



WYDZIAŁ INFORMATYKI, ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KATEDRA INFORMATYKI

PRACA MAGISTERSKA

*Optymalizacja podziału dyskretnego modelu
symulacyjnego na potrzeby symulacji równoległej*

*Optimization of the discrete simulation model division for parallel
simulation*

Autorzy: *Jakub Ziarko*

Kierunek studiów: *Informatyka*

Typ studiów: *Stacjonarne*

Opiekun pracy: *dr hab. inż. Wojciech Turek*

Kraków, 2021

Oświadczenie studenta

Upoznany o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształcącego taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, videogram lub nadanie.”, a także upoznany o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 308 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godność studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście, samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworem stworzonym przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór znajdujący się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzenia z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....
(czytelny podpis studenta)

Spis treści

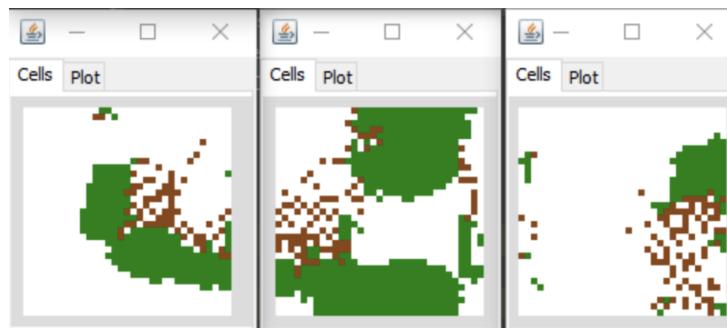
1 Wstęp	4
1.1 Motywacja	4
1.2 Cel pracy oraz wprowadzenie	5
1.3 Struktura pracy	5
2 Istniejące metody partycjonowania grafów	6
2.1 Metody spektralne	6
2.2 Metody rekursywne	7
2.3 Metody geometryczne	8
2.4 Metody wielopoziomowe	9
2.5 Porównanie istniejących metod wielopoziomowych	10
3 Opis algorytmu	12
3.1 Podział siatki na $m \cdot k$ obszarów	13
3.1.1 Konwersja pliku graficznego na graf i redukcja obszarów niepodzielnych	13
3.1.2 Zmniejszanie i partycjonowanie grafu za pomocą algorytmu LAM	16
3.1.3 Szczegóły modyfikacji algorytmu LAM	21
3.1.4 Przywracanie grafu do początkowego rozmiaru wraz z ulepszeniem podziału	24
3.1.5 Używanie Helpful Sets w celu zmniejszenia długości granic	27
3.1.6 Szczegóły budowania zbioru helpful	34
3.1.7 Szukanie zbioru k -helpful gdzie $k \geq limit$	36
3.1.8 Szczegóły budowania zbioru balancing	37
3.1.9 Balansowanie rozmiarów obszarów	41
3.1.10 Usuwanie obszarów rozproszonych	43
3.2 Podział siatki na m obszarów	45
4 Wyniki	47
4.1 Wyniki dla podziału na $m \cdot k$ obszarów	47
4.1.1 Wyniki dla podziału siatek bez obszarów niepodzielnych i wyłącznych z obliczeń	47
4.1.2 Wyniki dla podziału siatek z obszarami niepodzielnymi i wyłącznymi z obliczeń	49
4.2 Wyniki dla podziału na m obszarów	56

1. Wstęp

1.1. Motywacja

Partycjonowanie siatek jest bardzo ważnym podproblemem dla wielu dziedzin. Zastosowanie ma między innymi dla sieci komputerowych, także dla obliczeń równoległych, gdzie zależy nam, aby problem podzielić na równe części pomiędzy węzły. Jednym z takich problemów są symulacje 2D. Dla symulacji definiujemy zasady jej odbywania oraz siatkę, na której ma się odbywać. Celem takiej symulacji może być przykładowo zbadanie ruchu pieszego na mapie galerii, następnie wyodrębnienie miejsc zatłoczonych, które wymagają poprawek w projekcie. Innym przykładem symulacji jest symulacja królików i kapusty przedstawiona na rysunku 1.

