DS2 de mathématiques, partie calcul, vendredi 6 octobre 2023, (2h00)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Barème sur 120 points :

- Exercice 1 (28 pts)
  1. 1 ($\frac{(n-1)^2n^2}{4}$)
  2. 5 = 1 (formule binôme) + 1 (triangle Pascal) + [3] ($x^6+12x^5y+60x^4y^2+160x^3y^3+240x^2y^4+192xy^5+64y^6$)
  3. 4 = 1 ($x^5-(-2)^5$) + 1 (formule de Bernoulli) + [2] ($x^4-2x^3+4x^2-8x+16$)
  4. 3 = 1 (formule du binôme) + [2] (résultat = 42)
  5. 4 = 1 (mot "télescopage") + 1 ($2k+2=2(k+1)$) + 1 (bonne formule) + 1 (bon rés 1G)
  6. 7 = [2] ($\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k$) + 1 (sortir $\frac{1}{k}$) + 1 (linéarité ou décalage) + 1 ($\sum j = \ldots$) + [2] ($n(n+3)/4$)
  7. 4 = 1 (idée Bernoulli) + 1 (formule correcte) + 1 (facteur entier) + 1 (rédaction)
- Exercice 2 (27 pts)
  1. 6 = 2 ($1-\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) +1 ($z_0=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) + 1 ($=\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}$) + 1 ($e^{z_0}=\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) + 1 ($=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$)
  2. 4 = 1 ($\sin^6(x)=\left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^6$) + 1 ($-\frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x}-6\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-20+15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}-6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right)$) + 1 ($-\frac{1}{32}\cos(6x)+\frac{3}{16}\cos(4x)-\frac{15}{32}\cos(2x)+\frac{5}{16}$) + 1 ($-\frac{1}{192}\sin(6x)+\frac{3}{64}\sin(4x)-\frac{15}{64}\sin(2x)+\frac{5x}{16}+C$)
  3. 8 = 1 (dire "réc lin homog d'ordre 2 à coef constants") + 1 ($2r^2-(1+4i)r+2i=0,\ \Delta=-15-8i$) + [2] ($=(1-4\mathrm{i})^2$) + 1 ($r_1=\frac{1}{2},\ r_2=2i$) + 1 ($u_n=\frac{\lambda}{2^n}+\mu(2\mathrm{i})^n$) + [2] ($\lambda=2,\ \mu=1$)
  4. 9 = 1 (dire "arithmético-géom") + 1 (chercher le point fixe) + 1 ($\ell=\mathrm{i}-1$) + 1 ($(v_n-\ell)_n$ géom, $q=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$) + 1 ($v_n=\mathrm{i}-1+2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$) + 1 ($1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$) + 1 ($v_n=\mathrm{i}-1+2^{n+1}e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$) + [2] ($v_{10}=-1025+\mathrm{i}\left(1-1024\sqrt{3}\right)$)
- Exercice 3 (5pts) :
  1. 1 ($(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)\in(\mathbb{Z}+\mathrm{i}\mathbb{Z})$)
  2. 2 ($n^2+m^2=(n+\mathrm{i}m)(n-\mathrm{i}m)$)
  3. 2 ($z=(n+\mathrm{i}m)(p+\mathrm{i}q)$ et $z\overline{z}$)
- Exercice 4 (25 pts)
  1. 5 = [2] (distances égales) + [3] (angle)
  2. 10 = 1 (écrire le système) + 1 (méthode de résolution) + [2] ($\alpha=-2\mathrm{j}^2$) + [2] ($\beta=0$) + 1 ($\alpha=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$) + 1 (centre O) + 1 (hom rapport 2) + 1 (rot angle $\pi/3$)
  3. 5 = [2] ($F(C_0)=C$) + [2] (distances égales par mult par 2) + 1 (conservation de l'angle)
  4. 5 = [3] (première égalité) + [2] (deuxième égalité)
- Exercice 5 : 5 pts = 1 ($\mathrm{Re}(\cdot)$) + 2 (appliquer binôme) + 1 ($2\cos(x/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}$) + 1 ($(2\cos(x/2))^n\cos(nx/2)$)
- Exercice 6 (30 pts) :
  1. 10 = 1 (mot "polyn") + 1 (mot "composition") + 1 ($D_{x\longmapsto\sqrt{2+x^2}}=\mathbb{R}$) + 1 (mot "somme") + 1 (mot "composition") + 1 ($D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 3x+\sqrt{2+x^2}\geq 0\right\}$) + 1 (faire une disj de cas) + 1 (cas $x\geq 0$) + [2] (cas $x<0$, dont 1 pour les justif des équiv)
  2. 7 = 1 ($\sqrt{\cdot}$ dériv sur $\mathbb{R}_+^\star$) + 1 ($2+x^2>0$) + 1 (dériv sur $\mathbb{R}$ par comp) + 1 ($]-1/2,+\infty[$) + [2] ($f'(x)$) + 1 (signe et stricte croissance)
  3. 10 = 1 (idée de quant conj) + [2] (la "bonne" $\sqrt{2+x^2}-3x$) + [2] (simplifications) + [2] (justifications) + [3] (construction de $\lim=+\infty$)
  4. 3 = 1 (former le taux d'acct) + 1 (montrer qu'il tend vers $+\infty$) + 1 (conclure non dériv)

