Intégration

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On suppose jusqu'à nouvel ordre que $a < b$ (*i.e.* jusqu'à la fin de la section IV).

Synopsis

On cherche à intégrer certaines fonctions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et pour cela à trouver un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{[a,b]}$ pour lequel on puisse définir une notion d'intégrale, puisque la linéarité était une propriété fondamentale de toutes les "sortes d'intégrale" vues jusqu'à présent : sommes finies, intégrale des fonctions continues, espérance, somme d'une série. Un premier sous-espace convenant est celui $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ des fonctions en escalier, mais il ne contient pas les fonctions continues non constantes. On étend alors la notion d'intégrale au sous-espace $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ des fonctions continues par morceaux, pour lesquelles on définit l'intégrale en écrivant toute fonction CPM comme limite "uniforme" de fonctions en escaliers, ce qui sera possible grâce à sa continuité "uniforme" sur chacun des morceaux.

Il est à noter que ces deux sous-espaces de fonctions sont des sous-algèbres de l'algèbre $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$ des fonctions bornées sur $[a,b]$, ce qui ne sera pas le cas quand vous intégrerez l'an prochain sur un intervalle quelconque : les fonctions intégrables ne seront plus forcément bornées et les produits de fonctions intégrables ne seront plus forcément intégrables.

Une fois construite l'intégrale des fonctions CPM, on démontre toutes les propriétés annoncées en début d'année : linéarité, positivité, croissance, inégalité de norme, relation de Chasles, puis le théorème fondamental de l'analyse, qui permet de faire le lien entre intégrales et primitives et enfin, on rappelle les démonstrations de l'intégration par parties et du changement de variables.

On introduit aussi des notions et résultats nouveaux : sommes de Riemann, formules de Taylor.

I Continuité uniforme

1 Définition

Définition 1 (**Uniforme continuité**) Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{K}^I$.

On dit que f est *uniformément continue sur I* ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in I, \quad (|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Exercice 2 Écrire la définition de la continuité en un point $x_0 \in I$, puis sur l'intervalle I. Comparer cette dernière avec la définition de la continuité uniforme du point de vue logique et tracer des courbes de fonctions pour exprimer la différence entre les deux notions.$\bigoplus$

On déduit de cette discussion la

Proposition 3 *Toute fonction uniformément continue sur un intervalle I est continue sur I.*

Remarque 4 **Attention**, la réciproque est fausse : par exemple, montrez en exercice que la fonction exp n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Trouver une fonction continue sur un intervalle borné, mais non uniformément continue.

Exercice 6 Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle est uniformément continue sur cet intervalle.

2 Théorème de Heine

On a une réciproque à la proposition précédente quand l'intervalle est un **segment** :

Théorème 7 *(de Heine)*
Si $f \in \mathbb{K}^{[a,b]}$ est continue, alors elle est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration:

Soit f continue sur $[a,b]$. On démontre par l'absurde qu'elle est uniformément continue.

Supposons qu'elle ne le soit pas, *i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in [a,b], \quad (|x-y| \leq \alpha \text{ et } |f(x)-f(y)| > \varepsilon).$$

On fixe un tel ε. En prenant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, "$\alpha = \frac{1}{n+1}$", on obtient deux suites $(x_n), (y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\star): \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Comme la suite $(x_n)_n$ est réelle et bornée, le théorème de Bolzano-Weierstraβ assure qu'il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers une limite ℓ. Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, $\ell \in [a,b]$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à la première inégalité de $(\star)$,

$$\left|y_{\varphi(n)} - \ell\right| = \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - \ell\right| \leq \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - \ell\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} + \left|x_{\varphi(n)} - \ell\right|,$$

avec les deux derniers termes tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc $(y_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers ℓ.

Par continuité de la fonction f et de la valeur absolue, on obtient alors, en passant à la limite dans la seconde inégalité de $(\star)$,

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| \geq \varepsilon > 0,$$

ce qui fournit la contradiction cherchée.

Ainsi, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

$\square$

Exemple 8 La fonction exp est uniformément continue sur $[0,1]$.

II Subdivisions et fonctions en escalier

1 Subdivisions d'un segment

Définition 9 (Subdivision)

Une *subdivision* de $[a,b]$ est une famille finie $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ d'éléments de $[a,b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Le *pas* d'une telle subdivision est

$$\text{pas}(\sigma) = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}).$$

L'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ est noté, **dans ce cours**, $\Sigma_{a,b}$

Exemple 10 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la subdivision $\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right)_{i=0}^n$ est dite *régulière*.

Définition 11 (Raffinement)

Pour deux subdivisions $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ et $\sigma' = (x'_j)_{j=0}^m$ de $[a,b]$, σ est *plus fine* que σ' ssi

$$\left\{x_i;\ i \in [\![0,n]\!]\right\} \supset \left\{x'_j;\ j \in [\![0,m]\!]\right\}.$$

On note, **dans ce cours**, $\sigma \succ \sigma'$ pour dire que σ est plus fine que σ'.
On dit aussi que σ est un *raffinement* de σ'.

Exercice 12 Faire une figure représentant deux subdivisions dont l'une est plus fine que l'autre, puis une autre avec deux subdivisions dont aucune n'est plus fine que l'autre.

Comme conséquence directe du fait que l'inclusion est une relation d'ordre partiel, on a la

Proposition 13 *(Relation d'ordre)*

La relation $\succ$ est une relation d'ordre partiel sur $\Sigma_{a,b}$.

On se servira beaucoup du

Lemme 14 *(Raffinement commun)*

$$\forall\sigma,\sigma' \in \Sigma_{a,b},\ \exists\sigma'' \in \Sigma_{a,b},\quad \left(\sigma'' \succ \sigma \ \text{ et } \ \sigma'' \succ \sigma'\right).$$

Démonstration:

On note $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ et $\sigma' = (x'_j)_{j=0}^m$.
En numérotant dans l'ordre croissant, en partant du numéro 0, les éléments de

$$\{x_i; i \in [\![0,n]\!]\} \cup \left\{x'_j; j \in [\![0,m]\!]\right\},$$

on obtient une subdivision σ'' qui convient.

□

Remarque 15 Il existe même une infinité de subdivisions plus fines que σ et σ', puisqu'on peut rajouter un à un des points à σ''.

2 Fonctions en escalier

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'intégrale qu'on veut construire doit valoir l'"aire sous la courbe" de la fonction intégrée. Cette aire est celle d'un rectangle dans le cas d'une fonction constante, avec un éventuel signe si la constante est négative, qu'on sait facilement calculer. Si la fonction est "constante par morceaux", on a alors à calculer une somme d'aires algébriques de rectangles.

Exercice 16 Faire un dessin d'une telle fonction et des aires algébriques en jeu, puis écrire une formule pour l'"intégrale" de f.

