The background of the slide is a painting. On the left, a woman in a light-colored dress and a wide-brimmed hat sits on a wooden bench, holding a small child. On the right, another woman in a dark blue long-sleeved top and a long brown skirt stands with her back to the viewer, looking at a bush of red and white flowers. She is holding a woven basket. The scene is set in a garden with a large tree on the left and a building with a thatched roof on the right.

反问题笔记

Inverse Problem Notes

讲学笔记

RESEARCH NOTE, AT UNIVERSITY OF HOUSTON

[GITHUB.COM/CAINMAGI/???](https://github.com/caimagi/???)


This is the personal note of learning inverse problem theory, written by *Yuchen Jin*. Anyone who read this book could share it freely, but any activities of recompilation, modification or reproduction are not permitted, according to the authority of the editor.

First release, February 9, 2018



目 录

1	普适离散反问题	5
1.1	模型空间与数据空间	5
1.1.1	模型空间	6
1.1.2	数据空间	7



1. 普适离散反问题

反问题 (*inverse problem*) 与正问题 (*forward problem*, *modelization problem*, *simulation problem*) 相对, 是基于已经存在的观测结果, 逆推出产生如此观测结果的模型。一个最大的不同是, 正问题里确定模型时, 观测结果有唯一解; 反问题里确定观测结果时, 模型没有唯一解。

故而, 为了得到有效的解、或解集 (*collection of models*), 往往须要对问题施加约束条件, 这种约束条件可以看成是对模型的一种先验信息, 它定义了解集可能存在的概率分布 (因而我们可以探索到最大概率的解)。

当数据有较高的采样频率时, 可以描述一个离散反问题 (*discrete inverse problem*) 来代替原问题。离散反问题从数学上更容易解, 但它不能完全等同于原问题, 因为离散化的过程中引入了一些简化, 造成一些信息因为离散化被隐藏了起来。

本章的核心是参数集 (*parameter set*) 上的“状态信息 (*state of information*)”, 一般被描述为前述的先验信息/概率密度。这种方法可以用在完全非线性问题里, 但计算开销甚大。且它的解一般少于传统方法得到的解。

1.1 模型空间与数据空间

研究一个物理系统 \mathcal{G} 一般分为三步:

- (1) **系统参数化** (*parameterization of system*): 确定一个最小的参数集, 使得通过这些参数可以完全描述物理系统;
- (2) **正向模型** (*forward modeling*): 预测并给定一些参数, 通过物理定律, 建立参数 \rightarrow 观测结果之间的关系;
- (3) **反向模型** (*inverse modeling*): 使用这些预测的参数, 推测出实际模型参数的解。

可见, 前两步是归纳 (*inductive*), 最后一步是演绎 (*deductive*), 前两步的物理建模可能更困难; 至于最后一步, 有成熟、有效的数学方法来解。

首先让我们考量系统参数化的问题:

■ 例 1.1 考虑一个弹性系统 \mathcal{G} , 对于空间上任意的点 \mathbf{x} , 有压力 $\sigma^{ij}(\mathbf{x})$, 拉力 $\varepsilon^{ij}(\mathbf{x})$, 则可以定义弹性硬度张量 $c_{kl}^{ij}(\mathbf{x})$ 为:

$$\sigma^{ij}(\mathbf{x}) = c_{kl}^{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon^{kl}(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

同时还可以定义弹性柔度张量 $s_{kl}^{ij}(\mathbf{x})$ 为:

$$\varepsilon^{ij}(\mathbf{x}) = s_{kl}^{ij}(\mathbf{x}) \sigma^{kl}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

这里, 张量 \mathbf{s} 是张量 \mathbf{c} 的逆, 亦即 $c_{kl}^{ij} s_{mn}^{kl} = \delta_m^i \delta_n^j$ 。故而选择这两个参数中的任何一个都是**完全等价** (*completely equivalent*) 的。■

选择任意一组符合上述要求的特定参数集就是**系统参数化**, 对于两个等价的参数集, 其参数之间可以一一映射。

1.1.1 模型空间

与系统参数化无关, 我们可以引入一个**抽象空间**, 或称为**流形** (*manifold*), 用其中的每一个**点**代表一个模型 \mathbf{m} , 于是这样的流形记为**模型空间** (*model space*) $\mathfrak{M} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots\}$ 。

一个**模型空间**可以被不同的 (等价) 系统参数描述。例如, 设若 \mathfrak{M} 的参数有两维, 记为 $\{m^1, m^2\}$, 则 m^1 和 m^2 可以选用不同的参数进行测量。由此定义的**模型**, 或记为**点** \mathbf{m} , 一般来说不可以看成是一个 (线性空间内的) 向量, 因为其坐标轴可能是非线性的。即使坐标轴都是线性的, 也一般不是笛卡尔坐标系。

■ **例 1.2** 考虑一个**模型空间** \mathfrak{M} 已经确定了系统参数为 $\{\kappa, \mu\}$ (分别为体积模量和剪切模量), 可以定义两个模型 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{\left(\log \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2 + \left(\log \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2} \quad (1.3)$$

若以对数化的系统参数 $\{\kappa^* = \log \kappa, \mu^* = \log \mu\}$ 来代替(1.3)的参数, 有:

$$d = \sqrt{(\kappa_2^* - \kappa_1^*)^2 + (\mu_2^* - \mu_1^*)^2} \quad (1.4)$$

可见, (1.4) 是的参数是笛卡尔坐标系, 但(1.3)的不是。■

性质 1.1 – 离散性. 须知的是, 一个实际物理模型, 其**参数系** (*set of quantities*) (亦即坐标轴) 往往是连续的, 记为 $m(\mathbf{x})$; 但本章考虑的模型是经过抽样、离散化的模型, 其**参数系**为 $m^\alpha = m^\alpha(\mathbf{x})$ 。坐标轴的离散性满足以下条件:

- (1) 参数系由选取的系统参数决定, 一个模型可以选用不同的参数系;
- (2) 参数系维数 α 有限, 本章不考虑无限的情况;
- (3) 参数系的抽样应该足够多, 能不失真地反映出原始模型的特征;
- (4) 参数系的值本身可以取连续也可以取离散, 为了方便表达, 可以默认认为取值总是连续的, 因为离散的取值可以用**狄拉克** (*Dirac*) 函数表达。■

性质 1.2 – 线性. 设任意两个同属一个模型空间 \mathfrak{M} , 使用同一系统参数 m^α 的模型 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, 其任意第 i 维的值均满足:

$$(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)^\alpha = (\mathbf{m}_1)^\alpha + (\mathbf{m}_2)^\alpha \quad (1.5)$$

$$(\lambda \mathbf{m})^\alpha = \lambda (\mathbf{m})^\alpha \quad (1.6)$$

这样的 \mathfrak{M} 称为**线性模型空间** (*linear model space*), 记为 \mathbb{M}

例 1.2使用的对数化系统参数 $\{\kappa^*, \mu^*\}$ 是可以构成一个**线性模型空间**。因此, 此例中的距离 d 相当于该线性空间的**Euclidean 范数**。

为了处理一个反问题, 设模型空间 \mathfrak{M} 为全集, 其任意一个子集记为 \mathcal{A} , 则可以令全集概率 $P(\mathfrak{M}) = 1$, 且其子集概率 $P(\mathcal{A}) \in [0, 1]$ 。此处定义的概率, 是通过一种特定的关联关系定义的, 这种关系不受到空间是否是线性的影响。并且, 能相应地根据该概率求出每个模型的概率密度分布。

1.1.2 数据空间