Déterminants

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Dans le plan euclidien usuel, on note $\mathcal{A}(u,v)$ l'"aire" d'un parallélogramme *s'appuyant* sur le couple de vecteurs (u,v), *i.e.* tel qu'en notant ce parallélogramme $ABCD$, alors $\overrightarrow{AB} = u$ et $\overrightarrow{AD} = v$. On se pose alors la question des valeurs

$$\mathcal{A}(0,v),\ \mathcal{A}(u,0),\ \mathcal{A}(2u,v),\ \mathcal{A}(u,v+w).$$

L'application $\mathcal{A}$ semble "bilinéaire". À un certain point, il devient clair qu'il faut envisager une aire *algébrique* (*i.e.* avec un signe), par exemple pour que la bilinéarité qu'on vient de voir sur les dessins soit vraie dans tous les cas. On remarque alors que $\mathcal{A}(v,u)$ doit valoir $-\mathcal{A}(u,v)$, c'est-à-dire que cette application est "antisymétrique". On remarque par ailleurs que le fait, évident géométriquement, que $\mathcal{A}(u,u) = 0$, peut se *démontrer* à partir de l'antisymétrie (cela repose sur le fait que 2 est inversible dans $\mathbb{R}$). Cette propriété s'appelle l'"alternance" et, réciproquement, elle *implique* l'antisymétrie en présence de bilinéarité.

Par ailleurs, on voit bien que pour définir $\mathcal{A}$, il est besoin d'une "aire de référence", et on pose $\mathcal{A}(e_1,e_2) = 1$, pour (e_1,e_2) une base orthonormée directe (BOND).

En exprimant u et v dans la base (e_1,e_2), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u,v) &= \mathcal{A}(u_1e_1+u_2e_2, v_1e_1+v_2e_2)\\
&= u_1v_1\mathcal{A}(e_1,e_1)+u_1v_2\mathcal{A}(e_1,e_2)+u_2v_1\mathcal{A}(e_2,e_1)+u_2v_2\mathcal{A}(e_2,e_2)\\
&= u_1v_2-u_2v_1.
\end{aligned}$$

On évoque rapidement le cas du volume algébrique d'un parallélépipède s'appuyant sur un triplet de vecteurs dans l'espace "euclidien" usuel.

Exercice 1 Trouver une formule analogue à la précédente pour le volume d'un parallélépipède.

En conclusion, on voit qu'on obtient ainsi une application de E^2 (resp. E^3) vers $\mathbb{R}$, E étant l'espace des vecteurs, qui possède certaines propriétés qu'on "voit" géométriquement : valeur 1 sur une BOND, nullité lorsqu'un des vecteurs est nul ou plus généralement colinéaire à l'autre, bilinéarité (resp. trilinéarité), "antisymétrie", "alternance" et pour laquelle on peut trouver une formule algébrique en exprimant ses variables dans une BOND.

I Formes n-linéaires alternées

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 2 Une *forme n-linéaire sur E* est une application $f : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire en chacune des composantes de sa variables, *i.e.*

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in E^n,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\quad f(x_1,\dots,x_{k-1},\cdot,x_{k+1},\dots,x_n) \in E^\star.$$

Cette forme est dite *alternée* ssi elle s'annule lorsque deux des composantes sont égales, *i.e.*

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in E^n,\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \big((i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Longrightarrow f(x_1,\dots,x_n) = 0\big).$$

Elle est dite *antisymétrique* ssi l'échange de deux composantes change le signe de f, *i.e.*

$$\forall (x_i)_{i=1}^n \in E^n,\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \big(i < j \Longrightarrow f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots x_n) = -f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots x_n)\big).$$

On généralise aisément ce qu'on a vu sur l'exemple introductif :

Proposition 3 *Pour un forme n-linéaire f sur E, f est alternée ssi elle est antisymétrique.*

Démonstration: En exercice, refaire dans le cas général la démonstration vue dans l'introduction. □

On a alors la

Proposition 4 *L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^n}$.*

Démonstration: La démonstration, pour fastidieuse qu'elle serait à cause des notations, n'en serait pas moins triviale. □

On a de plus la

Proposition 5 *Soit $f \in \mathcal{A}_n(E)$. Alors on les deux résultats suivants :*

1. $\forall (x_i)_{i=1}^n \in E^n,\ \forall \sigma \in S_n,\quad f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1 \dots, x_n).$
2. *L'image d'une famille liée par f est nulle.*

Démonstration:

1. Il suffit d'écrire σ comme produit de transpositions et d'appliquer l'antisymétrie à chaque étape.
2. L'un des vecteurs de la famille s'écrit comme CL des autres. On utilise la linéarité par rapport à cette composante, puis l'alternance.

