Exercices sur les espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et e une base de E.
On considère l'application de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(x,y) = ax_1y_1 + 2x_1y_2 + bx_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3,$$

où on note (x_1,x_2,x_3) (resp. (y_1,y_2,y_3)) les coordonnées de x (resp. y) dans la base e.

1. Pour quelles valeurs de a et b l'application Φ est-elle bilinéaire symétrique ?

On considère dorénavant des valeurs de a et b telles que ce soit le cas.

2. Trouver des scalaires α, β, γ tels que
$$\forall x \in E, \quad \Phi(x,x) = \alpha x_1^2 + \beta(x_1+x_2)^2 + \gamma(x_1+x_3)^2.$$
3. Pour quelles valeurs de a et b l'application Φ est-elle un produit scalaire ?
4. Exprimer $\Phi(x,y)$ à l'aide des coefficients α, β, γ et déterminer une base Φ-orthonormale sans utiliser le procédé de Gram-Schmidt.

Cauchy-Schwarz

Exercice 2 Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{tr}\,(AB+BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}\,(A^2)\mathrm{tr}\,(B^2)$.

Exercice 3 Soient $a > 0$ un réel et f une fonction de classe C^1 sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$.

1. Exprimer la fonction f à l'aide d'une intégrale et en déduire l'inégalité $\displaystyle\int_0^a f^2 \leq \frac{a^2}{2}\int_0^a (f')^2$.

2. On cherche ici à améliorer l'inégalité précédente. Pour $c \in]0, \frac{\pi}{2a}[$, on considère la fonction g_c définie pour $t \in [0,a]$ par $g_c(t) = c\tan(c(a-t))$.

a. Remarquer que g_c vérifie une équation différentielle simple.

b. En considérant $\int_0^a (f' - fg_c)^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^a f^2 \leq \frac{4a^2}{\pi^2}\int_0^a (f')^2$.

Gram-Schmidt

Exercice 4 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, trouver une BON de l'hyperplan vectoriel d'équation $2x + 3y + 4z + 5t = 0$.

Déterminant de Gram

Exercice 5 On se place dans un espace vectoriel euclidien E de dimendion n et on pose, pour $p \leq n$ et $x = (x_i)_{i=1}^p \in E^p$, $Gram(x) = \det\big((< x_i, x_j >)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}\big)$.

1. Montrer que $Gram(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si la famille x est liée. On pourra exprimer $Gram(x)$ à l'aide de la matrice M de x dans une BON d'un sous-espace judicieux de dimension p.
2. Soit $e = (e_i)_{i=1}^p$ une famille libre telle que $\forall i \in [\![1,p]\!], x_i \in \mathrm{Vect}\,(e)$. Montrer que $Gram(x) = (\det_e(x))^2 Gram(e)$.
3. Si $F = \mathrm{Vect}\,(e)$ et $a \in E$, montrer que
$$d(a,F)^2 = \frac{Gram(e_1, e_2, \ldots, e_p, a)}{Gram(e_1, e_2, \ldots, e_p)}.$$

Dimension infinie

Exercice 6 Soit (P_n) une suite de polynômes réels orthogonaux pour le produit scalaire L^2 sur $[0,1]$ ($< P,Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)dx$) et tels que $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{d}^\circ(P_n) = n)$. Montrer que les polynômes P_n sont scindés sur $\mathbb{R}$, à racines simples et comprises dans l'intervalle $]0,1[$. Indication : montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis raisonner par l'absurde.

"Isométries"

Exercice 7 Soient E et F deux espaces préhilbertiens réels, et $f : E \to F$ une application telle que :
- $f(E)$ soit un sous-espace vectoriel de F ;
- $f(0) = 0$;
- $\forall x,y \in E,\ \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_F$.

1. Montrer que $\quad \forall x,y \in E,\ \langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x,y \rangle_E$.
2. Montrer que f est linéaire.

Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 8 Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une BON, calculer la distance entre $w(1,1,1)$ et le plan $\mathcal{P}$ engendré par $u(1,-1,2)$ et $v(-1,2,1)$.

Exercice 9 Dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel, trouver toutes les droites passant par le point $P(4,1)$ et tangentes au cercle de centre $A(2,3)$ et de rayon 1.

Exercice 10 Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une BON, calculer la distance entre $v(1,2,3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation cartésienne :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & +3z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Exercice 11 Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'une BON, déterminer une représentation cartésienne de $\mathcal{D}'$ projetée orthogonale de la droite $\mathcal{D}$ de représentation cartésienne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

Exercice 12 Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée e, que dire de $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 13 Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée B, soit H un hyperplan d'équation $ax + by + cz = 0$ (a, b et c non tous nuls). Quelle est la matrice de la symétrie par rapport à H et parallèlement à $H^\perp$ dans la base B ?