DM4 de mathématiques en autocorrection (entraînement au raisonnement)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Barème sur 125 points avec $\pm 15\%$ pour les "croix rédactionnelles", puis ± 1 pt de présentation sur la note sur 20 :

- Exercice 1 (5 pts) : 1 (résultat) + 1 (analyse) +3 (synthèse, dont 2 points pour les justifications "par positivité")
- Exercice 2 (10 pts) :
  1. 5 = 1 (supposer h injective) + 1 (prendre x, x' tels que $f(x) = f(x')$) + 1 (composer avec g) + 1 (utiliser l'inj de h) + 1 (rédaction globale)
  2. 5 = 1 (supposer h surjective) + 1 (prendre $z \in G$) + 1 (utiliser la surj de h $\to x$) + 1 (prendre $y = f(x)$) + 1 (rédaction globale)
- Problème 1 (40 pts)
  1. 1 ($\mathrm{Re}\, z = \rho\cos\theta$ et $\mathrm{Im}\, z = \rho\sin\theta$)
  2. 2 = 1 ($|z'\overline{z}| = |z'|\,|z|$) + 1 ($\mathrm{Arg}\, z'\overline{z} = \mathrm{Arg}\, z'/z$)
  3. (a) 2 = 1 ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$) + 1 ($\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = |z|$, $\left\|\overrightarrow{AM'}\right\| = |z'|$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \mathrm{Arg}\,(z'/z) [2\pi]$)

     Bonus +1 pour les cas dégénérés.

     (b) 5 = [2] (cas dégénérés) + 1 (signe de l'aire $=$ signe de $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right)$) + 1 ("base" = $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ et "hauteur" = $\left\|\overrightarrow{AM'}\right\| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right)$) + 1 (aire $= \frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur)
  4. 3 = 1 ($Aff(N) = Aff(M) + \widetilde{Aff}(\overrightarrow{MN})$) + 1 ($= Aff(M) + \frac{1}{3}\widetilde{Aff}(\overrightarrow{MM'})$) + 1 ($= \frac{2z+z'}{3}$) et $Aff(P) = \frac{z+2z'}{3}$)
  5. 5 = 1 (dessin quadrilatère "général") + 1 (bien orienté (direct)) + 1 (Pts I_i, J_i, K_i, L_i) + [2] (construction E, F, G, H (plus loin))
  6. 1 (affixes des huit points)
  7. 4 = 1 ($(2Aff(I_1) + Aff(K_2))/3 = \ldots$) + 1 ($(2Aff(L_2) + Aff(J_1))/3 = \ldots$) + [2] (égalité à $\frac{1}{9}(4a + 2b + c + 2d)$ donc c'est l'affixe e de E)
  8. 2 ($f, g, h = \ldots$)
  9. 15 = 1 ($\mathcal{A}(EFGH) = \mathcal{A}(EFH) + \mathcal{A}(GHF)$) + 1 ($\mathcal{A}(EFH) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\widetilde{Aff}(\overrightarrow{EH})\overline{\widetilde{Aff}(\overrightarrow{EF})}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((h-e)(\overline{f} - \overline{e})\right)$) + 1 ($= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{9}(\cdot)\frac{1}{9}(\cdot)\right)$) + [2] ($= \frac{1}{162}\mathrm{Im}\,(\cdot)$) + 1 ($\mathcal{A}(GHF) = \frac{1}{162}\mathrm{Im}\,(\cdot)$) + [2] ($\sum \mathcal{A} = \frac{1}{162}\mathrm{Im}\,(\cdot)$) + 1 (suppression des $a\overline{a}, b\overline{b}, \ldots$) + [2] (regroupement des $a\overline{b}$ et $b\overline{a}, \ldots$) + [2] ($\mathcal{A}(EFH) = \frac{1}{18}(a\overline{d} + b\overline{a} + c\overline{b} + d\overline{c})$) + 1 ($\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(d\overline{b} - d\overline{a} - a\overline{b})$ et $\mathcal{A}(CDB) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(b\overline{d} - b\overline{c} - c\overline{d})$) + 1 ($\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(a\overline{d} + b\overline{a} + c\overline{b} + d\overline{c})$)
- Problème 2 (40 pts) :
  1. (a) 4 = 1 (description réc) + 1 (résol (C) et forme TG) + [2] (calcul coef)

