Espaces préhilbertiens réels

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

On se place dans tout ce chapitre sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Introduction

Pour faire de l'analyse sur cet espace E, qui soit "compatible" avec la structure vectorielle, il est nécessaire de pouvoir définir une "distance" entre les vecteurs, qu'on peut déduire d'une "norme" :

$$\mathrm{d}(x,y) = \|y-x\|.$$

Cette notion vous mènera l'an prochain à la définition des *espaces vectoriels normés*, qui seront le cadre de l'analyse de deuxième année.

Mais si l'on veut en plus faire de la géométrie "euclidienne", il est nécessaire de pouvoir définir des "angles" ou du moins la notion d'orthogonalité.

Dans le cadre de la géométrie euclidienne du plan ou de l'espace du secondaire, ces notions de norme et d'orthogonalité, voire d'angle, peuvent toutes se définir à l'aide de la notion de produit scalaire. Rappeler toutes vos connaissances sur le sujet :

- Comment définir la norme d'un vecteur avec le produit scalaire ?
- Comment définir l'orthogonalité avec le produit scalaire ?
- Comment définir certains types d'angles avec le produit scalaire ?
- Comment définit-on le produit scalaire dans ce cadre particulier ?
- Quelle sont les propriétés de ce produit scalaire ?
- Peut-on exprimer le produit scalaire de deux vecteurs uniquement avec des normes ?
- Quelles sont les propriétés que devrait "obligatoirement" posséder un produit scalaire au sens général du terme ?

On cherchera à répondre à ces questions en faisant le plus de figures possibles et quelques calculs.

I Produit scalaire

1 Définitions

Définition 1 (**Produit scalaire, espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens**)
Un *produit scalaire* sur un e.v. **réel** E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E, c'est-à-dire qu'on a :

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$;
2. $\forall x,y\in E,\ \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle$;
3. $\forall x\in E,\ \langle x,\cdot\rangle \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ (et donc $\langle\cdot,x\rangle \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ par la symétrie) ;
4. $\forall x\in E,\ (\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle x,x\rangle = 0 \iff x=0)$.

On utilisera parfois les notations $(x|y)$ ou $x\cdot y$.
Un *espace préhilbertien réel* est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemples 2 (Produits scalaires usuels dans le plan et l'espace)

1. L'application à valeurs réelles définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ par $\langle(x,y),(x',y')\rangle = xx'+yy'$ est un produit scalaire qui fait de $\mathbb{R}^2$ un espace euclidien. Donner des exemples pour lesquels ce produit scalaire est strictement positif, nul ou strictement négatif et les représenter graphiquement.
2. L'application à valeurs réelles définie sur $(\mathbb{R}^3)^2$ par $\langle(x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'+zz'$ est un produit scalaire qui fait de $\mathbb{R}^3$ un espace euclidien.

Exercice 3 Montrer que l'application définie sur $(\mathbb{R}^3)^2$ par $\langle(x,y,z),(x',y',z')\rangle = 2xx'+xy'+x'y+yy'+3zz'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Sur $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que $(P,Q)\longmapsto P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ est un produit scalaire.

Remarque 5 (**Restriction d'un produit scalaire à un sous-espace**)
Il est évident d'après la définition des produits scalaires que la restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel est encore un produit scalaire.

2 Trois exemples fondamentaux

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Il généralise naturellement les produits scalaires "usuels" sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

Proposition 6 *(**Produit scalaire canonique**) L'application*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

*est un produit scalaire, qu'on appelle produit scalaire **canonique** sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration: En exercice.

Correction de l'exercice :

1. Cette application est bien définie de $(\mathbb{R}^n)^2$ vers $\mathbb{R}$.
2. Elle est symétrique par commutativité du produit de $\mathbb{R}$.

3. Montrons qu'elle est bilinéaire. Pour cela, par la symétrie, il suffit de montrer la linéarité à droite. Soit $x=(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ fixé. Alors, pour $y=(y_i)_{i=1}^n, y'=(y'_i)_{i=1}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\lambda y + y' = (\lambda y_i + y'_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned}
\langle x, \lambda y + y' \rangle_{\text{can}} &= \sum_{i=1}^n x_i(\lambda y_i + y'_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (\lambda x_i y_i + x_i y'_i) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i y'_i \\
&= \lambda \langle x, y \rangle_{\text{can}} + \langle x, y' \rangle_{\text{can}}.
\end{aligned}$$

4. Cette forme bilinéaire est définie positive car une somme de carrés est positive ou nulle, elle est nulle ssi tous ses termes sont nuls et le carré d'un réel est nul ssi ce réel est nul.

□

Interprétation matricielle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$:
Si on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'on identifie chaque n-uplet de réels à la matrice colonne correspondante, alors on identifie en particulier les réels aux matrices à une ligne et une colonne et on a immédiatement l'égalité :

$$\boxed{\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle X, Y \rangle_{\text{can}} = X^{\mathrm{T}} Y.}$$

Exercice 7 Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(X,Y) \longmapsto \langle AX, AY \rangle_{\text{can}}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$,

Le produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$

Proposition 8 ***(Produit scalaire L^2)***
Pour $a < b$, l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_a^b fg \end{array} \right.$$

est un produit scalaire, qu'on appelle produit scalaire L^2.

Démonstration: En exercice.

Correction de l'exercice :

1. Cette application est bien définie car le produit de deux fonctions continues est continu, donc CPM. Elle est bien à valeurs réelles.
2. Elle est symétrique par commutativité du produit de $\mathbb{R}$.

3. Elle est bilinéaire car symétrique et linéaire à droite, cette linéarité étant une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.
4. Elle est positive par positivité de l'intégrale (car $a \leq b$). Elle est définie positive d'après le théorème sur l'intégrale des fonctions continues de signe constant.

□

Exercice 9 (**Produit scalaire L^2 avec poids**)
Soient $a < b$ et $w \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$ strictement positive en tout point.
Montrer que l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_w : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_a^b f g w \end{array} \right.$$

est un produit scalaire.

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 10 ***(Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)***
Pour $n,p \in \mathbb{N}^\star$, l'application

$$(A,B) \longmapsto \langle A,B\rangle_{\text{can}} = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} \cdot B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} A[i,j]B[i,j] = \operatorname{tr}(A \cdot B^{\mathrm{T}})$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé produit scalaire canonique.
Ce produit scalaire est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{np}$ lorsqu'on identifie $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{np}$.

Démonstration: Pour $A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et, pour $j,k \in [\![1,p]\!]$,

$$\left(A^{\mathrm{T}} \cdot B\right)[j,k] = \sum_{i=1}^{n} A[i,j]B[i,k],$$

donc

$$\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} \cdot B) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} A[i,j]B[i,j] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} A[i,j]B[i,j].$$

En appliquant ce résultat à $A^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\operatorname{tr}\left(A \cdot B^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} A^{\mathrm{T}}[i,j]B^{\mathrm{T}}[i,j] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} A[j,i]B[j,i] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} A[i,j]B[i,j].$$

On aurait aussi pu le démontrer en utilisant un résultat vu dans un cours précédent :

$$\operatorname{tr}\left(A \cdot B^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}} \cdot A\right) = \sum_{i,j} B[i,j]A[i,j] = \sum_{i,j} A[i,j]B[i,j].$$

En identifiant $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{np}$, on retrouve immédiatement le produit scalaire canonique (somme des produits des composantes), donc l'application est bien un produit scalaire. □

II Norme associée à un produit scalaire

On considère ici un espace préhilbertien réel E dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

1 Définition

Définition 11 (**Norme associée à un produit scalaire**)
La *norme associée* au produit scalaire est l'application

$$\|.\| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{array} \right.$$

On déduit de cette définition les deux propriétés de base suivantes.

Proposition 12 *Avec les notations ci-dessus, on a :*

1. ***(séparation)***

$$\boxed{\forall x \in E, \quad (\|x\| = 0 \iff x = 0)\,;}$$

2. ***(homogénéité)***

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\,.}$$

Démonstration: En exercice. Ne pas oublier que pour $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$... □

Exemples 13 (**Normes associées aux produits scalaires classiques**)

1. Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la norme est donnée par

$$\forall x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

2. Sur $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$ muni du produit scalaire L^2, on obtient la norme $\|\cdot\|_2$ donnée par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2}.$$

3. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la norme est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} A[i,j]^2}.$$

2 Inégalités classiques

On aimerait que la norme vérifie l'inégalité "triangulaire" très intuitive suivante : pour tous $x, y \in E$,

$$(\star): \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Quand on cherche à la démontrer, puisque les deux membres sont positifs et définis à partir de racines carrées, il est naturel d'élever au carré chaque membre de l'inégalité, ce qui donne une inégalité équivalente :

$$\langle x+y, x+y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\|x\|\,\|y\|.$$

Cependant, le premier membre se développe par bilinéarité :

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle,$$

puis, par symétrie, on obtient l'égalité

$$(1): \quad \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle.$$

Finalement, l'inégalité $(\star)$ est équivalente à

$$(2): \quad \langle x,y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|.$$

On tire deux choses de cette analyse :
- pour démontrer l'inégalité triangulaire, il suffit de démontrer l'inégalité (2) ;
- on a vu au passage l'égalité (1), qui permet d'exprimer $\langle x,y\rangle$ **uniquement à l'aide de normes**, comme on le reformule dans la proposition suivante.

