Probabilités finies

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

Une grande partie des exemples est tirée d'un polycopié produit par François Blanchet pour un cours à Polytech'Grenoble.

Pour introduire le cours de probabilités, on présente trois problèmes très classiques : le problème des élèves d'une classe nés le même jour, le problème des deux enfants et le problème des trois boîtes. $\oplus$

I Probabilité sur un univers fini

1 Expérience aléatoire et univers

On réalise une *expérience aléatoire*, c'est-à-dire une expérience reproductible, mais dont le résultat est (*a priori*) imprévisible.

Exemples 1

1. On lance un dé standard.
2. On lance une pièce.
3. On tire p boules avec remise dans une urne contenant des boules de trois couleurs différentes (rouge, vert, beu) indiscernables au toucher.
4. On lance une "infinité de fois" une pièce.
5. On attend un *certain temps* (mesuré en secondes) à un péage.

Définition 2 Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé *réalisation* ou *issue*.

Voici un exemple de réalisation pour chacun des exemples précédents :

Exemples 3

1. 3.
2. $Face$.
3. (B,B,R,V,R) (dans le cas où $p=5$).
4. $(Face,Pile,Face,Face,Face,Pile,Face,Pile,\ldots)$.
5. $123,45$.

Définition 4 L'ensemble de toutes les réalisations possibles est appelé *univers* et noté Ω.

Dans les exemples précédents, on peut prendre pour univers

Exemples 5

1. $\Omega = [\![1,6]\!]$.
2. $\Omega = \{Pile, Face\}$
3. $\Omega = \{R,V,B\}^p$
4. $\Omega = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}}$
5. $\Omega = \mathbb{R}_+$

On se limite cette année à des expériences pouvant être modélisées par **des univers finis**, à part dans certaines remarques dont le but sera de faire la transition avec le cours de deuxième année. On ne traitera donc pas les deux derniers exemples de la liste ci-dessus.

Lors d'une expérience aléatoire, on est en général intéressé non par le résultat brut, mais par une ou plusieurs propriétés de ce résultat. Par exemple, si on veut simuler un jeu de pile ou face avec un dé, on peut s'intéresser seulement au fait que le résultat est pair ou impair, ce qui définit deux parties de Ω, $A = \{1,3,5\}$ et $B = \{2,4,6\}$, qui peuvent se décrire *en français* par les phrases A :"le résultat du lancer est impair" et B :"le résultat du lancer est pair". Ces parties sont appelées des "évènements" comme le stipule la définition suivante. Si on est intéressé par le résultat brut, on considère alors une partie à un seul élément (singleton), par exemple $\{2\}$, et on parle alors d'"évènement élémentaire".

Définition 6

Un *évènement* A est une partie de Ω (*i.e.* $A \subset \Omega$, *i.e.* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$).

Un *évènement élémentaire* est un évènement qui est un singleton.

Un évènement est souvent décrit par une *énoncé d'évènement*, qu'on note en général entre guillemets comme dans les exemples précédents.

Voici d'autres exemples d'évènements :

Exemples 7

— Au jeu de pile ou face à un lancer, si le joueur X a choisi "pile", alors l'évènement "X gagne" est l'évènement élémentaire $\{Pile\}$.

— Avec un lancer de dé, l'évènement C :"on obtient un résultat d'au moins 4" est l'ensemble $C = \{4,5,6\}$.

On construit souvent les évènements (rappelez-vous que ce sont des ensembles) à l'aide d'évènements simples et d'opérations ensemblistes. Le vocabulaire est différent de celui de la théorie des ensembles pour des raisons historiques et il faut le connaître, le reconnaître et savoir le manipuler parfaitement :

Définition 8

— Ω est appelé *l'évènement certain*.

— $\varnothing$ est appelé *l'évènement impossible*.

— Pour $A \subset \Omega$, le complémentaire $\Omega \setminus A$ de A dans Ω est noté $\overline{A}$ et appelé *l'évènement contraire de* A.

— Pour $A, B \subset \Omega$, l'évènement $A \cap B$ est aussi noté "A et B".

— Pour $A, B \subset \Omega$, l'évènement $A \cup B$ est aussi noté "A ou B".

