Calcul matriciel

Lycée Berthollet, MPSI1 2021-22

Soient $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $n, p, q, r \in \mathbb{N}^\star$, qui serviront à spécifier les tailles des matrices.

I Espaces de matrices

Définition 1 Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, *i.e.* une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ de la forme :

$$A = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{i,j} = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

On représente les matrices sous forme de tableaux de nombres :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition 2 On utilisera parfois les notations tirés du langage Python suivantes : on note $A[i,j] = a_{i,j}$, $A[:,j]$ la matrice colonne formée de la j-ème colonne de A et $A[i,:]$ la matrice ligne formée de sa i-ème ligne. Dans le cas d'un matrice colonne X, on note simplement $X[i]$ le coefficient de la i-ème ligne, au lieu de $X[i,1]$.

Exemples 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & e & 42 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0,1 \\ 0,04 \end{pmatrix}.$$

On introduit la notation suivante, plus parlante et plus pratique :

Définition 4 On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5 $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} ;\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C} \right\}.$

Par sa définition comme ensemble $\mathbb{K}^X$ des applications d'un ensemble X donné vers $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ hérite naturellement de la structure de groupe abélien de $(\mathbb{K}, +)$, comme on l'a vu dans le chapitre sur les structures algébriques : l'addition des matrices, encore notée $+$, se fait **coefficient par coefficient** (*i.e.* $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$) et on a la

Proposition 6 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ *est un groupe abélien.*

On ajoute à cette structure la *loi externe* de multiplication d'une matrice par un scalaire, qui se fait aussi **coefficient par coefficient** :

$$\cdot_{ext} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, (a_{i,j})) & \longmapsto & \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}). \end{array} \right.$$

Exemple 7

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On a alors les propriétés suivantes, qui découlent immédiatement des définitions des opérations de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et des propriétés d'anneau de $\mathbb{K}$:

Proposition 8 ***(les quatre propriétés d'un "espace vectoriel")***

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 1_{\mathbb{K}} A = A$;
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda(A+B) = \lambda A + \mu B$;
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

Remarque 9 Les trois dernières propriétés ont des noms : *associativité mixte*, *distributivité mixte à gauche* et *distributivité mixte à droite*.
La première propriété n'a pas vraiment de nom, mais mon enseignant de "Sup" l'appelait la "propriété des flemmards", car généralement triviale à vérifier, ce qui est un excellent moyen mnémotechnique.

On dira au second semestre que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* (groupe abélien muni d'une loi externe vérifiant les quatre propriétés ci-dessus).

Remarque 10 Tout cela n'utilise pas la structure rectangulaire des matrices, *i.e.* le fait que l'ensemble de départ $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ soit un produit cartésien. En effet, tout ensemble de la forme $\mathbb{K}^X$ est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Néanmoins, cette structure rectangulaire servira plus loin pour multiplier deux matrices de tailles adéquates.

Définition 11 Pour $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ on note $E_{k,l} = (\delta_{(i,j),(k,l)})_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on appelle ces matrices les *matrices élémentaires* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 12 Pour l'instant, on a omis dans cette notation de mentionner n et p pour alléger les notations, mais ces matrices en dépendent évidemment, et on ajoutera ces nombres en exposant si nécessaire ($E_{k,l}^{n,p}$).

Exemple 13 Si $n = 2$ et $p = 3$, alors $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 14 *Toute matrice s'écrit de manière* ***unique*** *comme combinaison linéaire des matrices élémentaires :*

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A = \sum_{(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{k,l} E_{k,l}.$$

La famille $e = (E_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ *est appelée* ***base canonique*** *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration: L'égalité est évidente. Il reste à montrer l'unicité.
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $b_{k,l}$ des coefficients tels que

$$A = \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_{k,l}E_{k,l}.$$

En posant $B = (b_{i,j})$, on a

$$B = \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_{k,l}E_{k,l} = A,$$

donc B et A ont les mêmes coefficients et, pour tout $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $b_{k,l} = a_{k,l}$. □

On vient de voir que la structure "vectorielle" de $\mathcal{M}_{n,p}$ est très simple. En revanche, le produit qu'on va définir maintenant est une notion beaucoup plus subtile.