Une telle fonction "constante par morceaux" est définie formellement comme fonction "en escalier", notion qui s'étend directement au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Définition 17 (**Fonction en escalier**)
Une fonction $f \in \mathbb{K}^{[a,b]}$ est dite **en escalier** ss'il existe $\sigma = (x_i)_{i=0}^n \in \Sigma_{a,b}$ telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la restriction $f|_{]x_{i-1},x_i[}$ soit constante.
Une telle subdivision est dite *subordonnée* à la fonction en escalier f.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est noté $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Remarque 18 Les valeurs de f aux points de la subdivision ne jouent aucun rôle, ni dans la définition précédente, ni dans la formule de l'intégrale qu'on va construire.

Le résultat suivant est évident, mais très utile :

Lemme 19 *(Raffinement d'une subordonnée)*
Si σ est une subdivision subordonnée à une fonction en escalier f, alors toute subdivision plus fine que σ est aussi subordonnée à f.

Corollaire 20 *Toute $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ admet une infinité de subdivisions subordonnées.*

Comme évoqué dans l'introduction, la notion de linéarité de l'intégrale est centrale, donc il est fondamental d'avoir la

Proposition 21 *(Sous-espace des fonctions en escalier)*
$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$ des fonctions bornées.

Démonstration:

On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :
- $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$, car une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
- La fonction constante de valeur 0, est bien en escalier (prendre la subdivision (a,b)).
- Soient $f, g \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On prend $\sigma, \sigma' \in \Sigma_{a,b}$ telles que σ soit subordonnée à f et σ' à g. Par le lemme de raffinement commun, il existe $\sigma'' \in \Sigma_{a,b}$ plus fine que σ et σ'. Par le lemme de raffinement d'une subordonnée, σ'' est subordonnée à la fois à f et g. On note $\sigma'' = (x''_k)_{k=0}^p$. Alors, pour $k \in [\![1,p]\!]$, $f|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ et $g|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ sont constantes, donc $(\lambda f + g)|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ est constante. On a donc $\lambda f + g \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$.
  Ainsi, $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est stable par combinaisons linéaires.

Donc $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est bien un sous-espace de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

□

Remarque 22 Comme, de plus, $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ contient la fonction constante de valeur 1 et est stable par produit, c'est en fait une sous-algèbre de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

III Intégration des fonctions en escalier

1 Intégrale d'une fonction en escalier

La formule qu'on a construite précédemment mène à la

Définition 23 (**Définition intermédiaire**)
Soient $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\sigma = (x_i)_{i=0}^{n} \in \Sigma_{a,b}$ subordonnée à f.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ et on pose alors

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})y_i \quad (\in \mathbb{K}).$$

Pour définir l'intégrale de f, il ne reste plus qu'à montrer que cette valeur est indépendante de σ :

Théorème 24 *(Indépendance par rapport à la subdivision)*
Dans la définition précédente, $I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la subdivision σ subordonnée à f choisie.

Pour démontrer ce théorème, on utilise le

Lemme 25 *(Invariance par raffinement)*
Si σ est une subdivision subordonnée à $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\sigma' \in \Sigma_{a,b}$ est plus fine que σ, alors

$$I(f,\sigma') = I(f,\sigma).$$

qui lui-même se démontre à l'aide du

Lemme 26 *(Invariance par ajout d'un point)*
Si σ est une subdivision subordonnée à $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\sigma' \in \Sigma_{a,b}$ est obtenue par ajout d'un point à σ, alors

$$I(f,\sigma') = I(f,\sigma).$$

Démonstration:

Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\sigma = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision subordonnée à f.

Commençons par montrer l'invariance par ajout d'un point. Soit z un point de $[a,b]$ qui n'est pas dans cette subdivision. On a alors un unique indice $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0-1} < z < x_{i_0}$. La subdivision σ' obtenue par ajout du point z à σ s'écrit alors $\sigma' = (x'_i)_{i=0}^{n+1}$, avec

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0,i_0-1]\!],\ x'_i = x_i \\ x'_{i_0} = z \\ \forall i \in [\![i_0+1,n+1]\!],\ x'_i = x_{i-1}. \end{cases}$$

On note aussi, pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$, $y'_i = f\left(\frac{x'_{i-1}+x'_i}{2}\right)$. Puisque $\frac{x_{i_0-1}+x_{i_0}}{2}$, $\frac{x'_{i_0-1}+x'_{i_0}}{2} = \frac{x_{i_0-1}+z}{2}$ et $\frac{x'_{i_0}+x'_{i_0+1}}{2} = \frac{z+x_{i_0}}{2}$ sont trois points de l'intervalle $]x_{i_0-1},x_{i_0}[$, sur lequel f est constante, on a

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,i_0-1]\!],\ y'_i = y_i \\ y'_{i_0} = y'_{i_0+1} = y_{i_0} \\ \forall i \in [\![i_0+2,n+1]\!],\ y'_i = y_{i-1}, \end{cases}$$

donc

$$
\begin{aligned}
I(f,\sigma') &= \sum_{i=1}^{n+1}(x'_i - x'_{i-1})y'_i \\
&= \sum_{i=1}^{i_0-1}(x'_i - x'_{i-1})y'_i + (x'_{i_0} - x'_{i_0-1})y'_{i_0} + (x'_{i_0+1} - x'_{i_0})y'_{i_0+1} + \sum_{i=i_0+2}^{n+1}(x'_i - x'_{i-1})y'_i \\
&= \sum_{i=1}^{i_0-1}(x_i - x_{i-1})y_i + (z - x_{i_0-1})y_{i_0} + (x_{i_0} - z)y_{i_0} + \sum_{i=i_0+2}^{n+1}(x_{i-1} - x_{i-2})y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{i_0-1}(x_i - x_{i-1})y_i + (x_{i_0} - x_{i_0-1})y_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n}(x_i - x_{i-1})y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})y_i \\
&= I(f,\sigma)
\end{aligned}
$$

La quantité $I(f,\sigma)$ est donc invariante par ajout d'un point à la subdivision σ.

Par récurrence immédiate, cette quantité est invariante par ajout d'un nombre fini de points à la subdivision, *i.e.* elle est invariante par raffinement de σ.

Démontrons maintenant le théorème. Soient σ' une autre subdivision subordonnée à f. Par le lemme de raffinement commun, on obtient une subdivision σ'' plus fine à la fois que σ et que σ'. Par l'invariance par raffinement qu'on vient de montrer,

$$I(f,\sigma') = I(f,\sigma'') = I(f,\sigma),$$

donc la quantité $I(f,\sigma)$ est indépendante de la subdivision subordonnée à f choisie.

