

Chapitre 0 : Grandeurs Physiques, unités et dimensions

TD 0

UNITÉS ET DIMENSIONS

Capacités exigibles

Connaître les 7 dimensions du système international, leur symbole et les unités de bases associés.

Savoir utiliser l'équation aux dimensions pour :

- Retrouver la dimension d'une grandeur.
- Retrouver l'unité d'une grandeur.
- Vérifier l'homogénéité d'une expression.

Ex. 1. Analyse dimensionnelle (Imp :*** / Niv :*)

Dans les expressions suivantes, établir les valeurs des coefficients α et β par analyse dimensionnelle :

- 1 On cherche à établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de la célérité v de l'onde, et de sa fréquence f sous la forme : $\lambda = v^\alpha f^\beta$.
- 2 On cherche à établir l'expression de la période T des oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ , avec g l'accélération de la pesanteur : $T = k g^\alpha \ell^\beta$ où k est une constante sans dimension.

Ex. 2. Homogénéités (Imp :*** / Niv :*)

Vérifier l'homogénéité des expressions suivantes :

- 1 $S = \pi(r + R^2)$ avec S une surface et r et R des longueurs ;
- 2 $h = \frac{v^2}{g}$ avec h une hauteur, v une vitesse et g l'accélération de la pesanteur ;
- 3 $U = U_0(1 - U_0 e^{-t/\tau})$ avec U et U_0 des tensions électriques et t et τ des durées ;

Ex. 3. Conversion d'unités (Imp :** / Niv :*)

Effectuer les conversions d'unités :

- 1 Votre dernier voyage a duré une heure et quinze minute. Donner le temps du trajet en minutes, en heures et en secondes.
- 2 Le jour sidéral dure $T_S = 86164$ s. Exprimer cette durée en heures, minutes et en valeurs entières en mélangeant des unités heures, minutes et secondes.
- 3 La vitesse du son dans l'air est de 340 m.s^{-1} , exprimer cette vitesse appelée "Mach 1" en km.h^{-1}
- 4 Le débit d'une source est de 3 litres par minute. Combien de cuves de 1m^3 vous faut-il si vous voulez récupérer toute l'eau fournie en une journée ?
- 5 Quelle est la mesure d'une vitesse égale à 1 km.min^{-1} dans un système d'unités où l'unité de longueur serait le mile marin ($1 \text{ mile} = 1852 \text{ m}$) et l'unité de temps serait l'heure ?

Ex. 4. Intérêt de l'analyse dimensionnelle (Imp :*** / Niv :**)

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par $E = \frac{1}{2} J \omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide en rad.s^{-1} .

- 1 Quelle est la dimension du moment d'inertie J ?
- 2 Un élève propose pour formule du moment cinétique de la sphère $J = \frac{5}{2} m^2 R$ avec m la masse du solide et R son rayon. Son résultat est-il correct ?
- 3 Le même élève a trouvé comme résultat du problème de mécanique que l'accélération a du solide était : $a = \frac{(M \sin \alpha - m)g}{M + m + J/R^2}$, où M et m désignent des masses et g l'accélération de la pesanteur. Est-ce raisonnable du point de vue de l'homogénéité ?

Ex. 5. Temps de réponse (Imp :** / Niv :*)

Le cerveau humain met environ $1/500$ seconde pour reconnaître un objet familier.

➤ Exprimez cet intervalle de temps en millisecondes, microsecondes, et nanosecondes, chacune avec un chiffre significatif.

Ex. 6. Accélération (Imp :** / Niv :*)

L'accélération d'un objet entre deux points est définie comme la différence de vitesses entre ces deux points divisée par la différence des temps auxquels l'objet passe en ces points.

- 1 Quelle est la dimension d'une accélération ?
- 2 Quelle est donc la formule correcte, correspondant à l'accélération d'un corps tombant sous l'effet de son poids : a) $g = 9,81 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$; b) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; c) $g = 9,81 \text{ m.s}$

Ex. 7. Force et Newton (Imp :*** / Niv :**)

Le principe fondamental de la dynamique dit qu'un corps soumis à une force totale \vec{F} subit une accélération \vec{a} selon la formule : $\vec{F} = m \vec{a}$.

- 1 Connaissant la dimension d'une accélération, en déduire, par analyse dimensionnelle, la dimension d'une force $[F]$: on cherchera à l'écrire sous la forme $[F] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$, et à déterminer les 3 coefficients α , β et γ .
- 2 Une force s'exprime en Newton, noté N. A quoi est équivalente cette unité ?

La formule donnant la force gravitationnelle s'exerçant entre deux objets est la suivante :

$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$, où G est la constante gravitationnelle, m_1 et m_2 les masses des deux objets considérés, et d la distance qui les sépare.

