DM11 mathématiques, autogéré pendant les vacances de Noël

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être argumentée, sous peine d'obtenir la note 0 *à cette question.*

Barème sur 90 points :

— Partie I (20 pts) :
1. (a) 5 = 1 (tableau) + 2 (barrer) + 2 (résultat)
   (b) 1 (liste type 3)
2. 2 = 1 (idée) + 1 (rédaction correcte)
3. 1 (N impair)
4. 1 (type 1 stable par produit)
5. 4 = 1 (DFP) + 1 ($2 \nmid N$ donc FP de type 1 ou 3) + 2 (absurde ou contraposée)
6. 6 = 1 (prendre p diviseur de type 3) + 2 ($p \neq q_i (i \geq 2)$) + 2 ($p \neq 3$) + 1(conclusion par contradiction)

— Partie II (20 pts) :
1. (a) 5 = 1 (ln $\uparrow$ strict.) + 1 ($\ln(p_k) > 0$) + 1 (expression A_n^k) + 1 (maj 1) + 1 (maj 2)
   (b) 1 (inclusion)
   (c) 4 = 1 (Card ≥ 0) + 1 (card produit) + 1 (maj) + 1 (val constante)
2. 3 = 1 (définition) + 1 (surj par déf) + 1 (inj par DFP)
3. (a) 3 = 1 ($\text{Card} E_n = \text{Card} A_n$) + 1 (utiliser les gendarmes) + 1 (CC propre)
   (b) 2 = 1 (idée) + 1 (dém propre)
4. 2 (infinité de premiers)

— Partie III (20 pts) :
1. (a) 5 = 1 (assertion explicite) + 1 (init) + 1 (hyp de réc) + 1 (minoration) + 1 (dire où on utilise HR)
   (b) 2
2. 3 = 1 (idée) + 1 (inverses rajoutés positifs) + 1 (manip somme produit)
3. 2 = 1 (somme termes suite géom) + 1 (maj et constante)
4. (a) 3 = 1 (inverse de nbs > 0) + 1 (intégrer) + 1 (calculs intégrales)
   (b) 1 (somme telescopique)
5. 4 (infinité de premiers)

— Partie IV (20 pts) :
1. (a) 1 (stricte croissance)
   (b) 1 (minorer la fonction par la constante)
   (c) 4 = 1 (isoler $m = 1$) + 1 (rel Chasles) + 1 (calcul intégrale) + 1 (lim monotone)
2. 4 = 1 (décroissance) + 3 (stricte)
3. (a) 3 = 2 (limite monotone + hyp) + 0 (ensemble ℓ_1) + 1 (ensemble ℓ_∞)
   (b) 2 (double passage à la limite)
   (c) i. 1 (existence N_A)
       ii. 2 = 1 (preuve cont de S_{N_A}) + 1 (utilisation de cette cont)
       iii. 2 ($\ell_1 = +\infty$)
4. Questions supplémentaires, pas au DS
5. Questions supplémentaires, pas au DS

— Partie V (10 pts) :
1. (a) 3
   (b) 2
2. (a) 2
   (b) 3

I. Nombres premiers congrus à 3 modulo 4

On appellera **ici** nombre premier *de type* 1 (respectivement *de type* 3) un nombre premier p tel que le reste de la division euclidienne de p par 4 est 1 (respectivement 3). On veut montrer qu'il existe une infinité de premiers de type 3. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'y en a qu'un nombre fini n, qu'on note $3 = q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. On pose

$$N = 4q_2 \cdots q_n + 3$$

.

1. (a) Déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 à l'aide d'un algorithme vu en cours.

La méthode du crible (à faire explicitement sur la copie) produit les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 :

$$\boxed{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47.}$$

(b) Donner sans justification les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_8$.

$$\boxed{3,7,11,19,23,31,43,47}$$

2. Montrer qu'un nombre premier impair est forcément de type 1 ou de type 3.

Quand on divise par 4 un nombre impair quelconque m, on obtient un quotient q et un reste r tels que $m = 4q + r$. On a alors le reste $r = m - 4q$ qui est impair comme somme d'un nombre impair et d'un nombre pair. Comme par ailleurs $r \in [\![0,3]\!]$, alors $r \in \{1,3\}$.
En particulier, $\boxed{\text{tout nombre premier impair est de type 1 ou 3.}}$

3. Montrer que N n'est pas divisible par 2.

$N = 2(2q_1q_2 \cdots q_n + 1) + 1$ est $\boxed{\text{impair.}}$

4. Montrer que lorsqu'on divise par 4 un produit fini de premiers impairs de type 1, le reste est 1.

Soit $(p_i)_{i=1}^r$ une famille finie de premiers de type 1. Alors, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $p_i \equiv 1$ [4], donc par produit fini de congruences, $\prod_{i=1}^{r} p_i \equiv \prod_{i=1}^{r} 1 \equiv 1$ [4], *i.e.*

$$\boxed{\text{lorsqu'on divise par 4 un produit fini de premiers impairs de type 1, le reste est 1.}}$$

