Suites numériques

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

On rappelle oralement les définitions des ensembles de nombres

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

I Rappels et compléments sur les nombres réels

1 Borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 $\bigoplus$ Se rappeler les différentes propriétés qui font de $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ un corps totalement ordonné, ainsi que, en français puis formellement, les notions de minorants, majorants, parties minorées, majorées, bornées, plus petit et plus grand élément, borne inférieure et supérieure.

Remarque 2 L'exercice précédent nous rappelle en particulier le fait suivant : pour montrer qu'un réel b est la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, il faut montrer deux choses :
— que b est un majorant de A : $\forall x \in A, x \leq b$.
— que b est plus petit que tous les majorants : $\forall M \in \mathbb{R}, ((\forall x \in A, x \leq M) \Longrightarrow b \leq M)$.

Exemples 3

1. L'ensemble des majorants de $]-2,1]$ est $[1,+\infty[$, dont le plus petit élément est 1, donc $\sup(]-2,1]) = 1$. L'ensemble de ses minorants est $]-\infty,-2]$, dont le plus grand élément est -2, donc $\inf(]-2,1]) = -2$.
2. La partie $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure qui est 0 : en effet, l'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est $\mathbb{R}_-$, qui admet 0 comme plus grand élément. En revanche, il est intuitivement clair que $\mathbb{N}$ n'est pas majorée (dans $\mathbb{R}$), donc elle n'admet pas de borne supérieure. Cependant, la démonstration du fait que $\mathbb{N}$ n'est majorée par aucun réel repose sur une propriété subtile de $\mathbb{R}$ que nous allons voir bientôt, elle même conséquence de la propriété de la borne supérieure.
3. La partie vide $\emptyset$ de $\mathbb{R}$ est majorée par tout réel M : $\forall x \in \emptyset, x \leq M$ (car une proposition qui commence par $\forall x \in \emptyset, \ldots$ est toujours vraie, comme nous l'avions vu dans le chapitre sur le langage mathématique). Comme $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus petit élément, $\emptyset$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$. De la même manière, $\emptyset$ n'admet pas de borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

On remarque sur les deux exemples précédents un fait qui est général :

Proposition 4

Une partie qui admet un plus grand (resp. petit) élément admet une borne supérieure (resp. inférieure) qui est égale à ce plus grand (resp. petit) élément.

Démonstration: Démontrons le dans le cas d'un plus grand élément : soit $A \subset \mathbb{R}$ admettant un plus grand élément b. Alors, tout majorant de A est supérieur ou égal à b, puisque $b \in A$. Réciproquement, si $M \geq b$, alors, pour tout $x \in A$, $x \leq b \leq M$, donc M majore A. L'ensemble des majorants de A est donc $[b, +\infty[$, qui admet comme plus petit élément b, donc $b = \sup(A)$. □

Ce résultat admet une réciproque partielle :

Proposition 5

Si $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) b alors $b \in A$ ssi $b = \max(A)$ (resp. $b = \min(A)$).

Démonstration: Comme vu dans le chapitre sur les inégalités dans $\mathbb{R}$, un majorant de A qui appartient à A est par définition son plus grand élément. La réciproque et triviale par définition du plus grand élément. □

On remarque aussi un fait qui semble naturel :

Proposition 6

Lorsqu'une partie A de $\mathbb{R}$ admet à la fois une borne inférieure et une borne supérieure, on a $\inf(A) \leq \sup(A)$, avec égalité ssi A est un singleton.

Démonstration: À faire en exercice. □

Remarque 7 L'inégalité précédente est fausse en général sur un ensemble ordonné, comme on l'a déja vu précédemment pour la partie ensemble vide de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$, L'ensemble vide est la seule partie pouvant mettre en défaut cette inégalité.

On remarque par ailleurs sur les exemples précédents deux obstructions à l'existence d'une borne supérieure :

— une partie non majorée de $\mathbb{R}$ n'admet pas de borne supérieure ;

— le partie vide n'admet pas de borne supérieure.

Un fait fondamental et caractéristique de $\mathbb{R}$ est que ce sont les seules obstructions, comme le montre la propriété suivante qu'on **admet** faute de construction de l'ensemble $\mathbb{R}$:

Théorème 8 **(Propriété de la borne supérieure)**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Et sa conséquence :

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque 9 Cette propriété est caractéristique de $\mathbb{R}$ dans le sens suivant : *à isomorphisme près*, il existe un unique corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure. (Un *isomorphime* est une bijection qui préserve la structure : ici il s'agit de bijections strictement croissantes qui préservent addition et multiplication. La tournure de phrase précédente signifie alors qu'entre deux corps totalement ordonnés vérifiant la propriété de la borne supérieure, il existe toujours un isomorphisme).

Remarque 10 En restreignant l'ordre à $\mathbb{Q}$, on obtient le corps totalement ordonné $(\mathbb{Q},+,\times,\leq)$. Il **ne vérifie pas** la propriété de la borne supérieure ! On peut en effet démontrer facilement (à l'aide de propriétés qu'on verra plus loin dans le chapitre) que la partie $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ n'admet ni borne inférieure ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, bien qu'elle soit non vide, minorée et majorée.

C'est pour cette raison qu'on fait de l'analyse sur $\mathbb{R}$ et non sur $\mathbb{Q}$, car plusieurs résultats fondamentaux, comme par exemple le théorème de la limite monotone, reposent sur la propriété de la borne supérieure.

Convention : on convient de noter $\sup(A) = +\infty$ (resp. $\inf(A) = -\infty$) lorsque la partie A n'est pas majorée (resp. pas minorée).

Cette convention est justifiée par les propriétés de la relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$, dont on rappelle le définition :

Définition 11 On définit $\mathbb{R} \sqcup \{-\infty,+\infty\}$, qu'on munit d'une relation d'ordre en prolongeant celle de $\mathbb{R}$: on décide que $-\infty$ est inférieur (strictement) à tout réel et $+\infty$ est supérieur (strictement) à tout réel (et bien sûr $-\infty < +\infty$).

On a alors la situation plus esthétique suivante ;

Proposition 12 (Propriété de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure.

De plus, pour $A \subset \mathbb{R}$:

— *si A est non vide et majorée,* $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = \sup_{\mathbb{R}}(A)$ *;*

— *si A est non majorée,* $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = +\infty$ *;*

— $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(\emptyset) = -\infty$.

