C15 - Résumé

Définition : Matrice

Une matrice à n lignes et p colones à coefficient dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexé par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
Autrement dit un élément de $\mathbb{K}^{[1,n] \times [1,p]}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{i,j} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$= (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$$

Propriété : Groupe abélien $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +) \text{ est un groupe abelien}$$

Propriété : 4 propriétés d'espaces vectoriels

Propriété des flemmards :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 1 \cdot A = A$$

Associativité mixte :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

Distributivité mixte à gauche :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Distributivité mixte à droite :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

On dit que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Définition : Matrices élémentaires

Pour $(k, n) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,
On note

$$E_{k,l} = (\delta_{(i,j)(k,l)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{i,j}$$

On appelle matrice élémentaires ces matrices.

Rappel : Symbol de Kronetier

$\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$

Propriété Réécrite Matrice

Toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire a coefficient dans $\mathbb{K}$ des matrices élémentaires,
de manière unique :

$$A = \sum_{(k,l) \in [1,n] \times [1,p]} a_{k,l} E_{k,l}$$

On dira que la famille $(E_{k,l})_{k,l}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition : Base canonique

$(E_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$ est appelée la "base canonique" de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition : Produit matriciel

Pour $A=(a_{j,k})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{j,k})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
$AB\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est définie par :

$$\forall(i,k)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],(AB)[i,k]=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}$$

Proposition : Bilinéarité du produit matriciel

Le produit matriciel est bilinéaire ie linéaire à gauche :

$$\forall A,A'\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),(\lambda A+A')B=\lambda(AB)+A'B$$

et à droite :

$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall B,B'\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),A(\lambda B+B')=\lambda(AB)+AB'$$

Lemme : Produit d'un élément de la base canonique avec matrice

Soit $(i_0,j_0)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ et E_{i_0,j_0} l'élément correspondant de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
$E_{i_0,j_0}B$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$
Donc la seule ligne non nulle est celle d'indice i_0, qui de plus est égal a la ligne d'indice j_0 de B, ce qui s'écrit

$$E_{i_0,j_0}B=(\delta_{i,i_0}b_{j_0k})_{ik}$$

De même pour $C=(c_{li})\in\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$

$$CE_{i_0,j_0}=(\delta_{j,j_0}c_{l,i_0})_{l,j}$$

est la matrice dont la seule colonne non nulle est celle d'indice j_0 qui de plus est égal à la colonne de C d'indice i_0

Corollaire du produit d'un élément de la base canonique avec matrice

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \forall (j',k) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], E_{i,j}^{n,p} E_{j',k}^{p,q} = \delta_{j,j'} E_{i,k}^{n,q}$$

Théorème : Associativité du produit matriciel

$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$$

Définition : Matrice carrée

Une matrice carré d'ordre n est un élément de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$,
qu'on note pour alléger $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition matrice identité

La matrice identité d'ordre n est :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Propriété

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n A = A I_p = A$$

Théorème

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ est un anneau}$$

Remarque

On dit que

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$$

est $\mathbb{K}$ algèbre
ie

$$\begin{cases} (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot) \ \mathbb{K} \text{ espace vectoriel} \\ (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ anneau} \\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \end{cases}$$

Remarque

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \text{ n'est pas un corp}$$

Pour deux raisons :

- Pas commutatif
- Admet des non nuls non-inversibles

Définition : Nilpotence

$N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente
s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $N^k = 0$
Le plus petit k est appelé l'indice de nilpotence r. On a alors :

$$\forall k \geq r, N^k = 0$$

Formule du binôme

Pour tout, $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$
et $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Formule de Bernoulli

Pour tout, $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$
et $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k}$$

Définition : Groupe linéaire

Le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$ et noté $GL_n(\mathbb{K})$
(groupe pour $\times$)

Théorème : Matrices inversibles a droite et a gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi
elle est inversible à gauche (ie $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A'A = I_n$)
ssi elle est inversible à droite (ie $\exists A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AA'' = I_n$)
Dans ce cas les matrices inversibles sont égales.
(ie l'inverse a gauche est l'inverse et celle a droite aussi)