□

Définition 27 (**Intégrale d'une fonction en escalier**)

Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

D'après le théorème précédent, les nombres $I(f,\sigma)$, avec σ subdivision subordonnée à f, sont tous égaux.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ cette unique valeur et on la note provisoirement $I(f)$

Exercice 28 Soit la fonction f définie sur $[-1,\pi]$ par :

— $f(-1) = 1$;
— $f(]-1,1[) = \{3\}$;
— $f(1) = \sqrt{2}$;
— $f(]1,2[) = \{-2\}$;
— $f(2) = \mathrm{e}$;
— $f(]2,\pi[) = \{1\}$;
— $f(\pi) = \frac{21}{50}$.

Dessiner le graphe de f et calculer son intégrale.

2 Propriétés de cette intégrale

Cette intégrale vérifie alors les propriétés suivantes.

Proposition 29

1. ***(Linéarité)*** *L'application*

$$I_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & I(f) \end{array} \right.$$

   est une forme linéaire.

2. ***(Positivité)***

$$\forall f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad (f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0).$$

3. ***(Croissance)***

$$\forall f,g \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad (f \leq g \Longrightarrow I(f) \leq I(g)).$$

4. ***(Inégalité de norme)***

$$\forall f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]), \quad (|f| \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]) \text{ et } |I(f)| \leq I(|f|)).$$

5. ***(Relation de Chasles)*** *Pour $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $c \in]a,b[$, on a $f|_{[a,c]} \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,c])$, $f|_{[c,b]} \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([c,b])$ et*

$$I(f) = I\left(f|_{[a,c]}\right) + I\left(f|_{[c,b]}\right).$$

Démonstration: À faire en exercice.

Correction de l'exercice :

1. Soient $f,g \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient σ subordonnée à f et σ' subordonnée à g. Par raffinement commun de σ et σ', on peut choisir σ'' subordonnée à la fois à f et g. L'égalité $I(\lambda f + g, \sigma'') = \lambda I(f,\sigma'') + I(g,\sigma'')$ est immédiate par linéarité d'un somme finie.
2. La positivité est immédiate par positivité des sommes finies.
3. La croissance est une conséquence directe de la linéarité et la positivité, en toute généralité.
4. Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$. Sur les intervalles où f est constante, $|f|$ est *a fortiori* constante, donc $|f| \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$. En appliquant l'inégalité triangulaire pour les sommes finies d'éléments de $\mathbb{K}$ à une des sommes définissant $I(f)$, on obtient l'inégalité de norme.
5. Quitte à rajouter le point c, on se procure une subdivision σ subordonnée à f dont c est un des points. On note cette subdivision $\sigma'' = (x_0, \ldots, x_{n-1}, c, x'_1, \ldots, x'_m)$. On pose $x_n = c$ et $x'_0 = c$. Alors $\sigma = (x_i)_{i=0}^{n}$ est une subdivision de $[a,c]$ subordonnée à $f|_{[a,c]}$ et $\sigma' = (x'_j)_{j=0}^{m}$ est une subdivision de $[c,b]$ subordonnée à $f|_{[c,b]}$. Il est clair que $I(f,\sigma'') = I\left(f|_{[a,c]}, \sigma\right) + I\left(f|_{[c,b]}, \sigma'\right)$.

□

IV Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Il serait naturel de savoir intégrer les fonctions continues. Cependant, les seules fonctions en escalier continues sont les constantes, ce qui présente peu d'intérêt. On cherche donc une classe de fonctions qui étende celle des fonctions en escalier (pour prolonger l'intégrale déjà définie) et contienne les fonctions continues.

Du point de vue purement mathématique, deux candidats naturels se présentent :

— la classe des fonctions qui sont limites uniformes de fonctions en escalier ;
— le classe des fonctions telles que la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escaliers qui la minorent soit égale à la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui la majorent.

La construction que nous allons faire mène très naturellement à la première classe. Cependant (par souci de simplification des preuves ?), la classe retenue pour les CPGE en est un sous-classe : la classe des fonctions "continues par morceaux".

La deuxième classe, plus vaste que celle des limites uniformes de fonctions en escalier, est la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann. Elle est déjà mathématiquement très riche. Cependant, la théorie de l'intégration la plus puissante est celle de Lebesgue, provenant de la théorie de la mesure, qui est enseignée dans les écoles d'ingénieurs et universités au niveau BAC+3.

1 Fonctions continues par morceaux

La terminologie semble simple de prime abord : il s'agirait de remplacer, dans la définition des fonctions en escalier, le mot "constante" par le mot "continue". Mais cela est trompeur. Considérons en effet la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, qui vérifierait cette définition. Comment définir $\int_0^1 f$? On peut remarquer que le calcul des primitives assure, pour $\varepsilon \in]0,1[$, l'égalité $\int_\varepsilon^1 f = -\ln(\varepsilon)$ et cette quantité tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0, ce qui semble vouloir dire que l'"aire sous la courbe" de f est infinie. Cela est un peu gênant pour une fonction "intégrable". Il faut donc ajouter des garde-fous à cette définition, ce qui donne la définition suivante :

Définition 30 (Fonction CPM sur un segment)

Une fonction $f \in \mathbb{K}^{[a,b]}$ est dite *continue par morceaux* (CPM) ss'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ telle que les restrictions $f_i = f|_{]x_{i-1},x_i[}$ ($i \in [\![1,n]\!]$) soient continues **et** admettent des limites finies à droite en x_{i-1} et à gauche en x_i.

Cela équivaut à ce que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la restriction f_i soit prolongeable en une fonction continue $\widetilde{f_i}$ définie sur $[x_{i-1},x_i]$.

Une telle subdivision est dite *subordonnée* à la fonction CPM f.

L'ensemble des fonctions CPM sur $[a,b]$ est noté $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Remarque 31 Comme pour les fonctions en escalier, les valeurs de f aux points de la subdivision ne jouent aucun rôle, ni dans la définition précédente, ni dans la formule de l'intégrale qu'on va construire.

Remarque 32 Il est évident que toute fonction en escalier sur $[a,b]$ y est CPM et toute fonction continue aussi :

$$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^0_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]).$$

Exercice 33 Faire un dessin de la fonction précédant la définition, puis d'une fonction CPM sur un segment.

Exemple 34

La fonction signe sgn, qui vaut $\frac{|x|}{x}$ pour $x \neq 0$ et 0 en 0, est CPM sur tout segment de $\mathbb{R}$.

La fonction $\mathrm{sgn} \circ \sin$ est aussi CPM sur tout segment de $\mathbb{R}$. Tracer son graphe.

Plus généralement, on définit la notion suivante, qui servira plutôt l'an prochain :

Définition 35 (**Fonction CPM sur un intervalle quelconque**)

Pour un intervalle non trivial I, une fonction f définie sur I est CPM sur I ssi sa restriction à tout segment inclus dans I est CPM (il peut donc y avoir sur I un nombre infini de morceaux).