Démonstration: C'est une conséquence facile de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 13 Certains lecteurs pourront cependant constater avec effroi que dans ce contexte,

$$\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(\emptyset) = -\infty < +\infty = \inf_{\overline{\mathbb{R}}}(\emptyset).$$

2 Archimédianité et approximations décimales

Une première conséquence de la propriété de la borne supérieure est la suivante :

Théorème 14 *$\mathbb{N}$ n'est majoré par aucun réel.*

Démonstration: Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathbb{N}$ soit majoré dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{N} \neq \emptyset$, alors $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure b. Comme b majore $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est stable par addition, on a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 \leq b$$

ce qui se réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq b-1.$$

On a ainsi trouvé un majorant de $\mathbb{N}$ qui est strictement plus petit que sa borne supérieure, contradiction. □

Cela se généralise immédiatement en disant que le corps est *archimédien* :

Corollaire 15 *(Archimédianité du corps $\mathbb{R}$)* $\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ b < na.$

Démonstration: Le réel $\frac{b}{a}$ ne majore pas $\mathbb{N}$, par le théorème précédent, d'où l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b}{a} < n$. Le résultat s'ensuit en précisant que $a > 0$. □

Il y a aussi d'autres conséquences très pratiques :

Corollaire 16

1. *Une partie de $\mathbb{Z}$ est majorée (resp. minorée, bornée) dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est dans $\mathbb{Z}$.*
2. *Toute partie de $\mathbb{Z}$ bornée dans $\mathbb{R}$ est finie.*
3. *Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée (resp. minorée) dans $\mathbb{R}$ admet un plus grand (resp. plus petit) élément.*

Démonstration:

1. Soit $A \subset \mathbb{Z}$ majorée par un certain $M \in \mathbb{R}$. D'après le théorème, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < n$ et qui donc majore A. Si A est minorée dans $\mathbb{R}$, on applique ce qu'on vient de démontrer à $-A$ et $-A$ est majorée dans $\mathbb{Z}$, donc A est minorée dans $\mathbb{Z}$ (tout cela fonctionne car $\mathbb{Z}$ est stable par passage à l'opposé). En appliquant ces deux résultats, si A est bornée dans $\mathbb{R}$, elle l'est dans $\mathbb{Z}$. Les trois réciproques de ces résultats sont évidentes.
2. Si $A \subset \mathbb{Z}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, elle l'est dans $\mathbb{Z}$ par le résultat précédent, donc elle est incluse dans un intervalle d'entiers $[\![p, q]\!]$, qui lui est fini, donc A est finie.
3. Soit $A \subset \mathbb{Z}$ non vide et majorée dans $\mathbb{R}$. Comme $A \neq \emptyset$, on peut prendre un élément a de A. La partie B de $\mathbb{Z}$ définie par $B = A \cap [a, +\infty[$ est minorée par a et majorée car A l'est, donc elle est bornée dans $\mathbb{R}$, donc finie par ce qui précède. Comme elle est finie et non vide (puisque $a \in B$), elle admet un plus grand élément b. Comme $B \subset A$, $b \in A$. Par ailleurs, pour tout $x \in A$, on a deux cas. Soit $x < a$ et comme $a \in B$, $a \leq b$, d'où $x \leq b$. Soit $x \geq a$ et dans ce cas, $x \in B$ donc $x \leq b$. Dans les deux cas, $x \leq b$, donc b majore A. Ainsi $b = \max(A)$. On obtient l'autre résultat comme précédemment en appliquant celui-ci à $-A$.

□

Ces résultats permettent alors de définir les parties entières d'un nombre réel x : les deux ensembles $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ et $\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$ sont deux parties de $\mathbb{Z}$, la première majorée (par x) et la deuxième minorée (par x), donc la première admet un plus grand élément et la deuxième un plus petit élément, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 17 Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *partie entière inférieure* de x le nombre

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} = \max(\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$$

et *partie entière supérieure* de x le nombre

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\} = \min(\mathbb{Z} \cap [x, +\infty[).$$

Lorsqu'on parle de *partie entière* sans préciser, il s'agit de la partie entière inférieure.

Exemples 18 $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, mais attention $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lceil -\pi \rceil = -3$ et $\lfloor 42 \rfloor = \lceil 42 \rceil = 42$.

Exercice 19 Tracer les graphes des deux fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$.

On a clairement :

Proposition 20
Si $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

On a d'ailleurs une caractérisation classique des parties entières :

Proposition 21 ***(Caractérisation des parties entières)***
Pour $x \in \mathbb{R}$,
$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
$\lceil x \rceil$ est l'unique entier n tel que $n-1 < x \leq n$.

Ces fonctions permettent d'approcher par défaut et par excès les réels par des entiers. Si on veut plus de précision, on peut approcher les réels par des nombres décimaux avec plus ou moins de décimales, ce qui est possible en utilisant une fois encore le corollaire précédent :

Définition 22 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'*approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près* est

$$\max \left\{ \frac{k}{10^n} ; k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{k}{10^n} \leq x \right\} = \max \left(\left(\frac{1}{10^n} \mathbb{Z} \right) \cap]-\infty, x] \right) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

L'*approximation décimale de x par excès à 10^{-n} près* est

$$\min \left\{ \frac{k}{10^n} ; k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \leq \frac{k}{10^n} \right\} = \min \left(\left(\frac{1}{10^n} \mathbb{Z} \right) \cap [x, +\infty[\right) = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}.$$

Exemples 23

1. On a $\sqrt{2} \in]1,41 ; 1,42[$, donc l'approximation décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-2} près est $1,41$ et son approximation décimale par excès à 10^{-2} près est $1,42$.
2. On a $-\pi \in]-3,1416 ; -3,1415[$, donc l'approximation décimale de $-\pi$ par défaut à 10^{-4} près est $-3,1416$ et son approximation décimale par excès à 10^{-4} près est $-3,1415$.
3. Cependant, pour $x = 1,41$, son approximation décimale par défaut à 10^{-n} près et son approximation décimale par excès à 10^{-n} sont toutes deux égales à x dès que $n \geq 2$.

Remarque 24

1. Attention, les n décimales des deux approximations à 10^{-n} près peuvent différer. Par exemple, les deux approximations à 10^{-3} près de $0,9995$ sont $0,999$ et $1,000$.
2. Lorsque $n = 0$, on retrouve les parties entières vues précédemment.

Exercice 25

1. Montrer à l'aide des approximations décimales de $\sqrt{2}$ que la partie $\{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \}$ de $\mathbb{Q}$ n'admet ni borne inférieure ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, bien qu'elle soit non vide, minorée et majorée dans $\mathbb{Q}$.
2. Redémontrer ce résultat en utilisant directement la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, objet du théorème suivant.