Théorème : Matrices inversibles / Determinant

Soit,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Alors

$$A \in GL_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$$

et si c'est le cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Propriété : Produit de matrices

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$,
Alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$
et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Définition : Matrice diagonale

$D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale
ssi tout ses coefficients non-diagonaux sont nuls ie

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow D[i,j] = 0)$$

Notation pratique
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

($D[i,i] = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$)

Propriété sur les matrices diagonales

- Toute combinaison linéaire de matrices diagonales est diagonale
- Tout produit de matrices diagonales est diagonal. Et le produit est fait coefficient par coefficient,

$$\forall (\lambda_i)_{i=1}^n, (\mu_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, diag(\lambda_i)_{i=1}^n diag(\mu_i)_{i=1}^n = diag(\lambda_i \mu_i)_{i=1}^n$$

- Un matrice diagonale est inversible ssi tous ses coefficients sont diagonaux $\lambda_i, i \in [\![1,b]\!]$ sont non nuls et alors

$$(diag(\lambda_i)_{i=1}^n)^{-1} = diag(\lambda_i^{-1})_{i=1}^n$$

Notation : Matrices diagonales

$D_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n

Propriété

$$D_n \underset{s.g.}{\subset} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ (pour +)}$$

et mieux :
$(D_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un sous anneau de $(D_n, +, \cdot)$ (et mieux $D_n(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$.

Définition : Matrices triangulaires sup et inf

$T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure
ssi tous ses coefficients strictement sous-diagonaux sont nuls ie

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i > j) \Rightarrow T[i,j] = 0$$

(Inférieur est analogue)

Notation : Matrices triangulaires sup et inf

$\mathcal{T}_n^{sup}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices supérieures
$\mathcal{T}_n^{inf}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices supérieures

Propriété : Opérations

- Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieurs est triangulaire supérieure.
- Tout produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure, et sa diagonale est le produit

"coefficients par coefficients" des diagonales de ses facteurs
(cela ne s'étend pas au reste)

Définition : Matrices transposés

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
Sa transposé A^T est définie par :

$$\begin{cases} A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], A^T[i,j] = A[j,i] \end{cases}$$

ie :

$$A^T = (a_{ji})_{(i,j) \in [1,p] \times [1,n]}$$

Propriété : Transposé d'une transposée

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^T)^T = A$$

Propriété : Linéarité de la Transposition

L'application de transposition est linéaire

$$t_{n,p} : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto A^T \end{cases}$$

est bijective et "linéaire"
ie elle <u>preserve les combinaisons linéaires</u>

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

Propriété : Produit d'une transposée

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$$

Proposition : Transposé, Automorphisme d'espace vectoriel

La Transposition

$$t_{n,p} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto A^T \end{cases}$$

est un automorphisme du groupe :

$$(M_n, +)$$

Qui préserve la multiplication du groupe externe
("C'est un automorphisme d'espace vectoriel")
Mais ce n'est pas un morphisme d'anneau

Proposition : Inversion d'une transposé

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$
Alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Définition : Matrice symétrique / antisymétrique

On dit que A est symétrique (resp. antisymétrique) ssi
$A^T = A$ (resp. $A^T = -A$)

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices d'ordre n symétriques (resp. antisymétriques)

Proposition : Les coefs diagonaux d'une Matrice antisymétrique sont nuls

$$\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), \forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = 0$$

("Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls")

Proposition : Matrice symétrique et antisymétrique

Une matrice a la fois symétrique et antisymétrique est nulle

Proposition : Matrices symétriques et antisymétriques, sous-espaces vectoriels

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous groupes de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ qui sont de plus stable par multiplication externes
(ie ce sont des "sous espaces vectoriels" de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$)

Théorème

Toute matrice carré $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique S et d'une antisymétrique A

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

Faire un pivot de Gauss pour trouver l'inverse d'une matrice carré d'ordre n