Exercices sur les limites et la continuité

Exercice 1 Montrer en détail que la fonction $x \longmapsto \dfrac{(\sin x)\sqrt{1+x^x}+x}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, en supposant connues les continuités des fonctions classiques.

Exercice 2 Démontrer à l'aide du théorème de la limite monotone et des propriétés algébriques du logarithme que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Exercice 3 Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$$
2. $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$
3. $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)$$
4. $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$
5. $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$
6. $$\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{|x^2+2x-8|}\right)$$

Exercice 5 La fonction $x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 6 La fonction $x \longmapsto x\sin\frac{1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 7 Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2+4}{x+1}$. Pour $x_0 = 4$ et $\varepsilon = 10^{-5}$, trouver un α explicite tel que dès que $|x-x_0| \leq \alpha$, on ait $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que $f(x) = f(2x)$ pour tout x réel. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Que dire si f est seulement définie sur $\mathbb{R}_+^\star$, vérifie $f(x) = f(2x)$ pour tout $x > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Exercice 9 Soit f une fonction continue du segment $[0,1]$ dans lui-même. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10 Soit f une fonction monotone définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est continue en 0
2. La suite $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge vers $f(0)$

Exercice 11 La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $x \longmapsto \lfloor\frac{2}{x}\rfloor - 2\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ admet-elle une limite en 0 ?