3 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On montre à l'aide des approximations décimales des réels le

Théorème 26
Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels.
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration: Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Quitte à restreindre I, on peut supposer que $I =]a,b[$, avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On note alors $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2} > 0$ et ainsi $I =]c-r, c+r[$. Montrons que I contient au moins un rationnel et un irrationnel.

Il existe par archimédianité $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{r} < n$. Soit k le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10. On a $10^k > n > \frac{1}{r} > 0$, donc $10^{-k} < r$. Soit x la valeur décimale approchée de c à 10^{-k} près par défaut. On a alors $c - r < c - 10^{-k} < x$ et $x \leq c < c + r$, donc $x \in I$. Par ailleurs, x est décimal, donc *a fortiori* $x \in \mathbb{Q}$. Ainsi, I contient au moins un rationnel.

Comme $x < c + r$, il existe par archimédianité $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $y = x + \frac{\sqrt{2}}{m} < c + r$. Ainsi $y \in I$. Par ailleurs, si y était rationnel, alors $\sqrt{2} = m(y - x)$ le serait aussi, ce qui n'est pas le cas. Donc $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et I contient au moins un irrationnel. $\square$

Remarque 27 Avec les notations de la démonstration, en réappliquant le théorème, il existe aussi un rationnel dans $]x, b[$. En réitérant le processus indéfiniment, on montre ainsi qu'il existe une infinité de rationnels dans I. De la même manière, il existe dans I une infinité d'irrationnels.

Exercice 28 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq x\} = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} = x$.

4 Convexité

Définition 29 Une partie A de $\mathbb{R}$ est *convexe* ssi

$$\forall x, y \in A, (x \leq y \Longrightarrow [x,y] \subset A).$$

Remarque 30 On peut le reformuler plus simplement en : $\forall x, y \in A,\ [x,y] \subset A$. On a voulu éviter ici de considérer des segments $[x,y]$ tels que $x > y$, pour lesquels la définition comme intervalle nous dit qu'ils sont vides, mais la définition comme segment géométrique nous dit qu'ils ne le sont pas. En dimension 1, on préfère ne pas considérer de tels segments pour éviter toute ambiguïté.

Remarque 31 Cette définition s'étend directement en dimension plus grande comme vous le verrez l'an prochain, $[x,y]$ représentant le segment "géométrique" entre x et y. Dessinez quelques figures convexes et non convexes dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 32 On voit très facilement (ci-dessous) que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes.

La réciproque est aussi vraie, ce qui donne :

Théorème 33 ***(Description des convexes de $\mathbb{R}$)***
Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration: Pour démontrer que les intervalles sont convexes, il faudrait faire une disjonction de cas sur tous les types d'intervalles possibles. On fait la démonstration uniquement dans le cas d'un intervalle $I =]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ (les autre cas sont similaires). Soient alors $x, y \in I$ tels que $x \leq y$. Pour $z \in [x,y]$, on a $a < x \leq z \leq y \leq b$, donc $z \in I$. Ainsi $[x,y] \subset I$.

On démontre maintenant que toute partie convexe A de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Si $A = \emptyset$, alors $A =]0,0[$ est un intervalle. Sinon, on pose $a = \inf(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, qui existe car $A \neq \emptyset$, est fini lorsque A est minorée d'après la propriété de la borne supérieure et vaut $-\infty$ d'après la convention prise précédemment lorsque A n'est pas minorée. On pose de même $b = \sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Comme a minore A et b majore A, alors $A \subset]a,b[\cup \{a,b\}$. Montrons qu'on a aussi $]a,b[\subset A$. Soit $z \in]a,b[$. Comme $\inf(A) = a < z$, z n'est pas un minorant de A, donc il existe $x \in A$ tel que $x < z$. De même, z n'étant pas un majorant de A puisque $z < b$, il existe $y \in A$ tel que $z < y$. Donc $z \in]x,y[\subset [x,y]$ et par convexité de A, $z \in A$. On a donc montré que

$$]a,b[\subset A \subset]a,b[\cup \{a,b\}$$

et suivant que a et b appartiennent ou non à A on trouve que A est un intervalle d'un type ou un autre, mais dans tous les cas un intervalle. □

II Généralités sur les suites réelles

1 Définition et exemples

Connaissant la notion d'application, on peut maintenant définir simplement les suites :

Définition 34 Une *suite réelle* est un élément u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, autrement dit une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, pour lequel il est d'usage de noter u_n l'image d'un entier $n \in \mathbb{N}$ (au lieu de $u(n)$). On note aussi cette suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_n = (u_n)$ suivant qu'il y a ou non des ambiguïtés. On appelle u_n le *terme général* de la suite (u_n).

Exemples 35 On a déjà vu au chapitre sur les calculs algébriques des suites à terme général exprimable : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, vérifiant une récurrence linéaire double à coefficients constants. Une autre famille de ce type est celle des suites de terme général $f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. Mais il y a aussi et surtout des suites dont on ne sait pas exprimer le terme général, comme la suite de Syracuse.

Exercice 36 $\oplus$ Certaines des suites précédentes sont définies par un premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction réelle (à ne pas confondre avec les suites de terme général $u_n = f(n)$). De manière générale, on peut étudier le comportement d'une telle suite graphiquement en représentant les itérations à l'aide du graphe de f dans un repère orthonormé et de la première bissectrice. Expliquer comment et faire une étude graphique pour différentes valeurs initiales u_0 dans le cas des fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{1+x}$, $f_a(x) = x^2 - a$ avec un paramètre $a \in [0,2]$, $g(x) = -\frac{1}{x}$. On verra à cette occasion la notion de *point fixe* et de *point périodique* de la fonction f.

Remarque 37 Lorsqu'une des relations de récurrence du type ci-dessus ne permet de définir qu'un nombre fini de termes (parce qu'on sort du domaine de définition de la fonction), on parle parfois de "suite finie".

Extension : on étend la définition des suites aux suites *définies à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}^\star$, *i.e.* aux applications de $\mathbb{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!]$ vers $\mathbb{R}$. On notera une telle suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple 38 Les suites suivantes sont définies à partir d'un certain rang : $\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)_{n \geq 2}$, $(\ln(n))_{n \geq 1}$.

