Dérivabilité

Lycée Berthollet 2023-2024
(Version du 10/01/2023)

I Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans toute la section, on considère une fonction réelle f définie sur un intervalle I non trivial, *i.e.* non vide et non réduit à un point, et $a \in I$.

1 Définitions

On introduit de manière dialoguée la notion de dérivée à partir de figures, jusqu'à arriver à la définition suivante :

Définition 1 On appelle *taux d'accroissement* de f en a la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \ (T_a f)(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On fait souvent un changement de variables "$x = a + h$" pour se ramener au voisinage de 0 et on obtient alors la fonction encore appelée *taux d'accroissement* définie par

$$\forall h \in (I - a) \setminus \{0\}, \ (\widetilde{T_a} f)(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cela permet de définir la dérivabilité de f au point a par la

Définition 2 La fonction f est *dérivable* en a ssi $(T_a f)(x)$ (resp. $(\widetilde{T_a} f)(h)$) admet une limite finie quand x (resp. h) tend vers a (resp. 0).

Dans ce cas, cette limite est appelée le *nombre dérivé* de f en a, noté $f'(a)$ ou parfois $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 3 Il n'est pas besoin de préciser qu'on tend vers a par valeurs différentes puisque le taux d'accroissement n'est pas défini en a.

Remarque 4 Si la fonction est dérivable en a, on peut alors prolonger le taux d'accroissement par continuité en a, en posant $(T_a f)(a) = f'(a)$.

Remarque 5 Comme pour la continuité, la dérivabilité est une notion locale : si $\eta > 0$, f est dérivable en a ssi $f|_{I \cap [a-\eta, a+\eta]}$ l'est.

Cette remarque justifie l'extension de définition suivante :

Définition 6 Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. S'il existe $\eta > 0$ tel que $D_f \cap [a-\eta, a+\eta]$ soit un intervalle non trivial, on dit que f est dérivable en a ssi $f|_{D_f \cap [a-\eta, a+\eta]}$ l'est.

Exemple 7 On montre facilement que pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus (0)$, $|T_0 \cos(x)| \leq |x|$ (à l'aide de l'inégalité déjà vue $|\sin(x)| \leq |x|$), ce qui entraîne que cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.$\bigoplus$

Exercice 8 Si on admet qu'une ligne polygonale joignant deux points d'un cercle en restant à l'extérieur de ce cercle est plus longue que l'arc de cercle correspondant, montrer que sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$. On peut montrer dans un premier temps que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|x| \leq |\tan(x)|$.$\bigoplus$

Exercice 9 Montrer que la fonction $x \longmapsto -1$ est dérivable en π et que la fonction $x \longmapsto 2x$ est dérivable en $\sqrt{2}$.$\bigoplus$

Exemple 10 Les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ ne sont pas dérivables en 0, mais le sont en tous les autres points où elles sont définies. Démontrez-le.$\bigoplus$

2 Interprétation géométrique

Notons $\mathcal{G}_f$ le graphe de la fonction f. **Le taux d'accroissement** $(T_a f)(x)$ **est la pente de la corde** joignant le point de $\mathcal{G}_f$ d'abscisse a (de coordonnées $(a, f(a))$) au point de $\mathcal{G}_f$ d'abscisse x (de coordonnées $(x, f(x))$). La fonction est dérivable ssi ces pentes ont une limite finie quand x tend vers a. Puisque toutes ces cordes passent par le point de coordonnées $(a, f(a))$, le fait que leurs pentes aient une limite réelle signifie que les cordes admettent une droite "limite" (qu'on appelle alors la *tangente* au graphe $\mathcal{G}_f$ en $(a, f(a))$) qui de plus est **non verticale**. D'où la reformulation :

Proposition 11 ***(Interprétation géométrique de la dérivée)***
La fonction f est dérivable en a ssi son graphe admet une tangente ***non verticale*** *au point $(a, f(a))$, et dans ce cas* ***le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente*** *à $\mathcal{G}_f$ en $(a, f(a))$.*

Remarque 12 Si $\lim\limits_{a} T_a(f) = \pm\infty$, le graphe admet une tangente verticale en $(a, f(a))$.

