Relations et Applications

Lycée Berthollet, MPSI1 2023-24

I Relations

1 Définitions

Définition 1 Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ est la donnée d'un *ensemble de départ* E, d'un *ensemble d'arrivée* F et d'un ensemble G de couples (x,y), où $x \in E$ et $y \in F$. Cet ensemble de couples est appelé le *graphe* de la relation $\mathcal{R}$. Pour un tel couple, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y et on note $x\mathcal{R}y$. Techniquement la relation $\mathcal{R}$ est donc un triplet (E,F,G) tel que E et F sont des ensembles et $G \subset E \times F$.

Exercice 2 Soient $E = [\![1,5]\!]$, $F = \{a,b,\dots,h\}$ et $G = \{(1,a),(1,b),(1,d),(3,e),(4,g),(5,g)\}$. Représenter graphiquement la relation $\mathcal{R} = (E,F,G)$ à l'aide d'un diagramme de Venn, en dessinant E et F et en représentant chaque élément $(x,y) \in G$ par une flèche de x vers y. Remarquer que par la définition d'une relation, il ne peut pas y avoir plus d'une flèche d'un point donné de E vers un point donné de F.

Nous ne nous intéresserons dans cette section qu'au cas où l'ensemble d'arrivée est le même que celui de départ ($E = F$). Dans ce cas on parle de relation binaire sur l'ensemble E et elle est donnée par son graphe $G \subset E \times E$.

Exercice 3 Soit $E = [\![1,7]\!]$ et $G = \{(1,2),(2,3),(4,5),(5,5)\}$. Représenter la relation associée à G sur un diagramme de Venn en ne dessinant qu'une fois l'ensemble E et ses points, et en traçant les flèches adéquates.

Exemples 4

- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$.
- La relation $=$ sur $\mathbb{Q}$.
- Pour un ensemble E, la relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$.
- Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$.
- La congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.
- Sur un ensemble “représentant” un ensemble d'habits, la relation “est de la même couleur que”, ou la relation “est du même matériau que”.

Les relations sur un ensemble peuvent avoir des propriétés particulières :

Définition 5 Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite

— *Réflexive* ssi $(\forall x \in E, x\mathcal{R}x)$
— *Symétrique* ssi $(\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x))$
— *Antisymétrique* ssi $(\forall x, y \in E, ((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y)$
— *Transitive* ssi $(\forall x, y, z \in E, ((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z)$

Exercice 6 Dire lesquelles, parmi les relations de l'exemple précédent, ont l'une ou l'autre de ces propriétés.

Exercice 7 Lorsque l'ensemble est fini, par exemple $E = [\![1,n]\!]$, expliquer en français comment on "voit" sur un diagramme de Venn la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité. Écrivez des algorithmes testant ces propriétés et dire combien d'instructions, au maximum, effectuent ces algorithmes pour un ensemble E à n éléments ?

La conjonction de certaines de ces propriétés définit des relations de types particuliers (équivalence ou ordre) qui jouent un très grand rôle en mathématiques.

2 Relations d'équivalence

Définition 8 On dit qu'une relation binaire sur un ensemble est une *relation d'équivalence* ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 9 Dire lesquelles sont des relations d'équivalence parmi les relations vues plus haut.

Définition 10 Pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E et $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de x et on note $\overline{x}^{\mathcal{R}}$ (ou plus simplement $\overline{x}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la partie de E formée des éléments en relation avec x : $\overline{x} = \{y \in E | x\mathcal{R}y\}$.

Remarque 11 Avec les notations précédentes, on a toujours $x \in \overline{x}$.

Exercice 12 Prendre un exemple concrêt d'ensemble d'habits de différentes couleurs et dessiner les classes d'équivalences pour la relation "est de la même couleur que".

Exercice 13 Quelles sont les classes d'équivalence de la congruence modulo 2 (respectivement 3) sur $\mathbb{Z}$?

On démontre facilement le résultat suivant :

Proposition 14 *Pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E,*

$$\forall x, y \in E, \ (x\mathcal{R}y \iff \overline{x} = \overline{y})$$

Définition 15 L'ensemble des classes d'équivalences (qui est donc une partie de $\mathcal{P}(E)$) est appelé *ensemble quotient* de E par la relation $\mathcal{R}$. On le note habituellement $E/\mathcal{R}$, mais nous le noterons $\mathcal{C}$ pour simplifier.

Exercice 16 Décrire l'ensemble quotient pour les trois relations précédentes.

On démontre facilement le résultat suivant :

Proposition 17 *Pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E,*

$$\forall x \in E, \forall c \in \mathcal{C},\ (\bar{x} = c \iff x \in c)$$

Définition 18 Si on "choisit", pour chaque classe $c \in \mathcal{C}$, un $x_c \in C$, on appelle cela un *système de représentants* pour la relation d'équivalence.

On a alors le résultat :

Proposition 19 *Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E forment une partition de E, c'est-à-dire qu'elles sont non vides, deux-à-deux disjointes et que leur réunion est E :*

$$E = \bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} c.$$

Si on a choisi un système de représentants R, on a

$$E = \bigsqcup_{x \in R} \bar{x}.$$

Exemple 20 Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences modulo n. Il est alors possible de définir les opérations $+$ et $\times$ directement sur les classes.

Exemple 21 Deux réels x et y sont congrus modulo 2π signifie que :

$$x \equiv y[2\pi] \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, y - x = 2k\pi) \iff (y - x \in 2\pi\mathbb{Z}).$$

On définit les angles orientés de vecteurs comme les classes d'équivalences de cette relation. L'ensemble des tels angles est noté $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

3 Relations d'ordre

Définition 22 On dit qu'une relation binaire $\leq$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* ssi elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Lorsqu'on considère l'ensemble E muni de cet *ordre*, on parle de l'*ensemble ordonné* $(E, \leq)$.

Exercice 23 Dire lesquelles sont des relations d'ordre parmi les relations vues plus haut.