Z racji na wielkość mapy często taka symulacja jest bardzo wymagająca obliczeniowo, dlatego dążymy do jej zrównoleglenia. Jedną z metod zrównoleglenia tego typu obliczeń jest podział siatki wejściowej pomiędzy węzły obliczeniowe, tak by każdy węzeł zajmował się swoim obszarem. Węzły mogą otrzymywać obszary równe w kwestii pola, jeśli są to węzły homogeniczne, lub obszary proporcjonalne do ich możliwości obliczeniowych, jeśli są heterogeniczne. Problemem, który towarzyszy tego typu zrównolegleniom jest narzut komunikacji. Podzielone części siatki, tak naprawdę funkcjonują jako całość, węzły więc muszą wiedzieć co dzieje się na granicach u sąsiadów, aby symulacja odbywała się prawidłowo. Komunikacja pomiędzy węzłami rodzi więc dodatkowy narzut. W celu zminimalizowania narzutu komunikacyjnego należy więc zminimalizować długość granic pomiędzy obszarami.



Rysunek 1: Fragment symulacji dla problemu królików i kapusty. Króliki zjadają kapustę zwiększając swoją populację. Ze względu na zwiększoną populację królików i spadającą liczbę pożywienia populacja królików spada, z czasem pozwalając populacji kapusty po raz kolejny się odrodzić. Każde okno obsługiwany jest przez osobny rdzeń procesora.

Patrząc na symulacje jak ta przedstawiona na rysunku 1, łatwo zaproponować bardzo dobry podział, ponieważ siatka jest prostokątna. Podział otrzymamy rysując pionowe oraz poziome separatory na siatce. Jeśli przyjmiemy właściwy sposób ich rysowania otrzymamy idealny podział zarówno pod względem wielkości pól, jak i długości granic pomiędzy obszarami. Problem ten jednak przestaje być trywialny, jeśli siatka nie jest prostokątem lub chcemy, aby wyodrębnione obszary takiej siatki nie zostały podzielone między partie, to znaczy należały zawsze do jednej partycji. Często również obliczenia z różnych powodów nigdy nie odbędą się na pewnych obszarach siatki. Mogą być to na przykład

ściany na mapie galerii lub też pomieszczenia, do których nie wchodzą klienci. Chcemy aby tego typu obszary zostały również ujęte w podziale siatki, możemy bowiem wyobrazić sobie sytuację, że jeden węzeł otrzymuje do symulowania część siatki właśnie z obszarem, na którym simulacja nie będzie się odbywać. Nie będzie on wtedy wykorzystywany do symulacji.

1.2. Cel pracy oraz wprowadzenie

Celem tej pracy jest skonstruowanie algorytmu tworzącego podział siatki na partycje. Podział ten będzie się odbywał dla węzłów homogenicznych, a więc takich gdzie każdy rdzeń ma identyczną moc obliczeniową. Partycje więc muszą być równe pod względem pola. Dodatkową cechą takiego partycjonowania jest zminimalizowanie długości granic między partycjami (ang. edge-cut), tak by narzut komunikacyjny był jak najniższy. Początkowa siatka powinna pozwalać na zdefiniowanie obszarów niepodzielnych oraz obszarów wyłączonych z obliczeń. Obszar niepodzielny nie może znajdować się w więcej niż jednej partycji, natomiast obszar wyłączony z obliczeń nie powinien być brany pod uwagę podczas partycjonowania, tak by wszystkie węzły obliczeniowe obsługiwały równe pod względem pola obszary siatki, na których ma szansę odbyć się symulacja.

W celu partycjonowania siatka zostanie zamieniona na odpowiadający jej graf. Graf następnie, przy wykorzystaniu proponowanych przez literaturę oraz zmodyfikowanych przeze mnie algorytmów grafowych zostanie poddany partycjonowaniu. Partycjonowanie będzie się odbywało dwukrotnie. Jeśli bowiem mamy m węzłów obliczeniowych, każdy po k rdzeni, to siatka najpierw zostanie podzielona na $m \cdot k$ możliwie równych pod względem pola obszarów, następnie $m \cdot k$ partycji zostanie podzielone na m partycji, każda po k podobszarów. W ten sposób funkcjonujący algorytm został opisany w tej pracy.

