Calculs algébriques

Lycée Berthollet, MPSI2 2023-24

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux objets suivants : le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

I Suites à terme général exprimable

1 Notion de suite

Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une "machine" u qui associe à chaque entier n un nombre $u_n \in \mathbb{K}$. On note cette suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi plus légèrement $(u_n)_n$, ou même (u_n). On la note aussi parfois $n \longmapsto u_n$, de manière analogue aux fonctions. L'expression u_n s'appelle le *terme général* de la suite (u_n).

Exemple 1 L'objet $\left(\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)$ est une **suite**. Son **terme général** est $\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Remarque 2 Il faut bien prendre garde à ne pas confondre la suite et son terme général, de la même manière qu'on ne doit pas confondre l'expression $f(x)$ et la fonction f (fonction qui est aussi notée $x \longmapsto f(x)$).

Remarque 3 Suites et fonctions sont deux cas particuliers d'une définition plus générale, qu'on verra plus tard, celle d'*application* : une fonction f est une application de D_f vers $\mathbb{R}$ et une suite est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, notation qui trouvera son explication dans le chapitre ultérieur concernant les *applications*.

Exemple 4 Les fameuses suites de Syracuse sont définies par récurrence de la manière suivante. On choisit pour u_0 un entier strictement positif, puis on calcule les termes successivement ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si u_n est pair, on pose $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ et sinon, on pose $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Par exemple, pour $u_0 = 10$, on obtient les termes successifs :

$$10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...$$

Exercice 5 Écrire une fonction Python qui prenne en argument un entier strictement positif représentant u_0 et calcule les termes successifs de la suite de Syracuse correspondante jusqu'à ce que $u_n = 1$ ou $n \geq 10^6$ et la tester sur différentes conditions initiales.

On ne connaît aucune formule donnant le terme général de cette suite. Dans ce qui suit, on va se consacrer au contraire à des suites dont on pourra exprimer le terme général à l'aide d'une formule.

2 Suites arithmétiques et suites géométriques

On rappelle ici brièvement les définitions et propriétés vues au Lycée.

Définition 6 Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* ssi

$$\exists r \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r.$$

Cela signifie qu'on passe d'un terme au suivant en rajoutant une quantité constante r qui s'appelle la *raison* de cette suite arithmétique.

Une récurrence immédiate donne alors le terme général d'une telle suite en fonction du premier terme et de la raison :

Proposition 7 *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. On a alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\,r.$$

Exemples 8

- Les suites de termes généraux $n+42$, $3-(2-4\mathrm{i})n$, $\mathrm{i}(n+1)$, π, $\ln(2^n\pi)$ sont des suites arithmétiques de premiers termes respectifs 42, 3, i, π, $\ln(\pi)$ et de raisons respectives 1, $-2+4\mathrm{i}$, i, 0, $\ln(2)$.
- Les suites de termes généraux $1+n\sin(n)$, $2+n^2$ ne sont pas arithmétiques.
- La suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\mathrm{i})$ est arithmétique mais celle définie par $v_0 = b \in \mathbb{C}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + n)$ ne l'est pas.

Définition 9 Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* ssi

$$\exists q \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q\,u_n.$$

Cela signifie qu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par une quantité constante q qui s'appelle la *raison* de cette suite géométrique.

Une récurrence immédiate donne alors le terme général d'une telle suite en fonction du premier terme et de la raison :

Proposition 10 *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On a alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0.$$

Exemples 11

- Les suites de termes généraux $(2\mathrm{i})^n$, $\dfrac{21}{2^{n-1}}$, $(-1)^{n+1}$, π, $\exp((3+\mathrm{i})n+4)$, $\cos(n\pi)$, $u_n = 5$ si $n = 0$ et 0 si $n \geq 1$ sont des suites géométriques de premiers termes respectifs 1, 42, -1, π, e^4, 1, 5 et de raisons respectives $2\mathrm{i}$, $\frac{1}{2}$, -1, 1, $\exp(3+\mathrm{i})$, -1, 0.
- Les suites de termes généraux $(n+\mathrm{i})^n$, 2^n+1 ne sont pas géométriques.
- La suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n)$ est géométrique mais celle définie par $v_0 = b \in \mathbb{C}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = n^2 v_n\right)$ ne l'est pas.

3 Suites arithmético-géométriques

On définit ici une classe de suites qui englobe les deux classes précédentes en les enrichissant.

Définition 12 Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* ssi

$$\exists a, b \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

Cela signifie qu'on passe d'un terme au suivant en multipliant **d'abord** par une quantité constante a qui s'appelle la *raison géométrique* de cette suite, **puis** en additionnant une quantité constante b qui s'appelle la *raison arithmétique* de cette suite.

Exemples 13

— La suite définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 3)$ est arithmético-géométrique.

— Un suite est arithmétique de raison r si et seulement si elle est arithmético-géométrique de raison géométrique 1 et de raison arithmétique r.

— Un suite est géométrique de raison q si et seulement si elle est arithmético-géométrique de raison géométrique q et de raison arithmétique 0.

Proposition 14 *Le terme général d'une suite arithmético-géométrique (u_n) de raison géométrique a est exprimable au moyen d'une formule.*

Plus précisément :

— *si $a = 1$, cette suite est arithmétique et on sait déjà exprimer son terme général.*

— *si $a \neq 1$, en notant ℓ l'unique* ***point fixe*** *de la relation de récurrence, i.e. l'unique nombre vérifiant $\boxed{\ell = a\ell + b}$, la suite de terme général $\boxed{v_n = u_n - \ell}$ est géométrique de raison a, ce qui permet d'exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.*

Démonstration: Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de raison géométrique $a \neq 1$ et de raison arithmétique b. L'unique point fixe de la relation de récurrence est $\ell = \frac{b}{1-a}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (a\,u_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = a\,v_n,$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison a. On a ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^n v_0$, *i.e.* $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$, soit

$$u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell) \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{b}{1-a}.$$

□

Il faut savoir appliquer cette **méthode** dans des cas explicites, comme dans l'exercice-type suivant.

Exercice 15 Calculer le terme général de la suite définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 3)$.

