

**Programme de colle de la semaine 11 (du 11 au 15 décembre 2023)**

*Nota Bene* : Les élèves doivent revoir les méthodes de calcul du terme général et de la somme des premiers termes des suites suivantes :

- suites arithmétiques ;
- suites géométriques ;
- suites arithmético-géométriques ;
- suites vérifiant une relation de récurrence homogène d'ordre 2 à coefficients constants (mais pas de calcul de la somme des premiers termes dans le cas d'une racine double de l'équation caractéristique).

Les colleurs peuvent vérifier cette révision dans les exercices.

---

**Programme des exercices**

---

**Nombres réels et suites numériques****1 Rappels et compléments sur les nombres réels****1.1 Bornes supérieures dans  $\mathbb{R}$** 

- Rappel des définitions des bornes supérieure et inférieure d'une partie, lorsqu'elles existent.
- Une partie qui admet un plus grand (resp. petit) élément admet une borne supérieure (resp. inférieure) qui est égale à ce plus grand (resp. petit) élément.
- Si une partie  $A$  admet une borne supérieure, elle admet un plus grand élément ssi  $\sup(A) \in A$ .
- Si ces quantités existent,  $\inf(A) \leq \sup(A)$ , avec égalité ssi  $A$  est un singleton.
- Propriété de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.
- **Convention** : on convient de noter  $\sup(A) = +\infty$  (resp.  $\inf(A) = -\infty$ ) lorsque la partie  $A$  n'est pas majorée (resp. pas minorée).
- Cette convention est justifiée par l'introduction de  $\overline{\mathbb{R}}$ , avec le prolongement de l'ordre réel, dans lequel toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure, et pour lequel les parties de  $\mathbb{R}$  non majorées admettent comme borne supérieure  $+\infty$ .

**1.2 Archimédianité et approximations décimales**

- $\mathbb{N}$  n'est majoré par aucun réel.
- Le corps  $\mathbb{R}$  est **archimédien**, i.e.  $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, b < na$ .

- Toute partie de  $\mathbb{Z}$  bornée dans  $\mathbb{R}$  est finie.
- Toute partie de  $\mathbb{Z}$  non vide et majorée (resp. minorée) dans  $\mathbb{R}$  admet un plus grand (resp. plus petit) élément.
- Définition des parties entières inférieure et supérieure d'un réel.
- Approximations décimales de  $x$  par défaut ou excès à  $10^{-n}$  près.

### 1.3 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

- Tout intervalle ouvert non vide contient au moins un rationnel et un irrationnel.
- Conséquence : il contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.

### 1.4 Convexité

- Définition de la convexité d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
- Les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

## 2 Généralités sur les suites réelles

### 2.1 Définition et exemples

### 2.2 Propriétés générales des suites

- Suites majorées, minorées, bornées, caractérisation des suites bornées avec la valeur absolue.
- Suites croissantes, décroissantes, monotones, strictement ..., constantes, stationnaires.
- Suites périodiques, notion de période.

## 3 Limite d'une suite réelle

### 3.1 Définitions

#### 3.1.1 Limites finies

- Définition, reformulation en termes d'intervalles.
- Démonstration du fait que  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .
- Toute suite convergente est bornée.

#### 3.1.2 Limites infinies

- Définition, reformulation en termes d'intervalles.
- Démonstration du fait que  $\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

### 3.1.3 Unicité de la limite

## 3.2 Opérations sur les limites

### 3.2.1 Cas des limites finies

- Somme, produit, quotient, combinaison linéaire.
- Si  $u$  est bornée et  $\lim v = 0$ , alors  $\lim uv = 0$ .

### 3.2.2 Cas des limites infinies

- Somme d'une suite minorée par une suite tendant vers  $+\infty$ . Analogie en  $-\infty$ .
- Forme indéterminée " $-\infty + \infty$ "
- Si  $\lim u = \pm\infty$  et  $\lim v = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ , alors  $\lim uv = \operatorname{sgn}(\ell) \lim u$ ,
- Forme indéterminée  $\infty \times 0$ .
- Limite par valeurs strictement supérieures (inférieures).
- Inverse d'une limite infinie.
- Inverse d'une limite " $0^+$ " ou " $0^-$ ".

---

## Programme des questions de cours

---

- Comportement des suites  $(n^\alpha)_n$ , où le paramètre  $\alpha$  est réel.