Exemple 24 La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.

Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, deux éléments sont toujours comparables, ce qui n'est pas le cas en général. Cela amène la définition suivante :

Définition 25 On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est un *ordre total* ssi

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Sinon, on dit que c'est un *ordre partiel*.

Exercice 26 Dire lesquelles sont des relations d'ordre total parmi les relations d'ordre vues précédemment.

Exemple 27 (Ordre lexicographique) Sur un produit cartésien fini $E = A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ d'ensembles totalement ordonnés, on peut définir l'ordre *lexicographique*, qui est celui utilisé pour classer les mots dans le dictionnaire. Pour alléger les notations, tous les ordres seront notés $\leq$. On définit alors l'ordre suivant sur E : pour $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{i=1}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) = (y_i)_{i=1}^n$ dans E,

$$x \leq y \iff (x = y \text{ ou } (\exists k \in [\![1,n]\!], ((\forall i < k, x_i = y_i) \text{ et } x_k < y_k)))$$

Exercice 28 Montrer que c'est bien une relation d'ordre.

On se place maintenant sur ensemble ordonné $(E, \leq)$ pour donner plusieurs définitions importantes.

Définition 29 On dit qu'un élément M (resp. m) de E est un *majorant* (resp. *minorant*) d'une partie A de E ssi tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux à M (resp. supérieurs ou égaux à m).

Exemple 30 Les réels 1 et 2 sont deux majorants de $]0,1[$ pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 31 L'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie minorée et non majorée de $\mathbb{R}$.

Proposition 32 *Il y a au plus un majorant M de A appartenant à A. S'il existe, on l'appelle le plus grand élément ou maximum de A et on le note* $\max(A)$.

On définit de manière analogue le plus petit élément ou minimum $\min(A)$ ***lorsqu'il existe***.

Exemple 33 Donner des exemples de parties de $\mathbb{R}$ admettant ou non un plus petit élément pour l'ordre usuel.

La définition suivante, plus subtile, est à la base de toute l'analyse réelle.

Définition 34 On dit qu'une partie A de E *admet une borne supérieure* ssi l'ensemble de ses majorants possède un plus petit élément, qu'on appelle alors la *borne supérieure* de A, notée $\sup(A)$.

De manière analogue, une partie A de E *admet une borne inférieure* ssi l'ensemble de ses minorants possède un plus grand élément, qu'on appelle alors la *borne inférieure* de A, notée $\inf(A)$.

Exemple 35 Montrer que $[0,1[$ admet une borne supérieure et $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Un exercice plus conceptuel mais très instructif est le suivant :

Exercice 36 Soit E un ensemble. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Montrer que toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ (*i.e.* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, autrement dit $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties de E) possède une borne inférieure et une borne supérieure. (Indication : on pourra considérer $\bigcap_{\mathcal{A}}$ et $\bigcup_{\mathcal{A}}$ avec les conventions que $\bigcap_{\emptyset} = E$ et $\bigcup_{\emptyset} = \emptyset$).

La propriété à la base de l'analyse réelle, qui sera admise faute d'avoir une vraie définition de l'ensemble $\mathbb{R}$, est la fameuse :

Proposition 37 (**Propriété de la borne supérieure**) *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Pour finir, voici un exercice plus abstrait :

Exercice 38 Soit E un ensemble fixé. On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les relations binaires sur E et on définit une relation binaire $\prec$ sur $\mathcal{E}$ par

$$\forall (R_1, R_2) \in \mathcal{E}^2, (R_1 \prec R_2 \iff (\forall (x,y) \in E^2, (xR_1y \Longrightarrow xR_2y))).$$

1. Pour R_1 et R_2 dans $\mathcal{E}$, traduire $R_1 \prec R_2$ en termes des graphes de R_1 et R_2.
2. En déduire que $\prec$ est une relation d'ordre.
3. On note $\mathcal{E}_{eq}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée par les relations d'équivalence sur E. Pour tout $R_0 \in \mathcal{E}$, montrer que l'ensemble $\{R \in \mathcal{E}_{eq} | R_0 \prec R\}$ des relations d'équivalence majorant R_0 possède un minimum (indication : considérer l'intersection des graphes des relations d'équivalence majorant R_0).
4. Reformuler ce résultat en termes de borne supérieure.

Remarque : ce minimum est appelé la relation d'équivalence engendrée par R_0

II Applications

1 Point de vue intuitif

Définition 39 Une *application* f d'un *ensemble de départ* E vers un *ensemble d'arrivée* F est une "machine" qui, à chaque élément x de E, fait correspondre un élément de F uniquement déterminé par x et f, qu'on note $f(x)$ et qu'on appelle l'*image* de x par f. On représente cela de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exemples 40

— Les fonctions réelles d'une variable réelle sont des applications dont l'ensemble de départ est leur ensemble de définition, qui est une partie de $\mathbb{R}$, et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$:

$$\cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^2 - 3x - 2 \end{array} \right. \qquad \ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

— Les suites réelles sont des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

On note en général u_n pour $u(n)$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'application $n \longmapsto \frac{1}{n+1}$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

— Plus généralement, une famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I, notée $(x_i)_{i\in I}$, est une application $i \longmapsto x_i$ de I vers E. L'ensemble des telles familles est notée E^I et cela généralise la notion de produit cartésien fini d'ensembles que nous avons vu précédemment.

— L'application *JDS* qui, à une date (après J.C.) exprimée sous la forme d'un triplet de nombres entiers (jour, mois, année), fait correspondre le jour de la semaine (de lundi à dimanche), est une application dont l'ensemble de départ est une partie $\mathcal{J} \subset [\![1,31]\!] \times [\![1,12]\!] \times \mathbb{N}$ (qu'on laisse au lecteur le soin de décrire) :

$$JDS : \mathcal{J} \longrightarrow \{\text{lundi}, \ldots, \text{dimanche}\}$$

(Remarque : cette fonction peut être programmée à l'aide d'un algorithme, que vous pouvez décrire en exercice en prenant garde aux années bissextiles.)

