Limites, Résumé

Lycée Berthollet 2020-21

I Introduction de la limite

On se place ici dans le cas d'une fonction f définie sur un intervalle I (non forcément ouvert) non trivial, *i.e.* non vide et non réduit à un point. On regarde le comportement de f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est un point de I ou une borne de I.

$\bigoplus$ On demande à la classe de construire des définitions de limites dans différents cas. Il ressort de cette activité que ces définitions, quoique différentes, ont une structure commune.

On introduit alors la notion de "voisinage spécifique", cas particulier de la notion générale de voisinage qui sera vue l'an prochain. Cette terminologie **non universelle** et **interne à ce cours** est simplement destinée à unifier et rendre plus intuitives les différentes définitions de limites correspondant aux différents cas.

Définition 1 Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}$, on a trois cas :

— Si $w \in \mathbb{R}$, les *voisinages spécifiques* de w sont les segments non triviaux centrés en w, à savoir les $[w-\eta, w+\eta]$, avec $\eta > 0$;

— Si $w = -\infty$, les *voisinages spécifiques* de $-\infty$ sont les intervalles $]-\infty, A]$, avec $A \in \mathbb{R}$;

— Si $w = +\infty$, les *voisinages spécifiques* de $+\infty$ sont les intervalles $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$;

On notera $\mathcal{V}(w)$ l'ensemble des voisinages spécifiques de w.

On peut alors définir la notion de propriété vérifiée "au voisinage d'un point" :

Définition 2 Une propriété est dite vérifiée au voisinage d'un point $w \in \overline{\mathbb{R}}$ ss'il existe un voisinage spécifique de w tel que la propriété soit vérifiée sur ce voisinage.

Exemples 3 On dit par exemple que la fonction exp est bornée au voisinage de $-\infty$ ou que ln est strictement positive au voisinage de 2. En revanche, ln n'est pas positive ou nulle au voisinage de 1.

Remarque 4 L'expression "à partir d'un certain rang" utilisée pour les suites pourrait aussi se traduire ainsi : "pour n au voisinage de $+\infty$".

Remarque 5 Vous verrez l'an prochain qu'un *voisinage* de $x \in \mathbb{R}$ (au sens universel du terme) est un ensemble quelconque qui contient au moins un voisinage spécifique de x.

Définition 6 Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I,\ (x \in U \Longrightarrow f(x) \in V).$$

Remarque 7 Cela est aussi équivalent aux formulations suivantes

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a),\ f(U \cap I) \subset V$$

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a),\ U \cap I \subset f^{-1}(V).$$

À partir de cette définition, **on retrouve les formulations classiques** de la limite dans les différents cas de figure suivant que a (resp. ℓ) est fini, $-\infty$ ou $+\infty$, avec les valeurs absolues ou avec des intervalles. Notation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 8 Lorsque $a \in \mathbb{R}$, il est souvent utile d'effectuer un changement de variables "$x = a+h$" et d'utiliser le fait immédiat suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 9 Comme pour les suites, lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, il est souvent pratique de soustraire la limite en utilisant les faits immédiats suivants :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff (f(x)-\ell) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On prouve souvent ce dernier résultat en majorant la valeur absolue par une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a.

II Plan de la suite du cours

— *Unicité de la limite :* démonstration à faire en exercice en copiant celle de l'unicité de la limite d'une suite. Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

— *Propriétés :*
Si $a \in I$ et f a une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.
Si f possède une limite finie en a, alors elle est bornée au voisinage de a.

— *La notion de limite est locale :* il suffit de regarder la restriction de f à $I \cap V$ pour un certain voisinage spécifique V de a (*i.e.* la resriction de f à $I \cap [a-\eta, a+\eta]$ pour un certain $\eta > 0$, resp. à $I \cap [A, +\infty[$, resp. à $I \cap]-\infty, A]$).
On peut ainsi étendre la définition de la limite au cas d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ et de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe un voisinage spécifique V de a dont l'intersection avec D_f soit un intervalle non trivial dont a soit un élément ou une borne.

— *Limite à droite (resp. à gauche) :* on considère la limite de $g = f|_{I\cap]a,+\infty[}$ (resp...). Notations $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ >}}$ et $\lim\limits_{x\to a^+}$. Exemple de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0^- et en 0^+.

— *Extension :* définition de la limite pour le cas d'une fonction définie sur un intervalle épointé ($I \setminus \{a\}$). Définition de la limite lorsque x tend vers a par valeurs différentes de a, notation $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ \neq}}$. Exemple de la fonction $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ en 0. On dit au passage que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ en le démontrant en avant-première à l'aide du taux d'accroissement.

— *Caractérisation séquentielle des limites :* f a pour limite ℓ en a ssi

$$\Big(\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (\lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = \ell)\Big).$$

Application à la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ en utilisant la forme exponenetielle. On dit au passage que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ en le démontrant en avant-première à l'aide du taux d'accroissement.

— *Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produits, quotients*, les élèves sont chargés de verifier que les démonstrations analogues dans le cas des suites "passent" bien à ce nouveau cadre.

— *Composition de limites :* f étant définie sur un intervalle I et g sur un intervalle J, on suppose que $f(I)\subset J$. Si f a pour limite b en a et g a pour limite ℓ en b, alors $g\circ f$ a pour limite ℓ en a.

