TD8 : Logique Propositionnelle

28 mars 2024

Exercice 1

Donner les tables de vérités des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y, z) = (x + \overline{z}) \times (x \times y)$
2. $f_2(x, y) = (\overline{x} + y)$
3. $f_3(x, y) = (x \times y) + (\overline{x} \times \overline{y})$
4. $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} + x_2) \times (\overline{x_3} + x_4)$

Exercice 2

1) Montrer que $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives, et que $\times$ est distributive par rapport à $+$.

2) En déduire que pour des formules ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3, $(\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3$ et $\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3)$ sont équivalentes (idem pour $(\phi_1 \vee \phi_2) \vee \phi_3$ et $\phi_1 \vee (\phi_2 \vee \phi_3)$).

Exercice 3

Calculer les valeurs de vérité des formules suivantes pour la valuation $[x \leftarrow 1, y \leftarrow 0, z \leftarrow 1]$:

1. $x \wedge \neg x$
2. $x \wedge \top$
3. $x \wedge (y \wedge z)$
4. $(x \wedge y) \wedge z$
5. $(x \to y) \to z$
6. $x \to (y \to z)$
7. $x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$

Exercice 4

Dire pour chacune des propositions suivantes s'il s'agit d'une formule satisfiable, d'une tautologie ou d'une antilogie.

1. $x_1 \vee \neg x_1$
2. $x_1 \vee \bot$
3. $x_1 \wedge \bot$
4. $x_1 \vee \top$

5. $x_1 \wedge \bot$
6. $\bot \to x$
7. $(\bot \to x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$
8. $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$
9. $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2)$

Exercice 5

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de symboles de variables et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur $\mathcal{V}$. Montrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

Exercice 6

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux formules du calcul propositionnel.

1) Montrer que $\phi_1 \models \phi_2$ si et seulement si $\phi_1 \to \phi_2$ est une tautologie.

2) Montrer que $\phi_1 \equiv \phi_2$ si et seulement si $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ est une tautologie.

Exercice 7

Montrer les équivalences suivantes :

1. $\neg\neg x \equiv x$ (Double Négation)
2. $\neg(x_1 \wedge x_2) \equiv (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ (Loi de De Morgan)
3. $\neg(x_1 \vee x_2) \equiv (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$ (Loi de De Morgan)
4. $x_1 \to (x_2 \to x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \to x_3$ (Curryfication)