Devoir numéro 5, à rendre le vendredi 20 octobre 2023

1 Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit la fonction cosinus hyperbolique par $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, la fonction sinus hyperbolique par $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et la fonction tangente hyperbolique par $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

1. Donner des expressions simples des fonctions $\operatorname{ch} + \operatorname{sh}$ et $\operatorname{ch} - \operatorname{sh}$.

Remarquons que les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ puisque l'exponentielle l'est.
Il est alors immédiat que

$$\boxed{\operatorname{ch} + \operatorname{sh} = \exp \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} - \operatorname{sh} = (x \longmapsto e^{-x}).}$$

---

2. Les graphes de ch et sh admettent-ils des symétries ?

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\operatorname{sh}(x)$. Donc la fonction $\boxed{\operatorname{ch} \text{ est paire}}$ et son graphe est <u>symétrique par rapport à l'axe des ordonnées</u>, et la fonction $\boxed{\operatorname{sh} \text{ est impaire}}$ et son graphe est <u>symétrique par rapport à l'origine</u>.

---

3. Montrer que ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer simplement leur dérivées.

La fonction $g : x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exponentielle et d'un polynôme, tous deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions ch et sh sont alors dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaisons linéaires de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après la règle de calcul sur la composée, la dérivée de g est $g' : x \longmapsto -e^{-x}$ ce qui donne, en dérivant les combinaisons linéaires, $\boxed{\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}}$ et $\boxed{\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}.}$

---

4. En déduire leurs variations.

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, alors ch aussi. Comme $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, la fonction $\boxed{\operatorname{sh} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$ Par ailleurs elle est impaire, donc $\operatorname{sh}(0) = 0$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x)$ est du signe de x. Comme $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et ch est continue en 0, la fonction $\boxed{\operatorname{ch} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-}$ et $\boxed{\text{strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

---

5. Déterminer leurs limites en $\pm\infty$.

Les formules définissant ch et sh donnent immédiatement, par combinaisons linéaires des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, les limites suivantes :

$$\boxed{\lim_{+\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty.}$$

Par parité de ch et imparité de sh, on obtient

$$\boxed{\lim_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty.}$$

---

6. Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{sh}(x) \leq \frac{\mathrm{e}^x}{2} \leq \mathrm{ch}(x)\right)$ et déterminer le comportement de $\mathrm{ch} - \mathrm{sh}$ au voisinage de $+\infty$.

L'encadrement découle immédiatement du fait que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \geq 0$.

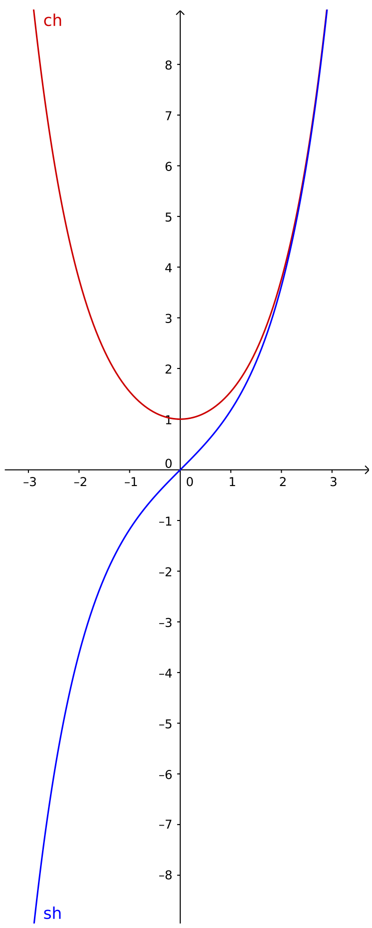
La quantité $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$ $\boxed{\text{décroît très rapidement vers } 0}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarquons que les inégalités de l'encadrement sont en fait strictes et sont aussi valables pour tout x réel.

---

7. Tracer leurs graphes dans un même repère orthonormé.

D'après la question précédente, les graphes de ch et sh se rapprochent très rapidement l'un de l'autre lorsque l'abscisse tend vers $+\infty$, celui de $\frac{\exp}{2}$ étant situé entre les deux, ce qui permet d'avoir leur allure dans cette direction asymptotique. En utilisant la parité de ch et l'imparité de sh et remarquant de plus que $\mathrm{ch}(0) = \mathrm{sh}'(0) = 1$, on obtient les graphes suivants.