- 3 Etablir l'équation aux dimensions de G (même principe qu'à la question 1), et en déduire son unité.

Capacités exigibles

<p>Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.</p> <p>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).</p> <p>Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.</p>
<p>Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.</p> <p>Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.</p> <p>Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.</p>
<p>Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.</p>
<p>Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.</p> <p>Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.</p>
<p>Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.</p> <p>Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.</p>

1 Incertitudes de type B

Ex. 1. Mesure du rayon d'un cercle

Un étudiant écrit sur son compte-rendu de TP : « le rayon du cercle vaut $R = 5,2 \pm 0,1$ cm »

- 1 Quelle est la grandeur mesurée ?
- 2 Combien vaut l'incertitude type absolue ? L'incertitude type relative ?
- 3 Exprimer l'intervalle auquel appartient R .
- 4 Quelle est l'incertitude relative sur l'aire du cercle ? On considère que π est une valeur exacte.
- 5 Quelle est l'incertitude absolue sur l'aire ?
- 6 Exprimer le résultat du calcul de l'aire accompagné de son incertitude absolue avec le bon nombre de chiffres significatifs.

Ex. 2. Mesure de résistance

On souhaite mesurer la résistance R d'un résistor dans un circuit électrique. Pour cela, on mesure dans un premier temps le courant électrique I qui traverse le résistor avec un ampèremètre branché en série puis la tension U aux bornes du résistor avec un voltmètre branché en parallèle. La résistance est alors donnée par $R = \frac{U}{I}$.

La précision de l'ampèremètre est donnée par $\pm 3\% \pm 1$ digit et celle du voltmètre est $\pm 2\% \pm 2$ digit. On mesure une tension de 6,03 V pour un courant de 13,2 mA.

Le digit d'un appareil est une unité du plus petit chiffre affiché.

Par exemple, sur un voltmètre je lis $U = 12,45$ V sur le calibre 20 V. Le digit vaut 0,01 V. Sur un ohmètre, je lis $R = 100,2 \Omega$. Le digit vaut 0,1 Ω .

- 1 Que vaut R et quelle est son incertitude ? Type A ou type B ?
- 2 Présenter le résultat.

Ex. 3. Mesure de longueurs à la règle graduée (ou au banc d'optique)

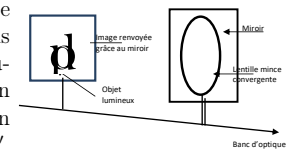
Pour mesurer la longueur d'onde d'un signal ultrasonore sinusoïdal, on place un émetteur à ultrasons ($f = 40$ kHz) en un point A fixe. Un récepteur se déplace le long de l'axe d'émission. La technique est de localiser une première position où les signaux émis et reçus sont en phase, puis en éloignant le récepteur, de retrouver successivement les deux signaux en phase.

- 1 Initialement les deux signaux sont en phase. On éloigne le récepteur et on repère 8 positions où les signaux sont successivement en phase. Combien a-t-on parcouru de longueurs d'onde ?
- 2 La distance D parcourue par le récepteur est de 6,9 cm. Cette distance est lue sur un mètre gradué au millimètre. Quelle est l'incertitude ΔD sur la mesure de D ? Est-elle de type A ou de type B ? Présenter le résultat.
- 3 Exprimer λ en fonction de D . Calculer alors l'incertitude $\Delta \lambda$. Présenter le résultat. En déduire l'intérêt de cette mesure (pourquoi ne pas parcourir une seule longueur d'onde ?).
- 4 La célérité de l'onde ultrasonore sinusoïdale vaut $c = \lambda \times f$.
 - Sachant que la notice constructeur indique « frequency accuracy : $\pm 50 \text{ ppm} + 10 \mu \text{ Hz}$ », calculer Δf . (ppm signifie partie par million donc ici $50 \cdot 10^{-6} \times f$)
 - En déduire Δc
 - Présenter le résultat

Ex. 4. Mesure de la distance focale d'une lentille convergente.

Les lentilles minces en optique sont caractérisées par leur distance focale notée f' . La mesure la plus simple consiste à utiliser la technique de l'auto-collimation (nous la verrons au cours des TP d'optique géométrique). Un objet plan lumineux éclaire une lentille mince convergente. En plaçant un miroir derrière cette dernière, une image se forme sur le plan de l'objet initial. Si la distance objet-lentille est égale à f' , alors l'image observée est nette, sinon elle est floue.

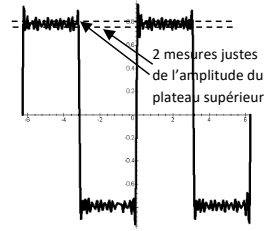
On utilise un banc d'optique pour mesurer la distance entre l'objet et la lentille. Il est gradué au millimètre. En réalisant cette mesure, un étudiant trouve une focale $f' = 10,4$ cm. Toutefois, il se rend compte que s'il décale la lentille de 5 millimètres il a toujours l'impression de voir l'image finale nette.