5. En déduire que N admet au moins un facteur premier de type 3.

D'après le théorème de décomposition en facteurs premiers, N s'écrit comme produit (non vide puisque $N \geq 2$) de nombres premiers. Comme 2 ne divise pas N (par 3), ces premiers sont tous impairs, donc de type 1 ou 3 (par 2).
S'ils étaient tous de type 1, alors on aurait $N \equiv 1$ [4] (par 4). Or, $4 \equiv 0$ [4], donc $N = 4q_2 \cdots q_n + 3 \equiv 3$ [4]. Comme $3 \not\equiv 1$ [4], les facteurs premiers de N ne sont pas tous de type 1 et il en existe donc de type 3. Ainsi,

$$\boxed{N \text{ admet au moins un facteur premier de type 3.}}$$

6. Conclure.

Notons p un facteur premier de type 3 divisant N, ce qui existe d'après la question précédente. Soit $i \in [\![2,n]\!]$. Comme $q_i > 3$ et $N = 4q_2\cdots q_n + 3 \equiv 3\ [q_i]$, q_i ne divise pas N. Donc $q_i \neq p$. Par ailleurs, $q_1 = 3$ est premier avec tous les q_i pour $i \geq 2$, car ce sont des nombres premiers différents de 3. Donc 3 est premier avec $q_2\cdots q_n$ et comme il est aussi premier avec 4, il est premier avec le produit $4q_2\cdots q_n$, donc il ne le divise pas. Mais 3 diviserait $4q_2\cdots q_n$, par combinaison linéaire, s'il divisait $N = 4q_2\cdots q_n + 3$. Ainsi 3 ne divise pas N, donc $p \neq 3$.

Ainsi p est un nombre premier impair de type 3 qui n'apparaît pas dans la liste de tous les nombres premiers impairs de type 3, ce qui est une contradiction qui clôt le raisonnement par l'absurde.

$$\boxed{\text{Il y a donc une infinité de nombres premiers impairs de type 3.}}$$

II. Preuve combinatoire de l'infinitude des nombres premiers

Dans cette partie, on construit une preuve de l'infinitude des nombres premiers totalement différente de celle d'Euclide, qui repose sur des arguments combinatoires. Par conséquent, pour répondre aux questions de cette partie, on s'interdira d'utiliser l'argument d'Euclide.

On fixe $r \in \mathbb{N}^\star$ et $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ des nombres premiers. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note E_n l'ensemble des entiers strictement positifs et inférieurs ou égaux à n dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, *i.e.*

$$E_n = \left\{ m \in [\![1,n]\!] \mid \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r,\, m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \right\}$$

et on note u_n le cardinal de E_n. On note aussi $A_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \leq n \right\}$.

1. On note, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $A_n^k = \left\{ \alpha \in \mathbb{N} \mid p_k^\alpha \leq n \right\}$.

   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $\operatorname{Card}(A_n^k) \leq \dfrac{\ln(n)}{\ln(p_k)} + 1 \leq \dfrac{\ln(p_r n)}{\ln(p_k)}$.

   Soit $k \in [\![1,r]\!]$ fixé. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, par stricte croissance de la fonction ln et stricte positivité de $\ln(p_k)$,

   $$p_k^\alpha \leq n \iff \alpha \ln(p_k) \leq \ln(n) \iff \alpha \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_k)} \iff \alpha \in [\![0, \left\lfloor \tfrac{\ln(n)}{\ln(p_k)} \right\rfloor]\!].$$

   Ainsi $A_n^k = [\![0, \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p_k)} \right\rfloor]\!]$ et donc

   $$\operatorname{Card}(A_n^k) = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p_k)} \right\rfloor + 1 \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_k)} + 1.$$

   Par ailleurs, par croissance de la fonction ln et stricte positivité de $\ln(p_k)$, $1 = \frac{\ln(p_k)}{\ln(p_k)} \leq \frac{\ln(p_r)}{\ln(p_k)}$. Comme la fonction ln transforme les produits en sommes,

   $$\boxed{\operatorname{Card}(A_n^k) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_k)} + 1 \leq \frac{\ln(p_r n)}{\ln(p_k)}.}$$

   (b) Montrer que $A_n \subset A_n^1 \times A_n^2 \times \cdots \times A_n^r$.

   Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in A_n$. Comme $p_1^{\alpha_1} \geq 0$ et, pour $i \in [\![2,r]\!]$, $p_i^{\alpha_i} \geq 1$, alors $p_1^{\alpha_1} \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \leq n$ et donc $\alpha_1 \in A_n^1$. Le même argument montre que $\alpha_k \in A_n^k$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$ et on a donc montré que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in A_n^1 \times A_n^2 \times \cdots \times A_n^r$. Ainsi

   $$\boxed{A_n \subset A_n^1 \times A_n^2 \times \cdots \times A_n^r.}$$

(c) En déduire une constante positive C telle que : $\forall n \geq 1, \mathrm{Card}\,(A_n) \leq C(\ln(p_r n))^r$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme les cardinaux sont positifs ou nuls, la majoration du (a) donne

$$\mathrm{Card}\,(A_n^1 \times A_n^2 \times \cdots \times A_n^r) = \prod_{k=1}^{r} \mathrm{Card}\,(A_n^k) \leq \prod_{k=1}^{r} \frac{\ln(p_r n)}{\ln(p_k)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{r} \ln(p_k)} (\ln(p_r n))^r.$$

En posant $\boxed{C = \frac{1}{\prod_{k=1}^{r} \ln(p_k)}}$ et en utilisant (b) et le fait que le cardinal d'une partie est majoré par le cardinal du tout, on obtient

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(A_n) \leq C(\ln(p_r n))^r.}$$

2. Exhiber une bijection de A_n vers E_n, en justifiant la bijectivité.

On définit l'application φ par

$$\boxed{\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} A_n & \longrightarrow & E_n \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) & \longmapsto & p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{array} \right.}$$

Cette application est bien définie, puisque par définition de A_n, pour $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in A_n$, on a automatiquement $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \leq n$. Par ailleurs, elle est surjective par définition de A_n et E_n. L'injectivité est une conséquence directe de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bijective.}}$

3. (a) Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.

Comme φ est bijective,

$$0 \leq \frac{u_n}{n} = \frac{\mathrm{Card}\,(E_n)}{n} = \frac{\mathrm{Card}\,(A_n)}{n} \leq C \frac{(\ln(p_r n))^r}{n} = C p_r \left(\frac{\ln(p_r n)}{(p_r n)^{\frac{1}{r}}} \right)^r.$$

Or $\frac{1}{r} > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{r}}} = 0$ d'après les comparaisons de croissance entre logarithme et fonctions puissances. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} p_r n = +\infty$ et $r > 0$, par composition de limites,

$$\lim_{n \to +\infty} C p_r \left(\frac{\ln(p_r n)}{(p_r n)^{\frac{1}{r}}} \right)^r = 0.$$

Par le théorème d'encadrement (dit "des gendarmes"),

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.}$$

(b) Montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n < n$.

Par définition de la limite, comme $\frac{1}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2}$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_n}{n} < 1$, *i.e.* $\boxed{u_n < n}$ (car $n \geq N > 0$).

4. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Comme $u_N < N$, alors E_N est une partie stricte de $[\![1, N]\!]$, donc il existe des nombres entiers inférieurs ou égaux à N qui ne peuvent pas s'écrire comme produit des p_i, $i \in [\![1, r]\!]$. Ces nombres ont des facteurs premiers hors de l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ (d'après l'existence de la décomposition en facteurs premiers). Ainsi, aucun ensemble fini de nombres premiers ne contient tous les nombres premiers, donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des nombres premiers est infini.}}$$

III. Preuve analytique de l'infinitude des nombres premiers

Dans cette partie, on construit une preuve de l'infinitude des nombres premiers totalement différente de celle d'Euclide et de la précédente, qui repose sur des arguments analytiques.

On fixe $n \geq 1$ et on reprend les notations de la partie II concernant les premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ et l'ensemble E_n.

1. (a) Montrer, par récurrence sur α, que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout nombre entier $m \geq 2$, $m^\alpha \geq \alpha$.

Soit $m \geq 2$ un entier fixé. On définit, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, l'assertion de récurrence $\mathcal{P}_\alpha$: $m^\alpha \geq \alpha$.

Initialisation : on a $m^0 = 1 \geq 0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_\alpha$ vérifiée pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}$. Comme $m \geq 2$, $m^\alpha \geq 0$ et aussi $m^\alpha \geq 1$, donc

$$m^{\alpha+1} = m\, m^\alpha \geq 2\, m^\alpha = m^\alpha + m^\alpha \geq m^\alpha + 1 \geq \alpha + 1,$$

la dernière inégalité étant obtenue grâce à l'hypothèse de récurrence. Ainsi $\mathcal{P}_{\alpha+1}$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence, on a donc, $\boxed{\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N},\ m^\alpha \geq \alpha.}$

(b) Montrer que $E_n \subset \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\ ;\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [\![0, n]\!]^r \right\}$.