     (b) 2 = 1 (idée) + 1 (réc immédiate)

     (c) 2 (regroupement des deux "binômes" et simplif)
  2. 4 = 1 (départ inj) + [2] ($b = b'$ par l'absurde) + 1 (fin raist)
  3. 2 = 1 (existence par binôme) + 1 (unicité par Q précédente)
  4. 2 (deux formules de réc)
  5. 8 = [3] ((x_n, y_n) sol) + [5] (infinité de tels couples)
  6. 8 = [3] ((x_n) vérifie la réc double) + 1 (cond init de (u_n)) + 1 (dire (y_n) vérif aussi rec double) + [3] (calcul coefs)
  7. 5 (φ non surj)
  8. 3
- Exercice (30 pts)

Exercice 1 *Analysons, synthétisons...*
Déterminer **soigneusement** l'ensemble S des réels x tels que $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$.

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Analyse : Supposons que $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$. Alors en particulier $\sqrt{1+x^2} \neq 0$ et comme une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$. En prenant l'inverse du nombre strictement positif $\frac{1}{x}$, on obtient $\boxed{x > 0.}$
Synthèse : Supposons $x > 0$. Alors $x^2 > 0$ et $2x > 0$, donc

$$0 < x^2 \leq x^2 + 1 \leq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$0 < \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{(x+1)^2}$$

ce qui donne, puisque $x \geq 0$ et $x+1 \geq 0$,

$$0 < x \leq \sqrt{x^2+1} \leq x+1.$$

En prenant l'inverse de ces quantités strictement positives, $\boxed{\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}.}$

On a donc montré que $\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}\right\} = \mathbb{R}_+^\star.}$

Exercice 2 *Besoin d'une injection... ou d'une surjection, voire d'une bonne correction*
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G.
On définit en outre l'application h de E vers G par : $\quad \forall x \in E,\ h(x) = g(f(x))$.
Montrer que

1. si h est injective, alors f est injective ;

Supposons que h soit injective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x')$. Comme h est injective, $x = x'$. On vient de montrer que

$$\forall x, x' \in E, \quad \left(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right),$$

$\boxed{\textit{i.e. } f \text{ est injective.}}$

---

2. si h est surjective, alors g est surjective.

Supposons que h soit surjective.
Soit alors $z \in G$. Comme h est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = h(x) = g(f(x))$. En posant $y = f(x)$, on a $z = g(y)$. On vient de montrer que

$$\forall z \in G,\ \exists y \in F, \quad g(y) = z,$$

$\boxed{\textit{i.e. } g \text{ est surjective.}}$

Problème 1 *La fenêtre tordue*
On note $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté usuel muni d'un ROND, ce qui permet de faire la correspondance habituelle avec $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Exprimer $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ en fonction de $|z|$ et $\operatorname{Arg} z$.

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{Re} z &= |z| \cos(\operatorname{Arg} z) \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin(\operatorname{Arg} z). \end{cases}}$$

---

2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^\star$. Montrer que

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \cos\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right) \\ \operatorname{Im}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \sin\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right). \end{cases}$$

Par la question précédente, comme le module d'un produit est le produit des modules et l'argument d'un produit est congru à la somme des arguments modulo 2π,

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z'\overline{z}) &= |z'|\,|\overline{z}| \cos(\operatorname{Arg} z' + \operatorname{Arg} \overline{z}) \\ \operatorname{Im}(z'\overline{z}) &= |z'|\,|\overline{z}| \sin(\operatorname{Arg} z' + \operatorname{Arg} \overline{z}). \end{cases}$$

Or $|\overline{z}| = |z|$ et $\operatorname{Arg} \overline{z} \equiv -\operatorname{Arg} z \equiv \operatorname{Arg} \frac{1}{z}\ [2\pi]$, donc

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{Re}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \cos\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right) \\ \operatorname{Im}(z'\overline{z}) &= |z|\,|z'| \sin\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right). \end{cases}}$$

---

3. En déduire que pour tous points A, M et M' de $\mathcal{P}$, si on note z l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$:
   (a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \operatorname{Re}(z'\overline{z})$;

Soient $A, M, M' \in \mathcal{P}$, z l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$.
Si $A = M$ ou $A = M'$, la formule est vraie car $0 = 0$.
Dans le cas contraire,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AM'}\right\| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) = |z|\,|z'| \cos\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right).$$

Par la question 2,

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \operatorname{Re}(z'\overline{z}).}$$

(b) L'aire algébrique du triangle AMM' (*i.e.* comptée positivement si le triangle est direct et négativement sinon) vaut $\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(z'\overline{z})$.

