Programme de colle de la semaine 12 (du 18 au 22 décembre 2023)

Programme des exercices

Nombres réels et suites numériques (fin)

3 Limite d'une suite réelle (fin)

2.1 Limites et ordre

— Passage à la limite dans une inégalité large. Cela ne conserve pas les inégalités strictes.
— Théorème de convergence par encadrement.
— Théorème de divergence par minoration ou majoration.
— Comportement des suites $(a^n)_n$, avec $a \in \mathbb{R}$.

3 Suites monotones

— Théorème de la limite monotone.
— Définitions des suites adjacentes, théorème des suites adjacentes.

4 Suites extraites

— Définition d'une suite extraite de u : $u \circ \varphi$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, notée $(u_{\varphi(n)})_n$, $(u_{\varphi(k)})_k$ ou $(u_{n_k})_k$,
— Une suite extraite d'une suite extraite de u est une suite extraite de u.
— Si une suite u tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.
— Si deux suites extraites d'une même suite u admettent des limites différentes, alors la suite u n'a pas de limite.
— Si les suites extraites de rangs pairs de de rangs impairs $(u_{2k})_k$ et $(u_{2k+1})_k$ tendent vers une **même limite** $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite u tend aussi vers ℓ.

5 Itérations de fonctions

Suites définies par
$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

— Définition pour tout n si u_0 appartient à une partie E de D_f stable par f ($f(E) \subset E$).
— Notion de point fixe de f et suite constante associée.
— Étude graphique : point fixes et itérations successives de u_0 par f, conjectures sur la monotonie et les limites.
— Démonstration des conjectures de monotonie : cas "$\forall x \in E, f(x) > x$" (resp. $<$), démonstration par récurrence, ou autre.
— Démonstration des existences de limites le plus souvent par le théorème de la limite monotone.
— Pour les valeurs des limites, on peut utiliser le "théorème" suivant : si la suite est convergente de limite ℓ et la fonction f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.
— Résultat "hors-programme" mais qu'il faut connaître et redémontrer dans les cas où il s'applique : si f est croissante sur une partie E de D_f stable par f et $u_0 \in E$, alors u est monotone.

6 Suites à valeurs complexes

— Définition de la limite analogue à celle des suites réelles, interprétation graphique (disques).
— Traduction en termes de parties réelles et imaginaires.
— Unicité de la limite par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$.
— Suites complexes bornées, toute suite convergente est bornée.
— Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
— Théorème de Bolzano-Weierstraβ complexe.

CH11 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1 Divisibilité

1.1 Relation de divisibilité

Définition : pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a|b$ ss'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ak = b$.

On remarque en particulier que tout entier divise 0 et que -1 et 1 divisent tout entier.

Propriétés de cette relation binaire : réflexivité et transitivité sur $\mathbb{Z}$, pas d'antisymétrie, mais presque : deux entiers sont *associés* (*i.e.* codivisibles) ss'il sont égaux au signe près.

Conséquence : la divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre non total, admettant un plus petit élément (1) et un plus grand élément (0).

Lien avec les lois de $\mathbb{Z}$:
— si $d|a$ et $d|b$, alors d divise toute combinaison linéaire entière de a et b ;
— si $a|b$ et $c|d$, alors $ac|bd$.

1.2 Division euclidienne

Théorème 1 $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star, \exists ! (q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, b-1]\!],\ a = bq + r.$

Définition 2 Avec les notations du théorème, l'écriture $a = bq + r$ s'appelle la *division euclidienne* de a par b, l'entier relatif q s'appelle le *quotient* de cette division euclidienne et l'entier naturel r s'appelle le *reste* de cette division euclidienne.

Proposition 3 *Avec les notations précédentes, on a,* **dans le cas où** $b > 0$,

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \quad \text{et} \quad r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor .$$

2 Diviseurs et multiples communs

2.1 Cas des entiers naturels

Définition 4 Pour $a, b \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{CD}(a,b)$ l'ensemble de leurs *diviseurs communs*, c'est à dire l'ensemble des entiers naturels qui divisent à la fois a et b.

