DM 3

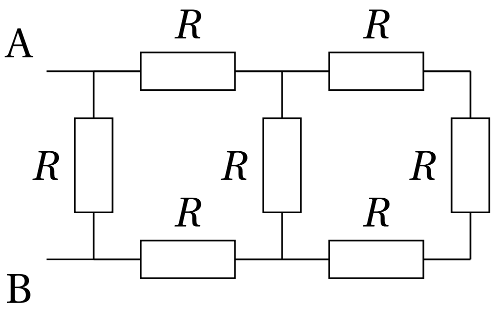
06/11/23

Consignes générales :

Le sujet comporte éxercices et 1 problème indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Noter clairement le titre de l'exercice et les numéros des questions traités.
Les calculs seront toujours menés **de façon littérale, et le résultat littéral** $\boxed{\textbf{encadré}}$.
Les applications numériques seront ensuite effectuées quand elles seront demandées, et souliqnées.

Exercice 1. Résistance équivalente

Déterminer la résistance équivalente R_{eq} entre les points A et B en fonction de R



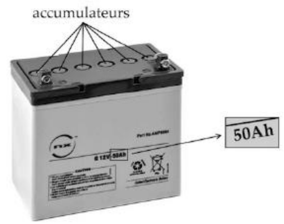
Exercice 2. Plaques à induction

Les plaques de cuisson à induction sont consitutées de bobines qui sont parcourues par une courant variable. Un champ magnétique variable est alors créé ce qui entraîne des courants induits dans le métal de la casserole posée sur la plaque de cuisson. Ces courants échauffent le métal (et donc ce qui est dans la casserole) grâce à l'effet Joule. Ce système de cuisson possède un très bon rendement car la chaleur est créée direcement dans le métal de la casserole (par les courants induits) au lieu d'être transmise depuis l'extérieur, comme avec des plaques électriques ou à gaz.

L'alimentation d'une plaque de cuisson à induction peut être modélisée par une résistance r et une bobine d'inductance L branchées en série et alimentées par une générateur de tension idéal de f.e.m. e constante.
À l'instant $t = 0$, on enclenche le générateur : à $t < 0$, aucun courant ne circulait dans le circuit, à $t \geq 0$ le générateur impose une tension e dans le circuit.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans le circuit pour $t \geq 0$ en faisant intervenir un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de r et L.
2. Que représente τ ? Calculer la valeur numérique de τ avec $L = 100\,\text{mH}$ et $r = 200\,\Omega$.
3. Que vaut l'intensité du courant en $t = 0^+$ et au bout d'un temps très long $t = +\infty$? Justifier les réponses sans calcul !
4. Résoudre l'équation différentielle sur $i(t)$.
5. Tracer avec soin $i(t)$ sur un graphe en précisant le temps caractérisitique, la valeur à l'origine et l'asymptote.
6. Exprimer la pente de la tangente à l'origine $\dfrac{di}{dt}(t = 0^+)$ en fonction de e, r et τ. En déduite l'équation de cette tangente.
   Montrer que cette tangente coupe l'asymptote de la courbe $i(t)$ à l'instant τ.
7. Exprimer l'intensité au bout de τ : $i(t = \tau)$ puis au bout de 5τ : $i(5\tau)$.
8. Combien de temps faut-il attendre après la fermeture de l'interrupteur pour considérer que le circuit a atteint un nouveau régime permanent ? (donner l'expression de ce temps et sa valeur numérique).

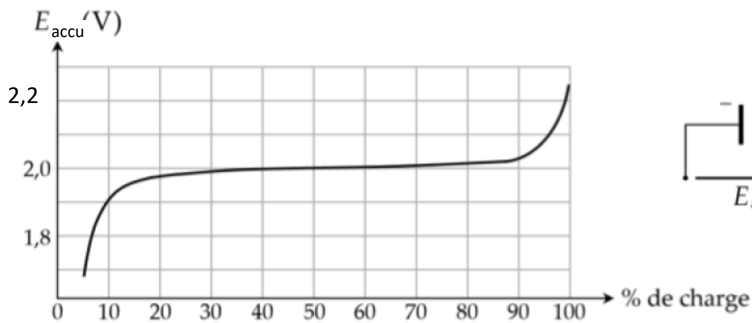
Problème : stockage de l'énergie électrique

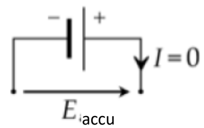


Une batterie au plomb est un ensemble de six accumulateurs (cellules électrochimique plomb-acide sulfurique) raccordées en série et réunis dans un même boitier.
Une batterie possède un caractère générateur durant sa décharge et un caractère récepteur durant sa charge.

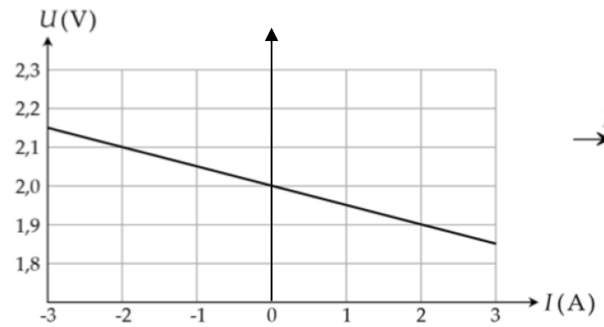
Ce type de batterie est largement utilisé dans l'industrie, l'équipement des véhicules automobiles ou pour stocker de l'énergie produite pas intermittence (énergie solaire ou éolienne).