— Deux évènements A et B sont dits *incompatibles* ss'ils sont disjoints (*i.e.* "A et B" est impossible).

Exemples 9 Avec les notations de l'exemple précédent du dé, $\overline{A} = B$, "A et C"$= A \cap C = \{5\}$, "B ou C"$= B \cup C = \{2,4,5,6\}$. De plus, B et $\{1,5\}$ sont incompatibles.

Remarque 10 On peut de la même manière prendre le "et" ou le "ou" d'un nombre fini quelconque d'évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$:

— "A_1 et $A_2 \dots$ et A_n"$= \bigcap_{i=1}^{n} A_i$;

— "A_1 ou $A_2 \dots$ ou A_n"$= \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Cette remarque permet de donner la définition suivante qui sera utilisée très fréquemment :

Définition 11 Un *système complet d'évènements* est une famille finie $(A_i)_{i=1}^n \in (\mathcal{P}(\Omega))^n$ d'évènements **deux-à-deux incompatibles** $\big(\forall i, j \in [\![1,n]\!], \big(i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\big)\big)$ dont **la réunion est certaine** $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega\right)$.

Rappelons qu'on résume ces deux propriétés par l'écriture suivante : $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Exemples 12

— Les évènements élémentaires forment un système complet d'évènements.

— Avec les notations de l'exemple précédent du dé, (A, B) est un système complet d'évènements.

— Toujours pour l'exemple du dé, la famille $(\{1\}, \{2,5\}, \{3,4,6\})$ est un système complet d'évènements.

Remarque 13 Dans le cas d'un univers infini :

— La condition de finitude d'un système complet d'évènements ne sera plus imposée.

— Cependant, la notion d'évènement est beaucoup plus subtile. En général, il ne serait pas pertinent de considérer toutes les parties de Ω comme des évènements. L'ensemble des évènements est alors une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ appelée *tribu* et qui doit vérifier trois axiomes : $\Omega \in \mathcal{T}$, Ω est stable par passage au complémentaire et Ω est stable par réunion dénombrable.

2 Espaces probabilisés finis

Une probabilité est un objet mathématique (précisément, une **application**) qui permet de quantifier la certitude plus ou moins grande qu'on a qu'un évènement se produise lors d'une expérience aléatoire, de impossible (valeur 0) à certain (valeur 1). On demande donc à cette application de faire correspondre à tout évènement un réel compris entre 0 et 1.

On aimerait par ailleurs que, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, la fréquence des cas où un évènement se produit soit "proche" de la probabilité de cet évènement. Ce phénomène pourra d'ailleurs se démontrer une fois la définition de probabilité établie correctement (c'est un cas particulier de la *loi des grands nombres* que vous verrez l'an prochain).

Comme les fréquences correspondant à deux évènements disjoints s'ajoutent, on impose alors qu'une probabilité se comporte de la même manière. Cela donne la définition ci-dessous.

Définition 14 Soit Ω un ensemble fini. On appelle *probabilité sur l'univers* Ω toute application $\mathrm{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie les deux axiomes suivants :

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ (*l'évènement certain est de probabilité 1*)
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ (A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B))$

Remarque 15 Il n'est pas nécessaire de spécifier que l'évènement impossible soit de probabilité nulle car cela découle des deux axiomes donnés, comme on le voit dans un corollaire un peu plus loin, obtenu par calcul de la probabilité de l'évènement contraire.

Exemple 16 Si on joue avec une pièce truquée, qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile, on peut modéliser cette expérience aléatoire par l'univers $\Omega = \{Pile, Face\}$ et la probabilité P définie par $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$, $\mathrm{P}(\{Pile\}) = p$, $\mathrm{P}(\{Face\}) = 1 - p$ et $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Exercice 17 Si on joue avec un dé équilibré, par quel espace probabilisé proposez-vous de modéliser l'expérience aléatoire d'un lancer ? $\bigoplus$

Définition 18 Si Ω est un ensemble fini et P une probabilité sur Ω, le couple (Ω, P) est appelé un *espace probabilisé fini*.

