DM10, autogéré pendant les vacances de Noël

Barème sur 65 points, avec $\pm 15\%$ pour les “croix rédactionnelles”, puis ± 1 pt de présentation sur la note sur 20.

— Exercice 1 (25 pts) :

1. 10 = 1 ($273 = 3 \times 91$) + 1 ($91 = 7 \times 13$) + 1 ($22568 = 8 \times 2821$) + 1 ($2821 = 7 \times 403$) + [2] ($403 = 13 \times 31$) + 1 (formule $a \wedge b$ et $= 91$) + 1 (formule $a \vee b$) + [2] (calculs *explicites* 67704)
2. 2 = 1 (formule diviseurs et nombre) + 1 (unicité DFP)
3. 13 = 1 (premier calcul) + 1 ($91 \not| 13$ donc $\mathcal{S}_0 = \emptyset$) + 1 (idée $a' = a/91$ et $b' = b/91$) + 1 ($a' = 3$ et $b' = 248$) + 1 (SP $(u_1, v_1) = (83, -1)$) + 1 ($(E_1) \iff a'(u - u_1) = b'(v_1 - v)$) + 1 (sol $\Longrightarrow a' | (v_1 - v)$ (Gauβ)) + 1 ($\exists k, v = v_1 - ka'$) + 1 (reporter dans l’équation) + 1 ($\mathcal{S}_1 \subset (83, -1) + \mathbb{Z}(248, -3)$) + 1 (synthèse $\mathcal{S} \supset \ldots$) + [2] ($\mathcal{S}_2 = (166, -2) + \mathbb{Z}(248, -3)$)

— Exercice 2 (5 pts)
1 (utiliser la caract des sous-groupes) + 1 ($(\mathbb{R}, +)$ groupe donc $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, +)$ groupe) + 1 ($H \neq \emptyset$) + [2] (stab + et opposé)

— Exercice 3 (5 pts)
1 (mult qté conj) + 1 (num $= 3x^2 - 12x + 12$) + 1 (simplification) + 1 (continuité polyn et $\sqrt{\cdot}$) + 1 ($3/2$)

— Exercice 4 (5 pts)
1 (caract des sous-gpes correcte) + 1 ($\neq \emptyset$) + [2] (trouver une période) + 1 (rédaction propre)

— Exercice 5 (20 pts) :

1. 4 = [2] (méthode) + [2] ($1 = 23 \times 5 + 19 \times (-6)$)
2. 2 = 1 ($a = -114$ et $b = 115$) + 1 (justifications)
3. 4 = [2] ($x_0 = 4a + 2b$) + 1 (justification) + 1 (valeur -226)
4. 10 = [4] ($x \in \mathcal{S} \iff x - x_0$ vérifie (H)) + 1 ($\iff 23 | x - x_0$ et $19 | x - x_0$) + 1 ($23 \wedge 19 = 1$) + 1 ($\Longrightarrow 23 \times 19 | x - x_0$ par csque de Gauβ) + 1 (réciproque triviale) + [2] ($\mathcal{S} = x_0 + 437\mathbb{Z}$)

— Exercice 6 (5 pts)

Exercice 1 Soient $a = 273$ et $b = 22568$.

1. Décomposer en nombres premiers a et b.
En déduire les valeurs de $a \wedge b$ et $a \vee b$.

Le nombre 273 est impair et la somme de ses chiffres est divisible par 3, donc lui aussi et $273 = 3 \times 91$. Puis, 91 n’est divisible ni par 3, ni par 5. Il l’est par 7 et $91 = 7 \times 13$. Comme 13 est premier, la décomposition en facteurs premiers de 273 est

$$\boxed{273 = 3 \times 7 \times 13.}$$

On sait que 22568 est divisible par $4 = 2^2$ et le quotient est 5642, encore pair : $5642 = 2 \times 2821$. Ce dernier n’est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Il l’est par 7 : $2821 = 7 \times 403$. Puis 403 n’est divisible ni par 7, ni par 11 (par le critère de la somme alternée des chiffres), mais il l’est par 13 : $403 = 13 \times 31$. Comme 31 est premier, la décomposition en facteurs premiers de 22568 est

$$\boxed{22568 = 2^3 \times 7 \times 13 \times 31.}$$

On en déduit que

$$\boxed{273 \wedge 22568 = 7 \times 13 = 91 \quad \text{et} \quad 273 \vee 22568 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 13 \times 31 = 22568 \times 3 = 67704.}$$

---

2. Déterminer combien b a de diviseurs dans $\mathbb{N}$ sans en dresser la liste.

Les diviseurs positifs de b sont les nombres $2^\alpha 7^\beta 13^\gamma 31^\delta$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $[\![0,3]\!] \times [\![0,1]\!]^3$. D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers,

$$\boxed{\text{le nombre 273 a 32 diviseurs positifs.}}$$

---

3. Calculer $83a - b$.
Résoudre soigneusement les équations en $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$: $au + bv = d$, pour $d = 13$ et $d = 91$.
Donner sans démonstration l'ensemble des solutions pour le cas $d = 182$.