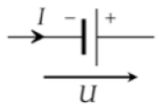
1. **Etude d'un accumulateur.**
   On s'intéresse pour le moment qu'à un seul des six accumulateurs de la batterie. Par définition, sa tension à vide E_{accu} est la tension à ses bornes lorsqu'il ne débite aucun courant. La courbe ci-dessous représente la tension à vide d'un accumulateur en fonction de son pourcentage de charge :





Lorsque l'accumulateur débite un courant I non nul, la tension U à ses bornes devient inférieure à sa tension à vide. La courbe ci-dessous représente la tension U aux bornes d'un accumulateur chargé à 50 % en fonction du courant I qui le traverse en convention générateur :





Dans cette partie, la charge de l'accumulateur étudié sera constamment comprise entre 20 % et 90 %.

(a) Un accumulateur est-il un dipôle linéaire ou non, actif ou passif, symétrique ou polarisé ? (justifier les réponses)

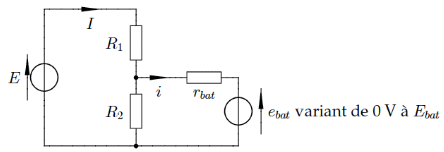
(b) Justifier que l'on puisse modéliser l'accumulateur par l'association en série d'une source idéale de f.e.m. constante E_{accu} et d'une résistance r_{accu} et donner la représentation de Thévenin équivalente à un accumulateur.

(c) Exprimer alors la tension à ses bornes U en fonction de E_{accu}, r_{accu} et I l'intensité du courant qui le traverse en convention générateur.

(d) Déterminer graphiquement les valeurs numériques de E_{accu} et r_{accu}.

2. **Charge de la batterie.**
On étudie maintenant la charge d'une batterie initialement complètement déchargée. On note e_{bat} la tension à vide de la batterie et r_{bat} sa résistance interne. Initialement $e_{\text{bat}} = 0$ puis au fur et à mesure de la charge, e_{bat} augmente. Pour charger la batterie on utilise une alimentation électrique modélisée par un générateur de f.e.m. $E = 16\,\text{V}$ constante et de résistance interne négligeable.

On réalise le montage ci-contre, on a placé deux résistances $R_1 = 2,0\,\Omega$ et $R_2 = 5,0\,\Omega$ pour contrôler la charge de la batterie.



(a) Au début de la charge, la batterie est totalement déchargée donc $e_{\text{bat}} = 0$. A quel dipôle passif la batterie est-elle alors équivalente ? En déduire par la méthode de votre choix, la valeur i_0 de l'intensité i du courant qui la traverse. Faire l'application numérique.

(b) Lorsque e_{bat} n'est pas nulle, c'est-à-dire en cours de charge, écrire le système d'équations vérifiées par les deux inconnues I et i. (On ne demande pas de résoudre ce système d'équations ici).

(c) Par la méthode de votre choix, montrer que :

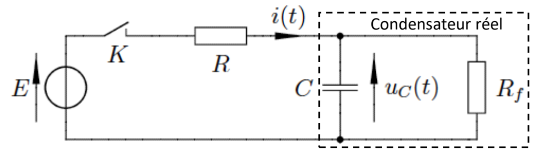
$$i = \frac{ER_2 - (R_1 + R_2)e_{\text{bat}}}{(R_1 + R_2)r_{\text{bat}} + R_1R_2}$$

(d) Pour quelle valeur de e_{bat} l'intensité i est-elle nulle ? D'après le graphique de la tension à vide en fonction de la charge, quel sera alors le pourcentage de charge des accumulateurs de la batterie ?

(e) On souhaite que i s'annule lorsque la batterie est chargée à 100 %. Quelle sera alors la valeur de e_{bat} ?
On conserve $R_1 = 2,0\,\Omega$. Quelle valeur numérique faut-il maintenant donner à R_2 ?

3. **Utilisation d'un condensateur.**
Pour avoir un système de stockage plus "portable" que la batterie étudiée précédemmenet, on décide d'utiliser un condensateur de capacité C élevée. Ce condensateur réel comporte des éléments résistifs que l'on modélisera par une résistance R_f placée en parallèle avec C.
On a $C = 100\,\mu\text{F}$ et $R_f = 10\,\text{M}\Omega$ et initialelement le condensateur est complètement déchargé.

On place un interrupteur K, une résistance $R = 10\,\Omega$ et le condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f en série aux bornes d'un générateur de tension idéal de f.e.m.constante $E = 12\,\text{V}$.
À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



(a) Déterminer les valeurs $u_C(0^+)$ et $u_C(+\infty)$ de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur juste après la fermeture de l'interrutpeur et au bout d'un temps très long. Justifier les réponses. sans calcul et faire les applications numériques.

(b) Même question pour i l'intensité qui traverse la résistance R : donner $i(0^+)$ et $i(+\infty)$. Applications numériques.

(c) On se place dans toute la suite à $t \geq 0$. Quelle est la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$?

(d) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_C(t)$ sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{RC}$$

Exprimer la quantité τ en fonction de R, R_f et C. Application numérique.

(e) En déduire l'expression de la tension $u_C(t)$

(f) Tracer l'allure de $u_C(t)$ en faisant bien apparaître l'asymptote et la tagente à l'origine.

(g) Exprimez l'énergie W_C stockée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C, R, R_f, et E. Faire l'application numérique. Commentaires ?

(h) Quelle est la puissance dissipée par effet joule dans la condensateur lorsque sa charge est terminée ? Faire l'application numérique pour $R_f = 10\,\text{M}\Omega$. Commentaires ?