DM3 de mathématiques en autocorrection (entraînement au calcul)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Barème sur 95 points, avec $\pm 15\%$ pour les "croix rédactionnelles", puis ± 1 pt de présentation sur la note sur 20

— Exercice 1 (20 pts) :

1. 2 ($-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$)
2. 1 ($\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
3. 1 ($\sum_{m=42}^{2022}\ \sum_{n=m+1}^{2022} a_{m,n}$ ou $\sum_{m=42}^{2021}\ \sum_{n=m+1}^{2022} a_{m,n}$)
4. 2 = 1 (triangle) + 1 ($(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$)
5. 3 = 1 (formule du binôme) + 1 ($\binom{9}{5}\cdot\frac{1}{3}$) + 1 (résultat simplifié = 42)
6. 2 = 1 (idée Bernoulli) + 1 (formule exacte)
7. 4 = 1 (déf sur $\mathbb{R}$) + 1 (formule du min) + 1 (construction) + 1 (rédaction)
8. (a) 2 (dont 1 si l'une des deux sous-phrases est correcte)
   (b) 3 = 1 (partie convenant) + 1 (justification minoration) + 1 (justification pas de min)

— Exercice 2 (20 pts) :

1. 6 = [2] ($1-\mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) +1 ($z_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) + 1 ($= \frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}$) + 1 ($e^{z_0} = \left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$) + 1 ($= \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$)
2. 4 = 1 ($\cos^6(x) = \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^6$) + 1 ($\frac{1}{2^6}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x}+6\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+20+15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}+6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x})$) + 1 ($\frac{1}{32}\cos(6x)+\frac{3}{16}\cos(4x)+\frac{15}{32}\cos(2x)+\frac{5}{16}$) + 1 ($\frac{1}{192}\sin(6x)+\frac{3}{64}\sin(4x)+\frac{15}{64}\sin(2x)+\frac{5x}{16}+C$ ($C\in\mathbb{R}$))
3. (a) 3 = 1 ($2\cos(x/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}$) + 1 (cas $x \in]-\pi,\pi[+4\pi\mathbb{Z}$) + 1 (cas $x\in]\pi,3\pi[+4\pi\mathbb{Z}$)
   (b) 3 = 1 (cas $x\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$) + 1 (cas $\ln(2\cos(x/2))+\mathrm{i}x/2+2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$) + 1 (cas $\ln(-2\cos(x/2))+\mathrm{i}(x/2+\pi)+2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$)
   (c) 4 = 1 ($\mathrm{Im}(\cdot)$) + [2] (appliquer binôme) + 1 ($(2\cos(x/2))^n\sin(nx/2)$)

— Exercice 3 (15 pts) :

1. 5 = [2] (système) + 1 ($a=1$ et $b=3-\mathrm{i}$) + 1 (translation) + 1 (vecteur $(3,-1)$)
2. 5 = 1 (système) + 1 ($a=-\frac{1}{3}$ et $b=2$) + 1 (homothétie et rapport $-\frac{1}{3}$) + [2] (centre $C(\frac{3}{2},0)$)
3. 5 = 1 (système) + 1 ($a=-\mathrm{i}$ et $b=1+2\mathrm{i}$) + 1 (rotation) + 1 (centre $C(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$) + 1 (angle $-\frac{\pi}{2}$)

— Exercice 4 (20 pts) :

1. 3 = 1 ($\ln(i^k) = k\ln(i)$) + 1 ($\frac{n(n+1)}{2}$) + 1 ($\ln(n!)$)
2. 6 = [2] ($a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$) + [2] (bon chgmt d'indice) + [2] (télescopage et rés)
3. 5 = 1 (commencer la somme à 1) + [2] (simplifier k et compléter en binômial) + 1 (changement d'indice) + 1 (résultat)
4. 6 = [3] bons paquets + 1 ($\sum(2+i)i$) + 1 (résultat sous forme de somme) + 1 (factorisation)

— Exercice 5 (10 pts) :