□

II Déterminant d'une famille de vecteurs

1 Résultats fondamentaux

Théorème 6

1. *$\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle ;*
2. *Pour toute base e de E, l'application de E^n vers $\mathbb{K}$*

$$\det_e : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^{n} e^\star_i(x_{\varphi(i)})$$

   en est l'unique vecteur directeur f vérifiant $f(e) = 1$.
   Le scalaire $\det_e(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelé le déterminant de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base e ;
3. *Toute $f \in \mathcal{A}_n(E)$ s'écrit $f = f(e)\det_e$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilisera un lemme de théorie des groupes :

Lemme 7 *Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $g \in G$. Alors les translations à gauche et à droite par g,*

$$l_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx \end{array} \right. \quad \text{et} \quad r_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xg \end{array} \right. ,$$

sont bijectives.

Démonstration: Commençons par démontrer le lemme. On voit immédiatement que $l_{g^{-1}}$ et $r_{g^{-1}}$ sont applications réciproques respectives de l_g et r_g, donc ces applications sont bien bijectives.

Démontrons maintenant le théorème. Soit $f \in \mathcal{A}_n(E)$ et e une base de E. L'idée est de faire dans ce cadre général un calcul analogue à ceux de l'introduction, *i.e.* exprimer, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction des coordonnées des x_i dans la base e :

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} e^\star_{i_1}(x_1) e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} e^\star_{i_n}(x_n) e_{i_n} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n} \prod_{j=1}^{n} e^\star_{i_j}(x_j) f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n \\ i_j \text{ deux-à-deux} \neq}} \left(\prod_{j=1}^{n} e^\star_{i_j}(x_j) \right) f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) \right) f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) \right) \varepsilon(\sigma) f(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \boxed{f(e) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) \quad (\star).}
\end{aligned}$$

On montre alors que l'application

$$\det_e : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) \end{array} \right.$$

est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, il est clair que $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j)$ est une forme n-linéaire par linéarité des $e^\star_k$. L'application $\det_e$ est alors n-linéaire comme combinaison linéaire de formes n-linéaires.

Montrons qu'elle est alternée en montrant qu'elle est antisymétrique. Soit $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. Pour $\sigma' \in \mathcal{S}_n$, on a, en utilisant d'abord le changement d'indices "$j = (\sigma')^{-1}(k),\ k = \sigma'(j)$", qui est bien licite car σ' est une permutation de $[\![1,n]\!]$, puis l'autre changement d'indices "$\sigma = \varphi\circ\sigma',\ \varphi = \sigma\circ(\sigma')^{-1}$", qui est bien licite par le lemme :

$$\begin{aligned} \det_e(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(n)}) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_{\sigma'(j)}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} e^\star_{\sigma\circ(\sigma')^{-1}(k)}(x_k) \\ &= \sum_{\varphi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi\circ\sigma') \prod_{k=1}^{n} e^\star_{\varphi(k)}(x_k) \\ &= \varepsilon(\sigma') \sum_{\varphi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{k=1}^{n} e^\star_{\varphi(k)}(x_k) \\ &= \varepsilon(\sigma')\det_e(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

En appliquant cette égalité lorsque σ' parcourt l'ensemble des transpositions de $\mathcal{S}_n$, on obtient l'antisymétrie de $\det_e$.

