Thème 1 - Ondes et signaux - Optique

Chapitre 1 : Lois de l'optique géométrique

TD 1 - Correction

Ex. 1. Calculs d'angle et émergence (Imp :*** / Niv :*)

On attend ici les angles en ° et les A.N avec 2CS.

1 D'après la loi de Snell-Descartes à la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ donc $\sin i_1 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$

$\boxed{i_2 = \text{asin}\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)}$

AN : $\sin i_1 = \frac{1}{1.5}\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{i_2 = 28°}$

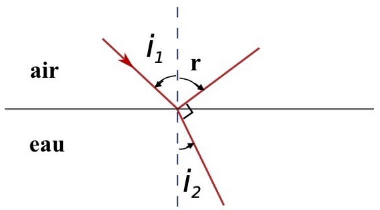
De plus, d'après le schéma : $j_2 = 90° - i_2 \Rightarrow \boxed{j_2 = 62°}$

2 Le rayon ressort en J si l'angle d'incidence j_2 est plus faible que l'angle $j_{2,lim}$ pour lequel il y a réflexion totale :

$$j_{2,lim} = \text{asin}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \text{asin}\left(\frac{2}{3}\right) = 42°$$

$\boxed{j_2 > j_{2,lim} \text{ donc il y a réflexion totale en } J\text{, le rayon ne ressort pas.}}$

Ex. 2. Incidence de Brewster (Imp.*** / Niv.*)



On veut que les rayons réfléchis et réfractés soient perpendiculaires :

$$\Leftrightarrow \quad -r + i_2 = \frac{\pi}{2}$$

or $r = -i_1$ (loi de Snell Descartes à la réflexion), donc

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow i_1 = \frac{\pi}{2} - i_2$$

de plus la loi de Snell Descartes à la réfraction donne $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

On utilise ces deux relations pour obtenir i_1 :

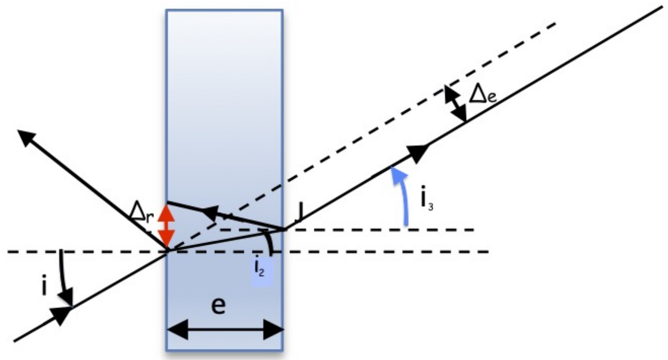
$$\cos i_1 = \sin i_1 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\tan i_1 = \frac{n_2}{n_1}}$$

AN :$i_1 = \text{atan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \boxed{53°}$

Ex. 3. Lame à faces parallèles (Imp :** / Niv :*)

1 L'indice de réfraction d'un milieu transparent est défini comme $\boxed{n = \frac{c_0}{c}}$ avec c_0 et c la vitesse de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré, respectivement.



2 $\Delta r = 2e \tan i_2$ et $\sin i = n \sin i_2$ en prenant l'indice de l'air égal à 1. Donc $i_2 = \text{asin}\left(\frac{1}{n} \sin i\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta r = 2e \tan\left(\text{asin}\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right)}$$

AN : $\Delta r = 2 \times 1 \times \tan\left(\text{asin}\left(\frac{\sin 20}{1.5}\right)\right) = 0,46$ mm

$\boxed{\Delta r = 0.5 \text{ mm}}$

3 vois schéma ci-dessus

4 La déviation angulaire D correspond à l'angle entre les deux rayons : $D = -i + i_2 - i_2 + i_3 = i_3 - 1$. Donc calculon i_3 l'angle de à la normal du rayon émergent :
en J : $n_{air} \sin i_3 = n \sin i_2$
en I : $n_{air} \sin i = n \sin i_2$
Donc $\sin i_3 = \sin i \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_3 = i}$

et on a donc : $\boxed{D = 0° \text{ : les rayons émergent et incidents sont parallèles}}$. La lame à faces parallèle n'induit pas de déviation du faisceau lumineux.

