**DS1 de mathématiques, partie raisonnement, vendredi 15 septembre 2023 (1h45)**

*Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.*
*Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être* ***argumentée****.*

---

**Barème sur 75 points :**

— Exercice 1 : 5 pts + 1 = [2] ($B$ pire par l'absurde) + [2] ($A$ pire par l'absurde) + 1 ($C$ pur) + 1 (bonus synthèse)

— Exercice 2 : 5 pts = 1 (Supposer $A \Longrightarrow B$) + 1 (Supposer $A$ ou $C$) + [2] (Disjonction des cas) + 1 (Conclusion)

— Exercice 3 : 10 pts = 1 (conj) + 1 (mot réc.) + 1 ($\mathcal{A}_n$) + 1 (mot init.) + 1 ($\mathcal{A}_1$) + 1 (mot héréd.) + 1 (HR propre) + 1 (calcul) + 1 (dire $\mathcal{A}_{n+1}$) + 1 (appliquer le principe de réc)

— Exercice 4 (25 pts) :

1. 7 = 1 (fonc. rat. dériv. sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$) + 1 ( $\sqrt{\cdot}$ déf et cont sur $\mathbb{R}_+$) + 1 ($\sqrt{\cdot}$ dériv. sur $\mathbb{R}_+^\star$) + 1 (mot "composition") + 1 (tableau de signe) + 1 (cont sur $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$) + 1 (dériv. au moins sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$)
2. 4 = [3] ($g'(x) = 3\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^5}}$) + 1 ($\uparrow$ strict sur $]-\infty,-1[$ **et sur** $[1,+\infty[$)
3. 7 = [2] (dém $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = 1$) + 1 ($\sqrt{\cdot}$ continue en 1) + 1 (asymptote**s** "$y=1$") + 1 (dém $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x+1} = +\infty$) + 1 (composition de limite) + 1 (asymptote "$x=-1$")
4. 2 + 1 (bonus) = 1 ($TA = \sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^3}}$) + 1 ($\lim = 0$) + BONUS 1 ($g'_d(1) = 0$)
5. 5 + 1 (bonus) = 1 (asymp horiz) + 1 (asymp vert) + BONUS 1 (tangente horiz en 1) + [3] (soin)

— Exercice 5 (15 pts) :

1. 5
2. 5
3. 5

— Exercice 6 (15 pts)

1. 5
2. 8
3. 2

---

**Exercice 1** *Chez Raymond*

Dans ce bistrot, il n'y a que des Purs et des Pires (à part vous). Les Purs disent toujours la vérité et les Pires mentent constamment. Vous rencontrez trois des habitués, $A$, $B$ et $C$, qui vous disent :

— $A$ : "Il y a au moins deux Purs parmi nous trois"
— $B$ : "Nous sommes tous trois des Pires."
— $C$ : "Il y a au moins deux Pires parmi nous trois"

Que pouvez-vous en conclure ?

---

**Analyse :** Supposons qu'une telle situation soit possible.
Alors on voit que $B$ est un Pire en raisonnant par l'absurde : si c'était un Pur, il dirait la vérité, donc tous trois seraient des Pires, dont lui, ce qui est une contradiction. Ainsi $\boxed{B \text{ est un Pire.}}$

Montrons encore par l'absurde que $A$ est un Pire : si c'était un Pur, il dirait la vérité, ce qui entraînerait que $C$ soit un Pur (car $B$ est un Pire). Cependant la phrase de $C$ serait alors fausse, ce qui contredirait le fait qu'il soit Pur. Ainsi $\boxed{A \text{ est un Pire.}}$

Comme $A$ et $B$ sont Pires, la phrase de $C$ est alors vraie, donc $\boxed{C \text{ est un Pur.}}$

**Synthèse :** La situation précédente est cohérente car si $A$ et $B$ sont des Pires et $C$ est un Pur, alors les phrases prononcées par $A$ et $B$ sont bien fausses et celle prononcée par $C$ est vraie.

---

**Exercice 2** *Human*

Soient $A$, $B$ et $C$ trois énoncés mathématiques quelconques.

Montrer que $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C))$ par le raisonnement (*i.e.* sans table de vérité).

