Exercices d'intégration

Exercice 1 Repasser en revue rapidement tous les exercices de la feuille sur les primitives pour vous assurer que vous en maîtrisez les méthodes.

Exercice 2 Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ ($a<b$). On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$L_n=\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n=0$.

Exercice 3 Calculer les éventuelles limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{p^2}{n^4}}$
2. $v_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{p^2}{8p^3+n^3}$
3. $(\star)$ $a_n=\frac{1}{n^2}\prod\limits_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$
4. $(\star)$ $b_n=\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$

Exercice 4 $(\star\star\star)$ En utilisant un argument de symétrie, puis un changement de variables $t=2u$, montrer que

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t=\right)\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Exercice 5 En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x\longmapsto\ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1\frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 6

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ en utilisant la règle de d'Alembert et en déduire la convergence de la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_n$ et sa limite.
2. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déduire du résultat précédent que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$
3. Pour $x\in\mathbb{R}$, prouver de manière analogue les convergences et donner les sommes des séries
$$\sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p}}{(2p)!},\quad \sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!},\quad \sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!},\quad \sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$
4. Pour $x\in]-1,1[$, que peut-on dire de la convergence et de la somme série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$?
5. Même question pour $x=1$.

Exercice 7 $(\star)$ Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\dfrac{2x\mathrm{e}^n}{n(x^2\mathrm{e}^n+n)}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. La convergence de (f_n) est-elle uniforme ?
3. Pour $n\geq 1$, calculer $I_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=1$.
   Pouvait-on prévoir la réponse à la question précédente ?