8. Faire une étude complète de la fonction th.

Comme la fonction ch ne s'annule pas et les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient.
Comme ch est paire et sh est impaire, $\boxed{\text{th impaire.}}$
Par dérivation du quotient,

$$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \boxed{1 - \mathrm{th}^2.}$$

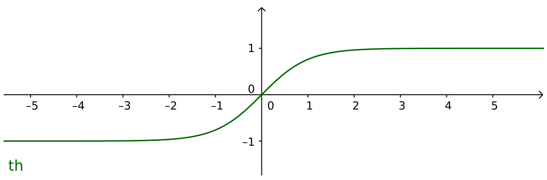
Mais on a aussi, d'après la première question

$$\mathrm{th}' = \frac{(\mathrm{ch} + \mathrm{sh})(\mathrm{ch} - \mathrm{sh})}{\mathrm{ch}^2} = \boxed{\frac{1}{\mathrm{ch}^2}}$$

qui est donc strictement positive. Donc $\boxed{\text{th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$
Par ailleurs, par combinaisons linéaires, puis quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{+\infty} \mathrm{th} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1}$$

et par imparité, $\boxed{\lim_{-\infty} \mathrm{th} = -1.}$ Ainsi, le graphe de th admet deux asymptotes horizontales : en $-\infty$ d'équation $y = -1$ et en $+\infty$ d'équation $y = 1$. Pour tracer le graphe, au voisinage de 0, on remarque que $\mathrm{th}(0) = 0$ et $\mathrm{th}'(0) = 1$.



2 Trigonométrie hyperbolique

Soient a et b dans $\mathbb{R}$.

1. Exprimer à l'aide de la fonction exponentielle $\mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b$, $\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b$, $\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b$ et $\mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b$, puis en déduire des expressions de $\mathrm{ch}(a+b)$ et $\mathrm{sh}(a+b)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,a$, $\mathrm{sh}\,a$, $\mathrm{ch}\,b$ et $\mathrm{sh}\,b$.

$$\mathrm{ch}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b = \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) = \boxed{\frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4},}$$

$$\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{sh}\,b = \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) = \boxed{\frac{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4},}$$

$$\mathrm{sh}\,a \cdot \mathrm{ch}\,b = \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) = \boxed{\frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4},}$$

$$\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b = \left(\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\right) = \boxed{\frac{e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b}}{4}}.$$

Par somme des deux premières égalités,

$$\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \frac{2e^{a+b}+2e^{-a-b}}{4} = \operatorname{ch}(a+b)$$

et par somme des deux dernières égalités,

$$\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b = \frac{2e^{a+b}-2e^{-a-b}}{4} = \operatorname{sh}(a+b),$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a.}$$

---

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur de $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$.

En utilisant les symétries des fonctions ch et sh et la formule d'addition ci-dessus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(-x) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(-x) = \operatorname{ch}(x-x) = \operatorname{ch}(0) = 1.}$$

---

3. Déduire de la première question une expression de $\operatorname{th}(a+b)$ en fonction uniquement de $\operatorname{th}(a)$ et $\operatorname{th}(b)$.

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b}$$

et en divisant numérateur et dénominateur par $\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b$ $(\neq 0)$, on obtient

$$\boxed{\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}}$$

---

4. Pour $p, q \in \mathbb{R}$, exprimer $\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q$ sous la forme $2f\left(\frac{p+q}{2}\right)g\left(\frac{p-q}{2}\right)$, où f et g sont des fonctions trigonométriques hyperboliques à déterminer.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q &= \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right) \\
&= \left(\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\right) \\
&\quad - \left(\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot \operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

---

3 **Fonction** Argth

1. Montrer que la fonction th admet une fonction réciproque dérivable, qu'on notera Argth et dont on précisera l'ensemble de définition D_{Argth}.

La fonction th est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$ est strictement positive en tout point de $\mathbb{R}$, donc le théorème des fonctions réciproques, version dérivable, assure que th admet une fonction réciproque th^{-1}, qu'on note *classiquement* Argth, qui est définie et dérivable sur l'intervalle image

$$\boxed{D_{\text{Argth}} = \text{th}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty}\text{th}, \lim_{+\infty}\text{th}\right[=]-1,1[.}$$

Comme th est strictement croissante, on sait de plus que Argth l'est aussi.

---

2. Montrer que pour tout $x \in D_{\text{Argth}}$, $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Retrouver ainsi les variations de Argth et donner ses limites aux bornes de D_{Argth}.

Le théorème précédent donne aussi une formule pour la dérivée de la fonction réciproque : $\text{Argth}' = \frac{1}{\text{th}' \circ \text{Argth}}$. Or $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$, donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}.}$$

Pour $x \in]-1,1[$, $1 - x^2 > 0$, et on retrouve ainsi que la fonction Argth est strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1^+$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^+} \text{Argth}(x) = -\infty}$ et de même $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} \text{Argth}(x) = +\infty.}$

---

3. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

Analyse. Soient a et b convenant. On a alors $\boxed{a = \frac{1}{2}}$, par exemple en multipliant, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, l'égalité par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1. Par un raisonnement analogue, on obtient $\boxed{b = -\frac{1}{2}.}$

Synthèse. Un calcul immédiat prouve que ces deux valeurs conviennent.

