Exercice 1

Question 1

Soit $i, j \in [\![0, 3]\!]$ et $k \in [\![1, 4]\!]$

Pour chaque case à la coordonné (i, j) on a 4 valeurs possibles pour k : $1, 2, 3, 4$
Si on fixe la ligne i on a donc 4 possibilités pour choisir la colonne.
Alors pour une ligne fixé on à : $4 \times 4 = 16$ possibilités
Or dans la grille on a : 4 lignes, on ajoute donc 4 fois chaque nombre de variables possibles dans une ligne
Ainsi, on a :
64 variables propositionnelles

Compter le nombre de valuation reviens à compter le nombre de grilles de sudoku différentes qui suivent les règles.

On remplit la <u>première ligne</u> du tableau du sudoku,

- Dans la première case de la ligne on a $\boxed{4}$ possibilités de valuation $k_1 \in [\![1, 4]\!]$ (car le tableau n'est pas encore rempli)

- Dans la deuxième case de la ligne $v(x_{1,0,k_1}) = 0$ (par la règle sur la ligne) alors on prend une valeur $k_2 \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_1\}$ cela revient à choisir quel élément sera bien évalué à 1 dans l'ensemble : $\{x_{0,0,v}; v \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_1\}\}$ ce qui nous fait $\boxed{3}$ possibilités de valuation possible.

Par analogie pour les 2 dernières cases de la ligne :

$$\text{Ainsi, pour la première ligne on a : } \boxed{4! = 24} \text{ choix de valuation}$$

On remplit la <u>deuxième ligne</u> :

- Dans la première case de la ligne on prend une valeur $k_5 \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_1, k_2\}$ (car on doit respecter la règle du carré 2×2 et de la colonne) on doit alors choisir entre les valuations des éléments de cet ensemble : $\{x_{1,0,v} : v \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_1, k_2\}\}$ on a alors $\boxed{2}$ choix.
- Ce qui nous laisse pas le choix pour le choix de la valeur de la case $(1,1)$: $v(x_{1,1,k_6}) = 1$ avec $k_6 \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_1, k_2, k_5\}$ ($|[\![1,4]\!] \setminus \{k_1, k_2, k_5\}| = 1$)
- Dans la troisième case on choisit une valeur $k_7 \in [\![1,4]\!] \setminus \{k_5, k_6, k_3, k_4\}$ or $k_4 = k_5$ ou $k_4 = k_6$ sinon k_4 serait égal à un élément de sa ligne.
  On a deux cas :
  - Si $k_5 = k_3$, alors, comme $k_3 \neq k_4$ (k_3 et k_4 sur la même ligne) on a $k_5 \neq k_4$ et $k_6 \neq k_5$ (car k_6 et k_5

sont sur la même ligne) alors
$|[\![1,4]\!] \setminus \{k_5, k_6, k_3, k_4\}| = 1$

- Si $k_6 = k_3$, par analogie il ne reste qu'une possibilité

Dans les deux cas il ne reste donc qu'une possibilité

- Dans la dernière case il ne reste finalement qu'une possibilité

$$\text{Finalement pour la deuxième ligne on a } \boxed{2} \text{ choix de valuation}$$

On remplit la troisième ligne :

- Pour la première case $(2,0)$:
  on a que $\boxed{2}$ choix disponibles par la règle des colonnes
- Pour la deuxième case $(2,1)$:
  comme la valeur de la case $(2,0)$ est différente de la case $(0,0)$ et $(1,0)$ elle est forcément égale a une des valeurs au dessus de la deuxième (par la règle du carré)
  on a donc $\boxed{2}$ possibilités de remplissage.
- Pour les deux dernières cases $(2,2)$ et $(2,3)$:
  Si la valeur de la case $(2,0)$ et la valeur de la case $(2,1)$ auraient été toutes les deux au dessus de la valeur de la case $(2,2)$ (respectivement $(2,3)$),
  comme les valeur de $(0,2)$ et $(1,2)$ et $(0,3)$ et $(1,3)$ sont différents entre eux par la règle du carré, les valeurs de

$(2,0)$ et $(2,1)$ et $(0,3)$ et $(1,3)$ (respectivement $(2,0)$ et $(2,1)$ et $(0,2)$ et $(1,2)$) le sont aussi, alors on aurait pas de possibilité de remplir la case $(2,3)$ (respectivement $(2,2)$).

Donc, les valeur des cases $(2,0)$ et $(2,1)$ sont chacune au dessus de : soit $(2,2)$, soit $(2,3)$.
Mais jamais les les valeur des cases $(2,0)$ et $(2,1)$ au dessus d'une unique case : soit $(2,2)$ soit $(2,3)$

Comme on a bien au dessus de $(2,2)$ et $(2,3)$ exactement une valeur différente à $(2,0)$ ou $(2,1)$, sur la ligne d'indice 2 et la colonne d'indice 2 (respectivement 3) on a exactement 3 valeurs différentes.

Ainsi, il ne reste plus qu'une seule possibilité pour remplir les deux dernières cases de la ligne.

$$\text{Finalement pour la troisième ligne on a } \boxed{4} \text{ choix de valuation}$$

On remplit la quatrième ligne :
Pour chaque case on applique la règle des colonnes il ne nous reste donc pas le choix pour le placement des dernières valeurs.

Ainsi, on a $24 \times 2 \times 4 \times 1 = 192$ grilles de sudoku différentes donc,

$$\boxed{192} \text{ valuations possibles}$$

Question 3

```
let grille =
[|
        [|2;3;1;0|];
        [|0;0;2;0|];
        [|3;0;0;0|];
        [|0;4;0;0|]
|]
;;
```

Question 4

On utilise les notations de l'énoncé :

$$x_{0,0,2} \wedge x_{0,1,3} \wedge x_{0,2,1} \wedge x_{1,2,2} \wedge x_{2,0,3} \wedge x_{3,1,4}$$

Question 6

```
let isThereSolutions t =
        Et([formule_grille t; grille_complete;
        un_par_case; un_par_ligne;
un_par_colonne;
        un_par_carre])
;;
```