Pour la suite, on se donne un espace probabilisé fini (Ω, P)**.** On a alors la

Proposition 19 ***(Probabilité de l'évènement contraire)***
$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

Démonstration: en exercice. $\bigoplus$ $\square$

qui entraîne immédiatement le

Corollaire 20 ***(L'évènement impossible est de probabilité nulle)***
$\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

On peut aussi déduire aisément des axiomes d'une probabilité les propriétés suivantes :

Proposition 21 *Pour* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

1. $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B \cap A)$;
2. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$;
3. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

Démonstration: en exercice. $\bigoplus$ $\square$

Par ailleurs, une récurrence évidente montre que le deuxième axiome se généralise en

Proposition 22 ***(Additivité disjointe finie)***
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont des évènements deux-à-deux incompatibles, alors*

$$\mathrm{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$

Si on a un système complet d'évènements, on peut découper l'évènement dont on veut calculer la probabilité suivant ce système :

Corollaire 23 *Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements et A un évènement quelconque, alors* $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap A_i)$.

Par ailleurs, comme, ici, l'univers est fini, tout évènement est fini et s'écrit comme réunion disjointe de singletons, *i.e.* d'évènements élémentaires. On déduit donc de la propriété ci-dessus le

Corollaire 24 *Toute probabilité sur un univers fini est uniquement déterminée par la donnée des probabilités des évènements élémentaires (i.e. les* $\mathrm{P}(\{\omega\})$*, pour* ω *variant dans* Ω*) :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\{\omega\}).$$

Remarque 25 Il suffit même d'avoir les probabilités de tous les évènements élémentaires sauf un, puisque la probabilité de ce dernier s'en déduira par passage au complémentaire.

Exemple 26 C'est pourquoi, il suffit d'avoir la probabilité de l'évènement élémentaire $\{Pile\}$ dans le cas du lancer d'une pièce.

Si on choisit de manière **adéquate** des probabilités pour les évènements élémentaires, on peut reconstruire une probabilité sur Ω :

Proposition 27 *Soient Ω fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in \mathbb{R}^\Omega$. On l'équivalence entre les deux assertions suivantes :*

1. *Il existe une probabilité* P *sur* Ω *telle que, pour tout* $\omega \in \Omega$*,* $\mathrm{P}(\{\omega\}) = p_\omega$*;*
2. $(\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geq 0)$ et $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Démonstration: Le sens direct est trivial car Ω est réunion disjointe de tous les évènements élémentaires. Pour la réciproque, il suffit de vérifier que l'application définie par la formule du corollaire précédent vérifie bien la définition d'une probabilité, ce qu'on laisse à faire en exercice. $\bigoplus$ $\square$

Cela mène à une définition plus générale :

Définition 28 Une distribution de probabilité sur un ensemble quelconque E est une famille $(p_x)_{x\in E} \in (\mathbb{R}_+)^E$ **presque nulle** et de somme 1.

Remarque 29 La condition de presque nullité sera remplacée par une condition plus générale l'an prochain, puisque les espaces probabilisés pourront être infinis.

Remarque 30 La deuxième propriété de la proposition précédente se reformule alors : la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilité sur Ω.

Remarque 31 Dans le cas d'un univers infini :

- Comme l'ensemble des évènements n'est pas en général $\mathcal{P}(\Omega)$, on doit définir la probabilité P sur la tribu $\mathcal{T}$ des évènements.
- Dans la définition d'une probabilité, on remplace l'additivité disjointe par l'additivité disjointe dénombrable : $\mathrm{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(A_i)$.
- Une probabilité n'est en général pas donnée par les probabilités des évènements élémentaires.

3 Équiprobabilité

Il arrive souvent que tous les évènements élémentaires aient la même probabilité :

Définition 32 Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, la *probabilité uniforme sur* Ω est définie en posant, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{N}$.

On parle aussi dans ce cas d'*équiprobabilité*. Il est **très important** de savoir repérer dans un énoncé l'hypothèse en langage courant qui mène à modéliser par une probabilité uniforme : dé **non pipé**, pièce **non truquée** ou **équilibrée**, *etc*. Il arrive même que cette hypothèse soit implicite : “on lance un dé...” ou “on choisit au hasard un nombre entre 1 et 100”.

En cas d'équiprobabilité, on a alors la fameuse formule :

Proposition 33 *Dans le cas d'une probabilité uniforme* P *sur* Ω*, pour tout* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$*,*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}.$$

Remarque 34 En cas d'équiprobabilité, on est donc ramené à un problème de combinatoire.

