T1C7 - Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé (RSF)

I. RSF

1. Intérêt du RSF

- Théorème de Fourier : tout signal périodique pour sa décomposition comme une somme de fonctions sinusoïdales S(t) de période T

  $$S(t) = \Sigma_{\nu=0}^{+\infty} a_n \cos \omega_n t + a_n \sin \omega_n t$$

  Excalibur
  1
  On veut connaitre S(t) on sait que

  $$e(t) = a_0 \cos \omega_0 t + b_0 \sin \omega_0 t + \ldots$$

  $$S(t) = \Sigma e_n(t)$$

  alors $S(t) = \Sigma_n S_n(t)$ avec S_n la sortie de e_n donc on se restreint a étudier la réponse du système a un signal sinusoïdal.

2. Signaux étudiés

- Les signaux étudiés vont toujours vérifier l'équation différentielle de l'oscillateur amorti :

  $$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{S}\frac{ds}{dt} + {\omega_0}^2 S = {\omega_0}^2 e(t)$$

  e(t) est une excitation sinusoïdale extérieur par exemple $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$
- S_{part}(t) dépends du temps, on la cherche sous la même forme que e(t) $S_{part}(t) = S_n \cos(\omega t + \phi)$ S_{part} et e(t) ont la même pulsation. S_{part}

représente le RSF ce régime ne se dissipe pas car il est entretenu par e(t)

- S_H (t) est la solution de l'équation homogène identique a celle de l'oscillateur amorti $S_h(t) \to 0$ quand t devient grand
- Définition : Le RSF correspond au régime permanent du système quand l'excitation est de forme sinusoïdale.
- Propriété : Lorsque le régime transitoire s'est dissipé le signal oscille a la même fréquence que l'excitation.
  Donc pour connaître complètement $S_t = S_{part}(t) = S_n \cos(\omega t + \phi)$ il suffit de déterminer l'amplitude S_n et le déphasage ϕ .

$$\frac{dS^2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dS}{dt} + \omega_0{}^2 S = \omega_0{}^2 E_0 \cos(\omega t)$$

$$-S_n \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - S_n \frac{\omega_0 \omega}{Q} \sin(\omega t + \phi) + \omega_0{}^2 S_n \cos(\omega t + \phi) = \omega_0 E_0 \cos(\omega t$$

Pour résoudre ce système on utilise les notations complexes

II. Représentation complète des signaux sinusoïdaux

1. Rappels

- j tel que j² = -1

2. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

- Définition : Soit $S(t) = S_n \cos(\omega t + \phi)$ un signal sinusoïdal.
  On associe a S(t) un nombre complexe $\underline{S}$ tel que

$$S(t) = \mathrm{Re}(\underline{S})$$

et

$$\underline{S}(t) = S_n e^{j(\omega t + \phi)}$$

On définit aussi l'amplitude complexe $\underline{S_n} = S_n e^{j\phi}$

$$\underline{S}(t) = S_n \cos(\omega t + \phi) + jS_n \sin(\omega t + \phi)$$

Partie imaginaire : aucune signification physique

3. Dériver et intégrer en représentation complexe

$$\underline{S} = S_n e^{j(\omega t + \phi)}$$

a. dérivation

$$\frac{d\underline{S}}{dt} = S_n j\omega e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \times S_n e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \underline{S}$$

b. intégration

$$\int S\,dt = S_n \int e^{j(\omega t + \phi)}\,dt = S_n \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t + \phi)} + cste$$

Donc :

$$\int S\,dt = \frac{\underline{S}}{j\omega} = -\frac{j\underline{S}}{\omega}$$

c. conclusion

- Dériver un signal complexe revient a multiplier par $j\omega$
  $\frac{dS}{dt} = j\omega S$
  $\frac{d^2 S}{dt^2} = -\omega^2 S$
- Intégrer un signal complexe revient à diviser par $j\omega$
  $\int S(t)\,dx = \frac{1}{j\omega} S(t)$

4. Interprétation graphique

- Définition : Le vecteur de Fresnel est la représentation dans le plan complexe du signal sinusoïdal $S(t) = S_n \cos(\omega t + \phi)$
  Avec l'axe des reels comme origine des phases