1. 4 = 1 (suite AG et $b\neq 1$) + 1 ($\ell = 2$) + 1 (dire $u_n-\ell$ géom de raison b) + 1 (expression finale u_n)
2. 2 = 1 ($b^{12}=1$) + 1 (suite 12-périodique)
3. 4 = 3 (analyse) + 1 (synthèse)

— Exercice 6 (10 pts) :

1. 3 = 1 ($= \mathrm{Im}\left((c+\mathrm{i}\,s)^5\right)$) + 1 ($= 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5$) + 1 ($= 16s^5 - 20s^3 + 5s$)
2. 4 = 1 ($0 = 16y^5 - 20y^3 + 5y$) + 1 ($= y\left(16(y^2)^2 - 20y^2 + 5\right)$) + 1 ($= 16y\left(y^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(y^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$)
   + 1 ($0,\ \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$)
3. 3 = 1 ($\sin(0),\ \sin\left(\pm\frac{\pi}{5}\right),\ \sin\left(\pm\frac{2\pi}{5}\right)$) + 1 (sin strict croiss sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) + 1 ($\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$)

Exercice 1 *Formules de cours*

1. Compléter sans justification la formule $\cos p - \cos q = \ \dots$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.}$$

2. Donner sans justification la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

3. Donner sans justification une expression de $\displaystyle\sum_{n=42}^{2022}\sum_{m=42}^{n-1} a_{m,n}$ obtenue par interversion des sommes.

$$\boxed{\sum_{n=42}^{2022}\sum_{m=42}^{n-1} a_{m,n} = \sum_{m=42}^{2022}\sum_{n=m+1}^{2022} a_{m,n} = \sum_{m=42}^{2021}\sum_{n=m+1}^{2022} a_{m,n}.}$$

4. Déterminer l'expression développée de $(a+b)^6$, pour $a, b \in \mathbb{C}$, en justifiant les coefficients.

En construisant les lignes du triangle de pascal jusqu'à l'indice 6 (explicitement sur la copie !),

$$\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.}$$

5. Déterminer, en calculant efficacement **un seul** coefficient binomial, le coefficient de x^5 dans le développement de l'expression polynomiale $\left(x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^9$.

On a
$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^k\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^{9-k},$$
donc le coefficient cherché est
$$\binom{9}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^4=\binom{9}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 3}=\boxed{42.}$$

6. Est-ce que $2022^{2004}-1966^{2004}$ est un multiple de 56 ?

Par la formule de Bernoulli,
$$2022^{2004}-1966^{2004}=(2022-1966)\sum_{k=0}^{2003}2022^{2003-k}1966^k=56p,$$
pour un certain $p\in\mathbb{N}$. Ainsi, $\boxed{2022^{2004}-1966^{2004}\text{ est un multiple de 56.}}$

7. On rappelle que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire, par une construction soigneuse, que $x\longmapsto\min(\sin(x),\cos(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f:x\longmapsto\min(\sin(x),\cos(x))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puisque sin et cos le sont et l'application min est définie sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{\sin(x)+\cos(x)-|\sin(x)-\cos(x)|}{2}.$$
On en déduit que f est continue, comme combinaison linéaire des fonctions sin, cos, toutes deux continues, et de la composée d'une combinaison linéaire de sin et cos (elle aussi continue puisque sin et cos le sont) et de la fonction valeur absolue, elle aussi continue.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } x\longmapsto\min(\sin(x),\cos(x)) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

8. (a) Donner sans justification la traduction formelle du fait qu'il existe une partie de $\mathbb{R}$ minorée n'admettant pas de plus petit élément.

$$\boxed{\exists A\in\mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \left((\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in A,\ x\geq m)\ \text{et}\ (\forall x\in A,\exists a\in A,\ a<x)\right).}$$

(b) Donner explicitement une telle partie en justifiant soigneusement qu'elle convient.

