T1C8 - Filtrage linéaire

I. Signaux pfériodiques

1. Rappels

Définition :

Soit s(t) un signal périodique de période T :

- Fréquence : $f = \frac{1}{T}$
- Moyenne : $< s >= \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\, dx$
- Amplitude : $S_m = max(s) - < s >$
- Valeur crête a crête $S_{pp} = max(s) - min(s)$
- Valuer efficace $S_{eff} = S_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)\, dx} = \sqrt{< s^2 >}$

2. Théorème de Fourrier

Théorème

Tout signal physique périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ peut s'écrire comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega_k = k\omega$ ou $k \in \mathbb{N}$
Donc,

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Avec a_k et b_k les coefficients de Fourier

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

La fonction $s(t)$ sans a_0 est appelée l'harmonique d’ordre k du signal
$a_0 = a_0 \cos(0\omega t)$ est la valeur moyenne de s

$$< s >= a_0$$

L'harmonique de rang 1 est appelée le fondamental quand $\omega_1 = \omega$

- Remarque :
  Plus l'harmonique est de rang élevé, plus sa fréquence est grande :
- $a_k \to 0$ $b_k \to 0$
  $k \to +\infty$ $k \to +\infty$
- En pratique, on s'arrête a un certain rang (somme finie) et on a accès a une approximation du signal

Propriétés

On considère le signal s(t) périodique de pulsation ω

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

- La valeur efficace (Théorème de Parceval):

$$S_{RMS} = \sqrt{< s^2 >} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2}$$

$$< s^2 > \neq < s >^2$$

- Si le signal $s(t)$ est pair
  $b_k = 0$

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t)$$

- Si le signal est impair
  $a_k = 0$

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

3. Analyse spectrale

Définition : Spectre de Fourier

Le spectre de Fourrier d'un spectre périodique s(t) est l'ensemble des coefficients de Fourier de ce signal. On le représente en traçant a_k et b_k en fonction de $k\omega$

Exemple

Exclidraw 1

II. Filtrage linéaire

1. Principe

On étudie uniquement les filtres linéaires
Exalibur 2

Le filtre est linéaire si l'équation différentielle qui relie $s(t)$ et $e(t)$ est linéaire

Théorème de superposition

La réponse d'un système linéaire a une somme d’excitation est la somme des réponses à chaque excitation prise séparément
Excalidraw 3.

On se place en notation complèxe pour determiner $s(t)$

$$e(t) \to \underline{e} = \underline{e_0} + \sum e_k e^{j\omega t}$$

Décomposition de Fourier complexe

D'après le théoreme de superposition :

$$\underline{s} = \underline{s_0} + \sum \underline{s_k} e^{j(\omega t + \phi k)}$$

Il suiffit de determiner $\underline{s_k}$ et ϕ_k en fonction de $\underline{e_k}$

2. Impédances d'entrée et de sortie

Définition

On appelle impédance d'entrée :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}$$

Vue a l'entré du dipole

On appelle impédance de sortie :

$$\underline{Z_s} = \frac{\underline{s}}{\underline{i_s}}$$

3. Fonction de transfert

Excalibur 4
On étudie toujours les filtres en sortie ouverte : $i_s(t) = 0$

Définition Fonction de transfert / Transmittance

C'est la fonction complexe $\underline{H(\omega)} = \frac{U_s}{U_e}$
avec U_e et U_s Les amplitudes complexes respectives de $\underline{s}$ et $\underline{e}$
$\underline{H}$ est caractérisé par son gain

$$G = |\underline{H}(\omega)|$$

et son argument :

$$\phi(\omega) = arg(\underline{H})$$

Si $e(t) = \sum e_k \cos(k\omega t) + \phi_k$
En sortie on obtiens :

$$s(t) = \sum G(k\omega) e_k \cos(k\omega t + \phi_k + \phi(k\omega))$$

Exemple :

$f = 1kHz$

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(10\omega t)$$

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega t + \phi_1) + S_2 \cos(10\omega t + \phi_2)$$

$S_0 = E_0 G(\omega = 0)$
$S_1 = E_0 G(\omega)$
$S_2 = \frac{E_0}{10} G(10\omega)$
Excalibur 5.

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$$

Propriété

Comme on étudie des filtres linéaires, $\underline{H}$ peut toujours s'écrire comme une fraction de polynômes en $j\omega$

$$\underline{H} = \frac{P_n(j\omega)}{P_d(j\omega)}$$

Définition

L'ordre du filtre linéaire est égal au degré est égal au degré du polynomial au dénominateur de la fonction de transfert. Plus l'ordre du filtre est élevé plus il est efficace.

