Chapitre 4 : Circuits linéaires du premier ordre

TD 4

Capacités exigibles
Utiliser les relations entre $i(t)$ et $u(t)$ pour un condensateur ou une bobine. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Interpréter et utiliser la continuité de l'intensité du courant transervant une bobine. Etablir l'équation différentielle d'un circuit (R, C) ou (R, L) à une ou deux mailles soumis à un échelon de tension. Distinguer régime transitoire et régime permanent sur une courbe expérimentale. donner l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser un bilan énergétique.

Ex. 1. Bobine réelle (Imp***/Niv*)

Une bobine est un enroulement très serré de fil conducteur. A titre d'exemple, il y a 8,17 m de fil dans cette petite bobine d'inductance L=0,180 mH. Or un fil a une résistance faible mais non nulle, ici par exemple, on atteint environ $r = 2,5\,\Omega$. D'où le fait qu'on modélise une bobine réelle comme une résistance en série avec une bobine idéale.

1 Déduire de ce schéma équivalent la relation entre u (tension aux bornes de la bobine réelle) et i (courant qui la traverse).

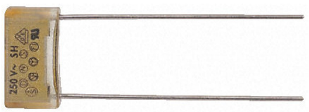
2 Quel est donc le modèle équivalent d'une bobine réelle en basse fréquence (ou en continu) ? en haute fréquence ?

3 On alimente cette bobine par un générateur de tension idéal de f.e.m. E, pendant une certaine durée $\tau = \frac{L}{r}$. Faire un bilan de puissance sur ce circuit. En déduire l'expression de l'énergie qui sera stockée dans la bobine W_B, et celle qui sera dissipée par effet Joule W_J.

Réponses : 1. $u(t) = L\frac{di}{dt} + ri$; 2. BF : résistance seule, HF, interrupteur ouvert ; 3. $W_E = \frac{1}{2}\frac{E^2}{r}\tau\left(1 - e^{-1}\right)^2$; $W_{generateur} = \frac{E^2}{r}\tau e^{-1}$; $W_J = W_{generateur} - W_E$

Ex. 2. Condensateur réel (Imp***/Niv*)

Un condensateur est un ensemble de deux plaques conductrices de très grandes dimensions, et placées très proches d'une de l'autre. Elles sont séparées par un isolant, qui empêche presque totalement le passage du courant d'une armature à l'autre.



Il existe une résistance résiduelle, dite résistance de fuite. On modélise donc un condensateur réel comme une résistance de grande valeur (ici $R = 4000\,\mathrm{M\Omega}$) en parallèle d'un condensateur idéal de capacité C (ici $C = 330\,\mathrm{nF}$).

1 Déduire de ce schéma équivalent la relation entre i (courant entrant dans le condensateur réel) et u (tension à ses bornes).

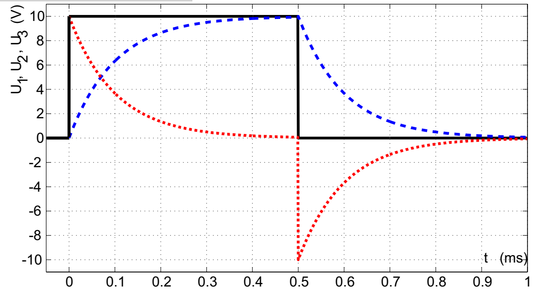
2 Quel est donc le modèle équivalent d'un condensateur réel en basse fréquence (ou en continu) ? en haute fréquence ?

Réponses : 1. $i(t) = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$; 2. BF : résistance seule, HF, fil

---

Ex. 3. Lecture de relevés expérimentaux (Imp**/Niv*)

On a réalisé expérimentalement un circuit RC alimenté par un générateur basse fréquence supposé idéal. On relève à l'aide d'une carte d'acquisition les tensions $e(t)$ aux bornes du GBF , $u_R(t)$ aux bornes de la résistance de valeur R, et $u_C(t)$ aux bornes du condensateur de capacité $C = 200\,\mathrm{nF}$.
Le GBF est réglé sur une tension créneaux, de fréquence f.



