DM11 mathématiques, autogéré pendant les vacances de Noël

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être argumentée, sous peine d'obtenir la note 0 *à cette question.*

I. Nombres premiers congrus à 3 modulo 4

On appellera **ici** nombre premier *de type* 1 (respectivement *de type* 3) un nombre premier p tel que le reste de la division euclidienne de p par 4 est 1 (respectivement 3). On veut montrer qu'il existe une infinité de premiers de type 3. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'y en a qu'un nombre fini n, qu'on note $3 = q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. On pose

$$N = 4q_2 \cdots q_n + 3$$

.

1. (a) Déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 à l'aide d'un algorithme vu en cours.
   (b) Donner sans justification les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_8$.
2. Montrer qu'un nombre premier impair est forcément de type 1 ou de type 3.
3. Montrer que N n'est pas divisible par 2.
4. Montrer que lorsqu'on divise par 4 un produit fini de premiers impairs de type 1, le reste est 1.
5. En déduire que N admet au moins un facteur premier de type 3.
6. Conclure.

II. Preuve combinatoire de l'infinitude des nombres premiers

Dans cette partie, on construit une preuve de l'infinitude des nombres premiers totalement différente de celle d'Euclide, qui repose sur des arguments combinatoires. Par conséquent, pour répondre aux questions de cette partie, on s'interdira d'utiliser l'argument d'Euclide.

On fixe $r \in \mathbb{N}^\star$ et $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ des nombres premiers. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note E_n l'ensemble des entiers strictement positifs et inférieurs ou égaux à n dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, *i.e.*

$$E_n = \left\{m \in [\![1,n]\!] \mid \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r, m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\right\}$$

et on note u_n le cardinal de E_n. On note aussi $A_n = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \leq n\right\}$.

1. On note, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $A_n^k = \left\{\alpha \in \mathbb{N} \mid p_k^\alpha \leq n\right\}$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $\mathrm{Card}\,(A_n^k) \leq \dfrac{\ln(n)}{\ln(p_k)} + 1 \leq \dfrac{\ln(p_r n)}{\ln(p_k)}$.
   (b) Montrer que $A_n \subset A_n^1 \times A_n^2 \times \cdots \times A_n^r$.
   (c) En déduire une constante positive C telle que : $\forall n \geq 1, \mathrm{Card}\,(A_n) \leq C(\ln(p_r n))^r$.
2. Exhiber une bijection de A_n vers E_n, en justifiant la bijectivité.
3. (a) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n < n$.
4. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

III. Preuve analytique de l'infinitude des nombres premiers

Dans cette partie, on construit une preuve de l'infinitude des nombres premiers totalement différente de celle d'Euclide et de la précédente, qui repose sur des arguments analytiques.

On fixe $n \geq 1$ et on reprend les notations de la partie II concernant les premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ et l'ensemble E_n.

1. (a) Montrer, par récurrence sur α, que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout nombre entier $m \geq 2$, $m^\alpha \geq \alpha$.
   (b) Montrer que $E_n \subset \left\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \ ; \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [\![0,n]\!]^r\right\}$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{m\in E_n}\frac{1}{m}\leq\prod_{k=1}^{r}\left(\sum_{\alpha_k=0}^{n}\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}\right)$.

3. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{\alpha_k=0}^{n}\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}$ et en déduire une constante M qu'on explicitera telle que $\quad\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \displaystyle\sum_{m\in E_n}\frac{1}{m}\leq M$.

4. (a) Soit $m\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que $\left(\forall x\in[m,m+1],\ \dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{m}\right)$ et en déduire par intégration que $\ln(m+1)-\ln(m)\leq\frac{1}{m}$.

   (b) Montrer que $\quad\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\geq\ln(n+1)$.

5. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

IV. Fonction ζ

1. *Définition de la fonction* ζ. On fixe $s\in]1,+\infty[$ et on note, pour $n\geq 1$, $S_n(s)=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}$.

   (a) Étudier la monotonie de la suite $(S_n(s))_{n\geq 1}$.

   (b) Pour $m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, montrer que $\dfrac{1}{m^s}\leq\displaystyle\int_{m-1}^{m}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}$.