Dans le cas où deux au moins des trois points A, M et M' sont égaux, le triangle est dégénéré et son aire est nulle. Cela correspond à l'un au moins des trois cas : $z=0$, $z'=0$ ou $z=z'$. Dans les deux premiers cas $z'\overline{z}=0$ et dans le troisième, $z'\overline{z}=z\overline{z}\in\mathbb{R}$, donc dans tous les cas $\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(z'\overline{z})=0$.

On peut maintenant supposer que A, M et M' sont deux à deux distincts. Dans ce cas, l'aire algébrique (du triangle) est non nulle et son signe est celui de $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)$. Par ailleurs, la hauteur issue de M' a comme longueur $\left\|\overrightarrow{AM'}\right\|\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)\right|$. Comme l'aire absolue est la moitié du produit de la base par la hauteur, elle vaut $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\left\|\overrightarrow{AM'}\right\|\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)\right|$, et l'aire algébrique vaut donc

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\left\|\overrightarrow{AM'}\right\|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{1}{2}|z|\,|z'|\sin\left(\mathrm{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)\right).$$

Par la question 2,

$$\boxed{\text{l'aire algébrique du triangle } AMM' \text{ vaut } \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,(z'\overline{z}).}$$

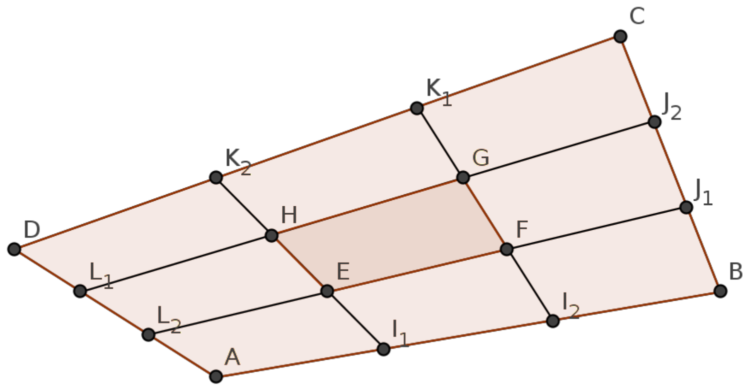
---

4. Soient $M,M'\in\mathcal{P}$ d'affixes z,z'. On note N le point situé au tiers du segment $[MM']$ (*i.e.* tel que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MM'}$) et P le point situé au deux tiers de ce même segment.
Montrer que l'affixe de N est $\frac{2z+z'}{3}$ et celui de P est $\frac{z+2z'}{3}$.

$\mathrm{Aff}\,(N)=\mathrm{Aff}\,(M)+\widetilde{\mathrm{Aff}}\left(\overrightarrow{MN}\right)=\mathrm{Aff}\,(M)+\frac{1}{3}\widetilde{\mathrm{Aff}}\left(\overrightarrow{MM'}\right)=z+\frac{1}{3}(z'-z)\boxed{=\frac{2z+z'}{3}}$
et de même
$\mathrm{Aff}\,(P)=\mathrm{Aff}\,(M)+\frac{2}{3}\widetilde{\mathrm{Aff}}\left(\overrightarrow{MM'}\right)\boxed{=\frac{z+2z'}{3}.}$

Dans la suite de l'exercice, on considère un quadrilatère quelconque de sommets A,B,C,D (énumérés dans le sens direct) et on note pour $i\in\{1,2\}$, I_i (resp. J_i, K_i, L_i) le point tel que $\overrightarrow{AI_i}=\frac{i}{3}\overrightarrow{AB}$ (resp. $\overrightarrow{BJ_i}=\frac{i}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK_i}=\frac{i}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL_i}=\frac{i}{3}\overrightarrow{DA}$).