1.3. Struktura pracy

W rozdziale drugim zebrano przegląd istniejących rozwiązań w zakresie partycjonowania grafów. Następnie spośród przeanalizowanych rozwiązań wybrane zostało to, które najlepiej prognozowało dla problemu niniejszej pracy.

W rozdziale trzecim zaproponowane i opisane zostało rozwiązanie problemu partycjonowania siatki dla m węzłów homogenicznych.

Rozdział czwarty prezentuje otrzymane rezultaty.

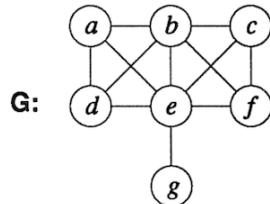
2. Istniejące metody partycjonowania grafów

Rozbudowany podział metod został zaproponowany przez autorów artykułu - [16] oraz [24] Zgodnie z ich analizą metody dzielimy na:

- spektralne,
- rekursywne,
- geometryczne,
- wielopoziomowe.

2.1. Metody spektralne

Partycjonowanie spektralne daje dobre rezultaty i jest metodą w miarę często używaną [26, 27, 18]. Podzbiór wierzchołków $S \subset V$ grafu G nazywamy separatorem jeśli dwa wierzchołki w tym samym komponencie grafu G są w dwóch różnych komponentach w grafie $G \setminus S$.



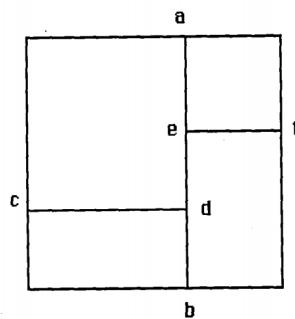
Rysunek 2: Separator wierzchołków d oraz c to $\{b, e\}$. Źródło: [22].

Metoda [26] będąca algorytmem spektralnym pokazuje algebraiczne podejście do obliczania separatorów wierzchołków. Artykuł [27] opisuje algorytm spectral nested dissection (SND). Algorytmy te za pomocą znajomości spektralnych właściwości macierzy Laplaciana obliczają separatory wierzchołków w grafie, które tworzą partycjonowanie grafu. Artykuł [18] mówi o nowatorskim rozwoju metody spektralnej pod kątem umożliwienia podziału obliczeń na cztery bądź osiem części na każdym etapie rekursywnej dekompozycji. Są to jednak wszystko metody kosztowne z racji na obliczanie wektorowa własnego odpowiadającego drugiej najmniejszej wartości własnej (Fielder wektor). Istnieją udane próby ulepszenia czasu wykonania tych metod, które polegają na liczeniu Fielder wektora poprzez algorytm wielopoziomowy - MSB [1]. Jednak nawet te metody wciąż charakteryzują się wysoką złożonością.

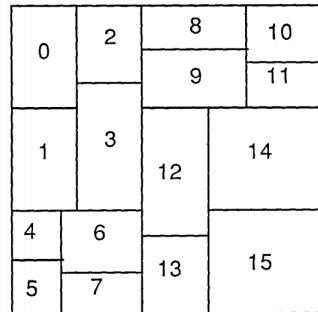
2.2. Metody rekursywne

Są to metody często prostsze w implementacji, jednak nie sprawdzają się tak dobrze w kontekście bardziej skomplikowanych problemów głównie ze względu na to, że mają zachłanną naturę. Metoda [2] zakłada, że dzielimy siatkę na liczbę obszarów, która jest równa potędze liczby dwa. Ta metoda potrafi także dzielić siatkę wedle możliwości obliczeniowych poszczególnych rdzeni procesora. Czasami metody rekursywne są implementowane jako faza metod bisekcji spektralnej [26]. Przykłady działania partycjonowania rekursywnego przedstawione są na rysunkach 3 oraz 4.

Specyfika tych metod polegająca na dzieleniu grafu na coraz mniejsze części sprawia, że nie jesteśmy w stanie uwzględnić części niepodzielnych, lub rozwiązanie tego problemu byłoby skomplikowane.



