C09 - Applications et relations

I. Relations

2. Relations d'équivalences

$$\forall x \in E, x \in \overline{x}$$

Démonstration par réflexivité
Pour $y - 2 = 2 - x$:

$$\overline{3} = \{1, 3, 4, 5\} = \overline{4}$$

Il est facile de voir directement que pour k $\geq$ 2 entier
$\forall m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$,

$$\left.\begin{array}{r} m \equiv m'[k] \\ n \equiv n'[k] \end{array}\right\} \Rightarrow m + n \equiv m' + n'[k]$$

($\equiv_k$ et + sont "compatibles")

Conséquence :
${}^k\overline{m+n}$ ne dépends que de ${}^k\overline{m}$ et ${}^k\overline{n}$
Donc on part poser ${}^k\overline{m}$ + ${}^k\overline{n}$ = ${}^k\overline{m+n}$
Puisque ... ne déprends pas de représentation de classe ...

Plus précisément en notant C_k l'ensemble des classes modulo k
Pour c, c' $\in$ C_k on définit $c + c = \overline{n + n'}$ ou $n \in C$ et $n' \in C'$
Sont des représentants quelconques des classes

PHOTO

On verra qu'on obtiens un groupe abélien (C_k, +) qui est noté : $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$ ou $\mathbb{Z}/\equiv_k$ Groupe cyclique.
Ce groupe est un quotient du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ par le sous groupe $k\mathbb{Z}$:
Idée on décide que tous les multiples de k sont "nuls".

Exclaibur 2.

En posant en quotient, on obtiens un anneau $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +, \times)$

$$\phi : \begin{cases} t \mapsto e^{it} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{U} \end{cases}$$

$\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est isomorphe (iso : bijectif ; morphisme : transporte la loi) à

$$\phi : \begin{cases} (\mathbb{E}/6\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{U}, \cdot) \\ E \mapsto e^{\frac{2\pi t}{6}} \end{cases}$$

$\phi(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \mathbb{U}_6$ $(\mathbb{U}_6, \cdot)$ et $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes

Construction des ensembles :
$\mathbb{N} \leftarrow$ Donné par les dieux / l'inspecteur général / ZFR
$\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ $(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow$ $(m - n = m' - n') \Leftrightarrow$ $m + n' = m' + n$
"$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$"
On prends $\{\overline{(n, o)}; n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$
où $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}\right) \Leftrightarrow pq' = p'q$
Notons $\frac{p}{q} = \overline{(p, q)}$
par exemple $(2, 4) \sim (1, 2)$ ie $\overline{(2, 4)} = \overline{(1, 2)}$ ie $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3. Relations d'ordre

- $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné l'ordre "$\subset$" sur P(E) n'est pas total des que $|E| = card(E) \geq 2$:
  Soient x, y différents dans E alors,
  $\{x\}$ no $\subset$ $\{y\}$ et {y} no $\subset$ {x}

Excalibur 3.

- Exemple 33
  X admet un plus petit élément (minimum) qui est $\varnothing$ et un plus grand {0, 1, 2}
  Soit A $\subset$ X
  Est-ce que A admet ... un plus petit et un plus grand élément.
  exemple : A = {$\varnothing$, {0}, {2, 0}, {0, 1}} min(A) = $\varnothing$

mais A n'admet pas de plus grand élément.

$(\mathbb{N}, 1)$ où $\forall a, b \in \mathbb{N}, (a|b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, ka = b))$

- Proposition 32 (Démonstration) :

  Soient M, M' deux majorants de A appartenant à A alors,

  Comme M majore A et M' $\in$ A alors M' $\leq$ M

  En échangeant les rôles, M $\leq$ M' donc M = M'

- Quel lien entre 1 et $[0;1[$?

  1 majore $[0;1[$ cependant 2 majore $[0;1[$ aussi, mais 1 est le plus petit des majorants de $[0;1[$

- Cela existe-t-il toujours? ($\mathbb{R}, P(F), \mathbb{N}, \ldots$)

  CN évidente on a besoin que la partie soit majorée.

- Exemple 35 (Démonstration):

  Montrons que $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}/\{0\}\right\}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$

  Montrons que l'ensemble des minorants de A est $]-\infty;0]$ par double inclusion

  Si $n \in]-\infty;0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 0 \leq \frac{1}{n}$ donc n minore A.

