Mathematik I:
Theoretische Grundlagen der Informatik

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

8. November 2022

Lernziele dieser Vorlesung

- Verständnis erlangen für die grundlegende mathematische Notation
- Prinzipien der Aussagenlogik verstehen
- Grundsetzliches Vorgehen beim Führen mathematischer Beweise verstehen

Aussagen

Unter einer **Aussage** versteht man einen sprachlichen Ausdruck, dem man eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte w („wahr“) bzw. f („falsch“) zuordnen kann.
Aussagen werden mit Großbuchstaben bezeichnet,

$$A : Beschreibung$$

und können mit logischen Operationen verknüpft werden.
Grundlegende mathematische Aussagen, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden können, nennt man **Axiome**.

Beispiele von Aussagen

- Wahre Aussage A: Jede natürliche Zahl ist ein Produkt von Primzahlen.
- Falsche Aussage B: Jede Primzahl ist ungerade
- Unbewiesene Vermutung (wahr oder falsch, d.h. eine Aussage, bei der der Wahrheitswert noch nicht entschieden werden konnte) C: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
- Keine Aussage (Feststellung ohne Wahrheitswert) D: Freitag der dreizehnte ist ein Unglückstag.

Logische Operationen

Logische Aussagen können durch die in der folgenden Tabelle angegebenen Operationen verknüpft werden.

Bezeichnung	Schreibweise	(Sprechweise)	wahr, gdw
Negation	$\neg A$	(nicht A)	A falsch ist
Konjunktion	$A \wedge B$	(A und B)	A und B wahr sind
Disjunktion	$A \vee B$	(A oder B)	A oder B wahr ist
Implikation	$A \Rightarrow B$	(wenn A dann B)	A falsch oder B wahr
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	(A äquivalent B)	A und B äquivalent

Bindungsstärke

Um in logischen Ausdrücken Klammern zu sparen, wird festgelegt, dass $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ sowie $\vee$ und diese wiederum stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Wahrheitstabelle

In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitswerte der vorgestellten Verknüpfungen angegeben. Dabei steht w für wahr und f für falsch.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Gesetze für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

- Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

- Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Gesetze für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- De Morgansche Regeln:

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Idempotenz:

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

Mengendefinition

Definition (Naive Mengendefinition)

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterschiedlichen Objekten (die Elemente der Menge) zu einem neuen Ganzen. Wir schreiben $x \in M$, falls das Objekt x zur Menge M gehört. Wir schreiben $x \notin M$, falls das Objekt x nicht zur Menge M gehört. Falls $x \in M$ und $y \in M$ gilt, schreiben wir auch $x, y \in M$. Eine Menge, welche nur aus endlich vielen Objekten besteht (eine endliche Menge), kann durch explizite Auflistung dieser Elemente spezifiziert werden.

Beispiel: $M = \{2, 3, 5, 7\}$.
Hierbei spielt die Reihenfolge der Auflistung keine Rolle:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 2\}$$

Auch Mehrfachauflistungen spielen keine Rolle:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{2, 2, 2, 3, 3, 5, 7\}$$

Besondere Mengen

Eine besonders wichtige Menge ist die leere Menge $\emptyset = \{\}$, die keinerlei Elemente enthält.
In der Mathematik hat man es häufig auch mit unendlichen Mengen zu tun (Mengen, die aus unendlich vielen Objekten bestehen). Solche Mengen k:onnen durch Angabe einer Eigenschaft, welche die Elemente der Menge auszeichnet, spezifiziert werden.
Beispiele:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$