Chapitre 7 : Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Résumé

I Régime sinusoïdal forcé

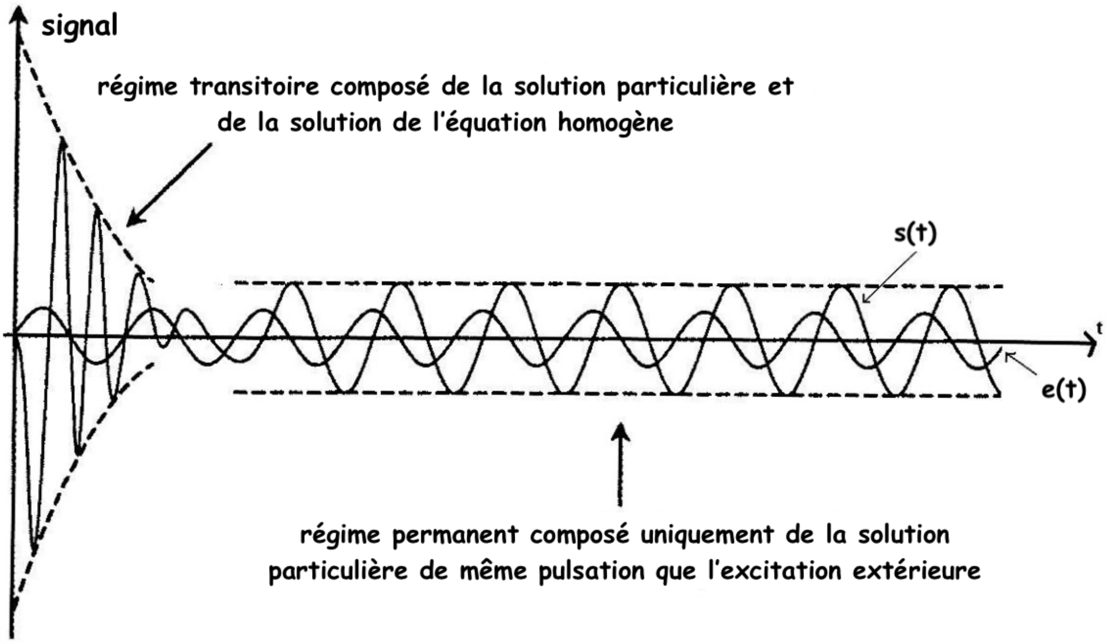
1 Signaux étudiés

On va étudié des signaux $s(t)$ correspondant à des oscillateurs mécaniques ou électriques répondant à l'équation différentielle

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 e(t)$$

avec $e(t)$ une excitation extérieure sinusoïdale, par exemple $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

La solution complète se met donc sous la forme : $s(t) = s_{SSM}(t) + S_m \cos(\omega t + \varphi)$ et présente l'aspect suivant pour une régime transitoire pseudo-périodique.



Définition

Le RSF correspond au RP d'un système physique lorsque l'excitation est de forme sinusoïdale

Propriété

Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, le signal oscille de façon sinusoïdale à la même fréquence que l'excitation.

II Représentation complexe des signaux sinusoïdaux

Définition

Soit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ un signal sinusoïdal. On peut associer à $s(t)$ le nombre complexe $\underline{S}$ tel que

$$s(t) = \Re(\underline{S}(t)) \qquad \text{et} \qquad \underline{S}(t) = S_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

On définit **l'amplitude complexe** $\boxed{\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}}$ avec S_m **l'amplitude réelle**.