Soit $m \in E_n$. Par définition de E_n, $m \leq n$ et il s'écrit $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, avec des exposants α_k entiers, pour $k \in [\![1, r]\!]$. On a donc, pour un $k \in [\![1, r]\!]$ donné, en utilisant la question précédente puisque $p_k \geq 2$:

$$\alpha_k \leq p_k^{\alpha_k} \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \leq n.$$

Ceci étant valable pour tout $k \in [\![1, r]\!]$,

$$\boxed{m \in \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\ ;\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [\![0, n]\!]^r \right\}}$$

---

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{m \in E_n} \frac{1}{m} \leq \prod_{k=1}^{r} \left(\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\alpha_k}} \right)$.

En notant F_n l'ensemble $\left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\ ;\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [\![0, n]\!]^r \right\}$, comme $E_n \subset F_n$ par la question précédente, on a $F_n = E_n \sqcup (F_n \setminus E_n)$. Ainsi $\displaystyle\sum_{m \in F_n} \frac{1}{m} = \sum_{m \in E_n} \frac{1}{m} + \sum_{m \in (F_n \setminus E_n)} \frac{1}{m}$. Cependant $\displaystyle\sum_{m \in (F_n \setminus E_n)} \frac{1}{m} \geq 0$, comme somme de nombres positifs. Ainsi, par unicité de la décomposition en facteurs premiers,

$$\sum_{m \in E_n} \frac{1}{m} \leq \sum_{m \in F_n} \frac{1}{m} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [\![0, n]\!]^r} \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{p_r^{\alpha_r}} = \boxed{\prod_{k=1}^{r} \left(\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\alpha_k}} \right).}$$

Remarquons que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers sert à justifier l'égalité pour $\displaystyle\sum_{m \in F_n} \frac{1}{m}$, mais n'est pas nécessaire ici : sans cette unicité, on aurait encore une majoration de $\displaystyle\sum_{m \in F_n} \frac{1}{m}$ par $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \left(\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\alpha_k}} \right)$.

---

3. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\alpha_k}}$ et en déduire une constante M qu'on explicitera telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{m \in E_n} \frac{1}{m} \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1, on a

$$\boxed{\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\alpha_k}} = \frac{1 - \frac{1}{p_k^{n+1}}}{1 - \frac{1}{p_k}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.}$$

En utilisant l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\boxed{\sum_{m \in E_n} \frac{1}{m} \leq \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.}$$

---

4. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\left(\forall x \in [m, m+1],\ \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{m}\right)$ et en déduire par intégration que $\ln(m+1) - \ln(m) \leq \frac{1}{m}$.

Pour tout $x \in [m, m+1]$, on a $0 < m \leq x$ donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$. En intégrant cette inégalité sur le segment $[m, m+1]$, on obtient $\int_m^{m+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{m} \int_m^{m+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{m}$. Or ln est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $[m, m+1] \subset \mathbb{R}_+^\star$, donc $\int_m^{m+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(m+1) - \ln(m)$ et enfin :

$$\boxed{\ln(m+1) - \ln(m) \leq \frac{1}{m}.}$$

(b) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \geq \ln(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par somme télescopique, $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} (\ln(m+1) - \ln(m)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. Par la question précédente,

$$\boxed{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \geq \ln(n+1).}$$

5. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, il existe un N tel que $\ln(N+1) > M$. Ainsi

$$\sum_{m \in E_N} \frac{1}{m} \leq M < \ln(N+1) \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m},$$

donc E_N est une partie stricte de $[\![1, N]\!]$ et on conclut comme dans la dernière question de la partie précédente.

IV. Fonction ζ

1. *Définition de la fonction* ζ. On fixe $s \in]1, +\infty[$ et on note, pour $n \geq 1$, $S_n(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s}$.

(a) Étudier la monotonie de la suite $(S_n(s))_{n \geq 1}$.

Pour $n \geq 1$, $S_{n+1}(s) - S_n(s) = \frac{1}{(n+1)^s} > 0$. Donc la suite $(S_n(s))_{n \geq 1}$ est $\boxed{\text{strictement croissante.}}$

(b) Pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, montrer que $\dfrac{1}{m^s} \leq \displaystyle\int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$.

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in [m-1, m]$, comme $m - 1 \geq 1$, alors $0 < x \leq m$. Puis, comme $-s \leq 0$, $\frac{1}{m^s} \leq \frac{1}{x^s}$. En intégrant cette inégalité sur le segment $[m-1, m]$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{m^s} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.}$$

(c) En déduire que $S_n(s) \leq \dfrac{s}{s-1}$ pour tout $n \geq 1$, puis la convergence de la suite $(S_n(s))_{n \geq 1}$.