Remarquons que $\mathrm{CD}(b,a) = \mathrm{CD}(a,b)$.

On a alors le résultat fondateur de l'algorithme d'Euclide à venir :

Lemme 5 *(Lemme clé de l'algorithme d'Euclide.)*

Soient $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ et r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors,

$$\mathrm{CD}(a,b) = \mathrm{CD}(b,r).$$

On décrit maintenant l'algorithme d'Euclide. Il prend en entrée $a, b \in \mathbb{N}$ et coniste en la construction d'une suite finie r_{-1}, $r_0, \ldots$, r_N, r_{N+1} d'entiers naturels définie par récurrence de la manière suivante :

- Initialisation : on pose $r_{-1} = a$ et $r_0 = b$.
- Hérédité : supposant avoir construit jusqu'au terme r_k, pour un certain $k \in \mathbb{N}$:
  - si $r_k = 0$, on s'arrête et on pose $N = k - 1$;
  - sinon, on note r_{k+1} le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k.

La terminaison de cet algorithme est assurée car la suite $(r_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante (par définition de la division euclidienne) et ne peut donc pas être infinie. On a alors $r_{N+1} = 0$.

En utilisant le lemme clé précédent et une récurrence immédiate, on a alors

$$\mathrm{CD}(a,b) = \mathrm{CD}(r_{-1}, r_0) = \mathrm{CD}(r_0, r_1) = \ldots = \mathrm{CD}(r_N, r_{N+1}) = \mathrm{CD}(r_N, 0).$$

Or $\mathrm{CD}(r_N, 0)$ est l'ensemble des diviseurs de r_N, puisque tout entier naturel divise 0, donc cet ensemble admet r_N comme plus grand élément pour l'ordre de la divisibilité.

On a donc prouvé le

Théorème 6 *(Existence du PGCD et son calcul par l'algorithme d'Euclide)*

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathrm{CD}(a,b)$ de leurs diviseurs (positifs) communs possède un plus grand élément au sens de la divisibilité, qu'on note $a \wedge b$ et qu'on appelle le PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b.

De plus, $a \wedge b$ est l'avant-dernier reste obtenu dans l'algorithme d'Euclide. Dans le cas où $(a,b) \neq (0,0)$, il est non nul et c'est donc le "dernier reste non nul" de l'algorithme.

Remarque 7 Comme $\mathrm{CD}(b,a) = \mathrm{CD}(a,b)$, il s'ensuit que $b \wedge a = a \wedge b$.

Lemme 8 *(Lien entre divisibilité et ordre usuel)*

Si $n \in \mathbb{N}^\star$, tout diviseur de n est inférieur ou égal à n au sens de l'ordre usuel.

qui permet une interprétation (restreinte) du PGCD en terme de l'ordre usuel :

Proposition 9 *(PGCD et ordre usuel)*
Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $a \wedge b$ est aussi le plus grand des diviseurs communs de a et b au sens de l'ordre usuel.

Remarque 10 Cela n'est pas le cas pour $a = b = 0$, puisque 0 n'est pas le plus grand élément de $\mathbb{N}$ pour l'ordre usuel.

Par ailleurs, lors de l'algorithme d'Euclide effectué sur a et b , on voit facilement que tous les r_k s'écrivent comme combinaisons linéaires entières (*i.e.* à coefficients entiers **relatifs**) de a et b, par récurrence double finie rapide : c'est trivialement le cas pour a et b eux mêmes et si c'est le cas pour r_{k-2} et r_{k-1}, comme r_k s'écrit comme combinaison linéaire entière de r_{k-2} et r_{k-1} par la division euclidienne de reste r_k, alors il s'écrit aussi comme combinaison linéaire entière de a et b. En particulier, c'est le cas de $r_N = a \wedge b$ et on a la

Proposition 11 *(Relation de Bézout dans $\mathbb{N}$)*

$$\forall a,b \in \mathbb{N}, \exists u,v \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = au + bv.$$

Remarque 12 Les coefficients u et v ne sont pas uniques. On peut voir facilement qu'il existe en fait une infinité de relations de Bézout possibles.
La méthode précédente à partir de l'algorithme d'Euclide nous en fournit une.

