Programme de colle de la semaine 2 (du 25 au 29 septembre 2023)

Nota Bene : Les exercices peuvent aussi porter sur les fonctions en s'appuyant sur le programme de terminale. Insister sur la construction d'une fonction par les opérations usuelles et la composition et sa conséquence sur les domaines, les limites...

Programme des exercices

Chapitre 1 : Langage mathématique

— *Logique :* Exemples de phrases mathématiques (pas de définition formelle), exprimées en français ou avec des symboles. Connecteurs logiques ("non", "et", "ou", $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$) définis en français et reformulation par leurs tables de vérité. Démonstration de l'équivalence de deux formules logiques ou démonstration d'une proposition à l'aide de tables de vérité, exemples fondamentaux : implication et contraposée, lois de De Morgan, reformulation de l'implication avec "non" et "ou", négation d'une implication.

— *Ensembles :* Certaines collections d'objets sont appelées des *ensembles*. Notion d'appartenance et notation $\in$. Les collections suivantes sont des ensembles (admis) : les ensembles de nombres déjà connus, les ensembles finiment décrits en extension (entre accolades, dont $\emptyset = \{\}$), les ensembles obtenus en sélectionnant les éléments x d'un ensemble E vérifiant une certaine propriété (prédicat) $P(x)$ (notation $\{x \in E | P(x)\}$) ; Quantificateurs universel et existentiel, toujours utilisés avec $\in$ ($\forall x \in E, \ldots$). Inclusion et extensionnalité : définition de $\subset$, deux ensembles sont égaux ss'ils ont les mêmes éléments *i.e.* il y a double inclusion (axiome). La collection des parties d'un ensemble E est un ensemble $\mathcal{P}(E)$ (axiome). Opérations sur les ensembles : intersections finies et quelconques (ce sont des ensembles par sélection), réunion finies et quelconques (ces réunions sont des ensembles, axiome), différence et complémentaire (par sélection), différence symétrique. Propriétés de base de ces opérateurs. Lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Produits cartésiens finis. Négation d'une formule quantifiée.

— *Différents modes de raisonnement :* Récapitulatif sur des exemples des modes de raisonnement utilisés jusque là : raisonnement direct, disjonction des cas, contraposée, absurde. (démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de l'infinitude des nombres premiers). Introduction du raisonnement par Analyse-Synthèse (exemple de la décomposition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en parties paire et impaire). *Raisonnement par récurrence :* Exemples introductifs mettant en valeur l'importance de l'hérédité dès le rang d'initialisation. (sinon, on montre facilement que n élèves auront tous la même note au DS). Démonstration du fait que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, par récurrence. Rédaction précise d'une récurrence.

Démonstration du principe de récurrence en admettant que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Récurrence double et récurrence forte. Démonstration du principe de récurrence double par récurrence usuelle.

Programme des questions de cours

Chapitre 2 : Nombres réels et inégalités

1 Nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est supposé "connu", ainsi que les opérations usuelles. On admet que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps, ce dont on donne la définition sur cet exemple. Les élèves doivent savoir donner les axiomes d'un corps (toujours commutatif en CPGE) :

— La loi $+$ est associative, commutative, possède un neutre noté 0 et tout réel admet un opposé ;

— La loi $\times$ est commutative, associative, possède un neutre 1 tel que $1 \neq 0$ et tout réel non nul admet un inverse ;

— La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On montre en exercice de petites propriétés comme l'unicité du neutre, le fait que 0 est absorbant...

2 Relation d'ordre $\leq$

On admet les axiomes de base vérifiés par la relation $\leq$: c'est un ordre total (*i.e.* réflexivité, transitivité, antisymétrie, deux réels sont toujours comparables), compatibilité avec $+$ et $\times$.

