# C10 - Résumé

# Topologie dans $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$

# Propriété

Une partie qui admet un plus grand élément admet une borne supérieure qui est égale à ce plus grand élément.

# Définition

Si $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure b alors

$$b \in A \Leftrightarrow b = max(A)$$

# Propriété

Si $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure et supérieure alors :

$$inf(A) \leq sup(A)$$

égaux si A est un singleton

# Propriété de la borne supérieure / inférieure dans $\mathbb{R}$

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

# Définition de $\overline{\mathbb{R}}$

On définit : $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec une relation d'ordre prolongeant R tel que :

- $-\infty$ < $\mathbb{R}$
- $+\infty$ > $\mathbb{R}$

# Propriété de la borne supérieure / inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Toute partie de A admet une borne supérieure
Pour $A \subset \mathbb{R}$ :

- Si $A \neq \varnothing$ et A est majorée, $sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = sup_{\mathbb{R}}(A)$
- Si A est non majorée, $sup_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = +\infty$
- $sup_{\overline{\mathbb{R}}}(\varnothing) = -\infty < +\infty = inf_{\overline{\mathbb{R}}}(\varnothing)$

# Théorème

$\mathbb{N}$ n'est majoré par aucun réel

# Archimédianité de $\mathbb{R}$

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, b < na$$

# Propriétés

- Une partie de $\mathbb{Z}$ est majoré dans $\mathbb{R}$ ssi elle est majoré dans $\mathbb{Z}$
- Toute partie bornée dans $\mathbb{Z}$ bornée dans $\mathbb{R}$
- Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée dans $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément

# Définition de la partie entière supérieure et inférieure

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = max(\mathbb{Z} \cap ] - \infty, x])$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\} = min(\mathbb{Z} \cap [x, +\infty[)$$

# Propriétés des parties entières

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, = \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$$

Pour $x \in \mathbb{R}$

- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $n$ tel que $n \leq x < n+1$
- $\lceil x \rceil$ est l'unique entier $n$ tel que $n-1 < x \leq n$

# Définition des approximations décimales

L'approximation décimale de $x$ par default a $10^{-k}$ près est définie par :

$$max\left\{\frac{k}{10^n}; k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{k}{10^n} \leq x\right\} = max\left(\left(\frac{1}{10^n}\mathbb{Z}\right) \cap ] -\infty, x]\right) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

L'approximation décimale de $x$ par excès a $10^{-k}$ près est définie par :

$$min\left\{\frac{k}{10^n}; k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \leq \frac{k}{10^n}\right\} = min\left(\left(\frac{1}{10^n}\mathbb{Z}\right) \cap [x, +\infty[\right) = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$$

# Théorème : densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Tout intervalle ouvert non vide dans $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

# Définition de la convexité

Une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est convexe ssi :

$$\forall x, y \in A, (x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset A)$$

# Théorème

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

# SUITES

# Propriétés

Pour $u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\text{u est majorée} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$$

$$\text{u est croissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n) \uparrow$$

$$\text{u est stationnaire} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

$$\text{u est périodique} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$$

On note $|u|$ la suite : $(|u_n|)_n$
On a alors :

$$\text{u est bornée} \Leftrightarrow |\text{u}| \text{ est majorée} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

# Définition de la limite d'une suite réelle

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$
On note :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$$

Lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$$

Ou encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$$

# Propriété

Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$,

$$u_n \longrightarrow l \Leftrightarrow |u_n - l| \longrightarrow 0$$

# Propriété

Toute suite convergente est bornée

# Définition de la limite infinie

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
On note :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

# Théorème de l'unicité de la limite

Si une suite admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors elle est unique

# Opérations sur les limites réelles

$$\text{Pour } \lim_{n \to +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v_n = l'$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | |
| $l'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+ \text{ où } 0^-$ | $\mathbb{R}$ | [illegible] |
| $u+v$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I.$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | [illegible] |
| $u \times v$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I.$ | $sgn(l) \times sgn(l')\ \infty$ | $sgn(l) \times$ |
| $\frac{u}{v}$ | $F.I.$ | $F.I.$ | $F.I.$ | $sgn(l) \times sgn(l')\ \infty$ | $sgn(l) \times sgn(l')\ \infty$ | $0^+$ |

$$\text{Pour } \lim_{n \to \infty} n^\alpha = l$$

| $\alpha \in$ | $l$ |
|---|---|
| $]-\infty, 0[$ | $0$ |
| $\{0\}$ | $1$ |
| $]0, +\infty[$ | $+\infty$ |

# Linéarité de la limite

Pour $(u_n)$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec des limites finies et $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\lim(\lambda u + \mu v) = \lambda \lim u + \mu \lim v$$

# Définition des limites par valeurs supérieures / inférieures

Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$
On dit que u tend vers l par valeur supérieure lorsque

$$\lim u = l^+ \Leftrightarrow u_n \underset{>}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > l$$

Réécriture

$$\lim u = l^+ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, l < u_n \leq l - \epsilon$$

# Théorème du passage a la limite dans une inégalité large

Soient $(u_n)$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Si $\lim u = l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim v = l' \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \Rightarrow l \leq l'$$

# Théorème de convergence par encadrement

Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Si $\lim u = \lim v = l \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n \Rightarrow w \longrightarrow l$$

# Théorème de divergence par minoration

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \Rightarrow (\lim u = +\infty \Rightarrow \lim v = +\infty)$$

(Marche avec $-\infty$)

# Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle croissante et majorée (décroissante et minorée) converge.
Toute suite réelle croissante et non majorée (décroissante et non minorée) tends vers $+\infty$ ($-\infty$).