Exemple 35 Par exemple, la probabilité que 5 cartes tirées au hasard d'un jeu de 32 fournissent un carré est $\dfrac{8 \times 28}{\binom{32}{5}}$.

La remarque suivante est **très importante** en pratique :

Remarque 36 Il arrive parfois que l'univers “évident” associé à un problème ne soit pas doté d'une probabilité uniforme, mais qu'en changeant d'univers, on soit ramené à une probabilité uniforme. Si on s'intéresse au résultat obtenu en faisant le somme du lancer de deux dés, l'univers “évident” est l'intervalle d'entiers $\Omega_1 = [\![2, 12]\!]$, mais la probabilité n'est pas uniforme. En revanche, si on travaille sur le couple formé par le résultat du dé numéro 1 et celui du dé numéro 2, on obtient une loi uniforme sur $\Omega_2 = [\![1, 6]\!]^2$. On verra que cela repose sur l'**indépendance** des lancers, notion qui sera abordée à la fin du chapitre. Cela permet alors de faire des calculs. Par exemple, l'évènement A : “la somme est 4” est $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, dont la probabilité est $\dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega_2} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12} \left(\neq \dfrac{1}{11} \right)$.

II Probabilités conditionnelles et indépendance

On se place ici encore dans le cadre d'un espace probabilisé fini (Ω, P).

1 Probabilités conditionnelles

On aimerait définir mathématiquement la probabilité qu'un évènement A arrive “sachant” qu'un autre évènement B est déjà réalisé. Par exemple, on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'évènement A :“obtenir un 6”. On le lance et un observateur nous dit que le résultat est pair, *i.e.* l'évènement B :“le résultat est pair” est réalisé. Quelle est alors la probabilité que le résultat soit 6 sachant qu'il est pair ? Intuitivement, puisque le résultat est pair, il reste 3 possibilités qui semblent équiprobables, donc la probabilité cherchée est $\frac{1}{3}$.

Ainsi, il semblerait naturel dans un cadre d'équiprobabilité que la probabilité de A “sachant” B soit $\dfrac{\operatorname{Card}(A\cap B)}{\operatorname{Card}(B)}$. Cette quantité s'exprime en termes de probabilités grâce à l'équiprobabilité :

$$\frac{\operatorname{Card}(A\cap B)}{\operatorname{Card}(B)}=\frac{\left(\frac{\operatorname{Card}(A\cap B)}{\operatorname{Card}(\Omega)}\right)}{\left(\frac{\operatorname{Card}(B)}{\operatorname{Card}(\Omega)}\right)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Remarquons que tous ces calculs ne sont possibles que parce que B est de probabilité non nulle.

Testons cette dernière formule dans le cadre général (on ne suppose plus que P est uniforme) sur deux cas particuliers. Si A et B sont incompatibles, on trouve 0, ce qui est naturel : si B arrive, alors A ne peut pas arriver. Si $B\subset A$, on trouve 1, ce qui est aussi naturel, car le fait que B arrive implique que A arrive.

La formule ci-dessus semble alors un bon candidat pour exprimer mathématiquement les probabilités conditionnelles :

Définition 37 Soient $A,B\in\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathrm{P}(B)>0$. On note $\mathrm{P}(A|B)$, ou $\mathrm{P}_B(A)$, et on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* le nombre

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}_B(A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

On retrouve évidemment la formule du cas uniforme :

***Proposition 38** (Cas uniforme)*

Si P *est uniforme et B est non vide, pour tout $A\subset\Omega$,* $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\operatorname{Card}(A\cap B)}{\operatorname{Card}(B)}$.

La dénomination de “probabilité” conditionnelle est justifiée par le résultat suivant :

***Proposition 39** Pour $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ tel que* $\mathrm{P}(B)>0$*, l'application*

$$\mathrm{P}_B:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(\Omega)&\longrightarrow&[0,1]\\ A&\longmapsto&\mathrm{P}_B(A)\end{array}\right.$$

est une probabilité sur l'univers Ω*.*

Exemple 40 En reprenant l'exemple introductif, on a $\mathrm{P}_B(\{1\})=\mathrm{P}_B(\{3\})=\mathrm{P}_B(\{5\})=0$ et $\mathrm{P}_B(\{2\})=\mathrm{P}_B(\{4\})=\mathrm{P}_B(\{6\})=\dfrac{1}{3}$ et les probabilités “sachant” B des autres évènements s'obtiennent par réunion disjointe.

