules est une conséquence du théorème de la bijection : f étant continue et strictement monotone, elle induit une bijection $\widetilde{f}$ de I vers $f(I)$, qui est un intervalle. On définit alors $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \widetilde{f}^{-1}(x)$, qui vérifie bien les formules du théorème.

La stricte monotonie dans le même sens que f est immédiate.

Le seul vrai point à montrer est la continuité de f^{-1}. Pour cela, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Soient $b \in f(I)$, $a = f^{-1}(b) \in I$ son unique antécédent par f et $\varepsilon > 0$.

Supposons dans un premier temps que b ne soit pas une extrémité de $f(I)$. Alors par stricte croissance, a n'est pas une extrémité de I. On choisit alors $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tel que $a-\varepsilon'$ et $a+\varepsilon'$ soient dans I. Par croissance et continuité, $f^{-1}([f(a-\varepsilon'), f(a+\varepsilon')]) = [a-\varepsilon', a+\varepsilon']$ et il suffit donc de trouver $\alpha > 0$ tel que $[b-\alpha, b+\alpha] \subset [f(a-\varepsilon'), f(a+\varepsilon')]$. On pose alors $\alpha = \min(b - f(a-\varepsilon'), f(a+\varepsilon') - b)$ qui est le minimum de deux nombres strictement positifs par stricte croissance (en effet, $f^{-1}(b) = a > a-\varepsilon'$ donc $b > f(a-\varepsilon')$ et de même $f(a+\varepsilon') > b$). On a ainsi $f^{-1}([b-\alpha, b+\alpha]) \subset [a-\varepsilon', a+\varepsilon'] \subset [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

Il reste les deux cas où b est une extrémité de $f(I)$, pour lesquel il suffit de considérer dans un cas $\varepsilon' > 0$ tel que $[a-\varepsilon', a] \subset I$ et $\alpha = b - f(a-\varepsilon')$ et dans l'autre cas $\varepsilon' > 0$ tel que $[a, a+\varepsilon'] \subset I$ et $\alpha = f(a+\varepsilon') - b$. □

Remarque 46 Rappelons que l'intervalle image est de même nature que l'intervalle de départ, à l'ordre des bornes près dans le cas décroissant.

Remarque 47 Rappelez-vous que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$). Faites un dessin sur un exemple.⊕

Exemple 48 Rappelez-vous toutes les fonctions réciproques classiques déjà vues et leurs intervalles de définition.⊕

Exercice 49

1. Montrer que les fonctions $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}_+}$, sh et th admettent des fonctions réciproques, qu'on notera Argch, Argsh et Argth, dont on précisera les domaines de définition et dont on tracera les graphes.
2. À l'aide des définitions des fonctions initiales, trouver des formules explicites (avec des logarithmes) pour ces fonctions réciproques.

VII Stricte monotonie et injectivité

On a utilisé à plusieurs reprises le fait que la stricte monotonie implique l'injectivité. Sous réserve de continuité sur un intervalle, ce résultat admet une réciproque. On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 50 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
Alors f est injective ssi elle est strictement monotone.

Pour démontrer ce théorème, on se sert du lemme suivant :

Lemme 51 *Soit f une fonction injective et continue sur un intervalle I.*

Alors pour tout $x \in I$, la fonction "taux d'accroissement de f en x" $T_x f : I \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_x f(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est non nulle et de signe constant sur $I \setminus \{x\}$. On note $SP(x) \in \{\pm 1\}$ ce signe.

Démonstration: Démontrons d'abord le théorème à l'aide du lemme. Pour le sens direct, il suffit de montrer que la fonction SP définie par lemme est constante sur I. Or, pour deux points distincts x et y de I, il est évident que $T_x f(y) = T_y f(x)$, donc $SP(x) = SP(y)$.

Le sens réciproque est évident et ne se sert pas de l'hypothèse de continuité.

Démontrons maintenant le lemme. Soit f une fonction injective et continue sur un intervalle I et $x \in I$. Par injectivité de f, la fonction $T_x f$ ne s'annule jamais. Par ailleurs, elle est continue en tout point de $I \setminus \{x\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction $T_x f$ est donc de signe constant sur tout intervalle inclus dans $I \setminus \{x\}$. Si x est une extrémité de I, $I \setminus \{x\}$ est un intervalle, ce qui conclut dans ce cas.