Voici d'autres exemples de suites :

Exemples 39

1. Compter le nombre de triangulations des n-gones convexes, ou le nombre de bons "parenthésages" à $2n$ parenthèses, conduit à un décalage près à la suite des nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ qui apparaissent dans de nombreux autres problèmes de combinatoire.
2. Nous avons vu dans le premier chapitre une suite définie par le problème combinatoire des pizzas.
3. Beaucoup de suites proviennent de problèmes d'approximation, comme par exemple le calcul des décimales de π qui peut s'effectuer en exhibant une suite de rationnels tendant vers π.
4. Les suites de nombres entiers connues sont catalogués en ligne (Online Encyclopedia of Integer Sequences) ce qui permet de savoir si une suite qu'on vient de découvrir a déjà été découverte précédemment, simplement en en donnant ses premiers termes.

2 Propriétés générales des suites

Exercice 40 $\bigoplus$ On demande à la classe de donner les définitions formelles des propriétés suivantes d'une suite u et de donner des exemples et des contrexemples relatifs à ces propriétés :

— u est majorée (resp. minorée, bornée) ;
— u est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante) ;
— u est stationnaire.
— u est périodique, et dans ce cas définir **une** période, **la** période ;

Comme pour les fonctions, pour montrer qu'une suite est bornée, on utilise le plus souvent la propriété suivante :

Proposition 41

Pour $u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, on note $|u|$ la suite $(|u_n|)_n$. On a alors

$$u \text{ est bornée} \iff |u| \text{ est majorée} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Exercice 42 Montrer que la suite

$$\left(\frac{\left(\cos(n) - \frac{1}{2}\right)\left(\sin(n) + \frac{3}{5}\right)}{\cos(n) + \sin(n) - 3}\right)_n$$

est bornée.

Exercice 43 Pour la suite définie par $u_0 \in [-1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, prouver que la suite est monotone et discuter le sens de monotonie suivant la valeur de u_0.

Remarque 44 Pour montrer qu'une suite u est croissante, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que cette quantité est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme dans l'exercice suivant. Mais on peut aussi parfois, dans le cas où la suite est strictement positive (ou strictement négative), considérer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 45 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante, (v_n) strictement décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

III Limite d'une suite réelle

Nota Bene : les définitions et les résultats sont énoncés pour des suites définies sur $\mathbb{N}$ entier, mais s'étendent sans difficulté au cas des suites définies à partir d'un certain rang.

1 Définitions

Limites finies

⨁ La classe élabore une définition de limite finie à partir des connaissances de terminale, puis on la travaille pour aboutir à la définition classique :

Définition 46 Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) *converge vers* ℓ (ou qu'elle *admet* ℓ *comme limite*, ou encore que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$) et on note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque 47 Dans cette définition synthétique, il y a quelques abus de langage, la définition totalement correcte étant

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

En particulier, dans la définition du dessus, il est **sous-entendu** que ε est réel et n est entier. Nous ferons uniquement cela dans les cas non-ambigus, par souci de légèreté de notation, ce qui à notre sens rend la définition plus compréhensible.

Remarque 48 On peut formuler cette définition ainsi : on peut s'assurer que tous les termes de la suite sont arbitrairement proches de ℓ à partir d'un certain rang, quitte à prendre ce rang assez grand.

Remarque 49 Les seuls ε vraiment importants dans cette définition sont les ε "petits" : montrer par exemple qu'on pourrait se restreindre aux $\varepsilon \in]0,1]$, *i.e.* montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon \in]0,1], \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque 50 Remarquer aussi que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, ce qui permet une formulation en termes d'intervalles.

Remarque 51 En prenant l'inégalité stricte $n > N$ et/ou l'inégalité stricte $|u_n - \ell| < \varepsilon$, on obtiendrait une définition équivalente de la notion de limite, mais le rang minimal convenant pour N pourrait être différent. Nous ne manipulerons que la définition avec l'inégalité large, sauf cas exceptionnel.

Remarque 52 Une définition équivalente, mais qui ne s'adaptera pas (directement) aux fonctions, est la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]\}$ est fini.

Remarque 53 Dans la définition de la limite, l'entier N **dépend** du $\varepsilon > 0$ pris au départ : plus ε est "petit" plus il faudra (en général) choisir N grand. Pour bien montrer cette dépendance, on peut parfois le noter N_ε.

Exemple 54 Il est très facile de voir qu'une suite constante de valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ tend vers λ.

Exemple 55 Montrons que $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, tout entier $n \geq N$ vérifie $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Il suffit donc de prendre N tel que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$, *i.e.* $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On choisit alors $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ et, pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \varepsilon.$$

Définition 56 Si une suite admet une limite **finie**, on dit qu'elle *converge* et sinon, on dit qu'elle *diverge*.

Pour montrer la convergence d'une suite u vers un $\ell \in \mathbb{R}$ qu'on conjecture, on se ramène le plus souvent à la suite $|u - \ell|$ à l'aide de la proposition suivante (immédiate à partir de la définition de la limite). On montre en général la convergence de $|u - \ell|$ par le théorème d'encadrement (dit "des gendarmes") qu'on verra plus tard.

Remarquons qu'on a la proposition triviale, mais très pratique, suivante :

Proposition 57

Pour une suite (u_n) et un réel ℓ,

$$u_n \longrightarrow \ell \iff |u_n - \ell| \longrightarrow 0$$

Enfin, on a la propriété suivante :

Proposition 58 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration: Soit u une suite convergente vers ℓ. En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, on obtient que $A = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin [\ell - 1, \ell + 1]\}$ est fini. Comme A est fini, $u(A)$ aussi, donc $u(A)$ est borné. Par ailleurs $u(\mathbb{N}) = u(A) \cup u(\mathbb{N} \setminus A) \subset u(A) \cup [\ell - 1, \ell + 1]$ qui est borné, donc u est bornée. □

Exercice 59 Montrer que la réciproque est fausse en exhibant une suite bornée divergente (en prouvant la divergence).

Limites infinies

Exercice 60 $\bigoplus$ La classe élabore une définition de limite infinie.

Définition 61 Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ (ou qu'elle *admet* $+\infty$ *comme limite*, ou encore que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$) et on note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On dit que la suite (u_n) *tend vers* $-\infty$ et on note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Remarque 62 **Attention**, dans le cas de limites infinies, conformément à ce qui a été dit plus haut on ne dit pas que la suite converge, mais bien qu'elle **diverge**. En effet, le résultat d'unicité de la limite qu'on verra plus tard assure que si une suite a une limite infinie, elle ne peut pas avoir simultanément une limite finie.

Remarque 63 La plupart des remarques faites dans le cas fini s'adaptent ici. En particulier, on peut reformuler ces définitions de différentes manières :

— Tout d'abord, les seuls A importants sont ceux qui sont “grands” dans le cas de $+\infty$ et ceux qui sont “petits” dans le cas de $-\infty$. On peut donc remplacer “$\forall A \in \mathbb{R}$” par “$\forall A \geq 0$” dans la cas de la limite $+\infty$, *etc*. Montrer par exemple que

$$\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall A \leq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall A \leq -1000, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A. \end{aligned}$$

— Ensuite, on pourrait les reformuler en termes d'intervalles, par exemple : ... $u_n \in [A, +\infty[$.

