# Outils mathématiques

**IDENTITÉS REMARQUABLES, TRIGONOMÉTRIE, EQUATIONS DU 2ND DEGRÉ**

## 1. Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $\qquad$ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

## 2. Trigonométrie

- **Relations dans un triangle rectangle**

$$\cos\theta = \frac{\text{cote adj.}}{\text{hypoth.}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{cote opp.}}{\text{hypoth.}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cote opp.}}{\text{cote adj.}} = \frac{1}{\text{cotan}\theta}$$

- **Théorème de Pythagore**

$$\text{cote adj.}^2 + \text{cote opp.}^2 = \text{hypoth.}^2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \qquad \text{et} \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

- **Valeurs remarquables**

| $\theta$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ |
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
| $\tan(\theta)$ | $0$ | $1/\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

- **Relations sur le cercle trigonométrique**

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ $\qquad$ $\cos(\pi/2-\theta) = +\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ $\qquad$ $\cos(\pi/2+\theta) = -\sin\theta$

$\sin(\pi-\theta) = +\sin\theta$ $\qquad$ $\sin(\pi/2-\theta) = +\cos\theta$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\sin(\pi/2+\theta) = +\cos\theta$

- **Formules d'addition**

$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$ $\qquad$ $\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a$

$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a$

- **Formules de duplication**

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$\sin(2a) = 2\sin a\,\cos a$

- **Formules de linéarisation**

$\cos^2 a = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2a)\right]$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}\left[1-\cos(2a)\right]$

## 3. Equation du second degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Pour résoudre cette équation (où $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$), c-à-d trouver les valeurs de x qui la vérifient : calculer le **discriminant** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.



- si $\Delta > 0$, $\exists$ 2 racines réelles : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$, $\exists$ 1 racine réelle double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$, $\exists$ 2 racines complexes conjuguées : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

**EXERCICES**

### Ex. 1. Conducteurs en série et en parallèle (équation du 2nd degré)

On dispose de deux dipôles ohmiques de résistances $R_1$ et $R_2$. Si on les monte en série, on obtient une résistance équivalente $r = R_1 + R_2$. Si on les monte en parallèle, on obtient un dipôle ohmique de résistance équivalente $R$ telle que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
On connaît, car on peut les mesurer, les valeurs de $r$ et $R$, mais pas celles de $R_1$ et $R_2$.

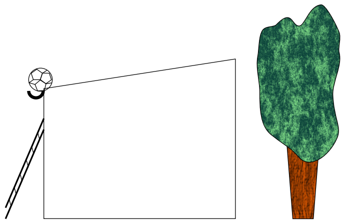
**1.** Trouver les équations du 2nd degré (une sur $R_1$ et une sur $R_2$) qui vous permettront de déterminer $R_1$ et $R_2$ en fonction de $r$ et $R$.

**2.** On mesure tout d'abord $r = 100\ \Omega$ et $R = 10\ \Omega$. Donner les valeurs de $R_1$ et $R_2$.

**3.** Aurait-on pu mesurer $r = 100\ \Omega$ et $R = 50\ \Omega$ ?

**4.** Donner la condition sur $r$ et $R$ pour qu'il existe une solution à ce problème (c'est-à-dire des valeurs de $R_1$ et $R_2$ possibles).

### Ex. 2. Kylian Mbappé et son ballon (trigonométrie)



Le petit Kylian a mal visé : son ballon s'est retrouvé bloqué par la gouttière d'un petit bâtiment. Comme il est un intrépide, il va grimper sur une échelle de 4m de longueur. Kylian mesure 2,28m le bras levé. Il incline l'échelle de 75° par rapport au sol. Il ne veut pas l'incliner davantage de peur qu'elle tombe. Le sol est supposé plat et le bâtiment droit.

**1.** La gouttière étant à 6,75 m du sol, peut-il l'atteindre ? Si non, quelle longueur lui manque-t-il (à $10^{-2}$ m près) ?

**2.** Abandonnant la piste de l'échelle, il décide de grimper sur l'arbre de l'autre côté du bâtiment. A quelle hauteur (à $10^{-2}$ m près) va-t-il grimper pour atteindre le toit, sachant que le toit du bâtiment est incliné à 10° et que la longueur du bâtiment vaut 6 m ?

### Ex. 3. Astuce (trigonométrie)

Calculer, sans calculatrice, $\tan(\pi/12)$ (de deux façons différentes, si possible).