Cette suite est une suite arithmético-géométrique qui n'est pas arithmétique, car sa raison géométrique est $-1 \neq 1$. La relation de récurrence admet donc un unique point fixe ℓ donné par

$$\ell = -\ell + 3 \iff 2\ell = 3 \iff \ell = \frac{3}{2}.$$

On sait par la proposition précédente que la suite $\left(u_n - \frac{3}{2}\right)$ est géométrique de raison -1 et son premier terme est $u_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3+(-1)^n}{2}.}$$

On peut remarquer que cette suite ne prend que deux valeurs : ses termes d'indices pairs valent 2 et ses termes d'indices impairs valent 1. Cependant, en général, une suite arithmético-géométrique prend un nombre infini de valeurs.

Exercice 16 On peut compléter la remarque ci-dessus en cherchant une condition nécessaire et suffisante sur ses raisons pour qu'une suite arithmético-géométrique ne prenne qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 17 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1 + \mathrm{i}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \mathrm{j}\, v_n + \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer son terme général. On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(Réponse : $v_n = \mathrm{i} + \mathrm{j}^n$.)

4 Récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

On se donne ici deux constantes $a, b \in \mathbb{K}$ et on veut décrire les suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence double suivante

$$(H): \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, u_n = a\, u_{n-1} + b\, u_{n-2}.$$

On appellera ces suites les *solutions* de (H).

Exemple 18 La fameuse suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $(\forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2})$. Ses premiers termes sont

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, \ldots$$

On peut remarquer la croissance forte de cette suite, qui semble plutôt de *type exponentiel*, ce qui sera confirmé par la suite.

Définition 19 Une telle relation de récurrence (H) est appelée *récurrence linéaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

Remarquons d'abord que la suite nulle vérifie (H).

Si l'on cherche les suites non nulles vérifiant (H) qui sont géométriques de raison r, la relation de récurrence au rang 2 assure que r vérifie l'équation (C) : $r^2 - a\,r - b = 0$. Réciproquement, si $r \in \mathbb{K}$ vérifie (C), alors, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, en multipliant (C) par r^{n-2}, on obtient $r^n = a\, r^{n-1} + b\, r^{n-2}$, donc toute suite géométrique de raison r vérifie (H).

Autrement dit, la résolution de l'équation (C) permet de trouver toutes les suites géométriques qui vérifient (H).

Définition 20 Cette équation (C) s'appelle l'*équation caractéristique* de la récurrence (H).

On démontrera dans le cours sur les espaces vectoriels les résultats suivants, qui permettent de décrire toutes les suites solutions de la récurrence (H).

Théorème 21 ***Cas complexe (*** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ***).*** *On sait que l'équation caractéristique* (C) *a toujours des solutions (car polynomiale de degré* 2 *sur* $\mathbb{C}$*) et*

— *Si* (C) *a deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2*, alors les solutions de* (H) *sont les suites de la forme* $\left(\lambda r_1^n + \mu r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* λ *et* μ *sont deux constantes complexes.*

— *Si* (C) *a une solution double* r_0*, alors les solutions de* (H) *sont les suites de la forme* $\left((\lambda + \mu n) r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* λ *et* μ *sont deux constantes complexes.*

Théorème 22 ***Cas réel (*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ***).***

— *Si* (C) *a deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, alors les solutions de* (H) *sont les suites de la forme* $\left(\lambda r_1^n + \mu r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* λ *et* μ *sont deux constantes réelles.*

— *Si* (C) *a une solution double* r_0*, alors les solutions de* (H) *sont les suites de la forme* $\left((\lambda + \mu n) r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* λ *et* μ *sont deux constantes réelles.*

— *Si* (C) *a deux solutions complexes conjuguées non réelles, alors on les met sous forme trigonométrique :* $\rho e^{\pm i\theta}$ *(*$\rho > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$*) et les solutions de* (H) *sont les suites de la forme* $((\lambda \cos(\theta n) + \mu \sin(\theta n)) \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* λ *et* μ *sont deux constantes réelles.*
Par des formules de trigonométrie, ces solutions s'écrivent aussi $(A\rho^n \cos(\theta n + \varphi))_{n\in\mathbb{N}}$*, où* A *et* φ *sont deux constantes réelles.*

Méthode pratique. Si on cherche à exprimer le terme général d'une suite particulière définie par ses deux premiers termes et une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

1. On résout l'équation caractéristique associée, ce qui donne la forme des solutions par l'un des deux théorèmes ci-dessus. Pour le cas complexe, on utilise la méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes qui est exposée et démontrée dans le chapitre sur les nombres complexes et qu'on voit en "avant-première" dans un des exemples ci-dessous.
2. On détermine les deux constantes en résolvant le système des deux équations à deux inconnues données par la connaissance des deux premiers termes.

On traite dans la suite des exemples des différents cas.

Exemple 23 Calculons le terme général de la suite de Fibonacci. Cette suite réelle est définie par un récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique associée est (C) : $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant vaut 5 et elle a donc deux racines réelles $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (appelé le *nombre d'or*) et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. En appliquant le théorème de résolution ci-dessus, on sait donc qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \lambda \varphi^n + \mu (\varphi')^n.$$

Comme $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on obtient alors le système d'inconnues λ et μ :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \lambda & +\mu & = & 0 \\ \varphi\lambda & +\varphi'\mu & = & 1 \end{array} \right.$$

dont la résolution fournit (par exemple en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - \varphi' L_1$ puis en utilisant L_1)

$$\lambda = \frac{1}{\varphi - \varphi'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu = -\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

Exemple 24 Déterminons le terme général de la suite complexe (u_n) définie par $u_0=2$, $u_1=\sqrt{3}$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\sqrt{3}u_{n+1}-\mathrm{i}\,u_n\right)$. Cette relation étant linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, on résout l'équation caractéristique (C) : $r^2-\sqrt{3}r+\mathrm{i}=0$.
Son discriminant est $\Delta=3-4\mathrm{i}$. On en cherche alors une racine carrée par la méthode usuelle, qui consiste à **rajouter une équation pour simplifier la résolution** : pour $x,y\in\mathbb{R}$,

$$(x+\mathrm{i}y)^2=3-4\mathrm{i}\iff\left\{\begin{array}{lcl}x^2-y^2&=&3\\2xy&=&-4\\x^2+y^2&=&\sqrt{3^2+4^2}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x^2&=&4\\y^2&=&1\\xy&=&-2\end{array}\right.$$

dont les solutions sont $(2,-1)$ et $(-2,1)$. Ainsi une racine carrée de Δ est par exemple $2-\mathrm{i}$ et les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-\frac{\mathrm{i}}{2}\quad\text{et}\quad r_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