On note $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}(I)$ l'ensemble des fonctions CPM sur I.

Exemple 36 Ainsi, la fonction $\operatorname{sgn} \circ \sin$ de l'exemple ci-dessus est CPM sur $\mathbb{R}$.

Pour la linéarité de l'intégrale, il est encore primordial d'avoir la

***Proposition 37** (Sous-espace des fonctions CPM)*

$\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace* $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ *et* $\mathcal{C}^0_{\mathbb{K}}([a,b])$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Démonstration:

On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

— $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$: avec les notations de la définition, les fonctions $\left|\widetilde{f_i}\right|$ étant continues sur des segments, elles admettent chacune un maximum. Le nombre

$$M = \max\left(\max_{0\leq i\leq n} |f(x_i)|, \max_{1\leq i\leq n}\left(\max_{[x_{i-1},x_i]}\left|\widetilde{f_i}\right|\right)\right)$$

est alors un majorant de $|f|$, donc f est bornée.

— La fonction constante de valeur 0, est bien CPM (prendre la subdivision (a,b)).

— Soient $f, g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On prend $\sigma, \sigma' \in \Sigma_{a,b}$ telles que σ soit subordonnée à f et σ' à g. Par le lemme de raffinement commun, il existe $\sigma'' \in \Sigma_{a,b}$ plus fine que σ et σ'. Par le lemme de raffinement d'une subordonnée, σ'' est subordonnée à la fois à f et g. On note $\sigma'' = (x''_k)_{k=0}^{p}$. Alors, pour $k \in [\![1,p]\!]$, $f|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ et $g|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ se prolongent en des fonctions continues, donc $(\lambda f + g)|_{]x''_{k-1},x''_k[}$ aussi (on prend la CL des prolongements). On a donc $\lambda f + g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Ainsi, $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est stable par combinaisons linéaires.

Donc $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est bien un sous-espace de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

On a déjà vu que $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et que $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$, donc $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$. De même pour $\mathcal{C}^0_{\mathbb{K}}([a,b])$ dont on savait depuis longtemps que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

$\square$

Remarque 38 Comme, de plus, $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ contient la fonction constante de valeur 1 et est stable par produit (démonstration analogue à la stabilité par CL), c'est en fait une sous-algèbre de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

2 Intégrale d'une fonction CPM sur un segment

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Commençons par un exercice graphique préparatoire :

Exercice 39

1. Dessiner au stylo le graphe d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.
2. Prendre un $\varepsilon > 0$ "graphiquement pas trop grand" et tracer au crayon les graphes de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.
3. Tracer aussi au crayon le graphe d'une fonction en escalier φ qui vérifie

$$\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

4. Tracer au stylo les graphes de $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.
5. Déterminer graphiquement un encadrement de $\int_a^b f$ en fonction de $I(\varphi)$.
6. Que peut-on dire dans le cas d'une fonction f CPM sur $[a,b]$?

Et une réminiscence :

Exercice 40 Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide et $f, g \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(D)$. Montrer que $\{|f(x) - g(x)|\,;\ x \in D\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant une fonction f CPM sur $[a,b]$ et raisonnons par analyse-synthèse "métamathématique" :

Méta-analyse. Supposons qu'on sache donner un sens à $\int_a^b f$ en tant qu'"aire sous la courbe" de f. Le résultat "vu" dans le premier exercice nous dit que, pour φ en escalier sur $[a,b]$, on a nécessairement

$$I(\varphi) - (b-a) \sup_{[a,b]} |\varphi - f| \leq \int_a^b f \leq I(\varphi) + (b-a) \sup_{[a,b]} |\varphi - f|\,.$$

Si on peut trouver des fonctions en escalier φ avec des quantités $\sup_{[a,b]} |\varphi - f|$ aussi petites qu'on veut, on connaîtra alors $\int_a^b f$ par passage à la limite.

Méta-synthèse. En pratique, on approche f par une suite de fonctions en escalier (φ_n) telle que $\lim \left(\sup_{[a,b]} |\varphi_n - f|\right) = 0$. Une telle approximation de f est appelée une "approximation uniforme", car la manière dont $|\varphi_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 peut être contrôlée par une quantité indépendante de $x \in [a,b]$. On montre qu'il existe de telles approximations uniformes de f par des suites de fonctions en escalier, puis que, pour chaque telle suite, la suite des intégrales de ces fonctions en escalier converge et enfin que la limite de dépend pas de la suite approximante choisie. L'intégrale ainsi définie est alors bien compatible avec l'interprétation géométrique en terme d'aires.

Définition 41 (**Convergence uniforme d'une suite de fonctions**)
Soit $D \subset \mathbb{R}$ non vide quelconque.
Pour une suite (g_n) de fonctions bornées sur D et g une fonction bornée sur D (à valeurs dans $\mathbb{K}$), on dit que (g_n) *converge uniformément* (CVU) vers g sur D ssi

$$\sup_{x \in D} |g_n(x) - g(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 42 La quantité $\sup_{x \in D} |g_n(x) - g(x)| = \sup\{|g_n(x) - g(x)|\,;\ x \in D\}$ est bien définie d'après l'exercice 40.

Exercice 43 Avec ces notations, lorsque, pour tout $x \in D$, $\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x)$, on dit que la suite (g_n) *converge simplement* (CVS), ou *ponctuellement*, vers g sur D.

1. Écrire avec des quantificateurs cette convergence simple.
2. Écrire avec des quantificateurs le fait que (g_n) CVU vers g.
3. Comparer logiquement ces deux définitions.
4. Dessiner un exemple d'une suite de fonctions qui converge uniformément vers 0.
5. Donner une exemple pour lequel on a CVS vers 0 mais pas CVU, d'abord pour $D = \mathbb{R}$, puis pour $D = [0,1]$.

Définition de l'intégrale

Lemme 44 ***(Approximation uniforme par des fonctions en escalier)***
Pour toute $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui CVU vers f.

Démonstration:

Commençons par démontrer le résultat dans le cas d'une fonction continue. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{K}}([a,b])$. Il nous suffit de construire une suite $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Heine, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est uniformément continue. La définition de l'uniforme continuité appliquée à "$\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$" fournit un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b], \quad \left(|x-y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n+1} \right).$$

On choisit alors un $k \in \mathbb{N}^\star$ assez grand pour que $\frac{b-a}{k} \leq \alpha$ (par exemple, $k = \lceil \frac{b-a}{\alpha} \rceil$) et on définit la subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0}^k$ comme la subdivision régulière à $k+1$ points :

$$\forall i \in [\![0,k]\!], \quad x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{k}.$$

On définit alors la fonction $\varphi_n \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ par

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi_n|_{[x_{i-1},x_i[} = f(x_{i-1}) \\ \varphi_n(b) = f(b). \end{cases}$$

Soit $i \in [\![1,k]\!]$. On a alors, pour $x \in [x_{i-1}, x_i[$, puisque $0 \leq x - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k} \leq \alpha$,

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = |f(x_{i-1}) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

De plus, $|\varphi_n(b) - f(b)| = 0 \leq \frac{1}{n+1}$, donc finalement

$$\sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la suite (φ_n) CVU vers f.