En sommant les inégalités précédentes pour $m \in [\![2, n]\!]$ (si $n = 1$, la somme est alors nulle), on obtient, par la relation de Chasles pour les intégrales,

$$S_n(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m^s} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = 1 + \left[\frac{1}{(1-s)x^{s-1}}\right]_1^n = \frac{1}{s-1}\left(s - 1 - \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right)\right) \leq \boxed{\frac{s}{s-1}}.$$

Comme la suite $(S_n(s))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée, elle $\boxed{\text{converge.}}$

Ce résultat nous permet de définir la fonction $\zeta : \begin{cases}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \zeta(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(s) \end{cases}$.

On notera aussi, pour $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $R_n(s) = \zeta(s) - S_n(s)$.

2. *Monotonie.* Montrer que la fonction ζ est décroissante. Cette décroissance est-elle stricte ? Jusitifier votre réponse.

Remarquons que, par combinaison linéaire de limites, pour $s > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=3}^{n} \frac{1}{m^s} = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n(s) - 1 - \frac{1}{2^s} \right) = \zeta(s) - 1 - \frac{1}{2^s}.$$

Soient s_1, s_2 tels que $1 < s_1 < s_2$. Pour $m \geq 3$, on a $\frac{1}{m^{s_1}} \geq \frac{1}{m^{s_2}}$, donc en sommant, on a $\sum_{m=3}^{n} \frac{1}{m^{s_1}} \geq \sum_{m=3}^{n} \frac{1}{m^{s_2}}$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\zeta(s_1) - 1 - \frac{1}{2^{s_1}} \geq \zeta(s_2) - 1 - \frac{1}{2^{s_2}}$. Cependant, comme $s_1 < s_2$, $\frac{1}{2^{s_1}} > \frac{1}{2^{s_2}}$, puis en sommant les deux inégalités, dont l'une est stricte, puis en ajoutant 1, on obtient $\zeta(s_1) > \zeta(s_2)$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

---

3. *Limites.*

(a) Montrer sans les calculer que les limites $\lim\limits_{\substack{s\longrightarrow 1 \\ >}} \zeta(s) = \ell_1$ et $\lim\limits_{s\longrightarrow+\infty} \zeta(s) = \ell_\infty$ existent, puis que $\ell_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et $\ell_\infty \in [1,+\infty[$.

La fonction ζ étant décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet des limites en 1 et en $+\infty$, qui sont

$$\boxed{\ell_1 = \lim_{s\to1^+} \zeta(s) = \sup(\zeta(]1,+\infty[)) \quad \text{et} \quad \ell_\infty = \lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \inf(\zeta(]1,+\infty[)).}$$

Comme la fonction ζ est à valeurs positives ou nulles, puisque pour $s > 1$ fixé, les sommes $S_n(s)$ le sont, on a $\boxed{\ell_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$. De plus, à $s > 1$ fixé, par croissance de la suite des sommes, pour tout $n \geq 1$, $S_n(s) \geq S_1(s) = 1$. donc $\boxed{\ell_\infty \in [1,+\infty[.}$ Remarquons que cela entraîne aussi $\ell_1 \geq 1$.

(b) Déduire de la question 1c la valeur de ℓ_∞.

On a vu précédemment que, $s > 1$ étant fixé, pour tout $n \geq 1$, $S_n(s) \leq \frac{s}{s-1}$, donc, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}$. En passant à la limite lorsque s tend vers $+\infty$, on a $\ell_\infty \leq 1$. Comme on a vu que $\ell_\infty \geq 1$, on en déduit que $\boxed{\ell_\infty = 1.}$

(c) On se donne $A \geq 0$.

i. Déduire de la partie précédente qu'il existe un $N_A \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\sum_{m=1}^{N_A} \frac{1}{m} \geq A + 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, il existe en particulier un N_A tel que $\ln(N_A + 1) \geq A + 1$. D'après la question III.4.(b), cela implique que $\boxed{\sum_{m=1}^{N_A} \frac{1}{m} \geq A + 1.}$

---

ii. Montrer alors qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $s \in]1, 1+\alpha]$, $S_{N_A}(s) \geq A$.

La fonction $S_{N_A} : s \longmapsto \sum_{m=1}^{N_A} \frac{1}{m^s}$, somme finie de fonctions exponentielles, est continue sur $\mathbb{R}$. La question précédente donne $S_{N_A}(1) \geq A + 1$. Par continuité à droite de S_{N_A} en 1, en prenant "$\varepsilon = 1$" dans la définition de la continuité, on obtient un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $s \in]1, 1+\alpha]$, $S_{N_A}(s) \geq A$.

---

iii. En déduire la valeur de ℓ_1.