Par le théorème précédent, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que $\left(\forall n\in\mathbb{N},\, u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n\right)$. Les conditions initiales $u_0=2$ et $u_1=\sqrt{3}$ fournissent alors le système :

$$\left\{\begin{array}{llcl}\lambda&+\mu&=&2\\r_1\lambda&+r_2\mu&=&\sqrt{3}\end{array}\right.$$

dont la résolution donne $\lambda=\mu=1$. Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n+\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n.}$$

Exemple 25 Déterminons le terme général de la suite réelle (v_n) définie par $v_0=3$, $v_1=-2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^\star, v_{n+1}=-4(v_n+v_{n-1}))$. Cette relation étant linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, on résout l'équation caractéristique (C) : $r^2+4r+4=0$, qui s'écrit $(r+2)^2=0$ et admet donc -2 comme racine double. Par le théorème précèdent, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=(\lambda+\mu n)(-2)^n$. Les conditions initiales $v_0=3$ et $v_1=-2$ fournissent alors le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda&=&3\\-2(\lambda+\mu)&=&-2\end{array}\right.$$

dont la résolution donne $\lambda=3$ et $\mu=-2$. Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=(3-2n)(-2)^n.}$

Exemple 26 Déterminons le terme général de la suite réelle (w_n) définie par $w_0=42$, $w_1=0$ et $(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, w_n=2w_{n-1}-2w_{n-2})$. Cette relation étant linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, on résout l'équation caractéristique (C) : $r^2-2r+2=0$, dont la résolution habituelle fournit les deux racines complexes non réelles conjuguées $1\pm\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Par le théorème précèdent, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) 2^{\frac{n}{2}}\right)$. Les conditions initiales $w_0 = 42$ et $w_1 = 0$ fournissent alors le système :

$$\begin{cases} \lambda & = 42 \\ \lambda + \mu & = 0 \end{cases}$$

dont la résolution donne $\lambda = 42$ et $\mu = -42$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 42\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) 2^{\frac{n}{2}} = 42\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) 2^{\frac{n+1}{2}}$$

et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 42\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) 2^{\frac{n+1}{2}}.}$

II Symboles $\sum$

1 Notion de famille

Soit I un ensemble (fini ou infini). Une *famille u d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I* est une "machine" qui associe à chaque élément i de I un nombre $u_i \in \mathbb{K}$. On note cette famille $u = (u_i)_{i\in I}$. On la note aussi parfois $i \longmapsto u_i$, de manière analogue aux fonctions. Évidemment, la famille, l'ensemble des indices et les indices peuvent être notés autrement, par exemple $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$,...

On dira que la famille est *finie* (resp. *infinie*) si l'ensemble I est fini (resp. infini).

Remarque 27 Un famille est encore un cas particulier d'*application* : c'est une application de I vers $\mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I, notation qui trouvera son explication dans le chapitre ultérieur concernant les *applications*.

Exemples 28

- Les suites sont des familles indexées par $\mathbb{N}$. Une telle famille est dite infinie, même dans le cas où l'ensemble des valeurs prises par cette suite $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est lui fini (par exemple dans le cas d'une suite constante ou périodique).
- Une famille finie est souvent indexée par un intervalle d'entiers $[\![p,q]\!]$: $(u_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$, aussi notée $(u_i)_{p\leq i\leq q}$ ou $(u_i)_{i=p}^{q}$. Par exemple, $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k=0}^{n-1}$ est une famille finie à n termes.
- Le paramétrage classique de l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 fournit la famille (infinie) $\left(e^{it}\right)_{t\in\mathbb{R}}$.
- En prenant $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$, on peut poser, pour $X \in \mathcal{E}$, $v_X = \mathrm{Card}(X)$ et on obtient une famille de naturels indexée par $\mathcal{E}$: $(v_X)_{X\in\mathcal{E}}$.

Remarque 29 Bien noter qu'une famille indexée par l'intervalle d'entiers $[\![p,q]\!]$ a $q-p+1$ termes !

Remarque 30 Si $u = (u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que l'ensemble $\{i \in I | u_i \neq 0\}$ est fini, on dit que la famille u est *presque nulle*. On pourrait alors définir la somme des termes de cette famille et faisant la somme de tous ses termes non nuls. Cependant, dans ce chapitre, nous nous restreindrons aux cas des familles finies.

2 Somme d'une famille finie de nombres

Définition 31 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **finie** d'éléments de $\mathbb{K}$. On note alors

$$\sum_{i\in I} u_i$$

le nombre obtenu en faisant la somme de tous les u_i, pour i variant dans I.
Si $I = [\![p,q]\!]$ est un intervalle d'entiers, on note aussi cette somme

$$\sum_{p\leq i\leq q} u_i = \sum_{i=p}^{q} u_i = u_p + \cdots + u_q.$$

(La notation avec les petits points, qu'on utilisera peu, est appelée *notation en extension*.)
Cas particulier important : lorsque $I = \emptyset$ (on parle alors de "somme vide"), on pose

$$\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0,$$

ce qui est **cohérent** avec les opérations de découpage de sommes qu'on verra par la suite.

Remarque 32 Dans le texte typographié, il arrive qu'on écrive, pour des raisons de place et/ou de lisibilité, $\sum_{i\in I} u_i$, $\sum_{i=p}^{q} u_i$,... mais on s'abstiendra d'utiliser cette notation avec l'écriture manuscrite.

Exemple 33 Pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = -1$ (pourquoi ?).

Remarque 34 Attention, dans un telle somme, une même valeur peut apparaître plusieurs fois lorsque deux termes d'indices différents sont égaux. Par exemple,

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k = 1.$$

Remarque 35 Il se peut aussi que les termes de la famille ne dépendent pas de l'indice : pour deux entiers $p \leq q$,

$$\sum_{k=p}^{q} 1 = q - p + 1.$$

Plus généralement, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est constante, *i.e.* s'il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in I$, $u_i = C$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \mathrm{Card}\,(I) \cdot C.$$

Remarque 36 Si $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite et $n \in \mathbb{N}$, la quantité

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$$

dépend de n mais pas du tout de p : p est un variable **muette** qui n'a pas de visibilité à l'extérieur de la somme. On pourrait lui donner le nom qu'on veut (excepté n ou u...). Par exemple

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exercice 37 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer et comparer les deux sommes $\sum_{k=0}^{n} n$ et $\sum_{k=0}^{n} k$.

