Chapitre 5 : Modèle de l'oscillateur harmonique

Ce que je dois savoir

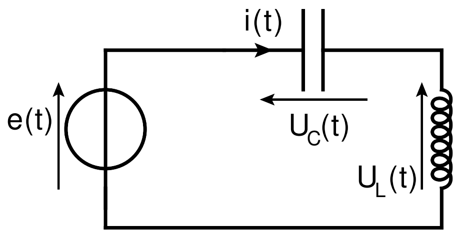
Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique	Etablir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des condition initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.

Résumé de cours

I Deux situations, une équation

1 Circuit LC en régime libre

On considère le montage ci-contre : un circuit (L, C) série. Initialement le condensateur est chargé de charge q_0. A $t = 0$ on éteint le générateur de tension : $e(t) = 0$. Le condensateur va se décharger dans la bobine.



Loi des mailles : $u_C(t) + u_L(t) = 0 \Rightarrow LC\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + u_C(t) = 0$

sous forme canonique :

$\boxed{\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ la pulsation propre de l'oscillateur harmonique

2 Masse accroché à un ressort horizontal

Propriété

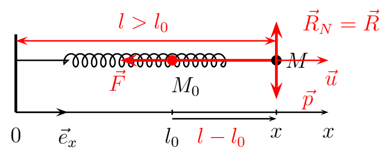
Loi de Hooke

Dans son domaine élastique de fonctionnement, un ressort exerce sur chacune de ses extrémités une force dirigée le long de son axe, proportionnelle à l'allongement algébrique, et dirigée dans le sens qui s'oppose à la déformation du ressort.

Pour un ressort d'extrémités O (fixe) et M (mobile), on note :
- ℓ_0 sa longueur à vide
- $\ell = \|\overrightarrow{OM}\|$ sa longueur à l'instant considéré
- $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ son allongement algébrique (différence entre sa longueur et sa longueur à vide)
- k sa constante de raideur (en N.m^{-1})

La force exercée par le ressort sur l'extrémité mobile M s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{ressort}\to M} = -k\,(\ell-\ell_0)\overrightarrow{u} = -k\,\Delta\ell\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\ell}$ (vecteur unitaire dirigé de O vers M)

- référentiel terrestre supposé galiléen,
- système étudié : masse m accroché à l'extrémité du ressort assimilé à un point matériel,
- on néglige toutes les pertes d'énergies dues au frottement par exemple,
- on choisit un modèle linéaire de la force de rappel du ressort (loi de Hooke)



• **Bilan des forces :**
- la force de rappel élastique du ressort : $\overrightarrow{F} = -k(\ell_{eq} - \ell_0)\overrightarrow{u} = k\,(\ell_{eq} - \ell_0)\,\overrightarrow{u}_x$

- le poids $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g} = -m\,g\,\overrightarrow{u}_z$ orthogonal à $\overrightarrow{u}_x$

-la réaction du support $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u}_x$ car les frottements sont négligés.
• **Principe fondamental de la dynamique à l'équilibre :** $m\,\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ à l'équilibre, donc en projettant sur les axe O_x et O_z :
$P = R = mg$
$F = k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0}$
On déplace la masse m sur l'axe Ox hors de sa position d'équilibre et on la lache sans vitesse initiale, la masse va osciller autour de sa position d'équilibre. Etudions ce mouvement :

• **Principe fondamental de la dynamique hors équilibre :** $m\,\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R}$
Projection de toutes les forces et de l'accélération selon x : $m\,a_x(t) = k(\ell(t) - \ell_0)$
Posons t $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ alors $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ et l'équation du mouvement devient :
$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ la pulsation propre de l'oscillateur harmonique

II Modèle de l'oscillateur harmonique

1 Équation de l'OH

DÉFINITION

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique :
Si l'évolution d'un paramètre p (coordonées de la masse accrochée au ressort, tension aux bornes du condensateur d'un circuit (L, C) série en régime libre...) est décrite par l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\frac{d^2p}{dt^2} + \omega_0^2 p(t) = \omega_0^2 K}$$

alors le système est un **oscillateur harmonique** à une dimension.
$\boxed{\omega_0 \text{ est la pulsation propre}}$ de l'oscillateur harmonique et K est une constante, réelle.