  Soit n un minorant de A

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq \frac{1}{n}$

  Donc par passage a la limite dans une inégalité large $m \leq 0$

  $]-\infty;0]$ est 0, inf(A) = 0

- Exercice 36

  Soit A $\subset P(E)$,

  Soit M $\in P(E)$ (i.e. $M \in E$)

  M majore A

$$\Leftrightarrow \forall X \in A, X \subset M$$

$$1. \Leftrightarrow \bigcup_{X \in \varnothing} X \subset M$$

$$(\forall X \in A, X \subset M (\Leftrightarrow \forall X \in A, \forall z \in X, z \in M))$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in A, \forall z \in E (z \in X \Rightarrow z \in M)$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in E, \forall X \in A, (z \in X \Rightarrow z \in M)$$

$$\forall z \in E, \forall X \in P(E), X \in A \Rightarrow \dots$$

M majore A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \subset M \\ Y \subset M \\ Z \subset M \end{cases} \Leftrightarrow X \cup Y \cup Z \subset M$$

$\Leftarrow$:

Si $X \cup Y \cup Z \subset M$ alors :

$$\begin{cases} X \subset X \cup Y \cup Z \subset M \\ Y \subset \dots \subset M \\ Z \subset \dots \subset M \end{cases}$$

$\Rightarrow$:
Supposons $X \subset M$, $Y \subset M$, $Z \subset M$
Soit $z \in X \cup Y \cup Z \subset M$
Si $z \in X$ comme $X \subset M$, alors $z \in M$
Si $z \in Y$ comme ...
Si ...

Mq :

$$\forall X \in A, X \subset M \Leftrightarrow \bigcup_{X \in A} X \subset M$$

$\Leftarrow$:
Supposons $\bigcup_{X' \in A} X' \subset M$
Soit $X \in A$
Alors $X \subset \bigcup_{X' \in A} X'$
Donc $X \subset M$
("Par transitivité de $\subset$")

$\Rightarrow$:
Supposons que $\forall X \in A$, $X \subset M$
Soit $z \in \bigcup_{X \in A} X$
Alors il existe $X_0 \in A$ tq $z \in X_0$
Comme $X_0 \in A$

Alors $X_0 \subset M$
Donc $z \in M$

Ainsi
$\bigcup_{X \in A} X$ est plus petit (Par inclusion au sens large) que tout majorant de A

- Est-ce que $\bigcup_{X \in A} X$ est un majorant de A?
  Oui par 1. car $\bigcup_{X \in A} X \subset \bigcup_{X \in A} X$
  (Ou plus basiquement car si $X \in A$, $X \subset \bigcup_{X \in A} X$)

Conclusion :
$\bigcup_{X \in A} X$ est le plus petit des majorants de A, donc A admet une borne supérieure :
$sup(A) = \bigcup_{X \in A} X$

- Propriété 37
  Soit E un ensemble
  Pour l'ordre de l'inclusion sur P(E) toute partie A de P(E) admet une borne supérieure et inférieure qui sont :

$$sup(A) = \bigcup_{X \in A} X$$

$$inf(A) = \bigcap_{X \in A} X$$

En particulier si $A = \varnothing$

$$\begin{cases} sup(\varnothing) = \varnothing \\ inf(\varnothing) = E \end{cases}$$

II. Applications

1. Point de vue intuitif

Notion :

L'ensemble des applications de E vers F est noté : F^E

- Ensemble des fonctions def sur I : $\mathbb{R}^I$
- Ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- Ensemble des familles d'éléments de P(E) indexées par I : $P(E)^I$
- $|\cdot|$, Re, Im, $\in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$

2. Point de vue formel

- Si $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble l'ensemble : $E^{[|1,n|]}$ est noté E^n en assimilant les applications / familles x $\begin{cases} [|1,n|] \to E \\ i \mapsto x_i \end{cases}$
  avec les n n-uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$
  qu'on note aussi $x = (x_i)_{i \in [|1,n|]}$
- Définition
  Soient f : $E \to F$n $A \subset E$, $B \subset F$
  tq : $\forall x \in A, f(x) \in B$
  Alors, l'application b est définie

$$\tilde{f} : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

  est appelé implication induite de B par f

3. Surjectivité et injectivité

4. Notion d'antécédent

- Définition 74 :
  Voir f^{-1} écrit ne veut pas dire que f^{-1} existe
- Rappel : Image d'une partie A de E par f :
  Pour $A \subset E$,

$$f(A) = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\} = f(x); x \in A$$

  Image réciproque d'une partie de B (de F) par f :
  Pour $B \subset F$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$

ATTENTION : f^{-1} n'existe pas
Excalidraw 4

5. Relations ensemblistes concernant les images directes et réciproques

- Proposition 78 : Démonstration :
  Soient $A, A' \in P(E)$ tq $A \subset A'$
  Soit $y \in f(A)$.
  Par définition de l'image directe, il existe $x \in A$ tq $f(x) = y$
  Comme $A \subset A$, $x \in A'$ donc $y \in f(A')$
- Proposition 79 : Démonstration $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
  Par double inclusion :
  On a $A \subset A \cup A'$ donc par croissance des images directes,
  $f(A) \subset f(A \cup A')$.
  De même $f(A') \subset f(A \cup A')$
  Donc $f(A) \cup (A') \subset f(A \cup A')$