Exercice 1 *Calculs sommatoires*

1. Donner sans justification la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1}k^3$, pour $n\in\mathbb{N}^\star$.

$$\boxed{\frac{(n-1)^2n^2}{4}.}$$

---

2. Déterminer l'expression développée explicite de $(x+2y)^6$, pour $x,y\in\mathbb{C}$.

En construisant les lignes du triangle de pascal (le faire sur la copie) jusqu'à l'indice 6, puis en effectuant les multiplications, on trouve

$$\boxed{(x+2y)^6 = x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6.}$$

---

3. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5+32}{x+2}$ coïncide avec une fonction polynôme sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, qu'on explicitera.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la formule de Bernoulli donne $x^5 + 32 = x^5 - (-2)^5 = (x-(-2))(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$. En divisant par $x+2$ lorsque $x \neq -2$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad \frac{x^5+32}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.}$$

---

4. Calculer **efficacement** un **seul** coefficient binomial pour trouver le coefficient de x^5 dans $\left(2^{1/5} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^9$.

On a, par la formule du binôme de Newton,

$$\left(2^{1/5} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(2^{1/5} \cdot x\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^{9-k},$$

donc le coefficient cherché est

$$\binom{9}{5} \left(2^{1/5}\right)^5 \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^4 = \binom{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 3} = 3 \times 2 \times 7 = \boxed{42.}$$

---

5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{499} \left((2k+2)^3 - (2k)^3\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{499} \left((2k+2)^3 - (2k)^3\right) = \sum_{k=0}^{499} \left((2(k+1))^3 - (2k)^3\right) = (2 \times 500)^3 - (2 \times 0)^3 = \boxed{10^9.}$$

---

6. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}.}$$

---

7. Est-ce que $2023^{2005} - 1966^{2005}$ est un multiple de 19 ?

Par la formule de Bernoulli,

$$2023^{2005} - 1966^{2005} = (2023 - 1966) \sum_{k=0}^{2004} 2023^{2004-k} 1966^k = 57p = 19 \times 3p,$$

avec $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\boxed{2023^{2005} - 1966^{2005} \text{ est un multiple de 19.}}$

Exercice 2 *Calculs complexes*

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $z_0 = \pi\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^5}$, puis faire de même avec e^{z_0}.