Proposition 14 ***(Identité de polarisation)***

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).}$$

Démonstration: Triviale par (1). □

Remarque 15 Cela montre donc que la norme associée à un produit scalaire détermine de manière unique ce produit scalaire. Autrement dit, deux produits scalaires ont des (applications) normes associées différentes.

On va maintenant montrer que (2) est vérifiée pour tous $x, y \in E$, pour en déduire l'inégalité triangulaire. On remarque au passage que si on le fait, comme $\|-x\| = \|x\|$ par homogénéité, alors on aura aussi $-\langle x,y\rangle = \langle -x,y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|$, d'où finalement $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. Cette inégalité, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, est très importante en pratique.

Théorème 16 ***(Inégalités classiques)***

1. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.}$$

2. ***(Inégalité de Minkowski, dite triangulaire)***

$$\boxed{\forall x,y\in E,\quad \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\,.}$$

3. ***(Cas d'égalité)*** *Pour $x,y\in E$, il y a :*
   — *égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ssi x et y sont linéairement dépendants ;*
   — *égalité dans l'inégalité de Minkowski ssi x et y sont "positivement liés", i.e.*

$$(\exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ y=\lambda x)\quad\text{ou}\quad(\exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ x=\lambda y)\,,$$

   qui équivaut à

$$(y=0)\quad\text{ou}\quad(\exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ x=\lambda y)\,.$$

Démonstration:

---

1. Soit $x,y\in E$. On distingue deux cas :
   — si $y=0$, les deux membres de l'inégalité sont nuls, donc elle est vérifiée et il y a même égalité. Remarquons qu'ici, x et y sont linéairement dépendants ;
   — si $y\neq 0$, on considère la fonction polynomiale du second degré (on a bien $\|y\|^2\neq 0$)

$$f:\ \lambda\longmapsto\|x+\lambda y\|^2=\langle x+\lambda y,x+\lambda y\rangle=\|y\|^2\lambda^2+2\langle x,y\rangle\lambda+\|x\|^2\,.$$

   Cette fonction étant positive ou nulle, elle a au plus une racine et son discriminant est donc négatif ou nul, *i.e.*

$$4\langle x,y\rangle^2-4\|y\|^2\|x\|^2\leq 0,\quad \textit{i.e.}\quad |\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|\,.$$

   De plus, l'égalité est atteinte ssi f admet une racine, *i.e.* ss'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x+\lambda y=0$, *i.e.* ssi x et y sont linéairement dépendants (rappelons qu'on est dans le cas où $y\neq 0$).

   On a ainsi montré d'une part l'inégalité de Cauchy-Schwarz et d'autre part qu'il y a égalité ssi x et y sont linéairement dépendants.
2. Soient $x,y\in E$. En utilisant la remarque introductive, l'inégalité triangulaire est vérifiée ssi l'inégalité (2) l'est et il est immédiat en regardant les calculs faits qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ss'il y a égalité dans (2). Cependant, par définition de la valeur absolue et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x,y\rangle\leq|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|\,.$$

   On a ainsi démontré (2), donc l'inégalité triangulaire. De plus, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ss'il y a égalité dans les deux inégalités successives, *i.e.* ssi $\langle x,y\rangle\geq 0$ et x et y sont linéairement dépendants. Montrons que cela est équivalent à ce que x et y soient positivement liés par double implication.

   Supposons que $\langle x,y\rangle\geq 0$ et x et y soient linéairement dépendants, alors
   — soit $y=0$, donc x et y sont positivement liés ;
   — soit $y\neq 0$ et, par dépendance linéaire, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$. On a alors

$$\lambda=\lambda\frac{\langle y,y\rangle}{\langle y,y\rangle}=\frac{\langle\lambda y,y\rangle}{\langle y,y\rangle}=\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\geq 0,$$

   donc x et y sont positivement liés.

Réciproquement, si x et y sont positivement liés, quitte à échanger x et y, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$. Alors, x et y sont linéairement dépendants et $\langle x, y\rangle = \lambda \|y\|^2 \geq 0$.

3. Les cas d'égalité ont été démontrés avec les inégalités.

□

Remarque 17 (**Avant-première : notion de norme**)
Ce qu'on appelle plus généralement une norme sur un espace vectoriel est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Il existe des normes ne provenant pas d'un produit scalaire (en fait, la plupart).
Vous pouvez montrer en exercice que les deux applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^2$:

$$N_1 : \ (x,y) \longmapsto |x| + |y| \quad \text{et} \quad N_\infty : \ (x,y) \longmapsto \max\left(|x|, |y|\right).$$

3 Cas particuliers fondamentaux de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour deux vecteurs $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\langle x, y\rangle_{\text{can}}| \leq \|x\| \, \|y\|,$$

i.e. , en élevant au carré

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Cependant, en appliquant cette inégalité aux vecteurs $(|x_i|)_{i=1}^n$ et $(|y_i|)_{i=1}^n$, on obtient "un peu" mieux :

Proposition 18 *(Inégalité de C.-S."usuelle" dans $\mathbb{R}^n$)*

$$\boxed{\forall (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).}$$

Exercice 19 Démontrer "à la main" que pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

Comme précédemment, pour deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a < b$), en appliquant l'inégalité de C.-S. à $|f|$ et $|g|$, on obtient la

Proposition 20 *(Inégalité de C.-S. "L^2")*

$$\boxed{\forall f,g \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad \left(\int_a^b |fg|\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).}$$

Exercice 21 ($\star\star$) Soient $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que

$$\int_0^a f^2 \leq \frac{a^2}{2}\int_0^a (f')^2.$$

4 Distance

Comme dans le plan et l'espace usuel, on peut mesurer les distances avec la norme :

Définition 22 (**Distance sur un préhilbertien**)
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
La *distance* (préhilbertienne, ou euclidienne) *entre* deux vecteurs $x, y \in E$ est donnée par

$$\boxed{\mathrm{d}(x,y) = \|y-x\| \,.}$$

La *distance* sur E est l'application

$$\boxed{\mathrm{d} : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{d}(x,y) \end{array} \right. .}$$

On déduit facilement des propriétés de la norme celles de la distance.

Proposition 23 ***(Propriétés de la distance)***
La distance préhilbertienne sur E vérifie :

1. ***(symétrie)***

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x);}$$

2. ***(séparation)***

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad (\,\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y)\,;}$$

3. ***(inégalité triangulaire)***

$$\boxed{\forall x, y, z \in E, \quad \mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z).}$$

Démonstration: En exercice. □

Remarque 24 (**Avant-première : notion de boule pour une norme**)
Quand on prend une norme au sens général du terme, on peut lui associer une distance comme ci-dessus. Une distance permet de définir des *boules*, *ouvertes* ou *fermées* : pour $x_0 \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+$, les boules ouverte et fermée de centre x_0 et de rayon R sont :

$$B_o(x_0,R) = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,x_0) < R\} = \{x \in E \mid \|x-x_0\| < R\}$$

et

$$B_f(x_0,R) = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,x_0) \leq R\} = \{x \in E \mid \|x-x_0\| \leq R\}\,.$$

Ces boules, pour des rayons non nuls, correspondent aux voisinages standard de points de $\mathbb{R}$ que nous avions introduits pour la notion de limite et permettent de faire de l'analyse sur un espace vectoriel normé, ce que vous ferez l'an prochain.

Exercice 25 Dessiner les boules pour les normes N_1 et N_∞ de le remarque 17 et comparer aux boules de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 26 (**Culturelle**)
Ce qu'on appelle plus généralement une distance sur ensemble X est une application $\mathrm{d} : X^2 \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés ci-dessus : symétrie, séparation et inégalité triangulaire. Le couple (X, d) est alors appelé un *espace métrique*.
On peut facilement voir que, sur un espace vectoriel, il y a des distances qui ne proviennent pas de normes : prendre la distance *discrète* qui vaut 0 si les deux vecteurs sont confondus et 1 sinon, en montrant d'abord que c'est bien une distance.

III Orthogonalité

On considère encore un espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1 Définitions

Définition 27 (**Vecteurs orthogonaux**)
On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* et on note $x \perp y$ ssi $\boxed{\langle x,y\rangle = 0.}$

Exemple 28 Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, $(1,-2)$ et $(4,2)$ sont orthogonaux. Décrire tous les vecteurs orthogonaux à $(1,-2)$.

Exercice 29 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, décrire l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur $(1,1,1)$.

Exercice 30 Dans $E = \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, muni du produit scalaire L^2, décrire l'ensemble des fonctions orthogonales à la fonction constante $x \longmapsto 1$.