1 Attribuer à chacune des courbes sa tension : $e(t)$, $u_C(t)$ et $u_R(t)$.

2 Donner toutes les caractéristiques du signal émis par le GBF : période T (et fréquence f), valeurs minimale et maximale de la tension créneau.

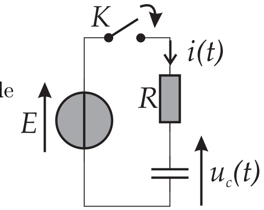
3 Mesurer τ, le temps caractéristique du circuit RC (justification graphique attendue).

4 En déduire la valeur de la résistance R présente dans ce circuit.

5 Dessiner rapidement l'allure des signaux obtenus, si on remplace la résistance R par une résistance de valeur $2\,R$.

Réponses : 1. courbe noire $e(t)$; courbe bleue tirets $u_(t)$; courbe rouge pointillés $u_R(t)$ 2. $T = 1\,\mathrm{ms}$, $f = 1\,\mathrm{kHz}$, $e_{min} = 0\,\mathrm{V}$, $e_{max} = 10\,\mathrm{V}$; 3. $\tau \approx 0,12\,\mathrm{ms}$; 4. $R = \frac{\tau}{C} = 600\,\Omega$ 5. nouveau $\tau = 0,24\,\mathrm{ms}$

Ex. 4. Aspects énergétiques d'un circuit RC (Imp**/Niv**)



On considère la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension de valeur E.
Le condensateur, de capacité C, est initialement déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$. On fera apparaître le temps caractéristique τ.

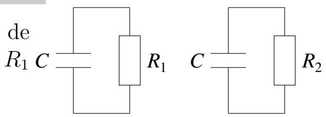
2 La résoudre, pour la charge du condensateur. En déduire les expressions de la charge $q(t)$ du condensateur ainsi que de l'intensité $i(t)$ dans le circuit.

3 Réaliser un bilan de puissance pour le circuit, à un instant t quelconque. Identifier chacun des termes qui y apparaissent.

4 En déduire un bilan énergétique pour l'ensemble de la charge : énergie fournie par le générateur W_{gene}, énergie dissipée dans la résistance $\mathcal{E}_R$, et énergie emmagasinée par le condensateur $\mathcal{E}_C$.
Est-ce que ces expressions dépendent de la valeur de la résistance R du circuit ?

Ex. 5. Comparaison de deux circuits RC (Imp**/Niv*)

On considère deux condensateurs de même capacité C et de même charge initiale q_0, l'un aux bornes d'une résistance R_1 et l'autre aux bornes d'une résistance $R_2 > R_1$.



1 Comparer les temps $t_{1,90}$ et $t_{2,90}$ nécessaires pour que les condensateurs soient déchargés à 90 % .

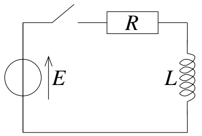
2 Ce résultat serait-il modifié si on considérait une décharge à 60 % ?

3 Comparer à un instant donné la tension aux bornes des condensateurs.

4 Comparer l'énergie totale dissipée au cours de la décharge.

Réponses : 1. $t_{1,90} < t_{2,90}$; 2. même chose que 1. ; 3. $u_{1,C} = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{R_1C}}$, $u_{2,C} = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{R_2C}}$, $u_{1,C}(t) \leq u_{2,C}(t)$; 4. énergie totale dissipée identique dans les deux circuits.

Ex. 6. Temps de montée (Imp**/Niv*)

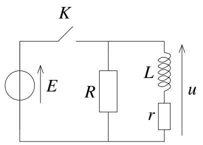


On étudie l'établissement du courant dans un circuit RL série alimenté par une source idéale de tension de f.e.m. E constante (*cf.* schéma). Le circuit est fermé à $t = 0$. On appelle temps de montée l'intervalle de temps entre les instants t_1 et t_2 où l'intensité vaut respectivement 10 % et 90 % de sa valeur maximale.