5. Faire une figure dans le cas le plus général possible.



6. Calculer les affixes des huit points ci-dessus en fonction des affixes a,b,c,d des points A,B,C,D.

D'après la question 4, on a

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lclclcl} \mathrm{Aff}(I_1) & = & \frac{2a+b}{3} & , & \mathrm{Aff}(I_2) & = & \frac{a+2b}{3} \\ \mathrm{Aff}(J_1) & = & \frac{2b+c}{3} & , & \mathrm{Aff}(J_2) & = & \frac{b+2c}{3} \\ \mathrm{Aff}(K_1) & = & \frac{2c+d}{3} & , & \mathrm{Aff}(K_2) & = & \frac{c+2d}{3} \\ \mathrm{Aff}(L_1) & = & \frac{2d+a}{3} & , & \mathrm{Aff}(L_2) & = & \frac{d+2a}{3} \end{array}\right.}$$

7. Calculer l'affixe du point situé au tiers du segment $[I_1K_2]$ et celui du point situé au tiers du segment $[L_2J_1]$. En déduire que l'affixe du point d'intersection E de ces deux segments est $e = \frac{1}{9}(4a+2b+c+2d)$.

Les deux affixes demandés sont

$$\frac{2\mathrm{Aff}(I_1)+\mathrm{Aff}(K_2)}{3} = \frac{1}{9}(4a+2b+c+2d)$$

et

$$\frac{2\mathrm{Aff}(L_2)+\mathrm{Aff}(J_1)}{3} = \frac{1}{9}(2d+4a+2b+c).$$

Comme ils sont égaux, les deux points coïncident en un point qui est donc à l'intersection des deux segments.

$$\boxed{\text{L'affixe du point } E \text{ est donc } e = \tfrac{1}{9}(4a+2b+c+2d).}$$

8. Sans écrire sur la copie de démonstration ni de calcul, donner l'affixe f (resp. g, h) de F (resp. G, H), le point d'intersection de $[J_1L_2]$ et $[I_2K_1]$ (resp. de $[K_1I_2]$ et $[J_2L_1]$, de $[L_1J_2]$ et $[K_2I_1]$).

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} f & = & \frac{1}{9}(2a+4b+2c+d) \\ g & = & \frac{1}{9}(a+2b+4c+2d) \\ h & = & \frac{1}{9}(2a+b+2c+4d) \end{array}\right.}$$

---

9. Représenter le quadrilatère $EFGH$ sur le dessin et montrer que son aire est le neuvième de l'aire de $ABCD$.

On calcule l'aire de chaque quadrilatère en le découpant en deux triangles orientés dans le sens direct et en calculant leurs aires à l'aide de la formule démontrée dans la question 3b.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(EFH) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\widetilde{\mathrm{Aff}}\left(\overrightarrow{EH}\right)\overline{\widetilde{\mathrm{Aff}}\left(\overrightarrow{EF}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((h-e)\overline{(f-e)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{9}(-2a-b+c+2d)\cdot\frac{1}{9}(-2\overline{a}+2\overline{b}+\overline{c}-\overline{d})\right) \\
&= \frac{1}{162}\mathrm{Im}\begin{array}{llll} (4a\overline{a} & -4a\overline{b} & -2a\overline{c} & +2a\overline{d} \\ +2b\overline{a} & -2b\overline{b} & -b\overline{c} & +b\overline{d} \\ -2c\overline{a} & +2c\overline{b} & +c\overline{c} & -c\overline{d} \\ -4d\overline{a} & +4d\overline{b} & +2d\overline{c} & -2d\overline{d}) \end{array}
\end{aligned}$$

Comme on prend la partie imaginaire, tous les termes réels, comme $4a\overline{a}$,... n'ont aucune contribution. On peut aussi regrouper les termes ainsi : $-4a\overline{b}+2b\overline{a}=-6a\overline{b}+(2a\overline{b}+2b\overline{a})$ a même partie imaginaire que $-6a\overline{b}$. Cela donne

$$\mathcal{A}(EFH)=\frac{1}{162}\mathrm{Im}\left(-6a\overline{b}+6a\overline{d}-3b\overline{c}-3b\overline{d}-3c\overline{d}\right).$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(GHF) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((f-g)\overline{(h-g)}\right) \\
&= \frac{1}{162}\mathrm{Im}\left((a+2b-2c-d)(\overline{a}-\overline{b}-2\overline{c}+2\overline{d})\right) \\
&= \frac{1}{162}\mathrm{Im}\left(-3a\overline{b}+3a\overline{d}-6b\overline{c}+3b\overline{d}-6c\overline{d}\right)
\end{aligned}$$