# Définition des suites adjacentes

Deux suites sont adjacentes si elles vérifient :

- $u \uparrow$
- $v \downarrow$
- $v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

# Théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite

# Lemme

Si $u$ est croissante et converge vers $l$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$$

# Propriété sur la position des suites adjacentes

Si $u$ et $v$ sont adjacentes et l est leur limite commune,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq w_n$$

# Définition d'une suite extraite

Une suite extraite de la suite : $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue avec une application strictement croissante $\phi$ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. La suite extraite correspondant a $\phi$ est alors la suite :

$$u \circ \phi = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

On appelle extractrice l'application $\phi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$

# Proposition, extractions successives

Une suite extraite (ici $\Phi$) d'une suite extraite de u (ici $u \circ \phi$) est une suite extraite de u.

$$(u \circ \phi) \circ \Phi = u \circ \phi \circ \Phi$$

# Théorème : Stabilité de la limite par extraction

Si une suite $u$ tends vers une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de $u$ tends vers $l$.

# Corollaire de la stabilité de la limite par extraction

Si deux suites extraites de $u$ ont une limite différente alors $u$ n'a pas de limite.

# Théorème de convergence par les suites extraites de rang pair et impair

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Si ses suites extraites de rang pair et impair : $(u_{2k})_k$ et $(u_{2k+1})_k$ tendent vers une même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite tend aussi vers $l$.

# Théorème de Bolzano Weierstrass Réel

De toute suite bornée on peut en extraite une suite convergente.

# Définition de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$
On dit que A est dense ssi elle rencontre tout intervalle ouvert non vide $I$

# Propriété de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$
A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

# DEMANDER A QQN LE COURS

# Propriété

Soit $A \subset \mathbb{R}$ bornée non vide et $b \in \mathbb{R}$ Alors

$$b = sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{b marjore a} \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \to b \end{cases}$$

# Propriété (Cas infini)

Soit $A \subset \mathbb{R}$
Alors A est non majoré ssi

$$(\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \to +\infty)$$

# Propriété

Soit $f$ une fonction réelle
Si $E \subset D_f$ est stable par $f$, i.e. vérifiant : $f(E) \subset E$ alors toute suite définie par $u_0 \in E$ et la relation de récurrence :
($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$) est bien définie pour tout $\mathbb{N}$ et tous ses termes sont des éléments de $E$

# Théorème de la limite fixe

Soit $f$ une fonction réelle
Si une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente de limite $l$ et la fonction $f$ est continue en $l$, alors $l$ est un point fixe de $f$ i.e. $f(l) = l$

# Propriété : monotonie par croissance

Soit $f$ une fonction réelle
Si $f$ est croissante sur une partie de $E \subset D_f$ stable par $f$, toute suite $u$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(n)$ et $u_0 \in E$ est monotone.

# Propriété Hors programme

Soit $f$ une fonction réelle
Si $f \downarrow$ et $E \subset D_f$ et stable par $f$ alors pour u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(n)$ et $u_n \in E$, les suites $(u_{2k})$ et $(u_{2k+1})$ sont de monotonies "opposées"

# Définition de la limite de suites a valeur complexes

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.
On dit que $u_n$ tend vers $l$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$$

On dit alors que la suite est convergente

# Propriété de la limite par partie réelle et imaginaire

Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$,

$$u \longrightarrow l \Leftrightarrow (Re(u) \longrightarrow Re(l) \text{ et } Im(u) \longrightarrow Im(l))$$

# Théorème : unicité de la limite

Si une suite complexe admet une limite $l \in \mathbb{C}$, alors cette limite est unique

# Propriété

Pour $a \in \mathbb{C}$, la suite géométrique $(a^n)_n$ converge ssi $a = 1$ ou $|a| < 1$.

# Opération sur les limites complexes

$$\text{Pour } (u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim u = l \in \mathbb{C} \text{ et } \lim v = l' \in \mathbb{C}$$

$$\text{Pour } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$\text{On a alors :}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda u + \mu v$ | $\lambda l + \mu l'$ | |
| $u \times v$ | $l \times l'$ | |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{l}{l'}$ | Si $l' \neq 0$ et $v_n \neq 0$ |

# Définition des suites bornées complexes

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
$u$ est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

# Théorème de Bolzano Weierstrass complexe

De toute suite complexe bornée, on peut en extraire une suite convergente.