Enfin,

$$\det_e(e) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(e_j) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(j),j} = 1\cdot\prod_{j=1}^{n} 1 = 1,$$

ce qui achève de prouver que

$$\boxed{\det_e \in \mathcal{A}_n(E)\setminus\{0\}.}$$

D'après l'égalité $(\star)$ trouvée plus haut, toute forme n-linéaire alternée f sur E s'écrit

$$\boxed{f = f(e)\det_e,}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{A}_n(E) = \mathrm{Vect}\,(\det_e) \text{ est une droite vectorielle.}}$$

De plus, pour $f \in \mathcal{A}_n(E)$, $f = \det_e$ si et seulement si $f(e) = 1$, *i.e.* $\det_e$ est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e) = 1$.

Il ne reste plus qu'à exhiber la deuxième formule pour $\det_e$. Pour $x \in E^n$, en utilisant d'abord le changement d'indices "$j = \sigma^{-1}(i),\ i = \sigma(j)$", puis l'autre changement d'indices "$\sigma = \varphi^{-1},\ \varphi = \sigma^{-1}$", qui est bien licite car $\varphi \longmapsto \varphi^{-1}$ est un élément de $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_n}$ (c'est sa propre application réciproque) et enfin le fait que, pour $\varphi \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\varphi^{-1}) = \varepsilon(\varphi)^{-1} = \varepsilon(\varphi)$ (car ε est un morphisme de groupe de $\mathcal{S}_n$ vers $\mathbb{U}_2$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\det_e(x) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^\star_{\sigma(j)}(x_j) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e^\star_{i}(x_{\sigma^{-1}(i)}) \\
&= \sum_{\varphi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi^{-1}) \prod_{i=1}^{n} e^\star_{i}(x_{\varphi(i)}) \\
&= \boxed{\sum_{\varphi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^{n} e^\star_{i}(x_{\varphi(i)}).}
\end{aligned}$$

□

2 Interprétation matricielle de la formule du déterminant

En général, on se donne la famille x par la matrice $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_e(x)$. Les formules deviennent alors

$$\det_e(x) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \sum_{\varphi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)}.$$

Chaque produit de cette somme est obtenu en choisissant n coefficients de cette matrice de telle sorte qu'il y en ait un seul par ligne et par colonne, qu'on multiplie puis qu'on multiplie par ± 1, suivant que la permutation des colonnes (ou des lignes) necéssaire pour envoyer tous ces coefficients sur la diagonale est paire ou non. On fait ensuite la somme de tous les produits ainsi obtenus.

En faisant ainsi dans les cas où $n \in \{2,3\}$, on retrouve les formules de l'introduction :

Proposition 8 ***(Formules du déterminant en petite dimension.)***

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \{1,2,3\}$ et e une base de E.

— *Si $n = 1$, $x \in E$ et $\mathrm{Mat}_e(x) = (a)$, i.e. $x = ae_1$,*

$$\boxed{\det_e(x) = a.}$$

— *Si $n = 2$, $x = (x_1,x_2) \in E^2$ et $\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors*

$$\boxed{\det_e(x) = ad - bc.}$$

— *Si $n = 3$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in E^3$ et $\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors*

$$\boxed{\det_e(x) = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.}$$

Cette dernière formule, dite règle de Sarrus, suit un schéma régulier sur la matrice, qu'on laisse découvrir au lecteur, mais qui ***ne se généralise pas*** *en dimension supérieure !*

Remarque 9 On remarque en dimension 2 une expression connue, $ad - bc$, dont on sait que la non nullité équivaut à l'inversibilité de la matrice. Ce n'est pas un hasard comme on le verra plus loin dans la cas général.

Remarque 10 Pour les dimensions au moins 4, la formule du déterminant vue précédemment n'est pas efficace. En pratique, on utilisera l'algorithme du pivot.

