DM7, à rendre lundi 6 novembre 2023

Barème sur 90 points, avec $\pm 15\%$ pour les "croix rédactionnelles", puis ± 1 pt de présentation sur la note sur 20

— Problème 1, I (30 pts) :

1. 2 = 1 ($\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$) + 1 (fonction rationnelle)
2. 9 = 1 (f impaire, étude sur $\mathbb{R}_+$) + 1 ($f'(x) = 2(1-x)(1+x)/(1+x^2)^2$) + 1 ($> 0$ sur $[0,1[$, 0 en 1, < 0 sur $]1,+\infty[$) + 1 ($\lim_{+\infty} f = \lim(2/x) = 0$) + 1 (tableau de variations) + [4] (graphe : tgte en 0, max, asymp, sym)
3. 4 = 1 ("f continue") + 1 (mot "intervalle") + 1 ($f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$) + 1 (pas plus que $[-1,1]$ par T.Var.)
4. (a) 5 = 1 ("f_1 continue") + 1 ("f_1 strict décroissante") + 1 ("$[1,+\infty[$ intervalle") + 1 ("réciproque continue") + 1 ("f_1^{-1} déf sur $]0,1]$")
   (b) 5 = 1 ("f_1 dérivable sur $]1,+\infty[$") + 1 ("$\forall x > 1, f_1'(x) \neq 0$") + 1 ("$f_1^{-1}$ dérivable sur $]0,1[$") + 1 (dire "pas dériv en 1") + 1 (justifier par tangente verticale)
   (c) 1 (tracé du graphe par symétrie)
   (d) 4 = 1 (produire l'éq. $yx^2 - 2x + y = 0$) + 1 (dire $y \neq 0$) + 1 (résolution) + 1 (choix $(1+\sqrt{1-y^2})/y$)

— Problème 1, II (30 pts) :

1. 2 = 1 ($2x/(1+x^2) \in [-1,1]$ par I) + 1 (Arctan déf sur $\mathbb{R}$)
2. 3 = [2] (imparité par comp et CL) + 1 (non-paire car impaire et non nulle)
3. 6 = 1 ($h(0) = h(1) = 0$) + 1 ($h(\sqrt{3}) = -\pi/3$) + 1 ($h(-1)$, $h(-\sqrt{3})$ par imparité) + 1 ($\lim_{+\infty} \mathrm{Arcsin}(\ldots) = 0$ par comp) + 1 ($\lim_{+\infty} h = -\pi$) + 1 ($\lim_{-\infty} h = \pi$ par imparité)
4. 3 = 1 (dire "Arcsin cont sur $[-1,1]$") + 1 (dire "f cont sur $\mathbb{R}$ à val ds $[-1,1]$") + 1 (dire "Arctan cont sur $\mathbb{R}$" et CL)
5. 3 = 1 (si I évite ± 1, $f(I)$ aussi par I) + 1 (dire "Arcsin dériv sur $]-1,1[$") + 1 (dire "Arctan dériv sur $\mathbb{R}$" et CL)
6. 9 = [2] ($h'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right)$) + 1 ($h'$ nulle sur $]-1,1[$ **intervalle**) + 1 (donc h cste puis nulle sur $]-1,1[$) + 1 ($\forall x \in]1,+\infty[, h'(x) = -\frac{4}{1+x^2}$) + 1 ($h(x) = -4\mathrm{Arctan}(x) + C$) + 1 ($C = \pi$) + 1 (justif valeurs en ± 1 (cont. ou calcul)) + 1 ($\forall x \leq -1, h(x) = -\pi - 4\mathrm{Arctan}(x)$ (imp.))
7. 4 = 1 (plat) + 1 (demi-tangentes en 1) + 1 (asymptote) + 1 (symétrie)

— Problème 2 (30 pts) :

