Lycée Berthollet MPSI1 2022-23

## DS5 de mathématiques, partie raisonnement, mardi 13 décembre 2022 (1h25)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

N.B.1: le sujet s'arrête à la fin de la première page (Q35 incluse). Suite à poursuivre à la maison.

N.B.2: remplacer le mot "est" de la question 24 par le mot "induit".

## Etude d'une fonction

- **21.** Etudier sur  $]0, +\infty[$  la fonction  $f: x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ . On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.
- **22.** Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f. Préciser la valeur de f en 0.
- **23.** La fonction f est-elle dérivable en 0?
- **24.** Montrer que f est une bijection de ]0,e] sur  $]0,e^{1/e}]$ .
- **25.** La fonction réciproque de f est-elle continue, dérivable sur  $[0, e^{1/e}]$ ?

## Etude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose  $\Phi_x(t) = x^t$ , et on définit la suite  $(t_n)_n$  de la manière suivante

$$t_0 = 1$$
,  $t_{n+1} = \Phi_x(t_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Lorsque la suite  $(t_n)_n$  est convergente on note h(x) sa limite dans  $\mathbb{R}$ .

- **26.** Si x = 1, que peut-on dire sur la convergence de la suite  $(t_n)_n$ ?
- **27.** Justifier que si h(x) existe (c'est-à-dire la suite  $(t_n)_n$  est convergente) alors  $h(x) = \Phi_x(h(x))$ , en déduire dans ce cas que f(h(x)) = x.

On va traiter le cas x > 1:

- **28.** Montrer que pour  $x \in ]1, +\infty[$ , la fonction  $\Phi_x : t \mapsto x^t$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- **29.** Soit x > 1, montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n < t_{n+1}$ .
- **30.** On suppose que  $x \in ]1, e^{1/e}]$ , montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \leq e$ . En déduire que dans ce cas la suite  $(t_n)_n$  est convergente.
- **31.** On suppose  $x > e^{1/e}$ , et on veut montrer que la suite  $(t_n)_n$  a pour limite  $+\infty$ . On pourra supposer que la suite est convergente vers h(x) et en utilisant les questions **27.** et **21.** aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas  $x \in ]0,1[$ :

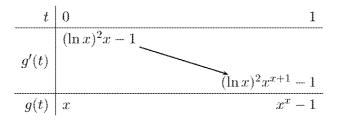
- **32.** Montrer que pour  $x \in ]0,1[$ , la fonction  $\Phi_x: t \mapsto x^t$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Que peut-on en déduire sur la monotonie de  $\Phi_x \circ \Phi_x$  sur  $\mathbb{R}$ ?
- **33.** Pour 0 < x < 1, montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}$ .
- **34.** On suppose que 0 < x < 1. Montrer par récurrence que la suite extraite  $(t_{2n})_n$  est décroissante, puis que la suite extraite  $(t_{2n+1})_n$  est croissante.
- **35.** En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de  $\Phi_x \circ \Phi_x$  dans [0,1], c'est-à-dire une solution de  $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$  dans [0,1].

## Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de  $\Phi_x \circ \Phi_x$  dans [0,1]. Pour cela on pose  $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$ , on admettra le résultat suivant :

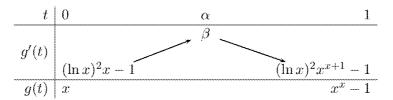
$$g'(t) = \Phi'_x(t). (\Phi'_x \circ \Phi_x)(t) - 1 = (\ln x)^2. \Phi_x(t). (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - 1$$

**36.** Dans le cas  $x \in [\frac{1}{e}, 1[$  on admet que l'on obtient le tableau suivant :



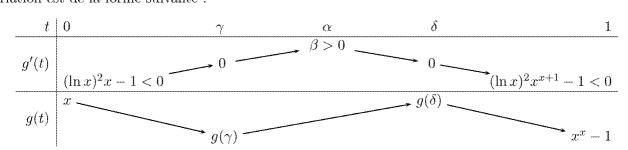
Préciser le signe de g'(0). Quelle est la monotonie de g sur [0,1]? Montrer que  $\Phi_x \circ \Phi_x$  n'a qu'un seul point fixe dans [0,1]. Conclusion pour la convergence de la suite  $(t_n)_n$ .

**37.** Dans le cas  $x \in ]0, \frac{1}{e}[$  on admet que l'on a le tableau suivant :



où  $\alpha$  est l'unique racine de g'' sur ]0,1[ et  $\beta=g'(\alpha)=-\mathrm{e}^{-1}\ln x-1.$  Préciser le signe de  $\beta$  lorsque  $x\in[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}[$ . Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite  $(t_n)_n$  lorsque  $x\in[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}[$ ?

**38.** On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que  $x \in ]0, e^{-e}[$ . Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :



avec  $\gamma < \alpha < \delta$  et  $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$ . On admet aussi que  $\Phi_x$  possède un unique point fixe dans  $]0, \frac{1}{e}[$  que l'on note p, donc  $\Phi_x(p) = p$ . Montrer que  $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$  et en déduire le signe de g'(p). En déduire que  $\Phi_x \circ \Phi_x$  possède trois points fixes  $p_1, p, p_2$  vérifiant  $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$ .

- **39.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $p_2 \leqslant t_{2n}$ , et que la suite  $(t_{2n})_n$  est convergente vers  $p_2$ .
- **40.** On veut montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $t_{2n+1} \leq p$ . Pour cela, on supposera qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $p < t_{2n_0+1}$  et on aboutira à une contradiction. Que peut-on conclure sur la convergence de  $(t_{2n+1})_n$ ? La suite  $(t_n)_n$  est-elle convergente?