### 3.3 Limites et ordre

- Passage à la limite dans une inégalité large. Cela ne conserve pas les inégalités strictes.
- Théorème de convergence par encadrement.
- Théorème de divergence par minoration ou majoration.
- Comportement des suites  $(a^n)_n$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

## 4 Suites monotones

- Théorème de la limite monotone.
- Définitions des suites adjacentes, théorème des suites adjacentes.

## 5 Suites extraites

- Définition d'une suite extraite de  $u : u \circ \varphi$ , avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, notée  $(u_{\varphi(n)})_n$ ,  $(u_{\varphi(k)})_k$  ou  $(u_{n_k})_k$ ,
- Une suite extraite d'une suite extraite de  $u$  est une suite extraite de  $u$ .
- Si une suite  $u$  tend vers une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors toute suite extraite de  $u$  tend aussi vers  $\ell$ .
- Si deux suites extraites d'une même suite  $u$  admettent des limites différentes, alors la suite  $u$  n'a pas de limite.
- Si les suites extraites de rangs pairs de de rangs impairs  $(u_{2k})_k$  et  $(u_{2k+1})_k$  tendent vers une **même limite**  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors la suite  $u$  tend aussi vers  $\ell$ .

## 6 Itérations de fonctions

Suites définies par

$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

- Définition pour tout  $n$  si  $u_0$  appartient à une partie  $E$  de  $D_f$  stable par  $f$  ( $f(E) \subset E$ ).
- Notion de point fixe de  $f$  et suite constante associée.
- Étude graphique : point fixes et itérations successives de  $u_0$  par  $f$ , conjectures sur la monotonie et les limites.
- Démonstration des conjectures de monotonie : cas “ $\forall x \in E, f(x) > x$ ” (resp.  $<$ ), démonstration par récurrence, ou autre.
- Démonstration des existences de limites le plus souvent par le théorème de la limite monotone.
- Pour les valeurs des limites, on peut utiliser le “théorème” suivant : si la suite est convergente de limite  $\ell$  et la fonction  $f$  est continue en  $\ell$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .
- Résultat “hors-programme” mais qu’il faut connaître et redémontrer dans les cas où il s’applique : si  $f$  est croissante sur une partie  $E$  de  $D_f$  stable par  $f$  et  $u_0 \in E$ , alors  $u$  est monotone.

## 7 Suites à valeurs complexes

- Définition de la limite analogue à celle des suites réelles, interprétation graphique (disques).
- Traduction en termes de parties réelles et imaginaires.
- Unicité de la limite par unicité de la limite dans  $\mathbb{R}$ .
- Suites complexes bornées, toute suite convergente est bornée.
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
- Théorème de Bolzano-Weierstraß complexe.

## CH11 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

### 1 Divisibilité

#### 1.1 Relation de divisibilité

Définition : pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a|b$  ss’il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $ak = b$ .

On remarque en particulier que tout entier divise 0 et que  $-1$  et  $1$  divisent tout entier.

Propriétés de cette relation binaire : réflexivité et transitivité sur  $\mathbb{Z}$ , pas d’antisymétrie, mais presque : deux entiers sont *associés* (i.e. codivisibles) ss’il sont égaux au signe près.

Conséquence : la divisibilité sur  $\mathbb{N}$  est une relation d’ordre non total, admettant un plus petit élément (1) et un plus grand élément (0).

Lien avec les lois de  $\mathbb{Z}$  :

- si  $d|a$  et  $d|b$ , alors  $d$  divise toute combinaison linéaire entière de  $a$  et  $b$ ;
- si  $a|b$  et  $c|d$ , alors  $ac|bd$ .

## 1.2 Division euclidienne

**Théorème 1**  $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, b-1 \rrbracket, a = bq + r$ .

**Définition 2** Avec les notations du théorème, l'écriture  $a = bq + r$  s'appelle la *division euclidienne* de  $a$  par  $b$ , l'entier relatif  $q$  s'appelle le *quotient* de cette division euclidienne et l'entier naturel  $r$  s'appelle le *reste* de cette division euclidienne.

**Proposition 3** Avec les notations précédentes, on a, **dans le cas où**  $b > 0$ ,

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \quad \text{et} \quad r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

## 2 Diviseurs et multiples communs

### 2.1 Cas des entiers naturels

**Définition 4** Pour  $a, b \in \mathbb{N}$ , on note  $\text{CD}(a, b)$  l'ensemble de leurs *diviseurs communs*, c'est à dire l'ensemble des entiers naturels qui divisent à la fois  $a$  et  $b$ .