1. 1 ($\mathrm{sh}(v) \geq 0$)
2. 2 (différentes méthodes)
3. 6 = 1 (g continue) + 1 (g strict. croissante) + 1 ($D_{g^{-1}} = [1,+\infty[$) + 1 (g dérivable et g' ne s'anulle pas sur $\mathbb{R}_+^\star$) + 1 ($D'_{g^{-1}} \supset]1,+\infty[$) + 1 ($=$)
4. 10 = 1 ($g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$) + 1 ($g' > 0$) + 1 ($x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ continue) + 1 (poser correctement le chgmt de var) + 1 (formule correcte) + 1 ($u \geq 0$) + 1 (int avec $\mathrm{ch}(2u)$) + 1 (primitive à vue) + 1 (repasser en $\mathrm{ch}(u)$ et $\mathrm{sh}(u)$ et éliminer $\mathrm{sh}(u)$) + 1 (revenir en x)
5. 6 = 1 (multiplier par $\mathrm{e}^u \neq 0$) + 1 (eq second degré et discriminant) + 1 (cas $x = 1$) + 1 (racines pour $x > 1$) + 1 (élimination d'une racine) + 1 (formule $g^{-1}(x)$)
6. 1
7. 4 = 2 (formule correcte) + 2 (preuve)

Problème 1 *Étude de fonction.*

I. Étude d'une fonction auxiliaire

On note f la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur est toujours strictement positif, donc ne s'annule jamais.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

donc

$$\boxed{f'(x) = 2\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}}$$

---

2. Etudier rapidement la fonction f : variations, limites aux bornes de son domaine de définition. Tracer l'allure du graphe de f.

Remarquons que la fonction f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-x$, donc strictement positif pour $x \in [0,1[$, nul pour $x=1$ et strictement négatif pour $x>1$.

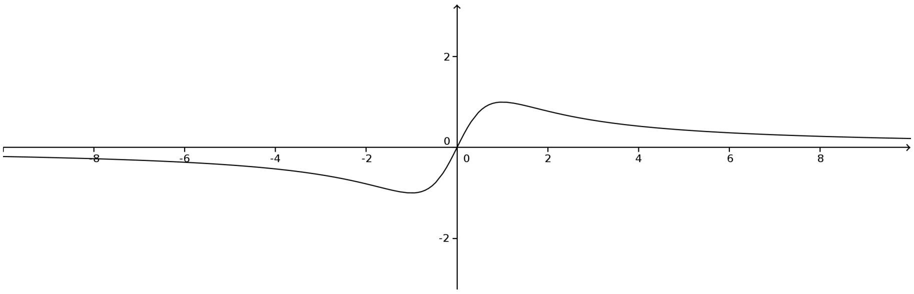
Comme f est continue en 1, elle est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Remarquons que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Par ailleurs $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0^+.}$ Donc le graphe de f admet comme asymptote la droite d'équation $y=0$ lorsque x tend vers $+\infty$, le graphe étant situé au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

L'imparité permet de compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0^-	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0^+

Pour tracer le graphe, remarquons qu'il est symétrique par rapport à l'origine par imparité de la fonction f, et que $f'(0)=2$ est la pente de la tangente au graphe à l'origine. Cela done la figure suivante :



---

3. Déterminer soigneusement son image $f(D_f) = \{f(x);\ x \in D_f\}$.

La fonction f étant continue, sa restriction à l'intervalle $[-1,1]$ l'est aussi, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs entre $f(-1)(=-1)$ et $f(1)(=1)$. Ainsi $\boxed{f(\mathbb{R}) \supset [-1,1]}$.

Par ailleurs, l'étude des variations de f prouve que $\boxed{f(\mathbb{R}) \subset [-1,1]}$, donc

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-1,1]}$$

---

4. (a) On note f_1 la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$.
Montrer que f_1 admet une fonction réciproque continue f_1^{-1}.

D'après l'étude de f, f_1 est strictement décroissante et continue sur un intervalle ($[1,+\infty[$). D'après le théorème des fonctions réciproques, elle admet donc une fonction réciproque f_1^{-1} qui est définie et continue sur l'intervalle image $f_1([1,+\infty[)$. Cet intervalle est égal à $]0,1]$, par l'étude des variations de f et sa continuité (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires comme dans la question précédente). Ainsi

$$\boxed{f_1 \text{ admet une fonction réciproque définie et continue sur }]0,1].}$$

(b) Que peut-on dire de la dérivabilité de f_1^{-1} ?