⚠ On notera le signe $+$ devant le terme d'ordre 0

2 Résolution

a. solution générale

THÉORÈME

Les solutions de l'équation différentielle de l'OH sont des fonctions sinusoïdales de pulsations ω_0, indépendantes des conditions initiales. C'est ce qu'on appelle l'**isochronisme** des oscillations.

Comme pour les équations difféentielles d'ordre 1, on cherche des solutions de la forme :

$$p(t) = p(t)_{SSM} + p_{part}$$

avec $p(t)_{SSM}$ la solution de l'équation sans second membre et $p(t)_{part}$ une solution particulère, constante dans notre cas.

Propriété

On peut exprimer la solution générale de l'équation différentielle de l'OH sous les formes équivalentes :

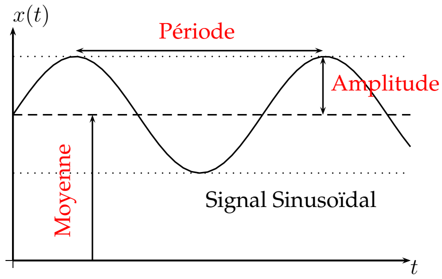
- $p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + K$
- $p(t) = P_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + K$
- $p(t) = P_m \sin(\omega_0 t + \phi) + K$

avec les couples de constantes d'intégration (A,B), (P_m,φ) ou (P_m,ϕ) à déterminer avec les deux conditions initiales.

b. Description d'un signal sinusoïdal

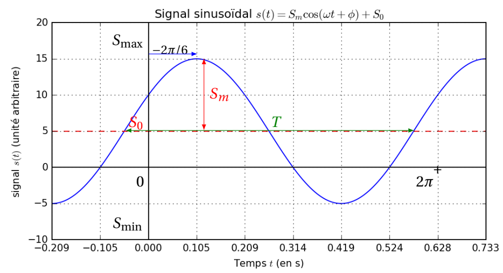
Définition

On appelle signal sinusoïdal un signal qui est décrit par une fonction sinusoïdale du temps de la forme $\boxed{s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)}$ avec les caractéristiques du signal :



- l'amplitude $S_m = \dfrac{S_{max} - S_{min}}{2}$, qui a la même unité que $S(t)$;
- la valeur moyenne $\dfrac{S_0 = S_{max} + S_{min}}{2}$;
- la pulsation $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$, en rad/s ;
- la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$, en s ;
- la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$, en Hz ;
- la phase à l'origine φ en radian.
- la phase instantanée $\omega t + \varphi$, c'est l'argument de la fonction cosinus

Méthode pour déterminer φ :



- Graduer l'axe des abscisse en mettant une période entre 0 et 2π ;
- Mesurer la distance entre l'abscisse 0 et le maximum le plus proche ;
- Exprimer cet écart en radian par une règle de 3. Si le maximum est en amont de 0 la phase est positive, sinon elle est négative.

Définition

Valeur moyenne et valeur efficace

Pour tout signal $s(t)$ périodique de période T on peut définir :

- **la valeur moyenne**

$$\boxed{< s >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt}$$

- **la valeur efficace** : $\boxed{S_{eff} = \sqrt{< s(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}}$

Dans le cas de signal **sinusoïdal** $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$alors

$$\boxed{< s >= 0} \text{ et } \boxed{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$$

PROPRIÉTÉ

La valeur efficace d'une grandeur électrique dépendant du temps correspond à la valeur de la grandeur **continue** de même nature qui provoquerait la même dépense énergétique que la grandeur variable pendant la même durée dans une résistance identique.

3 retour sur les exemples

a. circuit (L, C) série

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- $u_C = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ où A et B sont déterminées en fonction des conditions initiales.
- C.I. : à $t = 0$, continuité de u_C et de $i(t)$ donc : $u_C(0) = q_0/C$ et $i(0) = C\dfrac{du_C}{dt}(0) = 0 \Rightarrow A = q_0/C$ et $B = 0$
- $\boxed{u_C(t) = \dfrac{q_0}{C}\cos(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$
- $i(t) = C\dfrac{du_c}{dt} \Rightarrow \boxed{i(t) = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t)}$

b. masse accrochée à un ressort

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- $x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)$ où A et B sont déterminées en fonction des conditions initiales.
- C.I. : à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ donc : $A = x_0$ et $B = 0$
- $\boxed{x(t) = x_0\,cos(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$
- $\boxed{\dfrac{dx}{dt}(t) = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)}$