Excalidraw 2.
C'est un vecteur ... à la vitesse angulaire ω

III. Circuit électrique en RSF

1. Impédances et admittances complexes

a. Résistance

- Définition : L’impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle est définie comme $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ où $\underline{U}$ tension aux bornes d'un dipôle en convention récepteur et $\underline{I}$ le courant de la maille.
- Définition : L’admittance complexe est definite par : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$
- Remarque :
  - Si $z = 0$ alors $\underline{U} = 0$, le dipole est un fil
  - Si $z \to +\infty$ alors $\underline{I} = 0$, le dipole est un interrupteur ouvert
- Propriété :
  - Le module de $\underline{Z}$ est appelé impédance réelle $\underline{Z} = |\underline{Z}| = \frac{U_n}{I_n}$
  - L'argument de $\underline{Z}$ correspond au déphasage entre la tension $\underline{U}$ et l'intensité $\underline{I}$ $\phi_Z = \phi_U - \phi_I$
  - $Re(Z) = R$ est la résistance su dipôle : $R = Z \cos \phi_Z$
  - $Im(Z) = X$ est la réactance $X = Z \sin \phi_{zZ}$
    Exclaidraw 3.

b. Condensateur

$$u(t) = U_n \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = -Cu_n\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\underline{U} = U_n e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$\underline{I} = CU_n j\omega e^{\omega j+\phi} = CU_n\omega e^{j(\omega t+\phi+\pi/2)}$$

$$\underline{Z_r} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_n e^{j(\omega t+\phi)}}{j\omega CU_n e^{j(\omega t+\phi)}}$$

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{C \times j\omega}$$

$$\underline{I} = Cj\omega \times \underline{U}$$

$$arg(\underline{Z_C}) = \phi_{\underline{Z_C}} = \phi_{\underline{U}} - \phi_{\underline{I}} = -\frac{\pi}{2}$$

c. Bobine

$$i(t) = I_n \cos(\omega t + \phi)$$

$$u(t) = -L\omega I_n \sin(\omega t + \phi)$$

$$\underline{I} = I_n e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\underline{U} = I_n j\omega L e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\underline{Z_L} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = jL\omega$$

$$arg(\underline{Z_L}) = \phi_{\underline{Z_L}} = \frac{\pi}{2}$$

d. Dépendances en fréquence

- Résistance :
  Aucune dépendance en fréquence
- Condensateur :
  BF : $\omega \to 0$ $z_c \to +\infty$ Interrupteur ouvert
  HF : $\omega \to +\infty$ $z_c \to 0$ Fil
- Bobine :
  BF : $\omega \to 0$ $z_L \to 0$ Fil
  HF : $\omega \to +\infty$ $z_L \to +\infty$ Interrupteur ouvert

2. Utilisation des impédances complexes

a. Lois de Kirchhoff

- Propriétés :
  Loi des nœuds :

$$\sum \underline{I}_{in} = \sum I_{out}$$

Avec $\underline{I}_{in}$ les intensités complexes qui arrivent sur un nœud et $\underline{I}_{out}$ celles qui en repartent

Loi des mailles :

$$\sum \epsilon_k \underline{U}_k = 0$$

Avec $\underline{U}_k$ les tensions complexes d'une maille et $\epsilon_k = 1$ si $\underline{U}_k$ est orientée comme la maille, $\epsilon_k = -1$ sinon.

b. Les associations de dipôles

- Propriétés : Pour des dipôles en série les impédances s'ajoutent :

$$\underline{Z_{eq}} = \sum \underline{Z}_i$$

pour des dipôles en parallèle les admittances s'ajoutent :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_i$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

Excaliburne 4:
impédance équivalentes?
R, L, et C sont en série

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \underline{Z}_{eq}$$

Dernière étape ...

excalibur 5 :
R, L et C sont en parallèle

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = \frac{\frac{1}{R} - j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

c. Les ponts diviseurs

- Propriété du pont diviseur de tension :
  Excalibur 6

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$

  Excalibur 7 :
- Exemple :

$$\underline{u_c} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

$$\underline{u_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{U}$$

- Propriété du pont diviseur de courant :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

IV. Réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale

1. Position du problème

Schema Owen

L'equa diff sur u_c :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + {\omega_0}^2u_c = \omega_0 e$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. RSF

- On cherche u_c en régime permanent en utilisant les notations complexes.

$$e(t) \leftrightarrow \underline{E} = E_m e^{j\omega t}$$

et on cherche $\underline{U}_c = U_m e^{j(\omega t + \phi)}$
et aussi $\underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \Phi)}$

