# Analyse asymptotique

Lycée Berthollet 2023-2024

On considère les suites et les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Pour les relations de comparaison, on suppose toujours que **la deuxième suite ne s'annule pas à partir d'un certain rang** (APDCR) et que **la deuxième fonction ne s'annule pas dans un voisinage suffisamment petit** du point considéré, **hormis au point considéré**. Les définitions des relations de comparaison s'expriment alors simplement en considérant le **quotient** des deux objets qu'on compare.
Remarquons que, lors du cours, les *DL* classiques sont introduits progressivement, parfois admis, pour pouvoir donner des exemples au fur et à mesure. Ils sont ici donnés tous ensemble à la fin de la section des *DL*.

# I Relations de comparaison pour les suites

## 1 Définitions

Pour $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, définition de

- la *domination de u par v* : $\frac{u}{v}$ bornée, notée $u = O(v)$ ;
- la *négligeabilité de u devant v* : $\frac{u}{v} \to 0$, notée $u = o(v)$ ;
- l'*équivalence de u à v* : $\frac{u}{v} \to 1$, notée $u \sim v$.

Préservation par équivalence de la limite et aussi de la non nullité et du signe APDCR.

## 2 Propriétés

Réflexivité de $O$ et $\sim$, symétrie de $\sim$, transitivité de $O$, $o$ et $\sim$, "transitivités mixtes".
Propriété : $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$,

## 3 Opérations sur la négligeabilité et la domination

Combinaisons linéaires et produits, éventuellement mixtes, de "petits o" et "grands o", passage à l'inverse d'un "petit o", d'un "grand o".

## 4 Opérations sur les équivalents

Produit, quotient et puissance d'équivalents.
**Pas de résultat pour la somme et la composition (au but) d'équivalents.**

Relations de comparaison entre les suites $(\ln^{\beta}(n))$, $(n^{\alpha})$ et $(e^{\gamma n})$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star)$, démonstration à venir dans la section des fonctions.

# II Relations de comparaison pour les fonctions

On suppose que $I$ est un intervalle, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de $I$ et que les fonctions sont définies soit sur $I$, soit sur $I \setminus \{a\}$.
Les élèves ont été chargés de vérifier que le paragraphe précédent se traduit directement pour les fonctions, en remplaçant "suite" par "fonction", "$+\infty$" par "a" et "à partir d'un certain rang " par "au voisinage de a".
"Croissances comparées" des fonctions logarithme, puissances et exponentielle en $+\infty$ et logarithme et puissances en $0^+$ : revoir l'intégralité des résultats dans le cours de début d'année. On démontre ici le lemme suivant : pour $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} e^{-\gamma x} = 0$ et on montre comment il permet d'en déduire que, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{\beta} x^{-\alpha} = 0$. Les démonstrations des autres résultats sont laissés en exercice.
Composition **à la source** d'un équivalent (*i.e. changement de variable dans un équivalent*) : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim_b \varphi = a$ (avec $f$ et $g$ définies sur l'image de $\varphi$), alors $f(\varphi(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(\varphi(t))$. Ce résultat est en fait une banale composition de limites en passant aux quotients.
**Attention**, ne pas confondre avec la composition **au but** qui est **prohibée** : $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais $\exp(x) \not\sim_{x\to+\infty} e \cdot \exp(x) = \exp(x+1)$.
Préparatifs des *DL* : application des résultats sur les relations de comparaison aux différentes fonctions polynomiales $x \longmapsto (x-a)^k$.

# III Développements limités

## 1 Définition et propriétés

On suppose ici que $a \in I$, donc **est réel**, et $f$ est définie sur $I$ ou $I \setminus \{a\}$.
Définition du fait que $f$ admette un *développement limité à l'ordre n en a* ($DL_n(a)$) :

$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}, \quad f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

L'existence d'un $DL_0(a)$ équivaut à ce que $f$ soit continue, ou prolongeable par continuité, en $a$. On supposera toujours, dans le cours, qu'on travaille alors sur le prolongement, *i.e.* que la fonction est continue en $a$.
L'existence d'un $DL_1(a)$ équivaut à ce que $f$ soit dérivable en $a$.
Unicité du $DL_n(a)$ de $f$.
Changement de variable "x=a+h" pour se ramener en 0.
*Troncature d'un DL* pour obtenir les *DL* à des ordres inférieurs.
Une fonction $f$ polynôme en $x-a$ admet des $DL_n(a)$ à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, dont la partie polynomiale est $f$ si $n \geq d^\circ f$ et est obtenue par troncature sinon.
Un $DL(0)$ d'une fonction paire (resp. impaire) n'a que des termes d'ordre pairs (resp. impairs).
Connaissant le $DL_n(0)$ d'une fonction, obtention de ceux de ses parties paire et impaire en prenant les parties paire et impaire de la partie polynomiale du $DL_n(0)$.

*Forme normalisée* (lorsqu'elle existe) d'un $DL_n(a)$ :

$$f(a+h) \underset{h \longrightarrow 0}{=} h^p(b_0 + b_1 h \cdots + b_{n-p} h^{n-p} + o(h^{n-p})), \quad \text{avec } b_0 \neq 0.$$

On remarque que $f(a+h) \sim b_0 h^p$.