---

Supposons que $A \Longrightarrow B$ et montrons alors que $(A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C)$.

Pour cela, on suppose que $(A \text{ ou } C)$ et on raisonne par disjonction de cas :

— si $A$, comme $A \Longrightarrow B$, alors $B$, ce qui entraîne $B$ ou $C$.

— si $C$, alors *a fortiori* $B$ ou $C$.

Dans les deux cas, on a montré $(B \text{ ou } C)$, donc finalement, $(A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C)$.

Ainsi $\boxed{(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C)).}$

---

**Exercice 3** *Avoir des idées dans la suite*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

Conjecturer une formule pour son terme général et la prouver.

---

On remarque que $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, *etc.* On conjecture ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On prouve cette conjecture par récurrence sur $n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathcal{A}_n : \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Initialisation. On a $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$, donc $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est vérifiée.}}$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{A}_n$.

On a alors, en utilisant la relation de rcurrence sur la suite et l'assertion de récurrence $\mathcal{A}_n$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_{n+1} \text{ est vérifiée.}}$

Par le principe de récurrence, on a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

---

**Exercice 4** *Étude complète*

On considère la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}$.

1. Étudier la définition et la dérivabilité de $g$.

---

**Remarque :** les fonctions puissances n'ayant pas encore été étudiées en cours, ce corrigé ne les utilise pas. Cependant il serait plus rapide d'exprimer $g(x)$ sous la forme $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

La fonction $x \longmapsto \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$ étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition. Son dénominateur ne s'annulant qu'en $-1$, elle est définie et dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$.
En composant avec la fonction $\sqrt{\cdot}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que la fonction $g$ est définie et continue sur $\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \mid \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \geq 0\right\}$ et dérivable au moins sur tout intervalle inclus dans $\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \mid \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 > 0\right\}$.
Un tableau de signe donne immédiatement que $g$ est définie et continue sur $\boxed{D_g = ]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[}$ et dérivable au moins sur les intervalles $\boxed{]-\infty,-1[ \text{ et } ]1,+\infty[}$.

---

2. Calculer la dérivée de $g$ et déterminer ses variations.

---

En appliquant deux fois la règle de dérivation d'une fonction composée, on obtient pour $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}} \cdot 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = 3\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \boxed{= 3\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^5}}}.$$

Cette dérivée étant toujours strictement positive et la fonction $g$ étant continue à droite en 1, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur chacun des intervalles } ]-\infty,-1[ \text{ et sur } [1,+\infty[.}$$

Remarquons que $g$ **n'est pas croissante** sur $D_g$.

---

3. Le graphe de $g$ admet-il des asymptotes verticales ou horizontales ?

---

Pour $x \in D_g$, on a $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 = \left(\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^3$, et par les opérations usuelles sur les limites (somme, quotient puis produit), $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 = 1$. Par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ en 1, $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \sqrt{1} = 1.}$
Le graphe de $g$ admet $\boxed{\text{une asymptote en } -\infty \text{ d'équation } y=1}$ et $\boxed{\text{une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y=1.}$
Par ailleurs, losque $x$ tend vers $-1$ par valeurs strictement inférieures, $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x-1) = -2$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{y\to+\infty} y^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} \sqrt{z} = +\infty$, en appliquant deux fois le résultat sur les limites de composées, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty.}$$

Le graphe de $g$ admet $\boxed{\text{une asymptote en } -1^- \text{ d'équation } x=-1}$.

---

4. Quelle est la limite de $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs strictement supérieures ?

---

Pour $h>0$, $h=\sqrt{h^2}$, donc
$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{g(1+h)}{h}=\sqrt{\frac{h}{(2+h)^3}}.$$