Par croissance de la suite $(S_n(1+\alpha))_n$ et passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\zeta(1+\alpha) \geq S_{N_A}(1+\alpha) \geq A$. Par décroissance de la fonction ζ, $\ell_1 \geq A$. Cela étant valable pour tout $A > 0$, $\boxed{\ell_1 = +\infty.}$

4. *Continuité.* On fixe $a > 1$ et on veut prouver la continuité de ζ en a. Pour cela, on se donne un $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ tel que $R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par définition des $R_n\left(\frac{1+a}{2}\right)$ et différence de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n\left(\frac{1+a}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1+a}{2}\right) - \zeta\left(\frac{1+a}{2}\right) = 0$. Donc il existe en particulier un N_ε tel que $\boxed{R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.}$

(b) i. Montrer que, pour $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $R_n(s) = \lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{m=n+1}^{k} \frac{1}{m^s}$.

Soient $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $k > n$, on a $\sum\limits_{m=n+1}^{k} \frac{1}{m^s} = S_k(s) - S_n(s)$, ce qui tend vers $\zeta(s) - S_n(s) = R_n(s)$ quand k tend vers $+\infty$.

ii. En déduire, pour $h \in \left[\frac{1-a}{2}, +\infty\right[$, que $|R_{N_\varepsilon}(a+h) - R_{N_\varepsilon}(a)| \leq R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right)$.

Dans la valeur absolue, on a une différence de termes positifs ou nuls, donc cette valeur absolue est majorée par le plus grand des deux. Par la question précédente, la fonction R_{N_ε} est définie comme limite de fonctions qui sont des sommes finies de fonctions décroissantes, donc elles-mêmes décroissantes. Ainsi R_{N_ε} est une fonction décroissante, donc les termes dans la valeur absolue sont chacun majoré par $R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right)$ puisque $a \geq 1$, donc $a \geq \frac{1+a}{2}$ et $h \geq \frac{1-a}{2}$ donc $a+h \geq a + \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2}$.

On a donc $|R_{N_\varepsilon}(a+h) - R_{N_\varepsilon}(a)| \leq R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right)$ et en particulier, en utilisant une question précédente, $\boxed{|R_{N_\varepsilon}(a+h) - R_{N_\varepsilon}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.}$

(c) Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}(S_{N_\varepsilon}(a+h) - S_{N_\varepsilon}(a)) = 0$.

Comme précédemment, la fonction S_{N_ε} est continue en a, car elle l'est sur $\mathbb{R}$ comme somme finie de fonctions exponentielles.

(d) Conclure en utilisant la définition de la continuité.

Par la question précédente, on peut trouver $\alpha' > 0$ tel que pour $h \in [-\alpha', \alpha']$, $|S_{N_\varepsilon}(a+h) - S_{N_\varepsilon}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En prenant $\alpha = \min\left(\alpha, \frac{a-1}{2}\right)$, pour $h \in [-\alpha, \alpha]$, on a $a+h \geq a - \frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2} > 1$ et

$$|\zeta(a+h) - \zeta(h)| \leq |S_{N_\varepsilon}(a+h) - S_{N_\varepsilon}(a)| + |R_{N_\varepsilon}(a+h) - R_{N_\varepsilon}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[.}$

5. *Dérivabilité.* On fixe $a > 1$ et on veut prouver la dérivabilité de ζ en a.

(a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x (x-t)e^t \, \mathrm{d}t = e^x - 1 - x$.

On pose l'intégration par parties suivante :

$$\left[\begin{array}{rcl} u & = & x-t \\ \mathrm{d}v & = & e^t \, \mathrm{d}t \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u & = & -\,\mathrm{d}t \\ v & = & e^t \end{array}\right.$$

Les fonctions $t \longmapsto x - t$ et exp étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $0, x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^x (x-t)e^t \, \mathrm{d}t = \left[(x-t)e^t\right]_0^x + \int_0^x e^t \, \mathrm{d}t = (0-x) + \left[e^t\right]_0^x = \boxed{e^x - 1 - x.}$$

(b) En déduire que pour $h \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\dfrac{e^{-h\ln(m)} - 1 + h\ln(m)}{h}\right| \leq |h|\,(\ln(m))^2 e^{|h|\ln(m)}$.

Par la question précédente, $\left|\dfrac{e^{-h\ln(m)} - 1 + h\ln(m)}{h}\right| = \dfrac{1}{|h|}\left|\displaystyle\int_0^{-h\ln(m)} (-h\ln(m) - t)e^t \,\mathrm{d}t\right|$. Remarquons que $\ln(m) \geq 0$, donc l'ordre entre les bornes de l'intégrale dépend du signe de h.