Définition 41 Le *graphe* d'une application f de E vers F est l'ensemble $\mathcal{G}_f$ des éléments de $E \times F$ qui s'écrivent $(x, f(x))$ pour un certain $x \in E$:

$$\mathcal{G}_f = \{(x,y) \in E \times F | y = f(x)\}$$

Exemples 42

— Pour les fonctions, cela correspond exactement à la notion usuelle, dont le dessin dans le plan permet de visualiser facilement le comportement de la fonction.

— Dans le cas d'une application entre deux ensembles finis E et F, on peut représenter les deux ensembles dans un diagramme de Venn et chaque élément $(x, f(x))$ du graphe de f par une flèche du point représentant x dans E vers le point représentant $f(x)$ dans F.

Ce dernier exemple nous montre qu'une application de E vers F n'est en fait qu'un cas particulier de relation binaire de E vers F, pour laquelle chaque $x \in E$ est en relation avec un unique élément de F, ce qu'on formalise maintenant.

2 Point de vue formel

Définition 43 Une *application* est une relation $f = (E, F, G)$ telle que tout élément x de E est en relation avec un unique élément y de F *i.e.* $(\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x,y) \in G)$, ce qu'on note alors $y = f(x)$. On note $\mathcal{G}_f = G = \{(x, f(x)); x \in E\}$ le graphe de cette application.

Toute application de E vers F étant uniquement déterminée par son graphe $G \in \mathcal{P}(E \times F)$, les axiomes de *ZF* permettent de montrer que la collection des applications de E vers F forme un ensemble :

Définition 44 L'*ensemble* des applications de E vers F est noté F^E.

Remarque 45 Cette notation est compatible avec la notation utilisée ci-dessus pour les familles.

Exemples 46

— L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions réelles définies sur tout $\mathbb{R}$.

— Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions définies sur I.

— L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels.

— Pour simplifier, on note pour un entier n et un ensemble E, $E^n = E^{[\![1,n]\!]}$, ce qui correspond exactement à la notation utilisée pour le produit cartésien et n'est pas un hasard : en effet on peut identifier le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de E à l'application $i \longmapsto x_i$.

Définition 47 Si $f : E \to F$ et $A \subset E$, on définit la *restriction* de f à A de la manière suivante :

$$f|_A : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exemple 48 L'application $\cos|_{[0,\pi]}$ est strictement décroissante.

3 Surjectivité et injectivité

On considère ici une application $f : E \to F$.

Définition 49 L'*image* de f est l'ensemble

$$\{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\},$$

qu'on notera

$$f(E) = \{f(x); x \in E\}.$$

Plus généralement, si $A \subset E$, on appelle *image (directe)* de A par f l'ensemble

$$f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{y \in F | \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

Exemples 50

— L'image de cos est $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, celle de $P : x \longmapsto 4x^2 - 3x - 2$ est $P(\mathbb{R}) = [-\frac{41}{16}, +\infty[$.

— On a $\ln([\frac{1}{e}, \sqrt{e}[) = [-1, \frac{1}{2}[$.

Remarque 51 Pour démontrer les trois résultats ci-dessus, on utilise l'étude des variations des fonctions ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 52 L'image (directe) de l'ensemble I des nombres impairs par la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\{-1\}$.

Exercice 53 Déterminer l'image directe de $]0,1]$ par $P : x \longmapsto 4x^2 - 3x - 2$.

Remarque 54 La notation ci-dessus de l'image d'une partie est celle couramment utilisée, mais elle peut être **dangereuse**, notamment lorsqu'on manipule des applications entre ensembles d'ensembles, mais pas seulement. L'algorithme préconisé pour interpréter une expression $f(a)$ est le suivant : on regarde l'ensemble de départ E de f, puis, si $a \in E$, alors on prend l'image de l'**élément** a de E par l'application f, sinon, si $a \subset E$ (*i.e.* si $a \in \mathcal{P}(E)$), on prend l'image directe de la **partie** a de E par f et sinon, l'expression $f(a)$ n'a pas de sens (ce qu'on voit parfois dans des copies d'élèves). Lorsqu'on écrit un texte mathématique, il faut donc toujours vérifier que les expressions qu'on manipule ont bien un sens.

Définition 55 L'application $f : E \to F$ est dite *surjective* lorsque $f(E) = F$, *i.e.* lorsque tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont "atteints" par f.

Remarque 56 On dit aussi que f est une *surjection*.

Exemples 57 Les fonctions cos, exp, $P : x \longmapsto 4x^2 - 3x - 2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ne sont pas surjectives, mais ln l'est, ainsi que $x \longmapsto x^3$ et tan.

Exercice 58 Dessiner le diagramme de Venn d'une application surjective.

Définition 59 L'application $f : E \to F$ est dite *injective* lorsque deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes :

$$\forall x, y \in E, (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)).$$

Par contraposition, cela équivaut à ce que deux éléments d'images égales soient forcément égaux :

$$\forall x, y \in E, (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y),$$

cette dernière formulation étant souvent plus pratique pour montrer l'injectivité.

Remarque 60 On dit aussi que f est une *injection*.

Exemples 61 Les fonctions exp, ln, $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont injectives, mais cos, $P : x \longmapsto 4x^2 - 3x - 2$ et tan ne le sont pas.

Remarque 62 Une application d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui est strictement monotone est automatiquement injective (expliquer pourquoi). Remarquer que l'ensemble de départ n'est pas nécessairement un intervalle et qu'aucune hypothèse de continuité n'est nécessaire, contrairement à ce que certains pourraient croire. C'est en particulier le cas des suites réelles strictement monotones qui sont des applications injectives.

