Devoir numéro 8 à rendre lundi 27 novembre 2023

Il est demandé d'apporter le plus grand soin à la précision de la rédaction.

Chercher **tous** les exercices et rédiger **seulement l'un d'entre eux** sur votre copie.

Exercice 1 Soit f l'application de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{1,2,3\}$ définie par $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ et $f(d) = 3$ et g une application continue de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ qui est strictement décroissante (resp. croissante) sur $]-\infty,-2]$, $]-1,2]$ et $[3,+\infty[$ (resp. $[-2,-1[$ et $[2,3]$) et qui vérifie : $g(-2) = 0$, $g(2) = -1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 0$, $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-1^-} g = \lim\limits_{-1^+} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.

1. Représenter graphiquement ces deux applications.

2. Sont-elles surjectives, injectives, bijectives ?

3. Calculer les images réciproques par f de toutes les parties de F.

4. Calculer $g(]-\infty,-1[\cup]a,+\infty[)$ suivant les valeurs du paramètre réel $a > -1$.

5. Décrire comme une réunion d'intervalles l'image réciproque par g de $[b,+\infty[$, suivant les valeurs du paramètre réel b.

6. Y a-t-il des restrictions de f ou de g qui soient bijectives ?

Exercice 2 Soit E un ensemble fixé. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les relations binaires sur E et on définit une relation binaire $\prec$ sur $\mathcal{E}$ par

$$\forall R_1, R_2 \in \mathcal{E},\quad (R_1 \prec R_2 \iff (\forall x,y \in E,\ (xR_1y \Longrightarrow xR_2y))).$$

1. Pour R_1 et R_2 dans $\mathcal{E}$, traduire $R_1 \prec R_2$ en termes des graphes de R_1 et R_2.
2. En déduire que $\prec$ est une relation d'ordre.
3. On note $\mathcal{E}_{eq}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée par les relations d'équivalence sur E. Pour tout $R_0 \in \mathcal{E}$, montrer que l'ensemble $\{R \in \mathcal{E}_{eq} | R_0 \prec R\}$ possède un minimum (indication : considérer l'intersection des graphes des relations d'équivalence majorant R_0).
   Remarque : ce minimum est appelé la relation d'équivalence engendrée par R_0.

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

On admet le résultat suivant : $\forall A \subset E,\ f\left(f^{-1}(f(A))\right) = f(A)$.

On définit deux applications

$$f_\star : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad f^\star : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}\right. .$$

1. Montrer que
   (a) si f est injective, alors $f_\star$ est injective ;
   (b) si $f_\star$ est injective, alors $f^\star$ est surjective ;
   (c) Si $f^\star$ est surjective, alors f est injective.
2. Montrer que
   (a) si f est surjective, alors $f_\star$ est surjective ;
   (b) si $f_\star$ est surjective, alors $f^\star$ est injective ;
   (c) Si $f^\star$ est injective, alors f est surjective.