  Soit $y \in f(A \cup A')$.
  Par définition de l'image directe, il existe $x \in A \cup A'$ tq $f(x) = y$.
  On fait une disjonction de cas :

  - Si $x \in A$,
    Alors $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(A')$
  - Si $x \in A'$
    Alors $y = f(x) \in f(A') \subset f(A) \cup f(A')$

  Dans les 2 cas $y \in f(A) \cup f(A')$
  Par double inclusion, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

6. Composition

- Proposition 87 : Démonstration
  ... L'ensemble de départ de $h \circ (g \circ f)$ est celui de $g \circ f$ i.e. celui de f i.e. E
  Celui de $(h \circ g) \circ f$ est celui de f i.e. E

Plus précisément, comme $f \in F^E$ et $g \in G^F$
Alors $g \circ f$ est bien définie et $g \circ f \in G^F$.
Puis comme $(g \circ f) \in G^E$ et $h \in H^G$, alors $h \circ (g \circ f)$ est bien défini et $h \circ (g \circ f) \in H^E$
De même comme $g \in G^F$ et $h \in H^G$,
$h \circ g$ et un élément de H^F bien défini, pas $(h \circ g) \circ f$ est un élément de H^E bien défini.

Ainsi $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivé H
Il suffit alors de montrer qu'elles ont le même graphe i.e. qu'elles donnent la même image de chaque élément de E :

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x$$

- Proposition 89 : Démonstration
  Comme $f \in F^E$ et $Id_E \in E^E$, $f \circ Id_E \in F^E$
  Or, $f \in F^E$ donc il suffit de vérifier, pour $x \in E$
  $(f \circ Id_E)(x) = f(Id_E) = f(x)$
  De même pour toute l'égalité

7. Réciproque d'une bijection

- Proposition 94 : Démonstration
  Supposons que f soit bijective.
  On pose pour tout $y \in F$, $g(y)$ l'unique élément de E tq $f(x) = y$
  (existe et est unique par bijectivité de f)
  Cela définit $g \in E^F$
  On a alors :

  - D'une part, pour tout $x \in E$, $g(f(x))$ qui est l'unique $x' \in E$ tq $f(x') = f(x)$
    et qui vérifie donc $x = x'$ par injectivité de f, donc $g(f(x)) = x$.
    Ainsi, $g \circ f = Id_E$
  - D'autre part, pour $y \in F$, $f(g(y)) = y$ par définition de $g(y)$.
    Ainsi $f \circ g = Id_F$
    Ainsi g est réciproque de f

Supposons que f admette une réciproque g.
Alors $g \circ f = Id_E$ est injective (car bijective)
Donc f est injective
Puis $f \circ g = Td_F$ est surjective (car bijective)
Donc f est surjective

Ainsi f est bijective

On a alors l'équivalence voulue.
Montrons l'unicité de la réciproque :
Supposons que f soit bijective et prenons deux réciproques g et g' de f
On a $g, g' \in E^F$
Prenons $y \in F$
On a $f'(g(y)) = y = f(g'(y))$ (car $f \circ g = f \circ g'$)
Or f est injective donc $g(y) = g'(y)$
Ainsi $g = g'$

- Proposition 98 : Démonstration n°1
  On a $g^{-1} \in F^G$ et $f^{-1} \in E^F$
  Donc $f^{-1} \circ g^{-1} \in E^G$
  Et aussi $(g \circ f)^{-1} \in E^G$

  Pour $z \in G$

  $$(g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(z)) = g((f \circ f^{-1})(g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z = (g \circ f)((g \circ$$

  Or $g \circ f$ est injective (car bijective)
  Donc $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = (g \circ f)^{-1}(z)$
  Finalement :

  $$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- Proposition 98 : Démonstration n°2
  Comme $g^{-1} \in F^G$ et $f^{-1} \in E^F$
  Alors : $f^{-1} \circ g^{-1} \in E^G$ et :

  $$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (Id_F \circ f) = f^{-1} \circ f = I$$

et

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_G$$

Donc :

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

8. Théorème de Cantor-Bernstein

9. Cardinal d'un ensemble fini

- Lemme 104 : Démonstration :
  Par recurrence finie

$$\forall k \in [|1, p|], A_k : f(k) \geq k$$

  - Initialisation

$$f(1) \in [|1, n|] \; donc \; f(1) \geq 1$$

  - Hérédité
    Soit $k \in [|1, p-1|]$ tq A_k
    Alors par stricte croissance :

$$f(k+1) > f(k)$$

    Mais comme se sont des entiers,

$$f(k+1) \geq f(k) + 1$$

    Or par H.R. $f(k) \geq k$, donc $f(k+1) \geq k+1$ donc A_{k+1}
  - Conclusion :
    Par récurrence,

$$\forall k \in [|1, p|], f(k) \geq k$$

    En particulier :

$$p \leq f(p) \leq n$$

- Lemme 105 : Démonstration :
  Les images des éléments de $[|1, p|]$ étant deux à deux distinctes on les notes en les ordonnant :