⚠ seule la partie réelle de $\underline{S}(t)$ a une signification physique :

$$\underline{S}(t) = \underbrace{S_m \cos(\omega t + \varphi)}_{=s(t)} + \underbrace{jS_m \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{aucun sens physique}}$$

Propriété

Dériver un signal complexe de pulsation ω revient à multiplier ce signal par $j\omega$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{S}}(t) &= j\omega \underline{S}(t)\\ \ddot{\underline{S}}(t) &= -\omega^2 \underline{S}(t)\end{aligned}}$$

Intégrer un signal complexe de pulsation ω revient à diviser ce signal par $j\omega$

$$\boxed{\int \underline{S}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\underline{S}(t)}$$

III Circuits électriques en RSF

1 Impédances et admittances complexes

Définition

L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle est définie comme le rapport entre la tension $\underline{U}$ aux bornes de ce dipôle et l'intensité $\underline{I}$ du courant qui le traverse : $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$

L'impédance complexe $\underline{Z}$ a la dimension d'une résistance : son module s'exprime en ohm.

On définit l'admittance complexe $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance complexe : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}}$

Propriété

- Le module de $\underline{Z}$ est **l'impédance réelle** Z : $|\underline{Z}|$ =Z= $\frac{U_m}{I_m}$ avec U_m et I_m les amplitudes réelles de la tension et de l'intensité, respectivement.
- L'argument φ_Z de $\underline{Z}$ correspond au **déphasage** entre la tension et l'intensité : $\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$.
- La partie réelle de $\underline{Z}$ est la **résistance** du dipôle $R = Z\cos\varphi_Z = \frac{U_m}{I_m}\cos(\varphi_u - \varphi_i)$
- La partie imaginaire de $\underline{Z}$ est la **réactance** du dipôle $X = Z\sin\varphi_Z = \frac{U_m}{I_m}\sin(\varphi_u - \varphi_i)$

2 Résistance, condensateur et bobine

Résistance	**Condensateur**	**Bobine**
$\underline{Z_R} = R$ Réel	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$ imaginaire pur	$\underline{Z_L} = jL\omega$ imaginaire pur
Courant et tension sont en phase	Le courant est en avance de phase de $\pi/2$ par rapport à la tension	Le courant est en retard de phase de $\pi/2$ par rapport à la tension
Aucun dépendance en fréquence	Dépendance en fréquence : $\omega = 0 \Rightarrow \underline{Z_C} \to +\infty$ Le condensateur se comporte comme un coupe-circuit $\omega \to +\infty \Rightarrow \underline{Z_C} \to 0$ Le condensateur se comporte comme un fil	Dépendance en fréquence : $\omega = 0 \Rightarrow \underline{Z_L} = 0$ La bobine se comporte comme un fil $\omega \to +\infty \Rightarrow \underline{Z_L} \to +\infty$ La bobine se comporte comme un coupe-circuit

⚠ il ne faut pas mélanger impédances complexes et dérivées ou intégrales dans la même équation !

3 Utilisation des impédances complexes

on se place toujours dans le cadre de l'ARQS. toutes les lois de l'électrocinétique vues en régime continu restent donc valables en RSF :

PROPRIÉTÉ

- **loi des nœuds**

$$\boxed{\sum \varepsilon_k \underline{I_k} = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si $\underline{I_k}$ $\varepsilon_k = -1$ si $\underline{I_k}$ repart du nœud

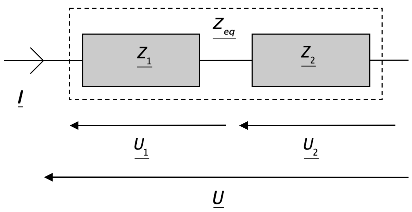
- **loi des mailles**

$$\boxed{\sum \varepsilon_k \underline{U_k} = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si $\underline{U_k}$ est orientée dans le sens de la maille et $\varepsilon_k = -1$ si $\underline{U_k}$ est orientée dans le sens contraire de la maille

- **Association de dipôles**
  - Pour des dipôle en série les impédances s'additionnent : $\boxed{\underline{Z_{eq}} = \sum \underline{Z_i}}$
  - Pour des dipôles en parallèle, les admittance s'additionnent : $\underline{Y_{eq}} = \sum \underline{Y_i} \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \sum \dfrac{1}{\underline{Z_i}}}$
- pont diviseur de tension