Ces exemples nous mènent naturellement à la définition suivante :

Définition 31 (**Orthogonal d'une partie**)
Pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on note $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de X :

$$\boxed{X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \langle x,y\rangle = 0\}.}$$

Lorsque $X = \{x\}$ est un singleton, on note pour simplifier $x^\perp = \{x\}^\perp$.

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 32 ***(Propriétés de l'orthogonal d'une partie)***

1. *Pour tout $X \subset E$,* $\boxed{X^\perp \text{ est un sous-e.v. de } E\,;}$
2. $\boxed{\varnothing^\perp = E;}$
3. $\boxed{0^\perp = E;}$

4. $\boxed{E^\perp = \{0\}\,;}$
5. *Pour tout sous-e.v. F de E,* $\boxed{F \cap F^\perp = \{0\}\,;}$
6. *Pour tous* $X, Y \subset E$, $\boxed{X \subset Y \Longrightarrow Y^\perp \subset X^\perp;}$
7. *Pour tout* $X \subset E$, $\boxed{X^\perp = (\operatorname{Vect} X)^\perp;}$
8. *Pour tout* $X \subset E$, $\boxed{X^{\perp\perp} \supset X;}$
9. *Pour tous* $X, Y \subset E$, $\boxed{(X \cup Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp;}$
10. *Pour tous* $X, Y \subset E$, $\boxed{(X \cap Y)^\perp \supset X^\perp + Y^\perp.}$

Démonstration: En exercice $\bigoplus$ □

Définition 33 (**Parties orthogonales**) Plus généralement, on dit que $X, Y \subset E$ sont *deux parties orthogonales* et on note $X \perp Y$ ssi les trois conditions équivalentes suivantes sont vérifiées

$$(\forall (x,y) \in X \times Y,\ x \perp y) \iff X \subset Y^\perp \iff Y \subset X^\perp.$$

Exemple 34 On peut avoir deux droites de l'espace euclidien usuel $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}\right)$ qui soient orthogonales, mais attention, aucune ne sera l'orthogonal de l'autre !

2 Familles de vecteurs

Définition 35 (**Familles orthogonales**)
Une famille (quelconque) de vecteurs de E est dite *orthogonale* ssi ses vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux.

Définition 36 (**Familles orthonormales**)
Une famille (quelconque) $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*, notation ON) ssi c'est une famille orthogonale de vecteurs de norme 1 (*unitaires*), ce qui équivaut à ce que

$$\boxed{\forall i, j \in I, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.}$$

Exemple 37 Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont orthonormales pour leurs produits scalaires canoniques respectifs.

Exercice 38
On se place sur l'espace $E = \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire L^2 et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{0,n} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(nt) \end{array} \right.$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_{1,n} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(nt). \end{array} \right.$$

On note $I = (\{0\} \times \mathbb{N}) \sqcup (\{1\} \times \mathbb{N}^\star)$.

1. Montrer que la famille $(f_{i,n})_{(i,n)\in I}$ est orthogonale.
2. Déterminer des constantes $\alpha_{i,n} > 0$ telles que $(\alpha_{i,n} f_{i,n})_{(i,n)\in I}$ soit orthonormale.

On a un lien avec l'indépendance linéaire :

Proposition 39 ***(Orthogonalité et indépendance linéaire)***

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** *est libre.*

Toute famille ON est libre.

Démonstration: En exercice $\bigoplus$ □

Corollaire 40 ***(Base orthonormale en dimension finie)***
Dans un espace euclidien E de dimension n, toute famille ON de n vecteurs est une base, appelée base orthonormale de E.

Démonstration: Triviale. □

Les familles orthogonales vérifient le

Théorème 41 ***(Théorème de Pythagore)***
Si $(x_i)_{i=1}^p \in E^p$ *est une famille orthogonale finie, alors* $\left\|\sum_{i=1}^p x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$.

Démonstration: Pour $(x_i)_{i=1}^p \in E^p$ orthogonale,

$$\left\|\sum_{i=1}^p x_i\right\|^2 = \langle \sum_{i=1}^p x_i, \sum_{j=1}^p x_j\rangle = \sum_{1\le i,j\le p} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{1\le i\le p} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 .$$

□

Dans le cas de deux vecteurs, ce théorème a une réciproque :

Théorème 42 ***(Théorème de Pythagore et sa réciproque pour deux vecteurs)***
Pour $x, y \in E$,

$$\boxed{\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 ,}$$

Démonstration: Immédiat par l'identité de polarisation. □

Exercice 43 Montrer que la réciproque du théorème de Pythagore est fausse pour $p \ge 3$.

IV Orthonormalisation

On se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Lemme 44 *Si $(e_i)_{i=1}^p$ est une famille orthonormale de E et $f \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_i)_{i=1}^p$, il existe un unique vecteur $e_{p+1} \in E$ tel que :*

- *la famille $(e_i)_{i=1}^{p+1}$ soit orthonormale ;*
- $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,f)$ *;*
- $\langle e_{p+1}, f\rangle > 0$.

qui est donné par la formule suivante :

$$e_{p+1} = \left\| f - \sum_{i=1}^p \langle f, e_i\rangle e_i \right\|^{-1} \left(f - \sum_{i=1}^p \langle f, e_i\rangle e_i \right).$$

Remarque 45 On fait un dessin pour $p = 2$, dans l'espace euclidien usuel. On voit que la somme $\langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2$ est la somme des projections "orthogonales" de f sur les axes $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_2)$, qui est aussi la projection orthogonale de f sur le plan $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Soustraire cette somme à f permet d'obtenir un vecteur orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, qu'on norme par la suite pour obtenir un vecteur unitaire. Ces notions de projections orthogonales dans un espace préhilbertien quelconque seront définies, et leurs formules justifiées, par la suite. Remarquons simplement que si l'espace ambiant est de dimension plus grande que 3, il y a une infinité de possibilités pour choisir une direction orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, mais que la construction précédente choisit celle qui est aussi dans l'espace $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,f)$.

Démonstration: On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. Supposons que $e_{p+1} \in E$ vérifie les propriétés de l'énoncé. Comme on a l'égalité $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,f)$, alors $e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p,f)$, donc s'écrit $e_{p+1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \lambda f$, avec $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Comme la famille $(e_i)_{i=1}^{p+1}$ est ON, par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$0 = \langle e_{p+1}, e_j\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle + \lambda\langle f, e_j\rangle = \lambda_j + \lambda\langle f, e_j\rangle$$

donc $\lambda_j = -\lambda\langle f, e_j\rangle$ et finalement, cela étant valable pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$e_{p+1} = \lambda u \quad \text{avec} \quad u = f - \sum_{i=1}^p \langle f, e_i\rangle e_i.$$

Comme e_{p+1} est normé, $1 = \|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$, donc $u \neq 0$ (ce qu'il est facile de voir aussi autrement) et $|\lambda| = \|u\|^{-1}$.
Par ailleurs, comme e_{p+1} est orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_i)_{i=1}^p$,

$$1 = \langle e_{p+1}, e_{p+1}\rangle = \langle e_{p+1}, \lambda u\rangle = \lambda\langle e_{p+1}, f - \sum_{i=1}^p \langle f, e_i\rangle e_i\rangle = \lambda\langle e_{p+1}, f\rangle,$$

et comme $\langle e_{p+1}, f\rangle > 0$, alors $\lambda > 0$, donc $\lambda = |\lambda| = \|u\|^{-1}$ et

$$\boxed{e_{p+1} = \|u\|^{-1} u = \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left(f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right).}$$

<u>Synthèse</u>. On pose

$$e_{p+1} = \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left(f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right).$$

On sait déjà que la famille $(e_i)_{i=1}^{p}$ est orthonormale. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, par linéarité à gauche du produit scalaire et orthonormalité de $(e_i)_{i=1}^{p}$,

$$\begin{aligned}
\langle e_{p+1}, e_j \rangle &= \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left(\langle f, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \right) \\
&= \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left(\langle f, e_j \rangle - \langle f, e_j \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et, par homogénéité, puis positivité de la norme,

$$\begin{aligned}
\|e_{p+1}\| &= \left| \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \right| \cdot \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\| \\
&= \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\| \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la famille } (e_i)_{i=1}^{p+1} \text{ est orthonormale.}}$

Par définition, $e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f)$, et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f)$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f)$. Comme toute famille ON est libre, le premier espace est de dimension $p+1$, et le deuxième étant de dimension au plus $p+1$ (en fait exactement $p+1$), l'inclusion est une égalité, *i.e.*

$$\boxed{\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f).}$$

Enfin, par orthogonalité de e_{p+1} et $\mathrm{Vect}(e_i)_{i=1}^{p}$,

$$\begin{aligned}
\langle e_{p+1}, f \rangle &= \langle e_{p+1}, f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \rangle \\
&= \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\| \langle e_{p+1}, e_{p+1} \rangle \\
&= \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|
\end{aligned}$$

$$> \quad 0,$$

car le vecteur dont on prend la norme est non nul puisque $f \notin \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^p$. Ainsi $\boxed{\langle e_{p+1}, f\rangle \ > 0,}$ ce qui achève la synthèse et ainsi la preuve du lemme. $\square$

Remarque 46 Si jamais le vecteur f est déjà tel que $(e_1, \ldots, e_p, f)$ soit ON, alors $e_{p+1} = f$.