Exercice 63
- Dessiner le diagramme de Venn d'une application injective, mais pas surjective.
- Dessiner le diagramme de Venn d'une application surjective, mais pas injective.
- Dessiner le diagramme de Venn d'une application surjective et injective.
- Exprimer en langage courant, en terme de "flèches" dans le diagramme de Venn, les notions de surjectivité, injectivité et bijectivité.

Définition 64 Une application à la fois surjective et injective est dite *bijective*.

Remarque 65 On dit aussi que f est une *bijection*.

Exemples 66
- La fonction ln est bijective (de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$).
- La fonction $x \longmapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- Toutes les fonctions dont on a vu précédemment qu'elle n'étaient pas surjectives ou pas injectives ne sont évidemment pas bijectives.
- La fonction exp n'est pas bijective, mais si on "change" l'ensemble d'arrivée, on obtient ce qu'on appelle une application *induite*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \right.$$

  qui, elle, est bijective. On dit que exp "induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^\star$".
- La fonction tan n'est pas bijective, mais si on la *restreint* à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on obtient une bijection :

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$$

Exercice 67 À quelle condition une application $f : E \to F$ peut-elle induire une bijection de E vers une partie de F et quelle doit alors être cette partie ?

Exercice 68 Montrer que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n,m) & \longmapsto & 2^n(2m+1)-1 \end{array} \right.$$

est une bijection.

4 Notion d'antécédent

Définition 69 Pour $f : E \to F$ et $y \in F$, un *antécédent* de y par f est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Remarque 70 Un élément de F n'a pas forcément d'antécédent par f et il peut aussi en avoir plusieurs, voire une infinité.

Exemple 71 Les antécédents de 0 par la fonction cos sont les éléments de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. En revanche 2 n'a pas d'antécédent par cette fonction.

On peut alors reformuler les notions de surjectivité, d'injectivité et de bijectivité :

Proposition 72 *L'application $f : E \to F$ est surjective (resp. injective, resp. bijective) ssi tout élément de F admet au moins (resp. au plus, resp. exactement) un antécédent.*

Remarque 73 Le fait que f soit une application signifie que tout élément de l'ensemble de départ a exactement une image ($\forall x \in E, \exists ! y \in F, f(x) = y$), ce qu'**il ne faut pas confondre** avec la définition de la bijectivité ($\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$).

La notion d'antécédent permet aussi de définir l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée :

Définition 74 Pour $f : E \to F$ et $B \subset F$, l'*image réciproque* (ou *préimage*) de B par f est la partie $f^{-1}(B) \subset E$ définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}.$$

Remarque 75 On a toujours $f^{-1}(F) = E$.

Remarque 76 Cette notation aussi est **dangereuse** comme on le verra par la suite : ce n'est pas parce qu'il y a l'assemblage de symboles f^{-1} dans l'expression $f^{-1}(B)$ qu'il existe automatiquement une application f^{-1}. En effet on verra par la suite que seules les bijections admettent une "application réciproque".

Exercice 77 Déterminer graphiquement puis formellement l'image réciproque de l'intervalle $[-1, \frac{1}{2}[$ par la fonction $x \longmapsto x^2$.

5 Relations ensemblistes concernant les images directes et réciproques

On peut montrer relativement aisément les propriétés suivantes concernant $f : E \to F$.

Proposition 78 *("Croissance")*
- $\forall A, A' \subset E, (A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A'))$
- $\forall B, B' \subset F, (B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$

Proposition 79 *("Intersection et réunion")*
Pour tous $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$,
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

— $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
— $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Exercice 80 Montrer que pour $A, A' \subset E$, $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ et exhiber un contrexemple qui prouve qu'il n'y a pas égalité en général. Quelle propriété sur f assure l'égalité ?

Soient $A, A' \subset E$. Comme $A \cap A' \subset A$, par croissance, $f(A \cap A') \subset f(A)$. En appliquant ce résultat à A' et A, comme l'intersection est commutative, on obtient $f(A \cap A') \subset f(A')$. Ainsi, $\boxed{f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').}$

En prenant $E = \{0, 1\}$, $F = \{3\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(0) = f(1) = 3$, puis $A = \{0\}$ et $A' = \{1\}$, on a $A \cap A' = \emptyset$, donc $f(A \cap A') = \emptyset$. Par ailleurs, $f(A) \cap f(A') = \{3\} \cap \{3\} = \{3\} \neq \emptyset$, donc l'inclusion inverse est fausse en général.

En revanche, avec l'hypothèse supplémentaire de l'injectivité de f, on a l'inclusion inverse et donc $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. En effet, prenons $y \in f(A) \cap f(A')$. Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. De même, comme $y \in f(A')$, il existe $x' \in A'$ tel que $f(x') = y$. Par injectivité de f, $x = x'$, donc $x \in A \cap A'$. Comme $f(x) = y$, $y \in f(A \cap A')$.

Proposition 81 *("Complémentaire")*
— $\forall A \subset E, f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$
— $\forall B \subset F, f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$

Exercice 82 Vérifier tous ces résultats sur des exemples à l'aide de diagrammes de Venn.

Voici un exercice récapitulatif sur les images directes et réciproques.

Exercice 83 Soit f l'application de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3\}$ définie par $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ et $f(d) = 3$ et g une application continue de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ qui est strictement décroissante (resp. croissante) sur $]-\infty, -2]$, $]-1, 2]$ et $[3, +\infty[$ (resp. $[-2, -1[$ et $[2, 3]$) et qui vérifie : $g(-2) = 0$, $g(2) = -1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 0$, $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-1^-} g = \lim\limits_{-1^+} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.

Pour les résultats concernant g, on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction strictement monotone est injective.

1. Représenter graphiquement ces deux applications.
2. Sont-elles surjectives, injectives, bijectives ?
3. Calculer les images réciproques par f de toutes les parties de F.
4. Calculer $g(]-\infty, -1[\cup]a, +\infty[)$ suivant les valeurs du paramère réel $a > -1$.
5. Décrire comme une réunion d'intervalles l'image réciproque par g de $[b, +\infty[$, suivant les valeurs du paramètre réel b.
6. Y a-t-il des restrictions de f ou de g qui soient bijectives ?