La forme trigonométrique de z_0 est obtenue ainsi :

$$z_0 = \pi\frac{\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{\pi}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}$$

et donc sa forme algébrique est

$$z_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}.}$$

On a alors la forme trigonométrique de e^{z_0} :

$$\mathrm{e}^{z_0} = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}$$

et sa forme algébrique :

$$\mathrm{e}^{z_0} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}{2}.}$$

---

2. Linéariser l'expression $\sin^6(x)$ et en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^6(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^6(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^6 \\
&= -\frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x}-6\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-20+15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}-6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5}\left(\cos(6x)-6\cos(4x)+15\cos(2x)-10\right) \\
&= \boxed{-\tfrac{1}{32}\cos(6x)+\tfrac{3}{16}\cos(4x)-\tfrac{15}{32}\cos(2x)+\tfrac{5}{16}.}
\end{aligned}$$

En primitivant terme à terme, on obtient les primitives suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\int \sin^6(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{192}\sin(6x)+\frac{3}{64}\sin(4x)-\frac{15}{64}\sin(2x)+\frac{5x}{16}+C\ (C\in\mathbb{R}).}$$

---

3. Donner la forme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient $(\forall n \in \mathbb{N},\quad 2u_{n+2}-(1+4i)u_{n+1}+2iu_n = 0)$.
On calculera explicitement les constantes dans le cas où $u_0 = 3$ et $u_1 = 1+2\mathrm{i}$.

Ces suites vérifient une récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, qu'on résout par la méthode du cours. L'équation caractéristique est

$$2r^2-(1+4i)r+2i = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = -15+8i-16i = -15-8i$. Résolvons l'équation $\delta^2 = \Delta$ en posant $\delta = x+iy$:

$$\delta^2 = \Delta \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 &=& -15 \\ 2xy &=& -8 \\ x^2+y^2 &=& 17(=\sqrt{225+64}). \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 &=& 1 \\ y^2 &=& 16 \\ xy &<& 0 \end{array}\right.$$

dont les solutions sont $\pm(1-4\mathrm{i})$. Les deux racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont donc

$$r_1 = \frac{1+4i+1-4i}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+4i-1+4i}{4} = 2i.$$

Comme les deux racines sont distinctes, le théorème du cours assure que les suites vérifiant la récurrence sont les suites de terme général $\boxed{u_n = \dfrac{\lambda}{2^n}+\mu(2\mathrm{i})^n}$ avec λ et μ deux constantes complexes.

Dans le cas où $u_0 = 3$ et $u_1 = 1+2\mathrm{i}$, les constantes sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{llcl} \lambda & +\mu &=& 3 \\ \frac{1}{2}\lambda & +2\mathrm{i}\mu &=& 1+2\mathrm{i}, \end{array}\right.$$

donc $\boxed{\lambda = 2 \text{ et } \mu = 1,}$ *i.e.*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{1-n} + (2\mathrm{i})^n}$$

---

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1+\mathrm{i}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{3}(1+i) + (1+\mathrm{i}\sqrt{3})v_n\right)$.
Calculer le terme général de cette suite, puis la forme algébrique de v_{10}.

La suite est une suite arithmético-géométrique qui n'est pas arithmétique. On commence donc par chercher le point fixe de la récurrence. Comme $\ell = \sqrt{3}(1+i) + (1+\mathrm{i}\sqrt{3})\ell$, alors

$$\boxed{\ell = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \mathrm{i} - 1.}$$

On sait alors d'après le cours que la suite $(v_n - \ell)_n$ est géométrique de raison $q = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \ell + (v_0 - \ell)q^n = \boxed{\mathrm{i} - 1 + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n.}$$

Pour calculer $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$, on met $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique : $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Ainsi,

$$v_{10} = \mathrm{i} - 1 + 2^{11}e^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}} = \mathrm{i} - 1 + 2048\, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \boxed{-1025 + \mathrm{i}\left(1 - 1024\sqrt{3}\right).}$$

Exercice 3 *Calculs avec les entiers de Gauss*
On note $G = \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entières.

1. Montrer que le produit de deux éléments de G est encore dans G.

Pour $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = \boxed{(ac-bd) + \mathrm{i}(ad+bc) \in (\mathbb{Z}+\mathrm{i}\mathbb{Z})}$, car $\mathbb{Z}$ est stable par les opérations $+$ et $\times$.

