DM2 de mathématiques, à rendre le lundi mardi 25 septembre 2023

Exercice 1 *Logique sentimentale*
On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. On définit la relation "être amoureux" : pour tout h de $\mathcal{H}$ et f de $\mathcal{F}$, on note $h\heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on note $f\heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. *On notera donc bien que la relation $\heartsuit$ n'est en général pas symétrique*. Enfin, la négation de cette relation se note $\not\heartsuit$. Ainsi, $h\not\heartsuit f$ signifie que h n'aime pas f.
À titre d'exemple, l'assertion "chaque homme est amoureux d'une femme", qui dit que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f, s'écrit formellement :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h\heartsuit f.$$

Remarques :
- On rappelle qu'en mathématiques, "une" signifie "au moins une", et non pas "exactement une" ;
- Il y aura parfois plusieurs réponses possibles ;
- Pour cet exercice, **on ne demande pas de justifier les résultats**, mais uniquement d'écrire les assertions demandées ;
- On ne se préoccupera pas de savoir si les assertions manipulées sont vraies ou fausses.

1. *Thème.* Écrire les assertions suivantes en language formel (*i.e.* en language mathématique) :
   (a) Les hommes aiment toutes les femmes.

   $\boxed{\forall h \in \mathcal{H}, \forall f \in \mathcal{F},\ h\heartsuit f.}$

   (b) Tout le monde aime tout le monde.

   $\boxed{\forall i, j \in \mathcal{H} \cup \mathcal{F},\ i\heartsuit j.}$

   (c) Certains hommes aiment plusieurs femmes.

   $\boxed{\exists h \in \mathcal{H},\ \exists f, f' \in \mathcal{F},\ (f \neq f' \text{ et } h\heartsuit f \text{ et } h\heartsuit f').}$

2. *Version.* Que signifient, en français, les phrases suivantes :
   (a) $\exists f \in \mathcal{F}, \forall h \in \mathcal{H},\ h\heartsuit f.$

   Il y a une femme dont tous les hommes sont amoureux.

(b) $\exists h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f$.

$\boxed{\text{Certains hommes aiment au moins une femme.}}$

(c) $\forall h \in \mathcal{H},\ \exists f, f' \in \mathcal{F},\ (f \neq f' \text{ et } h \heartsuit f \text{ et } f' \heartsuit h)$.

$\boxed{\text{Pour chaque homme, il existe deux femmes différentes, l'une qu'il aime et l'autre qui l'aime.}}$

---

3. *Négation.* On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces personnages par son initiale.
Écrire la négation de chacune des phrases suivantes en language formel.
Indication : ici, écrire d'abord la phrase en language formel vous aidera à écrire la négation.

   (a) Brenda aime Mike ou Dick.

La phrase s'écrit en langage formel : $B \heartsuit M$ ou $B \heartsuit D$.

Sa négation est donc : $\boxed{B \not\heartsuit M \text{ et } B \not\heartsuit D.}$

   (b) Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

La phrase s'écrit en langage formel : $\exists h \in \mathcal{H},\ (h \heartsuit B \text{ et } h \heartsuit J)$.

Sa négation est donc : $\boxed{\forall h \in \mathcal{H},\ (h \not\heartsuit B \text{ ou } h \not\heartsuit J).}$

---

4. *Implications.* Traduire, du français en language formel ou inversement, les assertions suivantes :

   (a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.

$\boxed{\forall h \in \mathcal{H},\ (B \heartsuit h \Longrightarrow J \heartsuit h).}$

   (b) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.

$\boxed{\forall h \in \mathcal{H},\ ((B \heartsuit h \text{ et } J \heartsuit h) \Longrightarrow h = M).}$

   (c) $\forall h \in \mathcal{H}, ((\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \Longrightarrow h \heartsuit J)$.

$\boxed{\text{Un homme qui aime toutes les femmes aime Jenny.}}$

---

5. *Négations d'implications.* Écrire en langage formel la négation des assertions de la question précédente.

$\boxed{\exists h \in \mathcal{H},\ (B \heartsuit h \text{ et } J \not\heartsuit h).}$

$\boxed{\exists h \in \mathcal{H} \setminus \{M\},\ (B \heartsuit h \text{ et } J \heartsuit h).}$

$\boxed{\exists h \in \mathcal{H}, ((\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \text{ et } h \not\heartsuit J).}$

Exercice 2 *Besoin d'une injection... ou d'une surjection, voire d'une bonne correction*
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.
On définit en outre l'application h de E vers G par : $\forall x \in E,\ h(x) = g(f(x))$.
Montrer que

1. si h est injective, alors f est injective ;

Supposons que h soit injective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x')$. Comme h est injective, $x = x'$. On vient de montrer que

$$\forall x, x' \in E, \quad \left(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right),$$

$$\boxed{\textit{i.e. } f \text{ est injective.}}$$

---

2. si h est surjective, alors g est surjective.

Supposons que h soit surjective.
Soit alors $z \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = h(x) = g(f(x))$. En posant $y = f(x)$, on a $z = g(y)$. On vient de montrer que

$$\forall z \in G,\ \exists y \in F, \quad g(y) = z,$$

$$\boxed{\textit{i.e. } g \text{ est surjective.}}$$

Exercice 3 *Racines à gogo*

1. Résoudre par analyse-synthèse l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_1) : \sqrt{x^3 - x} + \sqrt{4x - x^3} = \sqrt{3x}.$$

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E_1).
Alors, en élevant au carré cette égalité et simplifiant, on obtient

$$\sqrt{x^3 - x}\sqrt{4x - x^3} = 0.$$

En élevant encore au carré et factorisant, on obtient

$$x^2(x-1)(x+1)(2-x)(2+x) = 0,$$

donc

$$\boxed{x \in [\![-2, 2]\!].}$$

Synthèse.