— On pourrait aussi changer les inégalités large en strictes.

Exemple 64 Montrons que $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Soit $A \geq 0$. Pour $N \in \mathbb{N}$, tout entier $n \geq N$ vérifie $\sqrt{n} \geq \sqrt{N}$. Il suffit donc de prendre N tel que $\sqrt{N} \geq A$, ce qui équivaut à $N \geq A^2$ (car $\sqrt{N} \geq 0$ et $A \geq 0$). On choisit alors $N_A = \lceil A^2 \rceil \in \mathbb{N}$ et, pour tout entier $n \geq N_A$, on a $\sqrt{n} \geq \sqrt{N_A} \geq A$.

Unicité de la limite

Théorème 65 ***(Unicité de la limite)***

Si une suite réelle admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique.

Démonstration: On raisonne par l'absurde en supposant qu'une certaine suite réelle u admet deux limites différentes ℓ et ℓ', dont on peut supposer, quitte à les renommer, que $\ell < \ell'$.

Pour arriver à une contradiction, on procède par disjonction des cas.

Si $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, on note $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{3}$, qui est strictement positif puisque $\ell < \ell'$. En appliquant la définition de la limite pour ℓ et ℓ', on obtient $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que

$$(\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \quad \text{et} \quad \left(\forall n \geq N',\ \left|u_n - \ell'\right| \leq \varepsilon\right).$$

On pose alors $n = \max(N, N')$ et on a

$$\ell' - \ell = \left|\ell' - \ell\right| = \left|\ell' - u_n + u_n - \ell\right| \leq \left|\ell' - u_n\right| + |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\left(\ell' - \ell\right)$$

et en divisant par $\ell' - \ell > 0$, on obtient $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est impossible.

Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$, on voit que la suite est bornée puisque $\ell \in \mathbb{R}$ (la convergence implique la bornitude). En particulier, elle est majorée par un certain $M \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite infinie, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq M + 1$, donc en particulier, $M + 1 \leq u_N \leq M$, contradiction.

Pour le cas où $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$, on arrive de la même manière à une contradiction.

Il reste le cas où $\ell = -\infty$ et $\ell' = +\infty$, qu'on laisse au lecteur. □

Notation : puisque la limite ℓ d'une suite u, lorsqu'elle existe, est unique, il est licite de noter

$$\ell = \lim u = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim u_n$$

en réservant cette dernière notation aux cas où il n'y a aucune ambiguïté sur le nom de l'indice qu'on fait tendre vers $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

Nota Bene : pour les résultats énoncés ici, on ne donne ni exemples, ni contrexemples. **Cela est volontaire** car on demande aux étudiants de les construire systématiquement eux-même pour chaque résultat.

Cas des limites finies

Théorème 66 ***(Opérations sur les limites finies)***

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles telles que $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim v = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors

1. *La suite $u + v = (u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.*
2. *La suite $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)$ converge vers $\ell \cdot \ell'$.*
3. *Si $\ell' > 0$ (resp. $\ell' < 0$), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Démonstration:

1. L'idée clé est la remarque suivante : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| = \left|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\right| \leq |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right|.$$

   Pour un $\varepsilon > 0$, il suffit donc de majorer chacune des deux quantités $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell'|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$ pour conclure. On choisit alors, par définition de $\lim u = \ell$, un N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis, par définition de $\lim v = \ell'$, un N' tel que, pour tout $n \geq N'$, $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $N_\varepsilon = \max(N, N')$ et on a, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. L'idée clé est la remarque suivante : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| = \left|u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'\right| \leq |u_n| \left|v_n - \ell'\right| + |u_n - \ell| \left|\ell'\right|.$$

   Pour un $\varepsilon > 0$, il suffit donc de majorer chacun des deux termes de la somme par $\frac{\varepsilon}{2}$ pour conclure.

   La suite u étant convergente, elle est bornée, donc il existe un $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. On choisit alors, par définition de $\lim v = \ell'$, un N' tel que, pour tout $n \geq N'$, $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. On choisit ensuite, par définition de $\lim u = \ell$, un N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)}$. On pose alors $N_\varepsilon = \max(N, N')$ et on a, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| \leq |u_n| \left|v_n - \ell'\right| + |u_n - \ell| \left|\ell'\right| \leq \frac{M\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{|\ell'|\varepsilon}{2(|\ell'|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. On fait la démonstration dans le cas $\ell' > 0$, l'autre cas étant analogue. En appliquant la définition de $\lim v = \ell'$ à $\frac{\ell'}{2} > 0$, on obtient un N tel que, pour $n \geq N$: $|v_n - \ell'| \leq \frac{\ell'}{2}$, donc $v_n \geq \frac{\ell'}{2}$, et en particulier $v_n > 0$ (car $\ell' > 0$).

   Encore par définition de $\lim v = \ell'$, on choisit $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N'$, $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon\ell'^2}{2}$. En posant, $N_\varepsilon = \max(N, N')$, on obtient, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{v_n\ell'}\right| = \frac{|\ell' - v_n|}{v_n\ell'} \leq \frac{\frac{\varepsilon\ell'^2}{2}}{\frac{\ell'}{2}\ell'} = \varepsilon.$$

   Ainsi, $\lim \frac{1}{v} = \frac{1}{\ell'}$ et en appliquant le résultat sur le produit, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\ell}{\ell'}$.

□

Pour une suite u et un réel λ, la suite λu peut être considéré comme le produit de la suite constante de valeur λ par la suite u. Le résultat sur les limites de produits combiné avec celui sur la limite d'une somme permet d'avoir le suivant concernant les combinaisons linéaires :

***Corollaire 67** (Linéarité de la limite)*

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles admettant des limites finies et λ et μ deux réels, On a alors

$$\lim(\lambda u + \mu v) = \lambda \lim u + \mu \lim v.$$

On a aussi le résultat utile suivant :

Théorème 68 ***(Produit par une suite bornée)***
Soient u et v deux suites réelles.
Si u est bornée et $\lim v = 0$*, alors* $\lim uv = 0$.

Démonstration: $\bigoplus$ À faire en exercice. $\square$

Cas des limites infinies

Théorème 69 ***(Somme)***
Soient u et v deux suites réelles.
Si u est minorée et $\lim v = +\infty$*, alors* $\lim(u+v) = +\infty$.
Si u est majorée et $\lim v = -\infty$*, alors* $\lim(u+v) = -\infty$.