Pour le cas continu par morceaux, on approche, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, sur chaque morceau, la restriction de f par une fonction en escalier à $\frac{1}{n+1}$ près comme ci-dessus, puis on définit une fonction en escalier par recollement en choisissant aux points de recollements, de prendre la valeur de f, ce qui conserve la majoration uniforme en $\frac{1}{n+1}$.

$\square$

***Théorème 45** (Définition de l'intégrale d'une fonction CPM)*

Soit $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$.

Pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui CVU vers f, la suite de leurs intégrales $(I(\varphi_n))_n$ CV et sa limite est indépendante du choix de la suite de fonctions en escalier qui CVU vers f,

On appelle cette limite l'intégrale de f entre a et b et on la note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration:

Soit une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui CVU vers f.

Première étape : on commence par trouver une suite extraite de $(I(\varphi_n))$ qui converge en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstraβ.

Comme $\sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, cette suite est bornée, *i.e.* il existe un $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad |\varphi_n(x) - f(x)| \leq M_1.$$

Comme $\mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$, il existe $M_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M_2$.

Soit $n \geq N$. On a alors, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|\varphi_n(x)| = |\varphi_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq M_1 + M_2.$$

Par inégalité de norme et croissance de l'intégrale des fonctions en escalier,

$$|I(\varphi_n)| \leq I(|\varphi_n|) \leq I(M_1 + M_2) = (b-a)(M_1 + M_2).$$

La suite $(I(\varphi_n))$ est donc une suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ et, par le théorème de Bolzano-Weierstraβ, il existe une extractrice θ telle que la suite $(I(\varphi_{\theta(n)}))$ converge. On note $\ell \in \mathbb{K}$ sa limite.

Deuxième étape : on montre que la suite $(I(\varphi_n))$ CV vers ℓ, en se servant de la définition de la limite et en approchant uniformément les φ_n par des termes de la suite extraite. Cette approximation uniforme se prouve par inégalité triangulaire en "passant par" la fonction f.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim I(\varphi_{\theta(n)}) = \ell$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|I(\varphi_{\theta(n)}) - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme (φ_n) CVU vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a,b], \quad |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

On note alors $n_1 = \max(n_0, N)$. Comme $\theta(n_1) \geq n_1 \geq N$, alors

$$\forall x \in [a,b], \quad \left|\varphi_{\theta(n_1)}(x) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Soit $n \geq N$. Pour $x \in [a,b]$, on a alors

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_{\theta(n_1)}(x)\right| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| + \left|f(x) - \varphi_{\theta(n_1)}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

et, par linéarité, inégalité de norme et croissance de l'intégrale des fonctions en escalier,

$$\left|I(\varphi_n) - I(\varphi_{\theta(n_1)})\right| = \left|I\left(\varphi_n - \varphi_{\theta(n_1)}\right)\right| \leq I\left(\left|\varphi_n - \varphi_{\theta(n_1)}\right|\right) \leq I\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$|I(\varphi_n) - \ell| \leq \left|I(\varphi_n) - I(\varphi_{\theta(n_1)})\right| + \left|I(\varphi_{\theta(n_1)}) - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad |I(\varphi_n) - \ell| \leq \varepsilon,$$

i.e.

$$\boxed{\text{la suite } (I(\varphi_n)) \text{ CV vers } \ell.}$$

Troisième étape : on montre enfin que la limite ne dépend pas de la suite de fonctions en escalier qui CVU vers f choisie.

Pour cela, on prend une autre suite $(\psi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f et on note $\ell' = \lim I(\psi_n)$, qui existe en appliquant ce qu'on vient de démontrer à la suite (ψ_n).

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\ell \neq \ell'$ et notons $\varepsilon = |\ell - \ell'| > 0$. Comme précédemment, par CVU, il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N, \ \forall x \in [a,b], \quad |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$
$$\forall n \geq N', \ \forall x \in [a,b], \quad |\psi_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

On pose $p = \max(N, N')$ et on a, par inégalité triangulaire, pour $n \geq p$,

$$\forall x \in [a,b], \quad |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}$$

et, comme précédemment,

$$|I(\varphi_n) - I(\psi_n)| \leq (b-a) \cdot \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Par continuité de la valeur absolue et stabilité des inégalités larges par passage à la limite, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\varepsilon = \left|\ell - \ell'\right| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

et comme $\varepsilon > 0$, $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui fournit la contradiction cherchée. Donc $\ell = \ell'$.

Ainsi, la limite des intégrales d'une suite de fonctions en escalier qui CVU vers f ne dépend pas de la suite choisie, ce qui achève la preuve du théorème et permet de définir l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$.

□

Remarque 46 En particulier, si $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$, alors on peut lui appliquer la définition ci-dessus et, en prenant la suite de fonctions en escalier constante égale à φ (pour tout n, $\varphi_n = \varphi$), on a bien sûr

$$\int_a^b \varphi = I(\varphi).$$

Nous oublierons désormais la notation provisoire $I(\varphi)$.

3 Propriétés de cette intégrale

Sans surprise, cette intégrale vérifie les mêmes propriétés que celle des fonctions en escalier, qu'elle généralise.

Proposition 47

1. ***(Linéarité)*** *L'application*

$$\widetilde{I}_{a,b} : \begin{cases} \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{cases}$$

est une forme linéaire.

2. ***(Positivité)***

$$\forall f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad \left(f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0 \right).$$

3. ***(Croissance)***

$$\forall f,g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{R}}([a,b]), \quad \left(f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \right).$$

4. ***(Inégalité de norme)***

$$\forall f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]), \quad \left(|f| \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b]) \text{ et } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \right).$$

5. ***(Relation de Chasles)*** *Pour $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $c \in]a,b[$, on a $f|_{[a,c]} \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,c])$, $f|_{[c,b]} \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([c,b])$ et*

$$\int_a^b f = \int_a^c f|_{[a,c]} + \int_c^b f|_{[c,b]}.$$

Démonstration: À faire en exercice.