3. Etude de $\underline{U_c}$

- On injecte la forme de U_c recherchée dans l'équation différentielle
^{222}Um(−ω^2)ej(ωt+ϕ)+ω0QUmjωej(ωt+ϕ)+ω0^{2}Umej(ωt+ϕ)=ω0^{2}Emejωt
Cette opération est valable pour tout instant ϵ.
^{222}−ω^{2}Umejϕ+jω0QωUmejϕ+ω0^{2}Umejϕ=ω0^{2}Em
On pose $\underline{U_m} = U_m e^{j\phi}$: amplitude complexe
^{22}Um—(ω0^2−ω2+jω0ωQ)=ω0^{2}Em
On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation réduite
^{2}U—m(1−x^2+jxQ)=Em
^{2}U—m=Em1−x^2+jxQ
^{2222}Um=|U—m|=Em(1−x^2)^2+x^{2}Q^2
^{2}ϕ=arg(U—m)=−arg(1−x^2+jxQ)
^{22}ϕ=−arctan(xQ(1−x^2))=−π2+arctan(1−x^{2}xQ)

4. Résonance en tension

a. Résonance d'un systeme

- Définition : Lorsqu'un systeme physique est soumis à une excitation sinusoïdale il existe des fréquences particulières appelées fréquences de résonances pour lesquelles l'amplitude de la réponse du système passe par un maximum.
On dit qu'il y a résonance.
- Exemple :
Instrument de musique

b. Existence d'une résonance en tension?

- On étudie U_m en fonction de ω et on cherche si U_m admet un maximum.
  2222Um=Em(1−x²)²+x²Q²
  U_m admet un max si son dénominateur admet un min et comme la racine carrée est une fonction strictement croissante on cherche si la fonction $f : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ admet un minimum.

  On dérive :

  $$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) + 2xQ^2$$

  $$f'(x) = 2x(1Q^2 - 2(1-x^2))$$

  On cherche $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ tq $f'(x) = 0$

  $$2x(1Q^2 - 2(1-x^2)) = 0$$

  RATTRAPER

  - Conclusion :
    La solution $x_1 = \frac{\omega}{\omega_0} = 0$ existe toujours mais n'a pas d'intérêt, car il n'y a pas de forçage sinusoïdal.
    - Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors x_2 est imaginaire et n'a pas de sens physique et il n'y a pas de maximum
      Excalibur 8
    - Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la solution $x_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ est reelle et positive dans ce cas la fonction admet 2 extremums :
      $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \geq 0$
      *$f(0) = 1$
      $f(x \to +\infty) = +\infty$
      Excaliburne 9
      $f(x)$ admet un minimum en x_2 donc U_n admet un maximum en x_2
      Excaliburne 10

  Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors U_m admet un maximum : u_c admet une résonance en :

²ω=ω01−12Q²

c. Etude de la résonance en tension

- Propriété :
  Pour le circuit RLC série, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R_T}$ alors le circuit présente une résonance à la pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

  à ω_r l'amplitude de u_c vaut :

$$U_{max} = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

  Plus Q est grand, plus U_{max} est grande.
- Définition
  Excaliburne 11
  La bande passante $\Delta\omega$ est la largeur du pic de résonance définie telle que :

$$\frac{max(U_n)}{\sqrt{2}} < U_n < max(U_n)$$

  ω_1 et ω_2 sont les pulsations de coupures telles que :

$$U_n(\omega_1) = U_n(\omega_2) = \frac{max(U_n)}{\sqrt{2}}$$

  On appelle acuité de la résonance de la grandeur $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ sans dimension.
  Plus Q est grand plus $\Delta\omega$ est petit. On parle de résonance aiguë

$$Q \gg 1$$

$$max(U_n) = E_n Q$$

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{Q}$$

d. Traces du module et de la phase de U_n

$$U_n = \frac{E_n}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\begin{cases} U_n = \frac{E_n}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \\ \phi = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) \end{cases}$$

- x = 0 : $U_n = E_n$ et $\phi = 0$
- x $\to +\infty$: $U_n \to 0$ et $\phi \to -\pi$

S'il y a résonance

$$U_n(x_r) = \frac{E_n Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Excalibur 12

5. Etude de l'intensité du courant en RSF

$$\underline{I} = I_n e^{j(\omega t + \Phi)}$$

excalibur 13

$$\underline{U_R} = R\underline{I}$$

$$\underline{Z_{eq}} = R + j\omega L + \frac{1}{JC\omega}$$

$$\underline{E} = \underline{Z_{eq}}\underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

$$\underline{I} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{CR\omega}\right)}$$

$$\underline{I} = \frac{E}{R}\frac{1}{1 + j\left(\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\underline{I} = \frac{E}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$I_n = \frac{E_n}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Amplitude de l'intensité

$$\Phi = -arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Phi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

Phase de l'intensité

6. Résonance en intensité

- On cherche les marximas de I_n cela revient à chercher les miniums de $f(x) = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

$$f'(x) = 2Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x_r^2 = 1 \Leftrightarrow x_r = \pm 1$$