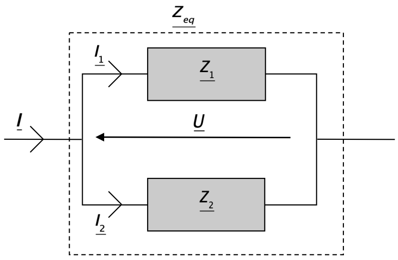
$\boxed{\underline{U_1} = \dfrac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{U}}$ et $\boxed{\underline{U_2} = \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{U}}$



PROPRIÉTÉ

- pont diviseur de courant

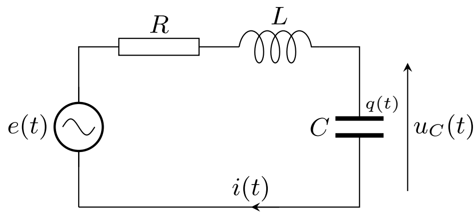
$$\boxed{\underline{I_1} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{I}} \text{ et } \boxed{\underline{I_2} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{I}}$$



IV Reponse d'un circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale. Phénomème de résonance

$$\ddot{u_C} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_C} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \omega_0^2\frac{de}{dt}$$



avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

En notation complexes :

- Tension excitatrice $\underline{E}(t) = E_m e^{j\omega t}$
  On cherche les solutions sous la même forme :
- Tension aux bornes du condensateur : $\underline{U}(t) = U_m e^{j\omega t+\varphi} = \underline{U_m}^{j\omega t}$ avec $\underline{U_m} = U_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe
- Intensité du courant dans le circuit : $\underline{I}(t) = I_m e^{j\omega t+\phi} = \underline{I_m}^{j\omega t}$ avec $\underline{I_m} = I_m e^{j\phi}$ l'amplitude complexe

1 Etude de la tension aux bornes de C

On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite

L'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur est

$$\boxed{\underline{U_m} = E_m\frac{1}{1-x^2+j\dfrac{x}{Q}}}$$

Le module de la tension complexe vaut

$$\boxed{|\underline{U_m}| = E_m\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}}$$

La phase de la tension complexe vaut :

$$\varphi = \arg(\underline{U_m}) = -\arg\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1-x^2}{x/Q}\right)}$$

2 Résonance en tension

DÉFINITION

Losrque un système physique est soumis à une excitation sinusoïdale, il peut exister des fréquences particulières, appelées **fréquences de résonance**, pour lesquelles l'amplitude de la réponse du système passe par un maximum. On dit qu'il y a **résonance**
À la résonance, même une très faible excitation peut suffire pour produire de très grandes oscillations du système.

Exemples:

- Instruments de musique : guitare, violon, flute...
- destruction du pont de Tacoma en 1940 https://youtu.be/Rmfl2kFeNPM
- Résonance mécanique https://youtu.be/YoMdGLqo-Jw

PROPRIÉTÉ

Si l'amortissement est assez faible $\boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$ alors le système présente une résonance en $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$

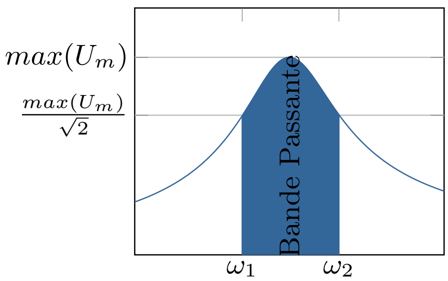
Le module de la tension à la résonance s'écrit $\boxed{|U_m| = E_m \dfrac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}}$

La pulsation de résonance s'écrit $\omega_r = \omega_0 x_r \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$