On trouve

$$\boxed{83a - b = 91 = a \wedge b.}$$

Commençons par remarquer que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, comme $a \wedge b$ divise a et b, il divise la combinaison linéaire à coefficients entiers $au + bv$. Ainsi, comme 91 ne divise pas 13,

$$\boxed{\text{l'équation } (E_0) :\ au + bv = 13 \text{ n'admet pas de solutions dans } \mathbb{Z}^2.}$$

Traitons maintenant les deux cas restants. On note $a' = \frac{a}{a \wedge b} = 3$ et $b' = \frac{b}{a \wedge b} = 248$, qui sont donc premiers entre eux.
Cas $d = 91$**.** Tout d'abord, en divisant par $a \wedge b = 91$, l'équation $(E_1) :\ au + bv = 91$ se réécrit

$$a'u + b'v = 1$$

Par ailleurs, d'après le calcul ci-dessus, l'équation (E_1) admet comme solution particulière $(u_1, v_1) = (83, -1)$.
Trouvons les solutions de (E_1) par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E_1). Alors $a'u + b'v = 1 = a'u_1 + b'v_1$, donc

$$a'(u - u_1) = b'(v_1 - v).$$

Par le lemme de Gauß, comme $a' | b'(v_1 - v)$ et $a' \wedge b' = 1$, alors $a' | (v_1 - v)$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a'k = v_1 - v$, *i.e.* $v = v_1 - ka'$.
En reportant dans l'égalité ci-dessus, on obtient $a'(u - u_1) = a'kb'$ et, comme $a' \neq 0$, $u = u_1 + kb'$. Ainsi,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad (u, v) = (u_1, v_1) + k(b', -a').$$

Synthèse. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $(u, v) = (u_1, v_1) + k(b', -a')$. Alors

$$a'u + b'v = a'u_1 + b'v_1 + a'kb' - b'ka' = 91 + 0 = 91,$$

i.e. (u, v) est solution de (E_1).
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_1} = (u_1, v_1) + \mathbb{Z}(b', -a') = (83, -1) + \mathbb{Z}(248, -3).}$$

Cas $d = 182$**.**
L'ensemble des solutions de (E_2) : $au + bv = 182$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_2} = (u_1, v_1) + \mathbb{Z}(b', -a') = (166, -2) + \mathbb{Z}(248, -3).}$$

Exercice 2 Montrer que $\left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \mid \lim\limits_{+\infty} f = 0 \right\}$, muni de l'addition des fonctions, est un groupe.

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe et $\mathbb{R}_+$ un ensemble, l'addition des fonctions est une loi de groupe sur $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.
On montre alors que $H = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \mid \lim_{+\infty} f = 0 \right\}$ est un sous-groupe de G par la caractérisation des sous-groupes :

- on a bien $\boxed{H \subset G,}$ par définition de H ;
- la fonction nulle tendant vers 0 en $+\infty$, $\boxed{H \neq \emptyset;}$
- pour $f, g \in H$, par combinaison linéaire de limites, $\lim_{+\infty}(f - g) = 0 - 0 = 0$, donc $\boxed{f - g \in H.}$

Comme H est un sous-groupe de G,

$$\boxed{(H, +) \text{ est un groupe.}}$$

Exercice 3 Déterminer l'éventuelle limite en 2 de $h : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^3 - 12x + 17} - \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}}{x^2 - 4x + 4}$.
On **admettra** que les quantités sous les racines sont strictement positives pour x au voisinage de 2.

Soit $x \neq 2$ assez proche de 2 pour que les quantités sous les deux racines soient strictement positives.
Alors la somme des racines est strictement positive, donc non nulle, et, en multipliant par cette somme (*i.e.* par la quantité conjuguée),

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\sqrt{x^3 - 12x + 17} - \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}}{x^2 - 4x + 4} \\
&= \frac{\left(x^3 - 12x + 17\right) - \left(x^3 - 3x^2 + 5\right)}{(x^2 - 4x + 4)\left(\sqrt{x^3 - 12x + 17} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}\right)} \\
&= \frac{3x^2 - 12x + 12}{(x^2 - 4x + 4)\left(\sqrt{x^3 - 12x + 17} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}\right)} \\
&= \frac{3}{\sqrt{x^3 - 12x + 17} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}}.
\end{aligned}$$

