

TD9 : Méthodes Algorithmiques

14 mai 2024

Exercice 1

On considère cherche ici à calculer la complexité de l'Algorithme pour le problème des Deux Points les Plus Proches dans le plan avec la stratégie Diviser pour Régner.

- 1) Avec quelle hypothèse sur la liste des points en entrée peut-on obtenir l'abscisse de séparation en temps au plus linéaire en fonction du nombre de points ?
- 2) On considère que la liste des points à l'intérieur de la bande de séparation est triée par ordonnée croissante dans un tableau P . Soit $d_0 = \min(d_1, d_2)$ (où d_1 et d_2 sont les distances minimales entre deux points dans chaque moitié de plan). Montrer que si $d(P(i), P(j)) < d_0$ alors $i - j \leq 7$.
- 3) En déduire une procédure pour déterminer la plus petite distance entre deux points à l'intérieur de la bande de séparation en temps linéaire.
- 4) On considère que l'on applique la procédure en stockant à chaque étape la liste des points ordonnés par abscisse croissante d'un côté et par ordonnée croissante de l'autre côté. Quelle est la complexité de l'algorithme obtenu ?

Exercice 2

Dans un tableau T contenant des entiers distincts, on cherche à compter le nombre d'inversions, c'est-à-dire le nombre de couples d'indices (i, j) tels que $i < j$ et $T[i] > T[j]$.

- 1) Déterminer une procédure en temps quadratique en fonction de la taille du tableau pour calculer le nombre d'inversions dans le tableau.
- 2) Ecrire une procédure qui prend en entrée un couple de tableaux triés T_1 et T_2 , et renvoie le nombre de couple d'entiers i_1, i_2 tels que $T_1[i_1] > T_2[i_2]$.
- 3) En déduire une procédure pour calculer le nombre d'inversions en utilisant une stratégie Diviser pour Régner.

Exercice 3

On considère le problème suivant :

- **Entrée** : deux chaînes de caractères L_1 et L_2
- **Sortie** : une sous-séquence commune à L_1 et L_2 qui maximise la longueur

- 1) Donner une procédure naïve pour trouver une plus longue sous-séquence commune entre deux chaînes de caractères.
- 2) Trouver la sous-structure optimale du problème de la plus longue sous-séquence commune.

3) En déduire un algorithme en pseudo-code pour renvoyer la plus longue sous-séquence commune entre deux chaînes de caractères.

Exercice 4

On considère une matrice carrée remplie de 0 et de 1. On souhaite trouver la taille de la plus grande sous-matrice carrée remplie de 1 dans la matrice.

1) On considère que l'on a une procédure qui prend en entrée une matrice m , deux coordonnées x, y , une taille k et vérifie que la sous-matrice de taille $k \times k$ dans m , dont le coin en haut à gauche est de coordonnées x, y , est remplie de 1.

Ecrire une procédure `contientcarre` à l'aide la procédure suivante qui prend en entrée une matrice et une taille k et renvoie Vrai si et seulement s'il existe une sous-matrice de 1 de taille $k \times k$ dans la matrice m .

2) Ecrire une procédure `maxcarre1` qui prend en entrée une matrice m et renvoie la taille de la plus grande sous-matrice carrée remplie de 1.

3) On note $c_{i,j}$ la taille de la plus grande sous-matrice carrée remplie de 1 dont la case en bas à droite est de coordonnées (i, j) . Donner une relation de récurrence sur les $c_{i,j}$ en fonction de m et en déduire une nouvelle procédure `maxcarre2` qui prend en entrée une matrice m et renvoie la taille de la plus grande sous-matrice carrée remplie de 1.

Exercice 5

On considère le problème de rendu de monnaie vu en cours : soit n une quantité de monnaie à rendre et soit a_1, \dots, a_k un ensemble de valeurs de pièces dans un système de monnaie, on souhaite renvoyer le nombre minimal $r(n, k)$ de pièces parmi a_1, \dots, a_k dont la somme vaut n .

1) Déterminer une relation de récurrence sur les $r(n, k)$.

2) En déduire une procédure en programmation dynamique permettant de trouver la valeur de $r(n, k)$.

Exercice 6

1) Rappeler une définition récursive de $\binom{n}{k}$.

2) En déduire une procédure récursive pour calculer $\binom{n}{k}$. Quelle est sa complexité ?

3) Proposer une procédure plus efficace pour calculer $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation indiquée en

1). Quelle est sa complexité ?