3 Valeur absolue

Valeur absolue, parties positive et négative d'un réel, toutes définies de manière conditionnelle. Propriétés de base : $x^+ - x^- = x$, $x^+ + x^- = |x|$, $x \in \{-|x|, |x|\}$, $-|x| \leq x \leq |x|$. Propriétés de la valeur absolue : positivité, séparation, valeur absolue d'un produit, inégalité triangulaire, "seconde" inégalité triangulaire $|x+y| \geq ||x| - |y||$.

4 Maximum et minimum d'un nombre fini de réels

Maximum et minimum de deux réels défini de manière conditionnelle, $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, $\min(x,y) + \max(x,y) = x+y$, $|x| = \max(-x,x)$, $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = -\min(x,0)$.

Maximum de plus de deux nombres, défini par récurrence : pour une suite finie de réels $x_1,\dots,x_n$, on pose $\max(x_1)=x_1$ et pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$,

$$\max(x_1,\dots,x_{k+1})=\max\left(\max(x_1,\dots,x_k),x_{k+1}\right).$$

De même pour le minimum de plus de deux nombres.

5 Intervalles réels

Intervalles à bornes réelles, extension aux bornes infinies. Intervalle ouvert (resp. fermé) centré en un point x et de rayon $\varepsilon>0$, représentation graphique et expression à l'aide de la valeur absolue.

6 Majorants et minorants

Définitions, partie bornée, expression de la bornitude en termes de valeur absolue, notions de minimum et de maximum d'une partie, cohérence avec le maximum et le minimum d'une famille finie vus précédemment.

Attention : pas de définition de la borne supérieure dans ce chapitre (conformément au programme...).

Chapitre 3 : Nombres complexes et trigonométrie

1 “Définition” de $\mathbb{C}$

Les constructions sont maintenant hors programme.

Un nombre complexe est un objet de la forme “$a+\mathrm{i}b$”, avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}^2=-1$. Deux complexes sont égaux ssi leur écritures sont égales. On utilise les opérations avec les règles “usuelles”. On admet que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition et de la multiplication, est un “corps”, *i.e.* :

1. L'addition est associative et commutative, elle admet 0 pour élément neutre et tout nombre complexe admet un opposé ;
2. La multiplication est associative et commutative, elle admet $1(\neq 0)$ pour élément neutre et tout nombre complexe non nul admet un inverse ;
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

2 Parties réelle et imaginaire

Définition de $\mathrm{Re}\,(z)$ et $\mathrm{Im}\,(z)$, elles préservent la somme et la multiplication par un réel, effet sur les produits.

Conjugaison, $\overline{\overline{z}}=z$, caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison, la conjugaison préserve sommes, produits et quotients.

Lien entre conjugaison et parties réelle et imaginaire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z+\overline{z} & = & 2\,\mathrm{Re}\,(z) \\ z-\overline{z} & = & 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z) \end{array} \right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Re}\,(z) & = & \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ \mathrm{Im}\,(z) & = & \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}. \end{array} \right.$$

Représentation géométrique des nombres complexes, notion d'affixe d'un point ou d'un vecteur, interprétation géométrique de la conjugaison.

Toutes les définitions et tous les énoncés sont **exigibles**.

Démonstrations de cours exigibles

— Pour une LCI quelconque sur un ensemble, unicité de l'éventuel élément neutre et, si on la suppose associative, unicité de l'éventuel symétrique d'un élément de l'ensemble ;

— À l'aide des axiomes d'un corps K, démonstration du fait que 0 est absorbant et que, pour tout $x \in K$, $(-1) \times x = -x$;

— À l'aide uniquement des axiomes de corps totalement ordonné ($a < b$ est alors **défini par** ($a \leq b$ et $a \neq b$)), démonstration successive des propriétés, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

1. non $(a < b$ et $a > b)$;
2. $a \leq b \iff (a < b$ ou $a = b)$;
3. $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$;
4. non $(a \leq b) \iff a > b$;

— Démonstration du fait que $1 > 0$;

— Inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et "seconde" inégalité triangulaire.