Correction de l'exercice :

1. Soient $f,g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe, par le lemme d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, deux suites $(\varphi_n), (\psi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ qui CVU respectivement vers f et g. Comme $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b])$ est un sous-espace de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}([a,b])$, $(\lambda\varphi_n + \psi_n)$ est une suite de fonctions en escalier. Montrons qu'elle CVU vers $\lambda f + g$.
   Pour un $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|(\lambda\varphi_n + \psi_n)(x) - (\lambda f + g)(x)| \quad = \quad |\lambda(\varphi_n(x) - f(x)) + (\psi_n(x) - g(x))|$$

$$\begin{aligned}&\leq |\lambda| \, |\varphi_n(x) - f(x)| + |\psi_n(x) - g(x)| \\ &\leq |\lambda| \sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| + \sup_{[a,b]} |\psi_n - g| .\end{aligned}$$

Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants,

$$\sup_{[a,b]} |(\lambda\varphi_n + \psi_n) - (\lambda f + g)| \leq |\lambda| \sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| + \sup_{[a,b]} |\psi_n - g| .$$

Comme $\lim \left(\sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| \right) = \lim \left(\sup_{[a,b]} |\psi_n - g| \right) = 0$ par CVU, on a finalement

$$\sup_{[a,b]} |(\lambda\varphi_n + \psi_n) - (\lambda f + g)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i.e. la suite de fonctions en escalier $(\lambda\varphi_n + \psi_n)$ CVU vers $\lambda f + g$.
D'après le théorème précédent,

$$\int_a^b (\lambda\varphi_n + \psi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b (\lambda f + g).$$

Cependant, l'intégrale des fonctions en escalier et la limite sont linéaires, donc

$$\int_a^b (\lambda\varphi_n + \psi_n) = \lambda \int_a^b \varphi_n + \int_a^b \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

et, par unicité de la limite,

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Soit $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{R}}([a,b])$ telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ et $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{R}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f.
Soit $\varepsilon > 0$. Par CVU, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varphi_n \leq f + \frac{\varepsilon}{b-a}$, donc, par positivité de f,
$$\forall n \geq N, \quad \varphi_n \geq -\frac{\varepsilon}{b-a}.$$
Par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier,
$$\forall n \geq N, \quad \int_a^b \varphi_n \geq -(b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = -\varepsilon.$$
Par passage à la limite dans une inégalité large, quand n tend vers $+\infty$,
$$\int_a^b f \geq -\varepsilon.$$
Comme cela est valable pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\int_a^b f \geq \sup\left\{-\varepsilon ; \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star\right\} = \sup \mathbb{R}_-^\star = 0.$$
3. La croissance est une conséquence directe de la linéarité et la positivité, en toute généralité.
4. Soit $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f. Rappelons que les fonctions $|\varphi_n|$ sont en escalier.
Montrons que $(|\varphi_n|)$ CVU vers $|f|$. On a, pour $x \in [a,b]$, par la seconde inégalité triangulaire,
$$||\varphi_n|(x) - |f|(x)| = ||\varphi_n(x)| - |f(x)|| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \sup_{[a,b]} |\varphi_n - f| .$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants,

$$\sup_{[a,b]} ||\varphi_n| - |f|| \leq \sup_{[a,b]} |\varphi_n - f|,$$

puis, par le théorème des gendarmes,

$$\sup_{[a,b]} ||\varphi_n| - |f|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i.e. $(|\varphi_n|)$ CVU vers $|f|$.
L'inégalité de norme pour les fonctions en escalier donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b \varphi_n \right| \leq \int_a^b |\varphi_n|.$$

Par le théorème précédent, par CVU, les limites des suites des intégrales des fonctions en escalier φ_n et $|\varphi_n|$ sont les intégrales de f et $|f|$. Par passage à la limité dans l'inégalité large précédente,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

5. Soit $c \in]a,b[$, $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ et $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}_{\mathbb{K}}([a,b]))^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f.
Les $\varphi_n|_{[a,c]}$ sont clairement en escalier et $\sup_{[a,c]} |\varphi_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |\varphi_n - f|$, donc la suite $\left(\varphi_n|_{[a,c]}\right)$ CVU vers $f|_{[a,c]}$. De même, $\left(\varphi_n|_{[c,b]}\right)$ est une suite de fonctions en escalier qui CVU vers $f|_{[c,b]}$. En utilisant la relation de Chasles pour les intégrales des fonctions en escalier, puis passant à la limite, on obtient le résultat voulu.

□

Remarque 48 (**Abus de notation**)

En pratique, lorsqu'on prend l'intégrale d'une restriction, comme dans la proposition ci-dessus, on ne note pas la restriction. Ainsi, par exemple, la relation de Chasles s'écrit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Par ailleurs, voici un résultat très utile :

Proposition 49 ***(Intégrale d'une fonction continue de signe constant)***

L'intégrale sur un segment (non trivial) d'une fonction continue de signe constant (au sens large) est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Démonstration: En exercice.

Correction de l'exercice.

On note $[a,b]$ un segment non trivial (*i.e.* $a < b$) et f une fonction continue de signe constant sur $[a,b]$. Quitte à changer f en $-f$, on suppose que $f \geq 0$, ce qui ne change pas la nullité éventuelle de l'intégrale.

Si $f = 0$, la linéarité de l'intégrale (par exemple) donne $\int_a^b f = 0$.

Si $f \neq 0$, il existe un $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. En appliquant la définition de la continuité de f en x_0 à "$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$", on obtient un $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in [a,b]$,

$$|x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}.$$

Le segment $S = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [a,b] = [\max(x_0 - \alpha, a), \min(x_0 + \alpha, b)]$ est non trivial par disjonction de cas :

— si $x_0 > a$, alors $\max(x_0 - \alpha, a) < x_0$ et $x_0 \leq \min(x_0 + \alpha, b)$, donc $\max(x_0 - \alpha, a) < \min(x_0 + \alpha, b)$;

— si $x_0 = a$, alors $x_0 < b$ et $\max(x_0 - \alpha, a) = x_0 < \min(x_0 + \alpha, b)$.

En notant $S = [c,d]$, on a $a \leq c < d \leq b$ et la relation de Chasles (appliquée deux fois) et la positivité de f donnent

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq \int_c^d f.$$

De plus, pour $x \in S$, $\frac{f(x_0)}{2} \geq |f(x) - f(x_0)| \geq f(x_0) - f(x)$, donc $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ puis, par croissance de l'intégrale,

$$\int_c^d f \geq (d - c)\frac{f(x_0)}{2} > 0,$$

donc $\int_a^b f > 0$.

$\square$

Remarque 50 Ce résultat sert surtout lorsque la fonction f n'est pas connue, dans le cadre d'exercices abstraits.

4 Extension aux cas $a = b$ et $a > b$

Soit f une fonction CPM sur un intervalle non trivial I.

On peut donc intégrer f sur tout segment inclus dans I.