6 Composition

Définition 84 Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ on définit la *composée* de f par g ainsi :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array} \right.$$

Remarque 85 Par extension, on peut aussi définir la composée $g \circ f$ en supposant seulement que l'ensemble de définition de g contient $f(E)$.

Dans le cas d'une **fonction** composée $g \circ f$, dont on ne connaît pas l'ensemble de définition *a priori*, on détermine l'ensemble de définition $D_{g\circ f}$ comme le plus grand ensemble sur lequel f soit définie et à valeurs dans D_g, *i.e.* $D_{g\circ f} = f^{-1}(D_g) = \left\{x \in D_f | f(x) \in D_g\right\}$. En termes d'applications, on compose donc g avec $f|_{D_{g\circ f}}$ (en se servant de la remarque qu'on vient de voir ci dessus).

Cependant, pour alléger l'exposé, on présente la théorie dans le cadre de la définition donnée au-dessus : l'ensemble d'arrivée de la première application est l'ensemble de départ de la seconde.

Exemple 86 La fonction $f : x \longmapsto \ln(|\sin(x)|)$ est $\ln\circ(\mathrm{abs}\circ\sin)$ mais aussi $(\ln\circ\mathrm{abs})\circ\sin$. Remarquer qu'on est dans le cas d'extension de la remarque précédente : quel que soit leur ensemble de départ, on considère que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pourtant ln n'est pas défini sur $\mathbb{R}$. En pratique, pour x dans le domaine de définition de la fonction f (à déterminer en exercice), $|\sin(x)| > 0$ donc $\ln(|\sin(x)|)$ est bien défini.

Proposition 87 *La composition est "associative" : lorsque $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$,*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Démonstration: Pour montrer cela, remarquons que $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H. Il ne reste plus qu'à montrer que ces deux applications donnent la même image de tout $x \in E$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

□

Définition 88 Pour un ensemble E, l'application identité de E est

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Proposition 89 *Pour toute application $f : E \to F$, on a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.*

Exercice 90 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.
3. Montrer que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi.
4. Si $g \circ f$ est injective, que dire de f et/ou de g ?
5. Si $g \circ f$ est surjective, que dire de f et/ou de g ?

7 Réciproque d'une bijection

Définition 91 Pour $f \in F^E$, on dit que g est *application réciproque* de f ssi $g \in E^F$, $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Remarque 92 Cette définition est différente de la notion de *fonction réciproque* déjà introduite dans le cours d'analyse, puisque nous avons convenu que toutes les fonctions ont comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Néanmoins, ces deux notions sont reliées, comme on peut le voir sur l'exemple suivant.

Exemple 93 La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet comme fonction réciproque la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$, mais ln n'est pas application réciproque de exp, car l'ensemble de départ de ln est différent de l'ensemble d'arrivée de exp. Cependant, si on considère l'application induite par exp de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^\star$:

$$\widetilde{\exp} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & \widetilde{\exp}(x) = \exp(x) \end{array} \right. ,$$

alors ln est application réciproque de $\widetilde{\exp}$.

Dans le cas général, il est nécessaire de prendre des applications induites par chacune des deux fonctions réciproques pour obtenir des applications réciproques.

Proposition 94 *(Caractérisation des bijections.)*

Une application $f \in F^E$ est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque.

Dans ce cas, il existe une unique application réciproque pour f, qu'on note f^{-1} et qui associe à tout $y \in F$ son unique antécédent par f.

Démonstration: On admet faute de temps cette propriété, qu'il est cependant raisonnable de démontrer en exercice. □

Remarque 95 Sur un diagramme de Venn, f^{-1} s'obtient en inversant le sens des flèches.

Exemples 96

- La fonction $f : x \longmapsto 1 + 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et son application réciproque est $f^{-1} : y \longmapsto \frac{y-1}{2}$.
- La fonction $g : x \longmapsto 1 - x$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et elle est sa propre application réciproque : $g^{-1} = g$.

Voici une propriété qu'il est facile de démontrer en exercice :

Proposition 97 *Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Voici la suite d'un exercice précédent qu'on peut démontrer à l'aide de cette caractérisation des bijections :

Proposition 98 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

On voit dans l'exercice suivant qu'une des deux conditions de cette caractérisation des bijections ne suffit pas :

Exercice 99 Construire deux applications f et g de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ non bijectives telles que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$.

Remarque 100 Si $f : E \to F$ est bijective et $B \subset F$, alors l'écriture $f^{-1}(B)$ a deux significations :
— l'image réciproque de B par f.
— l'image directe de B par f^{-1}.
Fort heureusement, ces deux notions coïncident dans ce cas-là !

Remarque 101 On rappelle qu'en général, l'écriture $f^{-1}(B)$ **ne signifie pas du tout** que f est bijective.

Enfin, le lemme suivant nous sera utile par la suite :

Lemme 102 *Composer une application f avec une bijection, à la source ou au but, ne change ni le fait que f soit ou non injective, ni le fait que f soit ou non surjective.*

Démonstration: Si f est injective (resp. surjective), l'exercice 90 nous assure que la composée par une bijection aussi puisque ladite bijection est à la fois injective et surjective. Par ailleurs si c'est la composée qui est injective (resp. surjective), alors on obtient le résultat en composant avec la réciproque de la bijection (qui est aussi bijective) et en appliquant ce qu'on vient de montrer. $\square$

8 Le théorème de Cantor-Bernstein

Ce résultat est la base de la théorie des cardinaux, qui est un des moyens d'arriver à la définition des nombres entiers (ce qu'on ne fera pas ici). On le laisse en exercice détaillé pour les lecteurs les plus motivés.

Exercice 103 *Théorème de Cantor-Bernstein.* Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$, supposées toutes deux injectives. On veut montrer qu'il existe une bijection de E vers F.