Exercice 13 Représenter les graphes de sin, cos, $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ au voisinage de 0, représenter les cordes issues du point du graphe d'abscisse 0 et interpréter les résultats vus précédemment.$\bigoplus$

Exercice 14 Après avoir tracé l'allure de leurs graphes au voisinage de 0, étudier la dérivabilité en 0 des fonctions $x \longmapsto x \sin\frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$, qu'on prolongera convenablement par continuité en 0.$\bigoplus$

On déduit immédiatement de ce qui précède une équation de la tangente :

Proposition 15 ***(Équation de la tangente)***
Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathcal{G}_f$ en $(a, f(a))$ admet comme équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Exercice 16 À l'aide des résultats précédents, donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction $\sqrt{\cdot}$ en $(4, 2)$.$\bigoplus$

3 Développement limité à l'ordre 1

L'interprétation géométrique précédente suggère que la fonction est dérivable en a ssi son graphe est "bien approché" par une droite non verticale au voisinage de $(a, f(a))$. Une telle droite étant le graphe d'une fonction affine, on obtient alors que la fonction est dérivable en a ssi elle est "bien approchée" par une fonction affine :

Proposition 17 ***(Dérivabilité par*** DL_1***)***
La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, un voisinage standard V de 0 et une fonction ε définie sur $\dot{V} = V \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in I \cap (a+\dot{V}),\ f(x) = f(a) + \alpha \cdot (x-a) + (x-a) \cdot \varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = \alpha$.
Cela se réécrit :

$$\forall h \in (I-a) \cap \dot{V},\ f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On note aussi, a l'aide de la notation "petit o" déjà introduite dans le cours (rappelons que $f = o(g) \iff \frac{f}{g} \to 0$) :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a) \cdot h + o(h)$$

Démonstration: Immédiate avec les définitions de taux d'accroissement et de dérivabilité.⨁
□

Définition 18 Une telle écriture de la fonction f est appelé un *développement limité à l'ordre 1* (DL1) de f au voisinage de a.

Exemple 19 On a par exemple : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.

Remarque 20 On vient donc de voir que f est dérivable en a ssi elle admet un DL1 au voisinage de a. Cela est propre aux DL1. En effet nous verrons plus tard qu'une fonction qui admet un DL à l'ordre n (*i.e.* est "bien approchée" par une fonction polynôme de degré n) n'est pas forcément n fois dérivable.

Il est très facile de voir à l'aide des DL1 que la dérivabilité entraîne la continuité, **et non le contraire** (comme on le voit souvent dans les copies) :

Proposition 21 ***(CN ponctuelle de continuité pour la dérivabilité)***
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est fausse.

Démonstration: Faire la démonstration et exhiber un contrexemple à la réciproque.⨁ □

Remarque 22 Il existe des exemples de fonctions continues sur [0,1] et dérivables en aucun point (le premier est dû à Weierstraβ).

4 Dérivées à gauche et à droite

Définition 23 On dit que f est *dérivable à gauche* (resp *à droite*) en a ssi $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$ (resp. $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$) et $f|_{I \cap]-\infty,a[}$ (resp. $f|_{I \cap]a,+\infty[}$) est dérivable.

Cela équivaut à ce que $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ <}} (T_a f)(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}} (T_a f)(x)$) existe dans $\mathbb{R}$ et si c'est le cas on appelle cette limite le *nombre dérivé à gauche* (resp. *à droite*) de f en a, qu'on note $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

Exemple 24 La fonction $|\cdot - a|$ est dérivable à gauche et à droite en a mais pas dérivable en a.$\bigoplus$

Proposition 25 **(*Dérivabilité par dérivabilité à gauche et à droite*)**

— *Si $a = \min(I)$ (resp. $a = \max(I)$), la dérivabilité en a équivaut à la dérivabilité à droite (resp. à gauche).*

— *Si a n'est pas une borne de I, f est dérivable en a ssi elle est dérivable à gauche et à droite en a* ***et*** *$f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas $f'(a)$ est égal à cette valeur commune.*

Exemple 26 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont tous deux nuls, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Cela s'interprète géométriquement :

Proposition 27 **(*Interprétation géométrique de la dérivabilité à gauche ou à droite*)**

La fonction f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a ssi son graphe admet une demi-tangente non verticale à gauche (resp. à droite) au point $(a, f(a))$, et dans ce cas le nombre dérivé $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) est la pente de cette demi-tangente.

