

예제 1 배반사건과 여사건

www.ebsi.co.kr

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. $a+b$ 가 짝수인 사건을 A 라 할 때, 이 시행에서 나오는 사건 B 가 사건 A 와 서로 배반사건이다. $n(B)$ 의 최댓값을 구하시오.

길잡이

- (1) 표본공간 S 의 사건 A 와 그 여사건 A^c 에 대하여 $A \cup A^c = S$ 임을 이용한다.
- (2) 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 임을 이용한다.

풀이

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수가 차례로 a, b 이므로 표본공간을 S 라 하면

$$S = \{(a, b) \mid a, b \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$$

사건 B 가 사건 A 와 서로 배반사건이므로

$B \cap A = \emptyset$ 에서 사건 B 는 사건 A 의 여사건 A^c 의 부분집합이다.

A^c 은 $a+b$ 가 홀수인 사건이므로

$$A^c = \{(a, b) \mid a \text{는 짝수, } b \text{는 홀수}\} \cup \{(a, b) \mid a \text{는 홀수, } b \text{는 짝수}\}$$

이때

$$\begin{aligned} n(\{(a, b) \mid a \text{는 짝수, } b \text{는 홀수}\}) &= n(\{(a, b) \mid a \text{는 홀수, } b \text{는 짝수}\}) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

이고 $n(B) \leq n(A^c) = 9 \times 2$

따라서 $n(B)$ 의 최댓값은 18이다.

답 18

유제

정답과 풀이 18쪽

1

$2 \leq n \leq 9$ 인 자연수 n 에 대하여 표본공간 $S = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 사건 A_n, B 가

[23010-0051]

$$A_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 소수}\}$$

일 때, 두 사건 A_n 과 B^c 이 서로 배반사건이 되도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오.

(단, B^c 은 B 의 여사건이다.)

2

[23010-0052]

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 같은 면이 나오는 사건을 A , 앞면이 한 번 이상 나오는 사건을 B 라 하자. 이 시행에서 나오는 사건 C 가 두 사건 $A \cap B, B^c$ 과 모두 배반사건이 되도록 하는 사건 C 의 개수는? (단, B^c 은 B 의 여사건이고 $C \neq \emptyset$ 이다.)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

예제 2 수학적 확률

www.ebsi.co.kr

남학생 3명과 여학생 3명을 임의로 2명씩 3개조를 만들 때, 여학생 2명으로 이루어진 조가 있을 확률은?

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

길잡이

표본공간 S 의 사건 A 가 일어날 수학적 확률 $P(A)$ 는

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(\text{사건 } A \text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S \text{의 원소의 개수})}$$

임을 이용한다.

풀이

남학생 3명과 여학생 3명을 2명씩 3개조를 만드는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

여학생 2명으로 이루어진 조가 있는 경우는 여학생 2명으로 이루어진 조, 남학생 2명으로 이루어진 조가 각각 1개씩 있어야 하므로

$${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 18쪽

3

[23010-0053]

참가자 7명 중에서 음치 3명을 찾는 프로그램에서 음치 3명을 포함한 7명에게 1번부터 7번까지 임의로 하나씩 번호를 부여할 때, 음치끼리는 서로 번호가 연속하지 않도록 번호를 부여할 확률은?

(단, 참가자 7명 중 음치는 3명뿐이다.)

- ① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4

[23010-0054]

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 할 때, 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 과 직선 $3x - 4y + 3 = 0$ 이 서로 접하게 될 확률은?

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

예제 3 확률의 덧셈정리

www.ebsi.co.kr

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 들어 있는 주머니에서 차례로 한 장씩 임의로 3장의 카드를 꺼낸다. 한 장씩 꺼낸 3장의 카드에 적힌 수를 차례로 a, b, c 라 할 때, $b=3a$ 이거나 $c=2b$ 일 확률은?

(단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)

- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{5}{42}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

길잡이

두 사건 A, B 에 대하여 사건 A 또는 사건 B 가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

를 이용하여 구한다. 특히 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이면 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 를 이용하여 구한다.

풀이

9장의 카드가 들어 있는 주머니에서 차례로 한 장씩 서로 다른 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

(i) $b=3a$ 인 사건을 A 라 하면

$b=3a$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 6), (3, 9)$ 이고, 이 각각에 대하여 c 를 정하는 경우의 수는 7이므로 $b=3a$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $3 \times 7 = 21$

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{21}{504} = \frac{1}{24}$$

(ii) $c=2b$ 인 사건을 B 라 하면

$c=2b$ 를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 는 $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$ 이고, 이 각각에 대하여 a 를 정하는 경우의 수는 7이므로 $c=2b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $4 \times 7 = 28$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{28}{504} = \frac{1}{18}$$

(iii) $6a=2b=c$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는 $(1, 3, 6)$ 으로 그 개수는 1이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{504}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} - \frac{1}{504} = \frac{2}{21}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 19쪽

5

[23010-0055]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 $f(1)=f(2)$ 또는 $f(3)=f(4)$ 를 만족시킬 확률은 p 이다. $16p$ 의 값을 구하시오.

6

[23010-0056]

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수 중에서 작은 수를 a , 큰 수를 b 라 하자. 함수 $f(x) = x^2 - 9x + 18$ 에 대하여 $f(a)f(b) > 0$ 이 성립할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 임의로 배열할 때, 적어도 2장의 짝수가 적힌 카드가 서로 이웃하도록 배열될 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

길잡이

사건 A의 여사건 A^c 의 확률을 알 때, 사건 A의 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

임을 이용하여 구한다.

