Exercices sur les fonctions de deux variables

Exercice 1 Est-il possible de trouver un ouvert non vide A de $\mathbb{R}^2$ et $X \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ tels que $A \sqcup \{X\}$ soit encore un ouvert ?

Exercice 2 L'ensemble $A = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \{(x,n);\ x \in \mathbb{R}\}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$?

Même question pour $B = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left\{\left(x, \frac{1}{n}\right);\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 3 La fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 4 Représenter graphiquement de plusieurs manières différentes la fonction $(x,y) \longmapsto (x+y)^2$ et donner l'équation de son plan tangent en chaque point de son graphe.

Exercice 5 Représenter graphiquement la fonction $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$.
Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 Soient $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ et $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^\star_+ \times \mathbb{R}$, exprimer les dérivées partielles de f en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.

1. Justifier que la fonction
$$(u,v) \longmapsto g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles à l'aide de celles de f.
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 8 Trouver les points critiques de la fonction $f : (x,y) \longmapsto (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ après voir montré soigneusement qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pouvez-vous déterminer les extrema de f ?

Exercice 9 Même exercice que le précédent avec la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$.

Exercice 10

1. Déterminer les extrema de la fonction $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2}$.
2. Soit $\lambda > 1$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \lambda\cos t$ et $y(t) = \sqrt{\lambda^2-1}\sin t$.
Montrer que $g_\lambda : t \longmapsto f(x(t),y(t))$ est dérivable, la dériver et en déduire l'allure des lignes de niveau de f, puis le résultat de la question précédente.