DM 1 Correction

1. Analyse dimensionnelle des papillons (CCTP PC 2012)

1. on cherche une formule du type $R = k\ell^{\alpha}$ avec k une constante

on prend le log de cette equation :

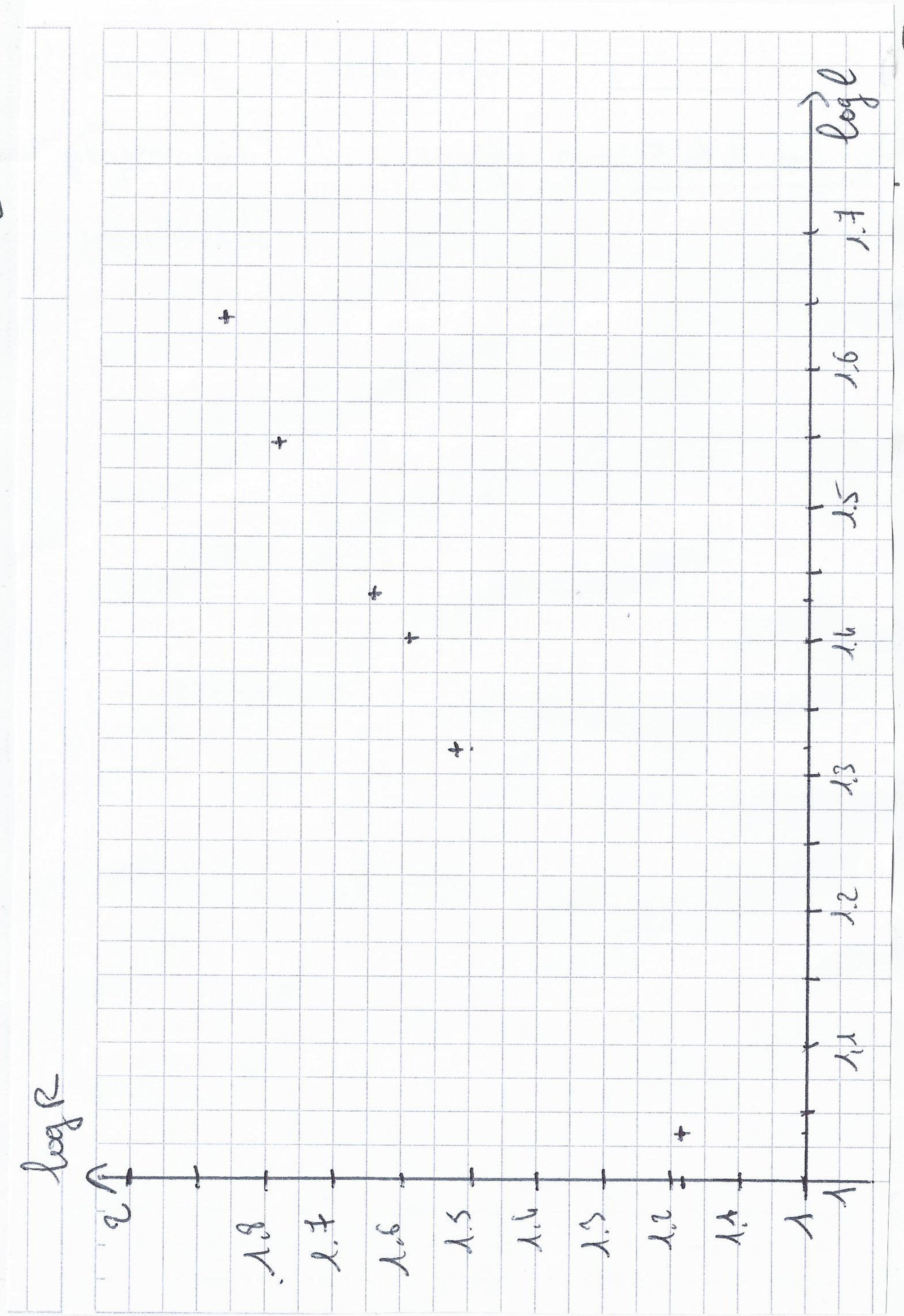
$$\log R = \log k + \alpha \log \ell$$

on peut alors tracer $\log R$ en fonction de $\log \ell$ pour estimer k et α :

$\log \ell$	1,04	1,32	1,40	1,43	1,54	1,66
$\log R$	1,18	1,52	1,59	1,64	1,79	1,81

les points sont alignés et une regression linéaires donne un coefficient directeur $\alpha \simeq 1,1$

l'exposant α vaut donc $\boxed{\alpha = 1}$



physiquement cela signifie que R et l sont proportionnels, les papillons ont tous le même rapport de forme.