5 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 28 On dit que f, définie sur I, est *dérivable (sur I)* ssi elle est dérivable en tout point de I. Si c'est le cas, la fonction qui à tout point $x \in I$ fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$ est notée f' et appelée la (fonction) *dérivée* de f.

Par extension, on dit d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ qu'elle est *dérivable (sur D_f)* ssi elle est dérivable (au sens étendu de la première section) en tout point de D_f.

Remarque 29 Attention, plus généralement, si $A \subset D_f$, dire que "f est dérivable sur A" est ambigu, car cela pourrait vouloir dire :

— soit que $f|_A$ est dérivable ;

— soit que f est dérivable en tout point $a \in A$.

Ces deux propriétés **ne sont pas équivalentes**. Par exemple, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est dérivable. En revanche, ces deux propriétés sont équivalentes lorsque la partie A est réunion d'intervalles ouverts (on dit alors que A est un ensemble *ouvert*).

On a cependant la propriété suivante.

Définition 30 On dit que deux intervalles I_1 et I_2 sont *séparés* ss'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall (x,y) \in I_1 \times I_2,\ x < s < y)$ ou $(\forall (x,y) \in I_1 \times I_2,\ x > s > y)$.

***Proposition 31** (Dérivabilité par intervalles séparés)*
Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ et D_f est réunion finie d'intervalles non triviaux deux-à-deux séparés, alors f est dérivable ssi elle est dérivable sur chacun de ces intervalles.

Exemple 32 Il est immédiat que toute fonction constante est dérivable sur son domaine de définition et de dérivée nulle.

Exemple 33 Montrer que la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction constante égale à 1 : $(x \longmapsto x)' = (x \longmapsto 1)$.⊕

On déduit du résultat ponctuel déjà vu :

***Proposition 34** (CN globale de continuité pour la dérivabilité)*
Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Exemple 35 La fonction exponentielle, qui peut être définie comme solution d'une équation différentielle, est ainsi dérivable et donc automatiquement continue.

6 Opérations sur les fonctions dérivables

***Théorème 36** (Opérations arithmétiques sur les dérivées)*
Soient f et g définies sur un intervalle non trivial I, $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en a (resp. sur I), alors

— *La combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (resp sur I) et*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \qquad (\textit{resp. } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g').$$

— *Le produit fg est dérivable en a (resp sur I) et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad (\textit{resp. } (fg)' = f'g + fg').$$

— *Si $g(a) \neq 0$ (resp. $\forall x \in I, g(x) \neq 0$), alors le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en a (resp sur I) et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \qquad (\textit{resp. } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}).$$

Démonstration: Voir le cours. Essayez de trouver les idées.⊕ □

Exemple 37 Revoir les nombreux exemples déjà rencontrés en cours et exercices.⊕

À l'aide de ce théorème, on montre aisément le résultat suivant :

***Corollaire 38** (Dérivabilité des fonctions polynômes et rationnelles)*
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x \longmapsto x^n)' = (x \longmapsto nx^{n-1})$.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

Exercice 39 Montrer à l'aide des formules trigonométriques et de la dérivabilité en 0 vue plus haut que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées, puis montrer que la fonction tan est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée.⊕

Théorème 40 ***(Composition de fonctions dérivables)***
Soient I et J deux intervalles non triviaux, f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset J$ et g une fonction définie sur J.
Si f est dérivable en $a \in I$ (resp. sur I) et g est dérivable en $f(a)$ (resp. sur J), alors $g \circ f$ est dérivable en a (resp. sur I) et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ (resp. $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$).

Démonstration: Voir le cours. Essayez de trouver les idées.⨁ □

Si on utilise les résultats de l'exercice 39, on a :

Corollaire 41 ***(Dérivabilité des fonctions polynômes trigonométriques et fonctions rationnelles trigonométriques)***
Tout polynôme en sin *et* cos *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Toute fraction rationnelle en sin *et* cos *est dérivable sur son domaine de définition.*

Exemple 42 Montrer que $\sin \circ \cos \circ \tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée de deux manières différentes.

Exercice 43 Reprendre quelque calculs de dérivées consistants des feuilles d'exercices et devoirs antérieurs.⨁

Remarque 44 L'exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée, les résultats précédents prouvent immédiatement que les trois fonctions trigonométriques hyperboliques ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donnent leurs dérivées.

