Exercices de calculs algébriques

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 6-2u_n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le terme général u_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2 Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1+4\mathrm{i}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2\mathrm{i})u_{n+1} - (5-5\mathrm{i})u_n)$.

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k},\ \sum_{i=0}^{n}\frac{3^{2i}}{2^{i+1}},\ \sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}},\ \sum_{j=1}^{n}(2j-1),\sum_{i=0}^{n}i(i-1),\ \sum_{1\le i<j\le n}(i+j),\ \prod_{1\le i<j\le n}x^{i+j}.$$

Exercice 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i}$.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)$ et en déduire l'égalité avec une somme connue (on pourra découper la somme en deux sommes triangulaires).

Exercice 6

1. Trouver un réel $C > 0$ tel que $\displaystyle\left(\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \ge C\right)$.

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $\displaystyle\left(\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)$.

Exercice 7 En remarquant que pour $k \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, montrer que la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est bornée, puis convergente, et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. Retrouver le premier résultat de l'exercice précédent en dérivant f, puis en donnant une expression de f sans signe $\sum$.

Exercice 11 Calculer de différentes manières les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^p$, pour $p = 1$, 2 et 3.

Exercice 12 Pour $0 \leq p \leq n$, montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 13 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}$.