— *Lien avec l'ordre :* stabilité de $\leq$ par passage à la limite, théorème d'encadrement ("Gendarmes"), de minoration et de majoration. Théorème de la limite monotone : si f est monotone sur I et a **n'est pas un point de** I (cela implique en particulier que a est une borne de I), alors f admet une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en a. Corollaire; une fonction monotone sur I admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point qui n'est pas une borne de I. Contrexemple : la fonction partie entière inférieure est monotone mais n'admet pas de limite en tout point.

III Démonstrations exigibles

Théorème 10 *(Caractérisation séquentielle de la limite)*
Soit f une fonction définie sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$, soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$ qui est un point de I ou une borne de I et soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\forall (u_n)\in I^{\mathbb{N}}, (\lim u_n=a\Longrightarrow \lim f(u_n)=\ell)\Big).$$

Démonstration: **Pour la démonstration, on se restreint au cas où a et ℓ sont réels, les autres cas se traitant de manière similaire**.

On commence par la réciproque, qui est la partie la plus intéressante, et pour cela, on raisonne par la contraposée. On suppose donc que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers a, ce qui s'écrit formellement :

$$\exists\varepsilon_0>0, \forall\alpha>0, \exists x\in I, (|x-a|\leq\alpha \text{ et } |f(x)-\ell|>\varepsilon_0).$$

On choisit alors un tel ε_0 et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on applique ce qui précède à $\alpha=\frac{1}{n+1}$, ce qui nous fournit un $x_n\in I$ tel que $|x_n-a|\leq\frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n)-\ell|>\varepsilon_0$. On a alors $\lim x_n=a$ par majoration de $|x_n-a|$ par une suite tendant vers 0. Par ailleurs, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe au moins un $n\geq N$ (en fait tous conviennent!) tel que $|f(x_n)-\ell|>\varepsilon_0$, donc la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ. On vient donc de montrer que

$$\exists (x_n)\in I^{\mathbb{N}}, (\lim x_n=a \text{ et } f(x_n)\not\to\ell),$$

ce qui achève la preuve de la contraposée.

La preuve du sens direct est en fait une preuve de composition de limites. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$. Soit alors une suite $(u_n)\in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n=a$. Pour montrer que $\lim f(u_n)=\ell$, on prend un $\varepsilon>0$ quelconque. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, il existe un $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in I, (|x-a|\leq\alpha\Longrightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon).$$

Comme $\lim u_n = a$ et $\alpha > 0$, on peut alors choisir un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| \leq \alpha$. Comme par ailleurs les u_n sont des éléments de I, cela entraîne que $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi $\lim f(u_n) = \ell$. □

Théorème 11 *(Composition des limites)*
Soient f une fonction définie sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un intervalle non triviel J de $\mathbb{R}$, telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $b \in \overline{\mathbb{R}}$) qui est soit un point de I (resp. J), soit une borne de I (resp. J). Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$.

Démonstration: **Pour la démonstration, on se restreint au cas où $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$, les autres cas se traitant de manière similaire**.

On suppose que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = +\infty$. Pour montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(f(x)) = +\infty$, on prend un $A \in \mathbb{R}$ quelconque. Comme $\lim\limits_{y\to b} g(y) = +\infty$, il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in J, (|y - b| \leq \alpha \Longrightarrow g(y) \geq A).$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ et $\alpha > 0$, on peut alors choisir un $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, (x \leq B \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \alpha).$$

Comme par ailleurs, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ par hypothèse, en combinant les deux implications,

$$\forall x \in I, (x \leq B \Longrightarrow g(f(x)) \geq A).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} g(f(x)) = +\infty$. □

Théorème 12 *(Limite monotone)*
Soient f une fonction définie sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et a une borne de l'intervalle I qui n'appartienne pas à I.

Si f est monotone sur I, alors f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a.

Démonstration: **Pour la démonstration, on se restreint au cas où $a = \inf(I)$, $a \in \mathbb{R}$ et la fonction f est croissante, les autres cas se traitant de manière similaire**.

On pose $\ell = \inf(f(I))$, qui vaut $-\infty$ si $f(I)$ n'est pas minorée et qui existe et est un réel sinon, d'après la propriété de la borne inférieure, puisque $f(I)$ est non vide (car I est non vide). Montrons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ en séparant l'étude suivant que ℓ est réelle ou non.

Cas $\ell \in \mathbb{R}$: Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est le plus grand des minorants de $f(I)$, alors $\ell + \varepsilon$ ne minore pas $f(I)$, donc il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Comme $x_0 > a$ puisque a minore I et $a \notin I$, il s'écrit $x_0 = a + \alpha$, avec $\alpha > 0$. Pour $x \in I$, si $|x - a| \leq \alpha$, alors $a < x \leq x_0$ et par définition de ℓ et croissance de f, $\ell \leq f(x) \leq f(x_0) \leq \ell + \varepsilon$, donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Cas $\ell = -\infty$: Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors A ne minore pas $f(I)$, donc il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) < A$. Comme $x_0 > a$ puisque a minore I et $a \notin I$, il s'écrit $x_0 = a + \alpha$, avec $\alpha > 0$. Pour $x \in I$, si $|x - a| \leq \alpha$, alors $a < x \leq x_0$ et par croissance de f, $f(x) \leq f(x_0) \leq A$. Ainsi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. □