En appliquant successivement le lemme, on peut construire une famille ON à partir d'une famille libre, ce qui donne le

Théorème 47 *(Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)*
Pour toute famille libre $(f_i)_{i=1}^m$ de E, il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i=1}^m$ telle que :

$$\forall p \in [\![1, m]\!], \qquad \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^p = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^p \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p\rangle > 0.$$

De plus cette famille est obtenue par l'algorithme suivant : $e_1 = \|f_1\|^{-1} f_1$ et, pour p variant de 1 à $m-1$,

$$\boxed{e_{p+1} = \left\| f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i \right\|^{-1} \left(f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i \right).}$$

Démonstration: On démontre d'abord l'existence par récurrence sur m. Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$\mathcal{A}_m$: "Pour toute famille libre $(f_i)_{i=1}^m$ de E, il existe une famille ON $(e_i)_{i=1}^m$ telle que :

$$\forall p \in [\![1, m]\!], \qquad \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^p = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^p \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p\rangle > 0.\text{"}$$

Initialisation. Soit (f) une famille libre de E, *i.e.* telle que $f \neq 0$. Il est clair que $e = \|f\|^{-1} f$ convient, donc $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est vérifiée.}}$
Hérédité. Supposons que $\mathcal{A}_m$ soit vérifiée pour un certain $m \in \mathbb{N}^\star$ et montrons $\mathcal{A}_{m+1}$.
Soit $(f_i)_{i=1}^{m+1}$ une famille libre de E. Comme sous-famille d'une famille libre, $(f_i)_{i=1}^m$ est libre, donc on peut lui appliquer $\mathcal{A}_m$: il existe une famille orthonormale $(e_i)_{i=1}^m$ telle que

$$\forall p \in [\![1, m]\!], \qquad \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^p = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^p \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p\rangle > 0.$$

En posant

$$e_{m+1} = \left\| f_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle f_{m+1}, e_i\rangle e_i \right\|^{-1} \left(f_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle f_{m+1}, e_i\rangle e_i \right),$$

le lemme assure que $(e_i)_{i=1}^{m+1}$ est orthonormale, que $\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{m+1} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_m, f_{m+1})$ et que $\langle e_{m+1}, f_{m+1}\rangle \ > 0$. Alors, pour $p \in [\![1, m+1]\!]$:

— si $p \leq m$, on a déjà les propriétés $\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^p = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^p$ et $\langle e_p, f_p\rangle > 0$, par construction de $(e_i)_{i=1}^m$ à l'aide de $\mathcal{A}_m$;
— si $p = m+1$, on a déjà $\langle e_{m+1}, f_{m+1}\rangle \ > 0$, puisque e_{m+1} a été obtenu par le lemme. De plus, comme $\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^m = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^m$, alors

$$\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{m+1} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_m, f_{m+1}) = \mathrm{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{m+1}.$$

Ainsi, $(e_i)_{i=1}^{m+1}$ est $\boxed{\text{orthonormale}}$ et vérifie

$$\boxed{\forall p \in [\![1, m+1]\!], \qquad \text{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{p} \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p \rangle > 0.}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{m+1} \text{ est vérifiée.}}$

$$\boxed{\text{Par le principe de récurrence, on a démontré la partie de l'existence dans le théorème.}}$$

On démontre ensuite l'unicité par l'absurde. Supposons qu'on ait un $m \in \mathbb{N}^\star$, une famille $(f_i)_{i=1}^m$ et deux familles orthonormales distinctes $(e_i)_{i=1}^m$ et $(e'_i)_{i=1}^m$ vérifiant les conclusions du théorème. Soit alors p le plus petit indice tel que $e_p \neq e'_p$. On a deux cas :
Si $p = 1$, comme $\text{Vect}\,(e_1) = \text{Vect}\,(e'_1) = \text{Vect}\,(f_1)$, alors il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^\star$ tels que $e_1 = \lambda f_1$ et $e'_1 = \lambda' f_1$. Comme e_1 et e'_1 sont normés, $|\lambda| = \|f_1\|^{-1} = |\lambda'|$. Cependant comme $\lambda \|f_1\|^2 = \langle e_1, f_1 \rangle > 0$, alors $\lambda > 0$ et de même $\lambda' > 0$, donc, finalement, $\lambda = \lambda'$ et $e_1 = e'_1$, contradiction.
Si $p \geq 2$, les deux vecteurs e_p et e'_p vérifient la conclusion du lemme appliqué à la famille ON $(e_i)_{i=1}^{p-1} = (e'_i)_{i=1}^{p-1}$ et au vecteur f_p : en effet, $(e_i)_{i=1}^{p} = (e'_i)_{i=1}^{p}$ est ON, $\langle e_p, f_p \rangle, \langle e'_p, f_p \rangle \in \mathbb{R}_+^\star$, et, comme $\text{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{p-1} = \text{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{p-1}$ et $\text{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{p}$, alors

$$\text{Vect}\,(e_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{p-1}, f_p)$$

et de même

$$\text{Vect}\,(e'_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(f_i)_{i=1}^{p} = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{p-1}, f_p).$$

Par unicité dans le résultat du lemme, $e_p = e'_p$, contradiction.

$$\boxed{\text{Par l'absurde, on a démontré la partie de l'unicité dans le théorème.}}$$

De plus, l'initialisation et l'hérédité de la récurrence fournissent les formules de l'algorithme. □

Remarque 48 (**Cas d'une famille partiellement ON**)

1. Si jamais $f = (f_i)_{i=1}^m$ est déjà orthonormée, alors ce procédé d'orthonormalisation redonne la famille f, ce qu'on peut voir soit par l'unicité, soit par la formule appliquée à chaque étape.
2. Plus généralement, si $p \leq m$ et $(f_i)_{i=1}^p$ est déjà ON, alors la famille $(e_i)_{i=1}^m$ obtenue coïncide avec f pour les p premiers vecteurs : pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $e_i = f_i$.

Exercice 49 On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
On cherche une BON de l'hyperplan H d'équation $2x+3y+4z+5t = 0$. Pour cela on commence par choisir une base de H par la méthode habituelle : on considère que c'est un système linéaire à une équation d'inconnue principale x et d'inconnues secondaires y, z, t et une base de l'espace des solutions est

$$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Par orthonormalisation de cette famille libre de $\mathbb{R}^4$, montrer qu'une BON de H est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{377}} \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{174} \begin{pmatrix} -5/261 \\ -5/174 \\ -10/261 \\ 1/18 \end{pmatrix} \right).$$

Pour une famille libre indexée par $\mathbb{N}$, l'orthonormalisation fonctionne encore :

Théorème 50 *(Orthonormalisation d'une famille dénombrable)*
Pour toute famille libre $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E, il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{Vect}(e_i)_{i=1}^{p} = \operatorname{Vect}(f_i)_{i=1}^{p} \quad \text{et} \quad \langle e_p, f_p \rangle > 0.$$

De plus cette famille est obtenue par l'algorithme suivant : $e_0 = \|f_0\|^{-1} f_0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$e_{p+1} = \left\| f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i \right\|^{-1} \left(f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i \right).$$

Exemple 51 (**Polynômes orthogonaux**)
On se place sur l'espace préhilbertien de l'exercice 9 : $E = \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$, muni du produit scalaire w

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : \begin{cases} \left(\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_a^b fgw \end{cases},$$

où $a < b$ et $w \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$ est strictement positive en tout point.
En orthonormalisant la famille libre (montrer cette indépendance linéaire en exercice !)

$$(t \longmapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}},$$

on obtient une suite (P_n) de fonctions polynomiales échelonnées en degré qui est orthonormale. Pour des raisons historiques ou pratiques, il est souvent choisi une autre normalisation de la famille obtenue et elle n'est alors plus orthonormale, mais seulement orthogonale, d'où le nom de "polynômes orthogonaux". On obtient ainsi les polynômes de Legendre (poids 1 sur l'intervalle $[-1,1]$), de Tchebychev, de Laguerre,...
On peut aussi travailler sur des intervalles qui ne sont pas des segments, comme vous le verrez l'an prochain.

V Bases orthonormales d'un espace euclidien

1 Résultats d'existence

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt a les conséquences suivantes.

Corollaire 52 ***(Existence de BON dans un espace euclidien)***
Tout espace euclidien possède des BON.

Démonstration: Un espace vectoriel euclidien étant de dimension finie, notée n, il possède des bases. On en prend une et on l'orthonormalise (possible car c'est une famille libre), ce qui fournit une famille ON de cardinal n, qui est donc une BON. □

Corollaire 53 ***(Théorème de la base orthonormale incomplète)***
Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut se compléter en une BON.