En faisant la somme

$$\mathcal{A}(EFGH)=\frac{1}{162}\mathrm{Im}\left(-9a\overline{b}+9a\overline{d}-9b\overline{c}-9c\overline{d}\right)$$

et comme $\mathrm{Im}\,(-a\overline{b})=\mathrm{Im}\,(b\overline{a})$,..., on obtient

$$\boxed{\mathcal{A}(EFGH)=\frac{1}{18}\mathrm{Im}\left(\overline{a}b+\overline{b}c+\overline{c}d+\overline{d}a\right)}$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{A}(ABD)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((d-a)\overline{(b-a)}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(d\overline{b}-d\overline{a}-a\overline{b}\right)$$

et

$$\mathcal{A}(CDB)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((b-c)\overline{(d-c)}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(b\overline{d}-b\overline{c}-c\overline{d}\right)$$

donc

$$\mathcal{A}(ABCD)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(-d\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{c}-c\overline{d}\right)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}d + \overline{d}a\right)}$$

On en conclut que

$$\boxed{\mathcal{A}(EFGH) = \frac{1}{9}\mathcal{A}(ABCD)}$$

On peut noter au passage que l'aire du quadrilatère $ABCD$ s'exprime très simplement en fonction des affixes de ses sommets. Cela correspond géométriquement à 4 triangles dont on calcule les aires algébriques à l'aide de la formule de la question 3b et dont les aires se compensent sauf pour la partie intérieure du quadrilatère. Cela se généralise d'ailleurs à tout polygone, convexe ou non (en particulier aux triangles : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a\right)$)

Problème 2 *Points entiers d'une hyperbole*

1. (a) Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n)$.

On est en présence d'une récurrence double linéaire homogène à oefficients constants.
On résout d'abord l'équation caractéristique (C) : $r^2 - 6r + 1 = 0$. Son discriminant est $(4\sqrt{2})^2 > 0$, donc ses racines sont $\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$, *i.e.* $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(3 - 2\sqrt{2})^n + \mu(3 + 2\sqrt{2})^n.$$

Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$, les coefficients λ et μ vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 & (L_1) \\ (3 - 2\sqrt{2})\lambda + (3 + 2\sqrt{2})\mu = 3 & (L_2). \end{cases}$$

En calculant $(2\sqrt{2} - 3)L_1 + L_2$, on obtient $4\sqrt{2}\mu = 2\sqrt{2}$, soit $\mu = \frac{1}{2}$. On en déduit alors, par L_1, $\lambda = \frac{1}{2}$.
Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\left((3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n\right).}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$ est un entier pair.

Par récurrence double immédiate, la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = 2u_n \text{ est un entier pair.}}$$

(c) Redémontrer le résultat précédent en utilisant la formule du binôme de Newton.

Soint $n \in \mathbb{N}$. On a alors, en appliquant deux fois la formule du binôme, en regroupant les sommes et en factorisant,

$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{2})^{3k} \left((-1)^k + 1\right) = 2\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{2})^{3k}$$

qui est une somme d'entiers, donc un entier elle-même.

---

2. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{2} \end{array} \right.$ est injective.

Soient $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tels que $\underline{\varphi((a,b)) = \varphi((a',b'))}$, *i.e.* $a+b\sqrt{2} = a'+b'\sqrt{2}$.
On a alors $a-a' = (b'-b)\sqrt{2}$.
Montrons par l'absurde que $b = b'$: sinon, on aurait $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux.
Ainsi $b = b'$, et donc $a-a' = 0$, *i.e.* $a = a'$, donc $\boxed{(a,b) = (a',b').}$
On vient de montrer que $\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$

---

3. Ce qui précède permet de définir de manière unique les suites $(x_n),(y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}.$$

Expliquer pourquoi.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En développant $(3+2\sqrt{2})^n$ par la formule du binôme de Newton et en regroupant les termes entiers et ceux comportant $\sqrt{2}$, ce nombre s'écrit clairement comme combinaison linéaire à coefficients entiers naturels de 1 et $\sqrt{2}$. Ces coefficients sont déterminés de manière unique par injectivité de φ (question précédente), ce qui permet de les noter x_n et y_n.