II Produit de matrices

On rappelle qu'on a vu sur des exemples ce produit matriciel. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on obtient $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de la manière suivante. Son terme d'indice (i,k) est obtenu en sommant les produits suivants : le produit des premiers termes de la i-ème ligne de A et de la k-ième colonne de B, celui des second termes de ces mêmes ligne et colonne... jusqu'au produit des p-ièmes termes de ces mêmes ligne et colonne.

Exemple 15 Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 13 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela se formalise ainsi :

Définition 16 Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit matriciel de A par B est la matrice $AB = (c_{i,k}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}.$$

Proposition 17 *Le produit matriciel est bilinéaire, i.e. il est linéaire à gauche :*

$$\forall A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (\lambda A + A')B = \lambda(AB) + A'B,$$

et il est linéaire à droite :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda B + B') = \lambda(AB) + AB'.$$

Démonstration: Soient $A = (a_{i,j})$, $A' = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
D'abord, les matrices $(\lambda A + A')B$ et $\lambda(AB) + A'B$ sont toutes deux des éléments de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Puis, pour $(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, par linéarité des sommes finies

$$\sum_{j=1}^{p} (\lambda a_{i,j} + a'_{i,j})b_{j,k} = \lambda \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} + \sum_{j=1}^{p} a'_{i,j}b_{j,k},$$

donc $((\lambda A+A')B)[i,k]=(\lambda(AB)+A'B)[i,k]$.
Ainsi $(\lambda A+A')B=\lambda(AB)+A'B$.
La linéarité à droite se montre de manière analogue, en utilisant en outre la commutativité du produit de $\mathbb{K}$, et est laissée au lecteur pour qu'il se familiarise avec la formule du produit matriciel.
Remarquons qu'elle ne peut pas se déduire de la linéarité à gauche puisque ce produit matriciel n'est pas commutatif en général. Le produit des matrices dans l'autre sens n'est d'ailleurs pas défini en général. $\square$

On démontre un lemme qui sera utile plusieurs fois par la suite.

Lemme 18 *Soit $(i_0,j_0)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ et E_{i_0,j_0} l'élément correspondant de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
Alors, pour tout $B=(b_{j,k})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $E_{i_0,j_0}B$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont la seule ligne non nulle est celle d'indice i_0, qui est de plus égale à la ligne de B d'indice j_0, i.e.

$$E_{i_0,j_0}B=\left(\delta_{i,i_0}b_{j_0,k}\right)_{i,k}.$$

De même, pour tout $C=(c_{l,i})\in\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, CE_{i_0,j_0} est l'élément de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ dont la seule colonne non nulle est celle d'indice j_0, qui est de plus égale à la colonne de C d'indice i_0, i.e.

$$CE_{i_0,j_0}=\left(\delta_{j,j_0}c_{l,i_0}\right)_{l,j}.$$

Démonstration: Soit $B=(b_{j,k})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour $(i,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$,

$$\left(E_{i_0,j_0}B\right)[i,k]=\sum_{j=1}^{p}\delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0}b_{j,k}=\delta_{i,i_0}b_{j_0,k}.$$

On laisse la démonstration analogue du deuxième point au lecteur, pour se familiariser avec ces manipulations formelles. $\square$

Comme on va maintenant manipuler des éléments de plusieurs bases canoniques en même temps, on rajoute en exposant la dimension de la matrice : $E_{i,j}^{n,p}$ est l'élément d'indice (i,j) de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On déduit immédiatement du lemme précédent, par l'un ou l'autre de ses deux résultats, le

Corollaire 19 $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $\forall(j',k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$, $\quad E_{i,j}^{n,p}E_{j',k}^{p,q}=\delta_{j,j'}E_{i,k}^{n,q}$.

Enfin, un résultat essentiel pour les calculs :

Théorème 20 ***(Associativité du produit matriciel)***

$$\forall(A,B,C)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\quad (AB)C=A(BC).$$

Au passage, on montre que le coefficient de ABC d"'indice" $(i,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$ est, avec des notations évidentes,

$$\sum_{(j,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}.$$

Démonstration: Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B=(b_{j,k})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C=(c_{k,l})\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On vérifie aisément que les deux matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Calculons leurs coefficients d'indice $(i,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$:

$$\begin{aligned}((AB)C)[i,l] &= \sum_{k=1}^{q}(AB)[i,k]C_{k,l}\\ &= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}\right)c_{k,l}\\ &= \sum_{(j,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}\end{aligned}$$