2_ les forces surfaciques étant proportionnelles à la surface du papillon, on peut supposer que les forces volumiques vont être proportionnelles au volume $\Rightarrow$ Ainsi $\boxed{F_v \propto l^3}$

3_ on cherche $\Pi \propto \rho_a^p S^q f_b^r$

l'analyse dimensionnelle donne :

$$[\Pi] = [\rho_a]^p [S]^q [f_b]^r$$

Π est une force $\rightarrow$ $[\Pi] = M L T^{-2}$

$$[\rho_a] = \frac{[m]}{[V]} = M L^{-3}$$

$$[S] = L^2$$

$$[f_b] = T^{-1}$$

$$\Rightarrow M L T^{-2} = M^p L^{-3p} L^{2q} T^{-r}$$

$$M L T^{-2} = M^p L^{-3p+2q} T^{-r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = p \\ 1 = -3p+2q \\ -2 = -r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = +\frac{1}{2}(1+3p) \\ r = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} p = +1 \\ q = +2 \\ r = +2 \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{\Pi \propto \rho_a S^2 f_b^2}$$

4. $\Pi = F_v + F_S$

$\Pi \propto \rho_a S^2 f_b^2$ et comme $S \propto l^2$ et $f_b \propto l^\alpha$

on obtient : $\Pi \propto \underbrace{\rho_a}_{\text{ne dépend pas de } l} l^{4+2\alpha}$

$\Rightarrow \underline{\Pi \propto \ell^{4+2d}}$

- si F_s est prédominante $\Pi = F_s \propto \ell^2$

$\Rightarrow \ell^{4+2d} \propto \ell^2$

$\Rightarrow 4+2d = 2$

$\Rightarrow \boxed{d = -1}$

- si F_v est prédominante $\Pi = F_v \propto \ell^3$

$\Rightarrow \ell^{4+2d} \propto \ell^3$

$\Rightarrow 4+2d = 3$

$\Rightarrow \boxed{d = -\frac{1}{2}}$

5. on cherch $f_b \propto \ell^d$

$\Leftrightarrow \log f_b = \log k + d \log \ell$

$\log \ell$	1.04	1.32	1,40	1,43	1,54	1,66
$\log f_b$	1.51	1.28	1.20	1.11	1,00	0,95

qui donne une pente de $-0{,}95$, on en deduit que $\underline{d = -1}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{F_s \text{ est prépondérant}}$.

2_ Déviation de la lumière par le Soleil

1. la force de gravitation s'écrit :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u_r}$$

$\Leftrightarrow [F] = [G] \left[\frac{m_1 m_2}{r^2}\right]$

$\Leftrightarrow M L T^{-2} = [G] \frac{M^2}{L^2}$

$\Leftrightarrow [G] = M L T^{-2} \times \frac{L^2}{M^2}$

$$\Rightarrow \boxed{[G] = M^{-1} L^{3} T^{-2}}$$

2_ on cherche θ sous la forme

$$\theta = K\, G^{\alpha} M_s^{\beta} R_s^{\gamma} c^{\delta}$$

K étant sans dimension

l'analyse dimensionnelle donne :

$$[\theta] = [G]^{\alpha} [M_s]^{\beta} [R_s]^{\gamma} [c]^{\delta}$$

$$1 = M^{-\alpha} L^{3\alpha} T^{-2\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} L^{\delta} T^{-\delta}$$

$$1 = M^{\beta-\alpha} L^{3\alpha+\gamma+\delta} T^{-2\alpha-\delta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 0 & (1) \\ 3\alpha + \gamma + \delta = 0 & (2) \\ -2\alpha - \delta = 0 & (3) \end{cases}$$

Il manque une équation !

on a $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = -\delta/2 \\ \gamma = -\alpha \end{cases}$

A priori plus la masse de l'astre est grande, plus la déviation est grande donc

$\beta > 0 \rightarrow \alpha > 0$

on cherche une solution simple, si on prend par exemple $\alpha = \beta = 1$ on obtient alors

$$\boxed{\begin{matrix} \gamma = -1 \\ \delta = -2 \end{matrix}}$$

et θ s'écrit : $\boxed{\theta = K \dfrac{G M_s}{R_s c^2}}$

avec $K = 1$ et les données de l'énoncé on trouve la valeur numérique

$\theta = 2{,}1\ 10^{-6}$ rad $= 0{,}4''$ assez faible, cela semble cohérent

3- avec $K=4$ on obtient

$$\theta = 1{,}7'' = 8{,}5\,10^{-6}\ \text{rad}$$

4-

force coulombienne	force newtonienne
Q	M
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$

ainsi $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$ est equivalent à $-GmM$

le reste des grandeurs (b et E_{c0}) ne dépendent pas du type de force ainsi on obtient pour une deviation par un astre :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\frac{GmM}{2bE_{c0}}}$$

5- si les photons avaient une masse m alors $E_{c0} = \frac{1}{2}mc^2$ et pour une deviation par le soleil on obtient :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = -\frac{GM_s}{bc^2}}$$

les angles de deviations etant faibles on peut ecrire $\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \simeq \frac{\Phi}{2}$

$$\boxed{\Phi \simeq -\frac{2GM_s}{bc^2}}$$

Enfin l'angle de deviation Φ est maximal à $b = R_S$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_N = \frac{2GM_S}{R_Sc^2}}$ en valeur absolue

on trouve $\boxed{\theta_N = \frac{1}{2}\theta}$

donné par la relativité générale