Rysunek 3: Przedstawia partycjonowanie rekursywne na głębokości wynoszącej 2. Linia partycjonowania a-b, która została stworzona przez partycjonowanie poziomu 1 jest poziomą linią, a linie c-d, e-f, f-d to poziome linie, które powstały po poziomie 2. Źródło: [2]



Rysunek 4: Metoda rekursywna - binarna dekompozycja dla 16 procesorów. Najpierw tworzone jest wertykalne cięcie, które gwarantuje, że prawy i lewy obszar zawiera połowę pracy do wykonania (lub takie, które jest jak najbliżej takiego podziału). Jeśli dostępne są 4 procesory to każdy z dwóch segmentów partycjonowany jest horyzontalną linią, która spełnia te same założenia jak ta dla pierwszego wertykalnego cięcia. Procedura jest kontynuowana na zmianę wykorzystując wertykalne i horyzontalne cięcie aż do otrzymania podziału na oczekiwana liczbę obszarów. Źródło: [2]

2.3. Metody geometryczne

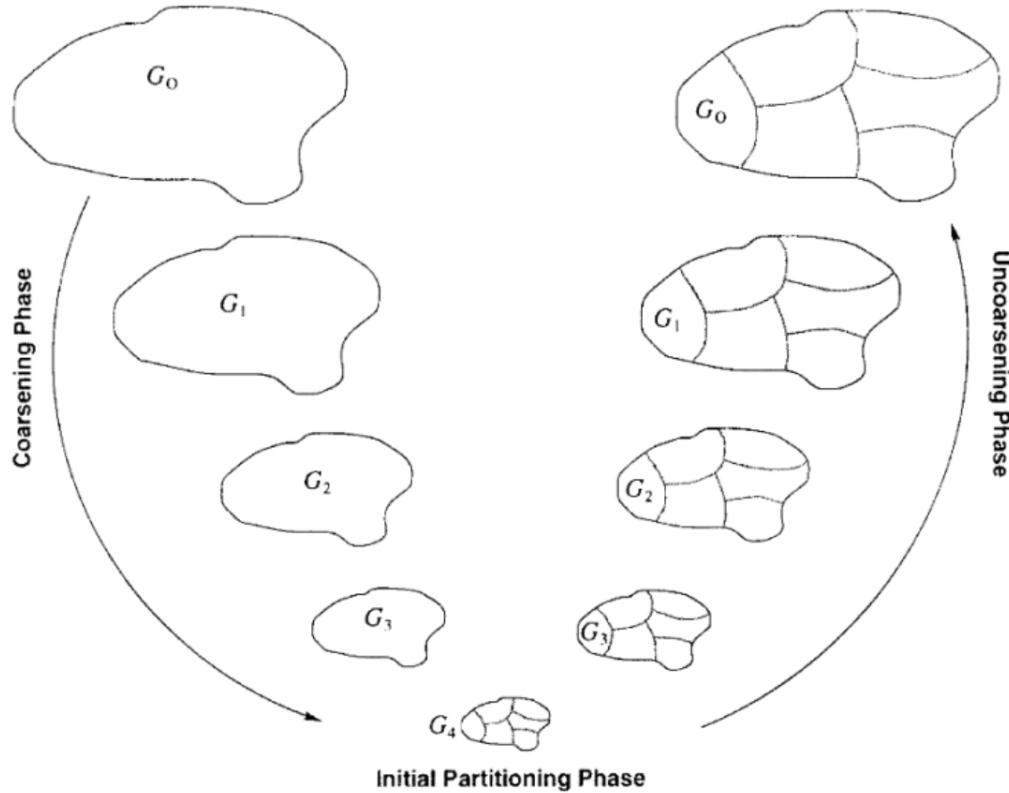
Inną klasą metod są metody geometryczne [20, 29, 21, 22, 25]. Używają danych geometrycznych o grafie w celu znalezienia dobrego partycjonowania. Ich cechą charakterystyczną jest relatywnie krótki czas wykonania, natomiast gorsze rezultaty podziału niż metody spektralne. Najlepsze wyniki spośród wyżej wymienionych metod prezentują [21, 22]. W artykule [21] zaproponowane klasę grafów zwaną k -overlap graphs. Dla grafów k -overlap osadzonych w d wymiarach [33] udowadniają istnieje separatora wielkości $O(k^{1/d}D^{d-1/d})$. Oznacza to, że dla grafu o N wierzchołkach istnieje podzbiór wierzchołków o wcześniej wymienionej wielkości, który po usunięciu rozłącza graf na dwie podobnej wielkości części. Wyniki w tym artykule unifikują kilka wcześniejszych wyników dla obliczania separatorów. Ponadto autorzy proponują rozwiązanie, które oblicza separatory w czasie liniowym. W artykule [22] opisano efektywną metodę partycjonowania siatek niestrukturalnych, która występuje w metodach elementów skończonych i różnic skończonych. Podejście to wykorzystuje strukturę geometryczną danej siatki i znajduje dobre partycjonowanie w czasie $O(n)$. Można je aplikować do siatek w dwóch i trzech wymiarach. Ma zastosowanie w wydajnych algorytmach sekwencyjnych i równoległych do rozwiązywania rozbudowanych problemów w obliczeniach naukowych. Charakterystyką metod geometrycznych jest to, że z powodu losowej natury wymagane jest wielokrotne użycie algorytmu (od 5 do 50 razy) aby uzyskać wynik porównywalny z metodami spektralnymi. Wielokrotnie wywołanie zwiększa czas otrzymywania rezultatu, natomiast jest on wciąż niższy od metod spektralnych. Metody geometryczne są aplikowalne tylko w przypadku kiedy dostępne są współrzędne wszystkich wierzchołków w grafie. Dla wielu dziedzin problemów (programowanie liniowe, VLSI), nie otrzymujemy współrzędnych wraz z grafem. Istnieją algorytmy, które są w stanie obliczyć współrzędne dla wierzchołków grafu [4] wykorzystując metody spektralne ale są bardzo kosztowne i dominują czas potrzebny na samo partycjonowanie grafu. Implementacje tego typu metod nie znalazły się wśród algorytmów state-of-the-art dla problemu partycjonowania grafów, więc nie były brane pod uwagę w kontekście niniejszej pracy.