On a vu que f est dérivable et pour tout $x > 1$, $f'(x) \neq 0$, donc il en est de même de la restriction f_1. Le théorème des fonctions réciproques assure alors que

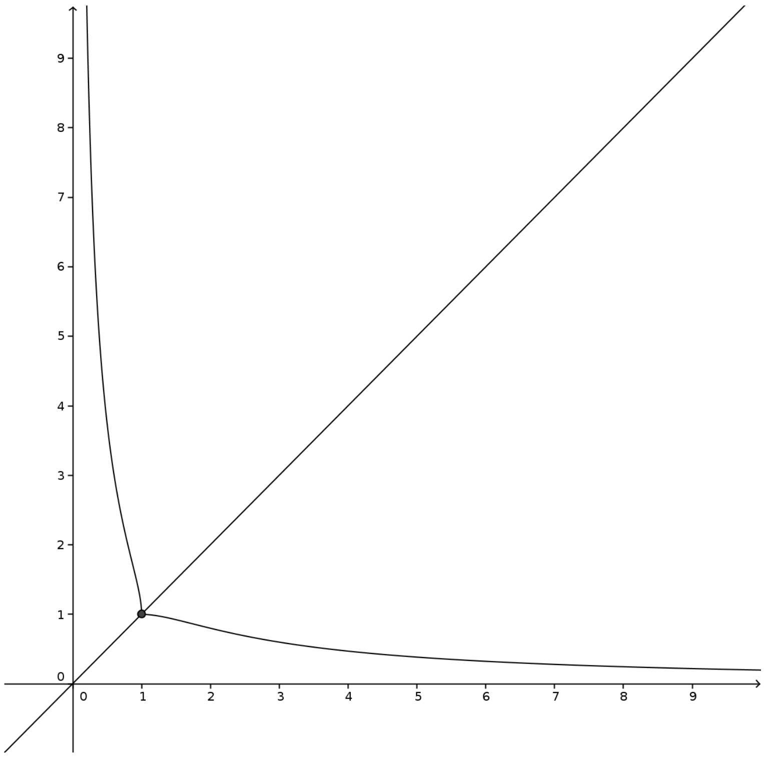
$$\boxed{f_1^{-1} \text{ est dérivable sur } f_1(]1,+\infty[) =]0,1[.}$$

De plus, on sait que pour tout $y \in]0,1[$, $(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y))}$.
En outre, comme $f_1'(1) = f'(1) = 0$, le graphe de f_1 admet une tangente horizontale au point d'abcisse 1. Par symétrie par rapport à la première bissectrice, le graphe de f_1^{-1} admet une tangente verticale au point d'abcisse $f(1)$. Comme $f(1) = 1$,

$$\boxed{f_1^{-1} \text{ n'est pas dérivable (à gauche) en 1.}}$$

(c) Tracer le graphe de f_1^{-1}.

Le graphe de f_1^{-1} est le symétrique du graphe de f_1 par rapport à la première bissectrice, ce qui permet de le tracer :



(d) Déterminer explicitement la fonction f_1^{-1}.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,1]$, comme $1+x^2 \neq 0$,

$$f_1(x) = y \iff 2x = y(1+x^2) \iff yx^2 - 2x + y = 0 \ (E).$$

Soit $y \in]0,1]$ fixé : $f_1^{-1}(y)$ est alors solution de (E), qui est une équation du second degré car $y \neq 0$. On sait même par le thèorème des fonctions réciproques que c'est l'unique solution x de (E) telle que $x \geq 1$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(1-y^2) \geq 0$, ce qui donne comme solutions de (E), éventuellement confondues, $\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$. On sait déjà que l'une de ces solutions est dans $[1,+\infty[$, donc la plus grande (obtenue avec le signe $+$ car $y > 0$) est *a fortiori* dans $[1,+\infty[$, donc c'est notre solution. Ainsi

$$\boxed{\forall y \in]0,1], f_1^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}}$$

II. Étude de la fonction $h : x \longmapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\text{Arctan}\, x$

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h.