## 2 Opérations sur les *DL*

Somme de deux $DL_n(a)$.
Produit de deux $DL_n(a)$, avec utilisation des formes normalisées pour déterminer les ordres de développement optimaux des facteurs : si $f(a+h) \underset{h \longrightarrow 0}{\sim} b_0 h^p$ ($b_0 \neq 0$), $g(a+h) \underset{h \longrightarrow 0}{\sim} c_0 h^q$ ($c_0 \neq 0$) et $n \geq p+q$, alors un $DL_{n-q}(a)$ de $f$ et un $DL_{n-p}(a)$ de $g$ suffisent pour obtenir un $DL_n(a)$ de $fg$.
Composition : savoir faire les calculs en pratique, en utilisant lorsque c'est utile les formes normalisées.
Quotient en exprimant $\frac{1}{f}$ sous la forme $Cte \times \frac{1}{1-g}$ et en appliquant la composition de *DL*.
Primitivation d'un *DL* (résultat admis pour l'instant) : si $f$ est continue sur un intervalle contenant $a$ et admet un $DL_n(a)$, alors toute primitive $F$ de $f$ admet un $DL_{n+1}(a)$, dont la partie polynomiale est obtenue en :

1. primitivant la partie polynomiale du $DL_n(a)$ de $f$ ;
2. fixant le terme constant à $F(a)$.

Conséquence : on peut “dériver” un $DL_n$ si la fonction est dérivable et si on sait que la dérivée admet un $DL_{n-1}$.

## 3 Formule de Taylor-Young

Démonstration reportée au calcul intégral.
Si on suppose que la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et $a \in I$, alors la fonction admet un $DL_n(a)$ donné par la formule suivante :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

## 4 DL classiques

On déduit de tout ce qui précède les *DL* des fonctions classiques (quand $x$ tend vers 0) qu'on récapitule et qui sont à savoir par cœur, avec signe $\sum$ **et aussi** avec des petits points.
Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
La formule de Taylor-Young ($\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) donne trivialement

$$\boxed{\exp(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$

En prenant les parties paires et impaires,

$$\boxed{\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

et

$$\boxed{\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}).}$$

De nouveau par la formule de Taylor-Young ($\cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(\cos^{(k)})_k$ est 4-périodique), puis par primitivation des $DL(0)$ de cos (avec $\sin(0) = 0$) :

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}).}$$

et

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}).}$$

Pour $x \in ]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-x} + o(x^n),$$

*i.e.*

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).}$$

En changeant $x$ en $-x$ (en fait une composition par $x \longmapsto -x$),

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).}$$

Puis par primitivation, comme $\ln(1) = 0$,

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).}$$

et, par changement de $x$ en $-x$ ou primitivation,

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).}$$

Plus généralement, si $m \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k,$$

ce qui donne les $DL_n(0)$ de la fonction polynomiale $x \longmapsto (1+x)^m$ (en "tronquant" lorsque $n < m$).
Cela se généralise à un exposant quelconque en utilisant la formule de Taylor-Young (un calcul rapide donne les dérivées à tout ordre). Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).\end{aligned}}$$

En remplaçant $x$ par $x^2$ dans les $DL(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ (en fait une composition), on obtient

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2p+1}) \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^p x^{2p}+o(x^{2p+1}),}$$

puis par primitivation ($\mathrm{Arctan}\,(0) = 0$),

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\,(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2p+2}) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+o(x^{2p+2}).}$$

On peut calculer les $DL(0)$ de tan de plusieurs manières, par exemple par produit de $DL$ de sin et $\frac{1}{\cos}$. On le fait à l'odre 6.
Par imparité de tan et le fait qu'on sait qu'elle admet un $DL_6(0)$ par la formule de Taylor-Young, il suffit de faire un $DL_5(0)$ de tan.
Par la règle sur les produits, comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, il suffit de faire un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos}$.
Comme

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right),$$

$$\frac{1}{1-h} \underset{h\to 0}{=} 1+h+h^2+o(h^2)$$

et $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 0$, alors, par composition de $DL$,

$$\frac{1}{1-(1-\cos(x))} \underset{x\to 0}{=} 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

*i.e.*

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4),$$

On a par ailleurs

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) = \underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right),$$

donc, par produit,

$$\begin{array}{rcl}
\tan(x) & \underset{x\to 0}{=} & x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} & x\big( \; 1 \; +\frac{x^2}{2} \; +\frac{5x^4}{24} \\
& & \qquad\quad -\frac{x^2}{6} \; -\frac{x^4}{12} \\
& & \qquad\qquad\quad +\frac{x^4}{120} \; +o(x^4)\big) \\
& \underset{x\to 0}{=} & x\big( \; 1 \; +\frac{x^2}{3} \; +\frac{2x^4}{15} \; +o(x^4)\big) \\
& \underset{x\to 0}{=} & \quad x \; +\frac{x^3}{3} \; +\frac{2x^5}{15} \; +o(x^5).
\end{array}$$

Par la remarque initiale,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6).}$$

### 5 Étude locale d'une fonction

Position du graphe d'une fonction $f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse $a$ à l'aide de la forme normale du DL de $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$, lorsqu'elle existe.
Conditions d'extrema locaux : on retrouve par le DL d'ordre 1 la CN (dérivée nulle pour un point intérieur à l'intervalle de définition) et à l'aide de ce qui précède, la CS d'extremum strict dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

## IV Exemples de développements asymptotiques

Cas, lorsque $x \longrightarrow +\infty$, d'une fonction $f : x \longmapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$, où $h\cdot g(h)$ admet un DL quand $h \underset{>}{\longrightarrow} 0$.
Exemple : $x \longmapsto x+\sqrt{x^2-1}$, interprétation géométrique : asymptote oblique et position du graphe par rapport à cette asymptote).
L'étude générale des branches infinies n'est pas au programme.
Formule de Stirling.