Rysunek 5: Rekursywne partycjonowanie mapy USA - pierwszy obrazek od góry - za pomocą algorytmu z artykułu [22]. Dwa następne obrazki prezentują rezultat. Dane geometryczne używane są do obliczenia separatorów.

2.4. Metody wielopoziomowe

Istnieje wiele implementacji metod wielopoziomowych: [16, 32, 3, 5, 10, 9, 11, 8, 19]. Cechą charakterystyczną tego podejścia jest redukcja wielkości grafu poprzez łączenie wierzchołków i krawędzi, następnie dzielenie zmniejszonego grafu na partycje, ostatnią fazą jest przywrócenie początkowego grafu zachowując podział. Często graf zmniejszany jest aż liczba wierzchołków nie osiągnie liczby partycji, którą chcemy otrzymać [24], a fazie przywracania grafu do początkowej wielkości towarzyszy algorytm, którego celem jest ulepszanie podziału [6, 7]. Algorytm ten, bazując na zmniejszonym grafie, niesie za sobą niższy koszt obliczeniowy. Jego działanie polega na zmniejszaniu długości granic pomiędzy partycjami z jednoczesnym zachowaniem ich wielkości. Na tym etapie może także zostać dodana faza balansowania, która stopniowo zmniejsza różnice w wielkości pól pomiędzy obszarami. Metody te zostały stworzone z myślą o zmniejszeniu czasu patrycjonalowania kosztem jakości. Obecnie dają jednak bardzo dobre rezultaty również w kwestii jakości podziału. Późniejsze prace w dziedzinie tych algorytmów pokazały, że dają one lepsze rezultaty niż metody spektralne [16]. Biblioteki jak Party [24], Metis [16], Jostle [32], Chaco [11], dające state-of-the-art wyniki w kwestii jakości partycjonowania najczęściej bazują na schemacie wielopoziomowym [11].