Démonstration: $\bigoplus$ À faire en exercice. $\square$

Remarque 70 Cela s'applique en particulier si u est convergente.

Remarque 71 En revanche si $\lim u = -\infty$ et $\lim v = +\infty$, alors **tout peut arriver** pour $u+v$: divergence sans limite, divergence avec limite infinie, convergence. On dit qu'on a une *forme indéterminée* et on essaie alors de lever l'indétermination par différentes méthodes (transformation algébrique comme la multiplication par la quantité conjuguée dans le cas de racines, développement limité comme on le verra plus tard dans le cours...)

Théorème 72 ***(Produit avec une limite infinie)***
Soient u et v deux suites réelles.
Si $\lim u = \pm\infty$ *et* $\lim v = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$*, alors* $\lim uv = sgn(\ell) \lim u$
(où sgn vaut -1 *sur* $\mathbb{R}_-^\star \cup \{-\infty\}$ *et* $+1$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ *et on utilise la règle des signes).*

Démonstration: $\bigoplus$ On fait la démonstration dans le cas où $\lim u = -\infty$ et $\ell < 0$ les autres cas étant similaires. Le sous-cas $\ell \in \mathbb{R}_-^\star$ est traité en cours et le sous-cas $\ell = -\infty$ est laissé aux élèves. $\square$

Remarque 73 En revanche si $\lim u = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$ et $\lim v = 0$, alors **tout peut arriver** pour uv : on a une forme indéterminée, qu'on pourra lever par différentes méthodes, dont l'utilisation de développements limités.

Pour énoncer le prochain résultat, on introduit les notions de limites par valeurs inférieures et supérieures :

Définition 74 Pour une suite réelle u et $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que u tend vers ℓ *par valeurs strictement inférieures* (resp. *strictement supérieures*) et on note $\lim u = \ell^-$ (resp. ℓ^+), ou encore $u_n \underset{<}{\longrightarrow} \ell$ (resp. $u_n \underset{>}{\longrightarrow} \ell$), lorsque

$$\lim u = \ell \quad \text{et} \quad (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < \ell)$$

$$(\text{resp.} \quad \lim u = \ell \quad \text{et} \quad (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > \ell))$$

Remarque 75 On peut synthétiser cette définition ainsi :

$$\lim u = \ell^- \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon \leq u_n < \ell.$$

On a alors les résultats suivants :

Théorème 76 ***(Inverse d'une limite infinie)***
Soient u une suite réelle.
Si $\lim u = -\infty$ *(resp.* $+\infty$*), alors il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N$*,* $u_n < 0$ *(resp.* $u_n > 0$*), et on a* $\lim \frac{1}{u} = 0^-$ *(resp.* 0^+*).*

Démonstration: $\bigoplus$ À faire en exercice. □

Théorème 77 ***(Inverse d'une limite nulle)***
Soient u une suite réelle.
Si $\lim u = 0^-$ *(resp.* 0^+*), alors* $\lim \frac{1}{u} = -\infty$ *(resp.* $+\infty$*).*

Démonstration: $\bigoplus$ À faire en exercice. □

Exercice 78 Décrire et démontrer le comportement des suites $(n^\alpha)_n$, où le paramètre α est réel. **Ces résultats sont alors considérés comme des résultats de cours.**

Exercice 79 Résumer toutes les opérations sur les limites dans un unique tableau ayant comme entête

$\lim u$	$\lim v$	$\lim(u+v)$	$\lim(uv)$	$\lim \frac{u}{v}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

et donner pour chaque forme indéterminée des exemples explicites des différents cas de figure possibles.

3 Limites et ordre

Exercice 80 Pour chacun des résultats suivant faire des dessins pour décrire la situation et la démonstration.

Théorème 81 ***(Passage à la limite dans une inégalité large)***
Soient u et v deux suites réelles.
Si $\lim u = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*,* $\lim v = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n)$*, alors* $\ell \leq \ell'$*.*

Démonstration: $\bigoplus$ À faire avec la classe par l'absurde, en supposant que $\ell' < \ell$. Dans ce cas $u - v$ tend vers une limite strictement positive, éventuellement infinie, d'après les résultats sur les sommes de limites (vérifier les différents cas de figure). On a déja vu dans la cas d'une limite dans $\mathbb{R}_+^\star$ que cela implique que la suite $u - v$ est strictement positive à partir d'un certan rang, ce qui contredit les inégalités de l'hypothèse. C'est encore plus facile à montrer lorsque cette limite est $+\infty$. □

Remarque 82 **Attention :** si on passe à la limite dans une inégalité stricte, on peut seulement affirmer que les limites vérifient une inégalité large ! Donner un exemple où on a l'égalité des limites en passant à la limite dans une inégalité stricte.

Remarque 83 En pratique, l'hypothèse "$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang" suffit dans le théorème précédent.

Exercice 84 Montrer que si deux suites réelles verifient $\lim u < \lim v$, alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème 85 ***(Théorème de convergence par encadrement, dit "des gendarmes")***
Soient u, v et w trois suites réelles.
Si $\lim u = \lim v = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq w_n \leq v_n)$*, alors* $w \longrightarrow \ell$.

Démonstration: $\bigoplus$ À faire avec la classe. □

Remarque 86 En pratique, l'hypothèse "$u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang" suffit dans ce théorème.

Théorème 87 ***(Théorème de divergence par minoration ou majoration)***
Soient u, v deux suites réelles.
Si $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n)$*, alors :*

- $\lim u = +\infty \Longrightarrow \lim v = +\infty$
- $\lim v = -\infty \Longrightarrow \lim u = -\infty$

Démonstration: À faire en exercice. □

Remarque 88 En pratique, l'hypothèse "$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang" suffit dans ce théorème.

Exercice 89 Montrer que la suite géométrique $(a^n)_n$, avec $a > 1$, tend vers $+\infty$. On pourra utiliser la formule du binôme de Newton. En déduire le comportement de la suite lorsque $a \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Que dire dans les autres cas ?
Ces résultats sont alors considérés comme des résultats de cours.

IV Suites monotones

Théorème 90 ***(de la limite monotone)***
Toute suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.
Toute suite réelle croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) tend vers $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Démonstration: $\bigoplus$ avec la classe □

Exemple 91 La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante et majorée par $1 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1+1 = 2$, donc elle converge. Vous verrez un jour que sa limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Définition 92 Deux suites réelles u et v sont dites *adjacentes* ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- u est croissante ;
- v est décroissante ;
- $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 93 Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite des approximations décimales de x à 10^{-n} près par défaut et la suite des approximations décimales de x à 10^{-n} près par excès sont adjacentes.

