Applications linéaires

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

On note encore $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1 Définition

Une application linéaire est une application entre e.v. qui préserve l'addition et la multiplication par un scalaire. (*i.e.* un morphisme d'e.v.)

Caractérisation : les applications linéaires sont les applications qui préservent les CL de deux vecteurs du type $\lambda x+y$.

Propriété : elles préservent les CL de familles quelconques.

Exemples : dérivation sur $\mathbb{K}[X]$, dans $\mathbb{R}^2$ "euclidien" usuel : les homothéties de centre 0, les rotations préservant 0, les similitudes directes de centre 0 (contrexemples : celles ne préservant pas 0, on fait remarquer à cette occasion aux élèves que 0 est préservé par toute application linéaire), reconnaître sur l'expression explicite d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qu'elle est linéaire, applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans un $\mathbb{R}$-e.v. quelconque, premier aperçu informel de la notion de matrice dans le cas d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, "projection" d'un produit $E\times F$ sur E ou F.

Ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E vers F. C'est un sous-espace vectoriel de F^E.

2 Composition d'applications linéaires

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

L'application $comp : (u,v) \longmapsto v\circ u$ de $\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G)$ dans $\mathcal{L}(E,G)$ est "bilinéaire" (pas de définition générale) au sens où pour v fixé, $comp(\cdot,v)$ est linéaire et pour u fixé, $comp(u,\cdot)$ l'est (reformulation de ces propriétés avec des quantificateurs).

Notation $vu = v\cdot u = v\circ u$.

Si une application linéaire est bijective, son application réciproque est automatiquement linéaire (on dit qu'on a un isomorphisme).

3 Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels

L'image directe (resp. réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire u est un sous-espace vectoriel.

Cas particulier : définition de l'image $\mathrm{Im}\, u$ et du noyau $\mathrm{Ker}\, u$.
Caractérisation de la surjectivité à l'aide de l'image et de l'injectivité à l'aide du noyau.
Déterminer en exercice les images et noyaux des exemples précédents.

4 Images de familles de vecteurs

L'image du sous-espace engendré par une partie (resp. famille) par une application linéaire est le sous-espace engendré par l'image de la partie (resp. la famille).
L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.
L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

5 Applications linéaires de rang fini

Une application linéaire u est de rang fini ssi son image est de dimension finie ; on appelle alors rang de u ($\mathrm{rg}\,(u)$) la dimension de l'image.
Pour u et v "composables" :
— si v est injective et u de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini égal à celui de u ;
— si u est surjective et v de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini égal à celui de v.

II Endomorphismes

1 Définition

Définition, notation $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.
Exemples : $0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $Id = Id_E$, homothéties λId. Déterminer lesquels sont des endomorphismes parmi les exemples vus précédemment.
La composition est une LCI et $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.
Cet anneau est non commutatif dès que $\dim E \geq 2$ (seul le cas de la dimension finie semble pouvoir être démontré en CPGE, faute de résultat d'existence de bases dans le cas général).

2 Projections et symétries

Définition des deux projections et des deux symétries associées à une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
Interprétations graphiques.
Formules usuelles reliant ces quatre endomorphismes.
Exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Caractérisation des projections ($p^2 = p$) et des symétries ($s^2 = \mathrm{Id}_E$) et expressions de leurs éléments (sous-espaces) caractéristiques.

3 Groupe linéaire

Les automorphismes de E sont les inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.
Caractérisation : ce sont les endomorphismes de E bijectifs.
Groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E.

III Détermination d'une application linéaire

Étant données une base $(e_i)_{i\in I}$ de E et une famille $(f_i)_{i\in I}$ de F, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$; de plus, u est injective (resp. surjective, resp. bijective) ssi $(f_i)_{i\in I}$ est une famille libre (resp. famille génératrice, resp. base) de F.

Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ss'ils ont la même dimension.

Si E et F sont deux espaces de **même dimension finie** $\dim E = \dim F$ (en particulier si $E = F$ est de dimension finie) et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors u est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors elle est inversible ssi elle est inversible à gauche ssi elle est inversible à droite.

Si $\dim E = p$ et $\dim F = n$, alors $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$ (exhibition d'une base).

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{P} E_i$ et si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$, alors il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in [\![1,p]\!], u|_{E_i} = u_i$.

IV Théorème du rang

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

V Formes linéaires

Une forme linéaire sur E est un élément du dual $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ (c'est juste une notation, la dualité est hors programme).

Exemples : formes coordonnées relativement à une base $(e_i)_{i\in I}$ de E, notées e_i^*, $i \in I$, forme linéaire nulle, une forme explicite sur $\mathbb{R}^3$, dont on remarque qu'elle est CL des formes coordonnées relativement à la base canonique.

C'est un fait général en dimension finie : si E est de dimension finie et $(e_i)_{i=1}^n$ en est une base, alors $(e_i^*)_{i=1}^n$ est une base de E^* appelée base duale de $(e_i)_{i=1}^n$ (donc toute forme linéaire f s'écrit $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, où les x_i sont les coordonnées de x dans la base (e_i) et les f_i sont les coordonnées de f dans la base duale).

Exemples de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

VI Hyperplans

Un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

En dimension finie, après choix d'une base, un hyperplan est donc défini par une équation $\sum f_i x_i = 0$, qui n'est pas unique

Exemples dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Si D est une droite vectorielle non incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.

Corollaire : tout supplémentaire d'un hyperplan est une droite.

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Conséquence : en dimension finie n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

Exemples : cas de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$, sous-espace des polynômes sans terme constant (ou sans terme de degré p) et un supplémentaire, sous-espace des suites réelles telles que $u_2 + 3u_7 - u_{10^{10}} = 0$ et un supplémentaire, sous-espace de $\mathcal{C}^0([a,b])$ des fonctions d'intégrale nulle et un supplémentaire.

En dimension finie deux équations d'un même hyperplan sont proportionnelles. En dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$ et tout espace de dimension $n-m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.