Définition 51 On *étend* alors la définition de l'*intégrale entre a et b* à des bornes quelconques $a, b \in I$:

— si $a < b$, $\int_a^b f$ est l'intégrale de $f|_{[a,b]}$;

— si $a = b$, on pose $\int_a^b f = 0$;

— si $a > b$, on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

On peut alors étendre, avec certains aménagements, les propriétés démontrées précédemment :

Proposition 52 *Soit I un intervalle non trivial et $a, b, c \in I$. On a les propriétés suivantes, en notant* sgn *la fonction signe :*

1. ***(Linéarité)***

$$\forall f, g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}(I),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. ***(Positivité)***

$$\forall f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{R}}(I), \quad \left(f \geq 0 \implies \operatorname{sgn}(b - a) \int_a^b f \ \geq 0 \right).$$

3. ***(Croissance)***

$$\forall f,g \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{R}}(I), \quad \left(f \leq g \implies \operatorname{sgn}(b-a)\int_a^b f \;\leq\; \operatorname{sgn}(b-a)\int_a^b g\right).$$

4. ***(Inégalité de norme)***

$$\forall f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}(I), \quad \left(|f| \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}(I) \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f\right| \;\leq\; \operatorname{sgn}(b-a)\int_a^b |f|\right).$$

5. ***(Relation de Chasles)***

$$\forall f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}(I), \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration: En exercice. Ce sont des conséquences rapides des propriétés précédentes et de la définition de l'extension. Pour la relation de Chasles, faire une disjonction de cas sur les positions relatives des réels a,b,c. □

V Sommes de Riemann

Malgré tout ce que le nom de cette section du programme peut évoquer à ceux qui connaissent la théorie de l'intégrale de Riemann, on ne considère ici que le cas très particulier d'une subdivision de pas constant avec évaluation de f en les extrémités gauche (resp. droite) des sous-intervalles, autrement dit, on est dans le cas de la formule des rectangles (avec “points gauches” ou avec “points droits”).

Théorème 53 *Si $f \in \mathrm{CPM}_{\mathbb{K}}([a,b])$ (avec $a < b$), alors*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Démonstration: Le programme de MPSI stipule que la démonstration est exigible seulement dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, ce qui semble indiquer qu'on doit se passer du théorème de Heine (en utilisant à la place l'inégalité des accroissements finis).

On donne d'abord une telle démonstration et on explique ensuite rapidement comment on ferait la démonstration générale.

Démonstration exigible. Soient $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Comme f' est continue sur un segment, sa valeur absolue admet un maximum, qu'on note $M = \max_{[a,b]} |f'|$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, en notant, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}$ et en appliquant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de norme et l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f\right| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x_k)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x_k)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}M(x_k-x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}M\frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{M(b-a)^2}{n^2} \\
&= \frac{M(b-a)^2}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}
$$

L'autre limite s'en déduit en remarquant que

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+\frac{b-a}{n}(f(a)-f(b))$$

et que $\frac{b-a}{n}(f(a)-f(b))\to 0$.

Cas général. Considérons d'abord le cas continu. Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$. Elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. On démontre la convergence voulue en revenant à la définition de la limite.

Soit $\varepsilon>0$. On choisit alors, par uniforme continuité de f, un $\alpha>0$ tel que

$$\forall x,y\in[a,b],\quad \left(|x-y|\le\alpha \implies |f(x)-f(y)|\le\frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

On a alors, comme ci-dessus, pour $n\ge N=\left\lceil\frac{b-a}{\alpha}\right\rceil$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x_k)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x_k)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

On a donc montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\ge N,\quad \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f\right|\le\varepsilon,$$

i.e.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_a^b f.$$

Pour le cas continu par morceaux, il faudrait en plus contrôler les termes de la somme correspondant aux intervalles qui contiennent des points d'une subdivision subordonnée à f qu'on fixe au départ. Ces termes sont en nombre fini fixe, alors que le nombre de termes de la somme tend vers $+\infty$. Ils dépendent d'une part du pas $\frac{b-a}{n}$, qui tend vers 0, et d'autre part des valeurs de f, qui sont bornées, ce qui permet facilement ce contrôle. Le reste est pure technicité. $\square$

Exercice 54 On montre en utilisant ce théorème les limites suivantes $\bigoplus$

1. $u_n = \sum_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{p^2}{n^4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$;
2. $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{8p^3+n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 3}{12}$;
3. $a_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\exp\left(\frac{\pi}{2}-2\right)$;
4. $b_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\mathrm{e}}$.

VI Théorème fondamental de l'analyse et primitives

Dans cette section, I représente un intervalle non trivial, *i.e.* non vide et non réduit à un point. Du reste, tous les intervalles considérés sont supposés non triviaux.

Comme on l'a déjà vu, ce théorème fait le lien entre la notion d'intégrale et la notion de dérivée.

On rappelle ici son énoncé et ses conséquences déjà vus, et en donne enfin une preuve.

Théorème 55 Théorème fondamental de l'analyse.

*Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Alors la fonction*

$$F_a : x \longmapsto \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I.

Démonstration: Soit $x_0 \in I$. On forme le taux d'accroissement de la fonction F_a en x_0 et on majore sa “distance” à $f(x_0)$.
Soit $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in I$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{\operatorname{sgn}(h)}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On montre alors que le taux d'accroissement tend vers $f(x_0)$ en utilisant la définition de la limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \quad (|t-x_0| \leq \alpha \implies |f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon).$$

Il s'ensuit que, si $|h| \leq \alpha$,

$$\operatorname{sgn}(h) \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, \mathrm{d}t \leq \operatorname{sgn}(h) \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, \mathrm{d}t = |h| \varepsilon$$

donc

$$\left| \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x_0),$$

i.e. F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

Cela étant valable pour tout $x_0 \in I$, $F_a' = f$. □

Exercice 56 Avec les notations précédentes, si on suppose seulement la fonction f CPM, montrer que la fonction F_a est continue.

Ce théorème a plusieurs conséquences immédiates et importantes :

Corollaire 57 Existence de primitives
Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Démonstration: C'est trivial par le théorème précédent. □

Il y a une forme d'"unicité" pour ces primitives.

Lemme 58 Unicité des primitives à constante additive près sur un intervalle
Deux primitives d'une même fonction sur un **intervalle** *diffèrent d'une constante additive.*

Démonstration: Leur différence est une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** et elle est donc constante. □

Remarque 59 **Attention**, dans le cas d'une fonction définie sur une réunion disjointe d'intervalles, il y a une constante par intervalle.