On a $h = \text{Arcsin} \circ f - 2\text{Arctan}$. D'après la partie I, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$, or Arcsin est définie sur $[-1,1]$, donc $\text{Arcsin} \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Comme Arctan est aussi définie sur $\mathbb{R}$, par combinaison linéaire, $\boxed{D_h = \mathbb{R}}$.

---

2. La fonction h est-elle paire ? impaire ?

La composée de deux fonctions impaires est impaire, donc $\text{Arcsin} \circ f$ est impaire. Comme une combinaison linéaire de fonction impaires est impaire et Arctan est impaire, alors $\boxed{h \text{ est impaire.}}$
La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle, or

$$h(\sqrt{3}) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \neq 0$$

donc $\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'est pas paire.}}$

---

3. Calculer les valeurs $h(0)$, $h(1)$, $h(\sqrt{3})$, $h(-1)$ et $h(-\sqrt{3})$ et les limites de h aux bornes de D_h.

Comme h est impaire, $\boxed{h(0) = 0.}$

On a $h(1) = \text{Arcsin}(1) - 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{h(1) = 0.}$

On a vu précédemment que $\boxed{h(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.}$

Par imparité, $\boxed{h(-1) = 0}$ et $\boxed{h(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.}$

On a vu dans la partie I que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, or Arcsin est continue en 0 donc

$$\lim_{x\to+\infty} \text{Arcsin}(f(x)) = \text{Arcsin}(0) = 0.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, donc par combinaison linéaire, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\pi.}$

Par imparité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \pi.}$

---

4. Que peut-on dire de la continuité de h ?

Les fonctions Arcsin, f et Arctan étant continues sur leur domaines de définition, par composition et combinaison linéaire, h est continue sur son domaine de définition, *i.e.*

$$\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

---

5. Justifier la dérivabilité de h sur tout intervalle ne contenant ni 1 ni -1.

Soit I un intervalle ne contenant ni 1, ni -1. D'après l'étude de f, $f(I) \subset]-1,1[$ et f est dérivable sur I (car elle l'est sur $\mathbb{R}$). Comme Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, par composition, Arcsin $\circ f$ est dérivable sur I. Par ailleurs, Arctan est dérivable sur I, car elle l'est sur $\mathbb{R}$. Par combinaison linéaire,

$$\boxed{h \text{ est dérivable sur } I.}$$

---

6. Calculer la dérivée de h et en déduire des expressions simples de h sur les intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$, et $[1,+\infty[$.

D'après les règles de dérivation des composées, des combinaisons linéaires, de la fonction arcsinus, de la fonction arctangente et le calcul de la dérivée de f effectué en I, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, comme $1+x^2 > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} - 1\right) \\ &= \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} - 1\right) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{h'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right)}$$

i.e.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ h'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ h'(x) = -\frac{4}{1+x^2}}$$

Comme $]-1,1[$ est un intervalle, h est constante sur cet intervalle. Comme $h(0) = 0$, cette constante est nulle. Ainsi, par continuité de h aux bornes,

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], h(x) = 0}$$

De même, sur l'intervalle $]1,+\infty[$, h et -4Arctan sont égales à une constante additive près, qu'on peut déterminer en prenant par exemple les limites en 1, qui sont égales aux valeurs des fonctions puisqu'elles sont toutes deux continues en 1 : $-4\text{Arctan}(1) = -\pi$ et $h(1) = 0$, donc

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[, h(x) = -4\text{Arctan}(x) + \pi}$$