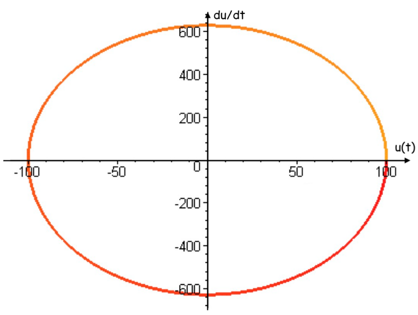
III Portrait de phase

DÉFINITION

Le portrait de phase d'un système à un degré de liberté $p(t)$ est le diagramme caractéristique des solution du système représentés dans l'espace des phases $(p,\dot{p})$: à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.

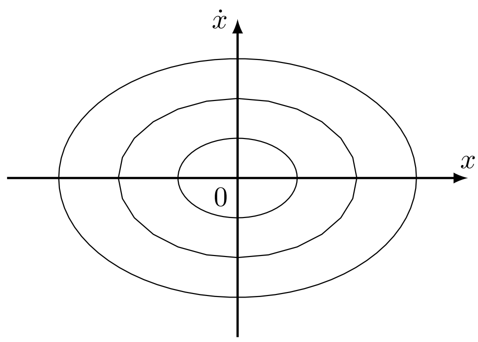
1 circuit (L, C) série

On trace $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ en fonction de $u_c(t)$:



2 masse accrochée à un ressort

On trace $v(t) = \dot{x}$ en fonction de $x(t)$:



IV Bilan de puissance et d'énergie

1 circuit (L, C) série

a. Energie électrique stockée par le condensateur

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t)}$$

b. Energie magnétique stockée par la bobine

$$\boxed{E_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\sin^2(\omega_0 t)}$$

c. Energie totale et moyenne de l'énergie

L'énergie totale du circuit est la somme de l'énergie du condensateur et celle de la bobine :

$$\boxed{E_{tot} = E_C + E_B = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}}$$

L'émergie totale électrique est **constante** et ne dépend que des conditions initiales et du condenstateur. L'énergie électrique stockée par le condensateur se transfère magnétique stockée par la bobine et inversement en permanence.

2 masse accrochée à un ressort

l'énergie mécanique totale de la masse accrochée au ressort est $E_m = E_p + E_c$

a. Energie potentielle

DÉFINITION

l'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort de raideur k et de longeur à vide ℓ_0 est :

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

En utilisant la solution trouvée prédédemment : $\boxed{E_{p,el} = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t)}$

b. Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)}$$

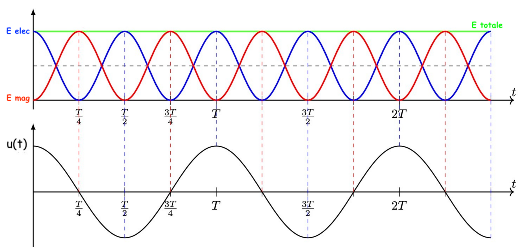
c. Energie mécanique et moyenne de l'énergie

$\boxed{E_c = E_c + E_{p,el} = \frac{1}{2}kx_0^2}$ avec x_0 l'amplitude du mouvement.

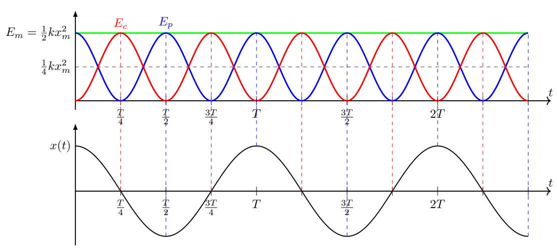
L'énergie mécanique du système est **constante** et elle ne dépend que du ressort et des conditions initiales. L'énergie potentielle se transfère en énergie cinétique et inversement en permanence.

3 Evolution des énergie

a. circuit (L, C) série



b. masse accrochée à un ressort



PROPRIÉTÉ

L'énergie totale d'un système décrit pas une équation d'oscillateur harmonique est constante par rapport au temps.