   (c) En déduire que $S_n(s)\leq\dfrac{s}{s-1}$ pour tout $n\geq 1$, puis la convergence de la suite $(S_n(s))_{n\geq 1}$.

Ce résultat nous permet de définir la fonction $\zeta:\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \zeta(s)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(s)\end{array}\right.$.

On notera aussi, pour $s>1$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, $R_n(s)=\zeta(s)-S_n(s)$.

2. *Monotonie.* Montrer que la fonction ζ est décroissante. Cette décroissance est-elle stricte ? Jusitifier votre réponse.

3. *Limites.*

   (a) Montrer sans les calculer que les limites $\displaystyle\lim_{s\underset{>}{\longrightarrow}1}\zeta(s)=\ell_1$ et $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow+\infty}\zeta(s)=\ell_\infty$ existent, puis que $\ell_1\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ et $\ell_\infty\in[1,+\infty[$.

   (b) Déduire de la question 1c la valeur de ℓ_∞.

   (c) On se donne $A\geq 0$.

      i. Déduire de la partie précédente qu'il existe un $N_A\in\mathbb{N}^\star$ tel que $\displaystyle\sum_{m=1}^{N_A}\frac{1}{m}\geq A+1$.

      ii. Montrer alors qu'il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $s\in]1,1+\alpha]$, $S_{N_A}(s)\geq A$.

      iii. En déduire la valeur de ℓ_1.

4. *Continuité.* On fixe $a>1$ et on veut prouver la continuité de ζ en a. Pour cela, on se donne un $\varepsilon>0$.

   (a) Montrer qu'il existe un $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^\star$ tel que $R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) i. Montrer que, pour $s>1$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, $R_n(s)=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=n+1}^{k}\frac{1}{m^s}$.

      ii. En déduire, pour $h\in\left[\frac{1-a}{2},+\infty\right[$, que $|R_{N_\varepsilon}(a+h)-R_{N_\varepsilon}(a)|\leq R_{N_\varepsilon}\left(\frac{1+a}{2}\right)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0}(S_{N_\varepsilon}(a+h)-S_{N_\varepsilon}(a))=0$.

   (d) Conclure en utilisant la définition de la continuité.

5. *Dérivabilité.* On fixe $a>1$ et on veut prouver la dérivabilité de ζ en a.

   (a) Montrer que, pour $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x(x-t)e^t\,\mathrm{d}t=e^x-1-x$.

   (b) En déduire que pour $h\neq 0$ et $m\in\mathbb{N}^\star$, $\left|\dfrac{e^{-h\ln(m)}-1+h\ln(m)}{h}\right|\leq|h|\,(\ln(m))^2e^{|h|\ln(m)}$.

   (c) Montrer que, pour $h\neq 0$, la suite $\left((\ln(m))^2e^{-|h|\ln(m)}\right)_{m\geq 1}$ est bornée. On note C un majorant de cette suite, qu'on ne demande pas d'expliciter.

   (d) Montrer que, pour $h\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, $\left|\dfrac{S_n(a+h)-S_n(a)}{h}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{\ln(m)}{m^a}\right|\leq C\,|h|\,S_n(a-2\,|h|)$.

(e) Montrer qu'il existe un constante $\widetilde{C} > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a} \leq \widetilde{C} S_n\left(\frac{1+a}{2}\right)$ et en déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}\right)_{n \geq 1}$ converge.

(f) En déduire que ζ est dérivable en a et que $\displaystyle\zeta'(a) = -\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{\ln(m)}{m^a}$.

.

V. Identité d'Euler

On reprend ici les notations de la partie concernant la fonction ζ et on note $p_1 < p_2 < \ldots < p_n \ldots$ la suite infinie des nombres premiers. On fixe un réel $s > 1$.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\forall r, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \prod_{k=1}^{r} \frac{1 - \left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq S_{(p_1 p_2 \cdots p_r)^n}(s)$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\forall r \in \mathbb{N}^\star, \quad \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \zeta(s)$.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\forall r \in \mathbb{N}^\star,\ \forall n \geq \log_2(p_r), \quad \prod_{k=1}^{r} \frac{1 - \left(\frac{1}{p_k^s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \geq S_{p_r}(s)$.

   (b) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}\right)_{r \geq 1}$ converge et que $\displaystyle\zeta(s) = \lim_{r \to +\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$.