7 Fonctions réciproques

Théorème 45 ***(Théorème de dérivabilité des fonctions réciproques)***
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle non trivial I. Elle admet d'après le théorème du cours sur la continuité une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est dérivable en $a \in I$ (resp. sur I) et $f'(a) \neq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$), alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ (resp. sur $f(I)$) et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ (resp. $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$).

Démonstration: Revoir la démonstration vue il y a deux mois.⨁ □

Remarque 46 En pratique, si on montre que f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) < 0$), cela entraîne toutes les autres hypothèses, donc f admet une fonction réciproque qui est dérivable sur $f(I)$.

Remarque 47 On rappelle que le graphe de la réciproque f^{-1} est obtenu à partir de celui de f par symétrie par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$). Montrer que la pente de la symétrique d'une droite non horizontale est l'inverse de la pente de la droite initiale et en déduire une démonstration géométrique de ce théorème.⨁

Exemple 48 Revoir les fonctions trigonométriques réciproques.⨁

Remarque 49 On voit ainsi que la fonction ln, définie comme fonction réciproque de exp, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on obtient sa dérivée. Par composition, en utilisant la “forme exponentielle”, on montre la dérivabilité des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on obtient leurs dérivées.

Exercice 50 Exprimer les dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques hyperboliques (on restreindra ch à $\mathbb{R}_+^\star$).⨁

II Théorème de Rolle et accroissements finis

1 Théorème de Rolle

On commence par remarquer le résultat suivant

***Lemme 51** (CN d'extremum global sur un intervalle ouvert)*
Si f est dérivable sur $]a,b[$ et admet un maximum (global) en $c\in]a,b[$, alors $f'(c)=0$.
On a un résultat analogue pour un minimum.

Démonstration: Soit f dérivable sur $]a,b[$ admettant un maximum en $c\in]a,b[$. Pour $x\in]a,c[$, $f(x)-f(c)\leq 0$ et $x-c<0$, donc $(T_c f)(x)\geq 0$. Par passage à la limite dans cette inégalité large quand $x\to c^-$, $f'(c)=f'_g(c)\geq 0$. De manière analogue, $f'(c)=f'_d(c)\leq 0$, donc $f'(c)=0$. Pour le cas d'un minimum, on applique ce qui précède à $-f$. □

Nous généraliserons plus loin ce résultat, mais il nous suffit pour montrer le

***Théorème 52** (Théorème de Rolle)*
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ ($a<b$) et dérivable sur $]a,b[$.
Si $f(a)=f(b)$, alors il existe un $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration: Voir le cours. En attendant, faire un dessin et réfléchir aux idées.⊕ □

Remarque 53 On peut utiliser ce résultat pour établir l'existence de zéros d'une fonction : si f, définie sur $]a,b[$, est la dérivée d'une fonction F qui est continue sur $[a,b]$ et telle que $F(a)=F(b)$, alors f admet un zéro.

Remarque 54 Un cas particulier est une *égalité de moyenne* : si f est continue sur $[a,b]$ et telle que $\int_a^b f=0$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

2 Égalité des accroissements finis

Le théorème suivant est le résultat fondamental de ce chapitre :

***Théorème 55** (Égalité des accroissements finis)*
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ ($a<b$) et dérivable sur $]a,b[$.

$$\exists c\in]a,b[,\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Démonstration: On se ramène au théorème de Rolle en utilisant une fonction auxiliaire adéquate (cf cours).⊕ □

Exercice 56 Faire un dessin du théorème.⊕

Remarque 57 On peut aussi écrire l'égalité $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$ ou $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Remarque 58 Interprétation cinématique : si $t \longmapsto f(t)$ représente la position d'un point en fonction du temps sur une droite (l'axe des ordonnées) entre l'instant a et l'instant b, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la vitesse moyenne. L'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un instant c telle que la vitesse instantanée soit égale à la vitesse moyenne. Cela est appliqué pour certains types de radars routiers.