---

2. Pour $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, exprimer n^2+m^2 comme le produit de deux éléments de G.

$\boxed{n^2 + m^2 = (n+\mathrm{i}m)(n-\mathrm{i}m).}$

---

3. En déduire que le produit de deux sommes de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers.

Soient $n,m,p,q \in \mathbb{Z}$. On pose $\underline{z = (n+\mathrm{i}m)(p+\mathrm{i}q)}$, $\underline{x = \mathrm{Re}(z)}$ et $\underline{y = \mathrm{Im}(z)}$. D'après la première question, $\boxed{x \in \mathbb{Z}}$ et $\boxed{y \in \mathbb{Z}}$. Par la deuxième question :

$$(n^2+m^2)(p^2+q^2) = (n+\mathrm{i}m)(n-\mathrm{i}m)(p+\mathrm{i}q)(p-\mathrm{i}q) = z\bar{z} = \boxed{x^2+y^2.}$$

Exercice 4 *Calculs géométriques*
On se place dans le plan affine euclidien orienté usuel, muni d'un ROND.
On dit qu'un triangle PQR est *direct* si l'angle $\widehat{QPR}$ admet une mesure dans $]0,\pi[$.
On note A_0, B_0, C_0, A, B, C les points d'affixes respectifs $1,\ \mathrm{j},\ \mathrm{j}^2,\ a = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},\ b = -2,\ c = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Montrer que le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral direct.

On donne trois méthodes, de la plus élémentaire à la plus élégante :
Méthode 1, basique.
On a

$$\mathrm{d}(B_0,C_0) = \left|\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}\right| = |\mathrm{j}| \cdot |\mathrm{j}-1| = |\mathrm{j}-1| = \mathrm{d}(A_0,B_0)$$

et

$$\mathrm{d}(C_0,A_0) = \left|1-\mathrm{j}^2\right| = \left|\mathrm{j}^3 - \mathrm{j}^2\right| = \left|\mathrm{j}^2\right| \cdot |\mathrm{j}-1| = |\mathrm{j}-1| = \mathrm{d}(A_0,B_0),$$

donc le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral.

De plus

$$\begin{array}{rcll} \widehat{B_0A_0C_0} & \equiv & \operatorname{Arg}\left(\frac{\mathrm{j}^2-1}{\mathrm{j}-1}\right) & [2\pi] \\ & \equiv & \operatorname{Arg}(\mathrm{j}+1) & [2\pi] \\ & \equiv & \operatorname{Arg}\left(-\mathrm{j}^2\right) & [2\pi] \\ & \equiv & \frac{\pi}{3} & [2\pi]. \end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{le triangle } A_0B_0C_0 \text{ est équilatéral direct.}}$$

Méthode 2, plus expéditive.
En posant

$$Z = \frac{z_{C_0} - z_{A_0}}{z_{B_0} - z_{A_0}},$$

on sait que

$$|Z| = \frac{d(A_0, C_0)}{d(A_0, B_0)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} Z \equiv \widehat{B_0A_0C_0} \ [2\pi].$$

Or,

$$Z = \frac{\mathrm{j}^2-1}{\mathrm{j}-1} = \mathrm{j}+1 = -\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}},$$

donc

$$d(A_0, C_0) = d(A_0, B_0) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} Z \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$$

i.e.

$$\boxed{\text{le triangle } A_0B_0C_0 \text{ est équilatéral direct.}}$$

Méthode 3, plus élégante.
Comme

$$\frac{z_{C_0} - z_{A_0}}{z_{B_0} - z_{A_0}} = \frac{\mathrm{j}^2-1}{\mathrm{j}-1} = \mathrm{j}+1 = -\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}},$$

C_0 est l'image de B_0 par la rotation de centre A_0 et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc

$$\boxed{\text{le triangle } A_0B_0C_0 \text{ est équilatéral direct.}}$$

---

2. Déterminer **explicitement** l'unique similitude directe envoyant A_0 sur A et B_0 sur B. sous la forme d'une composée d'une rotation et d'une homothétie qui commutent.