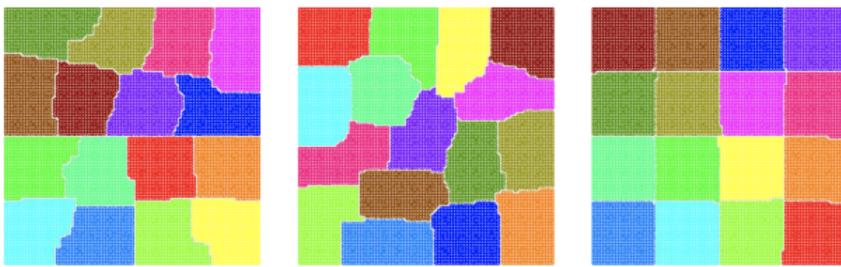


Rysunek 6: Wielopoziomowe partycjonowanie grafu przedstawiające fazę zmniejszania grafu, następnie przypisanie partycji na zmniejszonym grafie, na końcu przywrócenie grafu do początkowej wielkości. Źródło: [14].

2.5. Porównanie istniejących metod wielopoziomowych

Wszystkie wyżej wymienione metody nie biorą pod uwagę problemu obszarów niepodzielnych oraz obszarów wyłączonych z obliczeń. W związku z tym celem niniejszej pracy stało się znalezienie metody dającej możliwie najlepsze rezultaty w zakresie partycjonowania grafów oraz dostosowanie jej do wyżej wymienionych rozszerzeń problemu partycjonowania.

Metody wielopoziomowe są najlepszym wyborem, z racji na to, że gwarantowały najlepsze wyniki partycjonowania. Przykładów metod wielopoziomowych jest bardzo dużo [16, 32, 3, 5, 10, 9, 11, 8, 19], jednak skupiłem się głównie na tych, które dawały wyniki state-of-the-art. Były to biblioteki: Party [24], Metis [16], Jostle [32], Chaco [11].



Rysunek 7: Partycjonowanie siatki 100x100 na 16 obszarów. Od lewej - pmetis [16] używa edge-cut wynoszący 688, następnie Jostle [32] z wynikiem 695 oraz Party [24] z wynikiem 615. Źródło: [24].

Do zmniejszenia grafu stosowane są różne warianty matching algorithm (algorytm do budowania skojarzeń w grafie). Porównanie większości z nich można znaleźć w [13]. Przykładowo biblioteka Jones oraz Bui [3] używa random weighted matching, natomiast Party [24] stosuje LAM matching [28]. Ze względu na wymagania co do złożoności obliczeniowej wszystkie metody używają heurystyk. Wszystkie z tych metod zmniejszają graf, jednak tylko Jostle i Party zmniejsza graf aż do otrzymania liczby wierzchołków równej liczbie partycji, na które chcemy podzielić wejściowy graf. Dzięki temu metoda partycjonowania, działająca na najmniejszym możliwym grafie, jest dużo prostsza niż w pozostałych metodach. Kiedy graf jest zmniejszony, wierzchołki są przyporządkowywane do partycji a informacja na temat partycji jest propagowana do wierzchołków na wyższych poziomach zgodnie z partycją ich reprezentantów na najbliższym poziomie. Ten proces prowadzi do partycjonowania początkowego grafu. Faza zmniejszania grafu jest ponadto stosunkowo łatwa do zrównoleglenia [15]. Fazą, która nie podlega zrównolegleniu jest faza ulepszania istniejącego podziału. Najczęściej bazuje ona na metodzie Fiduccia-Mattheysesa [7], która jest zoptymalizowaną pod kątem czasu działania heurystyką Kernighan-Lin (KL) [17]. Artykuł [17] podejmuje problem partycjonowania wierzchołków grafu, którego krawędzie mają przyporządkowane wagi - koszt. Jego celem jest ustanowienie podziału na obszary o wybranej wielkości wraz ze zminimalizowaniem sumy kosztów na wszystkich granicach. Artykuł [7] przedstawia heurystykę do poprawiania partycjonowania sieci. Algorytm ten przesuwa pojedyncze komórki pomiędzy blokami wraz z utrzymaniem oczekiwanej rozmiaru bloków. W przeciwieństwie do Metis i Jostle, faza ulepszania partycjonowania używana przez bibliotekę Party bazuje na metodzie Helpful-Sets (HS). Heurystyka Helpful-Set