Remarque 41 Dans le cas où $B=\Omega$, on a évidemment $\mathrm{P}_B=\mathrm{P}$, puisque “savoir” Ω n'apporte rien.

2 Trois formules fondamentales

Nous allons voir ici des formules qui seront fréquemment utilisées en pratique. Vous remarquerez dans les exemples que leur usage permet souvent de se dispenser d'expliciter l'univers Ω.

Théorème 42 ***(Formule des probabilités totales)***
Pour $(A_i)_{i=1}^n$ *un système complet d'événements et* B *un événement quelconque,*

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B|A_i),$$

avec la ***convention*** *que* $\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B|A_i) = 0$ *lorsque* $\mathrm{P}(A_i) = 0$.

Démonstration: la chercher en exercice, elle sera faite en cours. $\oplus$ □

Exemple 43 Une urne contient six boules jaunes, trois vertes et deux rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?

On note R_i l'évènement "la boule du i-ième tirage est rouge", pour $i \in \{1,2\}$. Les deux évènements R_1 et $\overline{R_1}$ sont de probabilités non nulles. On a alors, par la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènement $(R_1, \overline{R_1})$ et à l'évènement R_2 :

$$\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}(R_2|R_1) + \mathrm{P}\left(\overline{R_1}\right)\mathrm{P}\left(R_2|\overline{R_1}\right)$$

À chaque tirage, les boules restant dans l'urne sont **équiprobables**, donc

$$\mathrm{P}(R_1) = \frac{2}{11}, \quad \mathrm{P}(R_2|R_1) = \frac{1}{10}, \quad \mathrm{P}\left(R_2|\overline{R_1}\right) = \frac{2}{10}$$

et par ailleurs $\mathrm{P}\left(\overline{R_1}\right) = 1 - \mathrm{P}(R_1) = \frac{9}{11}$, donc

$$\mathrm{P}(R_2) = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} + \frac{9}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{20}{11\times 10} = \frac{2}{11}.$$

Exercice 44 Est-ce que le fait que $\mathrm{P}(R_1) = \mathrm{P}(R_2)$ dans l'exemple ci-dessus est dû à la composition particulière de l'urne, ou est-ce un phénomène plus général ?

Remarque 45 Vous avez certainement résolu au Lycée des exercices du genre de l'exemple ci-dessus en utilisant des arbres. Le formalisme utilisé ici permet d'avoir de "vraies" démonstrations qui justifient *a posteriori* ces méthodes arboricoles. Nous demanderons désormais, même lors de l'utilisation d'arbres pour guider votre intuition, de définir proprement les évènements et d'utiliser les formules pour vos démonstrations.

Théorème 46 ***(Formule de Bayes)***
Pour $(A_i)_{i=1}^n$ *un système complet d'événements,* B *un événement* **de probabilité non nulle** *et* $j \in [\![1,n]\!]$, *on a*

$$\mathrm{P}\left(A_j|B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A_j\right)\mathrm{P}\left(B|A_j\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}\left(A_j\right)\mathrm{P}\left(B|A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B|A_i)},$$

avec la ***convention*** *que* $\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B|A_i) = 0$ *lorsque* $\mathrm{P}(A_i) = 0$.

Démonstration: la chercher en exercice, elle sera faite en cours. $\oplus$ □

Exemple 47 La boîte 1 contient trois boules bleues et deux rouges. La boîte 2 contient deux boules bleues et cinq rouges. Les numéros des boîtes sont masqués. On tire une boule dans une boîte, elle est bleue. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte 1 ?

