DM4 de mathématiques en autocorrection (entraînement au raisonnement)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Exercice 1 *Analysons, synthétisons...*
Déterminer **soigneusement** l'ensemble S des réels x tels que $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$.

Exercice 2 *Besoin d'une injection... ou d'une surjection, voire d'une bonne correction*
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.
On définit en outre l'application h de E vers G par : $\quad \forall x \in E,\ h(x) = g(f(x))$.
Montrer que

1. si h est injective, alors f est injective ;
2. si h est surjective, alors g est surjective.

Problème 1 *La fenêtre tordue*
On note $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté usuel muni d'un ROND, ce qui permet de faire la correspondance habituelle avec $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Exprimer $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ en fonction de $|z|$ et $\operatorname{Arg} z$.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^\star$. Montrer que
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \cos\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right) \\ \operatorname{Im}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \sin\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right). \end{cases}$$
3. En déduire que pour tous points A, M et M' de $\mathcal{P}$, si on note z l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$:
   (a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \operatorname{Re}(z'\overline{z})$;
   (b) L'aire algébrique du triangle AMM' (*i.e.* comptée positivement si le triangle est direct et négativement sinon) vaut $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z'\overline{z})$.
4. Soient $M, M' \in \mathcal{P}$ d'affixes z, z'. On note N le point situé au tiers du segment $[MM']$ (*i.e.* tel que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$) et P le point situé au deux tiers de ce même segment.
   Montrer que l'affixe de N est $\frac{2z+z'}{3}$ et celui de P est $\frac{z+2z'}{3}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère un quadrilatère quelconque de sommets A, B, C, D (énumérés dans le sens direct) et on note pour $i \in \{1, 2\}$, I_i (resp. J_i, K_i, L_i) le point tel que $\overrightarrow{AI_i} = \frac{i}{3}\overrightarrow{AB}$ (resp. $\overrightarrow{BJ_i} = \frac{i}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK_i} = \frac{i}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL_i} = \frac{i}{3}\overrightarrow{DA}$).

5. Faire une figure dans le cas le plus général possible.
6. Calculer les affixes des huit points ci-dessus en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D.
7. Calculer l'affixe du point situé au tiers du segment $[I_1K_2]$ et celui du point situé au tiers du segment $[L_2J_1]$. En déduire que l'affixe du point d'intersection E de ces deux segments est $e = \frac{1}{9}(4a + 2b + c + 2d)$.
8. Sans écrire sur la copie de démonstration ni de calcul, donner l'affixe f (resp. g, h) de F (resp. G, H), le point d'intersection de $[J_1L_2]$ et $[I_2K_1]$ (resp. de $[K_1I_2]$ et $[J_2L_1]$, de $[L_1J_2]$ et $[K_2I_1]$).
9. Représenter le quadrilatère $EFGH$ sur le dessin et montrer que son aire est le neuvième de l'aire de $ABCD$.

Problème 2 *Points entiers d'une hyperbole*

1. (a) Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n)$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ est un entier pair.

   (c) Redémontrer le résultat précédent en utilisant la formule du binôme de Newton.

2. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{2} \end{array} \right.$ est injective.

3. Ce qui précède permet de définir de manière unique les suites $(x_n), (y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}.$$

   Expliquer pourquoi.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

5. Montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

6. Calculer les termes généraux des suites (x_n) et (y_n) à l'aide de la première question.

7. L'application φ est-elle bijective ?

8. Que dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{2} \end{array} \right.$?

Exercice 3 $\star$ *Log-disque*

Déterminer l'ensemble E des complexes $z = x + \mathrm{i}\,y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tels que le point du plan d'affixe e^z soit dans le disque fermé (*i.e.* y compris le bord) de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1 en donnant, pour chaque y possible, l'ensemble des x tels que $z \in E$.
Représenter graphiquement E.