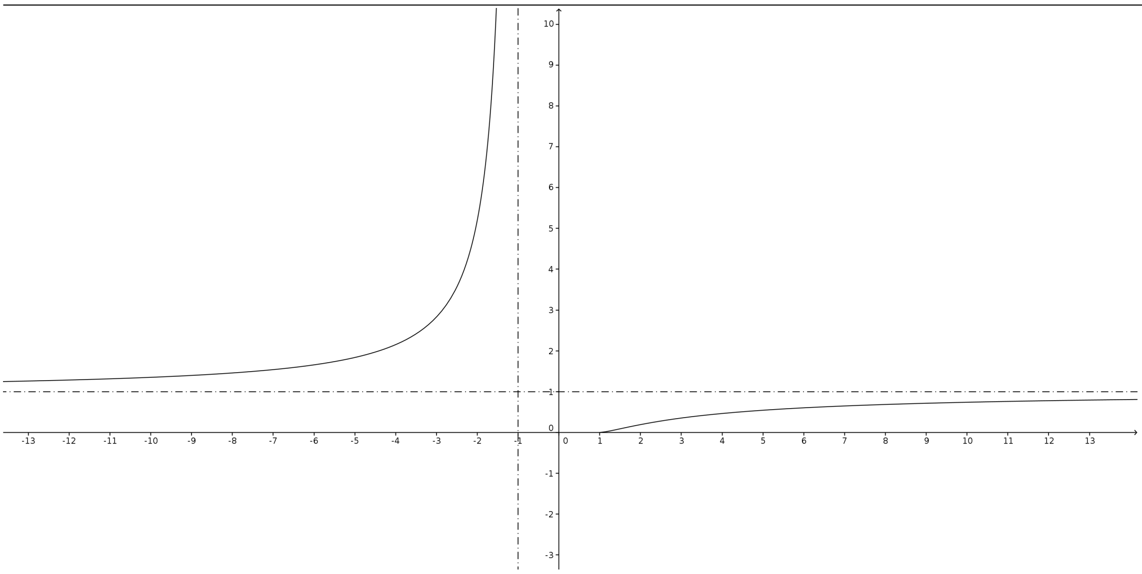
Comme $\lim\limits_{h\to 0^+}(2+h)^3=8$, alors par quotient $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{(2+h)^3}=0^+$. Par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ en 0,
$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\sqrt{0}=0.}$$

**Remarque :** La fonction $g$ est donc dérivable à droite en 1 et $g'_d(1)=0$. Le graphe de $g$ admet alors une demi-tangente horizontale à droite au point $(1,0)$.

---

5. Donner l'allure du graphe de $g$.

---



---

**Exercice 5** *Ensemble de raisonnements*

Soient $A,B,C$ trois ensembles.

1. Montrer que $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

---

On raisonne par double inclusion.

Soit $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. On a donc $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$. On raisonne par disjonction de cas :

— si $x\in A$, comme $x\notin A\cap B$, alors $x\notin B$.
Comme $x\in A$ et $x\notin B$, alors $x\in A\setminus B$. *A fortiori*, $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ ;

— si $x\in B$, on montre de manière analogue que $x\in B\setminus A$, donc $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Dans les deux cas, $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Ainsi,
$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Soit $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

On raisonne par disjonction de cas :

— si $x\in A\setminus B$, alors $x\in A$, donc *a fortiori* $x\in A\cup B$. Par ailleurs, comme $x\notin B$, *a fortiori* $x\notin A\cap B$. Ainsi, $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ ;

— si $x \in B \setminus A$, de la même manière, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Ainsi,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Par double inclusion,

$$\boxed{(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).}$$

---

2. Montrer que $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

---

On raisonne par double implication.
Supposons que $A \cup B = A \cap C$.
Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cap C$, donc $x \in A \cap C$, donc $x \in A$. On a montré que $B \subset A$.
Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cap C$, donc $x \in A \cap C$, donc $x \in C$. On a montré que $A \subset C$.
On a donc prouvé que

$$A \cup B = A \cap C \Longrightarrow B \subset A \subset C.$$

Réciproquement, supposons que $B \subset A \subset C$.
Puisque $B \subset A$, $A \cup B = A$. Puisque $A \subset C$, $A \cap C = A$. Finalement, $A \cup B = A = A \cap C$.
On a donc prouvé que

$$B \subset A \subset C \Longrightarrow A \cup B = A \cap C.$$

Par double implication,

$$\boxed{A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C.}$$

---

3. $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \iff B = C$.