Démonstration: On commence par compléter la famille orthonormale $(f_i)_{i=1}^p$ en question (qui est libre puisqu'orthonormale) en une base $(f_i)_{i=1}^n$ de l'espace euclidien, qu'on orthonormalise en une famille $(e_i)_{i=1}^n$. Par la remarque 48, on a, pour tout $i \leq p$, $e_i = f_i$. Ainsi la famille $(e_i)_{i=1}^n$ est une BON qui complète la famille ON initiale. □

2 Calculs en coordonnées

Proposition 54 ***Calculs en base orthonormale***
Soit E un espace euclidien muni d'une ***BON*** *$e = (e_i)_{i=1}^n$.*
On note $(x_i)_{i=1}^n = (e_i^\star(x))_{i=1}^n$ (resp $(y_i)_{i=1}^n$) les coordonnées de x (resp. y) dans la base e.
On a alors

1. $\boxed{\forall x \in E,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\quad x_i = \langle x, e_i\rangle;}$
2. $\boxed{\forall x, y \in E,\quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i;}$
3. $\boxed{\forall x \in E,\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.}$

Démonstration: En exercice $\bigoplus$ □

VI Projections orthogonales

1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

La notion d'orthogonalité permet de "construire" un supplémentaire particulier de chaque sous-espace de dimension finie :

Proposition 55 ***(Supplémentaire orthogonal)***
Si F est un sous-espace ***de dimension finie*** *d'un espace* ***préhilbertien*** *E, alors*

$$\boxed{F \oplus F^\perp = E.}$$

Dans ce cas, $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien E.
On déjà vu que la somme $F+F^{\perp}$ est directe en toute généralité puisque $F\cap F^{\perp}=\{0\}$.
Il reste à montrer qu'elle vaut E. Pour cela on reprend un raisonnement géométrique déjà évoqué lors de l'orthonormalisation. Comme F est de dimension finie, il admet une base. En l'orthonormalisant, on obtient une famille ON $(e_i)_{i=1}^{p}$ qui engendre aussi F, donc elle en est une base (puisqu'une famille ON est libre).
Soit alors $x\in E$. On pose

$$y=\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle e_i \quad \text{et} \quad z=x-y.$$

On a alors $y\in F$ et, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$,

$$\langle z,e_j\rangle=\langle x,e_j\rangle-\langle\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle e_i,e_j\rangle=\langle x,e_j\rangle-\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle=\langle x,e_j\rangle-\langle x,e_j\rangle=0,$$

donc z est orthogonal à tout e_j, donc orthogonal à $\operatorname{Vect}(e_j)_{j=1}^{p}=F$. Ainsi, $x=y+z\in F+F^{\perp}$.
Finalement, comme la somme $F+F^{\perp}$ est directe et vaut E, F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires. □

Remarque 56 Sans "deviner" la formule de y géométriquement, on peut aussi faire classiquement une analyse-synthèse.

Exemple 57 L'espace $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([a,b])$ est somme directe orthogonale du sous-espace des fonctions constantes et du sous-espace des fonctions d'intégrale nulle (*i.e.* les fonctions f telles que $\int_a^b f=0$).

Dans le cas d'un espace euclidien, on obtient ainsi la dimension de $F^{\perp}$:

Proposition 58 ***(Supplémentaire orthogonal en dimension finie)***
Si F est un sous-espace d'un espace ***euclidien*** *E de dimension n, alors*

1. $\boxed{\dim F^{\perp}=n-\dim F;}$
2. $\boxed{F^{\perp\perp}=F.}$

Démonstration: Soit F un tel sous-espace.
Le premier point est évident puisque F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E de dimension n.
Par ailleurs, on sait qu'en toute généralité, on a $F^{\perp\perp}\supset F$ et, par le point précédent,

$$\dim F^{\perp\perp}=n-\dim F^{\perp}=n-(n-\dim F)=\dim F,$$

donc, puisque ce sont deux sous-espaces de même dimension finie dont l'un est inclus dans l'autre, $F^{\perp\perp}=F$. □

Exemple 59 Dans l'espace euclidien usuel, le supplémentaire orthogonal d'un plan est une droite et *vice-versa*.

Remarque 60 **Attention**, en dimension infinie, il se peut que $F^{\perp\perp} \neq F$.
Voici un exemple. On prend l'espace $E = \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}([0,1])$ avec le produit scalaire L^2. Vous démontrerez l'an prochain (théorème de Weierstraβ), que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales.. Cela permet de montrer facilement qu'une fonction orthogonale à toute fonction polynomiale est en fait orthogonale à toute fonction de E (car l'intégrale sur un segment est stable par passage à la limite uniforme, ce qui est très facile à démontrer), donc elle est nulle. En notant F le sous-espace de E des fonctions polynomiales, on a donc $F^{\perp} = \{0\}$, donc $F^{\perp\perp} = E \neq F$.

Dans le cas particulier d'une droite ou d'un hyperplan en **dimension finie**, il est très facile de déterminer le supplémentaire orthogonal :

Proposition 61 *Soient E un espace euclidien et e une BON de E. Alors :*

1. *le supplémentaire orthogonal d'une droite dirigée par $\sum_i a_i e_i$ est l'hyperplan dont une équation dans la base e est $\sum_i a_i x_i = 0$;*
2. *le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan dont une équation dans la base e est $\sum_i a_i x_i = 0$ est la droite* Vect $(\sum_i a_i e_i)$.

Démonstration: En écrivant la définition de l'orthogonal d'une partie, le premier résultat découle directement du fait que le produit scalaire entre un vecteur $x = \sum_i x_i e_i$ et le vecteur $u = \sum_i a_i e_i$ est $\langle x, u \rangle = \sum_i x_i a_i = \sum_i a_i x_i$, puisque la base e est ON.
Le second s'obtient en remarquant que le vecteur non nul $\sum a_i e_i$ est orthogonal à l'hyperplan, qu'on note H, et $H^{\perp}$ est de dimension $n - (n-1) = 1$. □

Exercice 62

1. Interpréter un système linéaire homogène de n équations à p inconnues en termes d'orthogonalité.
2. Dans le cas où ce système est de rang n, retrouver ainsi la dimension de l'espace des solutions.

2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

La proposition 55 permet de projeter "orthogonalement" sur un sous-espace de dimension finie :

Définition 63 (**Projection orthogonale**)
Soient E un préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée la *projection orthogonale p_F* sur F.

On a d'après la démonstration de la proposition 55, la

Proposition 64 *Avec les notations de la définition ci-dessus, si $(e_i)_{i=1}^{p}$ est une BON de F, alors, pour tout $x \in E$,*

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.}$$

Exercice 65 Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée e, soit H un hyperplan d'équation $ax+by+cz=0$ (a,b,c non tous nuls).

1. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur H dans la base e ?
2. Quelle est la matrice de la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$ dans la base e ?

Cela se généralise de la manière suivante :

Proposition 66 ***(Projection orthogonale sur un hyperplan en dimension finie)***
Soient E un espace euclidien et $u \in E \setminus \{0\}$.
Alors, la projection orthogonale sur $H = u^\perp$ est l'application

$$\boxed{p_H : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u \end{array} \right. .}$$

Démonstration: La projection orthogonale sur $H^\perp = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)$ est

$$p_{H^\perp} : x \longmapsto \langle x, \frac{u}{\|u\|}\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$$

et $p_H \oplus p_{H^\perp} = \mathrm{Id}_E$. □

Remarque 67 Si une équation de H dans une **BON** e est $\sum_i a_i x_i = 0$, alors $u = \sum_i a_i e_i$ convient : $u \neq 0$ et $H = u^\perp$.

Remarque 68 Si le vecteur u est *normé*, *i.e.* de norme 1, alors la formule se simplifie en $p_H : x \longmapsto x - \langle x,u\rangle u$.

On a enfin l'inégalité suivante

Proposition 69 ***(Inégalité de Bessel)*** *Avec les notations précédentes, pour tout $x \in E$,*

$$\boxed{\|p_F(x)\| \leq \|x\| .}$$

Démonstration: Soit $x \in E$.
Par définition des projections orthogonales, $p_F(x) \perp x - p_F(x)$, donc, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$$

et l'inégalité de Bessel en découle en prenant les racines carrées. □

Remarque 70 (**Reformulation**)
En utilisant la linéarité, l'inégalité de Bessel se reformule ainsi :

$$\boxed{\text{les projections orthogonales sont 1-lipschitziennes.}}$$

3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

On définit en toute généralité la distance d'un vecteur à un ensemble non vide de vecteurs :

Définition 71 (**Distance d'un vecteur à une partie non vide de** E)
Soient E un préhilbertien, $Y \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ et $x \in E$.
La *distance de x à Y* est

$$\mathrm{d}(x,Y) = \inf_{y \in Y} \mathrm{d}(x,y).$$

Remarque 72 Cela existe toujours car on prend la borne inférieure de la partie de $\mathbb{R}$ $\{\mathrm{d}(x,y);\ y \in Y\}$ qui est non vide (car $Y \neq \varnothing$) et minorée (par 0).

