
Übungen zur Vorlesung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger
Blatt 2

Besprechung in nächster Vorlesung

Aufgabe 2.1 (Mengen)

(9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

- (i) $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\}$
- (ii) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}$
- (iii) $\{a, b, c\} \setminus \{b, c, d\}$
- (iv) $\mathcal{P}(\{1, a\})$
- (v) $\mathcal{P}(\{1, \{1\}\})$
- (vi) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathcal{P}(\{1, 2\})$
- (vii) $\bigcap_{i \in \{2, 6\}} \{\frac{i}{2}, i + 1\}$ (Hinweis: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$ für eine Indexmenge I)
- (viii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n + 1, 2n\}$ (Hinweis: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$ für eine Indexmenge I)
- (ix) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$

— Lösung Anfang —

- (i) $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- (ii) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$
- (iii) $\{a, b, c\} \setminus \{b, c, d\} = \{a\}$
- (iv) $\mathcal{P}(\{1, a\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$
- (v) $\mathcal{P}(\{1, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$
- (vi) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, also $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- (vii) $\bigcap_{i \in \{2, 6\}} \{\frac{i}{2}, i + 1\} = \{\frac{2}{2}, 3\} \cap \{\frac{6}{2}, 7\} = \{3\}$
- (viii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n + 1, 2n\} = \mathbb{N}$
- (ix) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.2 (Mengenbeweis)

(2 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

— Lösung Anfang —**Beweis:**Sei $x \in A \setminus (B \setminus C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \setminus C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$
 (In $B \setminus C$ sind die Elemente, die in B , aber nicht in C sind. Ist nun $x \notin B \setminus C$, dann kann $x \notin B$ sein oder $x \in C$).

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$
 (Distributivitätsgesetz)

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.3 (Beweis)

(4 Punkte)

Seien A und B Mengen. Beweisen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

— Lösung Anfang —

Beweis:

„ \Rightarrow “:

Gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen $A \cup B = B$.

Sei $x \in A \cup B$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$\Leftrightarrow x \in B$, weil $A \subseteq B (x \in A \Rightarrow x \in B)$, was zu zeigen war.

„ \Leftarrow “:

Gelte $A \cup B = B$. Wir zeigen $A \subseteq B$.

Sei $x \in A$. Dann ist $x \in A \cup B$ (ich kann was Beliebigen dazu vereinigen). Wegen $A \cup B = B$ gilt insbesondere $A \cup B \subseteq B$, also $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$, was zu zeigen war. \square

— Lösung Ende —

Aufgabe 2.4 (Beweis)

(5 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$$

— Lösung Anfang —

Beweis:„ \Rightarrow “: Gelte $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Wir zeigen $C \subseteq A$.

Sei dazu $x \in C$. Dann ist $x \in (A \cap B) \cup C$ (Weil $x \in C$ kann ich was beliebiges dazu vereinigen) und nach Voraussetzung auch $x \in A \cap (B \cup C)$. Damit insbesondere $x \in A$, was zu zeigen war.

„ \Leftarrow “:Gelte $C \subseteq A$. Wir zeigen $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.Sei $x \in (A \cap B) \cup C$. Das ist äquivalent zu $x \in (A \cap B) \vee x \in C$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \text{ (weil } C \subseteq A \text{ nach Voraussetzung ist } x \in C \text{ äquivalent zu } x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \text{ (Distributivgesetz), was zu zeigen war.}$$

□

— Lösung Ende —