Remarque 38 Dans le cas des intervalles d'entiers, la variable de somme varie toujours en ordre croissant. En particulier, si la borne inférieure et strictement plus grande que la borne supérieure, l'intervalle d'entier est vide et la somme est nulle. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{0} k = 0 \neq 1 = \sum_{k=0}^{1} k.$$

Exercice 39 Montrer que, dans le dernier exemple du point 28, $\sum_{X \in \mathcal{E}} v_X = 12$.

Vous aurez plus tard les moyens de calculer $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X)$, lorsque $\operatorname{Card}(E) = n \in \mathbb{N}$.

3 Propriétés des sommes

Il est utile d'imaginer les sommes comme des versions "finies" des intégrales. À ce titre, elle vérifient les même propriétés de base qu'il est bon de connaître. En outre, ce sont des résultats naturels et quasiment évidents.

Proposition 40 *(**Linéarité**) Si on a deux familles finies $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par le même ensemble I, et deux "scalaires" $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors*

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration: C'est une conséquence immédiate de l'associativité et la commutativité de l'addition d'abord, puis de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. □

Proposition 41 *(**Positivité**) Si on a une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, alors*

$$\sum_{i\in I} u_i \geq 0$$

et il y a égalité si et seulement si tous les u_i sont nuls.

Démonstration: C'est une conséquence directe de la compatibilité de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ avec l'addition. □

Comme conséquence de la linéarité et de la positivité, on a la croissance :

Proposition 42 *(**Croissance**) Si on a deux familles finies $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ indexées par le même ensemble I, alors*

$$(\forall i \in I, u_i \leq v_i) \Longrightarrow \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

De plus, si on suppose $(\forall i \in I, u_i \leq v_i)$, alors l'égalité des sommes entraîne celle des familles.

Dans les cas réel et complexe, on a l'inégalité triangulaire (qui s'obtient par récurrence immédiate à partir du cas de deux nombres, démontré en détail dans le chapitre sur les nombres complexes pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et celui sur les inégalités pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Proposition 43 **(Inégalité triangulaire)** *Si on a une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, alors*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|.$$

L'analogue de la relation de Chasles consiste ici en un découpage de somme, qui résulte directement de l'associativité de l'addition :

Proposition 44 **(Relation de Chasles)** *Soient I et J deux ensembles finis et* ***disjoints*** *et $(u_i)_{i\in I\sqcup J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par la réunion disjointe $I \sqcup J$. Alors*

$$\sum_{i\in I\sqcup J} u_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in J} u_i.$$

En particulier, si $I = [\![p, q-1]\!]$ et $J = [\![q, r]\!]$, on obtient

$$\sum_{i=p}^{r} u_i = \sum_{i=p}^{q-1} u_i + \sum_{i=q}^{r} u_i.$$

Remarque 45 Pour pouvoir écrire cette propriété dans le cas où l'un des ensembles est vide, il est nécessaire d'avoir pris la convention qu'une somme vide est nulle : si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de $\mathbb{K}$, alors $I = I \sqcup \emptyset$, donc $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in\emptyset} u_i$, ce qui n'est vrai que si $\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0$.

Une récurrence immédiate fournit la généralisation à un nombre quelconque d'ensembles d'indices disjoints :

Proposition 46 **(Sommation par paquets)** *Soient $I_1, \ldots, I_k$ des ensembles finis et* ***disjoints*** *et $(u_i)_{i\in\bigsqcup_{j=1}^k I_j}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par la réunion disjointe $\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j$. Alors*

$$\sum_{i\in\bigsqcup_{j=1}^k I_j} u_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in I_j} u_i.$$

4 Exemples de changements d'indices et sommes télescopiques

Imaginons qu'on veuille calculer la somme

$$S_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} 2^k,$$

pour $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$, en connaissant seulement la formule suivante (qu'on rappellera par la suite dans le cadre général) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

On se ramène alors à la somme connue en mettant d'abord en facteur une puissance judicieuse de 2 dans $S_{p,q}$:

$$S_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^p \sum_{k=p}^{q} 2^{k-p},$$

puis en effectuant ce qu'on appelle un changement d'indice : on fait correspondre à chaque $k \in [\![p,q]\!]$ l'entier $i = k-p \in [\![0,q-p]\!]$. Remarquons que chaque $i \in [\![0,q-p]\!]$ provient d'un et un seul $k \in [\![p,q]\!]$ (en terme d'applications, nous appellerons cela une bijection). Ainsi, sommer sur les indices k revient à sommer sur les indices i et on obtient, par **le changement d'indices** $k = i+p$:

$$S_{p,q} = 2^p \sum_{k=p}^{q} 2^{k-p} = 2^p \sum_{i=0}^{q-p} 2^i = 2^p T_{q-p} = 2^p(2^{q-p+1}-1) = 2^{q+1} - 2^p.$$

Imaginons maintenant qu'on veuille calculer la somme

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} k,$$

pour $n \in \mathbb{N}$, sans connaissance préalable des suites arithmétiques. On remarque que si on somme le premier et le dernier terme de la somme, on obtient la même chose que si on somme le deuxième et l'avant dernier, *etc*. Ainsi, on peut exprimer $2U_n$ comme une somme de termes constants, ce qu'on sait calculer. Pour effectuer cela “rigoureusement”, on effectue **le changement d'indices** $k = n-i+1$ en remarquant que lorsque k varie de 1 à n, alors $i = n-k+1$ varie de n à 1 :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1).$$

On se sert ensuite du fait que la variable est muette pour écrire

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1).$$

On a alors

$$2U_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k+(n-k+1)) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1),$$

donc

$$U_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Un autre cas très important en pratique et le suivant : on somme des termes qui peuvent se mettre sous forme de différences de termes successifs d'une suite, la somme se simplifie ainsi :

Proposition 47 **(*Simplification télescopique.*)** *Soient $p,q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$ et $(u_k)_{k=p}^{q}$ une famille de nombres. On a*

$$\sum_{k=p}^{q-1} (u_{k+1} - u_k) = u_q - u_p$$

et donc aussi

$$\sum_{k=p}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_q.$$

Démonstration: On peut voir cela en extension, en écrivant la somme dans l'ordre des indices décroissants :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q-1}(u_{k+1}-u_k) &= (u_q-u_{q-1})+(u_{q-1}-u_{q-2})+\cdots+(u_{p+1}-u_p) \\
&= u_q+(-u_{q-1}+u_{q-1})+(-u_{q-2}+u_{q-2})+\cdots+(-u_{p+1}+u_{p+1})-u_p \\
&= u_q-u_p.
\end{aligned}$$

