Exercices d'arithmétique

Exercice 1 Trouver les nombres premiers inférieurs à 50 par la méthode du crible d'Ératosthène.

Exercice 2 (Décomposition en facteurs premiers)

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants : 117, 357, 4356, 113, 2200, 3388, 889, 667, 29791 ;
2. Quel est le nombre de diviseurs positifs de 29791 ? de 357 ? de 2200 ?
3. Donner la liste des diviseurs positifs de 117 ;
4. Calculer le PGCD et le PPCM des couples de nombres suivants : (667,29791), (357,3388), (2200,3388) ;
5. Donner la liste des diviseurs positifs communs à 2200 et 4356 ;
6. Si n est un entier naturel non nul, que vaut PGCD(113,n) ?

Exercice 3 Calculer à l'aide de l'algorithme d'Euclide les PGCD et PPCM de 1225125 et 114660. Même question aves 50431 et 38657.

Exercice 4 Les nombres 123456 et 4357 sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 5 On considère les deux égalités **vraies** :

$$6843906 = 3825 \times 1789 + 981,$$

$$4529754 = 2531 \times 1789 + 1795.$$

Discuter la véracité des assertions suivantes :

1. Ces deux égalités traduisent des divisions euclidiennes par 1789 ;
2. Le quotient euclidien de 6843906 par 1789 est 3825 ;
3. Le quotient euclidien de 4529754 par 1789 est 2531 ;
4. 6843906 a le même reste quand on le divise par 3825 ou par 1789 ;
5. Le reste de la division euclidienne de 4529754 par 1789 est 6.

Exercice 6 Le caissier d'une banque verse 15000 euros en billets de 10, 50, 100 et 500 euros. Il utilise 10 fois plus de billets de 50 que de billets de 10 et deux fois plus de billets de 500 que de billets de 100. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

Exercice 7 Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles. Si on compte les bouteilles par 3, 5 ou 7, il en reste toujours 2. Sachant que le nombre de bouteilles livrées est compris entre 1500 et 1600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

Exercice 8 Montrer qu'un entier congru à 7 modulo 8 n'est jamais somme de 3 carrés.

Exercice 9 Soit n un entier. Montrer que $n^5 - 5n^3 + 4n$ est divisible par 120.

Exercice 10 Trouver les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $12x \equiv 7[35]$,

Exercice 11

1. Soit p premier. Montrer que, pour $a, b \in \mathbb{Z}$: $ab \equiv 0\ |p] \iff (a \equiv 0\ [p]$ ou $b \equiv 0\ [p])$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 4x - 12 \equiv 0[17]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 4x - 2 \equiv 0[17]$.

Exercice 12 Déterminer les solutions entières des équations :

$$36240x + 512y = 48, \quad 9x + 13y = 450, \quad 119x - 29y = 8, \quad 75x + 14y = 1.$$

Exercice 13 Peut-on écrire 100 comme la somme de deux entiers positifs dont l'un est divisible par 7 et l'autre par 11 ? Même question pour 101, 76 et 59.

Exercice 14 Soient $a, b, p \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le PGCD de a^p et b^p en fonction de celui de a et b.

Exercice 15 Montrer que si $a \equiv 1[n^k]$ ($k \geq 1$), alors $a^n \equiv 1[n^{k+1}]$.

Exercice 16 Démontrer que 19 divise $2^{2^{6k+2}} + 3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 Soit a un entier strictement positif. On écrit les entiers en base 10.

1. Démontrer que a et a^5 ont même chiffre des unités.
2. Démontrer que a^9 et $a^{9^{9^9}}$ ont mêmes chiffres des unités et des dizaines. Quels sont ces deux chiffres si $a = 7$?

Exercice 18 Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif. Montrer que p divise $\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Exercice 19 Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4, en s'inspirant de la démonstration classique d'Euclide.

Exercice 20

1. Soit p un nombre premier impair. Montrer que si -1 est congru à un carré modulo p, alors p est congru à 1 modulo 4.
   Indication : raisonner par l'absurde en supposant que p est congru à 3 modulo 4. On calculera alors $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p de deux manières différentes, dont l'une en appliquant le petit théorème de Fermat.
2. Soient $x \in \mathbb{N}^\star$ et p un premier impair divisant $x^2 + 1$. Montrer que p est congru à 1 modulo 4.
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.