Exercice 1

1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}} &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right)+o\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right)+o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{2n^2}+o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+n+1} &\underset{n\to+\infty}{=} n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2n}+o\left(\tfrac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2n}+O\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

2.

Comme :

$$\sqrt{n^2+n+1} \sim n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

On a :

$$\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) \text{ et } \sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

Qui sont de même nature.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Or

$$\cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Et

$$(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Donc,

$$\boxed{\cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Alors,

Comme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sim \frac{\pi}{2n}$$

comme $|\cdot|$ est continue en 1 par composition de limites :

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Alors,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \sim \left|\frac{\pi}{2n}\right|$$

Et puis :
Comme

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| = \sum_{n\geq 1}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|$$

et

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\pi}{2n}\right| = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

Sont deux séries a termes positifs,
puis

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \sim \left|\frac{\pi}{2n}\right|$$

On peut appliquer le théorème de le convergence d'une série a termes positifs par équivalents :
comme on a :

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ qui diverge}$$

Alors,

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \text{ diverge}$$

Ainsi,

comme

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \text{ diverge}$$

Ainisi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\cos(\pi(\sqrt{n^2+n+1})) \text{ DV}}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On définit :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $S_2 = \sum_{\sqrt{n}\notin\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ la série extraite de la série convergente : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

On a donc S_2 qui converge.

Soit $S_1 = \sum_{\sqrt{n}\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$,
On a donc, S_1 qui converge

Donc,
Comme S_1 et S_2 convergent et que :

$$\sum_{n\geq 1} u_n = S_1 + S_2$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ CV}}$$

Exercice 3

1.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,
On pose :

$$R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(k)}(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dx$$

Ainsi :
On a avec $M = \max \left| f^{(n+1)} \right|$:

$$\boxed{|R_n| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

2.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(1+t) \end{cases}$$

On a par l'inégalité précédente :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{1} \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = |\ln(1+x) - x| \leq A \frac{x^2}{2}$$

Avec :

$$A = \max \left| f^{(2)} \right| = \max_{x \in \mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{(1+x)^2} \right) = 1$$

Ainsi,

$$\boxed{M = \frac{1}{2}}$$

3.

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(x) \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 x\sin(x)\,dx$$

On effectue une intégration par parties,

On pose :

$$\left[\left[\begin{matrix}u = x\\ dv = \sin(x)dx\end{matrix}\right.\right. \text{et} \left[\left[\begin{matrix}du = dx\\ v = -\cos(x)\end{matrix}\right.\right.$$

Qui est justifié car $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\cos(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$

On a alors :

$$\int_0^1 x\sin(x)\,dx = \int_0^1 \cos(x)\,dx - [x\cos(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sin(1)-\cos(1)}$$

Exercice 4

1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $a, b \in \mathbb{R}$,

On pose :

$$R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

Alors,

$$\boxed{R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

2.

$$R_2 = \sin(x) - 0 - x - 0 = \sin(x) - x$$

Alors,

$$\sin(x) - x = -\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \cos(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 \cos(t)\,dt$$

On pose par intégration par parties :

$$\left[\left[\begin{array}{l} u = (t-x)^2 \\ dv = \cos(t)dt \end{array}\right.\right. \text{et} \left[\left[\begin{array}{l} du = 2(t-x)dt \\ v = -\sin(t) \end{array}\right.\right.$$

$$\int_0^x (t-x)^2 \cos(t)\,dt = 2\int_0^x (t-x)\sin(t)\,dt - \left[(t-x)^2\sin(t)\right]_0^x$$

On effectue une deuxième intégration par parties :

$$\left[\left[\begin{array}{l} u = t-x \\ dv = \sin(t)dt \end{array}\right.\right. \text{et} \left[\left[\begin{array}{l} du = dt \\ v = -\cos(t) \end{array}\right.\right.$$

Alors,

$$\int_0^x (t-x)\sin(t)\,dx = \left[(x-t)\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x \cos(t)\,dt$$

Donc,

$$\int_0^x (t-x)\sin(t)\,dt = \sin(x) - x$$

Et puis,

$$\int_0^x (t-x)^2\cos(t)\,dt = 2(\sin(x) - x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\sin(x) - x = \sin(x) - x}$$