Un calcul analogue laissé au lecteur pour son entraînement montre que

$$(A(BC))[i,l]=\sum_{(j,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l},$$

donc $((AB)C)[i,l]=(A(BC))[i,l]$.
Ainsi,

$$(AB)C=A(BC).$$

□

Remarque 21 Voici une autre démonstration, de présentation plus lourde, mais dont le principe est assez général.
Par linéarité, il suffit de démontrer l'associativité pour les éléments des base canoniques, puisque

$$(AB)C=\sum_{i,j,j',k,k',l}a_{i,j}b_{j',k}c_{k',l}\left(E_{i,j}^{n,p}E_{j',k}^{p,q}\right)E_{k',l}^{q,r}$$

et

$$A(BC)=\sum_{i,j,j',k,k',l}a_{i,j}b_{j',k}c_{k',l}E_{i,j}^{n,p}\left(E_{j',k}^{p,q}E_{k',l}^{q,r}\right).$$

D'après le lemme 19, pour tout $(i,j,j',k,k',l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]^2\times[\![1,q]\!]^2\times[\![1,r]\!]$,

$$\left(E_{i,j}^{n,p}E_{j',k}^{p,q}\right)E_{k',l}^{q,r}=\delta_{j,j'}E_{i,k}^{n,q}E_{k',l}^{q,r}=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}E_{i,l}^{n,r}$$

et

$$E_{i,j}^{n,p}\left(E_{j',k}^{p,q}E_{k',l}^{q,r}\right)=\delta_{k,k'}E_{i,j}^{n,p}E_{j',l}^{p,r}=\delta_{k,k'}\delta_{j,j'}E_{i,l}^{n,r},$$

ce qui conclut.

Remarque 22 La formule du coefficient général d'un produit $A_1A_1\cdots A_m$ s'obtient par généralisation naturelle de celle de ABC.

Exemple 23 Vérifier que

$$\left(\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&0&1&-1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&0&1&-1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\right).$$

L'un des deux calculs est-il plus aisé que l'autre ?

III Matrices carrées

Définition 24 Une *matrice carrée d'ordre n* est une matrice à n lignes et n colonnes.
L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté, pour simplifier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 25 La matrice $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ est la *matrice carrée nulle* d'ordre n, élément neutre de l'addition : tous ses coefficients sont nuls. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on la note simplement 0.
La matrice $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est la *matrice de Hilbert* d'ordre n. Écrire explicitement la matrice de Hilbert d'ordre 5.

Définition 26 On appelle *matrice identité d'ordre n* l'élément I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant des 1 sur la "diagonale" et des 0 ailleurs :

$$\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors la

Proposition 27 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{I}_n A = A\mathrm{I}_p = A.$

Démonstration: Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$(\mathrm{I}_n A)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A[k,j] = A[i,j],$$

donc $\mathrm{I}_n A = A$.
Démontrer l'autre égalité pour s'entraîner. □

La multiplication matricielle induit clairement une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qu'on note parfois $\times$ dans la suite pour la distinguer de la multiplication externe vue précédemment. On a alors le

Théorème 28 *$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, qui est non commutatif dès que $n \geq 2$.*

Démonstration: On sait déjà que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.
La LCI $\times$ est associative par le théorème 20 et admet $\mathrm{I}_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ comme élément neutre d'après la proposition 27.
Les distributivités à gauche et à droite de $\times$ par rapport à $+$ sont des conséquences immédiates de la bilinéarité du produit matriciel qui a été prouvée à la section précédente.
Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
Montrons qu'il est non commutatif dès que $n \geq 2$.
On remarque alors, en notant $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que, d'après le lemme 19,

$$E_{1,1}E_{2,1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \neq E_{2,1} = E_{2,1}E_{1,1},$$

ce qui prouve la non commutativité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Remarque 29 En fait, on verra plus : $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot,\times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Remarque 30 Le produit précédent $E_{1,1}E_{2,1}=0$ prouve qu'**un produit matriciel peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul !**
On dit que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet des *diviseurs de zéro* pour $n \geq 2$.

Remarque 31 *A fortiori*, si $n \geq 2$, il existe des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nuls et non inversibles, puisque le produit de deux inversibles d'un anneau est inversible, donc non nul. On voit en particulier ici que $E_{1,1}$ et $E_{2,1}$ ne sont pas inversibles, ce qui est un fait général : dès que $n \geq 2$, aucun élément de la base canonique n'est inversible.