Une démonstration plus "rigoureuse" se fait à l'aide du changement d'indice $k=j-1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q-1}(u_{k+1}-u_k) &= \sum_{k=p}^{q-1}u_{k+1}-\sum_{k=p}^{q-1}u_k \\
&= \sum_{j=p+1}^{q}u_j-\sum_{k=p}^{q-1}u_k \\
&= \sum_{k=p+1}^{q}u_k-\sum_{k=p}^{q-1}u_k \\
&= \sum_{k=p+1}^{q-1}u_k+u_q-u_p-\sum_{k=p+1}^{q-1}u_k \\
&= u_q-u_p.
\end{aligned}$$

□

Exemples 48

1. Il faut absolument reconnaître l'exemple suivant quand il se présente. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

2. La différence peut aussi provenir du logarithme d'un quotient :

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(i+1)-\ln(i))=\ln(n+1).$$

Exercice 49 Déduire des deux résultats précédents, par des majorations, que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=+\infty \quad \text{et} \quad \left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

(Pour la première limite, on pourra utiliser le fait que pour tout $h>-1$, $\ln(1+h)\leq h$ et pour la seconde, penser à faire un décalage d'indice.)

5 Sommes doubles et interversions

On se place ici dans le cas où l'ensemble des indices de la famille est un ensemble de couples (i, j). Un terme $u_{(i,j)}$ est alors noté plus simplement $u_{i,j}$. Pour les démonstrations des deux propositions, on se limite à un argument graphique, mais on pourrait expliciter ces démonstrations en utilisant la sommation par paquets vue précédemment.

Exemple 50 On considère la famille u définie par $\left(\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], u_{i,j} = i + j^2\right)$. Représenter l'ensemble des indices comme une partie du plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque 51 On verra plus tard qu'une famille de nombres indexée par un ensemble produit du type $[\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, comme celle de l'exemple précédent, est appelé une *matrice*, et ses termes sont appelés ses *coefficients*.

Dans le cas où l'ensemble des indices est un produit cartésien comme ci-dessus, la somme des termes de la famille s'appelle une *somme rectangulaire* et peut s'écrire comme une somme double (*i.e.* deux sommes successives) :

Proposition 52 ***(Somme rectangulaire et permutation des $\sum$)***
Soient I et J deux ensembles finis et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Dans le cas particulier où $I = [\![m,n]\!]$ et $J = [\![p,q]\!]$, cela donne

$$\sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} u_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} u_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} u_{i,j}.$$

Si de plus $m = p$ et $n = q$, on note aussi cette somme $\displaystyle\sum_{p\leq i,j\leq q} u_{i,j}$.

Démonstration: On utilise la sommation par paquets relative à l'union disjointe

$$I\times J = \bigsqcup_{i'\in I} \left(\{i'\}\times J\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} &= \sum_{i'\in I}\ \sum_{(i,j)\in\{i'\}\times J} u_{i,j}\\
&= \sum_{i'\in I}\sum_{j\in J} u_{i',j}\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j}.
\end{aligned}$$

L'autre égalité est laissée en exercice. □

Remarque 53 Sur un dessin dans le plan de l'ensemble des indices (comme celui effectué dans l'exemple précédent), la première égalité revient à sommer d'abord chaque "colonne", puis faire la somme des sommes ainsi obtenues, tandis que la deuxième revient à sommer d'abord chaque "ligne", puis faire la somme des sommes ainsi obtenues.

Exemples 54

1. Le résultat ci-dessus donne

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}} (i+j) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(i+j) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} i+\sum_{j=1}^{q} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(qi+\frac{q(q+1)}{2}\right) \\
&= q\left(\sum_{i=1}^{p} i\right)+\frac{q(q+1)}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} 1\right) \\
&= q\frac{p(p+1)}{2}+p\frac{q(q+1)}{2} \\
&= \frac{pq(p+q+2)}{2}.
\end{aligned}$$

2. Si le terme $v_{i,j}$ d'une somme rectangulaire s'exprime comme un produit d'un facteur ne dépendant que de i par un facteur ne dépendant que de j, alors la somme s'écrit comme un produit de sommes. Considérons le cas de la famille v définie par

$$\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!],\, v_{i,j}=ij.$$

   On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}} ij &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} ij=\sum_{i=1}^{p} i\sum_{j=1}^{q} j=\left(\sum_{i=1}^{p} i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} j\right) \\
&= \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)\left(\frac{q(q+1)}{2}\right)=\frac{pq(p+1)(q+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Il arrive cependant fréquemment que l'ensemble des indices ne soit pas un produit cartésien. Voici un proposition qui traite le cas des ensembles d'indices "triangulaires".

***Proposition 55** (Sommes triangulaires et permutation des $\sum$)*
Soient $p,q\in\mathbb{Z}$ tels que $p\le q$.
Si $(u_{i,j})_{p\le i\le j\le q}$ est une famille de nombres indexée par $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\le i\le j\le q\right\}$, alors

$$\sum_{p\le i\le j\le q} u_{i,j}=\sum_{i=p}^{q}\sum_{j=i}^{q} u_{i,j}=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=p}^{j} u_{i,j}.$$

Si $(u_{i,j})_{p\leq i<j\leq q}$ est une famille de nombres indexée par $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\leq i<j\leq q\right\}$, alors

$$\sum_{p\leq i<j\leq q} u_{i,j} = \sum_{i=p}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q} u_{i,j} \left(=\sum_{i=p}^{q}\sum_{j=i+1}^{q} u_{i,j}\right) = \sum_{j=p+1}^{q}\sum_{i=p}^{j-1} u_{i,j} \left(=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=p}^{j-1} u_{i,j}\right).$$

Démonstration: Elle se ferait par sommation par paquets comme pour la proposition précédente. Les paquets (correspondant aux lignes ou aux colonnes) sont juste un peu plus techniques à écrire. C'est un très bon exercice. □

Remarque 56 Les deux ensembles $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\leq i\leq j\leq q\right\}$ et $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\leq i<j\leq q\right\}$ sont des parties du "carré" $[\![p,q]\!]^2$ qui sont "triangulaires" (la première contient la "diagonale" et l'autre non). On obtient les égalités ci-dessus en sommant d'abord par colonne, puis en faisant la somme des sommes des colonnes dans un cas, et en sommant d'abord par lignes dans l'autre cas.

