
Nachklausur
Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2023/2024

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengen und Funktionen)

(6 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{\{a, b, c\}, d\}$ und $B = \{a, d\}$.

- a) Geben Sie die Menge $A \cup B$ an
- b) Geben Sie die Menge $A \cap B$ an
- c) Geben Sie die Menge $A \setminus B$ an.

Aufgabe 2 (Potenzmengen)

(8 Punkte)

- a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ an.
- b) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ an.
- c) Ist $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Ist $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- e) Ist $1 \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- f) Ist $1 \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2\})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Relationen)

(10 Punkte)

Gegeben sei die Menge $A = \{1, 2, 3\}$. Es sei $R \subseteq A \times A$ mit $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

- a) Welche Eigenschaften hat die Relation R ? (zur Auswahl stehen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv). Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Betrachten wir die Relation $S \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ mit $(X, Y) \in S \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Zeichnen Sie die Relation S als Graphen.
- c) Welche Eigenschaften hat die Relation S ? (zur Auswahl stehen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv). Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Geben Sie ein Hasse-Diagramm der Relation S an.
- e) Was sind die minimalen, kleinsten, maximalen und größten Elemente von S (falls vorhanden)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Mengenbeweis)

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle Mengen A, B, C gilt: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 5 (Funktionen)

(4 Punkte)

Geben Sie für folgende Funktionen $f : X \rightarrow Y$ an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Begründen Sie Ihre Antwort (bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, f(x) = x^2$

b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + 1$

Formelsammlung

Hier eine kleine Formelsammlung. Sie ist nicht vollständig, enthält aber alle wichtigen Statements / Definitionen, die man brauchen könnte.

1. Aussagen- und Prädikatenlogik

a) Distributivgesetz: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

b) Distributivgesetz: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

c) DeMorgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

d) DeMorgan: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

e) Idempotenz: $A \wedge A \Leftrightarrow A$

f) Idempotenz: $A \vee A \Leftrightarrow A$

g) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$

h) $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$

i) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

j) $\neg\forall x \in M : A(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$

k) $\neg\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

2. Mengen

a) Teilmenge: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$

b) Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

c) Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

d) Schnittmenge: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

e) Differenzmenge: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

f) Distributivgesetz: $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$

h) DeMorgan: $A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

i) DeMorgan: $A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

j) Es ist $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$.

k) Es ist $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$.

3. Relationen

a) Für Mengen M, N ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation von M nach N .

b) $R \subseteq M \times M$ ist reflexiv, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in R$.

c) $R \subseteq M \times M$ ist symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

d) $R \subseteq M \times M$ ist antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

e) $R \subseteq M \times M$ ist transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

f) $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

g) $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnungsrelation, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

h) Für eine Äquivalenzrelation \sim auf M ist $[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse von x , $M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen oder Quotientenmenge von M modulo \sim . Die Menge der Äquivalenzklassen ist eine Partition von M . Umgekehrt induziert jede Partition eine Äquivalenzrelation.

i) Für eine Ordnungsrelation \leq auf M und $X \subseteq M$ ist g ein kleinstes Element von X , wenn $\forall x \in X : g \leq x$, g ein minimales Element von X , wenn $\forall g' \in X : g' \leq g \Rightarrow g = g'$, maximale und größte Elemente analog.

4. Funktionen

a) Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist eine Relation (also $f \subseteq X \times Y$), die jedem Element aus der Definitionsmenge X genau ein Element aus der Zielmenge Y zuordnet.

b) f ist injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

c) f ist surjektiv, wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

d) f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

e) Die Umkehrfunktion f^{-1} ist definiert $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : y = f(x)\}$