**DS2 de mathématiques, partie calcul, vendredi 6 octobre 2023, (2h00)**

*Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.*

**Exercice 1** *Calculs sommatoires*

1. Donner sans justification la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Déterminer l'expression développée explicite de $(x+2y)^6$, pour $x, y \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5+32}{x+2}$ coïncide avec une fonction polynôme sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, qu'on explicitera.
4. Calculer **efficacement** un **seul** coefficient binomial pour trouver le coefficient de $x^5$ dans $\left(2^{1/5} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^9$.
5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{499} \left((2k+2)^3 - (2k)^3\right)$.
6. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k}$.
7. Est-ce que $2023^{2005} - 1966^{2005}$ est un multiple de 19 ?

**Exercice 2** *Calculs complexes*

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $z_0 = \pi \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^5}$, puis faire de même avec $\mathrm{e}^{z_0}$.
2. Linéariser l'expression $\sin^6(x)$ et en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^6(x)$.
3. Donner la forme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient $(\forall n \in \mathbb{N},\quad 2u_{n+2} - (1+4i)u_{n+1} + 2iu_n = 0)$.
   On calculera explicitement les constantes dans le cas où $u_0 = 3$ et $u_1 = 1 + 2\mathrm{i}$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1 + \mathrm{i}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = \sqrt{3}(1+i) + (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})v_n\right)$.
   Calculer le terme général de cette suite, puis la forme algébrique de $v_{10}$.

**Exercice 3** *Calculs avec les entiers de Gauss*

On note $G = \mathbb{Z} + \mathrm{i}\,\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entières.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $G$ est encore dans $G$.
2. Pour $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, exprimer $n^2 + m^2$ comme le produit de deux éléments de $G$.
3. En déduire que le produit de deux sommes de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers.

**Exercice 4** *Calculs géométriques*

On se place dans le plan affine euclidien orienté usuel, muni d'un ROND.
On dit qu'un triangle $PQR$ est *direct* si l'angle $\widehat{QPR}$ admet une mesure dans $]0, \pi[$.
On note $A_0, B_0, C_0, A, B, C$ les points d'affixes respectifs $1$, $\mathrm{j}$, $\mathrm{j}^2$, $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = -2$, $c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Montrer que le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral direct.
2. Déterminer **explicitement** l'unique similitude directe envoyant $A_0$ sur $A$ et $B_0$ sur $B$. sous la forme d'une composée d'une rotation et d'une homothétie qui commutent.
3. Calculer $F(C_0)$ et en déduire que le triangle $ABC$ est équilatéral direct.
4. Montrer que $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$ et $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.

**Exercice 5** *Calcul mixte*

Montrer, pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$.

**Exercice 6** *Une fonction*

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3x + \sqrt{2+x^2}}$.

1. Déterminer soigneusement son domaine de définition.
2. En prouvant sa dérivabilité, puis calculant sa dérivée, sur un intervalle ouvert convenable, déterminer les variations de $f$.
3. Montrer que $\dfrac{\sqrt{3x + \sqrt{2+x^2}}}{2x+1}$ a une limite quand $x$ tend vers $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^+$, qu'on déterminera.
4. La fonction $f$ est-elle dérivable en $-\dfrac{1}{2}$ ?