Exemple 57 À l'aide de l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on peut calculer (par les deux changements d'indices $j=k+i$ et $i=n-p+1$)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} k = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-1} k = \sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)p}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n} p\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}\end{aligned}$$

Remarque 58 Parfois, l'une des deux expressions en somme double donne un résultat et pas l'autre. Il est donc préférable de réfléchir sans faire explicitement les calculs aux types de sommes qu'on va rencontrer (sont-elles calculables ?). Par ailleurs il arrive fréquemment qu'on trouve au cours d'un calcul une somme double et que l'interversion des signes $\sum$ permette de la calculer.

III Coefficients binomiaux

On définit ici formellement les coefficients binomiaux, déjà introduits précédemment à l'aide du triangle de Pascal, et on démontre la formule du binôme de Newton qu'on avait précédemment admise.

Il est nécessaire pour cela de définir d'abord la factorielle d'un entier naturel :

Définition 59 Pour $n\in\mathbb{N}$, on appelle "factorielle n" et on note $n!$ le nombre défini par

- $0! = 1$
- Si $n>0$, $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$, c'est-à-dire le produit des éléments de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Remarque 60 On introduira à la fin du chapitre une notation $\prod$ pour le produit d'une famille de nombres, analogue du symbole $\sum$ pour les sommes, ce qui donnera $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque 61 Attention, le signe ! est **prioritaire** par rapport aux opérations arithmétiques usuelles :

$$2+3! = 8 \neq 120 = (2+3)!, \quad 2\times 3! = 12 \neq 720 = (2\times 3)! \quad \text{et} \quad \forall n \neq 1, 2n! \neq (2n)!.$$

Exemples 62 Les factorielles des premiers entiers naturels sont

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...$$

Cela permet de définir les coefficients binomiaux :

Définition 63 Pour $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, on définit le coefficient binomial appelé "k parmi n" et noté $\binom{n}{k}$ de la manière suivante :

— Si $k \notin [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$;

— Si $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$.

Exemples 64

$$\binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{3!} = 35, \ \binom{0}{0} = 1, \ \binom{100}{0} = 1, \ \binom{100}{100} = 1, \ \binom{100}{99} = 100, \ \binom{0}{5} = 0, \ \binom{5}{-1} = 0.$$

Remarque 65 Dans le calcul de $\displaystyle\binom{7}{3}$, il serait **très peu efficace** de calculer 3!, 4! et 7! puis $\frac{7!}{3!4!}$.

En général on représente l'ensemble des valeurs dans le plan en prenant k en abscisse et n en ordonnée, avec l'axe des ordonnées orienté vers le bas, ce qui nous donne le triangle de Pascal :

k \ n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	...	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	...	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	...	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	...	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	...	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	...	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	...	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	...	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	...	0	0	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 66

1. *(Premières valeurs)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \binom{n}{0} = 1 \ \text{ et } \ \binom{n}{1} = n \ \text{ et } \ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. *(Symétrie)*

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}, \ \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

3. *(Formule de Pascal)*

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

4. *(Intégrité)*

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Démonstration: Les premières valeurs et la symétrie s'obtiennent immédiatement avec la formule définissant les coefficients binomiaux.

On montre la formule de Pascal en considérant différents cas de figure et l'intégrité s'obtient alors par récurrence, avec un choix judicieux de l'assertion de récurrence. $\bigoplus$ □

Les coefficients binomiaux permettent de généraliser l'identité remarquable classique donnant le carré d'une somme :

Théorème 67 ***(Formule du binôme de Newton)***

$$\forall a,b \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \left(= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right).$$

Démonstration: Soient $a,b \in \mathbb{K}$ fixés. On démontre alors la formule par récurrence sur n en posant, pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion de récurrence $\mathcal{A}_n$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
Indication : Pour l'hérédité, partager en deux sommes et changer l'indice de l'une pour obtenir dans chaque somme des termes en $a^{n+1-k}b^k$. Il est aussi utile de se servir de la convention étendant les binomiaux à $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. $\bigoplus$ □

Exemple 68 Pour linéariser $\cos^7 x$, on utilise la formule d'Euler et on développe $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^7$ par la formule du binôme. Comme il nous faut tous les coefficients $\binom{7}{k}$, le plus rapide est de reconstruire le triangle de Pascal à l'aide de la formule éponyme.

Remarque 69 Lorsqu'on voit apparaître dans un calcul une somme avec des coefficients binomiaux, on peut la plupart du temps se ramener à la formule de Newton, même si les nombres a et b ne sont pas apparents. Il faut ainsi absolument retenir les résultats suivants et leur preuve.

Proposition 70 $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

Démonstration: $\bigoplus$ □

Proposition 71 $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Démonstration: $\bigoplus$ □

IV Quelques formules à connaître

1 Formule de Bernoulli

Voici d'abord une généralisation de l'identité remarquable "$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$" :

Proposition 72 *(Formule de Bernoulli)*

$$\begin{aligned} \forall a,b \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \\ &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n). \end{aligned}$$

Démonstration: Cela repose sur une simplification télescopique $\bigoplus$. □

Exemple 73 Pour a et b réels ou complexes, on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Remarque 74 Attention de pas confondre cette formule avec celle du binôme : ici, **il n'y a pas** de coefficients binomiaux.

En prenant $a = 1$ et $b = q \neq 1$ dans la formule de Bernoulli, on obtient l'égalité bien connue

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement, on peut calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Corollaire 75 ***(Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)***
Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $s,t \in \mathbb{N}$ sont tels que $s \leq t$, alors

$$\sum_{k=s}^{t} u_k = \frac{u_s - q\,u_t}{1 - q}.$$

Démonstration: Factoriser la somme par u_s et utiliser la formule de Bernoulli avec $a = 1$ et $b = q$ $\bigoplus$. □

On peut se demander s'il existe une formule analogue pour "$a^{n+1} + b^{n+1}$". Voici quelques pistes :

— Si $n+1$ est **impair** (*i.e.* $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$), alors, en remarquant que $b^{2m+1} = -(-b)^{2m+1}$ et en appliquant la formule de Bernoulli à a et $-b$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall a,b \in \mathbb{K}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad a^{2m+1} + b^{2m+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^{2m-k}b^k \\ &= (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - ab^{2m-1} + b^{2m}). \end{aligned}$$

— Plus généralement, en travaillant dans $\mathbb{C}$ et en prenant ζ une racine $(n+1)$-ième de -1, on a

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \quad a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+1} - (\zeta b)^{n+1} = (a - \zeta b)\sum_{k=0}^{n} \zeta^k \cdot a^{n-k}b^k.$$

Exemples 76

1. Pour a et b réels ou complexes, on a : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
2. Pour a et b complexes, en prenant -1 comme racine cubique de -1, on retrouve le résultat ci-dessus, mais si on prend $-\mathrm{j}^2$, puis $-\mathrm{j}$ comme racine cubique de -1, on obtient les égalités
$$a^3+b^3=(a+\mathrm{j}^2b)(a^2-\mathrm{j}^2ab+\mathrm{j}b^2)=(a+\mathrm{j}b)(a^2-\mathrm{j}ab+\mathrm{j}^2b^2).$$
3. Pour a et b complexes, on a : $a^4+b^4=\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}b\right)\left(a^3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}a^2b+\mathrm{i}ab^2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}b^3\right)$.

