Dénombrement

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

On introduit des notations locales pour ce cours qui seront pratiques :

Définition 1 Pour deux ensembles X et Y quelconques, on note $\mathrm{Inj}(X,Y)$, resp. $\mathrm{Surj}(X,Y)$, resp. $\mathrm{Bij}(X,Y)$ l'ensemble des injections, resp. surjections, resp. bijections, de X vers Y.

I Cardinal d'un ensemble fini

On rappelle avec quelques démonstrations (et des dessins !) des résultats vus il y a quelques mois.

Définition 2 Un ensemble X est fini ssi on peut le mettre en bijection avec un intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.

Proposition 3 *L'entier n ci-dessus est alors unique et on l'appelle le cardinal de X. qu'on note indifféremment*

$$\mathrm{Card}(X) = |X|.$$

Cette première proposition est admise car indémontrable "proprement" faute d'une définition correcte des entiers.
On démontre alors deux lemmes clés.

Lemme 4 *Si $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est strictement croissante, alors, pour tout $x \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(x) \geq x$.*

Démonstration: Par récurrence, en remarquant que si deux entiers vérifient $k > l$, alors $k \geq l+1$. □

Lemme 5 *Si $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ est injective, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_p$ telle que $\varphi \circ \sigma$ soit strictement croissante.*

Démonstration: On définit $\sigma(1)$ comme l'unique entier i_1 tel que $\varphi(i_1) = \min \varphi([\![1,p]\!])$, puis $\sigma(2)$ comme l'unique i_2 tel que $\varphi(i_2) = \min \varphi([\![1,p]\!] \setminus \{i_1\})$, *etc.* Le fait que ce processus se termine exactement lorsqu'on a "épuisé" l'image de φ repose sur l'"unicité du cardinal" admise dans la proposition précédente. □

Définition 6 Pour deux ensembles X et Y quelconques, on note $\operatorname{Inj}(X,Y)$, resp. $\operatorname{Surj}(X,Y)$, resp. $\operatorname{Bij}(X,Y)$ l'ensemble des injections, resp. surjections, resp. bijections, de X vers Y.

On démontre à l'aide de ces lemmes les résultats suivants :

Proposition 7 *Si X et Y sont deux ensembles tels que Y soit fini et* $\operatorname{Inj}(X,Y) \neq \varnothing$*, alors X est fini et $|X| \leq |Y|$.*

Corollaire 8 *Une partie d'un ensemble fini est finie et de cardinal inférieur ou égal à celui de l'ensemble.*

Plus généralement,

Proposition 9 *Pour deux ensembles finis X et Y tels que $Y \neq \varnothing$, $|X| \leq |Y|$ (resp. $\geq$, $=$) ss'il existe une application injective (resp. surjective, bijective) de X vers Y.*

Et enfin, le "miracle des cardinaux finis" :

Théorème 10 *Une application entre deux ensembles* **finis** *de* **même cardinal** *est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.*

II Opérations sur les cardinaux

On démontre d'abord les résultats liés à la réunion :

Théorème 11 *Si $X_1,\ldots,X_n$ sont des ensembles finis deux-à-deux disjoints, alors $\bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$ est un ensemble fini et*

$$\boxed{\left|\bigsqcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|\,.}$$

Démonstration: On exhibe la formule d'une bijection de $\bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$ vers $[\![1,\sum_{i=1}^{n}|X_i|]\!]$. □

Corollaire 12 *Si X est un ensemble fini et Y un ensemble quelconque,*

$$\boxed{|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|\,.}$$

Démonstration: On applique le théorème à la réunion disjointe $X = (X \setminus Y) \sqcup (X \cap Y)$. □

Corollaire 13 ***(Formule du crible pour deux ensembles)***
Si X et Y sont deux ensembles finis, alors $X \cup Y$ est un ensemble fini et

$$\boxed{|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|\,.}$$

Démonstration: On remarque que $X \cup Y = (X \setminus Y) \sqcup (X \cap Y) \sqcup (Y \setminus X)$ et on applique le théorème et le lemme précédents. □

Corollaire 14 *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles finis, alors $\bigcup_{i=1}^n X_i$ est un ensemble fini et*

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i| .}$$

Démonstration: Par récurrence immédiate à l'aide de la formule du crible pour deux ensembles. □

On donne **pour la culture** la formule du crible générale (**hors-programme**) sous la forme

Corollaire 15 *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles finis, alors*

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left|X_i \cap X_j\right| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right| .}$$

Exercice 16 Démontrer cette formule pour $n = 3$ en se servant de la formule du crible pour deux ensembles.

Faute d'avoir défini "correctement" le produit des entiers, on énonce sous forme de théorème le résultat suivant, qui est en fait une définition en théorie des ensembles. On le "démontre" à l'aide d'un arbre. Remarquons que, même si ce n'est pas une démonstration au sens formel du terme, il est crucial que les étudiants aient cette image à l'esprit chaque fois qu'une situation de ce type se produit, comme c'est d'ailleurs le cas dans les corollaires qui suivent et dans le comptage de p-uplets d'éléments deux-à-deux distincts qu'on fera dans la deuxième section.