Remarque 59 De même que pour le théorème de Rolle on a comme cas particulier une *égalité de moyenne* : si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

3 Limite de la dérivée

Une conséquence de l'égalité des accroissements finis est le classique

Théorème 60 ***(Théorème de la limite de la dérivée)***
Soient I un intervalle et $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (T_a f)(x) = \ell$ et cela implique que
- *Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*
- *Si $\ell \notin \mathbb{R}$, alors f n'est pas dérivable en a, mais son graphe admet une tangente verticale en $(a, f(a))$.*

Démonstration: Voir le cours. □

4 Inégalité des accroissements finis

On déduit de l'égalité des accroissements finis une inégalité qui est la plupart du temps suffisante en pratique.

Théorème 61 ***(Inégalité des accroissements finis)***
Si f est une fonction dérivable telle que $|f'|$ est majorée par k, alors la fonction f est k-lipschitzienne.

Démonstration: C'est immédiat. □

5 Application aux suites récurrentes

L'inégalité des accroissements finis peut servir à étudier les suites récurrentes par le biais du résultat suivant :

Proposition 62 ***(Convergence par contractance)***
*Soit f une fonction **contractante** sur un intervalle I (i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$) telle que $f(I) \subset I$ et que f admette un point fixe $\lambda \in I$. Alors*
- *Ce point fixe est unique.*
- *Toute suite définie par $u_o \in I$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n))$ et bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et converge vers λ.*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \lambda| \le k^n |u_0 - \lambda|$

Remarque 63 La plupart du temps, on montre la contractance à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Exemple 64 On peut se servir de ce résultat pour calculer par exemple une valeur approchée de $\sqrt{2}$, ce qu'on verra en cours. Pourquoi la fonction $x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ donne-t-elle une très bonne convergence ?

Compléments

On dit qu'un intervalle est *fermé* s'il contient toutes ses bornes finies. On admet le résultat suivant :

Théorème 65 ***(Point fixe par complétude)***
Si f est contractante sur un intervalle fermé I et $f(I) \subset I$, alors il existe un point fixe de f dans I.

On peut aussi montrer le

Théorème 66 ***(Point fixe attractif)***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, possédant un point fixe λ intérieur à I, dérivable en λ et telle que $|f'(\lambda)| < 1$.
Alors il existe $V \in \mathcal{V}(\lambda)$ tel que $V \subset I$ et un $k \in [0,1[$ tels que

$$\forall x \in V,\ |f(x) - \lambda| \leq k\,|x - \lambda|\,.$$

De plus, si une suite est définie par $u_o \in V$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n))$, alors elle est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \lambda| \leq k^n\,|u_0 - \lambda|$$

donc en particulier $\lim u_n = \lambda$.
*On dit que le point fixe λ est **attractif**.*

III Variations et extrema

On considère dans cette section une fonction f définie sur un intervalle non trivial I.

Le premier résultat est celui qui permet de déduire les variations de la fonction du signe de la dérivée, lorsqu'elle existe. C'est une conséquence facile de l'égalité des accroissements finis.

Théorème 67 ***(Variations par signe de la dérivée)***
*Il est primordial ici que I soit un **intervalle**. On a alors les caractérisations suivantes pour f **dérivable** sur I :*
- *f est constante* $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$
- *f est croissante* $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- *f est décroissante* $\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$

Pour la stricte monotonie, ce ne sont plus des équivalences :
- $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Longrightarrow$ *f est strictement croissante*
- $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Longrightarrow$ *f est strictement décroissante*

Exercice 68 Montrer par des contrexemples que les équivalences sont fausses lorsque I n'est pas un intervalle et que les réciproques des deux implications sont fausses (même si I est un intervalle).$\bigoplus$

Démonstration: Les trois premières implications se déduisent immédiatement de la définition de la dérivée à partir du taux d'accroissement. Leurs réciproques et les autres implications se démontrent à l'aide de l'égalité des accroissements finis.$\bigoplus$ $\square$

On définit les différentes notions d'extremum :

Définition 69 Pour $a \in I$, on dit que

— f *admet un maximum* (resp. *minimum*) *(global)* en a ssi $f(a) = \max(f(I))$ (resp. $f(b) = \min(f(I))$).
— f *admet un maximum* (resp. *minimum*) *local* en a ss'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_V$ admette un maximum (resp. minimum).
— f admet un *extremum* en a ssi elle admet un maximum ou un minimum en a.
— Un extremum en a est *strict* ssi la valeur $f(a)$ n'est atteinte qu'en a.