On a alors le résultat fondamental suivant :

Théorème 73 ***(Réalisation de la distance par projection orthogonale)***
*Soit F un sous-espace **de dimension finie** d'un **préhilbertien** E.*
*Pour tout $x \in E$, la distance de x à F est réalisée et $p_F(x)$ est l'**unique** vecteur de F réalisant cette distance.*

Démonstration: En cours $\bigoplus$ □

Exercice 74 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, quelle est la distance du vecteur (x,y,z) à la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$?

Le cas particulier d'un hyperplan est à connaître :

Proposition 75 ***(Distance d'un point à un hyperplan d'un espace euclidien)***
Soient E un espace euclidien, H un hyperplan de E et u un vecteur non nul normal à H.
Alors, pour tout $x \in E$,

$$\boxed{\mathrm{d}(x,H) = \frac{|\langle x,u\rangle|}{\|u\|}.}$$

Dans une BON e, si H est d'équation $\sum_i a_i x_i = 0$, alors

$$\boxed{\mathrm{d}(x,H) = \frac{|\sum_i a_i x_i|}{\sqrt{\sum_i a_i^2}}.}$$

Démonstration: On a, pour $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_{H^\perp}(x)\| = \left|\langle x, \frac{u}{\|u\|}\rangle\right| = \frac{|\langle x,u\rangle|}{\|u\|}.$$

Avec l'équation de H, le vecteur $u = \sum_i a_i e_i$ est normal à H et il suffit d'écrire la formule en coordonnées dans la BON. □

La suite n'est plus au programme de MPSI, car elle est passée au programme de MP/MP*. Une première couche pourra être profitable à qui aura correctement acquis ce qui précède.

VII Isométries vectorielles d'un espace euclidien

On se place ici dans un espace **euclidien** E.

Définition 76 (Isométries vectorielles)
Une *isométrie (vectorielle)*, ou un *endomorphisme orthogonal*, de E est un **endomorphisme** u de E qui préserve les distances, *i.e.*

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.}$$

Leur ensemble est noté $O(E)$ et appelé *groupe orthogonal*, terminologie justifiée par la proposition suivante.

Proposition 77 (Groupe orthogonal de E)

$$\boxed{O(E) \text{ est un sous-groupe de } GL(E).}$$

Démonstration: En exercice, en utilisant la caractérisation des sous-groupes. □

Exemples 78

1. Les endomorphismes Id_E et $-\mathrm{Id}_E$;
2. Les "rotations" de centre $O = (0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel ;
3. Les symétries "orthogonales" par rapport à des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel ;
4. Décrire des "rotations" et "symétries orthogonales" dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel ;
5. Peut-on obtenir de nouvelles isométries en composant les précédentes ?
6. Les rotations de $\mathbb{R}^2$ dont le centre n'est pas O ne sont pas des isométries ;
7. Les homothéties de rapport différent de ± 1 ne sont pas des isométries, même si leur centre est O.

On peut voir facilement qu'une isométrie préserve le produit scalaire, mais on a mieux :

Proposition 79 (Caractérisation d'une isométrie par le produit scalaire)
Soit $f \in E^E$ (i.e. une simple application).
Alors f est une isométrie si et seulement si elle préserve le produit scalaire.

Démonstration: Si f est une isométrie, elle préserve le produit scalaire par l'identité de polarisation.
Réciproquement, si f est une application de E vers E qui préserve le produit scalaire, il nous suffit de montrer qu'elle est linéaire, puisque la norme est définie à partir du produit scalaire. On prend $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\langle u(\lambda x+y)-\lambda u(x)-u(y), u(\lambda x+y)-\lambda u(x)-u(y)\rangle \\
&= \langle u(\lambda x+y), u(\lambda x+y)\rangle+\lambda^2\langle u(x), u(x)\rangle+\langle u(y), u(y)\rangle-2\lambda\langle u(\lambda x+y), u(x)\rangle-2\langle u(\lambda x+y), u(y)\rangle+2\lambda\langle u(x), u(y)\rangle \\
&= \langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle+\lambda^2\langle x, x\rangle+\langle y, y\rangle-2\lambda\langle \lambda x+y, x\rangle-2\langle \lambda x+y, y\rangle+2\lambda\langle x, y\rangle \\
&= \langle (\lambda x+y)-\lambda x-y, (\lambda x+y)-\lambda x-y\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc $u(\lambda x+y)=\lambda u(x)+u(y)$. □

On peut aussi se servir des BON pour les détecter :

Proposition 80 ***(Caractérisation d'une isométrie par BON)***
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$u \in O(E)$;*
2. *Il existe une BON dont l'image par u est une BON ;*
3. *L'image de toute BON par u est une BON.*

Démonstration: En cours $\bigoplus$ □

On s'intéresse au déterminant d'une isométrie et on commence par prouver le

Théorème 81 *Si e et e' sont deux **BON** d'un espace euclidien, alors* $\boxed{\det_e(e') = \pm 1.}$

Démonstration: On donne deux démonstrations, qui ont chacune leur intérêt.
Soient $e=(e_i)_{i=1}^n$ et $e'=(e'_i)_{i=1}^n$ deux **BON** d'un espace euclidien de dimension n.
Première démonstration.
On utilise les deux formules du déterminant, l'expression des coordonnées dans les BON e et e' et la symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\det_e(e') &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n e^\star_{\sigma(j)}(e'_j) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n \langle e'_j, e_{\sigma(j)}\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n \langle e_{\sigma(j)}, e'_j\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n e'^\star_j(e_{\sigma(j)}) \\
&= \det_{e'}(e) \\
&= \frac{1}{\det_e(e')},
\end{aligned}$$

donc $(\det_e(e'))^2 = 1$ et $\det_e(e') = \pm 1$.

Seconde démonstration.
On note $A = \mathrm{Mat}_e(e') = (\langle e'_j, e_i\rangle)_{i,j}$. On a alors, pour $i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$(A^{\mathrm{T}}A)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \langle e'_i, e_k\rangle\langle e'_j, e_k\rangle = \langle e'_i, e'_j\rangle = \delta_{i,j}$$

donc $A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{I}_n$ et

$$(\det(A))^2 = \det(A^{\mathrm{T}})\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}}A) = \det(\mathrm{I}_n) = 1,$$

donc $\det A \in \{\pm 1\}$, *i.e.* $\det_e(e') = \pm 1$. □

On en déduit, au signe près, le déterminant des isométries :

Corollaire 82 ***(Déterminant d'une isométrie)***
Un isométrie a pour déterminant ± 1.

Démonstration: Immédiate par la proposition 80 et le théorème 81. □

Cela mène naturellement à la

Définition 83 **(Isométries positives et négatives)**
Une *isométrie positive* est une isométrie de déterminant 1.
Une *isométrie négative* est une isométrie de déterminant -1.

Exemple 84 L'application $-\mathrm{Id}_E$ est une isométrie positive en dimension paire et négative en dimension impaire.

Exercice 85 Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, étudier l'endomorphisme f défini dans une base orthonormée directe par les formules :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(-x + z\sqrt{3}) \\ y' &= -y \\ z' &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - z). \end{cases}$$

Proposition 86 *L'ensemble $SO(E) = O^+(E)$ des isométries positives est un sous-groupe de $O(E)$, appelé* ***groupe spécial orthogonal de*** *E.*

Démonstration: En exercice facile. □

Remarque 87 **Attention**, l'ensemble $O(E) \setminus SO(E)$ des isométries négatives n'est pas un sous-groupe de $O(E)$, car la composée de deux isométries négatives est une isométrie positive, puisque le déterminant d'une composée d'endomorphismes est le produit des déterminants des composants.

Les isométries positives sont celles préservent l'orientation, ce qui, combiné avec une caractérisation précédente, donne la

Proposition 88 ***(Caractérisation d'une isométrie positive par BOND)***
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in SO(E)$;

2. Il existe une BOND dont l'image par u est une BOND ;

3. L'image de toute BOND par u est une BOND.

Démonstration: Immédiate. □

On peut institutionnaliser la définition des symétries orthogonales :

Définition 89 **(Symétries orthogonales)**
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *symétrie orthogonale par rapport a F* la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ et on la note généralement s_F.
Si F est un hyperplan, s_F est appelée une *réflexion*.

Remarque 90 La symétrie orthogonale s_F est bien définie puisque, E étant euclidien, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Exercice 91 Déterminer si s_F est une isométrie positive ou négative en fonction de $\dim F$ et $\dim E$. (Réponse : elle est positive ssi $\dim E - \dim F$ est pair, en écrivant la matrice de s_F dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.)

Les symétries orthogonales sont toujours des isométries, mais ce sont aussi les seules symétries qui soient isométriques :

Proposition 92 ***(Pour une symétrie, les deux notions d'orthogonalité coïncident !)***
Un symétrie (vectorielle) est un endomorphisme orthogonal ssi c'est une symétrie orthogonale.