Mais

$$x \geq 0 \Rightarrow x_r = 1 = \frac{\omega_r}{\omega_0}$$

$f(x)$ atteint un extremum n en x_1 = 1

- x = 0
  $f(0) \to +\infty$
- $x \to +\infty$
  $f(+\infty) = +\infty$

et $f(x) > 0$
Donc forcément $f(x_1)$ est un minimum
$\Leftrightarrow I_m(x_1)$ est un maximum

$$I_m(x_1) = \frac{E_n}{R} = max(I_n)$$

- Propriété
  Pour un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale il existe toujours une résistance en intensité pour $\omega_r = \omega_0$ à la résonance
  $max(I_n) = \frac{E_n}{R}$
  Donc $max(I_n) \alpha Q$
  la résonance est d'autant plus grande que l'amortissement est faible.
- Bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

$$I_n(\omega_1) = I_n(\omega_2) = \frac{max(I_n)}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\frac{E_n}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{E_n}{\sqrt{2}R}$$

$$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

$$x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}$$

$$x^2 - 1 = \pm\frac{x}{Q}$$

$$x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

$$x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

On ne regarde que les racine > 0

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{-1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Plus l'amortissement est faible plus la résonance est aigüe

Tracés de I_n et Φ

- x = 0
  $I_n \to 0$ et $\Phi \to \frac{\pi}{2}$
- $x \to +\infty$
  $I_n \to 0$ et $\Phi \to -\frac{\pi}{2}$
- $x = x_r = 1$
  $I_n(x_1) = \frac{E_n}{R}$ et $\Phi(x_1) = 0$

Excalibur 14

7. Détermination experimentale des paramètres.

Exclaibue 15

- On cherche la résonance en intensité $\Leftrightarrow$ on cherche ω tq l'ampliude de u_r est maximale
  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$
  Exclaibur 16
  Petit a petit on approche la pulsation de la résonance $\Rightarrow$ on en dédit :
  $\omega_0 = \omega_r$
  si $f_r = 1256 Hz$

- $\omega_0 = 2\pi f_r$ en rad/s
- Le facteur de qualité se trouve en tracant I_n en fonction de ω et en determinant la bande passante

V. Réponse d'un oscillateur mécanique sinusoïdale

1. position du problème

EXCLAIBUR 17
Ressort de raideur k et de longueur l_0
Force de frottement fluide de coeficient h
force exterieur x

ATTRAPER LE COURS

2. Resonance de l'élongation x(t)

a. Etude de l'élongation

$$\underline{x} = X_m e$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

On pose : $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$X_m = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

L'etude du module X_m est equivalent a l'etude de U_n la tension aux bornes de C

- Conclusion :
  X_m passe par une résonance ssi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ la pulsation de résonance vaut alors

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$\omega_r < \omega_0$ et elle dépend du facteur de qualité. Plus Q est grand, plus ω_r est proche de ω_0, plus l'acuité de resonance est aiguë.

b. Etude de la phase

$$\phi = -arg\left(1 - u^2 + j\frac{u}{Q}\right) = -\arctan\left(\frac{u}{Q(1-u^2)}\right)$$

- $\omega \to 0 : \phi = 0$
- $\omega \to +\infty : \phi = -\pi$
- $\omega_0 : \phi = -\frac{\pi}{2}$

Excalibur 18.

c. Bilan

- A basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ la masse suit le mouvement imposé par la force exterieure $l = 0$
- A Haute fréquance $\omega \gg \omega_0$ le système est en opposition de phase $\phi = -\pi \Rightarrow$ mouvement d'amplitude quasi nulle
- $Q \gg 1$

$$\omega_r \approx \omega_0$$

$$X_{maw} \approx \frac{QF_m}{\omega_0^2 m}$$

3. Résonance en vitesse

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\underline{V} = j\omega\underline{X}$$

L'étude de $\underline{V}$ reviens a l'étude de $\underline{I}$ dans le circuit RLC
Amplitude de la vitesse :

$$V_n = \frac{F_m}{m\omega_0}\frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$V_n = \frac{F_m}{m\omega_0}\frac{1}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+\frac{1}{Q^2}}}$$

$$\Phi = -\arctan\left(Q\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)$$

- $\omega \to 0^+$: $\Phi \to \frac{\pi}{2}$
- $\omega \to +\infty$: $\Phi = -\frac{\pi}{2}$
- $\omega \to \omega_0$ $\Phi = 0$
- Conclusion :
  Il y a toujours une resonance en vitesse en $\omega_r = \omega_0$ plus Q est grande plus la resonance est aiguë
  Excalibur 19.