Remarque 32 Pour $n \geq 2$, une puissance d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul peut même être nulle : $E_{1,2}E_{1,2}=0$. Cela mène à la définition suivante.

Définition 33 Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^k=0$.
Le plus petit k tel que $N^k=0$ est alors appelé l'*indice de nilpotence* de N et il est généralement noté r. On a alors, pour tout $k \geq r$, $N^k=0$.

Exemple 34 La matrice nulle est nilpotente d'indice 1 et c'est la seule.
Les matrices $E_{i,j}$, avec $i \neq j$, sont nilpotentes d'indice 2.

On rappelle que les formules du binôme et de Bernoulli sont valables dans un anneau dès que les deux éléments en jeu commutent. Avec la convention que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^0=\mathrm{I}_n$, on a les

***Proposition 35** (Formule du binôme de Newton)*
Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^{m-k}B^k=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^kB^{m-k}.$$

***Proposition 36** (Formule de Bernoulli)*
Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$A^{m+1}-B^{m+1}=(A-B)\sum_{k=0}^{m}A^{m-k}B^k=(A-B)\sum_{k=0}^{m}A^kB^{m-k}.$$

Exemple 37 Un cas particulier fréquent de commutation est celui où l'une des deux matrices est I_n ou λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a par exemple, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{I}_n+A)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k$.

On s'intéresse enfin aux matrices inversibles :

Définition 38 La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* ssi elle est inversible en tant qu'élément de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.* ss'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA'=A'A=\mathrm{I}_n$. On a déjà vu dans le cadre général des anneaux qu'une telle matrice A', lorsqu'elle existe, est unique, ce qui permet de la noter A^{-1}. On l'appelle l'*inverse* de A.

On **admet** la propriété suivante très utile, qu'on démontrera plus tard avec les applications linéaires :

Théorème 39 *Pour qu'une matrice A de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à gauche (*$\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A'A = \mathrm{I}_n$*) ou à droite (*$\exists A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA'' = \mathrm{I}_n$*). Dans ce cas, l'inverse à gauche, ou à droite, est l'inverse "tout court"* A^{-1}.

Exemple 40 Comme $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$, ces deux matrices sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

Dans le cas des matrices d'ordre 2, il faut connaître par cœur le résultat suivant :

Théorème 41 ***(Inverse d'une matrice*** 2×2*)*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ *et, dans ce cas,* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration: Faire la démonstration en exercice de ce fait de manière élémentaire. Le seul point délicat est de montrer que si la matrice est inversible, alors $ad - bc \neq 0$. Après, on peut juste vérifier que la formule est bonne, puis utiliser l'unicité de l'inverse. □

Exemple 42 Retrouver ainsi les résultats de l'exemple 40.

Par ailleurs, on sait déjà qu'un produit d'inversibles d'un anneau est inversible, ce qui donne la

Proposition 43 *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont deux matrices inversibles, alors leur produit est inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

De manière générale, on sait aussi que l'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe pour la multiplication, ce qui mène a la

Définition 44 Le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le *groupe linéaire d'ordre* n sur $\mathbb{K}$ et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, il est utile de définir des classes de matrices particulières.

Définition 45 Une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonale* ssi tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, *i.e.* $\forall i, j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Longrightarrow D[i,j] = 0$.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on notera $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ la matrice diagonale D telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $D[i,i] = \lambda_i$, *i.e.*

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exemples 46 Les matrices $\lambda \mathrm{I}_n = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ sont appelées les *matrices d'homothéties*.

On voit alors très facilement les résultats suivants

Proposition 47

1. *Toute combinaison linéaire de matrices diagonales est diagonale.*
2. *Toute matrice produit de matrices diagonales est diagonale et le produit s'effectue coefficient par coefficient, i.e.*

$$\forall (\lambda_i)_{i=1}^n, (\mu_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{diag}((\lambda_i)_{i=1}^n)\mathrm{diag}((\mu_i)_{i=1}^n) = \mathrm{diag}((\lambda_i \mu_i)_{i=1}^n).$$

3. *Une matrice diagonale est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux λ_i, $i \in [\![1,n]\!]$ sont non nuls et alors*

$$(\mathrm{diag}((\lambda_i)_{i=1}^n))^{-1} = \mathrm{diag}((\lambda_i^{-1})_{i=1}^n).$$

Remarque 48 En fait, l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, comme vous pourrez le voir l'an prochain.