3 Retour vers la géométrie.

Lorsqu'on munit le plan euclidien usuel d'une base "orthonormée directe" e, avec les notations de l'introduction, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(e_1, e_2)\det_e$. Comme un parallélogramme s'appuyant sur (e_1, e_2) est un carré de côté 1, on a $\mathcal{A}(e_1, e_2) = 1$, donc $\mathcal{A} = \det_e$. On a alors le résultat suivant, en *supposant connues* les notions de longueur, d'angle et d'orientation (qui n'ont pas encore été définies rigoureusement) :

Proposition 11 *Si e est une base "orthonormée directe" du plan euclidien usuel, et $ABCD$ un parallélogramme, éventuellement dégénéré, alors $\det_e(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est l'aire algébrique de ce parallélogramme, avec la convention que, dans les cas non dégénérés, l'aire est strictement positive si et seulement si le parallélogramme est décrit dans le sens trigonométrique, ce qui équivaut à ce que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ soit directe.*

On a un résultat analogue pour le volume en dimension 3 :

Proposition 12 *Si e est une base "orthonormée directe" de l'espace euclidien usuel, alors $\det_e(u, v, w)$ est le volume algébrique du parallélépipède s'appuyant sur (u, v, w), avec la convention que, dans les cas non dégénérés, l'aire est strictement positive si et seulement si la base (u, v, w) est directe.*

4 Bases et déterminant

La formule suivante découle immédiatement du théorème 6 :

Proposition 13 ***(Formule de changement de base)***
Pour e, e' deux bases de E,

$$\boxed{\det_{e'} = \det_{e'}(e)\det_e.}$$

On en déduit trivialement les deux résultats suivants :

Corollaire 14 ***(Relation de Chasles)***
Pour e, e', e'' trois bases de E,

$$\boxed{\det_e(e')\det_{e'}(e'') = \det_e(e'').}$$

Corollaire 15
Pour e, e' deux bases de E, on a

$$\boxed{\det_{e'}(e)\det_e(e') = 1, \quad \textit{donc} \quad \det_{e'}(e) = \det_e(e')^{-1}.}$$

Une conséquence des formules précédentes est que pour une base e fixée et $x \in E^n$, si x est une base, alors $\det_e(x) \neq 0$. Cependant, si x n'est pas une base, comme elle est de cardinal n en dimension n, elle est liée et, comme $\det_e$ est n-linéaire alternée, alors $\det_e(x) = 0$. On a donc prouvé la

Proposition 16 ***(Caractérisation des bases)***
Soit e une base de E et $x \in E^n$. Alors,

$$\boxed{x \textit{ est une base de } E \textit{ si et seulement si } \det_e(x) \neq 0.}$$

Exemple 17 On veut savoir si la famille $x = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\det_{can}(x) = 9 - 1 = 8 \neq 0$, donc x est une base de E.

5 Orientation d'un espace vectoriel réel

On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit e une base de E. Alors, le monde des bases de E se divise en deux camps :

— Celles qui sont "avec" e, *i.e.* les bases e' telles que $\det_e(e') > 0$;
— Celles qui sont "contre" e, *i.e.* les bases e' telles que $\det_e(e') < 0$.

Ce partage en deux camps ne dépend pas de e, *i.e.* une autre choix de base au départ fournira la même partition de l'ensemble des bases de E.

Définition 18 Le choix d'une *orientation* de E est le choix d'un de ces camps.

On le fait en général en décrétant qu'une base donnée e est *directe*. Alors, pour une autre base e' :

— si $\det_e(e') > 0$, on dit que e' est *directe* ;
— si $\det_e(e') < 0$, on dit que e' est *indirecte*.

Reformulation en termes de relation d'équivalence.

Soit $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bases de E. On définit la relation $\sim$ sur $\mathcal{B}(E)$ par

$$\forall e, e' \in \mathcal{B}(E), \quad e \sim e' \iff \det_e(e') > 0.$$

Avec les formules de la sous-section précédente, il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence et qu'elle a exactement deux classes d'équivalences. Le choix d'une orientation de E est le choix d'une de ces deux classes, dont les éléments sont alors les bases *directes*, les autres bases étant les bases *indirectes*.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on rappelle qu'il y a une convention d'orientation usuelle, qui est celle utilisée en physique et en sciences de l'ingénieur. Cela reste une convention. et on pourrait décider d'orienter ces espaces autrement.

III Déterminant d'un endomorphisme

1 Définition

Proposition 19

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}_n,\ \forall x \in E^n, \quad f(u(x)) = \lambda f(x),$$

*qu'on appelle le **déterminant** de u et qu'on note* $\det(u)$.