4. Diagramme de Bode

a. Définitions

Le gain en décibel

$$G_{db} = 20 \log G = 20 \log(|\underline{H}|)$$

Le diagramme de Bode

Représentation graphique de $\underline{H}$ à l'aide de 2 courbes

- Courbe de gain : On trace G_{db} en fonction fonction de ω ou $\log \omega$
- Courbe de phase : On trace ϕ (la phase de $\underline{H}$) en fonction de ω ou $\log \omega$

b. Echelle logarithmique

Définition

2 Grandeurs sont séparés d'une décade si leur rapport vaut 10
En fréquence, une décade est l'intervalle tel que la valeur maximale de l'intervalle est égale a 10 fois la valeur minimale

saad ibn abdelaziz ibn ali ismael shik shak shok balla thein shawarma walad bebsi zyadeh batata bdoon salata ma3 gageenet bebsi bardeh bdoon thalj wallak hamodeh e6fi el playstation
lal nom mohammad abdallah

c. Diagramme asymptotique

Définition

Le diagramme asymptotique d'un filtre correspond aux comportements de G_{db} et de ϕ à $\omega = 0$ et $\omega \to +\infty$
Excalibur 6.

d. Pulsation de coupure

Définition

On appelle pulsation de coupure la ou les pulsations ω_c tel que :

$$G(\omega_c) = \frac{max(G)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{db}(\omega_c) = max(G_{db}) - 3$$

III. Filtres passe-bas

1. Introduction

On veut se débarrasser des hautes fréquences
Excalibur 7.

2. Filtre passe bas d'ordre 1

a. Circuit RC, sortie C

Excalibur 8.

Comportements asymptotiques

- Basse fréquence :
  $i = 0$ et $u_s = u_e$
- Haute fréquence
  $u_s = 0$

Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

On a un pont diviseur de tension dans notre circuit
On a donc $z_c = \frac{1}{jC\omega}$ et $z_r = R$

$$\underline{u_s} = \frac{z_c}{z_c + z_r}\underline{u_e}$$

$$\underline{u_s} = \frac{u_e}{jRC\omega + 1}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ la pulsation caractéristique
et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Gain et phase

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$G_{db} = 20\log G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -20\log(\sqrt{1+x^2})$$

$$G_{db} = -10\log(1+x^2)$$

$$\phi = arg(|\underline{H}|) = \arctan(x)$$

Diagramme de Bode

Excalibur 9

- $\omega \to 0 : G_{db} = -10\log(1) = 0$
- $\omega \to +\infty : G_{db} \to -10\log(x^2) = -20\log(x)$

Excalibur 10

b. Généralisation

La fonction d'un filtre passe bas d'ordre 1 se met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Gain :

$$G = \frac{G_0}{\sqrt{1+x^2}}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$
Gain en décibels :

$$G_{db} = 20\log(G_0) - 10\log(1+x^2)$$

Phase :

$$\phi = -\arctan x$$

Diagramme de Bode asymptotique

- $\omega = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$G_{db} = 20\log(G_0) = max(G_{db})$$

$$\phi = \arctan 0 = 0$$

- $\omega \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$

  $$G_{db} = 20\log G_0 - 20\log x$$

  pente de -20db/décade

  $$\phi \to -\frac{\pi}{2}$$

- $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$

  $$G_{db} = 20\log G_0 - 10\log(2)$$

  $$\phi = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

  $\omega_0 = \omega_c$ pulsation de coupure Excalibur 11

c. Comportement pseudo-intégrateur

TP circuit RC si le signal créneau du GBF a une fréquence très grande telle que $f \gg \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$
La tension u_c est un signal triangulaire

Excalubur 12

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1+jx} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{u_e}}$$

- Si $x \gg 1$ $\underline{H} \approx \frac{G_0}{jx}$

  $$\underline{u_s} = \frac{\underline{u_e} G_0 \omega_0}{j\omega}$$

  A Haute fréquence en notation temporelle

  $$u_s(t) = G_0\omega_0 \int u_e(t)\,dt$$

Propriété

A Haute fréquence un filtre passe bas se comporte comme un intégrateur a une constante multiplicative près on parle de montage pseudo-intégrateur

3. Filtre passe bas d'ordre 2

a. Circuit RLC sortie sur C

Excalibur 13

Comportements asymptotiques

- Basse fréquence
  Condensateur : interrupteur ouvert
  Bobine : fil

$$u_e = u_s + u_l + u_R = u_s + 0 + R \times 0$$

  car $i = 0$

$$u_e = u_s$$

- Haute fréquence
  Condensateur : fil
  Bobine : interrupteur ouvert
  $u_s = 0$

Fonction de Transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$$

Pont diviseur de tension

$$u_s = \frac{z_c}{z_c + z_L + z_R}\underline{u_R}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{jC\omega} \times \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On pose :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre
- $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

On a bien un Filtre passe bas d'ordre 2

Gain et Phase

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

*

$$G_{db} = 20\log G = -10\log\left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{Q(1-x^2)}{x}\right)$$

Diagrame de Bode

Excalibur 14

b. Généralisation

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 se met sous la forme.