On pose $h = g \circ f$, $R = E \setminus g(F)$ et $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{P}(E) | R \cup h(M) \subset M\}$.

1. Montrer que $A = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M$ est un élément de $\mathcal{F}$.
2. Montrer par l'absurde que $A = R \cup h(A)$ (on pourra considérer $x \in A \setminus R \cup h(A)$ et $A \setminus \{x\}$).
3. Soient $A' = f(A)$, $B' = F \setminus A'$ et $B = g(B')$. Montrer que B et $h(A)$ sont disjoints, puis que B et A le sont.
4. Montrer que $B = E \setminus A$. Pour cela, soit $x \in E \setminus A$; montrer que $x \notin R$. Il s'écrit alors $x = g(y)$ avec $y \in F$; montrer que $y \in B'$ en raisonnant par l'absurde.
5. Construire une bijection de E vers F.

9 Cardinal d'un ensemble fini

Avertissement : Le point de vue adopté dans cette section n'est pas conforme à la théorie des ensembles. Dans cette théorie, les entiers naturels sont définis comme les cardinaux finis (ou les ordinaux finis suivant les présentations). Au contraire, on suppose ici qu'on connaît déjà les entiers naturels et on définit les cardinaux finis à partir de ces entiers.

On commence par démontrer deux lemmes très utiles.

Lemme 104 *Soient $n,p \in \mathbb{N}$ et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ strictement croissante.*
Alors, $\forall k \in [\![1,p]\!],\ f(k) \geq k$, puis $p \leq n$.

Démonstration: Par récurrence (finie) facile pour le premier résultat : $f(1) \geq 1$ et si, pour $k \in [\![1,p-1]\!]$, $f(k) \geq k$, alors, par stricte croissance, $f(k+1) > f(k)$ donc $f(k+1) > k$, puis comme ce sont deux entiers, $f(k+1) \geq k+1$.

On a ensuite $p \leq f(p) \leq n$. □

Lemme 105 *Soient $n,p \in \mathbb{N}$ et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ injective.*
Alors il existe une bijection $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,p]\!]$ telle que $f \circ \varphi$ soit strictement croissante.

Démonstration: Les images par f des p éléments de $[\![1,p]\!]$ étant toutes différentes, on obtient en les ordonnant des entiers $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$. On définit alors $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,p]\!]$ en posant $\varphi(k)$ égal à l'unique antécédent de j_k par f. Cette application est bien définie par injectivité de f. De plus, pour $k,k' \in [\![1,p]\!]$, si $\varphi(k) = \varphi(k')$ alors en prenant les images par f, $j_k = j_{k'}$, donc $k = k'$ par stricte croissance de la numérotation. Ainsi, φ est injective. Par ailleurs, pour $i \in [\![1,p]\!]$, par définition des j_k, il existe $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $f(i) = j_k$ et on a alors $\varphi(k) = i$. Ainsi, φ est surjective, donc bijective. En outre, pour $k \in [\![1,p]\!]$, $f(\varphi(k)) = j_k$, donc $f \circ \varphi$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$. □

Une conséquence immédiate des deux lemmes est la suivante.

Corollaire 106 *Soient $n,p \in \mathbb{N}$ et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ injective.*
Alors $p \leq n$.

On peut maintenant définir les ensembles finis et leurs cardinaux.

Définition 107 Un ensemble E est dit *fini* ss'il est en bijection avec un intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.

Remarque 108 Si un ensemble F est en bijection avec un ensemble E fini. alors F est fini.

En effet, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers E et, par composition de deux bijections, on obtient une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers F.

Proposition 109 *Dans ce cas, l'entier n est unique. On l'appelle le cardinal de l'ensemble E et on le note* $\operatorname{Card} E$, $|E|$ *ou* $\#E$.

Démonstration: Supposons que l'ensemble E soit en bijection avec deux intervalles $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,p]\!]$. En prenant une réciproque et composant deux bijections, on obtient une bijection $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$. D'après le corollaire 106, φ étant injective, $p \leq n$, puis, φ^{-1} étant injective, $n \leq p$, donc $p = n$. □

Exemples 110

$\operatorname{Card}\{a,b,c,d,e\} = 5$, $\operatorname{Card}\emptyset = 0$, $\operatorname{Card}\{\emptyset\} = 1$, $\operatorname{Card}\{\emptyset,\{\emptyset\}\} = 2$, $\operatorname{Card}\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} = 3$

Si on a une application entre deux ensembles finis, les propriétés de cette application peuvent nous permettre de comparer leurs cardinaux :

Proposition 111 *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles finis E et F. Alors :*
— *Si f est injective,* $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$.
— *Si f est surjective,* $\mathrm{Card}\, E \geq \mathrm{Card}\, F$.
— *Si f est bijective,* $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.

Démonstration: Par définition de $p = \mathrm{Card}\, E$ et $n = \mathrm{Card}\, F$, quitte à composer, à la source et au but, par des bijections (ce qui ne change ni l'injectivité, ni la surjectivité d'après le lemme 102), on peut supposer que $E = [\![1,p]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$.

Si f est injective, le corollaire 106 assure que $p \leq n$.

Si f est surjective, pour chaque élément $y \in [\![1,n]\!]$, on peut choisir un antécédent qu'on note $g(y)$. On définit ainsi une application $g : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ qui est injective par construction et le lemme 106 assure que $p \leq n$.

Si f est bijective, en combinant les deux résultats précédents ou directement en utilisant la définition du cardinal et composant deux bijections, on obtient $p = n$. $\square$

Réciproquement, si $p \leq n$, $x \longmapsto x$ fournit une injection de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ et il est facile de contruire une surjection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ lorsque $p \neq 0$. On en déduit immédiatement l'énoncé suivant :

Proposition 112 *Pour deux ensembles finis E et F,* $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$ *ss'il existe une injection de E vers F.*

Lorsque $E \neq \emptyset$, cela équivaut à ce qu'il existe une surjection de F vers E.