On note A_i l'évènement "la boule provient de la boîte i", pour $i \in \{1,2\}$, et B l'évènement "la boule est bleue". Tous ces évènements sont de probabilités non nulles. On peut donc appliquer la formule de Bayes :

$$\mathrm{P}(A_1|B) = \frac{\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(B|A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(B|A_2)}.$$

Par **équiprobabilité** des boîtes (on n'a aucune indication permettant de dire que le choix de la boîte est biaisé) et des boules lors du tirage dans une boîte, on a

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B|A_1) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(B|A_2) = \frac{2}{7},$$

donc

$$\mathrm{P}(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{7}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{5\times 7}{31} = \frac{21}{31}.$$

Théorème 48 ***(Formule des probabilités composées)***

Pour $n \geq 2$ et $(A_i)_{i=1}^{n}$ une famille d'événements telle que $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathrm{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Démonstration: la chercher en exercice, elle sera faite en cours. $\bigoplus$ □

Exemple 49 On tire au hasard, successivement et sans remise, quatre lettres du mot "attachant". On considère le mot formé par les quatre lettres dans l'ordre dans lequel elle sont tirées. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot "chat" ?

Le fait qu'on tire les lettres "au hasard", sans autre précision, indique qu'à chaque tirage, les lettres restantes sont **équiprobables**. On considère alors les évènements suivants :

— A_1 : "la première lettre tirée est un 'c' "
— A_2 : "la deuxième lettre tirée est un 'h' "
— A_3 : "la troisième lettre tirée est un 'a' "
— A_4 : "la quatrième lettre tirée est un 't' "

Il est "clair" que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$ (ce qui implique aussi que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) \neq 0$ et $\mathrm{P}(A_1) \neq 0$, et permet donc de conditionner par rapport à ces trois évènements).

On a alors, par équiprobabilité des lettres restantes, $\mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{7}$ et $\mathrm{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{6}$. Ainsi, par la formule des probabilités composées,

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{8\times 7\times 6} = \frac{1}{336}.$$

3 Indépendance

Intuitivement, l'indépendance de deux évènements A et B correspond au fait que savoir B ne modifie pas la probabilité de l'évènement A, *i.e.* $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$. En revenant à la formule des probabilités conditionnelles, cela donne la définition suivante, valable même si $\mathrm{P}(B) = 0$:

Définition 50 Deux évènements A et B sont *indépendants* ssi $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

Exemple 51 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Les deux évènements A :“la carte est un pique” et B “la carte est une figure” (les figures sont les valets, dames et rois) sont indépendants.

En effet, par équiprobabilité des 32 cartes, $\mathrm{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{32} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

Il est cependant **très important** de comprendre, qu'en général, l'indépendance d'évènements est une conséquence de la modélisation du problème considéré. Par exemple, si les expériences aléatoires sont “physiquement indépendantes”, on en déduit l'indépendance mathématique. C'est le cas dans les exemples de base suivants :

— on lance plusieurs pièces ou plusieurs dés en même temps ;
— on fait plusieurs lancers d'un même dé ou d'une même pièce ;
— on fait des tirages dans une urne **avec remise**.

Exemple 52 On revient ici sur un exemple abordé précédemment de manière “intuitive” : on lance deux dés équilibrés et on demande la probabilité que la somme des deux résultats soit 4. Même si les dés sont indiscernables, on peut toujours décider que l'un est le dé a et l'autre le dé b. On note alors X_a le résultat du dé a et X_b le résultat du dé b. On cherche alors la probabilité de l'évènement “$X_a + X_b = 4$”. Cet évènement est réunion disjointe des trois évènements A :“$(X_a, X_b) = (1,3)$”, B :“$(X_a, X_b) = (2,2)$” et C :“$(X_a, X_b) = (3,1)$”. Par ailleurs, en notant A_a :“$X_a = 1$” et A_b :“$X_b = 3$”, on a $A = A_a \cap A_b$. Par “indépendance physique” des lancers, les évènements A_a et A_b sont indépendants (au sens mathématique) et donc $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_a)\,\mathrm{P}(A_b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. De la même manière $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{36}$, puis par additivité disjointe, $\mathrm{P}(X_a + X_b = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Même si cette indépendance n'est pas énoncée explicitement dans les exercices simples, il est **primordial** de comprendre qu'elle est indispensable au raisonnement.