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec

- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$
- G_0 le gain statique
- ω_0 la pulsation caractéristique
- Q le facteur de qualité

gain : $G = |\underline{H}|$

$$G = \frac{G_0}{\sqrt{(1 + x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log G_0 - 10\log\left((1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right)$$

$$\phi = arg(\underline{H})$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1 - x^2)}\right)$$

Diagramme de Bode Asymptotique

- $\omega \to 0 : x \to 0$
  $G = G_0$
  $G_{dB} = 20\log G_0$
  $\phi = -0$
- $\omega = \omega_0 : x = 1$
  $G(\omega_0) = QG_0$
  $G_{dB} = 20\log G_0 + 20\log Q$
  $\phi = \frac{-\pi}{2}$
- $\omega \to +\infty : x \to +\infty$
  $G \to 0$

G_{dB} : $(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2 \to x^4+\left(\frac{x}{Q}\right)^2 \to x^4$
pente de $-40dB/$ décade
$\phi \to -\pi$

Excalibur 15

On peut montrer qu'il y a résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
résonance $\Leftrightarrow$ max de G
résonance $\Leftrightarrow$ On cherche le minimum du dénominateur de G
$\Leftrightarrow$ min $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$
On dérive cette fonction f et on cherche $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$

$$\frac{df}{dx}(x_r) = 0$$

c. Fonction moyenneur

Si $\omega_c < \omega$

- ω_c : pulsation de coupure
- ω : pulsation du signal
  Alors le filtre donne la moyenne du signal d'entrée. Il joue le rôle d'un moyenneur

IV. Filtres passe-haut

1. Introduction

On étudie des filtres construits pour se débarrasser des basses fréquences et de la moyenne du signal

excalidraw 16

2. Filtre passe-haut d'ordre 1

a. Circuit EC sortie sur R

Excalibur 17

Comportement asymptotique

- BF $\omega \to 0$ $s = 0$ Condensateur : interrupteur ouvert
- Hf $\omega \to +\infty$ Condensateur : fil

Excalibur 18

On a bien un filtre passe-haut

Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Pont diviseur de tension :
Excalibur 19

$$\underline{s} = \frac{R}{z_c + R}\underline{e}$$

$$\underline{s} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R}\underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}$$

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ la pulsation caractéristique du circuit
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}$$

Gain de phase

$$G = |\underline{H}| = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\phi = arg(\underline{H}) - arg(1 + jx) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Diagramme de Bode

Excalibur 20

$$G_{dB} = 20\log G = 20\log x - 10\log(1+x^2)$$

b. Généralisation

Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe haut d'ordre 1 se met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{jxG_0}{1+jx} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et ω_0 la pulsation caractéristique du filtre
G_0 : Gain a haute fréquence

Gain

$$G = |\underline{H}| = \frac{G_0 x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Phase

$$\phi = arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Diagramme de bode asymptotique

Excalibur 21

- $\omega \to 0 : x \to 0$
  $G \to 0$

$$G_{dB} = 20\log G_0 x - 10\log(1+x^2) = 20\log G_0 + 20\log x$$

$$G_{dB} \to +20dB/\text{Decade}$$

- $\omega = \omega_0 \; x = 1$
  $G = \frac{G_0}{\sqrt{2}}$

$\omega_0 = \omega_c$ pulsation de coupure
$G_{dB} \approx 20 \log G_0 - 3$

- $\omega \to +\infty : x \to +\infty$

$$G \to \frac{G_0 x}{\sqrt{x}} = G_0 = max(G)$$

$$G_{dB} \to 20 \log G_0$$

Excalibur 21

- $\omega \to 0$
  $\phi = \frac{\pi}{2}$
  $\omega = \omega_0$
  $x = 1$
  $\arctan x = \frac{\pi}{4}$
- $\omega \to +\infty$
  $\arctan \to \frac{\pi}{2}$
  $\phi \to 0$

c. Comportement pseudo-dérivateur

$\underline{H} = \frac{jxG_0}{1+jx}$
à BF $x \ll 1$
alors $1 + jx \approx 1$
Donc $\underline{H} \approx jxG_0$
Or $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \approx jxG_0 = j\frac{\omega}{\omega_0}G_0$
Donc $\underline{s} = \frac{G_0}{\omega_0} j\omega \underline{e}$