$$\boxed{\text{Les suites } (x_n),(y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ sont donc bien définies et uniquement déterminées.}}$$

---

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2})\cdot(x_n+y_n\sqrt{2}) = (3x_n+4y_n)+(2x_n+3y_n)\sqrt{2},$$

donc, par injectivité de φ,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{cccc} x_{n+1} & = & 3x_n & +4y_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n & +3y_n. \end{array} \right.}$$

On peut aussi remarquer que $\boxed{x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ x_1 = 3 \text{ et } y_1 = 2,}$ puisque $(3+2\sqrt{2})^0 = 1 = 1+0\times\sqrt{2}$ et $(3+2\sqrt{2})^1 = 3+2\sqrt{2}$.

---

5. Montrer que l'équation $x^2-2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

On note (E) l'équation $x^2-2y^2 = 1$.
Remarquons que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (3x_n+4y_n)^2 - 2(2x_n+3y_n)^2 = x_n^2 - 2y_n^2.$$

Comme $x_0^2 - 2y_0^2 = 1^2 - 2\times 0^2 = 1$, alors, par récurrence évidente,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le couple } (x_n, y_n) \text{ est solution de l'équation (E).}}$$

Il reste à montrer que la suite de couples $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une image infinie. Pour cela, on montre par récurrence que la suite (x_n) est strictement croissante. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion de récurrence $\mathcal{A}_n : \ x_n < x_{n+1}$.
Initialisation. On a vu précédemment que $x_0 = 1$ et $x_1 = 3$, donc $\mathcal{A}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Comme $x_n \in \mathbb{N}$ et, par hypothèse de récurrence, $x_{n+1} > x_n$, alors $x_{n+1} > 0$. On en déduit que $3x_{n+1} > x_{n+1}$, puis, en ajoutant $4y_{n+1} \geq 0$, que $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4y_{n+1} > x_{n+1}$, *i.e.* $\boxed{\mathcal{A}_{n+1} \text{ est vraie.}}$
Ainsi, par récurrence, la suite (x_n) est strictement croissante, donc la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est injective, ce qui implique en particulier que

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ a une infinité de solutions.}}$$

---

6. Calculer les termes généraux des suites (x_n) et (y_n) à l'aide de la première question.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4y_{n+1} = 3x_{n+1} + 8x_n + 12y_n = 3x_{n+1} + 8x_n + 3(x_{n+1} - 3x_n) = 6x_{n+1} - x_n.$$

Comme de plus, $x_0 = 1 = u_0$ et $x_1 = 3 = u_1$, on en déduit que $(x_n) = (u_n)$, *i.e.*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{2}\left((3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n\right).}$$

Par un calcul analogue, on montre que la suite (y_n) vérifie la même récurrence, avec des termes initiaux différents. Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \alpha(3-2\sqrt{2})^n + \beta(3+2\sqrt{2})^n.$$

On déduit $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ des conditions initiales $y_0 = 0$ et $y_1 = 2$, ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right).}$$

---

7. L'application φ est-elle bijective ?

Montrons par l'absurde que φ n'est pas surjective.
Supposons qu'elle le soit.
Méthode 1. Alors $\sqrt{3}$ admettrait un antécédent, donc il existerait $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{3}$ n'est pas entier, $b \neq 0$. Il est alors impossible que $a = 0$, car, pour $k \leq 0$, $k\sqrt{2} < \sqrt{3}$, $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{3}$ et, pour $k \geq 2$ entier, $k\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2} > \sqrt{3}$. Ainsi $ab \neq 0$.
Par ailleurs, en élevant l'égalité au carré, $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, et comme $ab \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
Ainsi l'application φ n'est pas surjective, donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas bijective.}}$
Méthode 2 (due à Virgil Pierroz : on se sert de l'injectivité pour montrer la non-surjectivité !). Alors $\frac{1}{2}$ admettrait un antécédent, donc il existerait $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{1}{2} = a + b\sqrt{2}$. On aurait alors $1 + 0\sqrt{2} = (2a) + (2b)\sqrt{2}$ avec $1, 0, 2a, 2b \in \mathbb{Z}$ et, par injectivité de φ, $2a = 1$, donc $a \notin \mathbb{Z}$, contradiction.