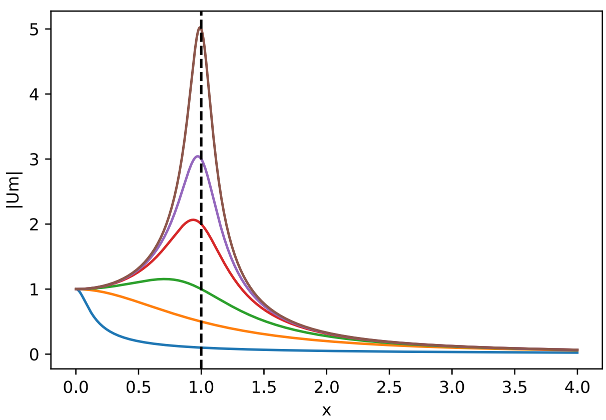
DÉFINITION

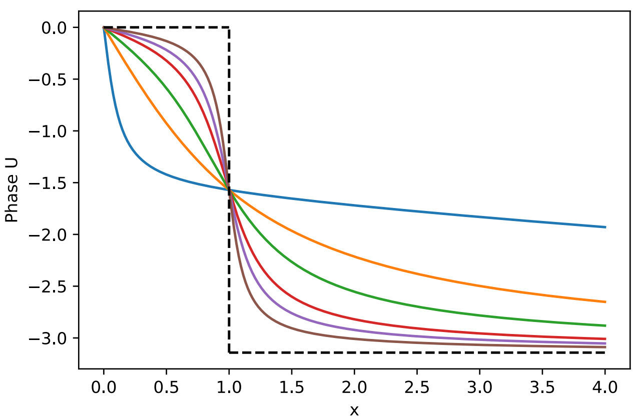
La **bande passante** $\Delta\omega$ est largeur du pic de de résonance.
Elle est définie comme le domaine de pulsation $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$
telle que $\dfrac{\max(U_m)}{\sqrt{2}} \leq U_m \leq \max(U_m)$
ω_1 et ω_2 sont les **pulsations de coupure** du système.
On appelle **acuité** de la résonance la grandeur adimensionnée :

$$\boxed{\text{acuité} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$



Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passant est petite. On parle de résonance **aiguë** : plus la résonance est aiguë, plus l'acuité de la résonance est grande.





3 Etude de l'intensité du courant en RSF

L'expression de l'amplitude complexe de l'intensité du courant est

$$\boxed{\underline{I_m} = \frac{E/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

Le module de l'intensité complexe vaut

$$\boxed{|\underline{I_m}| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

La phase de l'intensité complexe vaut :

$$\phi = \arg(\underline{I_m}) = -\arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

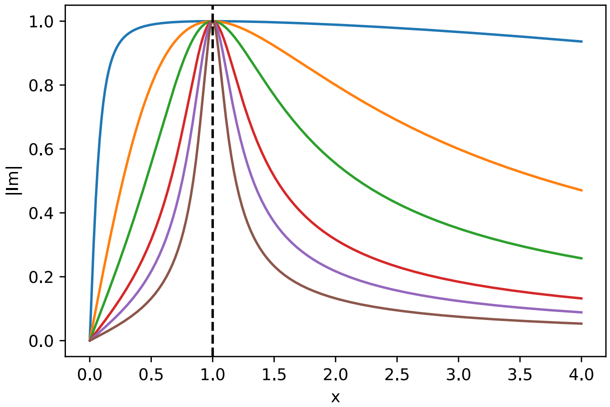
$$\boxed{\phi = \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \arg(\underline{U_m}) + \pi/2}$$

