TDO CORRECTION

Unités et dimension

Ex 1

1. on cherche $\lambda = v^{\alpha} f^{\beta}$

l'equation aux dimensions donne :

$$[\lambda] = [v]^{\alpha} [f]^{\beta}$$

avec $[\lambda] = L$

$[v] = L T^{-1}$

$[f] = T^{-1}$

$\Rightarrow \quad L = L^{\alpha} T^{-\alpha-\beta}$

donc $\quad 1 = \alpha$

$0 = -\alpha - \beta$

$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{array}}$ et $\lambda = \frac{v}{f}$

2. on cherche $T = k g^{\alpha} \ell^{\beta}$

equations aux dimensions.

$$[T] = [k] [g]^{\alpha} [\ell]^{\beta}$$

avec $[T] = T$

$[k] = 1$ constante sans dimension

$[g] = L T^{-2}$

$[\ell] = L$

donc $T = L^{\alpha+\beta} T^{-2\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = -2\alpha$

$0 = \alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\alpha = \frac{1}{2} \end{array}}$ et $T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Ex 2

1. $S = \pi (r + R^2)$ r et R sont des longueurs, donc R^2 est une surface

l'addition $r + R^2$ n'est donc pas homogène

$$h = \frac{v^2}{g}$$

h est une hauteur : $[h] = L$

v est une vitesse et g l'accélération de la pesanteur :

$$\left[\frac{v^2}{g}\right] = \frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}} = L$$

les deux cotés de l'equation ont la même dimension, <u>l'equation est homogène</u>

3. $U = U_0 (1 - U_0 e^{-t/\tau})$

considérons l'expression dans la parenthèse :

$$1 - U_0 e^{-t/\tau}$$

τ et t sont des temps donc l'argument de l'exponentielle est bien sans dimensions

U_0 est une tension

1 est un nombre sans dimension

donc on soustrait un nombre sans dimension et une tension $\Rightarrow$ <u>ce n'est pas homogène</u>

TD0 ②

<u>Ex. 3</u>

1. $t = 1h\,15\,min = \underline{75\,min} = 75 \times 60\,sec = \underline{4500\,sec}$

et $15\,min = 0{,}25h \Rightarrow \underline{t = 1{,}25h}$

2. $T_s = 86\,164\,s = \frac{86\,164}{60}\,min = \underline{1436{,}07\,min}$

$T_s = \frac{86\,164}{3600}\,h = \underline{23{,}93\,h}$

$\underline{T_s = 23h\,56\,min\,04\,sec}$

3. $C_s = 340\,m\,s^{-1} = 340 \times 3{,}6\,km\,h^{-1}$

$\underline{C_s = 1224\,km.h^{-1}}$

4. $D = 3L.min^{-1}$

$t = 1\,jour = 24\,h = 1440\,min$

donc le volume rempli en 1 jour est $V = D \times t$

$V = 3 \times 1440 = 4320\,L$

$1m^3 = 1000L \Rightarrow \underline{V = 4{,}32\,m^3}$

il faut <u>5 cuves de $1m^3$</u>

$v = 1$ km/min à convertir en mile/h

1 mile $= 1{,}852$ km
1 h $= 60$ min

$$\Rightarrow v = 1 \times \frac{1}{1{,}852} \times 60$$

$$\underline{v = 32{,}4 \text{ mile.h}^{-1}}$$

Ex. 4

1. $E = \frac{1}{2} J \omega^2 \iff J = \frac{2E}{\omega^2}$

et l'équation aux dimension donne :

$$[J] = \frac{[E]}{[\omega]^2} = \frac{M L^2 T^{-2}}{T^{-2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[J] = M L^2}$$