Théorème 17 *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles finis, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ est un ensemble fini et*

$$\boxed{\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |X_i| .}$$

Démonstration: Pseudo-démonstration à l'aide d'un arbre. □

Corollaire 18 *Si X et Y sont deux ensembles finis, alors Y^X est fini et*

$$\boxed{\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|} .}$$

Démonstration: On exhibe une bijection entre $Y^{|X|}$ et Y^X. $\square$

Pour démontrer le prochain corollaire, on introduit des applications qui "codent" les parties d'un ensemble :

Définition 19 Soit X en ensemble fixé. Pour toute partie A de X, on définit sa *fonction caractéristique* (ou *fonction indicatrice*) $\mathbf{1}_A$ par

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Corollaire 20 *Si X est fini, alors $\mathcal{P}(X)$ est fini et*

$$\boxed{|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.}$$

Démonstration: On montre que $A \to \mathbf{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(X)$ vers $\{0,1\}^X$. $\square$

III Listes et combinaisons

Lemme 21 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application et X est fini,*

$$\boxed{|X| = \sum_{y \in f(X)} \left| f^{-1}(\{y\}) \right|.}$$

Démonstration: Par la formule du cardinal d'une somme disjointe. $\square$

Remarque 22 Avec les notations du lemme, les $f^{-1}(\{y\})$, pour $y \in f(X)$, sont les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_f$ définie sur X par $x\mathcal{R}_f x' \iff f(x) = f(y)$.

Corollaire 23 *(**Principe des bergers**) Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application entre ensembles finis telle que chaque élément de Y ait exactement k antécédents, alors*

$$\boxed{|X| = k\,|Y|.}$$

Le principe des bergers permet de démontrer formellement le

Théorème 24 *Pour X,Y deux ensembles finis de cardinaux respectifs p,n tels que $p \leq n$,*

$$\boxed{|\mathrm{Inj}\,(X,Y)| = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1).}$$

Démonstration: On fait d'abord une démonstration informelle avec un arbre pour deviner et mémoriser la formule.

Quitte à composer à la source par une bijection, on peut supposer sans perte de généralité que $X = [\![1,p]\!]$. On fait alors une démonstration, à Y fixé, par récurrence sur p. L'initialisation est évidente, puisqu'il y a une seule application de $\varnothing$ vers Y et elle est injective. On suppose alors que la formule est vérifiée pour un certain $p \in [\![0,n-1]\!]$. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Inj}\,([\![1,p+1]\!],Y) & \longrightarrow & \mathrm{Inj}\,([\![1,p]\!],Y) \\ h & \longmapsto & h|_{[\![1,p]\!]} \end{array} \right. .$$

Cette application est bien définie, car la restriction d'une injection est clairement une injection. De plus, étant donnée une injection de $[\![1,p]\!]$ vers Y, il y a exactement $n-p$ façons de la prolonger en une injection de $[\![1,p+1]\!]$ vers Y, donc elle a exactement $n-p$ antécédents par f. Le principe des bergers, puis l'hypothèse de récurrence, donnent

$$|\mathrm{Inj}\,([\![1,p+1]\!],Y)| = (n-p)\,|\mathrm{Inj}\,([\![1,p]\!],Y)| = (n-p)\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}.$$

□

On a en particulier

Corollaire 25 *Pour tout ensemble fini Y de cardinal n,*

$$\boxed{|\mathcal{S}(Y)| = n!}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{S}_n| = n!.}$$

Définition 26 On note, pour Y un ensemble quelconque et $p \in \mathbb{N}$:
- $\mathcal{A}_p(Y)$ l'ensemble des éléments de Y^p dont les composantes sont deux-à-deux différentes ;
- $\mathcal{P}_p(Y)$ l'ensemble des parties de Y de cardinal p.

Le théorème précédent se reformule alors

Théorème 27 *Pour Y un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0,n]\!]$,*

$$\boxed{\left|\mathcal{A}_p(Y)\right| = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1).}$$

Démonstration: Il y a une bijection évidente entre $\mathcal{A}_p(Y)$ et $\mathrm{Inj}\,([\![1,p]\!],Y)$. □

Et il entraîne le résultat **fondamental** suivant :

Théorème 28 *Pour tout ensemble fini Y de cardinal n et tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\boxed{\left|\mathcal{P}_p(Y)\right| = \binom{n}{p}.}$$

Démonstration:

Si $p > n$, c'est trivial avec la convention prise de nullité des bonômiaux dans ce cas.

Si $p \leq n$, on définit l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{A}_p(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}_p(Y) \\ (y_i)_{i=1}^p & \longmapsto & \{y_i ; i \in [\![1, p]\!]\}. \end{cases}$$

L'ensemble des antécédents par f d'une partie A à p éléments de Y est exactement $\mathcal{A}_p(A)$ et a donc $p!$ éléments par ce qui précède. En appliquant le principe des bergers à f et le théorème précédent,

$$\left|\mathcal{P}_p(Y)\right| = \frac{1}{p!}\left|\mathcal{A}_p(Y)\right| = \binom{n}{p}.$$

□

IV Redémonstrations combinatoires de résultats connus

On redémontre par comptage les résultats suivants

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geq n+1;}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;}$$

$$\boxed{\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

Pour a,b qui commutent dans un anneau,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

On donne au passage un petit aperçu de la formule du multinôme, hors-programme mais dont il est bon de connaître l'existence lors des exercices sur les urnes qui viendront bientôt.