Par composition de fonctions polynômes avec la fonction racine carrée, toutes continues sur leur domaines de définition,

$$\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{x^3 - 12x + 17} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5} \right) = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

et, par inverse de limite et produit par 3,

$$\boxed{\lim_{x \to 2} h(x) = \frac{3}{2}.}$$

Exercice 4 Est-ce que l'ensemble des suites réelles périodiques est un sous-groupe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Oui, ce qu'on montre par la caractérisation des sous-groupes, en notant H cet ensemble :

— par définition de H, $\boxed{H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}};}$

— la suite $(42)_{n\in\mathbb{N}}$ étant 1-périodique, $\boxed{H \neq \emptyset;}$

— soient $u, v \in H$ et $w = u - v$. On note p, q leurs (plus petites) périodes. Comme $pq \in \mathbb{N}^{\star}$ et est un multiple de p, c'est une période de u. Comme c'est aussi un multiple de q, c'est une période de v. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+pq} = u_{n+pq} - v_{n+pq} = u_n - v_n = w_n,$$

ce qui prouve que pq est une période de w, donc $\boxed{w \in H.}$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'ensemble des suites réelles périodiques est un sous-groupe de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

Remarque. Avec les notations ci-dessus, $p \vee q$ est aussi une période de w, mais ce n'est pas forcément la plus petite. Trouver deux suites u, v explicites telle que la période de $u - v$ soit strictement inférieure à ce PPCM.

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 4 \quad [23] \\ x & \equiv & 2 \quad [19] \end{array}\right. .$$

1. Trouver u et v tels que $23u + 19v = 1$.

On peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu ou l'algorithme d'Euclide et la "remontée", ce qu'on fait ici puisque les calculs sont simples :

$$\begin{array}{lllllll} 23 & = & 19 & \times & 1 & + & 4, \\ 19 & = & 4 & \times & 4 & + & 3, \\ 4 & = & 3 & \times & 1 & + & 1, \end{array}$$

donc

$$\boxed{23 \wedge 19 = 1.}$$

En remontant les égalités, on trouve successivement

$$\begin{array}{lll} 1 & = & 4 \times 1 + 3 \times (-1) \\ & = & 4 \times 1 + (19 - 4 \times 4) \times (-1) \\ & = & 4 \times 5 + 19 \times (-1) \\ & = & (23 - 19) \times 5 + 19 \times (-1) \\ & = & 23 \times 5 + 19 \times (-6) \end{array}$$

donc **un** couple convenant est

$$\boxed{(u,v) = (5,-6).}$$

---

2. Utiliser la question précédente pour trouver deux nombres a et b tels que $a \equiv 1[23]$, $a \equiv 0[19]$, $b \equiv 0[23]$ et $b \equiv 1[19]$.

En posant $a = 19 \times (-6)$, on a, d'une part, $a \equiv 0[19]$ et d'autre part $a = 1 - 23 \times 5 \equiv 1[23]$.
En posant $b = 23 \times 5$, on a, d'une part, $b \equiv 0[23]$ et d'autre part $b = 1 + 19 \times 6 \equiv 1[19]$.
Ainsi, $\boxed{a = -114}$ et $\boxed{b = 115}$ conviennent.

---

3. En déduire une solution particulière x_0 de (S).

On pose $x_0 = 4a + 2b = -4 \times 114 + 2 \times 115 = -226$ et ainsi

$$x_0 \equiv 4 \times 1 + 2 \times 0 \equiv 4\ [23] \quad \text{et} \quad x_0 \equiv 4 \times 0 + 2 \times 1 \equiv 2\ [19],$$

i.e.

$$\boxed{x_0 = -226 \text{ est solution particulière de } (S).}$$

---

4. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est $x_0 + n\mathbb{Z}$ avec n à déterminer.

Pour $x \in \mathbb{Z}$, x est solution de S si et seulement s'il est congru à x_0 modulo 23 et modulo 19.
Cela équivaut à ce que $x - x_0$ soit divisible à la fois par 23 et 19, ce qui équivaut à ce que $x - x_0$ soit divisible par $23 \times 19 = 437$, puisqu'étant premiers et différents, 23 et 19 sont premiers entre eux.
Ainsi,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (S) \text{ est } -226 + 437\mathbb{Z} = 211 + 437\mathbb{Z}.}$$

Exercice 6 Est-ce que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$ est prolongeable par continuité en 0 ?

Pour clarifier les choses, on fait le changement de variables "$x = \frac{1}{y}$", *i.e.* on considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{\lfloor y \rfloor}{y} \end{array} \right.$.

Pour $y \in \mathbb{R}_+^\star$, par définition de la partie entière, $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$, donc $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$ et, en divisant par $y > 0$ et prenant l'inégalité large à gauche (qui nous suffit),

$$1 - \frac{1}{y} \leq g(y) \leq 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = 1.$$

Or,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

donc, par composition de limites,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to +\infty} g(y) = 1$$

et

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 1.}$$