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$$

  On pose alors pour $i \in [|1, p|],\ \phi(i)$ l'unique élément de $[|1, p|]$ tq $f(\phi(i)) = f_i$

  - Montrons que ϕ est injective :
    Soient $k, k' \in [|1, p|]$ tq $\phi(k) = \phi(k')$
    Alors $j_k = f(\phi(k)) = f(\phi(k')) = j'_k$
    et par stricte croissance de la suite finie :

$$(j_i)_{i \in [|1, p|]},\ k = k'$$

  - Montrons que ϕ est surjective :
    Soit $k \in [|1, p|]$ par définition des j_i
    Il existe $l \in [|1, p|]$ tq $f(k) = j_i$
    Par ailleurs, $f(\phi(l)) = j_l$,
    Donc par injectivité de j $\phi(l) = k$

  Ainsi ϕ est bijective
- Remarque :
  On définit les ensembles infinis par : E ssi il existe $f : E \mapsto E$ injective et non surjective. Tous les autres sont des ensembles finis.

10. Opération sur les cardinaux finis

- Propositions :

$$|E \sqcup F| = |E| + |F|$$

$$|E \times F| = |E||F|$$

$$|F^E| = |F|^{|E|}$$

$$|P(E)| = 2^{|E|}$$

- Proposition 121 :
  Notons pour E, F deux ensembles quelconques.
  Inj(E, F) l'ensemble des injections dans d'ensemble F^E
  Surj(E, F) ...
  Bij(E, F) ...

  Soient, E, F finis de cardinaux $p \leq n$
  Combien d'injections de E vers F?
  i.e. |Inj(E, F)| = ?
  (Si $p > n$n Inj(E,F) = $\varnothing$)
  Comme |E| = p on peut numéroter les éléments de E; $x_1, x_2, \dots, x_p$
  (Comme on a une bijection $\begin{cases}[|1, p|] \to E \\ i \mapsto x_i\end{cases}$)
  De même choisir une injection de E vers F c'est :

  - Choisir $f(x_1)$ (n possibilités)
  - Puis choisir $f(x_2)$ (n-1 possibilités)
  - ...
  - Et enfin Choisir $f(x_p)$ (n-p+1 possibilités)
    Il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ choix
    i.e. : $\frac{n!}{(n-p)!}$ choix
  - Remarque :
    Le fait qu'on ait : $p \leq n$ assure que les choix peuvent se faire jusqu'à celui de $f(x_p)$.

  Image mentale : arbre (Excalibur 5.)

  On a donc bien :

  $$|Inj(E,F)| = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Proposition 122 :
  - Définition :
    Soit E et $k \in \mathbb{N}$
    On note :

    $$P_k = \{A \in P(E) | \; |A| = k\}$$

Remarque : si E est fini de cardinal $n < k$,

$$P_k = \varnothing$$

11. Ensembles infinis

- Démonstration : ("Diagonale" de Cantor) :
  On prouve que $|\mathbb{N}| < |[0, 1]|$
  $(1 = 0.9999\dots)$
  Par l'absurde en supposant qu'on peut dénombrer/numéroter [0, 1] et on écrit dans un tableau (infini) une écriture décimale de chaque élément de [0, 1] par ordre de numérotation. (ϕ : $\mathbb{N} \to [0, 1]$ est la bijection)

$$\begin{array}{c|c}
n & \phi(n) \\
0 & 0,1789233345\dots \\
1 & 0,3614254789\dots \\
2 & 0.11111112111\dots \\
 & \\
k & 0,273 \qquad\qquad d
\end{array}$$

Ou d est la $(k+1)^{eme}$ décimale

On construit un développement décimal tq la n-ieme décimale de ce développement soit différente de 0 de 9 et de la n-ieme décimale de $\phi(n-1)$
Par exemple ici :
0,273...
On note x le nombre admettant ce développement décimal
Comme ϕ est bijective, il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $x = P(k)$. En regardant la diagonale don doit avoir $d \neq d$ pour la $(k+1)^{eme}$ décimale de ce development.
Ainsi $[0, 1]$, n'est pas dénombrable
Or $|[0, 1]| \geq |\mathbb{N}|$
Donc $|[0, 1]| > |\mathbb{N}|$
Donc $|\mathbb{R}| \geq |[0, 1]| > |\mathbb{N}|$

- Proposition 128 :
  Excalibur 6.
- Proposition 129 :
  Excalibur 7.