***Théorème 94** (des suites adjacentes)*
Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration: $\bigoplus$ avec la classe □

Remarque 95 On déduit des démonstrations précédentes que, lorsque u et v sont adjacentes, on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, on a mieux, comme le montre la proposition suivante.

***Proposition 96** (Position des suites adjacentes)*
Si u et v sont adjacentes et ℓ est leur limite commune,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_m.$$

Cela découle aisément du lemme suivant :

Lemme 97 *Si u est croissante et converge vers ℓ, alors* $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell)$.

Démonstration: Immédiate par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\forall p \geq n, u_n \leq u_p$. □

Exercice 98 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et de même limite.

V Suites extraites

Une suite extraite d'une suite $u = (u_n)$ est obtenue en sélectionnant une infinité de termes de la suite u. En voici quelques exemples :

— Les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, \dots)$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, \dots)$;

— La suite $(u_{5k+7})_{k\in\mathbb{N}} = (u_7, u_{12}, u_{17}, \dots)$;

— La suite $(u_{2^k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_4, \dots)$

On formalise cela de la manière suivante :

Définition 99 Une suite extraite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est obtenue par la donnée d'une application **strictement croissante** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. La *suite extraite* correspondant à φ est alors la suite $u \circ \varphi = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle **extractrice** une telle application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Remarque 100 Certains auteurs appellent aussi ces suites extraites de u des "sous-suites" de u, terminologie que nous n'emploierons pas.

Autre notation : on note souvent la nouvelle suite avec un indice différent et en notant n_0, n_1, n_2... les termes sélectionnés. On construit ainsi la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui en termes d'applications, est exactement notre application φ ci-dessus, mais pour la décrire, on change le nom de la variable muette n en k, ce qui donne $\varphi : k \longmapsto n_k$. La suite extraite est alors $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Les exemples introductifs utilisaient cette notation, assez intuitive. Cependant, pour des manipulations théoriques, en particulier lorsqu'on extrait une suite d'une suite extraite, il est plus judicieux de revenir à la notation formelle initiale, qui permet de garder le même nom d'indice n pour toutes les suites en présence.
Avertissement : Considérons par exemple le cas de deux extractions successives de la suite u : on extrait la première fois à l'aide de l'application (strictement croissante) $\varphi_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, puis la deuxième fois à l'aide de $\varphi_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Notons $(v_n)_n$ la première suite extraite : on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi_1(n)}$. Quand on extrait la deuxième suite de cette suite extraite, on obtient le terme général $v_{\varphi_2(n)} = u_{\varphi_1(\varphi_2(n))} = u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}$. AInsi la deuxième suite extraite est $u \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = (u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une **erreur fréquente** que d'inverser ici l'ordre de φ_1 et φ_2. On voit en outre immédiatement que $\varphi_1 \circ \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, ce qui prouve la

Proposition 101 ***(des extractions successives)*** *Une suite extraite d'une suite extraite de u est une suite extraite de u.*

Remarque 102 Avec l'autre notation, une suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_n$ se noterait $(u_{n_{k_p}})_p$, ce qui n'est pas très pratique.

Le premier résultat important concernant les suites extraites est le

Théorème 103 ***(Stabilité de la limite par extraction)***
Si une suite u tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.

Démonstration: $\bigoplus$ avec la classe en mettant en évidence le résultat suivant, qui s'obtient par récurrence immédiate :

Pour toute extractrice φ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

$\square$

Ce théorème s'avère extrèmement utile pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, car un corollaire immédiat en est :

Corollaire 104
Si deux suites extraites d'une même suite u admettent des limites différentes, alors la suite u n'a pas de limite.

Exemple 105 La suite $u = ((-1)^n)_n$ n'a pas de limite car

$$u_{2k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Nous donnons maintenant une réciproque partielle au théorème précédent qui est très utile dans la pratique

Théorème 106 ***(Convergence par les suites extraites de rangs pairs et impairs)***
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si ses suites extraites de rangs pairs de de rangs impairs $(u_{2k})_k$ et $(u_{2k+1})_k$ tendent vers une ***même limite*** *$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite u tend aussi vers ℓ.*

Démonstration: avec la classe, dans le cas où $\ell = +\infty$ $\bigoplus$ $\square$

Exemple 107 En prenant la suite d'un exercice précédent, on montre ainsi que la suite $(w_m)_m$ de terme général $w_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente. Vous verrez plus tard que sa limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ vaut $\ln(2)$.

Un résultat fondamental est le

Théorème 108 ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass)***
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration: Faite en cours. Elle utilise le principe de dichotomie. $\square$

VI Traductions séquentielles

À développer...

— Définition formelle et traduction séquentielle de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— Pour une partie majorée de $\mathbb{R}$, un réel est borne supérieure de cette partie ss'il en est un majorant qui est de plus limite d'éléments de la partie.
— Une partie A de $\mathbb{R}$ est non majorée ($\sup(A) = +\infty$) ss'il existe une suite de ses éléments qui tend vers $+\infty$.

VII Itérations de fonctions

Soit f une fonction réelle.
On considère ici les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 \in D_f \\ (\star) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

En général, un premier travail est de montrer que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela se fait en général par récurrence, mais il y a un cas (fréquent) où cette récurrence et immédiate :

Proposition 109 ***(Bonne définition par partie stable)***
*Si $E \subset D_f$ est **stable par** f, i.e. vérifiant $f(E) \subset E$, alors toute suite définie par $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $(\star)$ est bien définie pour tout $\mathbb{N}$ et tous ses termes sont éléments de E.*

Démonstration: Par récurrence évidente. □

Par ailleurs, un cas particulier de ce phénomène est le cas où E est un singleton $\{\alpha\}$. La stabilité de E équivaut à ce que α soit un *point fixe* de f, *i.e.* $f(\alpha) = \alpha$. Dans ce cas, en prenant $u_0 = \alpha$, la suite u vérifiant la récurrence est constante.

Il convient donc pour étudier ces suites de trouver d'abord tous les points fixes de f (résolution d'équation ou étude de fonction qui prouve leur existence, en général par le théorème des valeurs intermédiaires). Le complémentaire de l'ensemble des points fixes de f dans D_f est en général une réunion finie d'intervalles. On cherche alors lesquels sont stables par f, ou si on obtient une partie stable en en réunissant certains.