---

On raisonne par double implication.
Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. On montre que $B = C$ par double inclusion.
Soit $x \in B$. On a deux cas :
— si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$ ;
— si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B = A \cup C$ et, comme $x \notin A$, alors $x \in C$.
Dans les deux cas, $x \in C$.
On a ainsi montré que $B \subset C$.
Comme $B$ et $C$ jouent des rôles symétriques, on a aussi $C \subset B$, donc $B = C$.
On a ainsi montré que

$$(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Longrightarrow B = C.$$

Réciproquement, si $B = C$, il est évident que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Ainsi,

$$B = C \Longrightarrow (A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C).$$

On a ainsi montré l'équivalence

$$\boxed{(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \iff B = C.}$$

---

**Exercice 6** *Foisonnement d'intervalles*

1. Montrer que la réunion de deux segments d'intersection non vide est un segment, éventuellement réduit à un point.

---

On note $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments ayant un point commun $y$. Remarquons tout de suite que $a \leq y$, $c \leq y$, $y \leq b$ et $y \leq d$. On pose maintenant $e = \min(a,c)$ et $f = \max(b,d)$. Comme $a \leq y$ et $c \leq y$, alors $e \leq y$ et de manière analogue $y \leq f$, donc en particulier $e \leq f$. Montrons par double inclusion que $[a,b] \cup [c,d] = [e,f]$.

$\underline{\text{Soit } x \in [a,b] \cup [c,d]}$. Comme $a \leq x$ et $c \leq x$, alors $e = \min(a,c) \leq x$. De manière analogue, $x \leq \max(b,d) = f$. Donc $\underline{x \in [e,f]}$.

$\underline{\text{Soit } x \in [e,f]}$. Raisonnons par disjonction des cas :
— Si $x \leq y$, comme $\min(a,c) = e \leq x$ alors $a \leq x$ ou $c \leq x$. Dans le premier cas $a \leq x \leq y \leq b$ donc $x \in [a,b]$. Dans le deuxième cas $c \leq x \leq y \leq d$ donc $x \in [c,d]$. Dans les deux cas $\underline{x \in [a,b] \cup [c,d]}$.
— Si $x \geq y$, un raisonnement analogue prouve que $\underline{x \in [a,b] \cup [c,d]}$.
Ainsi, dans tous les cas $\underline{x \in [a,b] \cup [c,d]}$.

On a donc montré par double inclusion que $\underline{[a,b] \cup [c,d] = [e,f]}$, donc $\underline{[a,b] \cup [c,d] \text{ est un segment.}}$

---

2. Montrer qu'une intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert, éventuellement vide.

---

On peut raisonner par récurrence ou alors utiliser les fonction min et max pour un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ : On note $I_k = ]a_k, b_k[$, $k \in [\![1,n]\!]$, les intervalles en question. On pose alors $a = \max(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ et $b = \min(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$. Comme on n'a pas forcément $a < b$, on étend naturellement la notion d'intervalle ouvert $]a,b[$ au cas où $a \geq b$ : dans ce cas $]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = \emptyset$. Montrons alors que $\bigcap_{k=1}^{n} I_k = ]a,b[$ par double inclusion :

$\underline{\text{Soit } x \in \bigcap_{k=1}^{n} I_k}$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k < x$, donc $a = \max(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]} < x$ car ce maximum est l'un des $a_k$ précédents. De manière analogue, $x < \min(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]} = b$. Ainsi, $\underline{x \in ]a,b[}$.
$\underline{\text{Soit } x \in ]a,b[}$. Soit alors $j \in [\![1,n]\!]$. On a $a_j \leq \max(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]} = a < x$, donc $a_j < x$. Et de même $x < b = \min(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \leq b_j$ donc $x < b_j$. Donc $x \in I_j$ et comme cela est valable pour tout $j$, $\underline{x \in \bigcap_{k=1}^{n} I_k}$.

Donc $\boxed{\bigcap_{k=1}^{n} I_k = ]a,b[ \text{ est bien un intervalle ouvert}}$, éventuellement vide.

---

3. Que dire dans le cas d'une intersection infinie d'intervalles ouverts ?

---

Le résultat précédent ne s'étend pas aux réunions infinies d'intervalles ouverts. En effet

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = \{0\}$$

$\boxed{\text{n'est pas un intervalle ouvert.}}$

---