Exemple 70 La fonction $x \longmapsto x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un seul extremum : un maximum global strict au point $\frac{1}{2}$.

Remarque 71 On rappelle que l'existence d'extrema globaux est assurée dans le cas d'une fonction continue sur un segment

Il n'y a pas de bonne CNS d'extremum local, mais on peut donner une CN et une CS.

***Théorème 72** (CN d'extremum local)*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
*Si f admet un extremum local en un point **intérieur** a de I (i.e. a n'est pas une borne de I) et f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration: Voir le cours. Réfléchir aux idées.$\bigoplus$ $\square$

Exemple 73 Montrer d'une part que ce résultat est faux si a n'est pas un point intérieur (faire un dessin) et d'autre part que cette CN n'est pas suffisante.$\bigoplus$

Remarque 74 Un recherche d'extrema doit donc toujours séparer l'étude intérieure et l'étude au bord (extrémités de I).

Définition 75 Un tel point annulant la dérivée de f est appelé *point critique* de f.

***Théorème 76** (CS d'extremum local)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I (i.e. deux fois dérivable sur I et de dérivée seconde continue) et $a \in I$.
Si a est un point critique de f et $f''(a) < 0$ (resp. $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum (resp. minimum) local strict en a.

Démonstration: Comme f'' est continue et non nulle en a, il est facile de voir que son signe est constant au voisinage de a. Donc f' est strictement monotone au voisinage de a et change de signe en a puisque $f'(a) = 0$. Cela donne les variations au voisinage de a et la conclusion. $\square$

Remarque 77 Cette CS n'est pas nécessaire à bien des égards.$\bigoplus$

IV Fonctions convexes

1 Remarques préliminaires

Lemme 78
Pour deux réels $x \leq y$,

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \ ; \ \lambda \in [0,1]\}.$$

Démonstration: en exercice $\square$

Lemme 79
Si g est une fonction affine sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Démonstration: en exercice $\square$

2 Définition et généralités

Soit f un fonction définie sur un **intervalle** non trivial I.

Définition 80 La fonction f est *convexe* ssi les cordes de son graphe sont situées au-dessus de ce graphe, au sens large, *i.e.*

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \ \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Remarque 81 Cela équivaut facilement à ce que

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \ \forall \lambda \in]0,1[, \quad (x < y \Longrightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)).$$

Remarque 82 On dit que f est *concave* ssi $-f$ est convexe.

Exemple 83 Les fonctions affines, $x \longmapsto x^2$, exp, $|\cdot|$ sont convexes. Les fonctions $x \longmapsto x^3$ et ln ne le sont pas et ln est concave.

Remarque 84 *Explication culturelle de la terminologie, non exigible.* La fonction f est convexe ssi son *épigraphe* $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, *i.e.* elle contient tout segment reliant deux de ses points.

Théorème 85 ***(Inégalité de Jensen)***
Supposons que f soit convexe sur un intervalle non trivial I. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall (x_i)_{i=1}^n \in I^n, \forall (\lambda_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right).$$

Démonstration: Par récurrence sur n à partir de $n = 2$. Faite en cours$\bigoplus$ $\square$

Remarque 86 *Interprétation barycentrique culturelle non exigible.* On introduit brièvement la notion de barycentre qui permet d'interpréter à la fois le résultat ("l'image d'un barycentre à coefficients positifs et inférieure au barycentre des images") et la démonstration de l'hérédité par "associativité du barycentre". On illustre cela par des figures.

Exemple 87 Cette inégalité de Jensen permet de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall (a_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i.$$

On fait aussi remarquer au passage la démonstration élémentaire du cas $n = 2$.

On peut caractériser les fonctions convexes par la propriété suivante, qu'on remarque d'abord sur une figure :

Théorème 88 ***(Convexité par croissance des pentes)***
Si la fonction f est convexe, alors, pour tous $x,y,z \in I$ tels que $x < y < z$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Réciproquement :
- *si, pour tous $x,y,z \in I$ tels que $x < y < z$, la première inégalité est vérifiée, alors f est convexe ;*
- *si, pour tous $x,y,z \in I$ tels que $x < y < z$, la deuxième inégalité est vérifiée, alors f est convexe ;*

Démonstration: Supposons que f soit convexe et soient $x < y < z$ trois éléments de I. Alors, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ et alors, par convexité de f,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{(1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)-f(x)}{(1-\lambda)x+\lambda z-x} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

