Exercices sur les systèmes linéaires et la méthode du pivot

Exercice 1 Trouver l'intersection des deux droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations $-2x+y=3$ et $x-y=-4$. Confirmer expérimentalement votre résultat en traçant les deux droites sur un graphique.

On résout le système $\left\{\begin{array}{rrcr} x & -y & = & -4 \\ -2x & +y & = & 3 \end{array}\right.$ par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Donc le système admet comme unique solution le point $(1,5)$ et l'intersection des deux droites est le singleton $\boxed{\{(1,5)\}.}$ Le dessin est laissé au lecteur.

Exercice 2 Les droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations $4x-3y=5$, $x+6y=35$ et $-2x+4y=10$ sont-elles concourantes ?

On cherche l'intersection des trois droites en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rrcr} x & +6y & = & 35 \\ 4x & -3y & = & 5 \\ -2x & +4y & = & 10 \end{array}\right.$ par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 35 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 10 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 35 \\ 0 & -27 & -135 \\ 0 & 16 & 80 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 35 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{27}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{16}L_3 \end{array} \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 35 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2$$

Le système ayant une unique solution $(5,5)$, les trois droites sont $\boxed{\text{concourantes}}$ en ce point.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

1.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 5 \\ x & & -z & = & 5 \end{array}\right.$$

On utilise la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{2}{3}L_2 \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_3 \\ \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2 \\ \\ \end{array} \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{3}{2}L_3 \end{array}$$

Donc le système admet comme unique solution $\boxed{(2,-2,-3).}$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -2z & = & 2 \\ 2x & +4y & -3z & = & 5 \\ 5x & +10y & -8z & = & 12 \end{array}\right.$$

On utilise la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 12 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Le système initial équivaut donc au système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 4-2y \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions du système est la droite affine de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\{(4-2y,y,1); y \in \mathbb{R}\} = (4,0,1) + \mathbb{R}(-2,1,0).}$$

Exercice 4 Quelles parties de $\mathbb{R}^3$ sont définies par les systèmes d'équations linéaires suivants ?

1.
$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -4y & -3z & = & -7 \\ -3x & +12y & +9z & = & 22 \end{array}\right.$$

Par la méthode du pivot, ce système équivaut au système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -4y & -3z & = & -7 & \\ & & 0 & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array}\right.$$

qui n'admet $\boxed{\text{pas de solutions.}}$
(Remarquons que le système est formé de deux équations de plans parallèles et distincts.)

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -4y & -3z & = & -7 \\ -3x & +12y & +9z & = & 21 \end{array}\right.$$

Par la méthode du pivot, ce système équivaut au système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -4y & -3z & = & -7 & \\ & & 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array}\right.$$

donc à l'équation $x - 4y - 3z = -7$ qui est une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $\boxed{(0,1,1)}$ et de vecteur normal $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.}$ Remarquons qu'il admet par exemple comme couple de vecteurs directeurs $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, puisque ce sont deux vecteurs non colinéaires dont les coordonnées vérifient l'équation homogène $x - 4y - 3z = 0$.

Exercice 5 Déterminer et représenter graphiquement les parties de $\mathbb{R}^3$ représentées par les trois systèmes linéaires suivants :

1.
$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

C'est un plan affine passant par le point $(1,0,0)$ et de couple de vecteurs directeurs $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} z & +x & +y & = & 1 \\ & x & -y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} z & & +2y & = & -1 \\ & x & -y & = & 2 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Donc l'ensemble des solutions du système est la droite affine

$$\boxed{\{(2+y, y, -1-2y); y \in \mathbb{R}\} = (2,0,-1) + \mathbb{R}(1,1,-2).}$$

3.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & 2 \\ & y & -z & = & 3 \end{array}\right.$$

On applique la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{1}{2}L_2 \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{1}{2}L_2 \quad \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{3}L_3 \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\boxed{\left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)\right\}.}$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

1.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & -2z & +3t & = & 2 \\ 3x & +2y & -z & +2t & = & 4 \\ 3x & +3y & +3z & -3t & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & -2z & +3t & = & 2 \\ 3x & +2y & -z & +2t & = & 4 \\ 3x & +3y & +3z & -3t & = & 7 \end{array}\right.$$

On peut appliquer la méthode du pivot soit à la matrice "doublement" augmentée :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} 2 & 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 6 & 7 \end{array}\right),$$

soit à la matrice augmentée à un paramètre réel λ :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & \lambda \end{array}\right),$$

soit plus généralement à la matrice augmentée à trois paramètres réels a, b et c :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 3 & a \\ 3 & 2 & -1 & 2 & b \\ 3 & 3 & 3 & -3 & c \end{array}\right),$$

ce qu'on choisit de faire ici. Cette matrice est alors équivalente par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}a+b \\ 0 & \frac{3}{2} & 6 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2}a+c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -2 & 3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-3b+c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -6 & 8 & 4a-2b \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-3b+c \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 4 & 2a-b \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -3a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-3b+c \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ \\ \end{array}.$$

Ainsi le système à paramètres a,b et c réels

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & -2z & +3t & = & a \\ 3x & +2y & -z & +2t & = & b \\ 3x & +3y & +3z & -3t & = & c \end{array}\right.$$

a des solutions si et seulement si $3a-3b+c=0$ et dans ce cas, l'ensemble des solutions est le plan affine $\{((2a-b)+3z-4t,(-3a+2b)-4z+5t,z,t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$ qui s'écrit aussi

$$(2a-b,-3a+2b,0,0)+\mathbb{R}(3,-4,1,0)+\mathbb{R}(-4,5,0,1).$$

En particulier, le premier système a comme ensemble de solutions

$$\boxed{(0,2,0,0)+\mathbb{R}(3,-4,1,0)+\mathbb{R}(-4,5,0,1).}$$

et le deuxième système n'admet $\boxed{\text{pas de solutions.}}$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -2z & +3t & = & 2 \\ 2x & +4y & -3z & +4t & = & 5 \\ 5x & +10y & -8z & +11t & = & 12 \end{array}\right.$$

On résout ce système par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions est le plan affine $\left\{(4-2y+t, y, 1+2t, t); (y,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$ qui s'écrit aussi

$$\boxed{(4,0,1,0)+\mathbb{R}(-2,1,0,0)+\mathbb{R}(1,0,2,1).}$$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x & +2y & -2z & +3t & -w & = & 2 \\ & & & 2t & -w & = & 24 \\ -5x & -10y & +8z & +t & -2w & = & 12 \\ 2x & +4y & -3z & -3t & +2w & = & -19 \end{array}\right.$$

On résout ce système par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 24 \\ -5 & -10 & 8 & 1 & -2 & 12 \\ 2 & 4 & -3 & -3 & 2 & -19 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & -23 \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 4 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 85 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{9}{2}L_3 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 136 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 85 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccccr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 136 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

Donc l'ensemble des solutions est le plan affine de $\mathbb{R}^5$:

$$\left\{(136-2y+\frac{1}{2}w, y, 85+\frac{1}{2}w, 12+\frac{1}{2}w, w) ; (y,w) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

qui s'écrit aussi

$$\boxed{(136,0,85,12,0)+\mathbb{R}(-2,1,0,0,0)+\mathbb{R}(1,0,1,1,2).}$$