Si $h < 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{-h\ln(m)} (-h\ln(m) - t)e^t \,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{-h\ln(m)} |-h\ln(m) - t|\, e^t \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{-h\ln(m)} (-h\ln(m))e^{-h\ln(m)} \,\mathrm{d}t \\
&= (-h\ln(m))^2 e^{-h\ln(m)} \\
&= |h|^2\,(\ln(m))^2 e^{|h|\ln(m)}.
\end{aligned}$$

Si $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{-h\ln(m)} (-h\ln(m) - t)e^t \,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{-h\ln(m)}^{0} |-h\ln(m) - t|\, e^t \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-h\ln(m)}^{0} h\ln(m) \,\mathrm{d}t \\
&= (h\ln(m))^2 \\
&\leq |h|^2\,(\ln(m))^2 e^{|h|\ln(m)}.
\end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, $\boxed{\left|\int_0^{-h\ln(m)} (-h\ln(m) - t)e^t \,\mathrm{d}t\right| \leq |h|^2\,(\ln(m))^2 e^{|h|\ln(m)}}$ et en divisant par $|h| > 0$, on obtient le résultat voulu.

(c) Montrer que, pour $h \neq 0$, la suite $\left((\ln(m))^2 e^{-|h|\ln(m)}\right)_{m\geq 1}$ est bornée. On note C un majorant de cette suite, qu'on ne demande pas d'expliciter.

Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. Pour $\alpha > 0$ et P une fonction polynôme, on sait, d'après les résultats de comparaison de croissances entre polynômes et exponentielles, que $\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-\alpha x} = 0$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-|h|x} = 0$. Comme $\lim_{m\to+\infty} \ln(m) = +\infty$, on a par composition de limites $\boxed{\lim_{m\to+\infty} (\ln(m))^2 e^{-|h|\ln(m)} = 0.}$ La suite $\left((\ln(m))^2 e^{-|h|\ln(m)}\right)_{m\geq 1}$ étant convergente, $\boxed{\text{elle est bornée.}}$

(d) Montrer que, pour $h \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\dfrac{S_n(a+h) - S_n(a)}{h} + \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \dfrac{\ln(m)}{m^a}\right| \leq C\,|h|\,S_n(a - 2\,|h|)$.

Soient $h \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On a par calcul, inégalité triangulaire et application successive des résultats des deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S_n(a+h) - S_n(a)}{h} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}\right| &= \left|\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{m^{a+h}} - \frac{1}{m^a} + h\frac{\ln(m)}{m^a}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^a}\left(\frac{e^{-h\ln(m)} - 1 + h\ln(m)}{h}\right)\right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^a}\left|\frac{e^{-h\ln(m)} - 1 + h\ln(m)}{h}\right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^a}\,|h|\,(\ln(m))^2 e^{|h|\ln(m)} \\
&\leq C\,|h| \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^a} e^{2|h|\ln(m)} = \boxed{C\,|h|\,S_n(a - 2\,|h|).}
\end{aligned}$$

(e) Montrer qu'il existe un constante $\widetilde{C} > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a} \leq \widetilde{C}\, S_n\left(\frac{1+a}{2}\right)$ et en déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}\right)_{n\geq 1}$ converge.

Par les résultats de comparaison de croissance entre fonctions puissances et fonctions logarithmes, puisque $\frac{a-1}{2} > 0$, on a $\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(m)}{m^{\frac{a-1}{2}}} = 0$. La suite $\left(\frac{\ln(m)}{m^{\frac{a-1}{2}}}\right)_m$ étant convergente, elle est bornée. Elle est donc majorée par un certain $\widetilde{C} > 0$, *i.e.*

$$\forall m \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{\ln(m)}{m^{\frac{a-1}{2}}} \leq \widetilde{C}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En multipliant la majoration ci dessus, pour $m \in [\![1,n]\!]$, par $\frac{1}{m^{\frac{a+1}{2}}} > 0$, puis en sommant sur les $m \in [\![1,n]\!]$, on obtient $\boxed{\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a} \leq \widetilde{C} S_n\left(\frac{1+a}{2}\right).}$

Par croissance de la suite $\left(S_q\left(\frac{1+a}{2}\right)\right)_q$, $S_n\left(\frac{1+a}{2}\right) \leq \lim_{q\to+\infty} S_q\left(\frac{1+a}{2}\right) = \zeta\left(\frac{1+a}{2}\right)$. Ainsi

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a} \leq \widetilde{C}\zeta\left(\frac{1+a}{2}\right).$$

La suite $\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}\right)_{n\geq 1}$ étant croissante (car $\forall m \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{\ln(m)}{m^a} \geq 0$) et majorée, $\boxed{\text{elle converge.}}$

(f) En déduire que ζ est dérivable en a et que $\zeta'(a) = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}$.

Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a} \in \mathbb{R}$. Pour $|h| \leq \frac{a-1}{3}$, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 5d, par combinaison linéaire de limites, continuité de la fonction valeur absolue et stabilité des inégalités larges par passage à la limite :

$$\forall h \in \left[-\frac{a-1}{3}, \frac{a-1}{3}\right],\ \left|\frac{\zeta(a+h)-\zeta(a)}{h} + \ell\right| \leq C|h|\zeta(a-2|h|).$$

En faisant tendre h vers 0, par continuité de la fonction ζ en a et encadrement, $\lim_{h\to 0} \frac{\zeta(a+h)-\zeta(a)}{h} = -\ell$. Ainsi

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est dérivable en } a \text{ et } \zeta'(a) = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}.}$$

.

V. Identité d'Euler

On reprend ici les notations de la partie concernant la fonction ζ et on note $p_1 < p_2 < \ldots < p_n \ldots$ la suite infinie des nombres premiers. On fixe un réel $s > 1$.

1. (a) Montrer que $\quad \forall r,n \in \mathbb{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{r} \frac{1-\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq S_{(p_1p_2\cdots p_r)^n}(s)$.

Soient $r,n \in \mathbb{N}^\star$. Comme dans la partie III, en notant F_n l'ensemble

$$F_n = \left\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\ ;\ (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) \in [\![0,n]\!]^r\right\},$$

on a, par unicité de la décomposition en facteurs premiers,

$$\sum_{m\in F_n} \frac{1}{m^s} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in[\![0,n]\!]^r} \frac{1}{(p_1^s)^{\alpha_1}} \frac{1}{(p_2^s)^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{(p_r^s)^{\alpha_r}} = \prod_{k=1}^{r}\left(\sum_{\alpha_k=0}^{n} \frac{1}{(p_k^s)^{\alpha_k}}\right) = \prod_{k=1}^{r} \frac{1-\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{p_k^s}}.$$

Par ailleurs, tout élément de F_n est clairement inférieur ou égal à $(p_1p_2\cdots p_r)^n$, donc $F_n \subset [\![1,(p_1p_2\cdots p_r)^n]\!]$. Par suite, comme on somme des nombres positifs,

$$\sum_{m\in F_n} \frac{1}{m^s} \leq \sum_{m\in[\![1,(p_1p_2\cdots p_r)^n]\!]} \frac{1}{m^s} = S_{(p_1p_2\cdots p_r)^n}(s)$$

et en combinant les deux résultats,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{r} \frac{1-\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq S_{(p_1 p_2 \cdots p_r)^n}(s).}$$

(b) En déduire que $\quad \forall r \in \mathbb{N}^\star, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq \zeta(s).$

Soir $r \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Lorsque n tend vers $+\infty$, $(p_1 p_2 \cdots p_r)^n$ aussi, et par composition de limites, $S_{(p_1 p_2 \cdots p_r)^n}(s)$ tend vers $\zeta(s)$. Toujours lorsque n tend vers $+\infty$, par produit fini de limites, $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1-\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ tend vers $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et par stabilité des inégalités larges par passage à la limite,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq \zeta(s).}$$

---

2. (a) Montrer que $\quad \forall r \in \mathbb{N}^\star,\ \forall n \geq \log_2(p_r), \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1-\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{p_k^s}} \geq S_{p_r}(s).$

Soient $r \in \mathbb{N}^\star$ et $n \geq \log_2(p_r)$. L'ensemble F_n a été introduit dans une question précédente et par un raisonnement analogue aux précédents, il suffit de montrer qu'on a $[\![1, p_r]\!] \subset F_n$. <u>Soit $m \in [\![1, p_r]\!]$</u>. Les facteurs premiers de m étant tous inférieurs ou égaux à m, donc à p_r, ils sont tous dans l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, donc, par décomposition en facteurs premiers, m s'écrit $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, avec les α_k entiers. Par ailleurs pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $2^{\alpha_k} \leq p_k^{\alpha_k} \leq m \leq p_r$, donc $\alpha_k \leq \log_2(p_r) \leq n$. Ainsi $\boxed{m \in F_n.}$

(b) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)_{r\geq 1}$ converge et que $\ \zeta(s) = \displaystyle\lim_{r\to+\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}.$

Soir $r \in \mathbb{N}^\star$. Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient par produit fini de limites, $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \geq S_{p_r}(s)$. En combinant ce résultat avec celui de la question V.1.(b), on obtient l'encadrement

$$S_{p_r}(s) \leq \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \leq \zeta(s).$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, p_r tend vers $+\infty$ (une récurrence évidente prouve que, pour tout $r \geq 1$, $p_r \geq r$), et on obtient par composition de limite et le théorème d'encadrement que la suite $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)_{r\geq 1}$ converge et que $\zeta(s) = \displaystyle\lim_{r\to+\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$, ce qu'on note

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}.}$$