— Pour $x<0$, $\sqrt{3x}$ n'est pas défini, donc -2 et -1 ne sont pas solutions de (E_1).
— Pour $x\in[\![0,2]\!]$, comme $0=0$, $\sqrt{3}=\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}=\sqrt{6}$, alors x vérifie l'équation (E_1).
Ainsi,

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E_1) \text{ sont } 0,\ 1 \text{ et } 2.}$$

---

2. Montrer par l'absurde que l'équation

$$(E_2):\ \sqrt{x^3-x}+\sqrt{4x-x^3}=\sqrt{3\,|x|}$$

n'admet pas de solutions strictement négatives.

Supposons que $x\in\mathbb{R}_-^\star$ soit solution de (E_2). On a alors $\sqrt{x^3-x}+\sqrt{4x-x^3}=\sqrt{-3x}$. En élevant au carré et simplifiant, on obtient

$$\sqrt{x^3-x}\sqrt{4x-x^3}=-3x,$$

puis, en élevant au carré, développant et regroupant, on a

$$x^4-5x^2+13=0.$$

C'est-à-dire que x^2 est racine de l'équation $y^2-5y+13=0$. Comme le discriminant du trinôme est $-27<0$, alors cette équation n'a pas de racine réelle, ce qui apporte la contradiction recherchée.
Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } (E_2) \text{ n'admet pas de solution strictement négative.}}$

---

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).

Pour $x\in\mathbb{R}_+$, $(E_2)\iff(E_1)$, donc

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E_2) \text{ sont } 0,\ 1 \text{ et } 2.}$$

Exercice 4 *Des suites à la Pell*
Soient les suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} P_0=0,\ P_1=1 \\ \forall n\geq 2,\ P_n=2P_{n-1}+P_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_0=2,\ Q_1=2 \\ \forall n\geq 2,\ Q_n=2Q_{n-1}+Q_{n-2} \end{cases}$$

On veut montrer que pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, $P_{m+n}=\frac{1}{2}\left(P_nQ_m+P_mQ_n\right)$.

1. Montrer le résultat pour $n=0$ et m quelconque.

Pour $m\in\mathbb{N}$, $\boxed{P_{m+0}}=P_m=\frac{1}{2}\left(0\times Q_m+P_m\times 2\right)=\boxed{\frac{1}{2}\left(P_0\times Q_m+P_m\times Q_0\right).}$

---

2. Montrer le résultat pour $n=1$ et m quelconque, en faisant une récurrence double sur m.

On pose, pour $m\in\mathbb{N}$, l'assertion

$$\boxed{\mathcal{A}_m:\quad P_{m+1}=\frac{1}{2}\left(Q_m+2P_m\right).}$$

Initialisation :
— pour $m=0$: $P_1 = 1 = \frac{1}{2}(2+2\times 0) = \frac{1}{2}(Q_0+2P_0)$, donc $\boxed{\mathcal{A}_0 \text{ est vraie};}$
— pour $m=1$: $P_2 = 2P_1+P_0 = 2 = \frac{1}{2}(2+2\times 1) = \frac{1}{2}(Q_1+2P_1)$, donc $\boxed{\mathcal{A}_1 \text{ est vraie.}}$
Hérédité : Supposons $\mathcal{A}_{m-2}$ et $\mathcal{A}_{m-1}$ pour un certain $m \geq 2$. Alors, en utilisant les deux hypothèses de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= 2P_m + P_{m-1} \\ &= 2P_{(m-1)+1} + P_{(m-2)+1} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} 2\times\frac{1}{2}(Q_{m-1}+2P_{m-1}) + \frac{1}{2}(Q_{m-2}+2P_{m-2}) \\ &= \frac{1}{2}\left((2Q_{m-1}+Q_{m-2}) + 2(2P_{m-1}+P_{m-2})\right) \\ &= \frac{1}{2}(Q_m+2P_m). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_m \text{ est vraie.}}$
On a donc montré par récurrence double que

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{N},\quad P_{m+1} = \frac{1}{2}(Q_m+2P_m) = \frac{1}{2}(P_1Q_m+P_mQ_1).}$$

---

3. Montrer le résultat pour m et n quelconques.

On fixe maintenant $m\in\mathbb{N}$ et on démontre le résultat par récurrence double sur n. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, l'assertion

$$\boxed{\mathcal{B}_n :\quad P_{m+n} = \frac{1}{2}(P_nQ_m+P_mQ_n).}$$

Initialisation : $\mathcal{B}_0$ est vraie par la question 1 et $\mathcal{B}_1$ est vraie par la question 2.
Hérédité : Supposons $\mathcal{B}_{n-2}$ et $\mathcal{B}_{n-1}$ pour un certain $n\geq 2$. Alors, en utilisant les deux hypothèses de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{m+n} &= 2P_{m+(n-1)} + P_{m+(n-2)} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} 2\times\frac{1}{2}(P_{n-1}Q_m+P_mQ_{n-1}) + \frac{1}{2}(P_{n-2}Q_m+P_mQ_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2}\left((2P_{n-1}+P_{n-2})Q_m + P_m(2Q_{n-1}+Q_{n-2})\right) \\ &= \frac{1}{2}(P_nQ_m+P_mQ_n). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est vraie.}}$
On a donc montré par récurrence double que $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{m+n} = \frac{1}{2}(P_nQ_m+P_mQ_n)$.
Ce raisonnement étant valable pour $m\in\mathbb{N}$ quelconque, on a finalement

$$\boxed{\forall m,n\in\mathbb{N},\quad P_{m+n} = \frac{1}{2}(P_nQ_m+P_mQ_n).}$$
