DM7, à rendre lundi 6 novembre 2023

Problème 1 *Étude de fonction.*

I. Étude d'une fonction auxiliaire

On note f la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.
2. Etudier rapidement la fonction f : variations, limites aux bornes de son domaine de définition. Tracer l'allure du graphe de f.
3. Déterminer soigneusement son image $f(D_f) = \{f(x);\ x \in D_f\}$.
4. (a) On note f_1 la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$.
   Montrer que f_1 admet une fonction réciproque continue f_1^{-1}.
   (b) Que peut-on dire de la dérivabilité de f_1^{-1} ?
   (c) Tracer le graphe de f_1^{-1}.
   (d) Déterminer explicitement la fonction f_1^{-1}.

II. Étude de la fonction $h : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\mathrm{Arctan}\, x$

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h.
2. La fonction h est-elle paire ? impaire ?
3. Calculer les valeurs $h(0)$, $h(1)$, $h(\sqrt{3})$, $h(-1)$ et $h(-\sqrt{3})$ et les limites de h aux bornes de D_h.
4. Que peut-on dire de la continuité de h ?
5. Justifier la dérivabilité de h sur tout intervalle ne contenant ni 1 ni -1.
6. Calculer la dérivée de h et en déduire des expressions simples de h sur les intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$, et $[1,+\infty[$.
7. Tracer l'allure du graphe de h.

Problème 2 *Réciproque pour une primitive.*

1. Montrer que $\forall v \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{sh}\,(v) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(v) - 1}$.
2. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\ x - \sqrt{x^2-1} < 1$.
3. Montrer que la restriction de la fonction ch à l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $g = \mathrm{ch}|_{\mathbb{R}_+}$, admet une fonction réciproque continue, dont on précisera l'intervalle de définition.
   Discuter la dérivabilité de cette réciproque.
4. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ pour $x \in]1,+\infty[$ à l'aide de g^{-1}, par le changement de variables $x = g(u)$.
   On pourra utiliser sans démonstration les égalités suivantes, pour $v \in \mathbb{R}$:
   $$\mathrm{ch}\,(2v) = 1 + 2\mathrm{sh}^2(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(2v) = 2\mathrm{sh}\,(v)\mathrm{ch}\,(v).$$

5. Pour $x \in [1,+\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{R}_+$: $\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} = 2x$ et en déduire une formule pour la fonction g^{-1}.

   (Se ramener à une équation du second degré en e^u et utiliser la question 2 pour écarter une des racines le cas échéant.)

6. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des fonctions usuelles du cours, pour $x \in]1,+\infty[$.

7. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des fonctions usuelles du cours, pour $x \in]-\infty,-1[$.