Corollaire 60 Calcul d'une intégrale par primitive
Si f est continue sur I, F est une primitive quelconque de f et $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad (=: [F]_a^b)).$$

Démonstration: On note encore $F_a : x \longmapsto \int_a^x f$, qui est une primitive de f d'après le théorème fondamental, puisque f est continue sur I. Les fonctions F et F_a étant deux primitives de f sur l'intervalle I, elles diffèrent d'une constante additive, donc

$$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f.$$

□

VII Intégration par parties et changement de variables

On ne fait que rappeler pour mémoire les énoncés de ces résultats fondamentaux, les démonstrations et la pratique étant expressément à revoir dans le chapitre sur les primitives.

1 Intégration par parties

***Théorème 61** IPP, version intégrales*

$$\forall u,v \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(I),\ \forall a,b \in I,\quad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Remarque 62 On rappelle qu'en pratique, on utilise obligatoirement, pour lever toute ambiguïté sur les fonctions u et v, le formalisme suivant :

$$\left[\begin{array}{rcl} u &=& \text{“fonction de } x\text{”} \\ \mathrm{d}v &=& \text{“fonction de } x\text{”} \times \mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u &=& \text{“fonction de } x\text{”} \times \mathrm{d}x \\ v &=& \text{“fonction de } x\text{”} \end{array}\right.$$

et qu'il suffit alors de remplacer ces expressions dans la formule

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a - \int_a^b v\,\mathrm{d}u,$$

après avoir bien sûr vérifié que les fonctions “u” et “v” sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle considéré.

Exercice 63 Montrer par deux intégrations par parties que

$$\int_0^1 x(\operatorname{Arctan}(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

***Théorème 64** IPP, version primitives*

$$\forall u,v \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(I),\quad \int uv' = uv - \int u'v.$$

Remarque 65 Le même formalisme que pour l'IPP des intégrales est **requis**.

Remarque 66 L'égalité ci-dessus s'interprète ainsi : si G est une primitive de uv' et H une primitive de $u'v$, alors il existe une constante $C \in \mathbb{K}$, telle que $G = uv - H + C$.

Exercice 67 Trouver une primitive de $\ln^3 : x \longmapsto (\ln(x))^3$. La vérifier en dérivant.

2 Changement de variables

***Théorème 68** Changement de variable, version intégrales*

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$, f est une fonction continue sur $\varphi(I)$ et $a,b \in I$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

*La fonction φ est appelée le **changement de variable**.*

Remarque 69 On rappelle qu'en pratique, on utilise obligatoirement le formalisme suivant :

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & \text{“fonction de } t\text{”} \\ \mathrm{d}x & = & \text{“fonction de } t\text{”} \times \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

et qu'il suffit alors de remplacer ces expressions dans la formule

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

en prenant bien soin de changer les bornes en a et b, tout cela après avoir vérifié les **hypothèses** du théorème.

Remarque 70 Étant données les hypothèses à vérifier pour effectuer un changement de variables, on préférera intégrer à vue chaque fois que c'est possible, comme dans les exemples vus précédemment. La rédaction en est grandement simplifiée.

Remarque 71 Dans le cas particulier ou le changement de variable est une fonction affine, les hypothèses du théorème sont automatiquement vérifiées, à condition bien sûr que la première intégrale soit bien définie (par continuité de f, avec les notations du théorème). Dans ce cas, on donnera comme **seule justification** qu'on fait un **changement de variable affine**.

Exercice 72 Montrer que

$$\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \ln\frac{3}{2}.$$

Théorème 73 Changement de variable, version primitives

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$, f est une fonction continue sur $\varphi(I)$ et si de plus $(\forall x \in I,\ \varphi'(x) \neq 0)$, alors, pour toute primitive ψ de $(f\circ\varphi)\varphi'$, la composée $\psi\circ\varphi^{-1}$ est une primitive de f.

*Cela se traduit par l'**abus de notation** suivant*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t) + C^{te} = \psi\circ\varphi^{-1}(x) + C^{te}.$$

Remarque 74 Le même formalisme que pour le changement de variables dans les intégrales est **requis**.

Exercice 75 Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$, en utilisant le changement de variables “$t = \tan\frac{x}{2}$” sur des intervalles convenables et en “recollant les morceaux”.

VIII Calcul des primitives

Revoir **impérativement** le chapitre très détaillé du début d'année, en particulier la stratégie de primitivation donnée à la fin.

IX Formules de Taylor

Contrairement à la formule de Taylor-Young vue dans le chapitre d'analyse asymptotique, qui était un développement limité, ces formules de Taylor s'appliquent entre deux points fixés.

Théorème 76 *(Formules de Taylor)*

Soient I un intervalle non trivial, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et a, b deux points quelconques de I.

On note

$$R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

qui vérifie alors :

1. ***la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre** n **:***

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2. ***l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre** n **:***

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec} \quad M = \max_{[\min(a,b), \max(a,b)]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Démonstration:

1. La démonstration se fait par récurrence finie à l'aide d'une intégration par parties.

   On pose, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathcal{A}_p : \quad f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

   Initialisation. Pour $p = 0$, on a bien, par continuité de f' et le théorème fondamental de l'analyse,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t.$$

   Hérédité. Supposons que $\mathcal{A}_p$ soit vérifiée pour un certain $p \in [\![0, n-1]\!]$ et montrons $\mathcal{A}_{p+1}$. On pose l'intégration par parties

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{rcl} u & = & f^{(p+1)}(t) \\ \mathrm{d}v & = & \frac{(b-t)^p}{p!}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.\right. \qquad \left[\!\!\left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & f^{(p+2)}(t)\, \mathrm{d}t \\ v & = & -\frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} \end{array} \right.\right.$$

   qui est justifiée car $f^{(p+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (puisque $p+1 \leq n = (n+1)-1$) et $t \longmapsto -\frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, car de classe $\mathcal{C}^\infty$, puisque c'est une fonction polynôme.

   Cette intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt &= \left[-f^{(p+1)}(t) \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= f^{(p+1)}(a) \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{A}_{p+1}$ est vérifiée.

   Par le principe de récurrence, $\mathcal{A}_n$ est vérifiée, *i.e.* la formule de Taylor avec reste intégral est prouvée.

2. C'est une conséquence directe du résultat précédent :

$$\begin{aligned}
|R_n| \leq \operatorname{sgn}(b-a)\int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right| dt &\leq M\cdot\operatorname{sgn}(b-a)\int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}dt \\
&= M\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt\right| \\
&= M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

Remarque 77 On verra peut-être en exercice que les hypothèses de ce dernier théorème ne sont pas optimales : il suffit que f soit $n+1$ fois dérivable sur I et que sa dérivée soit bornée sur $[\min(a,b),\max(a,b)]$.

Exercice 78

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

2. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sum\frac{x^n}{n!}$ CV et déterminer sa somme.

Exercice 79

1. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$ entre 0 et 1 à l'ordre n.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| \leq \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer la convergence de la série harmonique alternée et déterminer sa somme.