Rappels et compléments sur les fonctions

Lycée Berthollet, MPSI2 2023-24

Nota Bene : les notions de limite, continuité et dérivabilité sont celles vues au lycée, aucune définition formelle n'en sera donnée à ce stade.

I Généralités sur les fonctions

1 Domaine et graphe

Pour l'instant, on considère les fonctions réelles de variable réelle. Notion informelle de fonction, ensemble (ou domaine) de définition, graphe et représentation graphique dans le plan muni d'un repère, premiers exemples : fonctions linéaires, affines, polynomiales de degré 2, valeur absolue, parties positives et négatives, fonction inverse, fonction affine par morceaux (les élèves doivent savoir trouver les formules des morceaux, si une telle fonction est donnée par son graphe). Savoir-faire : à l'aide du graphe d'une fonction f, résoudre graphiquement les équations $f(x) = \lambda$, les inéquations $f(x) \geq \lambda$, ..., savoir tracer l'allure des graphes des transformées $x \longmapsto f(x+b)$, $x \longmapsto f(ax)$, $x \longmapsto f(b-x)$, $x \longmapsto af(x)$, $x \longmapsto f(x)+b$. Notions d'asymptotes horizontale et verticale.

2 Symétrie et périodicité

Définition de la parité et de l'imparité et propriétés correspondantes du graphe de la fonction, caractérisations des fonctions polynômes paires et impaires (non montré). Définition d'*une* période, de *la* période lorsqu'elle existe. Autre symétrie : "$f(a-x) = f(x)$" et interprétation graphique. Notions de domaine d'étude.

Exercice 1 Une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période est-elle constante ?

3 Opérations et composition

Combinaison linéaire, produit, quotient, composée et leur domaines de définition à partir de ceux des fonctions initiales.

4 Monotonie et majorations

Définition de la croissance (resp. décroissance, monotonie) large et stricte. Fonction majorée, minorée, bornée et caractérisation de la bornitude à l'aide de la valeur absolue.

II Calculs sur les dérivées

1 Règles de dérivation

Pour des fonctions dérivables sur des intervalles quelconques : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Les fonctions suivantes sont dérivables (admis) et les élèves doivent connaître leurs domaine et dérivée vues en terminale : fonctions polynômes, sin, cos, exp, ln. Application des théorèmes précédents : fonction tangente (tan), fonction puissance $x \longmapsto x^{\alpha}$ pour $x > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) définie à l'aide de la forme exponentielle.

2 Utilisation des dérivées

Caractérisation des fonctions dérivables constantes (CNS), monotones au sens large (CNS) et strictement monotones (CS) sur un intervalle et application à la détermination des variations. Équation de la tangente en un point au graphe d'une fonction dérivable. Notation pour les dérivées successives.

III Fonctions réciproques

On admet les trois résultats suivants :

1. *Théorème des valeurs intermédiaires.* L'image d'un <u>intervalle</u> quelconque par une fonction <u>continue</u> est un intervalle ;
2. *Théorème des fonctions réciproques.*
   Si une fonction est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un <u>intervalle</u>, elle admet une fonction réciproque et cette fonction réciproque est continue sur l'intervalle image.
   Si, de plus, f est dérivable en un point a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.
3. *Corollaire.*
   Si une fonction est <u>dérivable</u> et <u>de dérivée strictement positive</u> sur un <u>intervalle</u>, elle admet une fonction réciproque, qui de plus est dérivable sur l'intervalle image et vérifie $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
   Il en est de même si on remplace "strictement positive" par "strictement négative".

Remarque en rapport avec un chapitre ultérieur : Toutes les fonctions ont (en tant qu'applications) pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, donc la fonction réciproque de $f : I \to \mathbb{R}$ est $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in f(I), f(f^{-1}(y)) = y$. En général, aucune des deux n'est bijective !

Remarques :
- Si elle existe, une fonction réciproque est unique et fait correspondre à un élément de l'image son unique antécédent.
- Si elle est obtenue par l'un des deux théorèmes ci-dessus, la fonction réciproque est strictement monotone et de même sens de monotonie que la fonction initiale.

Interprétation géométrique dans un RON : symétrie des graphes de f et de f^{-1} par rapport à la première bissectrice, interprétation de la formule de la dérivée de la fonction réciproque et des cas de non-dérivabilité.

Application de ces théorèmes à la définition de la fonction ln et la détermination de sa dérivée.

IV Fonctions classiques

Les élèves doivent connaître pour chaque fonction classique, ses domaines de définition, continuité, dérivabilité, ses régularités, sa dérivée, ses variations, limites aux bornes, points remarquables et savoir tracer l'allure de son graphe.

1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

On voit en “avant-première” que la fonction $x \longmapsto x$ est dérivable de dérivée constante égale à 1 avec le taux de variation. Les fonctions polynômes s'obtiennent alors par produits successifs de cette fonction, puis combinaisons linéaires, et sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par quotient, les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition.

2 Exponentielles et logarithmes

On admet que l'exponentielle vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, ainsi que ses limites en $\pm\infty$.
Exponentielle et logarithme népérien, exponentielle et logarithme à base $a > 0$.

3 Fonctions puissances

Fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ pour $x > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), dérivabilité par construction. Relations algébriques sur les puissances.

Prolongement de la définition des fonctions puissances à $\mathbb{R}$ pour les puissances entières positives ou nulles, à $\mathbb{R}^\star$ pour les puissances entières strictement négatives, à $\mathbb{R}_+$ pour les puissances réelles strictement positives.

4 Comparaison de croissances

“Croissance comparée” entre puissances et exponentielle, puissances et logarithme : pour α et β strictement positifs et $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ (donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^{\beta x} = 0$), $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} x^\alpha \ln(x) = 0$.

Remarque : On introduit à cette occasion la notation “petit o”.

5 Fonctions trigonométriques

Les propriétés bien connues des fonctions sin et cos, ainsi que leur dérivabilité et dérivées, sont admises.

Fonctions sinus, cosinus, tangente et leurs fonctions réciproques.

6 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Fonctions trigonométriques hyperboliques (leurs réciproques sont hors-programme mais peuvent faire l'objet d'exercices).