On a alors, pour toute base e de E, $\boxed{\det(u) = \det_e(u(e)).}$

Démonstration: Par analyse-synthèse. Soient e une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Analyse. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\quad \forall f \in \mathcal{A}_n,\ \forall x \in E^n,\ f(u(x)) = \lambda f(x)$.

Comme $\det_e \in \mathcal{A}_n(E)$ et $e \in E^n$, alors $\lambda = \lambda \det_e(e) = \det_e(u(e))$, ce qui prouve l'unicité de λ.

Synthèse. Posons $\lambda = \det_e(u(e))$.

Alors, pour $f \in \mathcal{A}_n(E)$, on a

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(u(x)) \end{array} \right.$$

qui est clairement n-linéaire alternée, donc

$$g = g(e)\det_e = f(u(e))\det_e = f(e)\det_e(u(e))\det_e = \lambda f(e)\det_e = \lambda f.$$

En appliquant cela à $x \in E^n$, on obtient $f(u(x)) = \lambda f(x)$.

Ainsi, $\lambda = \det_e(u(e))$ convient bien.

De plus, ce qui précède fonctionne pour toute base e, ce qui prouve la dernière formule. □

Remarque 20 La formule précédente permet de calculer le déterminant de u à partir de la matrice de u dans une base e, puisque cette matrice donne justement les coordonnées des vecteurs de $u(e)$ dans la base e.

2 Premières propriétés

On déduit de la formule ci-dessus les propriétés suivantes, en utilisant les propriétés de $\det_e$ pour une base quelconque e de E.

Proposition 21 $\boxed{\det\left(0_{\mathcal{L}(E)}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{Id}_E) = 1.}$

Démonstration: On a $\det\left(0_{\mathcal{L}(E)}\right) = \det_e(0_{E^n}) = 0$ par linéarité par rapport à la première composante. Et $\det(\mathrm{Id}_E) = \det_e(e) = 1$. □

Proposition 22 $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\quad \boxed{\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u).}$

Démonstration: Par linéarité par rapport à chaque composante,

$$\det(\lambda u) = \det_e(\lambda u(e_1), \ldots, \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \lambda^n \det(u).$$

□

Corollaire 23 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\boxed{\det(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda^n.}$

Démonstration: $\det(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda^n \det(\mathrm{Id}_E) = \lambda^n$. □

Proposition 24 $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\boxed{u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0.}$

Démonstration: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$u \in \mathrm{GL}(E) \iff u(e) \text{ base} \iff \det_e(u(e)) \neq 0 \iff \det(u) \neq 0.$$

□

3 Déterminant et composition

Proposition 25 $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\boxed{\det(v \circ u) = \det(v)\det(u).}$

Démonstration: Per la définition du déterminant d'un endomorphisme, comme $\det_e \in \mathcal{A}_n(E)$,

$$\det(v \circ u) = \det_e(v(u(e)) = \det(v)\det_e(u(e)) = \det(v)\det(u).$$

□

Corollaire 26 $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\boxed{\det(v \circ u) = \det(u \circ v).}$

Démonstration: Par commutativité du produit de $\mathbb{K}$. □

Corollaire 27 $\forall u \in \mathrm{GL}(E)$, $\boxed{\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}.}$

Démonstration: On a $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u)\det(u^{-1})$. □

Proposition 28 *L'application* $u \longmapsto \det(u)$ *est un morphisme surjectif de groupes de* $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *vers* $(\mathbb{K}^\star, \cdot)$.

Démonstration: C'est un morphisme de groupe car il transforme la composition en produit, comme vu précédemment.