L'obtention de cette relation de Bézout en même temps que le calcul du PGCD est appelé *algorithme d'Euclide étendu*. On le décrit un peu plus précisément.
Pour cela on introduit des notations;
— on note q_k ($1 \leq k \leq N+1$) le quotient de la division euclidienne de r_{k-2} par r_{k-1} qui s'écrit alors
$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k;$$
— on note, à chaque étape, u_k et v_k les coefficients de la combinaison linéaire entière de a et b obtenue qui vaut r_k.

L'algorithme d'Euclide étendu est alors celui-ci :

1. Initialisation : $r_{-1} = a,\ u_{-1} = 1,\ v_{-1} = 0$ et $r_0 = b,\ u_0 = 0,\ v_0 = 1$ et $k = 0$
2. Boucle : tant que $r_k \neq 0$,
   — $k \leftarrow k+1$
   — Calculer q_k et r_k en faisant la division euclidienne de r_{k-2} par r_{k-1}
   — Calculer $u_k = u_{k-2} - q_k u_{k-1}$ et $v_k = v_{k-2} - q_k v_{k-1}$
3. Résultat (k vaut alors $N+1$) : renvoyer $r_{k-1} = a \wedge b$ et $u_{k-1} = u,\ v_{k-1} = v$ qui vérifient $au + bv = a \wedge b$.

Lors de l'exécution, on voit que pour calculer les données du rang k, on n'a plus besoin de celles des rangs inférieurs à $k-2$, donc il est totalement inutile de stocker toutes les données, contrairement à la méthode usuelle de “remontée” de l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout. Voici une implémentation en Python de cet algorithme :

```
def EuclideEtendu(a,b):
    up,vp,u,v = 1,0,0,1
    while b!=0:
        q = a//b
        a,b = b,a%b
        up,u = u,up-q*u
        vp,v = v,vp-q*v
    return a,up,vp
```

Pour le calcul à la main, il est recommandé de présenter les résultats dans un tableau.

On peut aussi, surtout dans les petits cas, effectuer une “remontée classique” de l’agorithme d’Euclide.

2.2 Cas des entiers relatifs

Définition 13 Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on appelle PGCD de a et b le nombre

$$a \wedge b = |a| \wedge |b|.$$

Proposition 14 *(Caractérisation)*

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}$, $d = a \wedge b$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. *d divise a et b ;*
2. *tout diviseur commun de a et b divise d.*

Remarque 15 Lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$, $a \wedge b$ est encore le plus grand des diviseurs (relatifs) communs de a et b au sens de l’ordre usuel.

Proposition 16 *(Relation de Bézout dans $\mathbb{Z}$)*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = au + bv.$$

Proposition 17

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \forall k \in \mathbb{Z}^\star, \quad (ka) \wedge (kb) = |k|\,(a \wedge b).$$

2.3 Nombres premiers entre eux

Définition, théorème de Bézout, théorème de Gauss, théorème de divisibilité par un produit lorsque deux facteurs divisent un même nombre et sont premiers entre eux, forme irréductible des nombres rationnels : existence et unicité.

2.4 PGCD de plus de deux entiers

2.4.1 Cas de trois entiers naturels

On remarque que les diviseurs naturels communs de $a,b,c \in \mathbb{N}$ sont les diviseurs de $(a \wedge b) \wedge c$, donc ce dernier est le plus grand des diviseurs communs de a,b,c au sens de la divisibilité. On l'appelle le PGCD de a,b et c. On voit par un raisonnement analogue que ce plus grand diviseur commun est aussi $a \wedge (b \wedge c)$.