Remarquons que  $\text{CD}(b, a) = \text{CD}(a, b)$ .

On a alors le résultat fondateur de l'algorithme d'Euclide à venir :

**Lemme 5** (*Lemme clé de l'algorithme d'Euclide.*)

Soient  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . Alors,

$$\text{CD}(a, b) = \text{CD}(b, r).$$

On décrit maintenant l'algorithme d'Euclide. Il prend en entrée  $a, b \in \mathbb{N}$  et consiste en la construction d'une suite finie  $r_{-1}, r_0, \dots, r_N, r_{N+1}$  d'entiers naturels définie par récurrence de la manière suivante :

- **Initialisation** : on pose  $r_{-1} = a$  et  $r_0 = b$ .
- **Hérédité** : supposant avoir construit jusqu'au terme  $r_k$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  :
  - si  $r_k = 0$ , on s'arrête et on pose  $N = k - 1$  ;
  - sinon, on note  $r_{k+1}$  le reste de la division euclidienne de  $r_{k-1}$  par  $r_k$ .

La terminaison de cet algorithme est assurée car la suite  $(r_k)_{k \geq 0}$  est une suite d'entiers naturels strictement décroissante (par définition de la division euclidienne) et ne peut donc pas être infinie. On a alors  $r_{N+1} = 0$ .

En utilisant le lemme clé précédent et une récurrence immédiate, on a alors

$$\text{CD}(a, b) = \text{CD}(r_{-1}, r_0) = \text{CD}(r_0, r_1) = \dots = \text{CD}(r_N, r_{N+1}) = \text{CD}(r_N, 0).$$

Or  $\text{CD}(r_N, 0)$  est l'ensemble des diviseurs de  $r_N$ , puisque tout entier naturel divise 0, donc cet ensemble admet  $r_N$  comme plus grand élément pour l'ordre de la divisibilité.

On a donc prouvé le

**Théorème 6** (*Existence du PGCD et son calcul par l'algorithme d'Euclide*)

Pour tous  $a, b \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $\text{CD}(a, b)$  de leurs diviseurs (positifs) communs possède un plus grand élément au sens de la divisibilité, qu'on note  $a \wedge b$  et qu'on appelle le **PGCD** (plus grand commun diviseur) de  $a$  et  $b$ .

De plus,  $a \wedge b$  est l'avant-dernier reste obtenu dans l'algorithme d'Euclide. Dans le cas où  $(a, b) \neq (0, 0)$ , il est non nul et c'est donc le "dernier reste non nul" de l'algorithme.

**Remarque 7** Comme  $\text{CD}(b, a) = \text{CD}(a, b)$ , il s'ensuit que  $b \wedge a = a \wedge b$ .

**Lemme 8** (Lien entre divisibilité et ordre usuel)

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout diviseur de  $n$  est inférieur ou égal à  $n$  au sens de l'ordre usuel.

qui permet une interprétation (restreinte) du PGCD en terme de l'ordre usuel :

**Proposition 9** (PGCD et ordre usuel)

Pour  $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $a \wedge b$  est aussi le plus grand des diviseurs communs de  $a$  et  $b$  au sens de l'ordre usuel.

**Remarque 10** Cela n'est pas le cas pour  $a = b = 0$ , puisque 0 n'est pas le plus grand élément de  $\mathbb{N}$  pour l'ordre usuel.

Par ailleurs, lors de l'algorithme d'Euclide effectué sur  $a$  et  $b$ , on voit facilement que tous les  $r_k$  s'écrivent comme combinaisons linéaires entières (i.e. à coefficients entiers **relatifs**) de  $a$  et  $b$ , par récurrence double finie rapide : c'est trivialement le cas pour  $a$  et  $b$  eux mêmes et si c'est le cas pour  $r_{k-2}$  et  $r_{k-1}$ , comme  $r_k$  s'écrit comme combinaison linéaire entière de  $r_{k-2}$  et  $r_{k-1}$  par la division euclidienne de reste  $r_k$ , alors il s'écrit aussi comme combinaison linéaire entière de  $a$  et  $b$ . En particulier, c'est le cas de  $r_N = a \wedge b$  et on a la

**Proposition 11** (Relation de Bézout dans  $\mathbb{N}$ )

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = au + bv.$$

**Remarque 12** Les coefficients  $u$  et  $v$  ne sont pas uniques. On peut voir facilement qu'il existe en fait une infinité de relations de Bézout possibles.