Pour la surjectivité, on choisit une base e de E et on définit, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme u de E par $u(e_1) = \lambda e_1$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u(e_i) = e_i$. On a alors

$$\det(u) = \det_e(u(e)) = \det_e(\lambda e_1, e_2, \ldots, e_n) = \lambda \det_e(e) = \lambda.$$

□

Corollaire 29 $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathrm{GL}(E)$, $\boxed{\det(v^{-1} \circ u \circ v) = \det(u).}$

Démonstration: $\det((v^{-1} \circ u) \circ v) = \det(v \circ (v^{-1} \circ u)) = \det(u)$. □

IV Déterminant d'une matrice carrée

1 Définition

Définition 30 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit son déterminant comme celui de son endomorphisme canoniquement associé :

$$\boxed{\det(A) = \det(u_A).}$$

Puisque $\det(u_A) = \det_{can}(u_A(can))$, on a directement les formules

Proposition 31 $\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)}.}$

Notation. Pour les déterminants explicites, on utilise la notation :

$$\det(A) = \left|a_{i,j}\right|_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Corollaire 32 *Pour $a, b, \ldots \in \mathbb{K}$, on a*

- $\boxed{\det((a)) = a.}$
- $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.}$
- $\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.}$

  Rappelons que la règle de Sarrus ne se généralise pas en dimension supérieure.

2 Cas des endomorphismes d'un espace abstrait

Plus généralement, tout endomorphisme de E admettant comme matrice A dans une certaine base a même déterminant que A :

Proposition 33 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et e est une base de E, alors* $\boxed{\det(\mathrm{Mat}_e(u)) = \det(u).}$

Démonstration: On a déjà vu que, si $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_e(u(e))$,

$$\det(u) = \det_e(u(e)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \det(A).$$

□

Corollaire 34 $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est un invariant de similitude.*

Démonstration: Puisque deux matrices semblables peuvent représenter un même endomorphisme par une choix de base de E judicieux, leurs déterminants sont tous deux égaux à xelui de cet endomorphisme, donc sont égaux. □

3 Propriétés

On déduit immédiatement des propriétés du déterminant des endomorphismes vues précédemment la

Proposition 35

1. $\det\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right) = 0$;
2. $\det(\mathrm{I}_n) = 1$;
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$:
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ (A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0)$;
5. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(BA) = \det(B)\det(A)$;
6. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

On en déduit pour les systèmes linéaires :

Proposition 36 *Un système de n équations linéaires à n inconnues est de Cramer si et seulement si le déterminant de la matrice du système homogène est non nul.*

4 Déterminant et transposition

Proposition 37 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \boxed{\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A).}$

Démonstration: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (A^{\mathrm{T}})[\sigma(j), j] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A[j, \sigma(j)] = \det(A).$$

□

On en déduit la

Proposition 38 *Une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est jamais inversible.*

Démonstration: Soit A une matrice antisymétrique d'ordre impair n. Alors

$$\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}}) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

donc $\det(A) = 0$. □

V Calcul du déterminant d'une matrice

1 Un outil important

On déduit très facilement des différentes définitions du déterminant et de l'invariance du déterminant par transposition la

Proposition 39 *Le déterminant d'une matrice est celui de ses vecteurs colonnes (resp. lignes) dans la base canonique.*

Le déterminant matriciel

$$\det : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{cases}$$

est donc une application qui est n-linéaire alternée par rapport aux colonnes (resp. aux lignes) de sa variable.

2 Premières conséquences

On déduit de la n-linéarité et de l'alternance les premiers faits suivants :

Proposition 40 *Pour des matrices carrées, on a :*

1. *Si une colonne (resp. ligne) d'une matrice est nulle, alors son déterminant est nul ;*
2. *Si une matrice a deux colonnes (resp. lignes) identiques, alors son déterminant est nul ;*
3. *Plus généralement, si une colonne (resp. ligne) d'une matrice est combinaison linéaire des autres, alors son déterminant est nul ;*
4. *Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux.*

Démonstration:

1. Si une colonne (resp. ligne) est nulle, par linéarité de l'application déterminant matriciel par rapport à cette colonne (resp. ligne), le déterminant de la matrice est nul.
2. C'est une conséquence immédiate de l'alternance ;
3. C'est une conséquence de l'alternance, puisqu'alors la famille des vecteurs colonnes (resp. lignes) est liée ;
4. On sort les coefficients diagonaux un par un par multilinéarité et il reste alors I_n, dont le déterminant est 1.