Les possibilités sont multiples. On en donne deux ici :
$\boxed{\text{L'ensemble vide } \emptyset \text{ convient,}}$ puisqu'il est minoré, par exemple par 0 ($(\forall x\in\emptyset,\ x\geq 0)$ est vraie) et n'admet pas de plus petit élément puisqu'il n'admet pas d'éléments tout court.
$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{R}_+^\star \text{ convient,}}$ puisqu'il est minoré par 0 et que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^\star$, $\frac{x}{2}\in\mathbb{R}_+^\star$ et $\frac{x}{2}<x$.

Exercice 2 *Calculs complexes*

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $z_0 = \pi\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^5}$, puis faire de même avec e^{z_0}.

La forme trigonométrique de z_0 est obtenue ainsi :

$$z_0 = \pi\frac{\left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}e^{+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{\pi}{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{-5\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-7\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

et donc sa forme algébrique est

$$z_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}.}$$

On a alors la forme trigonométrique de e^{z_0} :

$$e^{z_0} = \boxed{\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

et sa forme algébrique :

$$e^{z_0} = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}.}$$

---

2. Linéariser l'expression $\cos^6(x)$ et en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^6(x)$.

$$\begin{aligned}\cos^6(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^6\\ &= \frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}6x}+6\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+20+15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}+6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6x}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\left(\cos(6x)+6\cos(4x)+15\cos(2x)+10\right)\\ &= \boxed{\tfrac{1}{32}\cos(6x)+\tfrac{3}{16}\cos(4x)+\tfrac{15}{32}\cos(2x)+\tfrac{5}{16}.}\end{aligned}$$

En primitivant terme à terme, on obtient les primitives suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\int\cos^6(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{192}\sin(6x)+\frac{3}{64}\sin(4x)+\frac{15}{64}\sin(2x)+\frac{5x}{16}+C\ (C\in\mathbb{R}).}$$

---

3. (a) Pour $x \in \mathbb{R}\setminus(\pi+2\pi\mathbb{Z})$, déterminer la forme trigonométrique de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

$$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}},$$

donc sa forme trigonométrique est :

— $\boxed{\text{si } x\in\,]-\pi,\pi[+4\pi\mathbb{Z},\ \begin{cases}\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ \mathrm{Arg}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) &\equiv \frac{x}{2}\ [2\pi];\end{cases}}$

— $\boxed{\text{si } x\in\,]\pi,3\pi[+4\pi\mathbb{Z},\ \begin{cases}\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| &= -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ \mathrm{Arg}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) &\equiv \frac{x}{2}+\pi\ [2\pi].\end{cases}}$

(b) Déterminer, pour x réel fixé, l'ensemble $\mathcal{S}_x$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = 1 + e^{ix}$.

Soir $x \in \mathbb{R}$. On distingue plusieurs cas :

— si $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $1 + e^{ix} = 0$, donc $\boxed{\mathcal{S}_x = \emptyset;}$

— si $x \in]-\pi, \pi[+ 4\pi\mathbb{Z}$, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = 1 + e^{ix} \iff \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z)} & = & 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \operatorname{Im}(z) & \equiv & \frac{x}{2}\ [2\pi], \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{S}_x = \left(\ln\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + i\frac{x}{2}\right) + 2i\pi\mathbb{Z};}$$

— si $x \in]\pi, 3\pi[+ 4\pi\mathbb{Z}$, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = 1 + e^{ix} \iff \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z)} & = & -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \operatorname{Im}(z) & \equiv & \frac{x}{2} + \pi\ [2\pi], \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{S}_x = \left(\ln\left(-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + i\left(\frac{x}{2} + \pi\right)\right) + 2i\pi\mathbb{Z}.}$$

(c) Déduire de 3a, pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
La formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + e^{ix}\right)^n = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}},$$

donc, en prenant les parties imaginaires,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

Exercice 3 *Calculs de similitudes*
On se place dans le plan usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct, qui le met en correspondance avec $\mathbb{C}$ de la manière habituelle.
On note O l'origine du repère, U le point d'affixe 1 et M, N deux points de $\mathcal{P}$, d'affixes $m \neq n$.
On rappelle qu'il existe une unique similitude directe F telle que $F(M) = O$ et $F(N) = U$.
Décrire le type de cette similitude directe et ses éléments caractéristiques dans les cas suivants :

