Erreurs et incertitudes

Le physicien travaille continuellement avec des approximations car toute mesure d'une grandeur quelconque est nécessairement entachée d'erreur. On peut améliorer la précision d'une mesure en utilisant des instruments plus performant mais il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes.
Pour prendre conscience du degré d'approximation avec lequel on travaille, on fait l'estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d'erreur, ou calcul d'incertitude.

Définitions

On appelle **mesurande** la grandeur que l'on veut mesurer.

L'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur est appelé le **mesurage**.

La **mesure** est le résultat du mesurage. C'est un ensemble de valeurs attribuées à un mesurande complété par toute information pertinente disponible. Une expression complète du résultat du mesurage comprend des informations sur l'incertitude de mesure qui permet d'indiquer quel est l'intervalle des valeurs probables du mesurande. En métrologie, on appelle souvent m la mesure de la valeur de la grandeur (un nombre), et M le résultat de la mesure, c'est à dire l'expression complète du résultat (un intervalle de valeurs).

Variabilité

Une expérience de mesure en science expérimentale est une opération généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître.

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, par exemple :

- le choix de la méthode de mesure ;
- les variations de l'environement : température, humidité... ;
- les instruments de mesure : deux instruments supposément identiques peuvent donner des résultats légèrement différents ;
- l'expérimentateur lui-même qui peut faire des erreurs.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Erreurs

Selon le sens général du mot, une *erreur* est toujours en relation avec quelque chose de juste ou de vrai, ou qui est considéré comme tel. Il en est de même en physique.

1. **Erreur absolue**
   Par définition l'*erreur absolue* d'une grandeur mesurée est la valeur absolue de l'écart qui sépare la valeur expérimentale de la valeur que l'on considère comme vraie. L'erreur absolue a la même unité que la mesure.
   Prenons par exemple la vitesse de la lumière dans le vide :

   La valeurs considérée actuellement comme vraie est $c_0 = 299 \quad 792 \quad 458$ m/s

   Lors d'une mesure, un expérimentateur trouve : $c = 305 \quad 000$ km/s
   on dit que l'erreur absolue de son résultat est : $\Delta c = |c - c_0| = 5207,54$ km/s

2. **Erreur relative**
   Par définition l'*erreur relative* est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie. L'erreur relative n'a pas d'unité ; elle nous indique la qualité (l'exactitude) du résultat obtenu. Elle s'exprime généralement en % (pour cent).
   Dans l'exemple précédent, l'erreur relative est :

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta c}{c_0} = \frac{5207,54}{299792,458} \approx 1,7\%$$

Il n'est possible de parler d'erreur que si l'on a à disposition une *valeur de référence* que l'on peut considérer comme vraie.

Incertitudes-type

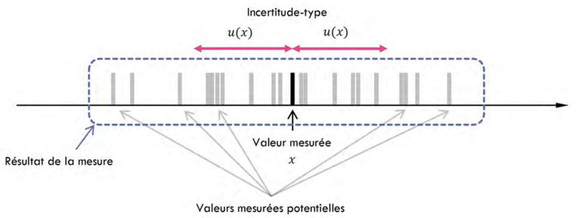
Lors de la plupart des mesures physiques, on ne possède pas de valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsqu'on mesure la distance de deux points, ou l'intervalle de temps qui sépare deux événements, ou la masse d'un objet, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. On ne dispose que de la valeur expérimentale. Néanmoins, par une critique objective des moyens utilisés pour faire la mesure, on peut se faire une idée de l'« erreur » moyenne qu'on peut avoir commise, « erreur » que l'on appelle de façon plus appropriée *incertitude-type*.

Cette incertitude-type correspond à l'écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure. Elle est notée $u(m)$, m étant la mesure et a la même unité que M. On note alors le résultats de cette mesure :

$$\boxed{M = m \pm u(m) \text{ unité de } M}$$

.
On définit aussi l'*incertitude-type relative*, exprimée généralement en pourcentage :

$$\boxed{u_r(M) = \frac{u(m)}{m}}$$



Quand nous effectuons une mesure, deux types d'erreurs entrent en jeu :

- **Les erreurs systématiques** : elles sont dues le plus souvent à une imperfection de l'appareillage ou de la technique de mesure. Elles agissent toujours dans le même sens et leur amplitude est constante.
- **Les erreurs aléatoires** : généralement, elles proviennent des caractéristiques de l'appareillage, de la technique utilisée, et de l'intervention du manipulateur. Elles sont estimées soit en comparant statistiquement les résultats d'expériences soigneusement répétées, soit en effectuant un calcul d'incertitude.
  Deux méthodes sont utilisées pour évaluer les *erreurs aléatoires* :
  - **l'évaluation de type A** est une méthode statistique. C'est la méthode la plus rigoureuse d'évaluation des erreurs aléatoires, mais elle exige de répéter un grand nombre de fois la manipulation.
    Pour une série de n mesures, si on suppose ces mesures m_k indépendantes, on a :

- La meilleure estimation de la mesure donnée par la moyenne arithmétique $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$
- L'écart-type expérimental : $s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - m)^2}$
- L'incertitude-type est l'écart type sur la valeur moyenne m : $u(m) = \frac{1}{\sqrt{n}}s_{exp}$