Définition 49 Une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* ssi tous ses coefficients strictement sous-diagonaux sont nuls, *i.e.* $\forall i, j \in [\![1,n]\!],\ i > j \Longrightarrow T[i,j] = 0$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & t_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Définition 50 De manière analogue, une matrice est *triangulaire inférieure* ssi tous ses coefficients strictement sur-diagonaux sont nuls, *i.e.* $\forall i, j \in [\![1,n]\!],\ i < j \Longrightarrow T[i,j] = 0$.

On a alors la proposition suivante qu'on **admet** pour l'instant, mais qui pourra se démontrer aisément plus tard.

Proposition 51

1. *Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).*
2. *Toute matrice produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp inférieure) et ses coefficients diagonaux s'obtiennent en faisant le produit des coefficients diagonaux des facteurs "composante par composante" (seulement ces coefficients s'obtiennent ainsi).*
3. *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

Remarque 52 En fait, l'ensemble des matrices triangulaires d'ordre n est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, comme vous pourrez le voir l'an prochain.

IV Transposition

1 Cas général

Transposer une matrice (*a priori* rectangulaire), c'est faire une symétrie des coefficients par rapport à sa diagonale :

Définition 53 La transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 54 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Il est clair que

Proposition 55 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A.$

La transposition préserve l'addition et la multiplication externe :
La transposition est bijective et linéaire :

Proposition 56 *L'application de transposition, qu'on notera $t_{n,p}$ pour la circonstance :*

$$t_{n,p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$$

est bijective et préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p(\mathbb{K})}, \quad (\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}.$$

Démonstration: Il est facile de vérifier la linéarité. Pour la bijectivité, il suffit de remarquer que l'application $t_{p,n}$ est son application réciproque. □

Remarque 57 En particulier, l'application $t_{n,p}$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ vers $(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), +)$. C'est en fait un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qu'on verra bientôt.

On vient de voir que la transposition préserve les combinaisons linéaires, mais elle ne préserve pas les produits. Il y aurait d'ailleurs une obstruction : lorsqu'on peut faire le produit AB, on ne peut en général pas faire le produit $A^{\mathrm{T}}\, B^{\mathrm{T}}$ pour des raisons de dimensions des matrices. En revanche, on a la propriété suivante :

Proposition 58 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\, A^{\mathrm{T}}.$

Démonstration: Il est clair que $(AB)^{\mathrm{T}}$ et $B^{\mathrm{T}}\, A^{\mathrm{T}}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.
Pour $(i,k) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$(AB)^{\mathrm{T}}[i,k] = (AB)[k,i] = \sum_{j=1}^{p} A[k,j]B[j,i] = \sum_{j=1}^{p} A^{\mathrm{T}}[j,k]B^{\mathrm{T}}[i,j] = \sum_{j=1}^{p} B^{\mathrm{T}}[i,j]A^{\mathrm{T}}[j,k] = \left(B^{\mathrm{T}}\, A^{\mathrm{T}}\right)[i,k].$$

□

2 Cas des matrices carrées

Comme cas particulier de la proposition 56,

Proposition 59 *La transposition est un automorphisme du groupe* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+)$ *(i.e. un isomorphisme du groupe vers lui-même) qui préserve la multiplication externe.*

Remarque 60 On appellera cela un automorphisme d'espace vectoriel.

On a dit que les produits ne sont en général pas préservés par transposition, mais cependant les inverses le sont :

Proposition 61 *Si* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *alors* $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Démonstration: Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, donc, en prenant les transposées, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n^{\mathrm{T}} = I_n$. Ainsi A^{T} est inversible à gauche et, comme c'est une matrice carrée, par le théorème 39, $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. □

Enfin, on institutionnalise deux définitions déjà vue maintes fois

Définition 62 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) ssi $A^{\mathrm{T}} = A$ (resp. $A^{\mathrm{T}} = -A$).
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Exemples 63

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas antisymétrique, ni symétrique d'ailleurs.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.
4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

Remarque 64 Il est facile de voir que :
— la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle ;
— la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle ;
— les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (et en sont aussi des sous-espaces vectoriels...).