On note F cette similitude directe et $f : z \longmapsto \alpha z + \beta$ sa traduction complexe.
On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \\ f(j) & = & -2, \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \alpha & +\beta & = & 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \\ \mathrm{j}\alpha & +\beta & = & -2, \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \alpha & +\beta & = & 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \\ (1-\mathrm{j})\alpha & & = & 3+\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad (L_2 \to L_1 - L_2), \end{array}\right.$$

donc

$$\boxed{\alpha =} \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{j}} = 2\frac{1+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\mathrm{j}} = 2\frac{1-\mathrm{j}^2}{1-\mathrm{j}} = 2(1+\mathrm{j}) = \boxed{-2\mathrm{j}^2.}$$

et

$$\boxed{\beta =} 1+\mathrm{i}\sqrt{3} - \alpha = -2\mathrm{j}^2 + 2\mathrm{j}^2 = \boxed{0.}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = -2\mathrm{j}^2 z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} z.}$$

En particulier, comme $-2\mathrm{j}^2 \neq 1$, F n'est pas une translation et $\boxed{\text{son centre est l'origine } O}$, car d'affixe 0, unique point fixe de f.
Comme son rapport complexe $-2\mathrm{j}^2$ n'est ni réel, ni de module 1, F n'est ni une homothétie, ni une rotation.
En notant $H_{O,2}$ l'homothétie de centre O et de rapport 2 et $R_{O,\frac{\pi}{3}}$ la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$,

$$\boxed{F = H_{O,2} \circ R_{O,\frac{\pi}{3}} = R_{O,\frac{\pi}{3}} \circ H_{O,2}.}$$

---

3. Calculer $F(C_0)$ et en déduire que le triangle ABC est équilatéral direct.

Comme $f(\mathrm{j}^2) = -2\mathrm{j}^4 = -2\mathrm{j} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = c$, alors $\boxed{F(C_0) = C.}$

Par ailleurs, comme F est une similitude directe de rapport complexe $-2\mathrm{j}^2$, elle multiplie les distances par $\left|-2\mathrm{j}^2\right| = 2$, donc $\mathrm{d}(B,C) = 2\,\mathrm{d}(B_0,C_0) = 2\,\mathrm{d}(A_0,B_0) = \mathrm{d}(A,B)$ et de même $\mathrm{d}(C,A) = \mathrm{d}(A,B)$, donc le triangle ABC est équilatéral.

De plus, par définition des similitudes directes, $\widehat{BAC} = \widehat{B_0A_0C_0}$, donc ce triangle est direct.

Ainsi

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral direct.}}$$

---

4. Montrer que $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$ et $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.

Comme $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^3\mathrm{j} = \mathrm{j}$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$,

$$\boxed{a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c =}(\alpha + \beta) + \mathrm{j}(\alpha\mathrm{j} + \beta) + \mathrm{j}^2(\alpha\mathrm{j}^2 + \beta) = \alpha(1 + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}) + \beta(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2) = \boxed{0}$$

et

$$\boxed{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2} = (\alpha(\mathrm{j}-1))^2 + (\alpha(\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}))^2 + (\alpha(\mathrm{j}^3 - \mathrm{j}^2))^2 = \alpha^2(\mathrm{j}-1)^2(1 + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}) = \boxed{0.}$$

Exercice 5 *Calcul mixte*

Montrer, pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$.

Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

La formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}},$$

donc, en prenant les parties réelles,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

Exercice 6 *Une fonction*

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3x + \sqrt{2 + x^2}}$.

1. Déterminer soigneusement son domaine de définition.

La fonction polynôme $x \longmapsto 2 + x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de la racine carrée étant $\mathbb{R}_+$, par composition, le domaine de définition de $x \longmapsto \sqrt{2 + x^2}$ est

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 + x^2 \geq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Par addition d'une fonction polynôme, on obtient une fonction définie sur $\mathbb{R}$, puis, par composition avec la fonction racine carrée, le domaine de définition de f est

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + \sqrt{2 + x^2} \geq 0\right\}.$$

Raisonnons alors par disjonction de cas :