2. formule proposée $J = \frac{5}{2} m^2 R$

equation aux dimensions $[J] = [m^2 R]$

$$[m^2 R] = [m]^2 [R] = M^2 L$$

or on a montré que $[J] = M L^2$

donc la formule n'est pas homogène

le résultat est faux

3. $a = \frac{(M \sin\alpha - m)g}{M + m + J/R^2}$

dimension du membre de gauche $[a] = L T^{-2}$

dimension du membre de droite :

$$\left[\frac{M \sin\alpha - m}{M + m + \frac{J}{R^2}} g\right] = \left[\frac{M \sin\alpha - m}{M + m + \frac{J}{R^2}}\right] [g]$$

accélération

dimension de la fraction :

$$\left[\frac{M \sin\alpha - m}{M + m + \frac{J}{R^2}}\right] = \frac{[M \sin\alpha] - [m]}{[M] + [m] + \left[\frac{J}{R^2}\right]} = \frac{M}{M + \frac{M L^2}{L^2}}$$

$$\left[\frac{M \sin\alpha - m}{M + m + \frac{J}{R^2}}\right] = 1$$

donc le membre de droite est homogène à g qui est une accélération $\Rightarrow$ $\boxed{\text{l'équation est homogène}}$

$t = \frac{1}{500}$ sec $= 2{,}0\,10^{-3}$ s

$t = 2{,}0$ ms $= 2{,}0\,10^{3}$ µs $= 2{,}0\,10^{6}$ ns

Ex 6.

1. $[a] = LT^{-2}$

2. l'unité d'une accélération est donc par exemple $m.s^{-2}$

ainsi $g = 9{,}81\ m\,s^{-2}$

Ex 7.

1. $F = ma$

$\Rightarrow [F] = [m][a] = MLT^{-2}$

2. d'après l'analyse dimensionnelle :

$1N = 1\ kg\,m\,s^{-2}$

3. $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$

$\Leftrightarrow G = \frac{d^2 F}{m_1 m_2}$

$\Leftrightarrow [G] = \frac{[d]^2 [F]}{[m_1][m_2]}$

$= \frac{L^2 \times MLT^{-2}}{M \times M}$

$$\boxed{[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}}$$

l'unité de G est donc $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$

mesures et incertitudes

Ex 1.

1. on mesure le rayon du cercle R

2. $u(R) = 0{,}1$ cm incertitude type absolue

$u_r(R) = \frac{u(R)}{R} = 1{,}9\%$ incertitude type relative

3. $R \in [5{,}1\ ; 5{,}3]$

aire du cercle $S = \pi R^2$

$\Rightarrow \mu_r(S) = \dfrac{\mu(S)}{S} = 2\dfrac{\mu(R)}{R} = 2\mu_r(R)$

$\Rightarrow \underline{\mu_r(S) = 3{,}8\%}$

5. $\mu(S) = \mu_r(S) \times S$ avec $S = \pi R^2 = 85\,cm^2$

$\Rightarrow \underline{\mu(S) = 3\,cm^2}$

6. $\underline{S = 85 \pm 3\,cm^2}$

Ex 2.

1. $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{6{,}03}{13{,}2 \cdot 10^{-3}} = \underline{457\,\Omega}$

$\mu(U) = 3\%\ 6{,}03 + 0{,}01\,V = 0{,}10\,V$

$\mu(I) = 2\% \times 13{,}2 + 0{,}1\,mA = 0{,}4\,mA$

$\dfrac{\mu(R)}{R} = \dfrac{\mu(U)}{U} + \dfrac{\mu(I)}{I} = \dfrac{0{,}10}{6{,}03} + \dfrac{0{,}4}{13{,}2}$

TD0 (5)

$\Rightarrow \dfrac{\mu(R)}{R} = 0{,}05$

$\underline{\mu(R) = 21\,\Omega}$ incertitude du type B

2. $\underline{R = 457 \pm 21\,\Omega}$

Ex 3.

