DM1

Ce DM est à rendre avant le 14/09/23

Consignes générales :

Le sujet comporte 2 problèmes indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Noter clairement le titre de l'exercice et les numéros des questions traités.

Les calculs seront toujours menés **de façon littérale, et le résultat littéral** $\boxed{\textbf{encadré}}$.

Les applications numériques seront ensuite effectuées quand elles seront demandées, et soulignées.

1 Analyse dimensionnelle des papillons

Les papillons, de taille et de forme variée, présentent, à l'œil exercé du physicien (et entomologiste amateur) une propriété remarquable : plus ils sont petits, plus le battement de leurs ailes est rapide. Nous nous proposons de rendre compte de cette propriété dans le cadre d'une simple analyse de facteurs significatifs. Ainsi, l'étude d'une famille d'animaux de même forme (homothétiques) mais de dimensions variables conduit à affirmer que la surface S des ailes est simplement proportionnelle au carré de leur dimension caractéristique ℓ, ce qu'on écrira $S \propto \ell^2$. Cette notation signifie que $S = k\ell^2$, où k est une certaine constante (fonction par exemple de la forme des ailes) qu'on ne cherche pas à déterminer.
L'étude des facteurs significatifs peut être menée par une étude de diagrammes logarithmiques, à partir par exemple de données expérimentales (dans le tableau ci-après). On peut y lire, pour différentes espèces, des mesures de l'envergure R des ailes (plus grande distance de l'aile au point milieu de l'abdomen), de la longueur ℓ du corps (de la tête à la queue) et de la fréquence f_b du battement des ailes en vol (mesurée par des caméras rapides).

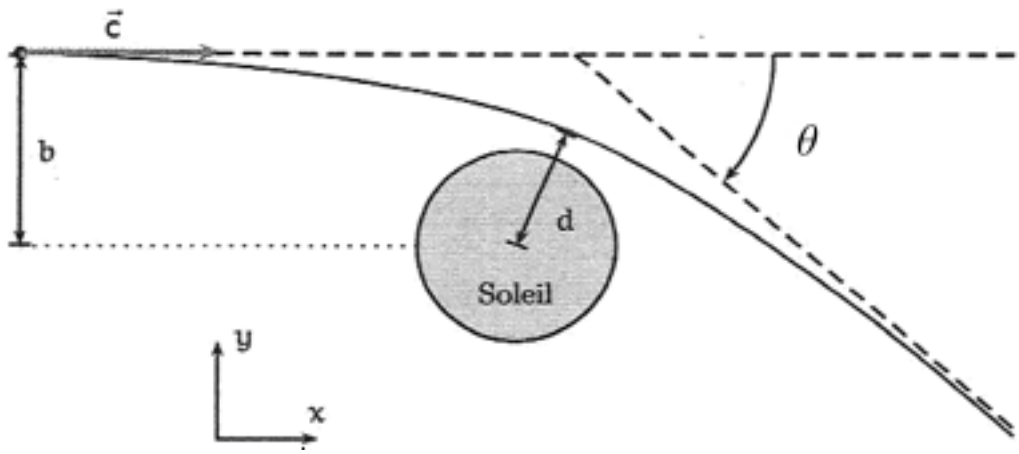
1. On souhaite montrer l'existence d'un exposant a décrivant, pour l'ensemble des espèces citées dans ce tableau, une relation entre dimensions sous la forme $R \propto \ell^a$.
   En réalisant le tracé d'un diagramme logarithmique (c'est-à-dire $\log R$ en fonction de $\log \ell$) suivi d'une régression linéaire, montrer que cette relation est pertinente et proposer une valeur entière pour l'exposant a. Comment interpréter ce résultat ?
2. Le papillon en vol équilibre les forces volumiques F_v (pesanteur, poussée d'Archimède) et les forces surfaciques F_s (forces de contact des pattes avec les supports) par une force de poussée hydrodynamique. Les forces surfaciques suivent bien une loi d'échelle avec pour facteur significatif ℓ, dont on admettra qu'on peut l'écrire $F_s \propto \ell^2$. Justifier l'existence d'une relation du type $F_v \propto \ell^c$ et préciser la valeur de l'exposant c.
3. On admet que la force de poussée hydrodynamique Π due aux battements des ailes ne dépend que de la masse volumique ρ_a de l'air, de la surface S des ailes et de la fréquence f_b du battement des ailes.
   En admettant une expression du type $\Pi \propto \rho_a^p S^q f_b^r$, déterminer les entiers p, q et r par analyse dimensionnelle.
4. Le vol (stationnaire) du papillon est régi par un équilibre mécanique se traduisant par $\Pi = F_v + F_s$, où l'un des deux termes (de surface F_s ou de volume F_v) est prépondérant. En supposant que la fréquence des battements est reliée à la taille par une relation du type $f_b \propto \ell^d$, déterminer les valeurs de d correspondant au fait que F_v ou F_s soit prépondérant.
5. À partir des données expérimentales déterminer celui des deux termes F_v ou F_s qui est effectivement prépondérant. On ne demande pas de représenter le graphe utilisé pour cette question.