La réciproque se fait en renversant directement cette argumentation.
Le cas de la deuxième inégalité se traite de la même manière. □

On peut reformuler ce résultat ainsi

Théorème 89 *La fonction f est convexe ssi, pour tout $a \in I$, la fonction $T_a f$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Par ailleurs la convexité permet de positionner le graphe non seulement par rapport à ses cordes, mais aussi par rapport à ses sécantes :

Proposition 90 *Si f est convexe, pour une sécante en deux points à son graphe, le graphe est situé en dessous de la sécante entre les deux points d'intersection et au-dessus à l'extérieur de ces deux points.*

Remarque 91 *Complément non exigible.* Notion de stricte convexité et interprétation géométrique. Exercice : montrer qu'une fonction strictement convexe admet au plus un minimum local, qui est global lorsqu'il existe.

3 Convexité et régularité

***Proposition 92** (Convexité par croissance de la dérivée)*
Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors elle est convexe ssi f' est croissante.

Démonstration: Développée en cours.

Soit f dérivable sur I.

Si f est convexe, pour $a < b$ dans I, en prenant $x \in]a,b[$, la croissance des pentes donne $(T_a f)(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, puis, en faisant tendre x vers a^+, $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et un argument similaire donne $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$, d'où la croissance de f'.

Si f' croît, pour $x < y$ éléments de I, on considère $g : t \longmapsto (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$, clairement dérivable sur $[0,1]$ et de dérivée $g' : t \longmapsto f(y) - f(x) - (y-x)f'((1-t)x+ty)$, dont on voit facilement qu'elle est décroissante. Comme $g(0) = g(1) = 0$, le théorème de Rolle nous dit que g' s'annule en un point $c \in]0,1[$. Par décroissance de g', g croît sur $[0,c]$ et décroît sur $[c,0]$ et comme $g(0) = g(1) = 0$, $g \geq 0$, ce qui est l'inégalité de la définition de la convexité. Comme cela est valable pour tous $x < y$, f est convexe. □

***Proposition 93** (Convexité par les tangentes)*
Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors elle est convexe ssi le graphe de f est au-dessus de ses tangentes, au sens large.

Démonstration: Non faite en détail, mais il est montré sur un dessin comment cela provient du théorème de croissance des pentes. □

***Proposition 94** (Convexité par positivité de la dérivée seconde)*
Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I, alors elle est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Démonstration: Conséquence immédiate du fait qu'une fonction dérivable sur un intervalle est croissante ssi sa dérivée est positive au sens large. □

Compléments non exigibles sur la stricte convexité.
Quelques notions culturelles sur la fonction Γ, qui est logarithmiquement convexe.

V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soient f définie sur un intervalle I non trivial et $k \in \mathbb{N} \cup (\infty)$.

Définition 95

Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur I ssi elle est k **fois dérivable** sur I et sa dérivée k-ième est **continue** sur I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est indéfiniment dérivable sur I, ce qui équivaut à ce qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Remarque 96 Par extension, on dira plus généralement que $f : D_f \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi elle est k fois dérivable et sa dérivée k-ième est continue, dans le cas où k est fini, respectivement indéfiniment dérivable dans le cas où $k = \infty$.

Comme pour la dérivabilité ou la continuité, dire que f est de lasse $\mathcal{C}^k$ sur une partie A de D_f est à proscrire, car **ambigu**, sauf si A est un ensemble ouvert (réunion d'intervalles ouverts).

Exemple 97 $\exp, \cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

Remarque 98 On prend la convention que la dérivée zéro-ième de f est f. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^0$ ssi elle est continue.

Remarque 99 On rappelle qu'on note ainsi les dérivées successives :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \dots$$

Remarque 100 Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors toutes les dérivées intermédiaires $f^{(p)}$, pour $p \in [\![0, k-1]\!]$ sont aussi continues car elles sont dérivables.