wywodzi się z obserwacji teoretycznych wykorzystywanych do znajdowania górnych granic szerokości bisekcji grafów regularnych [12, 23]. Szerokość bisekcji to minimalna liczba krawędzi, która musi zostać usunięta w celu podzielenia grafu na dwie równej wielkości części, lub różniące się wielkością o maksymalnie jeden wierzchołek. Party otrzymuje bardzo dobre wyniki stosując tę metodę [30], często uzyskując mniejszą długość granic pomiędzy obszarami niż Metis czy Jostle, jednocześnie jest tylko trochę bardziej kosztowna obliczeniowo. Heurystyka Helpful-Sets jest metodą bazującą na wyszukiwaniu lokalnym. Zaczynając od początkowej bisekcji π dąży do zminimalizowania długości granicy za pomocą lokalnie wprowadzanych zmian. Najważniejsza różnica względem metody KL polega na tym że KL przemieszcza tylko pojedyncze wierzchołki, natomiast HS zbiory wierzchołków. Zarówno Party, Metis, jak i Jostle pozwalały na małe nierówności w kwestii wielkości obszarów co przekłada się na mniejsze długości granic, szczególnie na głębszych poziomach, kiedy przemieszczane są wierzchołki o dużych wagach - ciężko wtedy otrzymanie idealnie równych obszarów.

Biblioteka Party [24] okazała się dawać najlepsze rezultaty w porównaniu do innych bibliotek dających wyniki state-of-the-art. Szczególną własnością Party była znacznie niższa długość granic w porównaniu do pozostałych bibliotek (Rysunek 7), co było bardzo ważne dla mojej pracy. Dlatego to właśnie metodę z biblioteki Party zdecydowałem się wybrać jako podstawę rozwiązania prezentowanego w niniejszej pracy.

3. Opis algorytmu

W tym rozdziale w szczegółach opisany zostanie algorytm podziału siatki, który został zaimplementowany na potrzeby niniejszej pracy. W ramach algorytmu podziału siatki, zakładając m node'ów, każdy zawierający k rdzeni, wyróżnię dwa następujące etapy:

1. Podział siatki na $m \cdot k$ obszarów.
2. Podział siatki podzielonej na $m \cdot k$ obszarów na m obszarów.

W ramach etapu podziału siatki na $m \cdot k$ obszarów wyróżnię następujące podetapy:

1. mapowanie wejściowego pliku graficznego przedstawiającego początkową siatkę na graf,
2. zmniejszanie grafu algorytmem LAM [28] do liczby wierzchołków równej liczbie partycji, na które chcemy podzielić wejściową siatkę,
3. przypisanie numerów partycji do wierzchołków w zmniejszonym grafie,
4. stopniowe przywracanie grafu z jednoczesnym wyrównaniem krawędzi [30] oraz balansowaniem pól obszarów (mniejsze obszary powiększają się kosztem większych),
5. usunięcie obszarów rozproszonych.

W ramach etapu podziału siatki na m obszarów wyróżnię następujące podetapy:

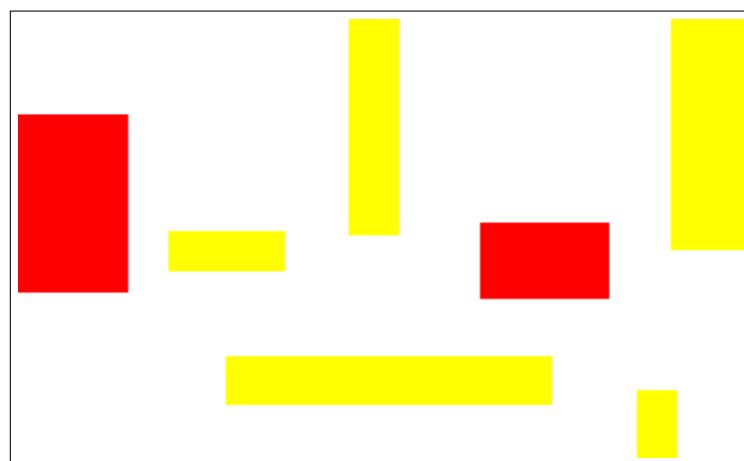
1. zmniejszanie grafu algorytmem LAM [28] do liczby wierzchołków równej liczbie partycji, na które chcemy podzielić wejściową siatkę,
2. przypisanie numerów partycji do wierzchołków w zmniejszonym grafie,
3. udoskonalenie podziału.

