Exercices supplémentaires sur les complexes et la trigonométrie

Ces exercices arrivent en complément de la feuille d'exercices de l'université de Lyon qui a été donnée précédemment.

Trigonométrie

Exercice 1 Résoudre l'inéquation, d'inconnue réelle x, $(E):\ \cos\left(3x-\frac{9\pi}{7}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculs

Exercice 2 Exprimer $\cos(7t)$ comme un polynôme en $\cos(t)$, pour $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 Calculer le module et l'argument de $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 4 On rappelle qu'on note j la racine cubique de 1 qui a une partie imaginaire strictement positive. Calculer les parties réelle et imaginaire de e^{j}.

Équations

Exercice 5 Résoudre les équations d'inconnue complexe z suivantes :
1. $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$.
2. $(z+i)^7-(z-i)^7=0$.
3. $z^2=\overline{z}^6$.
4. $e^z=j$.

Exercice 6 (Résolution générale des équations de degré 3.) Pour faciliter la rédaction, on introduit la notion de *couple non ordonné* (CNO en abrégé) de deux nombres complexes u et v éventuellement égaux, qu'on note $((u,v))$, pour signifier qu'on considère simultanément u et v, indépendamment de l'ordre d'écriture (on a donc $((u,v))=((v,u))$).
1. *Préliminaire.* Montrer que, pour tous S et P complexes, il existe un unique CNO $((\alpha,\beta))$ tel que $\alpha+\beta=S$ et $\alpha\beta=P$, et qu'il est obtenu en prenant les “deux” solutions, éventuellement identiques, de l'équation du second degré $Z^2-SZ+P=0$.
2. On considère une équation en $z\in\mathbb{C}$ du troisième degré à coefficients complexes. Montrer, en utilisant la formule du binôme à l'ordre 3, qu'elle se ramène par un changement de variable $y=z+k$ (k constante complexe) à une équation $(E):\ y^3+py+q=0$, (p, q coefficients complexes). Le cas où $p=0$ correspondant à une extraction de racine cubique, déjà traité dans un exercice précédent, on suppose dans la suite que $p\neq 0$.
3. Déduire du préliminaire qu'à tout nombre complexe y correspond un unique CNO $((u,v))$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u+v & = & y \\ uv & = & -\frac{p}{3} \end{array}\right. .$$

Remarquons qu'inversement, à un CNO verifiant les conditions ci-dessus correspond un unique y. Dans la suite, on garde ces notations et y et $((u,v))$ seront toujours liés de cette manière.
4. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $u^3+v^3=-q$.
5. Le problème revient donc à résoudre (S) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3+v^3 & = & -q \\ uv & = & -\frac{p}{3} \end{array}\right. ,$$

puis à faire, pour chaque CNO $((u,v))$ solution, la somme de u et v.

Montrer que (S) équivaut au système (S') :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3+v^3 & = & -q \\ u^3v^3 & = & -\frac{p^3}{27} \\ \frac{uv}{p} & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

6. D'après le préliminaire, un CNO $((U,V))$ vérifie (S'') :

$$\left\{\begin{array}{rcl} U+V & = & -q \\ UV & = & -\frac{p^3}{27} \end{array}\right.$$

si et seulement si U et V sont les "deux" solutions (éventuellement identiques) de l'équation du second degré $Z^2+qZ-\frac{p^3}{27}=0$. Par conséquent, (S'') a une solution unique.

En déduire qu'il existe exactement trois CNO solutions de (S').
7. Déduire de ce qui précède un algorithme de résolution des équations de degré 3 et l'appliquer à l'équation $7z^3+21z^2+63z+21=0$ (solutions : $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$, $j\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+j^2\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$, $j^2\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+j\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$, où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

Géométrie

Exercice 7 Montrer que $\left(\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2, |z-z'|\geq\big|\,|z|-|z'|\,\big|\right)$, dire dans quels cas on a égalité et interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 8 Montrer que $\left(\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2, |z|^2+|z'|^2=\dfrac{|z-z'|^2+|z+z'|^2}{2}\right)$ (égalité de la médiane) et interpréter géométriquement cette inégalité.

Exercice 9 Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct (*i.e.* on parcourt les trois sommets A, B et C en tournant autour du triangle dans le sens trigonométrique) si et seulement si $z_A+\mathrm{j}z_B+\mathrm{j}^2z_C=0$ (en notant $\mathrm{j}=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive).

Exercice 10 Quels sont les nombres complexes a tels que les points images de 1, a, a^2 et a^3 soient cocycliques ? (on pourra utiliser le théorème de l'angle au centre).

Similitudes directes

Exercice 11 Caractériser géométriquement (par leur type et éléments caractéristiques) les similitudes directes de traductions compleses :

1. $z \longmapsto (-1-\mathrm{i}\sqrt{3})z+(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}(2+\sqrt{3})$;
2. $z \longmapsto (3-3\mathrm{i})z+2$;
3. $z \longmapsto (-\sqrt{3}+\mathrm{i})z+\mathrm{i}$.

Exercice 12 Dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ muni d'un ROND, on considère les points $A(2,-1)$, $B(-1,2)$, $A'(1,0)$ et $B'(1,6)$. Caractériser géométriquement (par ses type et éléments caractéristiques) la similitude directe F vérifiant $F(A)=A'$ et $F(B)=B'$.

Exercice 13 Soit un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ muni d'un ROND. On considère les applications de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$:

$$F : M(x,y) \longmapsto M'(x-y+2, x+y-3) \quad \text{et} \quad G : M(x,y) \longmapsto M''\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{6}}{4}y, \frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y\right).$$

1. Montrer que F et G sont des similitudes directes et préciser leurs traductions complexes, leur type et leurs éléments caractéristiques.
2. Déterminer géométriquement $F \circ G$ et $G \circ F$, puis le faire par les nombres complexes et en déduire des expressions de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 14 Soient F une similitude directe et R une rotation de $\mathcal{P}$ de centre C et d'angle θ. Que dire de $F \circ R \circ F^{-1}$?