DM6, pour autoévaluation pendant la pause de Toussaint

Mode d'emploi : après avoir travaillé en profondeur cours et exercices sur les primitives, faire en condition de DS d'une heure le sujet suivant. Faire une pause. Revenir dessus sans limite de temps pour le compléter, en s'aidant du cours si besoin. Après cela, consulter le corrigé et le barème pour voir où vous auriez éventuellement perdu des points.

Barème sur 40 points, avec $\pm 15\%$ pour les "croix rédactionnelles", puis ± 1 pt de présentation sur la note sur 20

- Exercice 1 (4 pts) :
  1 $\left(\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\right)$ + 1 $\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(-1-2\mathrm{i})(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x))\right)$ + 1 $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(2\sin(2x)-\cos(2x))\right)$ + 1 $\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{5}\right)$
  Avec un $+$ pour la continuité, un $+$ pour "sur $\mathbb{R}$" et un $+$ pour le mot "intervallle"
- Exercice 2 (4 pts) :
  1 $\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\right)$ + [2] $(=\mathrm{Arcsin}\,(\tan(t)))$ + 1 (constante)
  Avec un $++$ pour les autres intervalles possibles
- Exercice 3 (11 pts) :
  1 (Disc $=-8<0$) + [2] $\left(=\frac{1}{6}\int\frac{6u+2}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1}.\right)$ + 1 $(3u^2+2u+1>0)$ + 1 $\left(\frac{1}{6}\ln\left(3u^2+2u+1\right)\right)$
  + [3] $\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}:\text{métho}+\text{coef}+\star^2\right)$ + 1 $\left(=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\int\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}u\right)$ + 1 $\left(=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)\right)$
  + 1 $\left(\text{rés correct}=\frac{1}{6}\ln\left(3u^2+2u+1\right)-\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)+C\right)$
  Avec un $+$ pour la constante et $-$ si elle manque.
- Exercice 4 (8 pts) :
  1 (IPP bien posée) + 1 $(u,v\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}))$ + [2] $\left(=\frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\,(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)$ + [2] $\left(=\frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\,(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)$
  + 1 $\left(=\frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\mathrm{Arctan}\,(x)-x\right)+\ldots\right)$ + 1 $(..+C)$
- Exercice 5 (13 pts) :
  1. 2 (formule trigo)
  2. 11 = 1 $(\varphi=2\mathrm{Arctan}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}))$ + 1 (continuité de $f=\frac{1}{2+\sin}$ sur $\varphi(\mathbb{R})=]-\pi,\pi[$) + 1 ($0=\varphi(0)$ et $\frac{\pi}{2}=\varphi(1)$)
     + 1 (changement bien posé) + 1 (changement correct) + 1 $\left(=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}\right)$ + 1 $\left(=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$
     + 1 $\left(=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)$ + 1 $\left(=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1\right)$ + [2] $\left(=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$

Exercice 1 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction continue $x\longmapsto\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}$ est la fonction qui à x associe

$$\frac{1}{-1+2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(-1-2\mathrm{i})(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x)),$$

ce qui donne, en en prenant la partie réelle, puisque $0,\pi\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(2\sin(2x)-\cos(2x))\right]_0^{\pi}=\boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{5}.}$$

Remarque. On peut aussi prendre la partie réelle après avoir calculé l'intégrale :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x}}{-1+2\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\pi}-1}{-1+2\mathrm{i}}\right) = \left(\mathrm{e}^{-\pi}-1\right)\mathrm{Re}\left(\frac{-1-2\mathrm{i}}{5}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{5}.$$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 t}{\sqrt{1-\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t$ sur un intervalle qu'on précisera.

Le domaine de l'intégrande est clairement $\{t \in D_{\tan} \mid \tan(t) \in]-1,1[\} = \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[+\pi\mathbb{Z}$.
Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[$. Par intégration à vue, pour $t \in I$,

$$\boxed{\int \frac{1+\tan^2 t}{\sqrt{1-\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arcsin}\,(\tan(t))+C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\int \frac{u}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u$ sur un intervalle qu'on précisera.

La fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$ car le discriminant du dénominateur vaut $-8<0$. $\boxed{\text{On travaille donc sur l'intervalle } \mathbb{R}.}$ Pour $u \in \mathbb{R}$, on fait les manipulations suivantes.
On commence par se débarasser du terme de degré 1 du numérateur en faisant apparaître la dérivée du dénominateur :

$$\int \frac{u}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\int \frac{6u+2}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1}.$$

Comme $3u^2+2u+1>0$,

$$\int \frac{6u+2}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u = \ln\left(3u^2+2u+1\right)+C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

On calcule $\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1}$ en plusieurs étapes.
On fait disparaître le terme de degré 1 du dénominateur en reconnaissant le début d'un carré :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\left(\sqrt{3}u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}},$$

puis on ramène le terme constant à 1 :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

et enfin, on fait apparaître la dérivée de $u \longmapsto \frac{3u+1}{\sqrt{2}}$ au numérateur :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}u.$$

En intégrant "à vue" :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)+C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, par linéarité,

$$\boxed{\int \frac{u}{3u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\ln\left(3u^2+2u+1\right) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 4 Calculer $\int x\mathrm{Arctan}\,(x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant une intégration par parties.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on effectue l'intégration par parties

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & \mathrm{Arctan}\,(x) \\ \mathrm{d}v & = & x\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ v & = & \frac{x^2}{2} \end{array}\right.$$

bien justifiée puisque Arctan et $x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Cela donne

$$\begin{aligned} \int x\mathrm{Arctan}\,(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\,(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\mathrm{Arctan}\,(x) - x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.} \end{aligned}$$

Exercice 5

1. Pour $x \in]-\pi,\pi[$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, montrer que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Comme $x \in]-\pi,\pi[$, $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. On sait de plus que $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1+t^2$, donc $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$, donc

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}.}$$

---

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)}$ à l'aide du changement de variables : $x = 2\mathrm{Arctan}\,(t)$.

La fonction $\varphi : t \longmapsto 2\mathrm{Arctan}\,(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ car Arctan l'est et $f : x \longmapsto \frac{1}{2+\sin(x)}$ est clairement bien définie et continue sur $\varphi(\mathbb{R}) =]-\pi,\pi[$. De plus, $0 = \varphi(0)$ et $\frac{\pi}{2} = \varphi(1)$. On peut donc appliquer le théorème de changement de variables en posant

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & 2\mathrm{Arctan}\,(t) \\ \mathrm{d}x & = & \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}. \end{array}\right.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2+2t^2+2t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.}
$$