Démonstration:

Soit s une symétrie vectorielle. On note F (resp. G) le sous-espace par rapport (resp. parallèlement) auquel elle agit. Rappelons que $F \oplus G = E$.
Alors, s est une symétrie orthogonale si et seulement si $G = F^\perp$ et comme $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^\perp$, cela équivaut à ce que $F \perp G$.
Or, pour $x, y \in E$, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$, donc, en utilisant la positivité des normes, la définition de s, le fait que $F + G = E$ et enfin le fait que $s \in \mathcal{L}(E)$, on obtient

$$\begin{aligned}
F \perp G &\iff \forall (x,y) \in F \times G,\ \langle x, y\rangle = 0 \\
&\iff \forall (x,y) \in F \times G,\ \|x-y\|^2 = \|x+y\|^2 \\
&\iff \forall (x,y) \in F \times G,\ \|x-y\| = \|x+y\| \\
&\iff \forall (x,y) \in F \times G,\ \|s(x+y)\| = \|x+y\| \\
&\iff \forall z \in E,\ \|s(z)\| = \|z\| \\
&\iff s \in O(E)
\end{aligned}$$

□

Remarque 93 **Attention**, une projection orthogonale n'est quasiment jamais un endomorphisme orthogonal : la seule qui en soit un est Id_E, puisque les autres ne sont pas des endomorphismes inversibles. Le démontrer.

Enfin, voici un complément culturel qui peut être utile au concours :

Théorème 94 *Toute isométrie est produit d'au plus n réflexions.*

Démonstration: On donne une idée de la preuve par récurrence. □

Corollaire 95 *$O(E)$ est engendré par les réflexions.*

VIII Matrices orthogonales

L'idée géométrique est très simple : ces matrices sont celles qui représentent les isométries dans les BON.
Cependant, on en donne au départ une définition purement algébrique :

Définition 96 (**Matrices orthogonales**)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^{-1} = A^{\mathrm{T}},}$$

ce qui équivaut à

$$\boxed{A^{\mathrm{T}}\, A = \mathrm{I}_n}$$

et aussi à

$$\boxed{A\, A^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n.}$$

Leur ensemble est noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ et appelé *groupe orthogonal* d'ordre n, terminologie justifiée par la proposition suivante.

Proposition 97 *(**Groupe orthogonal d'ordre** n)*

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \textit{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}).}$$

Démonstration: En exercice, en utilisant la caractérisation des sous-groupes. □

Exemple 98 $\mathrm{I}_n, -\mathrm{I}_n \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 99 *(**Caractérisation par vecteurs colonnes ou vecteurs lignes**) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$A \in O_n(\mathbb{R})$;*

2. *La famille de ses vecteurs colonnes est ON dans $\mathcal{M}_{n,1}$ identifié à $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique ;*
3. *La famille de ses vecteurs lignes est ON dans $\mathcal{M}_{1,n}$ identifié à $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.*

Démonstration: On remarque qu'en notant C_j les vecteurs colonnes de A, alors

$$A^{\mathrm{T}}A = (\langle C_i, C_j\rangle_{\mathrm{can}})_{1\leq i,j\leq n\cdot},$$

donc cette matrice vaut I_n ssi la famille $(C_j)_{j=1}^n$ est ON. Pour les lignes L_i, on remarque que

$$AA^{\mathrm{T}} = (\langle L_i, L_j\rangle_{\mathrm{can}})_{1\leq i,j\leq n\cdot},$$

□

Exemple 100 On peut ainsi vérifier de tête que $\begin{pmatrix} \sin(1) & 0 & \cos(1) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(1) & 0 & -\sin(1) \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$.

Exercice 101 (**Avant-première : $O_2(\mathbb{R})$**)

1. Déterminer les matrices carrées d'ordre 2 orthogonales.
   Cela sera institutionnalisé dans la section suivante.
2. Quels sont leurs déterminants ?

Le fait observé pour le déterminant des éléments de $O_2(\mathbb{R})$ est général. On le déduit de la proposition précédente :

Corollaire 102 ***(Déterminant d'une matrice orthogonale)***
Une matrice orthogonale a pour déterminant ± 1.

Démonstration: Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $C = (C_j)_{j=1}^n$ la famille de ses vecteurs colonnes. Alors $A = Mat_{\mathrm{can}}(C)$, donc $\det(A) = \det_{\mathrm{can}}(C) = \pm 1$, car can et C sont deux BON. □

Cela mène naturellement à la

Définition 103 (**Matrices orthogonales positives et négatives**)
Une *matrice orthogonale positive* est un élément de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
Une *matrice orthogonale négative* est un élément de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant -1.

Exemple 104 La matrice $-\mathrm{I}_n$ est orthogonale positive en dimension paire et orthogonale négative en dimension impaire.

Proposition 105 *L'ensemble $SO_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R})(= SO(n) = O^+(n))$ des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé* ***groupe spécial orthogonal d(ordre*** *n.*

Démonstration: En exercice facile. □

Remarque 106 **Attention**, l'ensemble $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales négatives n'est pas un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, car le déterminant d'un produit est le produit des déterminants des facteurs.

Comme pour les isométries, la positivité est reliée à l'orientation :

Proposition 107 ***(Caractérisation des matrices orthogonales positives)***
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$A \in SO_n(\mathbb{R})$;*
2. *La famille de ses vecteurs colonnes est une BOND de $((\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}})$;*
3. *La famille de ses vecteurs lignes est une BOND de $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}})$.*

Démonstration: Immédiate. □

Enfin, on fait le lien annoncé entre l'algèbre et la géométrie :

Proposition 108 ***(Caractérisation matricielle des isométries en BON)***
*Pour une **BON** e de E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$,*

$$\boxed{u \in O(E) \iff \operatorname{Mat}_e(u) \in O_n(\mathbb{R}),}$$

i.e.

$$\boxed{\textit{u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans la } \textbf{\textit{BON}} \textit{ e est orthogonale.}}$$

Démonstration: Comme e est une BON de E, u est une isométrie ssi $u(e)$ est une BON de E, ce qui équivaut, par l'expression du produit scalaire en BON, à ce que les vecteurs colonnes de $\operatorname{Mat}_e(u(e)) = \operatorname{Mat}_e(u)$ forment une BON de $\mathbb{R}^n$, ce qui équivaut à ce que $\operatorname{Mat}_e(u)$ soit orthogonale. □

De plus, en BON, les symétries orthogonales se reconnaissent par la symétrie de leur matrice, ce qui est très pratique :

Proposition 109 ***(Caractérisation matricielle des symétries orthogonales en BON)***
*Pour une **BON** e de E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$,*

$$\boxed{\textit{u est une symétrie orthogonale si et seulement si } \operatorname{Mat}_e(u) \textit{ est symétrique et orthogonale.}}$$

Démonstration: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Par la proposition 92, u est une symétrie orthogonale si et seulement s'il est involutif et orthogonal, ce qui se traduit matriciellement, puisque la base e est orthonormale, par

$$A^{-1} = A \quad \text{et} \quad A^{-1} = A^{\mathrm{T}},$$

ce qui équivaut à

$$A^{\mathrm{T}} = A \quad \text{et} \quad A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.$$

□

Remarque 110 **Attention,** en général la matrice d'une symétrie, même orthogonale, dans une base quelconque, n'est pas symétrique : par exemple, dans une espace euclidien de dimension 2, muni d'une BON $e = (e_1, e_2)$, on prend pour u la symétrie orthogonale définie par $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = e_1$. Alors, vous pouvez vérifier que

$$\mathrm{Mat}_{(e_1, e_2 - e_1)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique (ni orthogonale, d'ailleurs).
Aussi, la matrice d'une symétrie quelconque en base orthogonale n'est en général pas symétrique non plus. Montrez-le.

Exercice 111 En revanche, si l'endomorphisme u admet, dans une base quelconque, une matrice à la fois orthogonale et symétrique, alors c'est une symétrie, non orthogonale en général. Démontrez-le.
Remarquez aussi que, pour toute symétrie, il existe une base dans laquelle sa matrice soit orthogonale et symétrique : prendre un base adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$, où F est l'espace par rapport auquel elle agit et G celui parallèlement auquel elle agit.

On voit que la structure et les résultats de cette section sont analogues à ceux de la section précédente. Ce n'est pas un hasard, car on a un isomorphisme entre les deux "groupes orthogonaux", fourni par la proposition ci-dessus. Il est important de noter que cet isomorphisme n'est pas "canonique", car il dépend du choix d'une BON de E.
En termes précis, on a la proposition suivante, qui relève du programme de seconde année :

Proposition 112 ***(Isomorphismes entre les groupes orthogonaux)***
*Soit e une **BON** de E.*
L'isomorphisme d'algèbres $\mathrm{Mat}_e : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui envoie $O(E)$ (resp. $SO(E)$) sur $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$).

Remarque 113 Cela permettrait de transférer directement les propriétés des isométries aux matrices orthogonales, ou inversement.

IX Isométries vectorielles en dimension 2

1 Matrices orthogonales d'ordre 2

On détermine les matrices orthogonales d'ordre 2 par analyse-synthèse.

