C12 - A - Résumé

Définition des variables

Pour les énonces suivants on considérera toujours :
I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que ($a \in I$ ou a est une borne de I on le précisera suivant ces deux cas)

Définition du voisinage (Non universelle)

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}$,
On a 3 cas :

- Si $w \in \mathbb{R}$ les voisinages spécifiques de w sont les $[w - \epsilon, w + \epsilon]$
  Ou $\epsilon > 0$
- Si $w = -\infty$ les voisinages spécifiques de w sont les $]-\infty, B]$ ou $B \in \mathbb{R}$
- Si $w = +\infty$ les voisinages spécifiques de w sont les $[A, +\infty[$, ou $A \in \mathbb{R}$

Notation du voisinage (du prof)

On notera $\mathcal{V}(w)$ l'ensemble des voisinages spécifiques de w (Ensemble de parties de $\mathbb{R}$)

Définition

Une propriété est dite vérifiée au voisinage de $w \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi il existe un voisinage spécifique de w que lequel la propriété soit vérifiée.

Définition de la limite

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

Théorème : unicité de la limite

Si $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifient

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \text{ et } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \text{ alors } l = l'$$

Propriété limite réelle dans le domaine de définition

Si $a \in I$ et $\lim_a f = l$
Alors

$$l = f(a)$$

Propriété limite bornée

Si $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$
Alors
f est bornée au voisinage de a

Propriété de la limite locale

La notion de limite est locale
Si $l \in \overline{\mathbb{R}}$ Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow (f|_V)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Propriété

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D_f \cap W, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

Définition de la limite a droite et a gauche

On considère $g = f|_{I \cap]a,+\infty[}$ resp ($g = f|_{I \cap]-\infty,a[}$)
et on dit que f admet une limite a droite (resp gauche) en a ssi

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

On note alors
Limite a droite :

$$g(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$$

$$g(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} l$$

Limite a gauche :

$$g(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$$

$$g(x) \underset{\substack{x \to a \\ <}}{\longrightarrow} l$$

Définitions formelles de la limite a droite et a gauche

Cas $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{a^+} f = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{a^-} f = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Cas $l \in \overline{\mathbb{R}}$:
Si $l \in +\infty$:

$$\lim_{a^+} f = +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a < x \leq a + \alpha \Rightarrow f(x) > \epsilon)$$

$$\lim_{a^-} f = +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a + \alpha \leq x < a \Rightarrow f(x) > \epsilon)$$

Extension

On suppose que I est un intervalle non trivial, $a \in I$ et f définies "au moins" sur $I \backslash \{a\}$ (elle peut ou non être définie en a)

Définition : Limite par valeurs différentes

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$
On dit que $f(x)$ tends par valeurs différentes lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \backslash \{a\}, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

On note alors

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = l$$

Propriété : Caractérisation séquentielle des limites

Avec les notations précédentes

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow (\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (\lim_{n \to \infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(u_n) = l))$$

Théorème : Opération sur les limites

Soit f et g deux fonctions tel que pour $l, l' \in \mathbb{R}$

$$\lim f = l \text{ et } \lim g = l'$$

On ait :

- $$\lim f + g = l + l'$$

- $$\lim f \times g = l \times l'$$
- $$g \neq 0 \Leftrightarrow \lim \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$$

Théorème : Composition de limites

Soit I, J des intervalles non-triviaux, $a, b, l \in \overline{\mathbb{R}}$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$
Telles que $f(I) \subset J$ et $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$
Alors

$$\lim_a (g \circ f) = l$$

Théorème : Stabilité des inégalités larges par passage a la limite

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et vérifiant :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Alors

$$\lim_a f \leq \lim_a g$$

Théorème : Limite par encadrement (gendarmes)

Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$
tel que f et h admettent la même limite l en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Alors g admet une limite en a et

$$\lim_a g = l$$

Théorème de minoration ou majoration

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$
tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

et a un point ou une borne de I.
Si $\lim_a f = +\infty$, alors $g(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque x tend vers a.
(Même pour la minoration en $-\infty$)

Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$,
Soit a une borne de I tel que $a \notin I$
Si f est monotone alors elle admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a

Corollaire du théorème de la limite monotone

Une fonction monotone admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de son intervalle de définition qui n'en est pas une borne.