Fonctions de deux variables

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Cadre

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$ la norme associée, d la distance en découlant et $X=(x,y)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse aux fonctions $f\in\mathbb{R}^A$, où $A\subset\mathbb{R}^2$. On note $f(x,y)=f(X)$, pour $X\in A$.
En vue d'éviter les études délicates de f au voisinage de points du "bord" de A, on imposera que A ne comporte que des points "intérieurs", *i.e.* que A soit un "ouvert", qu'on notera alors U.
Ces notions sont définies dans la première section, ainsi que la notion de continuité, sur laquelle on ne fera aucune étude subtile.

I Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et continuité

Définition des boules ouvertes et fermées de centre $X\in\mathbb{R}^2$ et de rayon $r\in\mathbb{R}_+$.
Définition d'un point intérieur X_0 de A : il existe une boule ouverte de centre X_0 et de rayon non nul incluse dans A. Remarque qu'on peut remplacer "ouverte" par "fermée" dans cette définition.
Définition d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$: tous les points de U sont intérieurs.
Propriétés : le vide et $\mathbb{R}^2$ sont ouverts, toute réunion d'ouverts est ouverte, toute intersection finie d'ouverts est ouverte.
On montre que toute boule ouverte est ouverte et le complémentaire de toute boule fermée est ouvert.
Définition du graphe de f : $\mathcal{G}_f=\{(x,y,f(x,y));\ (x,y)\in U\}$, représentation en perspective avec xOy horizontal et Oz vertical.
Définition de la continuité de f en $X_0\in U$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall X\in U,\quad \mathrm{d}(X,X_0)\leq\alpha\Longrightarrow|f(X)-f(X_0)|\leq\varepsilon.$$

Définition de la continuité de f sur U : f est continue en tout point de U. Ensemble $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$ des fonctions continues sur l'ouvert U.
Opérations sur les fonctions continues en un point (respectivement sur U) : combinaisons linéaires, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas. Corollaire : $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^U$. Démonstration analogue à celle des fonctions d'une variable, laissée en exercice.

Théorème admis : sous de “bonnes hypothèses”, les composées de fonctions continues sont continues (en un point ou sur un ouvert). On en donne trois cas particuliers explicites, les seuls que nous considérerons :

1. $t \longmapsto f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$ avec x, y continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial I et $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$ telles que $\gamma(I) \subset U$;
2. $(u, v) \longmapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(V)$ et $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$ telles que $(\varphi, \psi)(V) \subset U$;
3. $g \circ f$ avec $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$ et g continue sur un intervalle non trivial I telles que $f(U) \subset I$.

Propriété : les “projections” $(x, y) \longmapsto x$ et $(x, y) \longmapsto y$, sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On remarque lors de la démonstration que toute fonction lipschitzienne est continue. Corollaire : toute fonction polynôme en x, y est continue sur $\mathbb{R}^2$. On démontre alors le lemme : pour toute $f \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$, $f^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Cela permet de dire que toute fonction rationnelle en x, y est continue sur son domaine de définition (qui est bien ouvert).

II Dérivées partielles

Définition des applications partielles de f au point X_0 : $x \longmapsto f(x, y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0, y)$.
Définition des dérivées partielles de f en X_0 lorsqu'elles existent : nombres dérivés des fonctions partielles ci-dessus aux points adéquats. Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Exemple classique de fonction admettant des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais qui est discontinue en l'origine.
Définition d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U : ses dérivées partielles existent en tout point de U et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions continues sur U.
Théorème : $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U) \subset \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$. Pas de preuve détaillée, mais l'idée est donnée.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U : combinaisons linéaires, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas. Corollaire : $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(U)$. Démonstration laissée en exercice : opérations sur les fonctions d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$, puisqu'on travaille sur les fonctions partielles.
Théorème admis (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1) : si $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ et $X_0 \in U$, alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + o(\|(h, k)\|),$$

où $o(\|(h, k)\|) = \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$ avec ε définie et continue au voisinage de $(0, 0)$ telle que $\varepsilon(0, 0) = 0$.
Pour $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ on a les résultats géométriques suivants :

— Équation du plan tangent à $\mathcal{G}_f$ au point (x_0, y_0, z_0), avec $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0);$$

— Vecteur gradient $\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ et reformulation du $DL_1(X_0)$:

$$f(X_0 + H) \underset{H\to(0,0)}{=} f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), H\rangle + o(\|H\|);$$

— Définition d'un point critique X_0 de f : $\nabla f(X_0) = 0_{\mathbb{R}^2}$;

— Pour X_0 non critique, $\nabla f(X_0)$ indique la direction dans laquelle f croît le plus vite.
Pour formaliser ce dernier point, on introduit la notion de dérivée de f suivant le vecteur H en X_0 : si elle existe, c'est

$$\partial_H f(X_0) = (t \longmapsto f(X_0+tH))'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(X_0+tH)-f(X_0)}{t}.$$

Propriétés immédiates : $\partial_{(0,0)} f(X_0) = 0$ existe toujours ; si $\partial_H f(X_0)$ existe et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial_{\lambda H} f(X_0)$ existe et vaut $\lambda \partial_H f(X_0)$.
Théorème : pour $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $X_0 \in U$ et $H = (h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_H f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k = \langle \nabla f(X_0), H\rangle.$$

Ainsi, pour X_0 non critique, $H = \frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$ est le vecteur de norme 1 tel que $\partial_H f(X_0)$ est maximum.

III Règle de la chaîne

Théorème admis : sous de "bonnes hypothèses", les composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On donne trois formules explicites, les seules que nous considérerons :

1. $t \longmapsto f(\gamma(t)) = f(x(t),y(t))$, avec $x,y \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$ et $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ telles que $\gamma(I) \subset U$, qui vérifie, pour $t \in I$,

$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t);$$

2. $F : (u,v) \longmapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$, avec $\varphi,\psi \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(V)$ et $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ telles que $(\varphi,\psi)(V) \subset U$, qui vérifie, pour tout $(u,v) \in V$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v);$$

3. $g\circ f$, avec $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ et $g \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$ telles que $f(U) \subset I$, qui vérifie, pour tout $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Application : pour $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(U)$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}(I)$ telle que $\gamma(I) \subset U$ et f soit constante sur $\gamma(I)$, on a, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$ (*i.e.* le gradient est orthogonal aux arcs paramétrés inclus dans un ensemble de niveau).

IV Extrema

Définition du fait que f admette un maximum global (resp. maximum global strict, maximum local, maximum local strict) en X_0. Définitions analogues pour les minima.
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, une condition nécessaire pour avoir un extremum local en X_0 est que X_0 soit un point critique de f.