DM10, autogéré pendant les vacances de Noël

Exercice 1 Soient $a = 273$ et $b = 22568$.

1. Décomposer en nombres premiers a et b.
   En déduire les valeurs de $a \wedge b$ et $a \vee b$.
2. Déterminer combien b a de diviseurs dans $\mathbb{N}$ sans en dresser la liste.
3. Calculer $83a - b$.
   Résoudre soigneusement les équations en $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$: $au + bv = d$, pour $d = 13$ et $d = 91$.
   Donner sans démonstration l'ensemble des solutions pour le cas $d = 182$.

Exercice 2 Montrer que $\left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \mid \lim\limits_{+\infty} f = 0 \right\}$, muni de l'addition des fonctions, est un groupe.

Exercice 3 Déterminer l'éventuelle limite en 2 de $h : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^3 - 12x + 17} - \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}}{x^2 - 4x + 4}$.
On **admettra** que les quantités sous les racines sont strictement positives pour x au voisinage de 2.

Exercice 4 Est-ce que l'ensemble des suites réelles périodiques est un sous-groupe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 4 & [23] \\ x & \equiv & 2 & [19] \end{array} \right. .$$

1. Trouver u et v tels que $23u + 19v = 1$.
2. Utiliser la question précédente pour trouver deux nombres a et b tels que $a \equiv 1[23]$, $a \equiv 0[19]$, $b \equiv 0[23]$ et $b \equiv 1[19]$.
3. En déduire une solution particulière x_0 de (S).
4. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est $x_0 + n\mathbb{Z}$ avec n à déterminer.

Exercice 6 Est-ce que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$ est prolongeable par continuité en 0 ?