▷ Exprimer ce temps de montée en fonction des paramètres du problème.

Réponses : $t_2 - t_2 = \tau \ln(9)$

Ex. 7. Surtension aux bornes d'une bobine (Imp**/Niv**)



Une source idéale de tension de f.e.m. constante E alimente un circuit constitué de l'association en parallèle d'une résistance R et d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance r.

1 L'interrupteur est fermé depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. Déterminer les intensités dans chaque branche ainsi que la tension u.

2 À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ puis par la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine.

3 Résoudre l'équation différentielle de votre choix, afin de déterminer l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine.

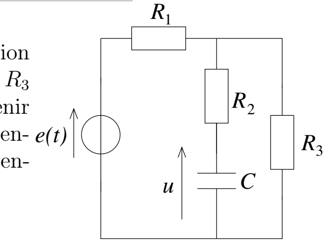
4 A. N. : $E = 1$ V, $R = 100\ \Omega$, $L = 0,11$ H, $r = 10\ \Omega$, représenter $u(t)$.

5 À quel instant la tension aux bornes de l'interrupteur K est-elle maximale (en valeur absolue) ? Que vaut-elle alors ?

6 D'où provient l'énergie dissipée dans les résistances une fois que le générateur est mis hors circuit ? La calculer.

Réponses : 1. $i = \frac{R+r}{Rr}E$, $i_R = E/R$, $i_r = E/r$, $u = R$; 2. $\tau = \frac{L}{R+r}$, $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$ et $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$; 3. $u(t) = -\frac{R}{r}Ee^{-t/\tau}$; 4. $u_K = u_{K,max} = E$ en $t = 0$; 6. énergie emmagansinée par la bobine : $E_J = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{r^2}$

Ex. 8. Un autre modèle d'un condensateur réel (Imp*/Niv***)



On peut modéliser un condensateur réel par l'association d'un condensateur idéal C avec deux résistances (R_2 et R_3 sur le circuit ci-contre), où les résistances sont là pour tenir compte des fuites et des chutes de tension dans un condensateur non idéal. Associé à une résistance R_1, un tel condensateur donne donc un circuit RC un peu plus complexe.

On suppose que le signal d'entrée est un échelon de tension : $e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = E$ si $t \geq 0$, et que le condensateur est initialement déchargé.

1 Sans résoudre aucune équation différentielle, déterminer ce que valent les courants et la tension u

- à $t \to +\infty$ (charge terminée) ;

- à $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur).

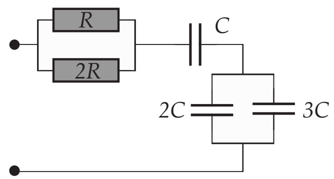
2 Déterminer en fonction du temps : la tension u aux bornes du condensateurs, puis les intensités parcourant les trois résistances.

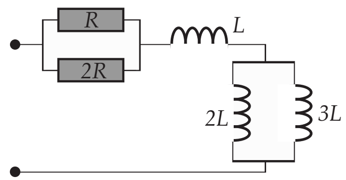
3 Que vaudra l'énergie dissipée pendant toute la charge du condensateur, c'est-à-dire entre $t = 0$ et $t \to +\infty$?

Réponses : 1. à $t \to +\infty$: $i_2 = 0$, $i_1 = i_3 = \frac{E}{R_1+R_3}$, $u = \frac{R_3}{R_1+R_3}E$; à $t = 0^+$: $u = 0$, $i_1 = \frac{R_2+R_3}{R_2R_3+R_1R_2+R_1R_3}E$, $i_2 = \frac{R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}E$, $i_3 = \frac{R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}E$; 2. $u(t) = \frac{R_3}{R_1+R_3}E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_3}C$; $E_J = +\infty$

Ex. 9. Constantes de temps (Imp**/Niv***)

Déterminer les constantes de temps des circuits suivants :





Réponses : 1er circuit : $\tau = \frac{5}{9}RC$; 2e circuit : $\tau = \frac{33}{10}\frac{L}{R}$