Théorème 101 ***(Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)***

— *Toute CL de fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^k$ sur I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $p \in [\![0, k]\!]$, on a*
$$(\lambda f + \mu g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + \mu g^{(p)}$$

— *Un produit de deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^k$ sur I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour $p \in [\![0, k]\!]$, on a la* ***formule de Leibniz*** *:*
$$(fg)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^{(p-i)} g^{(i)}$$

— *Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

Démonstration: Le résultat sur les CL se déduit d'une récurrence immédiate. La démonstration de la formule de Leibniz est similaire à la démonstration de la formule du binôme de Newton. Celle de l'inverse se démontre par récurrence. □

Remarque 102 On peut reformuler ainsi les deux premiers points de ce théorème : l'ensemble $\mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}(I)$ est stable par combinaisons linéaires et par produit. On peut dire que $\mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}(I)$ est une algèbre.

Exercice 103 Montrer que $x \longmapsto e^x(x^2 + x + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter, pour $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n-ième.

En utilisant ces opérations, on obtient facilement le

Corollaire 104 ***(Régularité des fonctions polynômes et rationnelles)***
Les polynômes et fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Les derniers théorèmes sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sont admis :

***Théorème 105** (Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)*
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

On en déduit le

***Corollaire 106** (Régularité des fonctions polynômes trigonométriques et fonctions rationnelles trigonométriques)*
Les polynômes trigonométriques et fractions rationnelles trigonométriques sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 107 En particulier, la fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

***Théorème 108** (Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$)*
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour un $k \geq 1$ et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} existe et est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $f(I)$.

Exemples 109 $\ln \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+^\star)$, $\mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(]-1,1[)$ et $\mathrm{Arctan} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

Exercice 110 Montrer que les fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que certaines (lesquelles), le sont sur de plus grands intervalles.

***Théorème 111** (Prolongement de classe $\mathcal{C}^k$)*
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus (a)$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en a pour tout entier naturel $p \leq k$, alors f admet un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Exercice 112 Montrer que la fonction $x \longmapsto x^3 \sin\frac{1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ $\bigoplus$.

VI Fonctions complexes

1 Dérivabilité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

La définition de la dérivabilité de f en $a \in I$ est identique à celle du cas réel : f est dérivable ssi le taux d'accroissement admet une limite complexe en a.

Ce qu'on avait précédemment pris comme une définition devient maintenant une propriété :

***Proposition 113** (Dérivabilité par parties réelle et imaginaire)*
f est dérivable en a ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et dans ce cas

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a)$$

Pour les **opérations sur les fonctions à valeurs complexes dérivables**, ainsi que les **compositions "possibles"**, **se reporter** à la première section du chapitre "Primitives et équations différentielles".

Attention, il n'y a pas d'égalité des accroissements finis dans le cas complexe. Cependant l'inégalité demeure :

Théorème 114 ***(Inégalité des accroissements finis)***
Si f est dérivable sur I et $|f'|$ est majorée par $k \in \mathbb{R}_+$, alors f est k-lipschitzienne.

Exemple 115 Voici un contrexemple à l'égalité des accroissements finis (et même au théorème de Rolle) dans le cas complexe : la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{i2\pi t} \end{array} \right.$$

vérifie $f(0) = f(1)$, mais sa dérivée $x \longmapsto i2\pi e^{i2\pi t}$ ne s'annule jamais.

2 Fonctions complexes de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
La définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est identique à celle du cas réel. Par ailleurs, on a immédiatement la

Proposition 116 ***(Classe $\mathcal{C}^k$ par parties réelle et imaginaire)***
Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ssi $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont.*

Le théorème concernant les **opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$** (CL, produit et formule de Leibniz, quotient) est identique à celui du cas réel. On en déduit que les fonctions polynômes à coefficients complexes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles à coefficients complexes ;sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

Rappelons qu'on ne peut en général pas composer deux fonctions à valeurs complexes entre elles, mais les deux théorèmes vus dans la première section du chapitre "Primitives et équations différentielles" se généralisent facilement aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Théorème 117 ***(Composition au but avec l'exponentielle)***
Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $e^\varphi = \exp \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
(Rappelons que, si $k > 0$, $(e^\varphi)' = e^\varphi \varphi'$, ce qui permet de calculer les dérivées successives le cas échéant.)

Corollaire 118 *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction puissance $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Théorème 119 ***(Composition à la source avec une fonction réelle)***
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et vérifient $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
(Rappelons que si $k > 0$, $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$, ce qui permet de calculer les dérivées successives le cas échéant.)

Enfin, le **théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ se généralise** trivialement au cas complexe, en utilisant les parties réelle et imaginaire.