On va voir que l'injectivité vers un ensemble fini prouve la finitude de l'ensemble de départ. Un cas particulier fondamental est le suivant

Proposition 113 *Toute partie d'un ensemble fini est finie et de cardinal inférieur ou égal à celui de cet ensemble.*

Démonstration: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$.

Il existe une bijection φ de E vers $[\![1,n]\!]$, qui induit une bijection de A vers $A' \subset [\![1,n]\!]$. Si A' est finie de cardinal inférieur ou égal à n, alors, par la remarque 108, A est aussi finie, puis, par la proposition 111, son cardinal est inférieur ou égal à n.

On est donc ramené au cas d'une partie A' de $[\![1,n]\!]$. On note k_1 son plus petit élément, puis k_2 le plus petit élément de $A' \setminus \{k_1\}$, *etc.* Remarquons que la suite ainsi construite est strictement croissante. Montrons par l'absurde que ce processus se finit en au plus n étapes. Sinon, on pourrait effectuer au moins $n+1$ étapes, ce qui nous fournirait des entiers $1 \leq k_1 < k_2 \ldots < k_{n+1} \leq n$. L'application $i \longmapsto k_i$ serait alors une injection (par stricte croissance) de $[\![1,n+1]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, ce qui donne, par le corollaire 106, $n+1 \leq n$, contradiction.

Ainsi le processus finit en p étapes, avec $p \leq n$. et $i \longmapsto k_i$ est une bijection de $[\![1,p]\!]$ vers A', donc A' est finie, de cardinal $p \leq n$. $\square$

On a plus généralement le

Corollaire 114 *Soient E,F deux ensembles quelconques et $f \in F^E$.*

1. *Si f est injective et F est fini, alors E est fini et* $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$.
2. *Si f est surjective et E est fini, alors F est fini et* $\mathrm{Card}\, E \geq \mathrm{Card}\, F$.

Démonstration:

1. Supposons que f soit injective et E fini. Comme f est injective, elle induit une bijection de E vers $f(E)$. Comme F est fini et $f(E) \subset F$, alors $f(E)$ est fini de cardinal au plus $\operatorname{Card} F$, puis par bijectivité de l'application induite précédente, il en est de même pour E.
2. Supposons que f soit surjective et F fini. Chaque $y \in F$ admet au moins un antécédent. On en choisit un qu'on note $g(y)$, ce qui construit une application $g \in E^F$. Remarquons qu'on ne fait pas appel pour cela à l'axiome du choix, puisque F est fini. L'application g est automatiquement injective : si $y, y' \in F$ vérifient $g(y) = g(y')$, alors $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$. En appliquant le point précédent à l'application $g \in E^F$, on conclut

□

Les notions d'injectivité et de surjectivité, sans être contraires, paraîssent assez indépendantes l'une de l'autre. Pourtant il est un cas ou elle sont équivalentes comme le décrit le résultat suivant, très surprenant à première vue :

Théorème 115 *Soient E et F deux ensembles* ***finis*** *et de* ***même cardinal*** *n et $f : E \to F$. Alors*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration: On peut supposer, quitte à composer f avec des bijections à la source et au but, que $E = F = [\![1, n]\!]$.

Supposons f injective. Par le lemme 105, quitte à composer par une bijection à la source, on peut supposer que f est strictement croissante. Le lemme 104 assure que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(i) \geq i$. S'il existait un i_0 tel que $f(i_0) > i_0$, alors une récurrence partant de i_0 prouverait que pour tout $i \geq i_0$, $f(i) > i$, ce qui fournit la contradiction $f(n) > n$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(i) = i$ et f est donc bijective.

Si f est surjective, par un choix d'antécédent comme dans la démonstration de la proposition précédente, on construit une application $g : F \to E$ injective telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Cette application g est alors bijective par ce qu'on vient juste de démontrer, et en composant par g^{-1}, f est bijective comme composée de bijections.

Réciproquement, si f est bijective, elle est à la fois injective et surjective. □

Voici enfin un exercice qui demande un peu d'imagination.

Exercice 116 On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) = n + 2015.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que f existe.

1. Est-il possible que f soit bijective ?
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $f(n + 2015) = f(n) + 2015$. En déduire que si $n \geq 2015$, alors $f(n) \geq 2015$.
4. Soient $A = \{0, 1, \ldots, 2014\}$, $B = f(A) \cap A$ et $C = A \setminus B$. Montrer que $B = f(C)$.
5. Conclure.

10 Opérations sur les cardinaux finis

On reviendra lors du cours de combinatoire sur les résultats suivants, qui pourront cependant nous servir parfois d'ici-là.

On utilise ici la notation $|E|$ pour le cardinal de E.

Proposition 117 *("Réunion disjointe finie")*
*Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille **finie** d'ensembles **finis disjoints**. Alors*

$$\boxed{\left|\bigsqcup_{i\in I} E_i\right| = \sum_{i\in I} |E_i|\,.}$$

Démonstration: Par récurrence immédiate sur le cardinal de I (par associativité de la réunion), il suffit de démontrer le résultat pour deux ensembles disjoints.

Pour la réunion disjointe de deux ensembles de cardinaux n et p, on se ramène, par la définition du cardinal et le fait que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![n+1,n+p]\!] \\ k & \longmapsto & k+p \end{array} \right. ,$$

est bijective, à la réunion de $[\![1,n]\!]$ et de $[\![n+1,n+p]\!]$, qui est de cardinal $n+p$. $\square$

Proposition 118 *("Produit cartésien fini")*
*Soient $E_1,\dots,E_n$ des ensembles **finis**. Alors*

$$\boxed{\left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|\,.}$$

Démonstration: Par récurrence immédiate sur n (par "associativité" du produit cartésien), il suffit de démontrer le résultat pour deux ensembles.