1. 8 longueurs d'onde ont été parcourues

2. $D = 6{,}9\,cm = 69{,}0\,mm$

$\Delta D = \dfrac{1\ \text{graduation}}{2\sqrt{3}} = 0{,}3\,mm$

$\underline{D = 69{,}0 \pm 0{,}3\,mm}$ incertitude du type B

3. $\lambda = \dfrac{D}{8} \Rightarrow \underline{\lambda = 8{,}63\,mm}$

$\dfrac{\mu(\lambda)}{\lambda} = \dfrac{\mu(D)}{D} = \dfrac{0{,}3}{69} = 0{,}004$

$\Rightarrow \underline{\mu(\lambda) = 0{,}04\,mm}$

$\Rightarrow \underline{\lambda = 8{,}63 \pm 0{,}04\,mm}$

diminue l'incertitude sur λ en parcourant plusieurs longueurs d'onde.

4- $c = \lambda f$

$\Delta f = 50\,10^{-6} f + 10\,\mu Hz$

$= (50\,10^{-6} \times 40\,10^{3} + 10)\,\mu Hz = 2\,10^{6}\,\mu Hz$

$\underline{\Delta f = 2\,Hz}$

$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta f}{f}$

$= 0{,}004 + \frac{2}{40\,10^{3}}$

$c = \lambda f$

$\underline{c = 345{,}2\,m/s}$

$\frac{\Delta c}{c} = 0{,}0041$

$\Rightarrow \underline{\Delta c = 1{,}4\,m/s}$

ainsi $\underline{c = 345{,}2 \pm 1{,}4\,m/s}$

Ex 4

1- placement de l'ensemble lentille / miroir

mesure de la distance source - lentille

2- $u(f') = 5mm + \frac{1\,graduation}{2\sqrt{3}}$

3- $u(f') = 5mm + \frac{1mm}{2\sqrt{3}}$

$\underline{u(f') = 5{,}3mm}$

$\Rightarrow \underline{f' = 10{,}4cm \pm 0{,}5\,cm}$

Ex 5

1- $\Delta m_{inst} = 2\% \times \underbrace{2V}$

amplitude "full scale" entre $-1V$ et $+1V$

$\underline{\Delta m_{inst} = 0{,}04\,V}$

2- $\underline{\Delta m_{exp} \approx 0{,}07V}$

- $u(m) = \Delta m_{int} + \Delta m_{exp}$

$\underline{u(m) = 0,11V}$

$\boxed{\text{incertitude élargie avec un niveau de confiance de 95\% : } \Delta m = 2 \times u(m)}$

Ainsi $\underline{\Delta m = 0,22V}$

$\Rightarrow \underline{U = 1,60 \pm 0,22V}$

Ex 6.

1. $\underline{\langle n \rangle = 1,498}$

2. incertitude de type A $u(n) = \frac{1}{\sqrt{28}} \times s_{exp}$

avec $s_{exp} = 0,03024$

$\Rightarrow \underline{u(n) = 0,005715}$

$\Delta n = 2 \times u(n) \Rightarrow \underline{\Delta n = 0,01143}$

3. 28 valeurs de la même mesure → ok incertitude A

Ex 7

1. $\underline{\langle \lambda \rangle = 650,9 \text{ nm}}$

2. $s_{exp} = 25,3 \text{ nm}$

$u(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{20}} s_{exp} = \underline{5,7 \text{ nm}}$

$\Delta\lambda = u(\lambda) \times 2 = 11,3 \text{ nm}$

$\Rightarrow \underline{\lambda = 650,9 \pm 11,3 \text{ nm}}$

Ex 8.

1. $\Delta C_B = 1\% \times 1,95\,\mu F + 2 \times 0,01\,\mu F$

$\underline{\Delta C_B = 0,04\,\mu F}$

2. $\Delta C_A = \frac{1}{\sqrt{10}} s_{exp} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 0,0247$

$\underline{\Delta C_A = 0,0078\,\mu F}$

TDO ⑧

$\Delta C = \sqrt{0{,}0078^2 + 0{,}04^2}$

$\Delta C = 0{,}041 \mu f$

$\Rightarrow \boxed{C = 1{,}94 \pm 0{,}08 \mu f}$