C12 - A - Limites de fonctions

I. Intro

I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que ($a \in I$ ou a est une borne de I)
On s'intéresse au comportment de $f(x)$ lorsque $x \in I$ est "proche" de a

Définition (Non universelle)

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}$,
On a 3 cas :

- Si $w \in \mathbb{R}$ les voisinages spécifiques de w sont les $[w - \epsilon, w + \epsilon]$
  Ou $\epsilon > 0$
- Si $w = -\infty$ les voisinages spécifiques de w sont les $]-\infty, B]$ ou
  $B \in \mathbb{R}$
- Si $w = +\infty$ les voisinages spécifiques de w sont les $[a, +\infty[$, ou
  $A \in \mathbb{R}$

Notation

On notera $\mathcal{V}(w)$ l'ensemble des voisinages spécifiques de w (Ensemble de parties de $\mathbb{R}$)

Définition

Une propriété est dite vérifiée au voisinage de $w \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi il existe un voisinage spécifique de w que lequel la propriété soit vérifiée.

- Exemple :
  La fonction $\exp$ est bornée au voisinage de $-\infty$
  il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\exp|_{]-\infty,B]}$ soit bornée

- Exemple :
  La fonction $\ln$ est strictement positive au voisinage de 2

  Mais il est faux de dire que la fonction est positive ou nulle au voisinage de 1.

Définition de la limite

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

- Remarque
  La définition est équivalente a cela :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap I) \subset V$$

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), U \cap I \subset f^{-1}(V)$$

Remarque

Quand $a \in \mathbb{R}$ il est pratique de faire un "changement de var." :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow f(a+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} l$$

ou encore :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow f(x) - l \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x) - l| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Ce qu'on note souvent en majorant $|f(x) - l|$ par une quantité qui tend vers 0

II. Suite du cours

Théorème : unicité de la limite

Si $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifient

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \text{ et } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \text{ alors } l = l'$$

Démonstration identique à celle des suites

On introduit la notation :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l = \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Propriété

Si $a \in I$ et $\lim_a f = l$
Alors

$$l = f(a)$$

Démonstration :
Cas ou $l \in \mathbb{R}$:
Supposons $a \in I$ et $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$
Par def de la limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$\epsilon = \frac{1}{n+1}$". Cela fournit un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

En particulier comme $a \in I$ et $|a - a| = 0$
On obtiens

$$|f(x) - l| \leq \frac{1}{n+1}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$

$$|f(a) - l| \leq 0$$

Ainsi $f(x) = l$

Cas ou $f(x) = l$:
On aurait alors

$$\forall A \geq 0, \exists \alpha > 0, dora \ll x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$$

Avec $x = a$ on obtiens :

$$\forall A \geq 0, f(a) \geq A$$

Ce qui est impossible

Cas $l = -\infty$:
Impossible de même.

Propriété

Si $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$
alors f est bornée au voisinage de a

Démonstration : Comme les suites
Cas $a \in \mathbb{R}$:
Soit $\epsilon = 1 > 0$
Donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], f(x) \in [l - 1, l + 1]$$

Ainsi $f|_{I \cap [a-\alpha, a+\alpha]}$ est bornée

Cas $a = +\infty$:
Soit $\epsilon = 1 > 0$
Alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I \cap [A, +\infty[, f(x) \in [l - 1, l + 1]$$

Donc $f|_{I \cap [A, +\infty[}$ est bornée

Cas $a = -\infty$: De même

Propriété

La notion de limite est locale
Si $l \in \overline{\mathbb{R}}$ Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow (f|_V)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Extension

Soit f : $D_f \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$
S'il existe $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que
$D_f \cap W$ soit un intervalle non trivial dont a soit un élément ou une autre borne
On peut définir pour $l \in \overline{\mathbb{R}}$, le fait que

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Par la propriété :

Propriété

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in D_f \cap W, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

Définition de la limite a droite et a gauche

On considère $g = f|_{I \cap]a,+\infty[}$ resp ($g = f|_{I \cap]-\infty,a[}$)
et on dit que f admet une limite a droite (resp gauche) en a ssi

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

On note alors
Limite a droite :

$$g(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$$

$$g(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} l$$

Limite a gauche :

$$g(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$$

$$g(x) \underset{\substack{x \to a \\ <}}{\longrightarrow} l$$

Définitions formelles de la limite a droite et a gauche

Cas $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{a^+} f = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{a^-} f = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$$

Cas $l \in \overline{\mathbb{R}}$:
A faire

Extension

On suppose que I est un intervalle non trivial, $a \in I$ et f définies "au moins" sur $I \backslash \{a\}$ (elle peut ou non être définie en a)

Définition : Limite par valeurs différentes

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$
On dit que $f(x)$ tends par valeurs différentes lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I \backslash \{a\}, (x \in U \Rightarrow f(x) \in V)$$

On note alors

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} l$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = l$$

- Exemple :
  Soit f : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tel que
  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
  Soit $\epsilon > 0$,
  On pose $\alpha = \epsilon > 0$
  Soit $x \in \mathbb{R}^*$
  On a alors $|f(x)| = |x|| \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq \alpha = \epsilon$

  Donc

  $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = 0$$

Propriété

Caractérisation séquentielle des limites
Avec les notations précédentes

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow (\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(u_n) = l))$$

Théorème : Opération sur les limites

CL, produit, quotient
Enoncer les résultats et les démontrer (Même que les suites)

Théorème : Composition de limites

Soit I, J des intervalles non-triviaux, $a, b, l \in \overline{\mathbb{R}}$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$
Telles que $f(I) \subset J$ et $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$
Alors

$$\lim_a (g \circ f) = l$$

Théorème : Stabilité des inégalités larges par passage a la limite

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des limites en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et vérifiant :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Alors

$$\lim_a f \leq \lim_a g$$

Théorème : Limite par encadrement (gendarmes)

Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$
tq f et h admettent la même limite l en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Alors g admet une limite en a et

$$\lim_a g = l$$

Théorème de minoration ou majoration

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$
tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

et a un point ou une borne de I.
Si $\lim_a f = +\infty$, alors $g(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque x tend vers a.
(Même pour la minoration en $-\infty$)

Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \to \mathbb{R}$,
Soit a une borne de I tel que $a \notin I$
Si f est monotone alors elle admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a

Corollaire du th de la limite monotone

Une fonction monotone admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de son intervalle de définition qui n'en est pas une borne.

Démonstration :

En notant $f : I \to \mathbb{R}$ monotone et a le point. On applique le TH précédent a $f|_{]-\infty,a[}$ et $f|_{]a,+\infty[}$

Remarque :

Si $f \uparrow$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$$

Si $f \downarrow$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \geq f(x) \geq \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$$

(preuve par stabilité de $\leq$ par passage a la limite.)

III. Preuves

Théorème : Composition de limite

Excalibur 1.