5 $\Delta_e = KJ \times \cos i$ et $KJ + \frac{\Delta r}{2} = e(\tan i$, donc

$$\Delta e = \cos i \left(e \tan i - e \tan i_2\right)$$

or $tani_2 = \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = \frac{\sin i_2}{\sqrt{1 - \sin^2 i_2}}$
et $\sin i_2 = \frac{\sin i}{n}$ donc

$$\tan i_2 = \frac{\sin i}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} = \frac{\sin i}{n} \times \frac{n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

$$\boxed{\tan i_2 = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}}$$

On remplace dans l'expression de Δe :

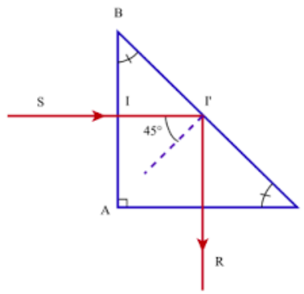
$$\Delta e = e \cos i \left(\tan i - \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right) = e \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^1 - \sin^2 i}} \right)$$

et comme $\cos i = \sqrt{1 - \sin^i}$ on peut écrire :

$$\boxed{\Delta e = e \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right)}$$

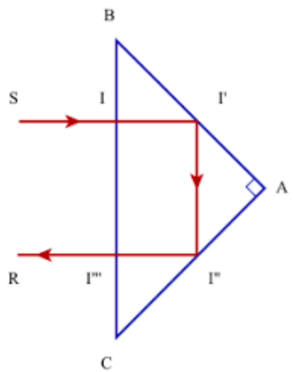
AN : $\Delta e = 1 \times \sin 20 \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 20}{1,5^2 - \sin^2 20}} \right) = \underline{0.12 \text{ mm}}$

Ex. 4. Prisme à réflexion totale (Imp.* / Niv.*)



1 Pour dévier un rayon lumineux de $\pi/2$ on peut envoyer le rayon incident perpendiculaire à un des petits cotés du prisme. Dans ce cas, le rayon traverse la première face du prisme sans être dévié et arrive en I' avec un angle d'incidence $i = 45°$. L'angle de réflexion vaut aussi 45° et le rayon arrive donc perpendiculaire à la dernière face du prisme qu'il traverse sand déviation. L'angle de déviation entre les rayons incident et émergent vaut donc $D = 45 + 45 = 90° = \pi/2$ rad.

$\boxed{\text{Le rayon incident a été dévié de } \pi/2 \text{ dans cette configuration.}}$



Pour dévier un rayon lumineux de π on peut envoyer le rayon incident perpendiculaire au grand petit coté du prisme. Dans ce cas, le rayon traverse la première face du prisme sans être dévié et arrive en I' avec un angle d'incidence $i = 45°$. Il se réfléchit avec un angle de 45° et arrive en I'' sur la deuxième face du prisme toujours avec un angle de 45°. Après une deuxième réflexion avec un angle de 45° le rayon traverse la première face du prisme sans être dévié (incidence normale). L'angle de déviation entre les rayons incident et émergent vaut donc $D = (45 + 45) + (45_4 5) = 180° = \pi$ rad.

$\boxed{\text{Le rayon incident a été dévié de } \pi \text{ dans cette configuration.}}$

2 Pour que ces déviations fonctionnent il faut avoir <u>réflexion totale</u> en I' et en I''. Dans les deux cas (déviation de $\pi/2$ et de π), la condition de réflexion totale donne :

$$\sin i_1 > n_2/n_1 \Leftrightarrow n_1 > \frac{n_2}{\sin i_1}$$

avec $i_1 = \pi/4$, $n_2 = 1.0$ (indice de l'air) et n_1 l'indice du verre.

$$\Leftrightarrow \boxed{n_1 > \sqrt{2} \approx 1.4}$$

Ex. 5. Diamant ou pacotille ?

Quand on éclaire un vrai diamant ou un morceau de verre plongés dans le sulfure de carbone, le rayon lumineux traverse toujours le diotpre (passage dans un milieu plus réfringeant). Par contre la lumière se trouvant dans le diamant effectue un suite de réflexions totales sur les facettes du diamant avant de ressortir. De plus les différentes longueurs d'onde vont sortir par des faces différentes ce qui fait briller le diamant. Il se passe la même chose pour du verre taillé correctement mais l'indice de réfraction du diamant étant plus élevé que celui du verre, l'angle de réflexion limite $i_{1,lim}$ est plus petit pour le diamant que pour le verre, donc plus de rayons lumineux sont piégés par le diamant que par le verre, <u>le diamant brille plus</u>.

Calculons cet angle pour un diamant et du verre dans l'air :

— pour le diamant : $i_{1,lim}^{diamant} = \text{asin}\left(\frac{1}{2.4}\right) = 25°$.

— pour du verre : $i_{1,lim}^{diamant} = \text{asin}\left(\frac{1}{1.7}\right) = 36°$.

Les deux matériaux (diamant et verre) brillent. Maintenant calculons cet angle pour un diamant et du verre dans du sulfure de carbone :

— pour le diamant : $i_{1,lim}^{diamant} = \text{asin}\left(\frac{1.6}{2.4}\right) = 42°$. Tout rayon tombant sur un face du diamant avec un angle d'incident plus grand que 42° est réfléchi.