---

8. Que dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{2} \end{array} \right.$?

L'application ψ est injective avec une démonstration semblable à celle de l'injectivité de φ.

En raffinant la démonstration précédente, on peut montrer que l'application ψ n'est pas surjective., mais dans le cas des deux applications, on peut aller plus vite : $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}^2$ sont dénombrables, donc leur image par une quelconque application est au plus dénombrable, ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}$, donc φ et ψ ne sont pas surjectives.

Exercice 3 $\star$ *Log-disque*

Déterminer l'ensemble E des complexes $z = x + \mathrm{i}y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tels que le point du plan d'affixe e^z soit dans le disque fermé (*i.e.* y compris le bord) de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1 en donnant, pour chaque y possible, l'ensemble des x tels que $z \in E$.

Représenter graphiquement E.

Pour une partie $\mathcal{A}$ du plan $\mathcal{P}$, on note $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble de ses affixes.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon 1 et $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre Ω et de rayon 1.

Les points de $\mathcal{C}$ sont les points ayant des affixes de la forme $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et, en enlevant l'origine, dont l'affixe n'est pas atteint par l'application exp, on peut se restreindre aux $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$:

$$\widetilde{(\mathcal{C}\setminus\{O\})} = \left\{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} ; \theta \in \left]-\pi, \pi\right[\right\}.$$

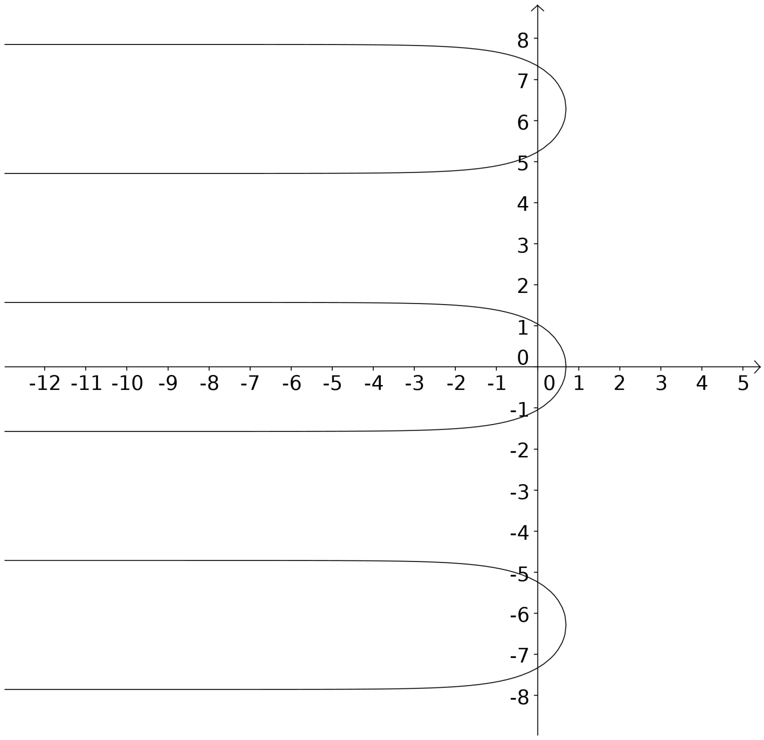
Or, pour un tel $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, $\left|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et Arg $\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \equiv \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \widetilde{(\mathcal{D}\setminus\{O\})} &= \left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} ;\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 < r \leq 2\cos y\right\} \\ &= \left\{\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} ;\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ x \leq \ln(2\cos y)\right\}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E = \left\{x + \mathrm{i}y ;\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ 2\pi\mathbb{Z}, x \in \left]-\infty, \ln(2\cos(y))\right]\right\}.}$$

La fonction $f : y \longmapsto \ln(2\cos(y))$ est paire et 2π-périodique et, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est clairement décroissante avec $f(0) = \ln(2)$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}} f = -\infty$, ce qui donne, pour son graphe d'équation $x = f(y)$, une tangente "verticale" aux points de coordonnées $(\ln(2), 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ et des asymptotes "horizontales" d'équations $y = \frac{\pi}{2} + j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$. Sur la figure ci-après, l'ensemble E correspond à l'intérieur des "dômes", bord compris.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8