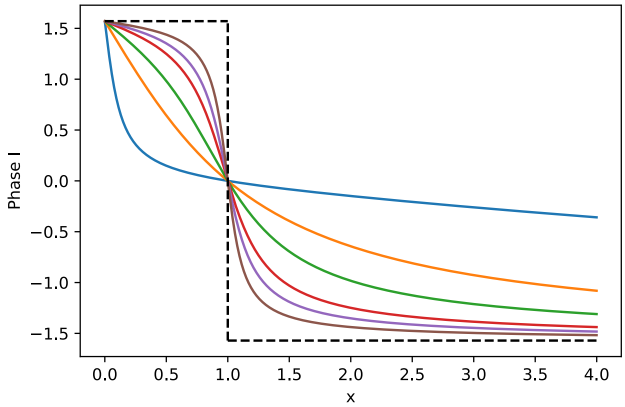
4 Résonance en intensité

Pour un circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale, il existe **toujours** une résonance en intensité en $\boxed{\omega_r = \omega_0}$

À la résonance, l'amplitude de l'intensité complexe est un nombre réel $\underline{I_m}(\omega_0) = \frac{E}{R}$, elle est inversement proportionnelle à R et donc proportionnelle à Q. L'amplitude de l'intensité à la résonance est d'autant plus grande que l'amortissement est faible.

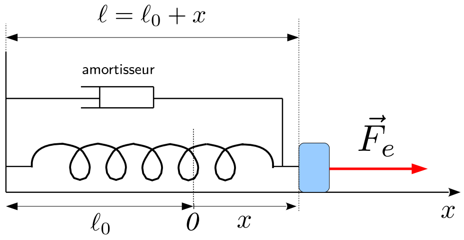
La bande passante de la résonance en intensité vaut $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}}$: Plus le facteur de qualité est grand, donc plus l'amortissement est faible, et plus la résonance est intensité est aiguë.





V Réponse d'un oscillatuer mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Phénomème de résonance

On considère une masse m accrochée à un ressort fixé en O, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On exercce une force $\vec{F_e} = F_m\cos(\omega t)\vec{e}_x$ sur la masse. On suppose que la masse se déplace sur l'axe horizontal Ox est est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$



1 Résonance de l'élongation du ressort

$\underline{X} = X_m e^{j\omega t+\varphi}$. On pose $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, alors :

$\underline{X} = \dfrac{F_m}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{1-u^2+j\dfrac{u}{Q}}$. L'étude de X_m est équivalent à celle de la tension aux bornes du condensateur :

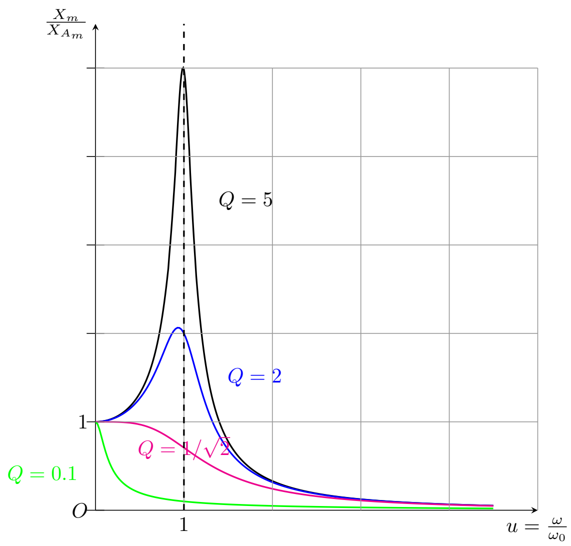
$$X_m = \frac{F_m}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)+\dfrac{u^2}{Q^2}}}$$

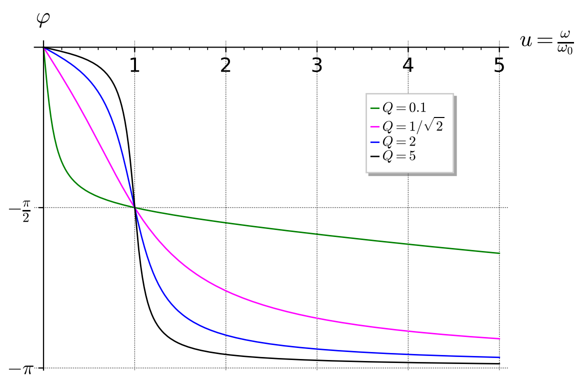
$$\varphi = -\arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right)$$

La résonance d'élongation n'existe que pour des facteur de qualité suffisament élevé $\underline{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ cad un amortissement assez faible.

La pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$ est différente et plus faible que la pulsation propre et dépend du facteur de qualité Q

Plus le facteur de qualité Q est grand, plus l'acuité de la résonance est aiguë.





- A basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ le mouvement du la masse suit le mouvement imposé par l'excitation : même amplitude, même phase.
- à haute fréquence $\omega \gg \omega_0$ la masse oscille en poosition de phase par rapport à la force excitatrice et avec une amplitude quasi null.
- pour $Q > 1/\sqrt{2}$ on obsere une résonance pour l'élongation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$
- Pour $Q > 5$ $\omega_r \approx \omega_0$ et $X_m \approx Q\dfrac{F_m}{m\omega_0^2}$

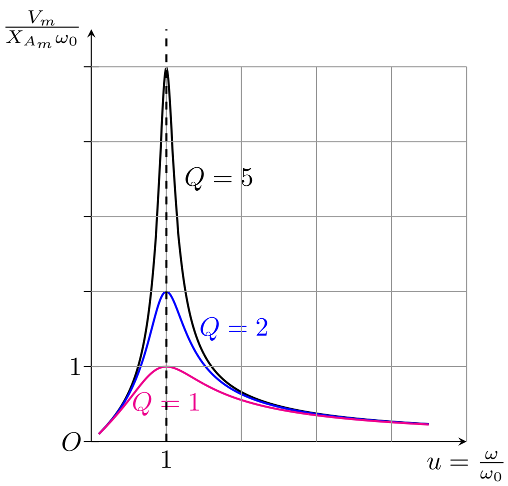
2 Résonance en vitesse

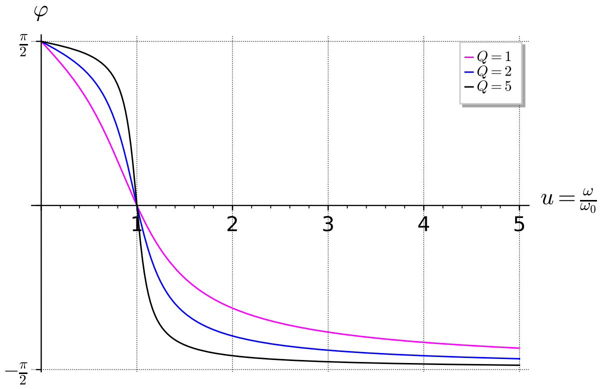
$\underline{V} = j\omega\underline{X} = V_m e^{j\omega t+\phi}$ avec $u = \omega/omega_0$: $\underline{V} = \dfrac{F_m}{m\omega_0}\dfrac{ju}{1-u^2+j\dfrac{u}{Q}}$

L'étude de la résonance en vitesse est équivalente à l'étude de celle en intensité du circuit RLC.

$$V_m = \frac{F_m}{m\omega_0}\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2+\dfrac{u^2}{Q^2}}}$$

$$\phi = -\arctan\left(Q\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)$$





Il y a toujours résonance en vitesse, quelque soit la valeur du facteur de qualité Q.
La **fréquence de résonance** est $\omega_r = \omega_0$
L'**acuité de la résonance** est $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$ avec $\Delta\omega$ la bande passante, donc la résonance est d'autre plus aiguë que le facteur de qualité est élevé.
A basse fréquence la vitesse est en retard de $\pi/2$ par rapport à l'élongation qui est faible.
À haute fréquence la vitesse est en avance de $\pi/2$ par rapport aux oscillations qui sont aussi très faibles.
À la résonance, les oscillations sont maximales et le déphasage entre vitesse et amplitude est nul.