Cela prouve que l'opération $\wedge$ est associative sur $\mathbb{N}$ et justifie la notation $a \wedge b \wedge c$.

Remarque : cette loi est aussi commutative et admet pour élément neutre 0. On dit que $(\mathbb{N}, \wedge)$ est un monoïde commutatif unitaire.

2.4.2 Cas de n entiers naturels

Par récurrence immédiate, l'ensemble des diviseurs communs de $a_1, \ldots, a_n$ possède un plus grand élément pour la divisibilité qui est

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = a_1 \wedge a_2 \cdots \wedge a_n,$$

nombre bien défini par associativité de $\wedge$ qu'on appelle le PGCD de a_1,...,a_n.

2.4.3 Cas de n entiers relatifs

Le PGCD de a_1,...,a_n est

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \bigwedge_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Proposition 18 *(Caractérisation)*

Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}$, $d = \bigwedge a_i$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. *d divise tous les a_i ;*
2. *tout diviseur commun des a_i divise d.*

Remarque 19 Lorsque $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, $\bigwedge a_i$ est le plus grand des diviseurs (relatifs) communs des a_i au sens de l'ordre usuel.

La proposition suivante se déduit par une simple récurrence :

Proposition 20 *(Relation de Bézout pour n entiers)*

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, \exists u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}, \quad \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$

Définition des nombres premiers entre eux deux à deux et des nombres premiers entre eux dans leur ensemble ($\bigwedge a_i = 1$)

La première est (beaucoup) plus forte que la seconde : il suffit d'avoir deux des a_i premiers entre eux pour que les a_i soient premiers entre eux dans leur ensemble.

Proposition 21 (*Théorème de Bézout pour n entiers*)

$$\forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z}, \left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = 1 \iff \left(\exists u_1,\dots,u_n \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1 \right) \right).$$

2.5 PPCM

Définition dans $\mathbb{N}$ comme le plus petit des multiples communs au sens de la divisibilité, notation $a \vee b$.

Pas encore de définition dans $\mathbb{Z}$.

Définition dans $\mathbb{Z}$ comme le PPCM des valeurs absolues.

Remarque que c'est aussi, pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, le plus petit multiple commun strictement positif au sens de l'ordre usuel.

Caractérisation du PPCM comme étant entier naturel, multiple commun et divisant tout multiple commun.

Relation

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}, \quad (a \wedge b)(a \vee b) = |ab|.$$

Formule du PPCM des produits de a et b par un même nombre.

3 Nombres premiers

3.1 Définition et premières propriétés

Définition.

Exemple d'application du crible d'Ératosthène.

Les entiers relatifs premiers à un p premier donné sont ceux non divisibles par p. Pour les autres, leur PGCD avec p est p. Lemme d'Euclide : si un premier p divise un produit, il divise l'un des deux facteurs.

Rappel des deux résultats vus en début d'année :

— existence de la décomposition d'un naturel non nul en produit de nombres premiers ;

— infinitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

3.2 Décomposition en facteurs premiers

Unicité de cette décomposition à l'ordre près. Formalisation de la décomposition à l'aide d'un produit infini et des valuations p-adiques, appelée factorisation première. Théorème sur les propriétés des valuations p-adiques : valuation p-adique d'un produit, traduction de la divisibilité en termes de valuations, expression du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations.

4 Congruences

Définition, propriétés : relation d'équivalence, compatibilité avec la somme et le produit. Toutes ces propriétés sont à (re)démontrer en exercice sauf la compatibilité avec le produit qu'on démontre :

Démonstration: Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'\ [n]$.

Alors $a'b' - ab = a'(b'-b) + (a'-a)b$ est une combinaison linéaire à coefficuents entiers de $b'-b$ et $a'-a$, tous deux divisibles par n, donc elle est elle-même divisible par n, *i.e.* $a'b' \equiv ab\ [n]$. $\square$

En exercice : pour a entier, l'existence de $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1\ [n]$ équivaut à ce que $a \wedge n = 1$.