1. $m = -3 + i$ et $n = -2 + i$;

De manière générale, on notera ici $f : z \longmapsto az + b$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$, la traduction complexe de la similitude directe F. On traduit alors le fait que $F(M) = O$ et $F(N) = U$ par un système :

$$\begin{cases} (-3+i)a & +b & = & 0 \\ (-2+i)a & +b & = & 1. \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $\boxed{a=1}$ puis, par substitution, $\boxed{b=3-\mathrm{i}\,.}$
Comme $a=1$, F est une translation, et b est l'affixe du vecteur de translation :

$$\boxed{F \text{ est la translation de vecteur } \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

---

2. $m=6$ et $n=3$;

Comme ci-dessus, on a

$$\begin{cases} 6a & +b & = & 0 \\ 3a & +b & = & 1. \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $\boxed{a=-\frac{1}{3}}$ puis, par substitution, $\boxed{b=2.}$

Comme $a\in\mathbb{R}^\star\setminus\{1\}$, F est une homothétie. Son centre C est d'affixe $c=\frac{b}{1-a}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{2}.}$ Ainsi

$$\boxed{F \text{ est l'homothétie de centre } C(\tfrac{3}{2},0) \text{ et de rapport } -\tfrac{1}{3}.}$$

---

3. $m=2-\mathrm{i}$ et $n=2$.

Comme ci-dessus, on a

$$\begin{cases} (2-\mathrm{i})a & +b & = & 0 \\ 2a & +b & = & 1. \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $\mathrm{i}a=1$, *i.e.* $\boxed{a=-\mathrm{i}}$ puis, par substitution, $\boxed{b=1+2\mathrm{i}\,.}$

Comme $a\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, F est une rotation. Son centre C est d'affixe $c=\frac{b}{1-a}=\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}.}$

Comme $a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, une mesure de son angle est $\boxed{-\frac{\pi}{2}.}$ Ainsi

$$\boxed{F \text{ est la rotation de centre } C(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ et de mesure d'angle } -\tfrac{\pi}{2}.}$$

Exercice 4 *Calculs de sommes*

On rappelle que, pour un nombre réel x, sa partie entière $\lfloor x\rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor+1$.
Calculer les sommes suivantes, pour $n\in\mathbb{N}$:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(i^k)$,
en utilisant les propriétés algébriques du logarithme ;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(i^k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}k\ln(i) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).}
\end{aligned}
$$

---

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$,
en trouvant $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+3}$, puis effectuant un changement d'indice ;

Pour $a,b\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+3}\iff\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{(a+b)k+(3a+b)}{(k+1)(k+3)},$$

ce qui est vérifié dès que $a+b=0$ et $3(a+b)=1$, ce qui s'obtient avec $\boxed{a=\frac{1}{2}\text{ et }b=-\frac{1}{2}.}$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)}\\
&= \boxed{\frac{3n^2+11n+8}{4(n+2)(n+3)}.}
\end{aligned}
$$

---

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$,
en absorbant k dans le binomial ;

Pour $n=0$, cette somme est nulle et pour $n\geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \\
&= \boxed{n2^{n-1}.}
\end{aligned}
$$

Remarquons que cette dernière formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$,
   en utilisant la sommation par paquets.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} ((i+1)^2 - 1 - i^2 + 1) \cdot i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1) \cdot i \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{(n-1)n}{6}(4n-2+3) \\
&= \boxed{\frac{(n-1)n(4n+1)}{6}.}
\end{aligned}
$$

Exercice 5 *Calcul piégé*

On définit les deux nombres complexes $a = 2 - \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -38$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a + bu_n$.