On démontre facilement par analyse-synthèse :

Théorème 65 *Toute matrice carrée M s'écrit de manière **unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique qu'on peut expliciter :*

$$M = S + A \quad \text{avec} \quad S = \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\left(A - A^{\mathrm{T}}\right).$$

V Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

On donne ici en "avant-première" la méthode de calcul de l'inverse d'une matrice par l'algorithme du pivot, en en laissant la justification au chapitre suivant. Il suffit d'appliquer cet algorithme à la matrice augmentée dont le premier membre est la matrice à inverser et le second est la matrice identité. La matrice est inversible ssi, à la fin de la descente, il n'y a pas de ligne avec premier membre nul, *i.e.* il n'y a pas d'inconnues secondaires. Dans ce cas, on poursuit l'algorithme et à la fin, le premier membre est la matrice identité et le second est l'inverse cherchée.
Voici un exemple : On veut inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode du pivot à la matrice

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{aligned} M \underset{L}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \underset{L}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de ligne à premier membre nul, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} M \underset{L}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{8}{13} & -\frac{10}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & -13 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{5}{13}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{13}L_3 \end{array} \\ \underset{L}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{17}{13} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & -13 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \underset{L}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{17}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{13}L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

VI Exercices d'assimilation du cours

Ces exercices sont à faire lors de l'assimilation du cours hors emploi du temps.

Exercice 66

1. Écrire explicitement la matrice $(\delta_{i,j+1})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ pour les valeurs de (n,p) suivantes : $(3,4)$, $(5,2)$, $(4,3)$.
2. Facultatif : donner une formule pour la somme des éléments de cette matrice en fonctions de n et p

Exercice 67 Écrire le terme général des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivantes :

1. $\begin{pmatrix} n & \cdots & \cdots & n \\ n-1 & \cdots & \cdots & n-1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 6 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & \cdots & \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \end{pmatrix}$, pour $p=n$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$, pour $p=n$.

Exercice 68 Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Trouver $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que MA soit la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + 2L_j$ sur A. Exprimer M simplement à l'aide de la matrice identité et de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, trouver son inverse.

Exercice 69 Démontrer que le produit matriciel est linéaire à droite.

Exercice 70 **(Très classique)**
Soient $n\geq 2$, $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf ceux situés juste au dessus de la diagonale, qui valent 1 et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients valant 1 sauf ceux situés strictement au dessous de la diagonale, qui valent 0 :

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les puissances de N en explicitant les matrices avec des petits points pour faire les produits.
2. En déduire que N est nilpotente d'indice n.
3. Exprimer les coefficients $N[i,j]$ en utilisant le symbole de Kronecker δ.
4. Retrouver les résultats précédents en utilisant la formule du produit matriciel et des calculs avec le symbole $\sum$.
5. Exprimer simplement A avec des puissances de N.
6. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 71 Déterminer si la matrice suivante est inversible et l'inverser la cas échéant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VII Correction des exercices d'assimilation

Correction de l'exercice 66.

1. Écrire explicitement la matrice $(\delta_{i,j+1})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ pour les valeurs de (n,p) suivantes : $(3,4)$, $(5,2)$, $(4,3)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. Facultatif : donner une formule pour la somme des éléments de cette matrice en fonctions de n et p

---

Cette somme vaut

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\delta_{i,j+1} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{p+1}\delta_{i,k} = \sum_{i=2}^{n}\mathbf{1}_{(i\leq p+1)} = \mathrm{Card}\,[\![2,\min(n,p+1)]\!] = \boxed{\min(n-1,p).}$$

Correction de l'exercice 67.
Écrire le terme général des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivantes :

1. $\begin{pmatrix} n & \cdots & \cdots & n \\ n-1 & \cdots & \cdots & n-1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;

$$\boxed{a_{i,j} = n-i+1.}$$

---

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 6 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & \cdots & \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \end{pmatrix}$, pour $p = n$;

$$\boxed{b_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}.}$$

---

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$, pour $p = n$.

$$\boxed{c_{i,j} = \max(i,j).}$$

Correction de l'exercice 68.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que MA soit la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + 2L_j$ sur A. Exprimer M simplement à l'aide de la matrice identité et de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec le 2 isolé placé en i-ème ligne et j-ème colonne, convient.
Cette matrice s'écrit de manière compacte $\boxed{M = \mathrm{I}_n + 2E_{i,j}.}$
Elle convient car, d'après le cours, la matrice $E_{i,j}A$ a toutes ses lignes nulles sauf la i-ème, qui est égale à la j-ème ligne de A, donc $2E_{i,j}A$ a toutes ses lignes nulles sauf la i-ème, qui est égale à deux fois la j-ème ligne de A et en ajoutant $\mathrm{I}_n A = A$, on ajoute finalement à la i-ème ligne de A deux fois sa j-ème.