□

3 Effet des opérations élémentaires

Proposition 41 *Pour une matrice carrée :*

— *une transposition sur ses colonnes (resp. lignes) change le déterminant en son opposé ;*
— *une transvection sur ses colonnes (resp. lignes) ne change pas le déterminant ;*
— *une dilatation de facteur λ sur une colonne (resp. ligne) multiplie le déterminant par λ ;*
— *en conséquence : l'ajout à une colonne (resp. ligne) d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.*

Démonstration: Le premier et le troisième point sont évidents par linéarité par rapport aux colonnes (resp. lignes), mais on unifie les démonstrations avec les matrices d'opérations élémentaires, dont on voit au passage les déterminants.

Pour les trois premiers points, il suffit de remarquer que les opérations élémentaires en question s'obtiennent en multipliant, à droite pour les colonnes et à gauche pour les lignes, par des matrices de transposition, resp. transvection, resp dilatation. Le déterminant final est alors le déterminant initial mutliplié par le déterminant de la matrice de l'opération élémentaire. Il suffit donc de calculer les déterminants des matrices de ces trois catégories.

Pour les matrices de dilatation d'un facteur λ, leur déterminant est λ car elles sont diagonales avec tous les coefficients diagonaux valant 1 sauf un qui vaut λ. Pour les matrices de transposition, en échangeant deux colonnes (ou deux lignes, c'est comme on veut...), on obtient l'identité, donc elles sont de déterminant -1. Pour une matrice de tranvection $T = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j}$, en écrivant le j-ème vecteur colonne $e_i + \lambda e_j$ (en identifiant les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux vecteurs colonnes et en notant e la base canonique de $\mathbb{K}^n$) et en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j-ième colonne, on obtient

$$\det(T) = \det(\mathrm{I}_n) + \lambda\det(\mathrm{I}_n - E_{i,i} + E_{i,j}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1,$$

puisque la matrice $\mathrm{I}_n - E_{i,i} + E_{i,j}$ a ses i-ème et j-ème colonnes identiques.

Le dernier point s'obtient par récurrence immédiate, puisque l'opération (non élémentaire) s'obtient en effectuant un nombre fini d'opérations de transvection. □

Exercice 42 Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} \sin(2\theta) & \sin(3\theta) & \sin(4\theta) \\ \sin(3\theta) & \sin(4\theta) & \sin(5\theta) \\ \sin(4\theta) & \sin(5\theta) & \sin(6\theta) \end{vmatrix}$.
(Indication : effectuer $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$.)

Exercice 43 Calculer sous forme **factorisée**, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$

(Indication : utiliser d'abord la linéarité par rapport aux colonnes, puis effectuer un pivot par colonnes.)
La remontée de l'algorithme du pivot est-elle nécessaire ?

Exercice 44 Calculer sous forme **factorisée**, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

4 Algorithme du pivot

Cas des matrices triangulaires

Si on part d'une matrice triangulaire **inversible** (supérieure pour un pivot par lignes, inférieure pour un pivot par colonnes), comme on sait que la remontée de l'algorithme du pivot sans renormalisation n'utilise que des transvections et que le déterminant de la matrice diagonale finalement obtenue est le produit des coefficients diagonaux, qui n'ont pas été changés, son déterminant est simplement le produit de ses coefficients diagonaux.

Pour une matrice triangulaire **non inversible**, son déterminant est nul et est donc encore le produit de ses coefficients diagonaux.

On a ainsi la

Proposition 45 *Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses coefficients diagonaux.*

Cas général

Pour une matrice quelconque, il suffit donc de faire la descente de l'algorithme du pivot pour obtenir une matrice triangulaire dont on calcule facilement le déterminant par la proposition précédente. Bien noter que le déterminant n'est pas invariant par transposition ou dilatation des lignes ou colonnes et qu'il faut donc garder en mémoire toutes les modifications du déterminant au cours de l'algorithme.

5 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 46 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k,l \in [\![1,n]\!]$, on note

$$\mathrm{ext}(A,k,l)$$

la matrice extraite de A en supprimant la k-ième ligne et la l-ième colonne et

$$\mathrm{cof}(A,k,l) = (-1)^{k+l}\det(\mathrm{ext}(A,k,l))$$

le *cofacteur* correspondant.