Il y a deux cas triviaux d'indépendance :

Proposition 53 *Pour tout évènement A :*

— *A et Ω sont indépendants ;*
— *A et $\varnothing$ sont indépendants ;*

Démonstration: immédiate. □

Le passage au complémentaire de l'un des deux évènements ne change pas leur indépendance ou non-indépendance :

Proposition 54 *Si deux évènement A et B sont indépendants, alors :*

— *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;*
— *A et $\overline{B}$ sont indépendants ;*

— $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants.*

Démonstration: en exercice. $\bigoplus$ □

On retrouve évidemment la propriété qui était à la base de la définition :

Proposition 55 *Si* A *et* B *sont deux évènements tels que* $\mathrm{P}(B) \neq 0$*, l'indépendance de* A *et* B *équivaut à l'égalité* $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.

Démonstration: évidente. □

Il est naturel de vouloir étendre la définition de l'indépendance à plus de deux évènements. Cependant la "bonne" définition de l'indépendance pour plus de deux évènements est à la fois **contre-intuitive** et **très subtile**. C'est donc une notion sur laquelle il faudra revenir plusieurs fois pour l'assimiler correctement. Pour autant, il n'est pas possible de faire l'impasse sur cette notion **indispensable** tant du point de vue théorique que pratique.

Définition 56 Les évènements $(A_i)_{i=1}^{n}$ sont *mutuellement indépendants* ssi pour toute famille extraite $(A_{i_k})_{k=1}^{p}$, on a

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Remarque 57 Prendre seulement l'intersection de tous les événements ne suffit pas, pas plus que l'indépendance deux à deux des événements, comme on peut le voir dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 58

1. Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher :
   — 11 unicolores : 5 vertes, 4 jaunes, 2 rouges ;
   — 6 bicolores : 1 vert-rouge, 1 vert-jaune, 4 jaune-rouge ;
   — 3 tricolores vert-jaune-rouge.

   On tire une boule dans l'urne. Soit V l'évènement : "la boule est (au moins partiellement) verte" et R et J les évènements similaires pour les couleurs rouge et jaune.

   Montrer que $\mathrm{P}(V \cap R \cap J) = \mathrm{P}(V)\mathrm{P}(R)\mathrm{P}(J)$ sans que les évènements V, R et J soient mutuellement indépendants (on pourra calculer $\mathrm{P}(V \cap R)$ et $\mathrm{P}(V)\mathrm{P}(R)$).
2. On lance deux dés équilibrés, un rouge et un bleu. Montrer que les évènements "le résultat du dé rouge est pair", "le résultat du dé bleu est pair" et "la somme des résultats des deux dés est paire" sont deux-à-deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

De la même manière que pour deux évènements, on a la

Proposition 59 *Changer certains des évènements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *en leur complémentaire ne change pas l'indépendance mutuelle ces évènements.*

Voici enfin un exemple incontournable :

Exemple 60 **Succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre**

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire telle que $\mathrm{Card}(\Omega) = 2$ (par exemple un lancer de pièce éventuellement truquée). On note par convention $\Omega = \{S, E\}$ (succès et échec) et on appelle *paramètre* le réel $p = P(\{S\})$. On considère alors n épreuves de Bernoulli "indépendantes" de **même paramètre** p (par exemple obtenues par n lancers successifs de la même pièce), l'indépendance signifiant ici l'indépendance mutuelle des événements S_i :"succès à l'expérience numéro i", $i \in [\![1, n]\!]$.

On cherche alors la probabilité d'avoir k succès sur ces n épreuves.

Pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on note A_I l'évènement suivant :"pour tout $i \in I$, l'expérience numéro i est un succès et pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus I$, l'expérience numéro i est un échec", *i.e.*

$$A_I = \left(\bigcap_{i \in I} S_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in [\![1,n]\!] \setminus I} \overline{S_i}\right).$$

Par indépendance et utilisation de la propriété concernant les complémentaires, les évènements $S_i, i \in I$, $\overline{S_i}, i \in [\![1, n]\!] \setminus I$ sont mutuellement indépendants. Ainsi

$$\mathrm{P}(A_I) = p^{\mathrm{Card}(I)}(1-p)^{n-\mathrm{Card}(I)}.$$

L'évènement "avoir k succès" est réunion disjointe des A_I, pour $I \in \mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$, donc

$$P(\text{"avoir } k \text{ succès"}) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} \mathrm{P}(A_I) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$