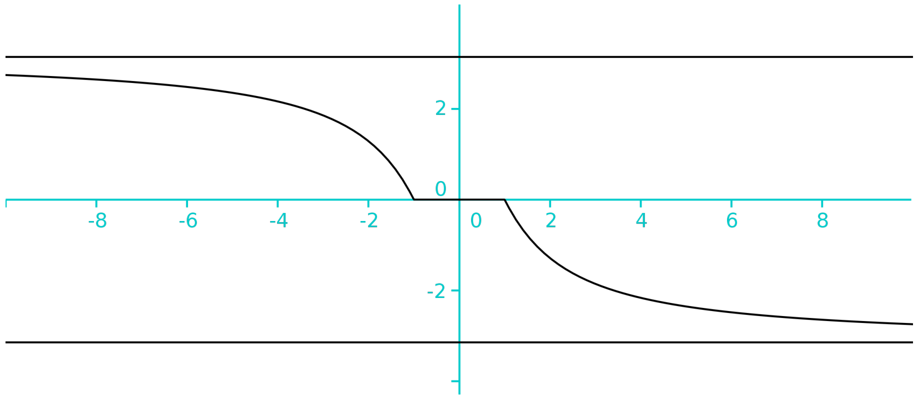
Par imparité,

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,-1], h(x) = -4\text{Arctan}(x) - \pi}$$

---

7. Tracer l'allure du graphe de h.

D'après les limites obtenues en 3, la fonction h admet comme asymptotes la droite d'équation $y=\pi$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y=-\pi$ en $+\infty$.
Par ailleurs, la fonction h est dérivable à droite en 1 avec comme dérivée à droite $\frac{-4}{1+1^2}=-2$ et la situation en -1 s'en déduit par imparité.
De plus, le graphe de $x\longmapsto -4\mathrm{Arctan}\,(x)+\pi$ se déduit de celui de Arctan par une symétrie par rapport à l'axe des abcisses, une dilatation verticale et une translation verticale. Avec les valeurs en $\pm\sqrt{3}$, cela permet d'avoir l'allure du graphe :



Problème 2 *Réciproque pour une primitive.*

1. Montrer que $\forall v\in\mathbb{R}_+,\ \mathrm{sh}\,(v)=\sqrt{\mathrm{ch}^2(v)-1}.$

Pour $v\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(v)-\mathrm{sh}^2(v)=1$, donc $\mathrm{sh}^2(v)=\mathrm{ch}^2(v)-1$, donc $|\mathrm{sh}\,(v)|=\sqrt{\mathrm{ch}^2(v)-1}$.
Si on suppose de plus que $v\geq 0$, alors $\mathrm{sh}\,(v)\geq 0$, donc $\boxed{\mathrm{sh}\,(v)=\sqrt{\mathrm{ch}^2(v)-1}.}$

2. Montrer que $\forall x\in]1,+\infty[,\ x-\sqrt{x^2-1}<1.$

Soit $x>1$. Comme une racine carrée est positive ou nulle, $0<1<x+\sqrt{x^2-1}$. Ainsi

$$\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\boxed{<1.}$$

3. Montrer que la restriction de la fonction ch à l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $g=\mathrm{ch}\,|_{\mathbb{R}_+}$, admet une fonction réciproque continue, dont on précisera l'intervalle de définition.
Discuter la dérivabilité de cette réciproque.

On sait que la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par restriction. On sait que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, *i.e.* g est strictement croissante.
Le théorème des fonctions réciproques assure donc que

$$\boxed{g \text{ admet une fonction réciproque } g^{-1} \text{ continue (et strictement croissante).}}$$

et

$$\boxed{\text{l'intervalle de définition de } g^{-1} \text{ est } g(\mathbb{R}_+) = \operatorname{ch}(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[.}$$

De plus, la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc il en est de même pour g et le théorème des fonctions réciproques assure aussi que

$$\boxed{g^{-1} \text{ est dérivable sur } g(\mathbb{R}_+^\star) =]1,+\infty[}$$

Comme le graphe de g admet une demi-tangente horizontale au point $(0,1)$ (car $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$), par symétrie par rapport à la première bissectrice, celui de g^{-1} admet une demi-tangente verticale au point $(1,0)$, donc

$$\boxed{g^{-1} \text{ n'est pas dérivable en } 1}$$

---

4. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ pour $x \in]1,+\infty[$ à l'aide de g^{-1}, par le changement de variables $x = g(u)$.
   On pourra utiliser sans démonstration les égalités suivantes, pour $v \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(2v) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(v) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(2v) = 2\operatorname{sh}(v)\operatorname{ch}(v).$$

On vérifie les hypothèses du théorème de changement de variables pour les primitives :
— $g|_{\mathbb{R}_+^\star} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$, puisque c'est une restriction de ch $\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;
— $\forall u \in \mathbb{R}_+^\star,\ g'(u) = \operatorname{sh}(u) > 0$;
— La fonction $(g(\mathbb{R}_+^\star) \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x^2-1})$ est continue comme composée bien définie d'un polynôme et de la fonction racine carrée.

