DS1 de mathématiques, partie raisonnement, vendredi 15 septembre 2023 (1h45)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
*Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être **argumentée**.*

Exercice 1 *Chez Raymond*
Dans ce bistrot, il n'y a que des Purs et des Pires (à part vous). Les Purs disent toujours la vérité et les Pires mentent constamment. Vous rencontrez trois des habitués, A, B et C, qui vous disent :
— A : "Il y a au moins deux Purs parmi nous trois"
— B : "Nous sommes tous trois des Pires."
— C : "Il y a au moins deux Pires parmi nous trois"
Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 2 *Human*
Soient A, B et C trois énoncés mathématiques quelconques.
Montrer que $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C))$ par le raisonnement (*i.e.* sans table de vérité).

Exercice 3 *Avoir des idées dans la suite*
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

Conjecturer une formule pour son terme général et la prouver.

Exercice 4 *Étude complète*

On considère la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3}$.

1. Étudier la définition et la dérivabilité de g.
2. Calculer la dérivée de g et déterminer ses variations.
3. Le graphe de g admet-il des asymptotes verticales ou horizontales ?
4. Quelle est la limite de $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures ?
5. Donner l'allure du graphe de g.

Exercice 5 *Ensemble de raisonnements*
Soient A,B,C trois ensembles.

1. Montrer que $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
2. Montrer que $A\cup B = A\cap C \iff B \subset A \subset C$.
3. $(A\cup B = A\cup C \text{ et } A\cap B = A\cap C) \iff B = C$.

Exercice 6 *Foisonnement d'intervalles*

1. Montrer que la réunion de deux segments d'intersection non vide est un segment, éventuellement réduit à un point.
2. Montrer qu'une intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert, éventuellement vide.
3. Que dire dans le cas d'une intersection infinie d'intervalles ouverts ?