Si x est un point intérieur de I, $T_x f$ est donc de signe constant sur chacun des intervalles $I \cap]-\infty, x[$ et $I \cap]x, +\infty[$, Il reste à montrer que ce signe est le même de part et d'autre de x. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que ce ne soit pas le cas. Quitte à changer la fonction f en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut donc supposer qu'on a deux points z et t de I tels que $z < x < t$, $T_x f(z) > 0$ et $T_x f(t) < 0$. On en déduit que $f(z) < f(x)$ et $f(t) < f(x)$, donc que $[f(z), f(x)[\cap [f(t), f(x)[\neq \emptyset$, et on note α un point de cette intersection. En appliquant deux fois le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve alors deux antécédents de α, l'un dans $[z, x]$ et l'autre dans $[x, t]$, qui sont de plus différents de x, car $\alpha \neq f(x)$. Cela contredit l'injectivité de f, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Exercice 52 Faire des dessins pour comprendre la preuve précédente.$\bigoplus$

VIII Segments

Théorème 53 *Toute fonction **continue** sur un **segment** est bornée et "atteint ses bornes" : elle admet un maximum et un minimum.*

Remarque 54 Il peut y avoir plus d'un maximum ou minimum.

Démonstration: On note $[a, b]$ le segment ($a < b$) et f la fonction. On pose $\beta = \sup(f([a, b]))$ qui est soit réel, soit $+\infty$, car c'est la borne supérieure d'une partie non vide. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on peut trouver une suite (y_n) de points de $f([a, b])$ qui tende vers β. Notons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, x_n un antécédent de y_n. La suite (x_n) étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, dont la limite x_∞ est dans $[a, b]$ par stabilité de $\leq$ par passage à la limite. Comme la fonction f est continue sur le segment donc en x_∞, la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x_\infty)$. Cependant cette suite étant aussi une suite extraite de (y_n), elle tend vers β. Par unicité de la limite, $\beta = f(x_\infty)$, donc $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction f est majorée et la borne supérieure est un élément de $f(I)$, donc elle est atteinte par f. En appliquant ce qui précède à $-f$, on obtient que f est minorée et admet un minimum. $\square$

Avec les hypothèses de ce théorème, en notant $\alpha = \min(f([a,b]))$ et $\beta = \max(f([a,b]))$, on a de plus $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue. On a donc le résultat :

Théorème 55 *L'image d'un segment par une application continue est un segment*

Exercice 56 Montrer que toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique est bornée et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f\left(\left[a, a+\frac{T}{2}\right]\right) = f(\mathbb{R})$.

IX Fonctions à valeurs complexes

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle non trivial I et a un point de I ou une extrémité de I. Pour $\ell \in \mathbb{C}$, le fait que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ a exactement la même définition formelle que pour les fonctions réelles, à savoir

— si $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

— si $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 0, \forall x \in I, (x \geq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

— si $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 0, \forall x \in I, (x \leq -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

Cela se traduit, comme pour les suites, en termes de parties réelle et imaginaire (démonstration à refaire$\bigoplus$) :

Proposition 57 *Avec les notations ci-dessus,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x \to a} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} \ell \text{ et } \lim_{x \to a} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} \ell\right).$$

Par conséquent, la continuité d'une fonction de traduit aussi formellement de manière semblable au cas réel et **elle est équivalente à la continuité des parties réelles et imaginaires**.

Le passage aux parties réelles et imaginaires permet de démontrer très facilement les opérations sur les limites et sur les fonctions continues dont les énoncés sont semblables au cas réel (combinaison linéaires, produit, quotient). S'y rajoute la composition **à droite** par une fonction réelle de variable réelle. On peut aussi composer à gauche par deux fonctions connues :

Proposition 58 *Si f est continue en un point a (resp. sur I), alors $|f|$ et $\exp \circ f$ le sont aussi.*

Démonstration: $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$ est donc obtenue par composition de la fonction continue $\sqrt{\cdot}$ et d'une somme de carrés de fonctions continues.

$\exp(f) = \exp(\operatorname{Re} f)(\cos(\operatorname{Im} f) + i \sin(\operatorname{Im} f))$ est aussi obtenue par opérations et composition à partir de fonctions continues. □

Les résultats qui mettent en jeu l'ordre dans $\mathbb{R}$, comme le théorème des gendarmes, celui de la limite monotone ou celui des valeurs intermédiaires, n'ont pas lieu d'avoir des analogues complexes.

Enfin, par composition avec le module et les parties réelles et imaginaires, on obtient le résultat suivant :

Proposition 59 *L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs complexes et une partie bornée de $\mathbb{C}$.*

De plus cette image admet (au moins) un élément de module maximal, un élément de module minimal, un élément de partie réelle maximale, un élément de partie réelle minimale, un élément de partie imaginaire maximale et un élément de partie imaginaire minimale.