— pour $x \in \mathbb{R}_+$, $3x + \sqrt{2 + x^2} \geq 0$ comme somme de deux termes positifs ou nuls ;

— pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} 3x + \sqrt{2 + x^2} \geq 0 &\iff \sqrt{2 + x^2} \geq -3x \\ &\iff 2 + x^2 \geq 9x^2 \quad \left(\text{car } x \leq 0 \text{ et } 2 + x^2 \geq 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \quad x^2 \leq \frac{1}{4} \\ &\iff \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad (\text{car } x \leq 0)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, pour x réel, $x \in D_f$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$ ou $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$, *i.e.*

$$\boxed{D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\,.}$$

---

2. En prouvant sa dérivabilité, puis calculant sa dérivée, sur un intervalle ouvert convenable, déterminer les variations de f.

Comme les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ 2 + x^2 > 0\right)$, on obtient, par composition puis somme de fonctions dérivables, que la fonction $x \longmapsto 3x + \sqrt{2+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis, encore par composition,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable au moins sur l'ensemble } \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + \sqrt{2+x^2} > 0\right\}.}$$

Pour x réel, en remarquant que $\sqrt{2+x^2} > 0$ et en prenant des inégalités strictes dans les inégalités de la question précédente, on obtient que

$$3x + \sqrt{2+x^2} > 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\,.$$

Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, on en déduit, par composition, que

$$\boxed{f \text{ est dérivable au moins sur } \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

Pour $x > -\frac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{3 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}}{2\sqrt{3x + \sqrt{2+x^2}}} = \boxed{\frac{x + 3\sqrt{2+x^2}}{2\sqrt{2+x^2}\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}}}$$

et $x + 3\sqrt{2+x^2} > -\frac{1}{2} + 3\sqrt{2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Comme $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est un intervalle, la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Comme de plus f est continue par construction à l'aide de fonctions continues, elle est en particulier continue en $-\frac{1}{2}$, donc la stricte croissance s'étend à l'intervalle fermé :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \left[-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

---

3. Montrer que $\dfrac{\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}}{2x+1}$ a une limite quand x tend vers $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^+$, qu'on déterminera.

Pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right]$, $1 + 2x > 0$, puis $\sqrt{2+x^2} - 3x \neq 0$ (par stricte positivité), donc

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}}{2x+1} &= \sqrt{\frac{3x+\sqrt{2+x^2}}{(2x+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2+x^2}+3x\right)\left(\sqrt{2+x^2}-3x\right)}{(2x+1)^2\left(\sqrt{2+x^2}-3x\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2-8x^2}{(2x+1)^2\left(\sqrt{2+x^2}-3x\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1+2x)(1-2x)}{(2x+1)^2\left(\sqrt{2+x^2}-3x\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2-4x}{\sqrt{2+x^2}-3x} \cdot \frac{1}{2x+1}} \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs strictement supérieures, $2x+1$ tend vers 0 par valeurs strictement positives par combinaison linéaire de limites, puis $\frac{1}{2x+1}$ tend vers $+\infty$ par inverse de limite.

Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto \frac{2-4x}{\sqrt{2+x^2}-3x}$ est continue en $-\frac{1}{2}$ par <u>opérations usuelles et composition</u>, donc elle tend, lorsque x tend vers $-\frac{1}{2}$, vers

$$\frac{2-4\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}-3\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} > 0.$$

Par <u>produit</u> de limites, la quantité sous la racine tend vers $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$, on obtient finalement, par <u>composition</u> de limites,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \longrightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}}{2x+1} = +\infty.}$$

---

4. La fonction f est-elle dérivable en $-\dfrac{1}{2}$?

On note $T_{-\frac{1}{2}}f$ la fonction taux d'accroissement de f au point $-\frac{1}{2}$. On a alors, pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right]$,

$$T_{-\frac{1}{2}}f(x) = \frac{f(x)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{f(x)}{x+\frac{1}{2}} = 2\frac{\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}}{2x+1} \underset{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } -\tfrac{1}{2}.}$$

Cette limite prouve aussi que le graphe de f admet une tangente verticale au point $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