La méthode précédente à partir de l'algorithme d'Euclide nous en fournit une.

L'obtention de cette relation de Bézout en même temps que le calcul du PGCD est appelé *algorithme d'Euclide étendu*. On le décrit un peu plus précisément.

Pour cela on introduit des notations ;

— on note  $q_k$  ( $1 \leq k \leq N + 1$ ) le quotient de la division euclidienne de  $r_{k-2}$  par  $r_{k-1}$  qui s'écrit alors

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k;$$

— on note, à chaque étape,  $u_k$  et  $v_k$  les coefficients de la combinaison linéaire entière de  $a$  et  $b$  obtenue qui vaut  $r_k$ .

L'algorithme d'Euclide étendu est alors celui-ci :

1. Initialisation :  $r_{-1} = a$ ,  $u_{-1} = 1$ ,  $v_{-1} = 0$  et  $r_0 = b$ ,  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et  $k = 0$
2. Boucle : tant que  $r_k \neq 0$ ,
  - $k \leftarrow k + 1$
  - Calculer  $q_k$  et  $r_k$  en faisant la division euclidienne de  $r_{k-2}$  par  $r_{k-1}$
  - Calculer  $u_k = u_{k-2} - q_k u_{k-1}$  et  $v_k = v_{k-2} - q_k v_{k-1}$
3. Résultat ( $k$  vaut alors  $N + 1$ ) : renvoyer  $r_{k-1} = a \wedge b$  et  $u_{k-1} = u$ ,  $v_{k-1} = v$  qui vérifient  $au + bv = a \wedge b$ .

Lors de l'exécution, on voit que pour calculer les données du rang  $k$ , on n'a plus besoin de celles des rangs inférieurs à  $k - 2$ , donc il est totalement inutile de stocker toutes les données, contrairement à la méthode usuelle de "remontée" de l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout. Voici une implémentation en Python de cet algorithme :

```

def EuclideEtendu(a,b):
    up, vp, u, v = 1, 0, 0, 1
    while b!=0:
        q = a//b
        a, b = b, a%b
        up, u = u, up-q*u
        vp, v = v, vp-q*v
    return a, up, vp

```

Pour le calcul à la main, il est recommandé de présenter les résultats dans un tableau.

On peut aussi, surtout dans les petits cas, effectuer une “remontée classique” de l’algorithme d’Euclide.

## 2.2 Cas des entiers relatifs

**Définition 13** Pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on appelle PGCD de  $a$  et  $b$  le nombre

$$a \wedge b = |a| \wedge |b|.$$

**Proposition 14** (Caractérisation)

Pour tous  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d = a \wedge b$  si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

1.  $d$  divise  $a$  et  $b$ ;
2. tout diviseur commun de  $a$  et  $b$  divise  $d$ .

**Remarque 15** Lorsque  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $a \wedge b$  est encore le plus grand des diviseurs (relatifs) communs de  $a$  et  $b$  au sens de l’ordre usuel.

**Proposition 16** (Relation de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ )

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge b = au + bv.$$

**Proposition 17**

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad (ka) \wedge (kb) = |k| (a \wedge b).$$

## 2.3 Nombres premiers entre eux

Définition, théorème de Bézout, théorème de Gauss, théorème de divisibilité par un produit lorsque deux facteurs divisent un même nombre et sont premiers entre eux, forme irréductible des nombres rationnels : existence et unicité.

Toutes les définitions et tous les énoncés sont **exigibles**.

## Démonstrations de cours exigibles

- Théorème des gendarmes ;
- Théorème de la limite monotone : seulement le cas d’une suite croissante et majorée dans  $\mathbb{R}$  ;
- Théorème des suites adjacentes (convergence des deux suites et limite commune) ;
- “Principe” de la démonstration par dichotomie du théorème de B.-W. réel (sans la formalisation) ;
- Démonstration du théorème de B.-W. complexe à partir du cas réel ;
- Lemme-clé, description, terminaison et correction de l’algorithme d’Euclide ;
- Calcul du PGCD de 3080 et 525 et de coefficients vérifiant la relation de Bézout simultanément par l’algorithme d’Euclide étendu, en présentant les résultats dans un tableau.