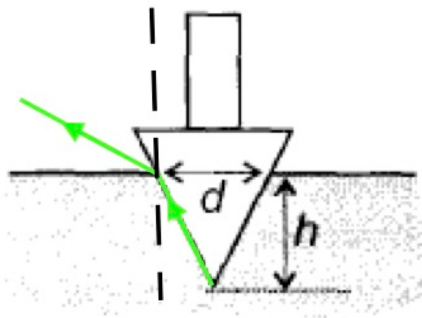
— pour du verre : $i_{1,lim}^{diamant} = \text{asin}\left(\frac{1.6}{1.7}\right) = 70°$. Dans ce cas, très peu de rayons sont réfléchis dans le verre taillé.

Dans le sulfure de carbone il n'y a presque plus de reflexion totale dans le verre mais il en reste encore beaucoup dans le vrai diamant.

$\boxed{\text{le faux diamant a perdu son éclat alors que le vrai diamant brille encore.}}$

Ex. 6. Observation de la quille d'un bateau (Imp.** / Niv.*)

Le rayon limite qui vient de la quille arrive sur le dioptre avec un angle d'incidence i_1 tel que $\tan i_1 = \frac{d/2}{h} = \frac{d}{2h}$. On ne voit pas la quille s'il y a réflexion totale pour ce rayon (il y aura alors réflexion totale pour tous les autres comme l'angle i_1 est le plus faible rayon d'incidence des rayons issus de la quille). :



$$i_1 \geq \text{asin}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \tan i_1 \geq \tan\left(\operatorname{asin}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

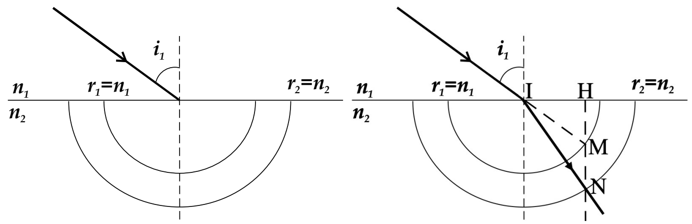
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{h} \geq 2\tan\left(\operatorname{asin}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2.3}$$

Ex. 7. Construction de Huygens du rayon réfracté (Imp.** / Niv.**)

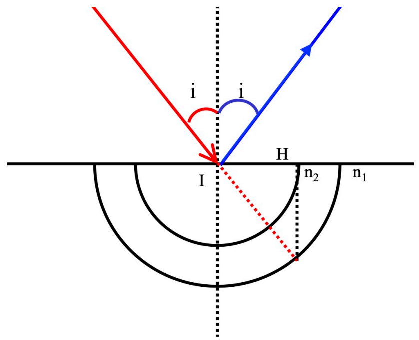
Un rayon incident arrive d'un milieu 1 sur l'interface entre le milieu 1 d'indice n_1 et un milieu 2 d'indice n_2.

Pour trouver graphiquement le rayon réfracté, on trace, dans le milieu 2, deux demi-cercles centrés sur le point d'incidence, et de rayons respectifs n_1 et n_2.

1 — On prolonge le rayon incident jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle de rayon n_1. On note M ce point.
- On projette M sur le dioptre : point H.
- À partir de H, on trace la normale au dioptre jusqu'à l'instersection avec le demi-cercle de rayon n_2. On note N.
- Le rayon réfracté est porté par la direction IN



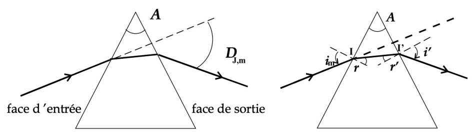
2 Pour avoir réflexion totale il faut $n_2 < n_1$, la construction devient alors :



Ex. 8. Dispersion de la lumière par un prisme

1 La lumière blanche est dispersée : les couleurs composants cette lumière sont séparées.

2 On considère le schéma suivant et on prendra les valeurs absolues des angles (tous positifs donc) :



Dans ce cas la déviation D_J de la longueur d'onde jaune vaut donc, en suiant le trajet du rayon : $D_J = i - r - r' + i' = \boxed{(i-r)+(i'-r')}$

Dans le triangle IAI' on a : $A + \pi/2 - r + \pi/2 - r' = \pi$, donc $\boxed{A = r + r'}$, On obtient donc $\boxed{D = (i' + i) - A}$

De plus d'après les lois de Snell-Descartes en I et en I' on trouve : $\boxed{\sin i = n \sin r}$ et $\sin i' = n \sin r'$.