2 Sommes de puissances des premiers entiers

On s'intéresse ici au calcul des sommes $S(p,n)=\sum_{k=1}^{n}k^p$ pour $n,p\in\mathbb{N}$.

On a déjà vu précédemment le cas $p=0$ et démontré dans la sous-section 4 de la section II sur les sommes le résultat pour $p=1$:

Proposition 77 $\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=1}^{n}1=n\quad \text{et}\quad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$

On en déduit la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Corollaire 78 ***(Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)***
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r\in\mathbb{K}$ et $s,t\in\mathbb{N}$ sont tels que $s\leq t$, alors
$$\sum_{k=s}^{t}u_k=(t-s+1)\frac{u_s+u_t}{2}.$$
(i.e. le nombre de termes multiplié par la moyenne arithmétique du premier et du dernier terme.)

Démonstration: On soustrait u_s à chaque terme de la somme, on factorise par r et on utilise la formule ci-dessus $\bigoplus$. □

Pour les $p\geq 2$, on peut calculer, pour $n\in\mathbb{N}$, la somme $S(p,n)$ en fonction des $S(q,n)$, $q<p$ par la méthode suivante. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on écrit, en utilisant la formule du binôme de Newton,
$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=\sum_{q=0}^{p+1}\binom{p+1}{q}k^q-k^{p+1}=\sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q}k^q$$
ce qui donne en sommant sur k, par somme télescopique,
$$(n+1)^{p+1}-1=\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q}k^q=\sum_{q=0}^{p}\sum_{k=1}^{n}\binom{p+1}{q}k^q=\sum_{q=0}^{p}\binom{p+1}{q}S(q,n).$$
Ainsi, comme $\binom{p+1}{p}=p+1$,
$$S(p,n)=\frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-1-\sum_{q=0}^{p-1}\binom{p+1}{q}S(q,n)\right).$$

Par exemple, on obtient

$$\begin{array}{rcl} S(2,n) & = & \frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-S(0,n)-3S(1,n)\right) \\ , & = & \frac{1}{6}\left(2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)\right) \\ & = & \frac{(n+1)\left(2n^2+4n+2-2-3n\right)}{6} \\ & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}$$

On peut aussi retenir le prochain résultat, donné, avec celui-ci dans la

Proposition 79 $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left(=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right)$

V Symboles $\prod$

1 Produit d'une famille finie de nombres

Définition 80 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **finie** d'éléments de $\mathbb{K}$. On note alors

$$\prod_{i\in I} u_i$$

le nombre obtenu en faisant le produit de tous les u_i, pour i variant dans I. Si $I=[\![p,q]\!]$ est un intervalle d'entiers, on note aussi ce produit

$$\prod_{p\leq i\leq q} u_i=\prod_{i=p}^{q} u_i=u_p\times\cdots\times u_q.$$

Cas particulier important : lorsque $I=\emptyset$ (on parle alors de "produit vide"), on pose

$$\prod_{i\in\emptyset} u_i=1,$$

ce qui est cohérent avec les opérations de découpage de produits qu'on verra par la suite.

Exemples 81

1. On a, par définition, pour $n\in\mathbb{N}$, $n!=\prod_{k=1}^{n} k$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$, $\prod_{j=k+1}^{n} j=\frac{n!}{k!}$ et $\prod_{j=n-k+1}^{n} j=\frac{n!}{(n-k)!}$.
3. On a aussi, pour $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n n!$.
4. On en déduit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)=\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Remarque 82 Il se peut aussi que les termes de la famille ne dépendent pas de l'indice : pour deux entiers $p \leq q$,

$$\prod_{k=p}^{q} 2 = 2^{q-p+1}.$$

Plus généralement, si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est constante, *i.e.* s'il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in I$, $u_i = C$, alors

$$\prod_{i \in I} u_i = C^{\mathrm{Card}\,(I)}.$$

Remarque 83 Lorsque les facteurs d'un produit sont strictement positifs, on peut se ramener à une somme en en prenant le logarithme. On peut aussi transformer une somme en produit en en prenant l'exponentielle, mais cela sert moins fréquemment.

2 Propriétés des produits

Remarque 84 Contrairement aux sommes, les produits ne vérifient **pas de linéarité**. Par exemple, dès que $n \geq 2$,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \neq 1 = 0 + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} 2k + \prod_{k=0}^{n-1} 1$$

et

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \cdot n! \neq 2 \cdot n! = 2\prod_{k=1}^{n} k.$$

en revanche, on a les propriétés suivantes.

Proposition 85 *Si on a deux familles finies d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par le même ensemble $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$, alors*

$$\prod_{i \in I}(u_i v_i) = \left(\prod_{i \in I} u_i\right)\left(\prod_{i \in I} v_i\right).$$

En particulier, si on a une famille finie $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\prod_{i \in I}(\lambda u_i) = \lambda^{\mathrm{Card}\,(I)} \prod_{i \in I} u_i.$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et si on suppose de plus que les u_i sont strictement positifs ou que $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$$\prod_{i \in I} u_i^{\alpha} = \left(\prod_{i \in I} u_i\right)^{\alpha}.$$

Démonstration: Les deux premières sont des conséquences immédiates de l'associativité et de la commutativité de la multiplication. La dernière aussi dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$ et sinon elle est due aux propriétés de la fonction exponentielle complexe, puisque $u_i^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(u_i))$. $\square$

On a de plus les propriétés habituelles des produits :

Proposition 86 ***(Produit nul)*** *Si on a une famille finie $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}$, alors*

$$\prod_{i \in I} u_i = 0 \iff (\exists\, i \in I, u_i = 0)$$

Proposition 87 *(**Positivité**) Si on a une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, alors*

$$\prod_{i\in I} u_i \geq 0$$

et par la proposition précédente, si les u_i sont strictement positifs, alors le produit est strictement positif.