Le signal d'entrée est multiplié par $j\omega$ donc en notations relles

$$s(t) = \frac{G_0}{\omega_0}\frac{de}{dt} \text{ à BF}$$

Propriété

A BF, un filtre passe-haut d'ordre 1 se comporte comme un dérivateur à un coeff près. C'est un montage pseudo-dérivateur

3. Filtre pass-haut d'ordre 2

a. Circuit RLC avec sortie sur L

Excalibur 22

Comportments asymptotiques

- BF :
  Condensateur : interrupteur ouvert
  Bobine : fil
  $s = 0$
- HF
  Condensateur : fil
  Bobine : interrupteur ouvert

Excalibur 23

Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Pont diviseur de tension

$$\underline{s} = \frac{z_l}{z_c + R + z_L}\underline{e}$$

$$\underline{H} = \frac{z_L}{z_C + R + z_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{\frac{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}{jC\omega}}$$

Donc :

$$\underline{H} = -\frac{LC\omega^2}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On pose :
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation caractéristique du filtre
$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$

On a :

$$\underline{H} = -\frac{x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Gain et phase

$$G = |\underline{H}| = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log G$$

$$G_{dB} = 40\log x - 10\log\left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right)$$

$$\phi = arg(\underline{H}) = arg(-x^2) - arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)^2$$

Diagramme de Bode

Excalibur 25

b. Généralisation

Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe haut d'ordre 2 est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{G_0 x^2}{x^2 - 1 - j\frac{x}{Q}} = \frac{G_0}{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{j}{xQ}}$$

Avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et ω_0 la pulsation caractéristique et Q le facteur de qualité
G_0 est le gain maximum

Gain

$$G = \frac{Gx^2}{\sqrt{(x^2-1)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log(G_0) + 40\log x - 10\log\left((x^2-1)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right)$$

Phase

$$\phi = arg(\underline{H}) = arg(G_0x^2) - arg\left(x^2 - 1 - j\frac{x}{Q}\right) = 0 - \arctan\left(-\frac{x}{Q(x^2-1)}\right) =$$

Diagramme de bode asymptotique

- $\omega \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$
  $G \to 0$
  $G_{dB} \to 40\log x - 10\log 1$
  $G_{dB} \to +40\log x$
  $\phi = \arctan(-0) = \pi$
- $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$
  $G = \frac{G_0}{0+\frac{1}{Q^2}} = QG_0$
  $G_{dB} = 20\log(QG_0)$
  $\phi(\omega_0) \to \frac{\pi}{2}$
- $\omega \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$
  $G \to \frac{G_0x^2}{x^2} = G_0$
  $G_{dB} \to 20\log(G_0)$
  $\phi = \arctan(+0) = 0$

Excalibur 26.

Cherchons la résonance

On cherche ω_r telle que $G(\omega_r) = max(G)$
Exprimons G pour n'avoir que ω au dénominateur

$$G = \frac{G_0x^2}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 + x^4\left(\frac{1}{x^2Q^2}\right)}} = \frac{G_0}{x^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{(xQ)^2}}}$$

Dans ce cas on étudie le dénominateur :

$$f(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{(Qx)^2}}$$

Ce qui reviens a chercher le min de la fonction

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{(Qx)^2}$$

On cherche x_r qui annule la dérivée de g

$$g'(x) = \frac{4}{x^3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{Q^2x^3} = \frac{2}{x^3}\left(2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{2 - \frac{1}{Q^2}}$$

x_r existe ssi

$$2 - \frac{1}{Q^2} > 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sous cette condition

$$x_r^2 = 2\frac{1}{2 - \frac{1}{Q^2}} = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}$$

$\frac{\omega_r}{\omega_0} = x_r > 0$

$$x_r = \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{2Q^2 - 1}}$$

Pulsation réduite à laquelle G passe par un maximum.

V. Filtre passe-bandes

1. Introduction

Un filtre passe-bande ne va laisser passer les signaux que dans une intervalle de fréquence
Excalibur 27.

2. Circuit RLC série sortie sur R

Excalibur 28.