Ces 3 expressions sont symétriques : on peut échanger les angles i et i' et les angles r et r' sans changer modifier les égalités. Cela montre qu'il y a deux valeur de i associée à une seule valeur de D : les couples $(i = i_1, i' = i_1')$ et $(i = i_1', i' = i_1)$ donne la même valeur D_1 de la déviation.

Et au minimum de déviation D_m, on a alors $i_m = i_m'$, pour le jaune cela donne : $\boxed{D_{J,m} = 2i_m - A}$ et dans ce cas : $r = r' = A/2$ donc les relations de Snell-Descartes deviennent $\boxed{\sin i_m = n \sin A/2}$.

L'expression du minimum de déviation est donc :

$$\boxed{D_{J,m} = 2\operatorname{asin}(n \sin A/2) - A}$$

AN : On a $A = 60°$ donc $\sin i_m = n/2$ donc pour les différentes couleurs :

- jaune : $n = 1,4977 + \dfrac{4245}{600^2} = 1,51$
  Donc : $\sin i_m = 0,755 \quad \Rightarrow i_m = 0,855 rad = 49,0°$ Ce qui donne : $\boxed{D_{J,m} = 38,0°}$
- bleu : $n = 1,4977 + \dfrac{4245}{485^2} = 1,52$
  Donc : $\sin i_m = 0,758 \quad \Rightarrow i_m = 0,860 rad = 49,3°$ Ce qui donne : $\boxed{D_B = 38,6°}$
- rouge :$n = 1,4977 + \dfrac{4245}{700^2} = 1,51$
  Donc : $\sin i_m = 0,753 \quad \Rightarrow i_m = 0,853 rad = 48,9°$ Ce qui donne : $\boxed{D_R = 37,7°}$

3 Le minimum de déviation vérifie la relation : $\sin\dfrac{D_m + A}{2} = n \sin A = \dfrac{n}{2}$ comme $\sin A = 1/2$.

Donc en dérivant par rapport à λ :

$$\frac{1}{2}\cos\frac{D+A}{2}\frac{dD}{d\lambda} = \frac{1}{2}\frac{dn}{d\lambda}$$

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\boxed{\left|\frac{dD}{d\lambda}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{4}}}\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|}$$

Or d'après l'expression de $n(\lambda)$ on a $\dfrac{dn}{d\lambda} = -2\dfrac{\beta}{\lambda^3}$ et $\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4 - (\alpha + \beta/\lambda^2)^2}}{2}$, ce qui donne

$$\boxed{\left|\frac{dD}{d\lambda}\right| = \frac{4\beta}{\lambda^2}\frac{1}{\sqrt{4 - (\alpha + \beta/\lambda^2)^2}}}$$

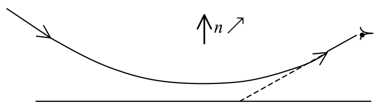
Ex. 9. Mirage (Imp :** / Niv :***) 1

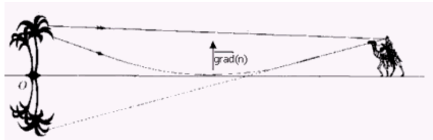
Mirages chauds

(a) 3ème loi de Snell-Descartes à l'interface entre les couches k et $k-1$: $n_k \sin i_k = n_{k-1} \sin r_k$, or géométriquement $r_k = i_{k-1}$ donc $n_k \sin i_k = n_{k-1} \sin i_{k-1}$ on a donc : $\boxed{n_k \sin i_k = cste}$

(b)

(c) On sait que n_k augmente avec k d'après l'énoncé et on a montrer que $n_k \sin i_k = cste$ donc $\sin i_k$ diminue avec k c'est à dire $\sin i_k$ augmente quand on s'approche du sol, donc i_k augmente quand on s'approche du sol. Comme l'indice optique diminue, un phénomène de réflexion totale peut se produire quand i_k est au delà de l'angle limite. On verra donc l'image d'un objet au dessus du sol comme si elle venait du sol lui même.

(d) 



(e) Sur l'image on le sol est très chaud, on voit l'image du ciel bleu sur la route. On pourrait confondre cette image avec une étendue d'eau.

2 Mirage froids

(a) On est dans le cas contraire : n dimninue avec l'altitude, il y aura réflexion totale de rayons provenant d'un objet du sol : ces rayons seront ramenés vers le sol.

(b) L'air au dessus de la mer est plus froid que les couches d'air au dessus, les rayons venant du bateaux subissent donc une réflexion totale. Pour un observateur au sol, ces rayons semblent provenir d'une altitude plus grande : on voit le bateau sur l'eau et son image au dessus de l'eau, semblant flottée.