DS3 de mathématiques, partie raisonnement, vendredi 10 novembre 2023 (2h00)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Exercice 1 Calculer $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\tan(x)}{42+\cos^{1966}(x)+\operatorname{ch}^{2024}(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

1. Montrer que $\quad \forall u \in \mathbb{R}_+,\ \sin(\operatorname{Arctan}(u)) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^4(t)}$ par un changement de variables judicieux.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4(x)\cos^4(x)} = \frac{352\sqrt{3}}{27}$.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x^2y' + (1-x)y = 1$.

1. Résoudre l'équation homogène sur les intervalles $\mathbb{R}_-^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Calculer $\displaystyle\int t^{-3}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

   Pour cela, par une intégration par parties, on l'exprimera en fonction de $\displaystyle\int t^{-2}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.
3. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $\mathbb{R}_-^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$.
4. $\star$ Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème

On considère la fonction

$$f: \quad x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

On définit la fonction "signe"

$$\operatorname{sgn}: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Enfin, on rappelle que deux fonctions ayant la même dérivée **sur un intervalle** diffèrent d'une constante.

1. Montrer soigneusement que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier les réponses.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer trois réels $a<b<c$ tels que la fonction f soit dérivable sur les intervalles $]-\infty,a[$, $]a,b[$, $]b,c[$ et $]c,+\infty[$ et prouver soigneusement cette dérivabilité.

5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\operatorname{sgn}(1-x^2) + \operatorname{sgn}(x)\right).$$

6. En déduire une expression simple de f sur chacun des intervalles $]-\infty,a]$, $[a,b]$, $[b,c]$ et $[c,+\infty[$.
7. Déduire de ce qui précède les variations de f ainsi que ses limites aux bornes. Le graphe de f admet-il des asymptotes ?
8. Tracer l'allure du graphe de f.
9. Soit $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $u = \tan\dfrac{t}{2}$.
   (a) Montrer que $u = \dfrac{e^{\mathrm{i}t}-1}{\mathrm{i}\,(e^{\mathrm{i}t}+1)}$.
   (b) Exprimer $e^{\mathrm{i}t}$, puis $\cos(t)$ et $\sin(t)$, en fonction de u.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de f sur l'intervalle $[b,c]$.
   (d) Retrouver de la même manière les expressions de f sur les trois autres intervalles.