Proposition 88 *(**Croissance**) Si on a deux familles finies $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ indexées par le même ensemble I, alors*

$$(\forall i \in I, 0 \leq u_i \leq v_i) \Longrightarrow \prod_{i\in I} u_i \leq \prod_{i\in I} v_i.$$

De plus, si on suppose que $(\forall i \in I, 0 < u_i \leq v_i)$ et qu'il existe $j \in I$ tel que $u_j < v_j$, l'inégalité entre les produits est stricte.

On peut aussi découper les produits :

Proposition 89 *(**Découpage**) Soient I et J deux ensembles finis et **disjoints** et $(u_i)_{i\in I\sqcup J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par la réunion disjointe $I \sqcup J$. Alors*

$$\prod_{i\in I\sqcup J} u_i = \left(\prod_{i\in I} u_i\right)\left(\prod_{i\in J} u_i\right).$$

En particulier, si $I = [\![p, q-1]\!]$ et $J = [\![q, r]\!]$, on obtient

$$\prod_{i=p}^{r} u_i = \left(\prod_{i=p}^{q-1} u_i\right)\left(\prod_{i=q}^{r} u_i\right).$$

Remarque 90 Pour pouvoir écrire cette propriété dans le cas où l'un des ensembles est vide, il est nécessaire d'avoir pris la convention qu'un produit vide vaut 1 : si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de $\mathbb{K}$, alors $I = I \sqcup \emptyset$, donc $\prod_{i\in I} u_i = \left(\prod_{i\in I} u_i\right)\left(\prod_{i\in\emptyset} u_i\right)$, ce qui n'est vrai que si $\prod_{i\in\emptyset} u_i = 1$.

Une récurrence immédiate fournit la généralisation à un nombre quelconque d'ensembles d'indices disjoints :

Proposition 91 *(**Produit par paquets**) Soient $I_1, \ldots, I_k$ des ensembles finis et **disjoints** et $(u_i)_{i\in\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par la réunion disjointe $\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j$. Alors*

$$\prod_{i\in\bigsqcup_{j=1}^{k} I_j} u_i = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i\in I_j} u_i.$$

3 Exemples de changements d'indices et de produits télescopiques

Voici un exemple d'utilisation des changements d'indices :

Exemple 92 À l'aide des changements d'indice $k = n - j$ et $k = j - n$, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right) &= \frac{1}{n^{2n}}\prod_{k=0}^{n-1}(n^2-k^2) \\
&= \frac{1}{n^{2n}}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1}(n+k)\right) \\
&= \frac{1}{n^{2n}}\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)\left(\prod_{j=n}^{2n-1} j\right) \\
&= \frac{(2n-1)!}{n^{2n-1}}
\end{aligned}$$

Exercice 93 Exprimer la quantité $\left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}k^{n-k+1}\right)^2$ sans symbole $\prod$.

(Réponse : $(n!)^{n+1}$.)

Lorsqu'on multiplie des facteurs qui peuvent se mettre sous forme de quotients de termes successifs d'une suite, le produit se simplifie ainsi :

Proposition 94 ***(Simplification télescopique.)*** *Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$ et $(u_k)_{k=p}^{q}$ une famille de nombres* ***non nuls****. On a*

$$\prod_{k=p}^{q-1}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_q}{u_p}$$

et donc aussi

$$\prod_{k=p}^{q-1}\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_p}{u_q}.$$

Démonstration: La faire en exercice en copiant le changement d'indice utilisé dans le cas des sommes télescopiques. □

Exemple 95

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{2016}\frac{3k-1}{6k+4} &= \frac{1}{2^{2017}}\prod_{k=0}^{2016}\frac{3k-1}{3k+2} \\
&= \frac{1}{2^{2017}}\prod_{k=0}^{2016}\frac{3k-1}{3(k+1)-1} \\
&= \frac{1}{2^{2017}}\cdot\frac{-1}{3\times 2017-1} \\
&= -\frac{1}{2^{2017}\times 6050}
\end{aligned}$$

4 Produits doubles et interversions

Les résultats se démontrent de la même manière que pour les sommes.

Proposition 96 ***(Produit rectangulaire et permutation des $\prod$)***
Soient I et J deux ensembles finis et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors

$$\prod_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \prod_{i\in I}\prod_{j\in J} u_{i,j} = \prod_{j\in J}\prod_{i\in I} u_{i,j}.$$

Dans le cas particulier où $I = [\![m,n]\!]$ et $J = [\![p,q]\!]$, cela donne

$$\prod_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}} u_{i,j} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} u_{i,j} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} u_{i,j}.$$

Proposition 97 ***(Produits triangulaires et permutation des $\prod$)***
Soient $p,q\in\mathbb{Z}$ tels que $p\leq q$.
Si $(u_{i,j})_{p\leq i\leq j\leq q}$ est une famille de nombres indexée par $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\leq i\leq j\leq q\right\}$, alors

$$\prod_{p\leq i\leq j\leq q} u_{i,j} = \prod_{i=p}^{q}\prod_{j=i}^{q} u_{i,j} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=p}^{j} u_{i,j}.$$

Si $(u_{i,j})_{p\leq i< j\leq q}$ est une famille de nombres indexée par $\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 | p\leq i< j\leq q\right\}$, alors

$$\prod_{p\leq i<j\leq q} u_{i,j} = \prod_{i=p}^{q-1}\prod_{j=i+1}^{q} u_{i,j} \left(= \prod_{i=p}^{q}\prod_{j=i+1}^{q} u_{i,j}\right) = \prod_{j=p+1}^{q}\prod_{i=p}^{j-1} u_{i,j} \left(= \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=p}^{j-1} u_{i,j}\right).$$

Exercice 98 Montrer que $\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (ij^2) = (n!)^{3n}$.

Remarque 99 Attention, on ne peut pas permuter les signes $\sum$ et $\prod$: en général,

$$\prod_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} u_{i,j} = (u_{0,0}+u_{0,1})(u_{1,0}+u_{1,1}) \neq u_{0,0}u_{1,0}+u_{0,1}u_{1,1} = \sum_{j=0}^{1}\prod_{i=0}^{1} u_{i,j}$$