Comportement asymptotique

- BF
  Condensateur -> Interrupteur ouvert
  Bobine -> fil
  Donc
  $i = 0 \Leftrightarrow s = Ri = 0$
- HF
  Condensateur -> Fil
  Bobine -> Interrupteur ouvert
  Donc
  $i = 0 \Leftrightarrow s = Ri = 0$

Donc on a un comportement passe bande

Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}} \underline{e}$$

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - j\frac{1}{RC\omega}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On pose :
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\left(L\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{C}\frac{\omega_0}{\omega} \times \sqrt{LC}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Donc c'est un filtre d'ordre 2

Gain et phase

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\phi = arg(\underline{H}) = -arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\phi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$G_{dB} = 20\log G = -10\log\left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)$$

Diagramme de Bode asymptotique

- $x \to 0$
  $G_{dB} \to -10\log\left(\frac{Q^2}{x^2}\right) = -10\log(Q^2) + 10\log(x^2)$
  $G_{dB} \to 20\log x$
- $x \to +\infty$
  $G_{dB} \to -10\log(Q^2x^2)$
  $G_{dB} \to -20\log(x)$

Excalibur 29.

c. Généralisation

La fonction de transfert d'un filtre passe bande se met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Avec
G_0 le gain maximum
Q la facteur de qualité
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$
ω_0 Pulsation caractéristique

Gain et phase

$$G = |\underline{H}| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

et

$$\phi = arg(\underline{H}) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

- $x = 1$ $\omega = \omega_0$ $x - \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{cases} G = G_0 \\ G_{dB} = 20\log G_0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

4. Acuité du filtre

Excalibur 30.
Avec ω_2 et ω_1 les pulsations de coupures

$$G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{G_0}{\sqrt{2}}$$

Définition

Acuité : $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

VI. Filtre cascade

I. Introduction

Excalibur 31

Fonction de transfert total

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \neq \underline{H_1} \times \underline{H_2}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} \times \frac{\underline{s}}{\underline{u}}$$

Pour les filtres en cascades on peut écrire

$$\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2} \times \cdots \times \underline{H_n}$$

Si l'impédance d'entrée du filtre 2 est très grande devant celle de sortie du filtre 1

$$z_{e_2} = z_{s_1}$$

Dans ce cas le filtre 1 se retrouve en sortie ouverte
Si $z_{s_1} = 0$ (impédance de sortie du filtre 1)
alors quelque soit z_{e_2} on a le filtre 1 en sortie ouverte.

2. Filtre de Colpitts

Excalibur 32.

Determiner

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Comme $i \neq 0$, on ne peut pas utiliser la fonction de transfert du filtre passe-haut
Donc on determine z_{eq}

$$\frac{1}{z_{eq}} = \frac{1}{z_L} + \frac{1}{z_{c_1} + z_{c_2}}$$

$$\frac{1}{z_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\frac{1}{JC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{1}{jL\omega} - \frac{C_1C_2\omega^2}{j\omega(C_1+C_2)}$$

$$\frac{1}{z_{eq}} = -\frac{j\omega(C_1+C_2) - jLC_1C_2\omega^3}{L\omega^2(C_1+C_2)}$$

Donc

$$z_{eq} = \frac{jL(C_1+C_2)\omega}{(C_1+C_2) - LC_1C_2\omega^2}$$

On a un pont diviseur de tension
Excalibur 33.
Donc

$$\underline{u} = \frac{z_{eq}}{R+z_{eq}}\underline{e}$$

$$\underline{H_1} = \frac{z_{eq}}{R+z_{eq}}$$

$$R + z_{eq} = \frac{R(C_1+C_2) - RLC_1C_2\omega^2 + jL(C_1+C_2)\omega}{C_1+C_2-LC_1C_2\omega^2}$$

$$\underline{H_1} = \frac{jL(C_1+C_2)\omega}{R(C_1+C_2) - RLC_1C_2\omega^2 + jL(C_1+C_2)\omega}$$

La fonction de transfert de la partie de gauche n'est pas égale a celle du filtre RL

Déterminer $\frac{\underline{s}}{\underline{u}}$

Pont diviseur de tension

$$\underline{s} = \frac{z_{C_2}}{z_{C_1}+z_{C_2}}\underline{u}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{u}} = \frac{1}{jC_2\omega} \times \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{1}{1+\frac{C_2}{C_1}} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}} \times \frac{\underline{u}}{\underline{e}}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jLC_1\omega}{R(C_1+C_2) - RLC_1C_2\omega^2 + jL(C_1+C_2)\omega}$$

VII. Filtrage introduit par un dispositif mécanique

Activité documentaire