- 1 Quelles sont les sources d'incertitudes ?
- 2 Évaluer ces incertitudes.
- 3 Calculer l'incertitude totale et présenter le résultat.

Ex. 5. Mesure d'une amplitude crête à crête à l'oscilloscope.

On désire mesurer l'amplitude crête à crête ACC d'un signal carré à l'aide des curseurs de l'oscilloscope, on en place donc un sur le plateau supérieur et un autre sur le plateau inférieur. Il existe deux sources d'incertitudes :



- la valeur affichée par les curseurs sur l'écran de l'oscilloscope n'est pas une valeur vraie, c'est une valeur qui est soumise aux imperfections des composants électroniques de l'instrument de mesure. Le constructeur garantit donc la valeur affichée avec une précision donnée. On appelle Δm_{instr} l'incertitude sur la valeur affichée par l'instrument.
 - le signal mesuré à l'oscilloscope est légèrement bruité, ce qui se traduit par une épaisseur non négligeable des traits sur l'écran. On peut donc placer les curseurs sur une petite gamme verticale de tension tout en faisant une mesure juste (voir figure). Cela génère donc aussi de l'incertitude. On l'appelle Δm_{exp} .
- 1 La notice d'utilisation de l'oscilloscope indique la précision des mesures d'amplitudes « verticales » : « DC gain Accuracy : 2% full scale » Calculer Δm_{instr} . Le signal est représenté entre -1 V et +1 V. Les valeurs affichées en ordonnées sont ± 0.2 V, ± 0.4 V, ± 0.6 V et ± 0.8 V.
 - 2 Évaluer Δm_{exp} .
 - 3 Calculer l'incertitude type totale, ainsi que son incertitude élargie pour un niveau de confiance de 95% et présenter le résultat.

2 Incertitudes de type A

Ex. 6. Mesure d'un indice de réfraction

Dans le tableau suivant sont rassemblés les résultats des mesures de l'indice de réfraction n du Plexiglas de 28 binômes de TP.

1,473	1,491	1,525	1,551	1,460	1,434	1,479
1,473	1,493	1,481	1,512	1,495	1,517	1,517
1,501	1,514	1,511	1,505	1,483	1,509	1,483
1,510	1,485	1,479	1,514	1,595	1,462	1,493

- 1 Déterminer par la méthode LA PLUS EFFICACE (calculatrice/excel/LatisPro) la moyenne arithmétique.
- 2 Déterminer l'incertitude type absolue sur l'indice de réfraction n puis l'incertitude avec un intervalle de confiance de 95%.
- 3 L'incertitude type A semble-t-elle bien adaptée à cette mesure ?

Ex. 7. Mesure d'une longueur d'onde

Dans le tableau suivant sont rassemblés les résultats des mesures de la longueur d'onde λ en nm du laser des 20 binômes de TP.

680	665	647	666	689
670	665	666	669	637
687	618	660	650	618
621	635	654	601	620

- 1 Calculer la moyenne arithmétique des 20 mesures.
- 2 Calculer l'incertitude-type absolue sur la longueur d'onde et donner le résultat pour un intervalle de confiance de 95 %
- 3 L'incertitude type A semble-t-elle bien adaptée à cette mesure ?

Ex. 8. Sens critique

S'il faut veiller à ne pas sous-estimer les incertitudes, notamment en recensant toutes les sources d'incertitudes pour une évaluation de type B, il faut aussi veiller à ne pas les surestimer, en particulier par des calculs qui peuvent se révéler parfois trop artificiels et déconnectés de la réalité expérimentale. Il s'agit donc de trouver le bon compromis et il est donc nécessaire d'avoir une bonne connaissance générale, un bon **sens critique** et un recul suffisant sur l'expérience que l'on réalise.

Par exemple, on fait une mesure au capacimètre de la valeur C de la capacité d'un condensateur et on détermine l'incertitude- type B en utilisant la notice du multimètre.

La grandeur mesurée est $C = 1,95 \mu\text{F}$ et la notice donne, sur le calibre utilisé pour la mesure, la précision : 1% Lecture + 2 digits.

- 1 Calculer l'incertitude absolue : ΔC_B .

La valeur mesurée de C fluctue. On réitère 10 fois la mesure et on note les résultats :

1,91	1,93	1,96	1,95	1,96
1,93	1,94	1,95	1,89	1,97

- 2 Calculer l'incertitude de type A ΔC_A

On en déduit alors $\Delta C = \sqrt{(\Delta C_A)^2 + (\Delta C_B)^2}$, et on a alors $C = (\langle C \rangle \pm 2\Delta C) \mu\text{F}$.

- 3 Exprimer C comme ci-dessus.