Remarque 47 En pratique, pour trouver la valeur de $(-1)^{k+l}$ dans la formule du cofacteur, il est utile de se référer au schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & + & & (-1)^n \\ + & - & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & + & \ddots & \ddots & \ddots & + \\ (-1)^n & & \ddots & \ddots & \ddots & - \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & & + & - & + \end{pmatrix}.$$

On a alors le

Théorème 48 ***(Développement par rapport à une ligne ou une colonne)***
Avec les notations précédentes :

— *pour k donné,* $\boxed{\det(A) = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\mathrm{cof}(A,k,l);}$

— *pour l donné,* $\boxed{\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l}\mathrm{cof}(A,k,l).}$

Pour démontrer ce théorème, on montrera successivement les deux lemmes :

Lemme 49 *Le résultat du théorème est vérifié lorsque la dernière ligne de A est* $(0\,0\,\cdots\,0\,1)$.

Lemme 50 *Le résultat du théorème est vérifié lorsqu'une de ses lignes a tous ses coefficients nuls, sauf un qui vaut* 1.

Démonstration: à voir en cours.

Le premier lemme se démontre avec la formule générale du déterminant, dont beaucoup de termes s'annulent.

Le second se déduit du premier par des permutations sur les lignes et colonnes.

Le théorème s'en déduit en utilisant la linéarité par rapport à la k-ième ligne pour le premier résultat, puis la transposition pour le second. □

Exemple 51

1. Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ en le développant par rapport à la première ligne. (Résultat : -3).
2. Calculer le même déterminant en le développant par rapport à la deuxième colonne.
3. Comparer avec la règle de Sarrus.
4. Comparer avec la méthode du pivot sur les colonnes.

Exercice 52 Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et a et b dans $\mathbb{K}$, le déterminant $2n \times 2n$ suivant :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \iddots & & \vdots \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ \vdots & & \iddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

6 Matrices triangulaires par blocs

Théorème 53 *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

Démonstration: à voir en cours.

On traite d'abord le cas de deux blocs diagonaux, par récurrence sur la taille du premier bloc diagonal.

Le résultat s'ensuit par récurrence immédiate sur le nombre de blocs. □

On utilise très fréquemment le cas particulier suivant :

Corollaire 54 *Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

7 Déterminant de VanDerMonde

Définition 55 On appelle déterminant de VanDerMonde un déterminant de la forme

$$V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

où $\lambda_1,\dots\lambda_n \in \mathbb{K}$.

On le résultat à savoir **par cœur** :

Proposition 56 $\forall \lambda_1,\dots\lambda_n \in \mathbb{K}$, $\boxed{V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i).}$

Démonstration: à voir en cours.

On effectue successivemet les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \lambda_n L_{i-1}$ pour i variant de n à 2, ce qui permet dans un premier temps de factoriser par $\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_n)$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne, ce qui donne :

$$V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (-1)^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_n)\right)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_i)\right)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}).$$

Le résultat final s'ensuit par récurrence immédiate. □

VI Comatrice

Définition 57 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La *comatrice* de A est la matrice de ses cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = (\mathrm{cof}(A,i,j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Théorème 58 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$\boxed{A\,\mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}} = \mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}}A = \det(A)I_n.}$$

En particulier, si $\det(A) \neq 0$ *(i.e. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$),*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}}.}$$

Démonstration: à voir en cours.

On note $C = \mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}}A$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, son coefficient diagonal $c_{j,j}$ correspond exactement au développement de $\det(A)$ par rapport à la j-ème colonne, donc vaut $\det(A)$. Les autres coefficients sont eux égaux à des développements par rapport à des colonnes d'une matrice ayant deux colonnes identiques, donc de déterminant nul.

Pour une matrice inversible, un seul des deux produits égal à I_n suffit à déterminer l'inverse, donc on a fini. □

On retrouve ainsi la formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 inversible :

Corollaire 59 *Si $ad - bc \neq 0$,*

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

Démonstration: en exercice. □

Remarque 60 Dès que $n \geq 3$, cette formule est très inefficace d'un point de vue pratique. On utilisera la méthode habituelle du pivot pour des calculs d'inverses explicites.