DS1 de mathématiques, partie calcul, vendredi 15 septembre 2023 (1h15)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Exercice 1 *Un élément d'une partie peut parfois avoir un élément ayant des parties*
Soient les ensembles suivants :
$E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{\{2,4,6\},\{1,\{3,5\}\}\}$, $B = \{\{4\},\{5,6\}\}$ et $C = \{4,5,6\}$.

1. Écrire la liste des éléments de $\mathcal{P}(C)$.
2. Est-ce que $A = E$?
3. Est-ce que $A \subset \mathcal{P}(E)$? $B \subset \mathcal{P}(E)$? $C \subset \mathcal{P}(E)$?
4. Est-ce que $C \in B$? $C \subset B$?
5. Calculer $E \cap \bigcup_{X \in A} X$.
6. Y a-t-il une relation entre l'ensemble $\bigcup_{X \in B} X$ et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$?
7. Justifier le titre de l'exercice en se servant des ensembles ci-dessus.

Exercice 2 *Robot*
Soient A, B et C trois énoncés mathématiques quelconques.
Montrer que $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C))$ en utilisant une table de vérité.

Exercice 3 *Découpages*

1. Exprimer **sans justification** les ensembles suivants comme des réunions **disjointes** d'intervalles utilisant **le moins d'intervalles possibles** (les singletons sont des intervalles : $\{a\} = [a,a]$) :

$$\mathbb{R} \setminus (]-1,1[\cup]1,+\infty[), \quad [4,6[\cup(\mathbb{R}\setminus]1,5]), \quad [0,3]\Delta([-1,1[\cup]-1,1]), \quad [-2\sqrt{3},\mathrm{e}[\cap(\mathbb{Z}\cup]0,1[), \quad \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^\star.$$

2. Exprimer sans justification l'ensemble $(]4,6] \times [0,3[) \cap ([3,5[\times (\mathbb{R}\setminus]1,2[))$ comme une réunion disjointe de produits cartésiens d'intervalles utilisant le moins de produits d'intervalles possibles.

Exercice 4 *Un nombre bien caché*
Soit $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
2. En déduire que a vérifie une équation de type $P(x) = 0$, où P est une fonction polynomiale de degré 3 que l'on déterminera.
3. En étudiant la fonction P, en déduire une expression très simple de la valeur de a.