Petit théorème de Fermat (on prouve par récurrence sur a que $a^p \equiv a[p]$ puis on utilise Bézout pour simplifier par a lorsque $p \not| a$.)

On utilise au passage le lemme : pour p premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

CH12-1 : Limites

1 Introduction de la limite

On se place ici dans le cas d'une fonction f définie sur un intervalle I (non forcément ouvert) non trivial, *i.e.* non vide et non réduit à un point. On regarde le comportement de f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est un point de I ou une borne de I.

$\bigoplus$ On demande à la classe de construire des définitions de limites dans différents cas. Il ressort de cette activité que ces définitions, quoique différentes, ont une structure commune.

On introduit alors la notion de "voisinage spécifique", cas particulier de la notion générale de voisinage qui sera vue l'an prochain. Cette terminologie **non universelle** et **interne à ce cours** est simplement destinée à unifier et rendre plus intuitives les différentes définitions de limites correspondant aux différents cas.

Définition 22 Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}$, on a trois cas :

— Si $w \in \mathbb{R}$, les *voisinages spécifiques* de w sont les segments non triviaux centrés en w, à savoir les $[w-\eta, w+\eta]$, avec $\eta > 0$;

— Si $w = -\infty$, les *voisinages spécifiques* de $-\infty$ sont les intervalles $]-\infty, A]$, avec $A \in \mathbb{R}$;

— Si $w = +\infty$, les *voisinages spécifiques* de $+\infty$ sont les intervalles $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$;

On notera $\mathcal{V}(w)$ l'ensemble des voisinages spécifiques de w.

On peut alors définir la notion de propriété vérifiée "au voisinage d'un point" :

Définition 23 Une propriété est dite vérifiée au voisinage d'un point $w \in \overline{\mathbb{R}}$ ss'il existe un voisinage spécifique de w tel que la propriété soit vérifiée sur ce voisinage.

Exemples 24 On dit par exemple que la fonction exp est bornée au voisinage de $-\infty$ ou que ln est strictement positive au voisinage de 2. En revanche, ln n'est pas positive ou nulle au voisinage de 1.

Remarque 25 L'expression "à partir d'un certain rang" utilisée pour les suites pourrait aussi se traduire ainsi : "pour n au voisinage de $+\infty$".

Remarque 26 Vous verrez l'an prochain qu'un *voisinage* de $x \in \mathbb{R}$ (au sens universel du terme) est un ensemble quelconque qui contient au moins un voisinage spécifique de x.

Définition 27 Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I,\ (x \in U \Longrightarrow f(x) \in V).$$

Remarque 28 Cela est aussi équivalent aux formulations suivantes

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U \cap I) \subset V$$

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a),\ U \cap I \subset f^{-1}(V).$$

À partir de cette définition, **on retrouve les formulations classiques** de la limite dans les différents cas de figure suivant que a (resp. ℓ) est fini, $-\infty$ ou $+\infty$, avec les valeurs absolues ou avec des intervalles. Notation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 29 Lorsque $a \in \mathbb{R}$, il est souvent utile d'effectuer un changement de variables "$x = a+h$" et d'utiliser le fait immédiat suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 30 Comme pour les suites, lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, il est souvent pratique de soustraire la limite en utilisant les faits immédiats suivants :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff (f(x)-\ell) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On prouve souvent ce dernier résultat en majorant la valeur absolue par une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a.

2 Plan de la suite du cours

— *Unicité de la limite :* démonstration à faire en exercice en copiant celle de l'unicité de la limite d'une suite. Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

— *Propriétés :*
Si $a \in I$ et f a une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.
Si f possède une limite finie en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

— *La notion de limite est locale :* il suffit de regarder la restriction de f à $I \cap V$ pour un certain voisinage spécifique V de a (*i.e.* la resriction de f à $I \cap [a-\eta, a+\eta]$ pour un certain $\eta > 0$, resp. à $I \cap [A, +\infty[$, resp. à $I \cap]-\infty, A]$).
On peut ainsi étendre la définition de la limite au cas d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ et de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe un voisinage spécifique V de a dont l'intersection avec D_f soit un intervalle non trivial dont a soit un élément ou une borne.

