DS1 de mathématiques, partie calcul, vendredi 15 septembre 2023 (1h15)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.
Sauf mention explicite, toute réponse à une question devra être ***argumentée****.*

Barème sur 45 points :

— Exercice 1 (13 pts) :
1. 1 (résultat)
2. 1 (résultat et justification)
3. 3 (résultats et justifications)
4. 2 (résultats et justifications)
5. 2 = 1 (calcul union) + 1 (calcul intersection)
6. 2 = 1 (calcul union) + 1 résultat)
7. 2 = 1 (exemple) + 1 (justif)

— Exercice 2 (5 pts) : 1 par colonne

— Exercice 3 (12 pts) :
1. 8 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2
2. 4 = 2 (résultat aux bornes près, dont 1 si seulement dessin) + 2 (résultat exact)

— Exercice 4 (15 pts) :
1. 1 (évident)
2. 5 (gros calcul $a^3 = 40+6a$)
3. 9 = 1 ($P'(x) = 3(x^2-2)$) + 1 ($= 3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$) + 1 (TV) + 1 ($P(-\sqrt{2}) < 0$) + 1 ($P(\sqrt{2}) < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} = +\infty$) + 1 ($P$ cont sur $[\sqrt{2}, +\infty[$) + 1 (P strict $\uparrow$ sur $[\sqrt{2}, +\infty[$) + 2 ($a = 4$)

Exercice 1 *Un élément d'une partie peut parfois avoir un élément ayant des parties*
Soient les ensembles suivants :
$E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{\{2,4,6\}, \{1,\{3,5\}\}\}$, $B = \{\{4\},\{5,6\}\}$ et $C = \{4,5,6\}$.

1. Écrire la liste des éléments de $\mathcal{P}(C)$.

Cette liste est : $\boxed{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,6\}, C.}$

---

2. Est-ce que $A = E$?

Comme $1 \in E$ et $1 \notin A$, alors $\boxed{A \neq E.}$

---

3. Est-ce que $A \subset \mathcal{P}(E)$? $B \subset \mathcal{P}(E)$? $C \subset \mathcal{P}(E)$?

Comme $\{3,5\} \notin E$, alors $\{1,\{3,5\}\} \notin \mathcal{P}(E)$. Or $\{1,\{3,5\}\} \in A$, donc $\boxed{A \not\subset \mathcal{P}(E).}$

Les deux éléments de B, $\{4\}$ et $\{5,6\}$, appartiennent aussi à $\mathcal{P}(E)$, donc $\boxed{B \subset \mathcal{P}(E).}$

Et $4 \in C \setminus \mathcal{P}(E)$, donc $\boxed{C \not\subset \mathcal{P}(E).}$

---

4. Est-ce que $C \in B$? $C \subset B$?

Comme $C \neq \{4\}$ et $C \neq \{5,6\}$, alors $\boxed{C \notin B.}$

Comme $4 \in C$ et $4 \notin B$, alors $\boxed{C \not\subset B.}$

---

5. Calculer $E \cap \bigcup_{X \in A} X$.

On a $\bigcup_{X \in A} X = \{2,4,6\} \cup \{1,\{3,5\}\} = \underline{\{1,2,4,6,\{3,5\}\}}$, donc $\boxed{E \cap \bigcup_{X \in A} X = \{1,2,4,6\}.}$

---

6. Y a-t-il une relation entre l'ensemble $\bigcup_{X \in B} X$ et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$?

On a $\bigcup_{X \in B} X = \{4\} \cup \{5,6\} = \underline{\{4,5,6\}}$, donc $\boxed{\bigcup_{X \in B} X \in \mathcal{P}(E).}$

---

7. Justifier le titre de l'exercice en se servant des ensembles ci-dessus.

L'ensemble $\{1,\{3,5\}\}$ est un <u>élément de la partie</u> A de A, qui <u>admet comme élément</u> $\{3,5\}$, qui lui-même <u>a des parties</u>, comme par exemple $\{3\}$.

Exercice 2 *Robot*

Soient A, B et C trois énoncés mathématiques quelconques.
Montrer que $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C))$ en utilisant une table de vérité.

A	B	C	$A \Longrightarrow B$	A ou C	B ou C	$(A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C)$	$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

On en déduit que $\boxed{\text{l'énoncé } (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \text{ ou } C) \Longrightarrow (B \text{ ou } C)) \text{ est vrai.}}$

Exercice 3 *Découpages*

1. Exprimer **sans justification** les ensembles suivants comme des réunions **disjointes** d'intervalles utilisant **le moins d'intervalles possibles** (les singletons sont des intervalles : $\{a\} = [a,a]$) :

$$\mathbb{R} \setminus (]-1,1[\cup]1,+\infty[)\,, \quad [4,6[\cup(\mathbb{R}\setminus]1,5])\,, \quad [0,3]\Delta([-1,1[\cup]-1,1])\,, \quad [-2\sqrt{3},\mathrm{e}[\cap(\mathbb{Z}\cup]0,1[)\,, \quad \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^\star.$$

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus (]-1,1[\cup]1,+\infty[) =]-\infty,-1] \sqcup \{1\}\,,}$$

$$\boxed{[4,6[\cup(\mathbb{R}\backslash]1,5]) =]-\infty,1]\sqcup[4,+\infty[,}$$

$$\boxed{[0,3]\Delta([-1,1[\cup]-1,1]) = [-1,0[\sqcup]1,3],}$$

$$\boxed{[-2\sqrt{3},\mathrm{e}[\cap(\mathbb{Z}\cup]0,1[) = \{-3\}\sqcup\{-2\}\sqcup\{-1\}\sqcup[0,1]\sqcup\{2\},}$$

$$\boxed{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^\star =]-\infty,1[\sqcup\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^\star}]n,n+1[.}$$

---

2. Exprimer sans justification l'ensemble $(]4,6]\times[0,3[)\cap([3,5[\times(\mathbb{R}\backslash]1,2[))$ comme une réunion disjointe de produits cartésiens d'intervalles utilisant le moins de produits d'intervalles possibles.

$$\boxed{(]4,6]\times[0,3[)\cap([3,5[\times(\mathbb{R}\backslash]1,2[)) = (]4,5[\times[0,1])\sqcup(]4,5[\times[2,3[).}$$

Exercice 4 *Un nombre bien caché*

Soit $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

1. Pour $x,y\in\mathbb{R}$, montrer que $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Calcul évident dont le but est de donner la bonne piste pour la suite.

---

2. En déduire que a vérifie une équation de type $P(x)=0$, où P est une fonction polynomiale de degré 3 que l'on déterminera.

Calculons a^3 :

$$\begin{aligned}
a^3 &= \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3\\
&= (20+14\sqrt{2})+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2}+(20-14\sqrt{2})\\
&= 40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)\\
&= 40+6a
\end{aligned}$$

a vérifie donc l'équation $P(x)=0$, avec $\boxed{P(x) = x^3-6x-40.}$

---

3. En étudiant la fonction P, en déduire une expression très simple de la valeur de a.

P est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale, et pour $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3(x^2 - 2) = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	$-4(10-\sqrt{2})$	$\searrow$	$-4(10+\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $-4(10 - \sqrt{2}) < 0$, par continuité de P (théorème des valeurs intermédiaires) et stricte croissance sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, cette étude indique que P ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, entre $\sqrt{2}$ et $+\infty$. On note alors que $x = 4$ résout l'équation $P(x) = 0$. Par unicité, on a donc $\boxed{a = 4.}$