On peut donc effectuer le changement de variables

$$\left[\begin{array}{rcl} x & = & g(u) \\ \mathrm{d}x & = & g'(u)\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$$

qui donne, pour $x \in]1,+\infty[$, puisque $u \geq 0$ (car $u = g^{-1}(x) > 0$),

$$\begin{aligned}
\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x} &= \int g'(u)\sqrt{g^2(u)-1}\ \mathrm{d}u \\
&= \int \operatorname{sh}(u)\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}\ \mathrm{d}u \\
&= \int \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int \operatorname{sh}^2(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}(2u)-1)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\operatorname{sh}(2u)}{4} - \frac{u}{2} + C \\
&= \frac{\operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(u)}{2} - \frac{u}{2} + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{ch}(u)\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}}{2} - \frac{u}{2} + C \\
&= \boxed{\frac{x\sqrt{x^2-1}-g^{-1}(x)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.}
\end{aligned}
$$

---

5. Pour $x \in [1, +\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{R}_+$: $\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} = 2x$ et en déduire une formule pour la fonction g^{-1}.
(Se ramener à une équation du second degré en e^u et utiliser la question 2 pour écarter une des racines le cas échéant.)

Soit $x \in [1, +\infty[$. Pour $u \in \mathbb{R}_+$, en multipliant par $\mathrm{e}^u \neq 0$,

$$\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} = 2x \iff (\mathrm{e}^u)^2 - 2x\mathrm{e}^u + 1 = 0.$$

L'équation du second degré $t^2 - 2xt + 1 = 0$ (d'inconnue réelle t) a comme discriminant $4x^2 - 4 = \left(2\sqrt{x^2-1}\right)^2$.
On a donc deux cas :
— si $x = 1$, elle admet $x = x + \sqrt{x^2-1} = 1$ comme unique solution avec $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = 0$;
— si $x > 1$, elle admet deux solutions distinctes $x \pm \sqrt{x^2-1}$. D'après le résultat de 2, $x - \sqrt{x^2-1} < 1$, donc ne peut pas être l'exponentielle d'un réel positif ou nul, et $x + \sqrt{x^2-1} \geq x > 1$, donc $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) > 0$.
Ainsi, pour $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} = 2x \iff u = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).}$$

Pour $x \in [1, +\infty[$, il existe donc un unique $u \in \mathbb{R}_+$ tel que $\operatorname{ch}(u) = x$, c'est $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. On retrouve ainsi le fait que g admet une fonction réciproque, et on a la formule

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).}$$

---

6. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des fonctions usuelles du cours, pour $x \in]1, +\infty[$.

Par la formule précédente,

$$\boxed{\text{pour } x \in]1, +\infty[, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

---

7. Exprimer $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ à l'aide des fonctions usuelles du cours, pour $x \in]-\infty, -1[$.

Première méthode :
On pose, pour $x \in]-\infty, -1[$, $H(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(-x - \sqrt{x^2-1}\right)\right)$.
Cette fonction est clairement dérivable et, pour $x \in]-\infty, -1[$,

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} + x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{-1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{-x - \sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \sqrt{x^2-1},
\end{aligned}
$$

donc

$$\boxed{\text{pour } x \in]-\infty,-1[, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)\right)+C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Deuxième méthode :

Bien plus élégante et due à un élève : poser le changement de variables $x=-u$ et se ramener ainsi à la question précédente. On trouve

$$\boxed{\text{pour } x \in]-\infty,-1[, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)+C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Remarquons qu'il y a un petit calcul à faire pour montrer que la formule obtenue est égale à celle de la première méthode.