---

4. On rappelle qu'une *primitive* d'une fonction f est une fonction F dérivable telle que $F' = f$.
Trouver une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est la fonction $\boxed{x \longmapsto \ln(|x+1|).}$

Une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ est la fonction $\boxed{x \longmapsto \ln(|x-1|).}$

---

5. En déduire une expression de Argth à l'aide de la fonction ln.

Sur l'intervalle $]-1,1[$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

est donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Comme deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante additive, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C.$$

En prenant $x = 0$, on trouve $C = 0$, donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Remarquons au passage que $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

---

4 Fonctions de variables complexes

On étend la fonction exponentielle en une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, qu'on note encore exp, par la formule suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\left(\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Im} z)\right).$$

On étend ensuite ch, sh, cos et sin en des applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par les formules suivantes, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}, \operatorname{sh}(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}, \cos(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)+\exp(-\mathrm{i}z)}{2}, \sin(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)-\exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que, pour $a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, en notant $x = \operatorname{Re}(a),\ y = \operatorname{Im}(a),\ x' = \operatorname{Re}(b),\ y' = \operatorname{Im}(b)$,

$$\begin{aligned}
\boxed{\exp(a+b)} &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(a+b)}\left(\cos(\operatorname{Im}(a+b)) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Im}(a+b))\right) \\
&= \mathrm{e}^{x+x'}\left(\cos(y+y') + \mathrm{i}\sin(y+y')\right) \\
&= \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x'}\left(\cos(y)\cos(y') - \sin(y)\sin(y') + \mathrm{i}\sin(y)\cos(y') + \mathrm{i}\sin(y')\cos(y)\right) \\
&= \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x'}(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))(\cos(y') + \mathrm{i}\sin(y')) \\
&= \boxed{\exp(a)\exp(b).}
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{\exp(z)\exp(-z) = 1,}$ donc en particulier $\boxed{\exp(z) \neq 0.}$

---

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, exprimer les valeurs de ch, sh, cos et sin en $-z$ à l'aide de leurs valeurs en z.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on déduit directement des définitions de ces fonctions que

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{ch}(-z) &= \operatorname{ch}(z), \\
\operatorname{sh}(-z) &= -\operatorname{sh}(z), \\
\cos(-z) &= \cos(z), \\
\sin(-z) &= -\sin(z).
\end{aligned}}$$

---

3. Démontrer que les formules de la section 2 s'étendent à $\mathbb{C}$.

Les formules des deux premières questions de la section 2 reposent uniquement sur les définitions des fonctions ch et sh à l'aide de la fonctions exp et le fait que l'exponentielle transforme somme en produit. Comme on définit ch et sh sur $\mathbb{C}$ avec les même formules que sur $\mathbb{R}$ et comme on vient de voir que l'exponentielle complexe transforme aussi somme en produit, alors ces formules s'étendent aux variables complexes : pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}a\cdot\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\cdot\operatorname{sh}b,\\ \operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}a\cdot\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\cdot\operatorname{ch}a,\end{array}}$$

dont on déduit, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\boxed{\operatorname{ch}^2(z)-\operatorname{sh}^2(z)=1.}$$

En ce qui concerne la troisième question, remarquons que la fonction th ne s'étend pas à $\mathbb{C}$ entier : pour $z\in\mathbb{C}$, par multiplication par $\exp(z)\neq 0$, puis en remarquant que $|\exp(z)|=\mathrm{e}^{\operatorname{Re}z}$ et $\operatorname{Arg}(\exp(z))\equiv\operatorname{Im}z\ [2\pi]$,

$$\operatorname{ch}(z)=0\iff\exp(z)+\exp(-z)=0\iff\exp(2z)+1=0\iff 2z\equiv\mathrm{i}\pi\ [\mathrm{i}2\pi]\iff z\equiv\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\ [\mathrm{i}\pi].$$

On peut ainsi poser, pour tout $z\in D_{\mathrm{th}}=\mathbb{C}\setminus\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}\right)$, $\operatorname{th}z=\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}$, puis par la même démonstration que celle de la section 2, on obtient, pour $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $a,b,a+b\in D_{\mathrm{th}}$,

$$\boxed{\operatorname{th}(a+b)=\frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\cdot\operatorname{th}b}.}$$

On déduit enfin des formules d'addition précédentes que, pour tous $p,q\in\mathbb{C}$,

$$\boxed{\operatorname{sh}p-\operatorname{sh}q=2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

---

4. Pour $z\in\mathbb{C}$, exprimer $\cos(z)$ et $\sin(z)$ avec ch et sh, puis $\operatorname{ch}(z)$ et $\operatorname{sh}(z)$ avec cos et sin.