— *Limite à droite (resp. à gauche) :* on considère la limite de $g = f|_{I\cap]a,+\infty[}$ (resp...). Notations $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}}$ et $\lim\limits_{x\to a^+}$. Exemple de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0^- et en 0^+.

— *Extension :* définition de la limite pour le cas d'une fonction définie sur un intervalle épointé ($I \setminus \{a\}$). Définition de la limite lorsque x tend vers a par valeurs différentes de a, notation $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}}$. Exemple de la fonction $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ en 0. On dit au passage que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ en le démontrant en avant-première à l'aide du taux d'accroissement.

— *Caractérisation séquentielle des limites :* f a pour limite ℓ en a ssi

$$\left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, (\lim x_n = a \Longrightarrow \lim f(x_n) = \ell)\right).$$

Application à la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ en utilisant la forme exponenetielle. On dit au passage que $\lim_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ en le démontrant en avant-première à l'aide du taux d'accroissement.

— *Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produits, quotients*, les élèves sont chargés de verifier que les démonstrations analogues dans le cas des suites "passent" bien à ce nouveau cadre.
— *Composition de limites :* f étant définie sur un intervalle I et g sur un intervalle J, on suppose que $f(I)\subset J$. Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b, alors $g\circ f$ a pour limite ℓ en a.
— *Lien avec l'ordre :* stabilité de $\leq$ par passage à la limite, théorème d'encadrement ("Gendarmes"), de minoration et de majoration. Théorème de la limite monotone : si f est monotone sur I et a **n'est pas un point de** I (cela implique en particulier que a est une borne de I), alors f admet une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en a. Corollaire ; une fonction monotone sur I admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point qui n'est pas une borne de I. Contrexemple : la fonction partie entière inférieure est monotone mais n'admet pas de limite en tout point.

CH12-2 : Continuité

1 Définitions

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, et $a\in I$: la fonction f **est donc définie en** a.

Définition 31 On dit que la fonction f *est continue en a* ssi elle admet une limite en a (qui est alors nécessairement $f(a)$ comme on l'a déjà vu), *i.e.*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in I,(|x-a|\leq\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon).$$

Reformulation en termes d'intervalles. La continuité est une notion locale. Extension au cas où D_f n'est plus forcément un intervalle. On aussi :

Proposition 32 *La fonction f est continue en a ssi* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} f(x)=f(a)$.

Définition 33 On définit la continuité à gauche (resp. à droite) par le fait que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=f(a)$), c'est-à-dire $I\cap]-\infty,a[\neq\emptyset$ (resp. $I\cap]a,+\infty[\neq\emptyset$) et

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in I,(a-\alpha\leq x<a\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon)$$
$$(\text{resp. }\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in I,(a<x\leq a+\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon))$$

Nombreux exemples.

Définition 34 Lorsqu'une fonction f définie sur $I\setminus\{a\}$ a une limite ℓ en a, on peut définir le *prolongement par continuité* de f en a, à savoir la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par $\widetilde{f}|_{I\setminus\{a\}}=f$ et $\widetilde{f}(a)=\ell$. Cette fonction est alors continue en a.

Toutes les définitions et tous les énoncés sont **exigibles**.
Les démonstrations exigibles sont sur la page suivante.

Démonstrations de cours exigibles

— Petit théorème de Fermat dans le cas $a \in \mathbb{N}$ par récurrence, en admettant que, pour p premier et $0 < k < p$, $p | \binom{p}{k}$;
— Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction ;
— Théorème de "composition des limites" ;
— Théorème de la limite monotone pour les fonctions ;
— Continuité des fonctions sin et cos en 0.