---

2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, trouver son inverse.

Comme M est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, elle est inversible d'après les cours.

Correction de l'exercice 69.
Démontrer que le produit matriciel est linéaire à droite.

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{j,k}), B' = (b'_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
D'abord, les matrices $A(\lambda B + B')$ et $\lambda(AB) + AB'$ sont toutes deux des éléments de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Puis, pour $(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, par linéarité des sommes finies

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\lambda b_{j,k} + b'_{j,k}) = \lambda \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} + \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b'_{j,k},$$

donc $\left(A(\lambda B + B')\right)[i,k] = \left(\lambda(AB) + AB'\right)[i,k]$.
Ainsi $\boxed{A(\lambda B + B') = \lambda(AB) + AB'.}$

Correction de l'exercice 70.
Soient $n \geq 2$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf ceux situés juste au dessus de la diagonale, qui valent 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients valant 1 sauf ceux situés

strictement au dessous de la diagonale, qui valent 0 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les puissances de N en explicitant les matrices avec des petits points pour faire les produits.

On "voit" que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

et, qu'à chaque multiplication par N, la "diagonale" de 1 est décalée d'une cran vers la droite (ou vers le haut, si on préfère). Ainsi

$$N^{n-1} = E_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^n = 0$.

---

2. En déduire que N est nilpotente d'indice n.

C'est simplement la définition de la nilpotence et de l'indice de nilpotence.

---

3. Exprimer les coefficients $N[i,j]$ en utilisant le symbole de Kronecker δ.

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ N[i,j] = \delta_{i+1,j}.}$$

---

4. Retrouver les résultats précédents en utilisant la formule du produit matriciel et des calculs avec le symbole $\sum$.

On raisonne par récurrence sur k : pour $p \in [\![0,n]\!]$ on pose

$$\mathcal{A}_p : \quad N^p = (\delta_{i+p,j})_{i,j}.$$

<u>Initialisation</u>. On a $N^0 = \mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{i,j}$, donc $\boxed{\mathcal{A}_0 \text{ est vérifiée.}}$

<u>Hérédité</u>. Supposons que $\mathcal{A}_p$ soit vérifiée pour un certain $p \in [\![0,n-1]\!]$.

Alors, pour $i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$N^{p+1}[i,j] = \sum_{k=1}^{n} N^p[i,k]N[k,j] = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i+p,k}\delta_{k+1,j} = \delta_{i+p+1,j},$$

donc $\boxed{\mathcal{A}_{p+1} \text{ est vérifiée.}}$

Ainsi, par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall p \in [\![0,n]\!], \quad N^p = (\delta_{i+p,j})_{i,j}.}$$

En particulier, $N^{n-1} \neq 0$, car $N^{n-1}[1,n] = \delta_{n,n} = 1$, et $N^n = 0$ car, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\delta_{i+n+1,j} = 0$ car $j \leq n < i+n+1$.

Ainsi, $\boxed{N \text{ est nilpotente d'indice } n.}$

---

5. Exprimer simplement A avec des puissances de N.

On a clairement $\boxed{A = \sum_{i=0}^{n-1} N^k.}$

---

6. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Comme, $N\mathrm{I}_n = N = \mathrm{I}_n N$, on peut appliquer la formule de Bernoulli à I_n et N :

$$(\mathrm{I}_n - N)A = (\mathrm{I}_n - N)\sum_{i=0}^{n-1} N^k = \mathrm{I}_n^n - N^n = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, A est inversible à gauche et, comme c'est une <u>matrice carrée</u>, elle est inversible “tout court” et son inverse est

$$\boxed{A^{-1} = \mathrm{I}_n - N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 71. Déterminer si la matrice suivante est inversible et l'inverser la cas échéant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme du pivot, on trouve qu'elle est inversible, puisqu'on a 4 pivots à la fin de la descente, puis, en terminant l'algorithme, on obtient son inverse :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{7}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$
