Exercices sur les séries

Exercice 1 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2. $\frac{2n}{n+2^n}$
3. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
4. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
5. $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
6. $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
7. $\frac{n!}{n^n}$
8. $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
9. $\frac{\sqrt{n}\sin n}{n^2}$
10. $\frac{n^{pn}}{(pn)!}$ $(p \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$
11. $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
12. $\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ $(a>0,\ b>0)$
13. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+^\star)$

Exercice 2 En admettant que la série harmonique alternée converge vers $\ln 2$, donner un n tel que la somme partielle $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 Déterminer un équivalent de $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la nature de $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$.

Exercice 4 Montrer que $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge et calculer sa somme en utilisant une décomposition en éléments simples du type

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

Exercice 5 Déterminer suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha}$.

Exercice 6 Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq p} \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-p+1)}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 7 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. Que dire si $\sum v_n$ converge ? si $\sum u_n$ diverge ?

Exercice 8 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
1. Montrer que la série de terme général $v_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 $\star\star$ Pour $n \geq 2$, on note $\mathrm{dp}(n)$ le nombre de facteurs premiers dans la décomposition de n comptés avec multiplicité (par exemple $\mathrm{dp}(12) = 3$). Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \cdot \mathrm{dp}(n)}$.