Soit $z\in\mathbb{C}$. Il est clair, puisque $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$, que

$$\boxed{\begin{array}{rcr}\cos(z)&=&\operatorname{ch}(\mathrm{i}z),\\ \sin(z)&=&-\mathrm{i}\operatorname{sh}(\mathrm{i}z).\end{array}}$$

En appliquant ces formules à $-\mathrm{i}z$ et en utilisant la question 2, on trouve

$$\boxed{\begin{array}{rcr}\operatorname{ch}(z)&=&\cos(\mathrm{i}z),\\ \operatorname{sh}(z)&=&-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z).\end{array}}$$

On peut en déduire que l'ensemble des z annulant cos est l'ensemble des z tels que $\mathrm{i}z$ annule ch, *i.e.* $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, par une remarque précédente. Et pour $z\in D_{\tan}=\mathbb{C}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\boxed{\tan(z)=-\mathrm{i}\operatorname{th}(\mathrm{i}z)\quad\text{et}\quad\operatorname{th}(z)=-\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}z).}$$

Remarquons qu'on peut aussi écrire ces formules dans l'autre sens pour les sinus et tangentes : pour z "convenable",

$$\boxed{\sin(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\operatorname{sh}(z),\ \operatorname{sh}(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\sin(z),\ \tan(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\operatorname{th}(z),\ \operatorname{th}(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}\tan(z).}$$

---

5. En déduire, pour $a,b,z,p,q\in\mathbb{C}$, des formules pour
   (a) $\cos(a+b)$;

$$\boxed{\cos(a+b)=}\operatorname{ch}(\mathrm{i}a+\mathrm{i}b)=\operatorname{ch}(\mathrm{i}a)\operatorname{ch}(\mathrm{i}b)+\operatorname{sh}(\mathrm{i}a)\operatorname{sh}(\mathrm{i}b)=\boxed{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).}$$

(b) $\sin(a+b)$;

$$\boxed{\sin(a+b)=}-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}a+\mathrm{i}b)=-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}a)\mathrm{ch}\,(\mathrm{i}b)-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}b)\mathrm{ch}\,(\mathrm{i}a)=\boxed{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a).}$$

(c) $\tan(a+b)$;

Si $a,b,a+b\in D_{\tan}\left(=\mathbb{C}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\right)$, alors $\mathrm{i}a,\mathrm{i}b,\mathrm{i}(a+b)\in D_{\mathrm{th}}$ et

$$\boxed{\tan(a+b)=}-\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,(\mathrm{i}a+\mathrm{i}b)=\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,(\mathrm{i}a)-\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,(\mathrm{i}b)}{1-(-\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,(\mathrm{i}a))(-\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,(\mathrm{i}b))}=\boxed{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.}$$

(d) $\cos^2(z)+\sin^2(z)$;

$$\boxed{\cos^2(z)+\sin^2(z)=}(\mathrm{ch}\,(\mathrm{i}z))^2+(-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}z))^2=\mathrm{ch}^2(\mathrm{i}z)-\mathrm{sh}^2(\mathrm{i}z)=\boxed{1.}$$

(e) $\sin(p)-\sin(q)$.

$$\boxed{\sin(p)-\sin(q)=}-\mathrm{i}\,(\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}p)-\mathrm{sh}\,(\mathrm{i}q))=-2\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{i}\,\frac{p+q}{2}\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\mathrm{i}\,\frac{p-q}{2}\right)=\boxed{2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

6. Expliquer comment “déduire” toute formule de trigonométrie hyperbolique de la formule de trigonométrie classique correspondante.

Toutes les formules de trigonométrie classique (sur $\mathbb{R}$) sont conséquences des formules d’additions de cos et sin et des symétries de ces fonctions, comme il a été vu en cours. Elles s’étendent donc directement aux valeurs complexes, pour lesquelles ces formules d’addition et ces symétries ont été montré plus haut.

En remplaçant dans une formule de trigonométrie classique z par $\mathrm{i}z$, a par $\mathrm{i}a$,... on obtient la formule de trigonométrie hyperbolique correspondante. On a fait “apparaître” i devant chaque sh (et donc devant chaque th). Soit ils se simplifient entre les deux membres de l’égalité, soit ils font apparaître un signe moins à chaque fois qu’il y a un produit de sinus ou de tangentes.

Par exemple, dans la formule d’addition de cos, il y a un moins devant le produit de sinus, et donc il y a un plus à cet endroit dans la formule de trigonométrie hyperbolique correspondante. En revanche, pour la formule d’addition de sinus, les i apparaissant dans les deux membres disparaissent et la formule de trigonométrie hyperbolique est analogue à celle de de la trigonométrie usuelle.