Pour E et F finis,

$$E\times F = \bigsqcup_{x\in E} \left(\{x\}\times F\right).$$

Or, pour tout $x\in E$, $y \longmapsto (x,y)$ est clairement une bijection de F vers $\{x\}\times F$, donc

$$|E\times F| = \sum_{x\in E} |F| = |E|\,|F|\,.$$

$\square$

Proposition 119 *("Ensemble d'applications")*
Soient E et F deux ensembles finis. Alors

$$\boxed{\left|F^E\right| = |F|^{|E|}\,.}$$

Démonstration: Si on note $p = |E|$, F^E est en bijection avec $F^{[\![1,p]\!]}$ qu'on a lui même déjà identifié à F^p, dont le cardinal est $|F|^p$, par la proposition précédente. $\square$

Proposition 120 *("Ensemble des parties")*

Pour un ensemble fini E,

$$\boxed{|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.}$$

Démonstration: On définit, pour toute partie A de E, sa "fonction indicatrice"

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On introduit alors

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

et on montre que

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array} \right.$$

est son application réciproque :

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors, par définition de $\mathbf{1}_A$,

$$\psi(\varphi(A)) = \psi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid \mathbf{1}_A(x) = 1\} = A.$$

Ainsi $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Soit $f \in \{0,1\}^E$. Comme f et $\varphi(\psi(f))$ sont deux applications de E vers $\{0,1\}$, pour montrer leur égalité, il ne reste plus qu'à montrer qu'elles donnent la même image de tout $x \in E$:

$$\varphi(\psi(f))(x) = \varphi(f^{-1}(\{1\}))(x) = \mathbf{1}_{f^{-1}(\{1\})}(x),$$

qui vaut 1 si $x \in f^{-1}(\{1\})$ et 0 sinon, *i.e.* 1 si $f(x) = 1$ et 0 si $f(x) = 0.$, *i.e.* $f(x)$. Ainsi, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^E}$.

Donc, ψ est application réciproque de φ, donc φ est bijective et finalement, par la proposition précédente,

$$|\mathcal{P}(E)| = \left|\{0,1\}^E\right| = 2^{|E|}.$$

$\square$

Proposition 121 *("Ensemble d'injections")*

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n.

Alors le nombre d'injections de E vers F est $n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration: On fait un dessin d'arbre. Voir le chapitre de combinatoire pour une démonstration formelle. □

En notant $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E, on a la

Proposition 122 *("Ensemble des parties de cardinal fixé")*
Pour un ensemble fini E, de cardinal n, et $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E) = \binom{n}{k}$.

Démonstration: On donne l'idée de la preuve. Voir le chapitre de combinatoire pour une démonstration formelle. □

11 Ensembles infinis

Cette partie, principalement hors programme de la première année, est non exigible. Elle est censée donner aux élèves une première intuition du fait qu'il existe différents "cardinaux infinis".

Théorème 123 *Soit E un ensemble quelconque (fini ou non).*
Il existe une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$.
Il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.
On dit que $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) > \operatorname{Card} E$.

Démonstration: L'existence de l'injection est triviale : prendre

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ x & \longmapsto & \{x\}. \end{array} \right.$$

La démonstration du deuxième point repose, comme bien d'autres résultats mathématiques essentiels (démonstration diagonale de Cantor, paradoxe de Russel, théorème de Gödel...) sur un argument du type du "paradoxe du menteur".

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection φ de E vers $\mathcal{P}(E)$. On pose alors $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$ et $a = \varphi^{-1}(A)$. (Attention, ici $\varphi^{-1}(A)$ est l'image, par l'application réciproque φ^{-1}, de l'élément A de $\mathcal{P}(E)$!)

On a alors deux cas :
— Soit $a \in A$ et, par définition de A, $a \notin \varphi(a) = A$, contradiction ;
— Soit $a \notin A$ et, comme $a \in E$, par définition de A, $a \in \varphi(a) = A$, contradiction.

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction, ce qui achève la démonstration par l'absurde. □

On déduit de ce résultat qu'il existe une infinité d'infinis différents. On a au moins l'infinité suivante de cardinaux

$$\operatorname{Card} \mathbb{N} < \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots$$

La question de savoir s'il existe des cardinaux intermédiaires entre $\operatorname{Card} \mathbb{N}$ et $\operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a été longtemps ouverte, jusqu'à la preuve, en 1963, de l'indécidabilité de cette question dans l'axiomatique ZFC (+ axiome de fondation) par Paul Cohen, qui fut un élève de Kurt Gödel. (La conjecture faite par Cantor de la non existence de tels cardinaux est appelée l'*hypothèse du continu*.)

Par ailleurs, on généralise la proposition 120 avec exactement la même démonstration :

Proposition 124 *Pour tout ensemble E, il existe une bijection de $\{0,1\}^E$ vers $\mathcal{P}(E)$.*

Définition 125 Un ensemble est dit *dénombrable* ss'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble est *au plus dénombrable* ss'il est fini ou dénombrable.

Remarque 126 Un ensemble est dénombrable ssi on peut "numéroter" tous ses éléments à l'aide des entiers.

Théorème 127 *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration: En utilisant le théorème 123, il suffit de montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ce qui repose sur la proposition ci-dessus : il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On pourrait alors montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en utilisant l'écriture des réels en base 2.

Un autre démonstration est la démonstration diagonale de Cantor qui sera expliquée en cours. $\square$

Voici enfin des résultats sur la dénombrabilité. On donnera des pistes de démonstration pour certains d'entre eux.

Proposition 128 *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Démonstration: Exhiber une bijection en exercice. $\square$

Proposition 129 *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Démonstration: C'est l'objet d'un exercice de ce chapitre. $\square$

Proposition 130 *$\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration: Il existe une bijection entre $\mathbb{Q}$ et une partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, par la représentation en fractions irréductibles. $\square$

Proposition 131 *Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Démonstration: Généraliser la démonstration pour $\mathbb{N}^2$. $\square$

Proposition 132 *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Démonstration: Penser à $\mathbb{N}^2$... $\square$