Espèce	R [mm]	ℓ [mm]	f_b [Hz]	Photo
Troides radamantus	65	46	9	
Papilio rumanzovia	61	35	10	
Pachliopta hector	44	27	13	
Graphium sarpedon	39	25	16	
Precis iphita	33	21	19	
Calospila idmon	15	11	32	

2 Déviation de la lumière par le Soleil

Einstein développa en 1915 la théorie de la relativité générale. Il y décrit la gravitation comme une modification de l'espace-temps, prédisant ainsi des effets tels que la déviation de la lumière par des corps massifs. Einstein avait prévu par exemple qu'en cas d'éclipse de Soleil, on devait pouvoir observer des étoiles qui auraient dû être occultées par le bord de celui-ci. Cet effet a été observé pour la première fois en 1919 et largement confirmé depuis. Le but de cet exercice est de déterminer, de manière simple, l'ordre de grandeur de l'angle de déviation d'un rayon lumineux frôlant le Soleil.

Un rayon lumineux arrive au voisinage du Soleil avec un paramètre d'impact noté b (cf figure ci-dessous, b est la distance entre le Soleil et le rayon lumineux incident s'il était non dévié c'est-à-dire rectiligne). On note M_S et R_S la masse et le rayon du Soleil, supposé sphérique et homogène, c la vitesse de la lumière dans le vide et G la constante de la gravitation universelle.



Données : $M_S = 2,0.10^{30}$ kg ; $R_S = 7,0.10^8$ m ; $c = 3,0.10^8$ m.s^{-1} ; $G = 6,67.10^{-11}$ S.I. (unités du système international)

1. Quelle est la dimension de G ?
2. On cherche une relation donnant la déviation θ sous la forme

$$\theta = KG^\alpha M_S^\beta R_S^\gamma c^\delta$$

où K est une constante sans dimension de l'ordre de l'unité.
Proposer des valeurs entières pour les constantes α, β, γ et δ. En cas d'indétermination on choisira la solution la plus simple, en vérifiant que la valeur numérique est vraisemblable.

3. La théorie de la relativité générale d'Einstein prédit la valeur $K = 4$. Évaluer alors l'angle θ en radians, puis en secondes d'arc.
4. Rutherford montra la structure lacunaire de l'atome en bombardant des atomes d'or avec un faisceau de particules α (He^{2+}) dont il étudia les déviations.
Pour rappel, la force électrostatique exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 à la distance r s'écrit (Loi de Coulomb) :

$$\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

où $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire dirigé de q_1 à q_2.
On peut montrer en mécanique newtonienne que l'angle de déviation ϕ d'une particule α (de charge q, d'énergie cinétique $E_{c0} = \frac{1}{2}mv^2$, et de paramètre d'impact b) par un noyau d'or (de charge Q) est donné par :

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2bE_{c0}}$$

Or bien avant Einstein, Newton avait eu l'intuition que la lumière peut être constituée de particules sensibles à l'interaction gravitationnelle. En faisant une analogie entre les forces d'interaction électrostatique (loi de Coulomb) et gravitationnelle, proposer une expression de $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$ dans le cas où ϕ serait la déviation d'un corps de masse m à l'approche d'un astre massif de masse M.

5. En considérant des particules de lumière de masse m (bien qu'on sache aujourd'hui que les photons sont de masse nulle), montrer alors que l'angle de déviation θ_N prédit par la mécanique newtonienne est deux fois plus faible que celui trouvé prédécemment par la relativité générale et vérifié expérimentalement.