Analyse :
Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, qu'on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Alors, ses vecteurs colonnes forment un BON de $\mathbb{R}^2$ usuel.
On en déduit d'abord que $\boxed{a^2 + b^2 = 1.}$
Puis le vecteur (c, d) étant orthogonal à (a, b), il est proportionnel à $(-b, a)$. Mais comme (c, d) et $(-b, a)$ sont unitaires, il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $(c, d) = \varepsilon(-b, a)$.
Ainsi, il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$\boxed{(\star): \quad A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}.}$$

Synthèse :
Une matrice type $(\star)$ avec $a^2+b^2=1$ et $\varepsilon=\pm 1$ est orthogonale, puisque ses vecteurs colonnes forment clairement une BON de $\mathbb{R}^2$. De plus, son déterminant vaut ε, ce qui permet de classer ces matrices dans $SO_2(\mathbb{R})$ et $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$. On a donc montré la

Proposition 114 *(Description de $O_2(\mathbb{R})$)*

$$\boxed{SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R}, \; a^2+b^2=1 \right\};}$$

$$\boxed{O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R}, \; a^2+b^2=1 \right\}.}$$

2 Isométries positives en dimension 2

Cas de $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel

Grâce aux similitudes directes, on connaît des transformations de $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté qui préservent les distances et l'orientation : les translations et les rotations. Les translations d'une part et les rotations de centre différent de l'origine d'autre part n'ont aucune chance d'être des endomorphismes orthogonaux, car elles ne sont pas linéaires, puisqu'elles ne préservent pas $(0,0)$. Qu'en est-il des rotations de centre l'origine ?
Pour répondre à cette question, il est plus pratique de travailler d'abord dans $\mathbb{C}$: on regarde $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. dont une base est $c=(1,\mathrm{i})$.
Soit $\theta \in]0,2\pi[$. La rotation du plan $R_{O,\theta}$ admet comme "traduction complexe" l'application $r_{0,\theta} : z \longmapsto e^{\mathrm{i}\theta} z$, qui est clairement $\mathbb{C}$-linéaire, donc *a fortiori* $\mathbb{R}$-linéaire, et un calcul facile montre que

$$\mathrm{Mat}_c(r_{0,\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $R_{O,\theta}$ est elle-même linéaire : pour $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en notant $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$, on a

$$\mathrm{Aff}\left(R_{O,\theta}(\lambda(x,y)+(x',y'))\right) = r_{0,\theta}(\lambda z+z') = \lambda r_{0,\theta}(z)+r_{0,\theta}(z') = \mathrm{Aff}\left(\lambda R_{O,\theta}((x,y))+R_{O,\theta}((x',y'))\right),$$

donc

$$R_{O,\theta}(\lambda(x,y)+(x',y')) = \lambda R_{O,\theta}((x,y))+R_{O,\theta}((x',y')).$$

Étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et préservant les distances, $R_{O,\theta} \in O(\mathbb{R}^2)$.
De plus, comme $\mathrm{Aff}((1,0))=1$ et $\mathrm{Aff}((1,0))=\mathrm{i}$, on obtient immédiatement

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(R_{O,\theta}) = \mathrm{Mat}_c(r_{0,\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Comme $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on voit que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(R_{O,\theta})$ est orthogonale et comme can est une BON, on retrouve le fait que $R_{O,\theta}$ est une isométrie vectorielle. Mais on voit de plus que $\det R_{O,\theta}=1$, *i.e.*

$$\boxed{R_{O,\theta} \in SO(\mathbb{R}^2).}$$

Cependant, tout élément u de $SO(\mathbb{R}^2)$ admet dans can une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 = 1$$

et, comme $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. On a alors deux cas :

— soit $\theta = 0$ et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u) = \mathrm{I}_2$, donc $\boxed{u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2};}$

— soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(R_{O,\theta})$, donc $\boxed{u = R_{O,\theta}.}$

On en déduit la

Proposition 115 *Les isométries vectorielles positives de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique sont l'identité et les rotations de centre l'origine.*
Leurs matrices dans la base canonique sont les

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

où θ est une mesure réelle de l'angle de la rotation lorsque $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, en prenant sur $\mathbb{R}^2$ l'orientation canonique.

On démontre alors par de la trigonométrie facile ou en passant par les complexes le

Lemme 116 ***(Produit des matrices de rotation)***

$$\boxed{\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}.}$$

Démonstration: En exercice. □

qui donne trivialement le

Théorème 117

$$\boxed{SO(\mathbb{R}^2) \text{ et } SO_2(\mathbb{R}) \text{ sont commutatifs.}}$$

Remarque 118 On pourrait mettre sur $\mathbb{C}$ le produit scalaire $(z, z') \longmapsto \mathrm{Re}\,(z\overline{z'})$ qui rend la base c orthonormale. Dans ce cas, les traductions complexes $r_{0,\theta}$ des rotations seraient elles-mêmes des isométries positives.

Exercice 119 Construire à l'aide de ce qui précède un isomorphisme de groupes de $\mathbb{U}$ vers $SO_2(\mathbb{R})$.

Cas général

Dans le cas d'un espace euclidien de dimension 2 abstrait, la notion de rotation ne préexiste pas, mais ce qu'on a fait ci-dessus permet d'en donner une définition :

Proposition 120 ***(Isométries positives en dimension*** *2)*
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2, muni d'une BOND e.
Un endomorphisme de E est une isométrie positive si et seulement s'il admet dans la base e une matrice de la forme

$$\boxed{R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.}$$

Dans ce cas, sa matrice ***ne dépend pas de la BOND*** *e choisie.*
Cela définit donc un réel θ ***unique modulo*** *2π et on note l'isométrie r_θ.*
On a alors deux cas :

- *si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, r_θ est l'identité ;*
- *si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, r_θ est appelée la* ***rotation vectorielle de mesure d'angle*** *θ.*

Démonstration: La seule chose restant à montrer est que la matrice ne dépend pas de la BOND choisie. Cependant une matrice de changement de BOND est elle-même une matrice du type ci-dessus (c'est une matrice orthogonale positive car c'est la matrice d'une BOND dans une BOND). Le calcul est alors trivial par le lemme 116. □

Par isomorphisme de $SO(E)$ avec $SO_2(\mathbb{R})$, on a encore

Théorème 121

$$\boxed{\text{Pour } E \text{ euclidien de dimension } 2,\ SO(E) \text{ est commutatif.}}$$

La notion de rotation permet de définir une notion d'angle entre vecteurs dans ce cadre euclidien abstrait :

Définition 122 (Angles orientés de couples de vecteurs)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2..
Pour un couple (x,y) de vecteurs de E non nuls, il existe une unique rotation vectorielle r_θ qui envoie $\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$ sur $\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|} \cdot y$. On définit la mesure de l'angle entre x et y comme étant θ, *i.e.*

$$\boxed{\widehat{(x,y)} \equiv \theta\ [2\pi].}$$

Démonstration: La seule chose à montrer est l'existence et l'unicité de la rotation r_θ qui envoie $\tilde{x}$ sur $\tilde{y}$. Pour cela, on complète la famille ON $(\tilde{x})$ en une BOND $(\tilde{x},z)$ et la famille ON $(\tilde{y})$ en une BOND $(\tilde{y},t)$. Une isométrie positive u telle que $u(\tilde{x}) = \tilde{y}$ envoie la BOND $(\tilde{x},z)$ sur une BOND de premier vecteur $\tilde{y}$. Or il y a une seule telle BOND, c'est $(\tilde{y},t)$, ce qui prouve l'unicité de u. De plus, il existe une application linéaire envoyant la base $(\tilde{x},z)$ sur la famille $(\tilde{y},t)$ et cette application est une isométrie positive, puisqu'elle envoie une BOND sur une BOND. Cela prouve l'existence. □

Remarque 123 Une fois définis les angles orientés de couples de vecteurs, la terminologie de "rotation" prend tout son sens.

3 Isométries négatives en dimension 2

On a le résultat :

***Proposition 124** (**Isométries négatives en dimension** 2)*
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et e une BOND.
Les isométries négatives sont les symétries orthogonales par rapport à des droites.
Leurs matrices dans la base e sont de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.}$$

*La classe de θ modulo 2π **dépend de la BON** e **choisie**.*
L'axe de la symétrie est engendré par le vecteur dont la famille de coordonnés dans la base e est $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$, qui fait un angle de $+\frac{\theta}{2}$ avec le premier vecteur de la base e.

Démonstration: En exercice. □

4 Exercices

Exercice 125 Est-ce que le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est commutatif ?

Exercice 126 Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormée directe e, que dire des endomorphismes dont les matrices dans e sont :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 127 Montrer que la composée de deux réflexions d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est l'identité ou une rotation dont on précisera l'angle.

Exercice 128 Comment pourriez-vous décrire l'endomorphisme d'un espace euclidien orienté dont la matrice dans une BOND est la suivante

$$\begin{pmatrix} \sin(1) & 0 & \cos(1) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(1) & 0 & -\sin(1) \end{pmatrix}?$$

Exercice 129 Est-ce que le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est commutatif ?