- **l'évaluation de type B** est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de la grandeur d'entrée.
En pratique, à défaut d'autres indications, on considère une loi de distribution rectangulaire sur l'intervalle d dans lequel peut se trouver la mesure : $M \in \left[m - \frac{d}{2}; m + \frac{d}{2}\right]$.
Mathématiquement on peut montrer que dans ce cas $u(M) = \frac{d}{2\sqrt{3}}$
Exemples :
  - Le constructeur fournit l'incertitude-type (cas très rare). Dans ce cas, on utilise directement son incertitude.
  - Pour un appareil de mesure analogique (appareil à cadran, lecture d'un réglet...), on estime l'intervalle correspondant à la valeur d'une demi-graduation. On obtient donc :
$$u = \frac{1 \text{ graduation}}{2\sqrt{3}}$$
  - Le constructeur fournit une indication de type Δc sans autre information. Dans ce cas, on prendra pour incertitude- type
$$u = \frac{\Delta c}{\sqrt{3}}$$
  - Le cas précédent se retrouve pour les appareils à affichage numérique (multimètre par exemple). L'indication donnée par le fabricant se présente généralement de la façon suivante : $\Delta c = n\%L + pUR$. n est un pourcentage de L, la mesure lue sur l'appareil, auquel on ajoute p unités représentatives (UR) c'est à dire l'ordre de grandeur de la plus petite décimale que l'appareil peut afficher. UR sera d'autant plus petit que le calibre utilisé l'est, ce qui favorise donc la précision de la mesure.
  - Pour un appareil à affichage numérique sans indication du fabricant, on considère que l'intervalle est donné par la valeur du dernier digit affiché d et $u = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Lorsque les sources de variabilité de la mesure sont multiples, on estime l'incertitude-type pour chacune d'entre elles et l'on fait un bilan global pour construire une **incertitude-type composée**, qui peut mélanger des évaluations de type A et de type B.

- Incertitude-type composée de type somme : On souhaite calculer $y(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, avec x_1 et x_2 les valeurs de mesures et $u(x_1)$, $u(x_2)$ les incertitudes-types correspondantes. L'incertitude-type sur y est donnée par :
$$\boxed{u(y) = \sqrt{(au(x_1))^2 + (bu(x_2))^2}}$$
- Incertitude-type composée de type produit : On souhaite calculer $y(x_1, x_2) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, avec x_1 et x_2 les valeurs de mesures et $u(x_1)$, $u(x_2)$ les incertitudes-types correspondantes. L'incertitude-type relative sur y est donnée par :
$$\boxed{\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$$

- Incertitude-type composée quelconque : dans les cas différents des précédents, on recourra à une méthode de Monte-Carlo. D'une façon générale, on appelle méthode de Monte-Carlo, toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo.
Pour déterminer l'incertitude-type sur $y = f(x1, x2, ..., xn)$, on calcule N valeurs de y à partir de N valeurs aléatoires des différentes grandeurs x_i, ces valeurs aléatoires étant prise dans un intervalle lié à l'incertitude-type $u(x_i)$ suivant une loi de distribution adéquate (en pratique, il sera difficile pour nous d'avoir des informations sur cette loi de distribution et on adoptera, sauf précision contraire, une loi de distribution uniforme). On peut ensuite calculer l'écart-type sur les N valeurs de y qui sera l'incertitude-type sur y. Des exemples seront traités en travaux pratiques.

Écriture des résultats de mesure

L'écriture du résultat du mesurage doit intégrer l'incertitude-type et s'écrire avec les unités appropriées :
$$\boxed{M = m \pm u(m) \text{ unité}}$$
La précision sur le résultat du mesurage sera caractérisée par son incertitude-type relative $\frac{u(m)}{m}$. Cette précision est souvent exprimée en %. Plus le résultat est petit, plus le mesurage est précis.

En pratique, obtenir une précision plus petite que 10% correspond à des conditions de mesure très contraignantes et coûteuses. Dans la très grande majorité des cas, il faut donc limiter le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude-type à un ou deux chiffres significatifs.
Pour l'estimation de la grandeur mesurée, on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position (au sens numération) que le plus petit de l'incertitude-type.

Écart normalisé ; Z-score

S'il existe une valeur tabulée, réputée « vraie », de la grandeur mesurée $m_{\text{réf}}$, on appelle *écart normalisé* ou *Z-score*, la quantité :
$$\boxed{z = \frac{|m - m_{\text{réf}}|}{u(m)}}$$
On admet que si $z > 2$ la mesure est considérée commme incompatible avec la valeur de référence et elle est rejetée.

Si on réalise deux mesures m_1 et m_2 d'une même grandeur M, l'expression de l'écart-normalisé ou Z-score entre ces valeurs est
$$\boxed{\frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u^2(m_1) + u^2(m_2)}}}$$
On admet que les deux valeurs sont compatibles entre elle ssi $z \leq 2$

Les chiffres significatifs

Nous nous efforcerons, lors des travaux pratiques, d'accompagner le plus souvent possible les résultats de leur incertitude-type. En revanche, lors des exercices ou des devoirs, les valeurs numériques ne comportent qu'exceptionnellement d'incertitudes de façon explicite. Celle-ci est en fait sous entendue de par le nombre de chiffres significatifs. Par exemple, si l'on parle d'une masse $m = 12$ g, le nombre de chiffres significatifs est de 2, cela signifie $m = 12,0 \pm 0,5$ g. Si l'on avait écrit $m = 12,0$ g (trois chiffres significatifs), cela aurait signifié $m = 12,00 \pm 0,05$ g.
Remarque : les zéros à gauche du nombre ne sont pas significatifs ; en effet $0,00512$ s'écrit de façon équivalente $5,12.10^{-3}$ et possède trois chiffres significatifs.
On ne saurait, lors d'un calcul, obtenir un résultat plus précis que la moins précise des données.

$\boxed{\text{Le résultat d'un calcul possède donc autant de chiffres significatifs que la donnée qui en possède le moins.}}$