Pour chaque partie stable, on choisit un terme initial u_0 dans cette partie et on construit graphiquement les itérés successifs de u_0 : u_1, u_2, u_3, ... à l'aide du grahe de f en repère orthonormé et de la première bissectrice comme nous l'avons vu en début de chapitre. Cela permet de conjecturer le comportement de la suite (monotonie, convergence, divergence,...). On montre ensuite ces conjectures, le plus souvent par récurrence. Il est fréquent qu'on utilise pour cela le théorème de la limite monotone.

On utilise aussi très souvent le théorème suivant, qui montre qu'une limite d'une telle suite est en général un point fixe. La notion de continuité en un point sera définie dans un chapitre ultérieur, mais en général la fonction est continue sur D_f d'après les résultats sur les opérations et la composition des fonctions continues.

Théorème 110 ***(de la limite fixe)***
Si une suite vérifiant $(\star)$ est convergente de limite ℓ et la fonction f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f,i.e. $f(\ell) = \ell$.

Démonstration: On passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de f, en utilisant un résultat qui sera démontré ultérieurement. □

Exemple 111 Prenons l'exemple vu précédemment des suites définies par $u_0 \in [-1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

L'unique point fixe est le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (par résolution d'une équation du second degré et élimination d'une racine non convenable de cette équation)

On remarque par l'étude de f qu'elle est continue sur $D_f = [-1,+\infty[$ et strictement croissante. Cela prouve, par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, que $f([-1,\varphi[) = [0,\varphi[\subset [-1,\varphi[$ et $f(]\varphi,+\infty[) =]\varphi,+\infty[$. Les deux intervalles $I_1 = [-1,\varphi[$ et $I_2 =]\varphi,+\infty[$ sont donc stables par f, ainsi que le singleton $\{\varphi\}$. Ainsi, D_f étant réunion de parties stables, les suites (u_n) sont bien définies pour tout n, quel que soit $u_0 \in D_f$. Par ailleurs, l'étude de fonction prouve, par exemple grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que

$$\forall x \in I_1,\ f(x) > x \quad \text{et} \quad \forall x \in I_2,\ f(x) < x.$$

Ainsi, si $u_0 \in I_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_1$ et $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$ par l'inégalité précédente. La suite est strictement croissante, donc *a fortiori* croissante. Comme de plus elle est majorée par φ, elle converge vers un réel ℓ, qui est alors dans $[u_0,\varphi]$. Cependant, f est continue sur D_f, donc en ℓ, et par le théorème ci-dessus, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = \varphi$.

De la même manière, on montrerait que si $u_0 \in I_2$, la suite est strictement décroissante et converge aussi vers φ.

En rajoutant le cas de la suite constante obtenue pour $u_0 = \varphi$, on obtient que toutes les suites considérées ont pour limite φ, et qu'une telle suite est strictement croissante, constante ou strictement décroissante suivant que u_0 est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à φ.

Ce comportement de monotonie est un fait général lorsque f est **croissante** :

Proposition 112 ***(de monotonie par croissance)*** *Si f est croissante sur une partie $E \subset D_f$ stable par f, toute suite u vérifiant $(\star)$ et $u_0 \in E$ est monotone.*

Démonstration: La démonstration est très simple : Par ce qui précède, la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous les termes de la suite sont dans E. Si $u_0 \leq u_1$ en appliquant successivement f croissante à cette inégalité, on obtient $u_1 \leq u_2$, $u_2 \leq u_3, \ldots$; si $u_0 \geq u_1$, de la même manière, la suite est décroissante. □

Attention, comme le montre l'exemple précédent, il se peut que f soit croissante et que la suite u soit décroissante.

Exercice 113 Montrer que si f est décroissante sur une partie E de D_f stable par f et si $u_0 \in E$, alors les suites extraites des rangs pairs et des rangs impairs sont monotones, l'une croissante, l'autre décroissante.

Remarque 114 Le résultat de cet exercice permet parfois de démontrer que les suites extraites considérées sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune, et donc que la suite (u_n) est convergente.

VIII Suites à valeurs complexes

La définition de la limite est la même que dans $\mathbb{R}$.

Définition 115 Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que u_n tend vers ℓ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que la suite est *convergente*.

Remarque 116 L'analogue de la traduction en termes d'intervalles centrés est ici une traduction en termes de disques. Faire un dessin.

Remarque 117 Attention, pas de limites infinies dans ce cadre complexe !

On peut se ramener aux parties réelles et imaginaires :

Proposition 118 ***(limite par parties réelle et imaginaire)***
Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$,

$$u \longrightarrow \ell \iff (\mathrm{Re}\,(u) \longrightarrow \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(u) \longrightarrow \mathrm{Im}\,(\ell)).$$

Démonstration: Il suffit de mettre des disques dans des carrés, puis des carrés dans des disques.
$\bigoplus$ $\square$

À l'aide de cette traduction, on déduit l'unicité de la limite pour les suites complexes de celle pour les suites réelles :

Théorème 119 ***(unicité de la limite)***
Si une suite complexe admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors cette limite est unique.

Et cela justifie la notation suivante :
Notation : On note aussi $\lim u = \ell$ pour $u \longrightarrow \ell$.

Proposition 120 *Pour $a \in \mathbb{C}$, la suite géométrique $(a^n)_n$ converge si et seulement si $a = 1$ ou $|a| < 1$.*

Démonstration: En exercice. $\square$

Remarque 121 Pour les suites arithmético-géométriques ou vérifiant une récurrence linéaire double, on peut ainsi déterminer si elles convergent ou non.

On déduit aussi de la caractérisation de la limite par parties réelle et imaginaire et des opérations sur les suites convergentes réelles le théorème :

Théorème 122 ***(Opérations sur les limites complexes)***
Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites complexes telles que $\lim u = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim v = \ell' \in \mathbb{C}$. Alors

1. *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la suite $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda \ell + \mu \ell'$.*
2. *La suite $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)$ converge vers $\ell \cdot \ell'$.*
3. *Si $\ell' \neq 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $v_n \neq 0$ et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Par ailleurs, on définit les suites complexes bornées :

Définition 123 Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *bornée* ssi $(\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M)$.

Remarque 124 Cela signifie qu'il existe un disque (fermé) centré en 0 qui contient $u(\mathbb{N})$.

On a alors la proposition similaire au cas réel :

Théorème 125 ***(Produit par une suite bornée)*** *Soient u et v deux suites complexes.*
Si u est bornée et $\lim v = 0$, alors $\lim uv = 0$.

On a aussi le

Théorème 126 ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass)***
De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration: Faite en cours. Elle repose sur une double extraction. □