1. Calculer le terme général de cette suite.

Remarque : le piège est, bien sûr, que les notations de a et b sont inversées par rapport à celle du cours. C'est volontaire, car il est très important de ne pas se référer aux notations, mais aux objets, comme la raison géométrique par exemple, et de ne pas apprendre de formule toute faite pour le point fixe, mais de savoir former l'equation de point fixe pour la résoudre.

Cette suite est arithmético-géométrique de raison arithmétique a et de raison géométrique b. De plus, comme $b \neq 1$, elle n'est pas arithmétique. On applique la méthode du cours en déterminant le point fixe ℓ de la récurrence :

$$a + b\ell = \ell \iff \ell = \frac{a}{1-b}$$

donc

$$\ell = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2-\sqrt{3}+\mathrm{i}} = 2.$$

On sait alors que la suite de terme général $u_n - \ell$ est géométrique de raison b, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = b^n(u_0 - \ell) + \ell = -40\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right)^n + 2.}$$

---

2. Calculer "efficacement" b^{12} et en déduire que la suite (u_n) est périodique.

On a $b = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc $\boxed{b^{12} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi} = 1.}$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^{n+12} = b^n b^{12} = b^n$, donc $u_{n+12} = b^{n+12}(u_0 - \ell) + \ell = b^n(u_0 - \ell) + \ell = u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc périodique de période 12.}}$$

---

3. Résoudre l'équation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = n$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n$. On sait que $u_n = -40\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} + 2$, donc $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} = \dfrac{2-u_n}{40} \in \mathbb{R}$, ce qui n'arrive que si n est un multiple de 6. Dans ce cas, soit $b^n = 1$ et $u_n = -38$, ce qui est impossible, soit $b^n = -1$ et $u_n = 42$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } u_n = n, \text{ alors } n = 42.}$$

Synthèse. Comme

$$u_{42} = -40 \cdot b^{42} + 2 = -40 \cdot b^6 \cdot \left(b^{12}\right)^3 + 2 = -40 \cdot b^6 + 2 = 40 + 2 = 42,$$

alors

$$\boxed{42 \text{ est solution de l'équation } u_n = n.}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'entier 42 est l'unique naturel } n \text{ tel que } u_n = n.}$$

Exercice 6 *Calcul par radicaux*

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$$\begin{aligned} \sin(5x) &= \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}5x}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)^5\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)\\
&= 5(1-\sin^2(x))^2\sin(x) - 10(1-\sin^2(x))\sin^3(x)) + \sin^5(x)\\
&= \boxed{16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)}
\end{aligned}$$

---

2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ vérifie une équation polynômiale de degré 5 et la résoudre.

En prenant $x = \frac{\pi}{5}$ dans l'égalité précédente on voit que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $\boxed{(E):\ P(y)=0}$, où P est la fonction polynôme $y \longmapsto 16y^5 - 20y^3 + 5y$.
On remarque que pour $y \in \mathbb{R}$, $P(y) = y\left(16(y^2)^2 - 20y^2 + 5\right)$.
L'équation du second degré $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$ a pour discriminant $80 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$ et pour solutions $\dfrac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Par ailleurs ces deux racines sont positives ou nulles (en fait strictement, mais cela ne sert pas pour l'instant) donc, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P(y) &= 16y\left(y^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(y^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\\
&= 16y\left(y + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\left(y - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\left(y + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)\left(y - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right).
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E), sont donc, par ordre strictement croissant :

$$\boxed{-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ 0,\ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.}$$

---

3. Exprimer toutes les solutions de cette équation sous la forme $\sin(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, exprimée à l'aide de racines carrées.

Comme $\sin(-2\pi) = \sin(-\pi) = \sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, on en déduit comme précédemment que les nombres

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right),\ 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

sont solutions de l'équation (E).
De plus, la liste ci-dessus est en ordre <u>strictement croissant</u> par stricte croissance de la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En particulier, ces 5 nombres sont <u>deux à deux distincts</u>.
Ainsi, d'une part, on est certain d'avoir retrouvé les cinq racines trouvées précédemment, et d'autre part, on en déduit que

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$