풀이

7장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(7-1)! = 6! = 720$$

적어도 2장의 짝수가 적힌 카드를 서로 이웃하도록 배열하는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^c 은 짝수가 적힌 모든 카드를 서로 이웃하지 않게 배열하는 사건이다.

홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

홀수가 적힌 4장의 카드 사이사이에 짝수 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드를 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

따라서 짝수가 적힌 모든 카드를 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

이므로

$$P(A^c) = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$$

그러므로 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 20쪽

7

[23010-0057]

노란 공 2개, 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 어떤 두 공이 같은 색일 확률은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{16}{21}$ ④ $\frac{17}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

8

[23010-0058]

흰 공을 포함하여 모두 12개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공을 1개 이상 꺼낼 확률이 $\frac{15}{22}$ 이다. 이 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 구하시오.

[23010-0059]

- 1 표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 사건 A, B 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하시오. (단, $A \neq \emptyset$ 이고 $B \neq \emptyset$ 이다.)

(가) $A \cup B = S$ (나) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이다.

[23010-0060]

- 2 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 공을 두 개씩 동시에 꺼낼 때, 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합과 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 곱이 같을 확률은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

[23010-0061]

- 3 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 자연수의 백의 자리의 수가 1일 확률은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0062]

- 4 4명의 학생을 각각 1반부터 4반까지 4개의 반 중에서 한 개의 반에 임의로 배정할 때, 학급 1반과 2반에 배정받은 학생 수의 합과 학급 3반과 4반에 배정받은 학생 수의 합이 서로 같도록 배정할 확률은?

(단, 학생이 배정되지 않은 반이 있을 수 있다.)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{5}{16}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{7}{16}$

⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0063]

5 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}, P(A^c \cap B) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(A \cap B^c)$ 의 최댓값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0064]

6 집합 $X = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소 중에서 임의로 서로 다른 두 개의 원소를 동시에 선택할 때, 이 두 원소의 합이 10 이하의 소수이거나 10의 약수일 확률은?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

[23010-0065]

7 서로 다른 채식 메뉴 2가지를 포함한 서로 다른 7개의 메뉴를 월요일부터 일요일까지 7일간 점심 메뉴로 임의로 하나씩 요일마다 중복되지 않게 선정하려고 할 때, 토요일 또는 일요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정될 확률은? (단, 7개의 메뉴에서 채식 메뉴는 2가지뿐이다.)

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{5}{21}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

[23010-0066]

8 두 자리 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 수가 18과 서로소일 확률은?

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[23010-0067]

- 1 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. a 가 b 의 약수일 확률은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0068]

- 2 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수이고 세 수의 곱이 5의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[23010-0069]

- 3 주머니 A에는 0, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 5장, 주머니 B에는 5, 6, 7의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 3장, 주머니 C에는 8, 9의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 2장 들어 있다. 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 a, b, c 라 하자. a 를 일의 자리의 수, b 를 십의 자리의 수, c 를 백의 자리의 수로 하여 세 자리 자연수를 만들 때, 이 세 자리 자연수가 6의 배수가 아닌 3의 배수가 될 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[23010-0070]

- 4 한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 확인하는 시행의 두 사건 A, B 가 다음 조건을 만족시키도록 두 사건 A, B 를 선택하는 경우의 수를 구하시오.

$$(가) P(A \cup B) = 1, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$(나) P(A) < P(B)$$

[23010-0071]

- 5 총 6개 팀이 참가한 어느 공연에서 악기를 연주하는 1개 팀, 춤을 추는 2개 팀, 노래하는 3개 팀이 참여하여 각 팀이 한 번씩 차례대로 공연하려고 한다. 이 6개 팀의 공연 순서를 임의로 정할 때, 다음 조건을 만족시키도록 공연 순서가 정해질 확률은?

(가) 춤을 추는 2개 팀의 공연 순서가 이어진다.

(나) 노래하는 3개 팀 중에서 2개 팀만 공연 순서가 이어진다.

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[23010-0072]

- 6 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 2가 적힌 카드가 1이 적힌 카드와 3이 적힌 카드 사이에 있거나 3이 적힌 카드가 2가 적힌 카드와 4가 적힌 카드 사이에 있도록 나열할 확률은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[23010-0073]

- 7 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 8 이하이거나 11 이상일 확률은?

- ① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

[23010-0074]

- 8 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 임의로 원형으로 배열할 때, 서로 마주 보는 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 6이 되지 않도록 배열할 확률은?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

- ① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{11}{15}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[23010-0075]

- 1 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4 라 하자. $n(\{x_i | x_{i+1} - x_i = 1, i = 1, 2, 3\}) = 1$ 일 확률은?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{10}{21}$

③ $\frac{11}{21}$

④ $\frac{4}{7}$

⑤ $\frac{13}{21}$

[23010-0076]

- 2 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일대일대응인 모든 함수 중에서 임의로 택한 한 함수를 f 라 할 때, 함수 $f \circ f$ 또는 함수 $f \circ f \circ f$ 가 항등함수가 될 확률은?

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{19}{24}$

③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{7}{8}$

⑤ $\frac{11}{12}$

[23010-0077]

- 3 부등식 $x + y + z \leq 8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (x, y, z) 가 $(x - y)(z - 1) \neq 0$ 을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)