3.1. Podział siatki na $m \cdot k$ obszarów

W ramach etapu podziału siatki na $m \cdot k$ obszarów wyróżniam konwersje pliku graficznego na graf, redukcje rozmiaru grafu, podzielenie zredukowanego grafu oraz przywrócenie grafu do początkowego rozmiaru wraz z wprowadzeniem optymalizacji podziału (wyrównanie pól i zmniejszenie długości granic pomiędzy partycjami).

3.1.1. Konwersja pliku graficznego na graf i redukcja obszarów niepodzielnych

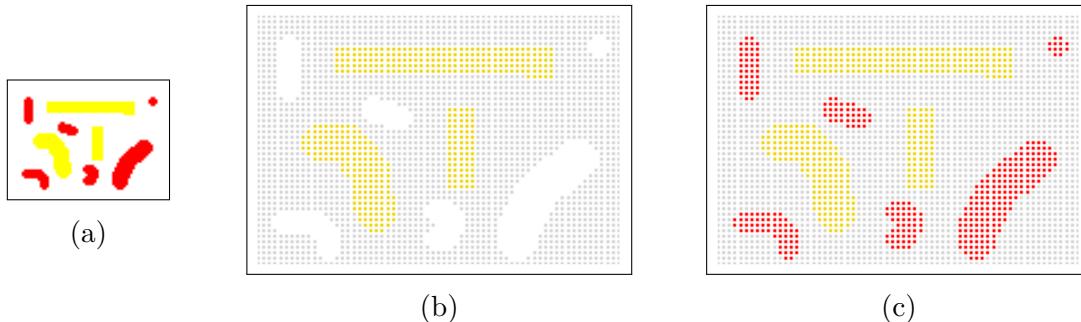
Pierwszą częścią algorytmu jest tworzenie grafu, na podstawie siatki, która dostarczana jest jako dana wejściowa. Siatka jest w formie pliku graficznego. Przykład takiego pliku przedstawiony jest na rysunku 8. Jeden piksel na siatce reprezentuje jeden wierzchołek w grafie, na którym dokonywane będzie partycjonowanie. Kolor piksela decyduje o tym, jakiego typu wierzchołkiem będzie dany piksel oraz do jakiego typu obszaru należy. Wierzchołki, które są tego samego koloru oraz są do siebie sąsiednie przyporządkowywane są do tego samego obszaru. Żółte piksele interpretowane są jako wierzchołki obszarów niepodzielnych, natomiast czerwone piksele jako wierzchołki obszarów wyłączonych z obliczeń, białe piksele to wierzchołki zwyczajne. Obszary wyłączone z obliczeń mogą być używane do zaznaczenia fragmentów siatki, na których wiemy, że symulacja nie będzie miała miejsca. Przykładowo mogą być to ściany budynku lub pomieszczenia, które są wyłączone z symulacji. Obszary niepodzielne to obszary, o których z jakiś powodów wiemy, że nie powinny być podzielone na partycje. Na przykład mogą być to wejścia do budynków. Przynależność wierzchołków do konkretnych grup wpływa na ich parametry w grafie, jak na przykład waga. Może również prowadzić do tego, że nie pojawią się na grafie. Ta część algorytmu, choć stosunkowo mało skomplikowana, jest kluczową dla niniejszej pracy. W związku z tym, że autorzy artykułu [24] nie zawarli informacji w jakiej formie dostarczany był wejściowy graf, ta część algorytmu była zrealizowana w całości przez mnie. Efekt zamiany siatki na graf widoczny jest rysunku 9.



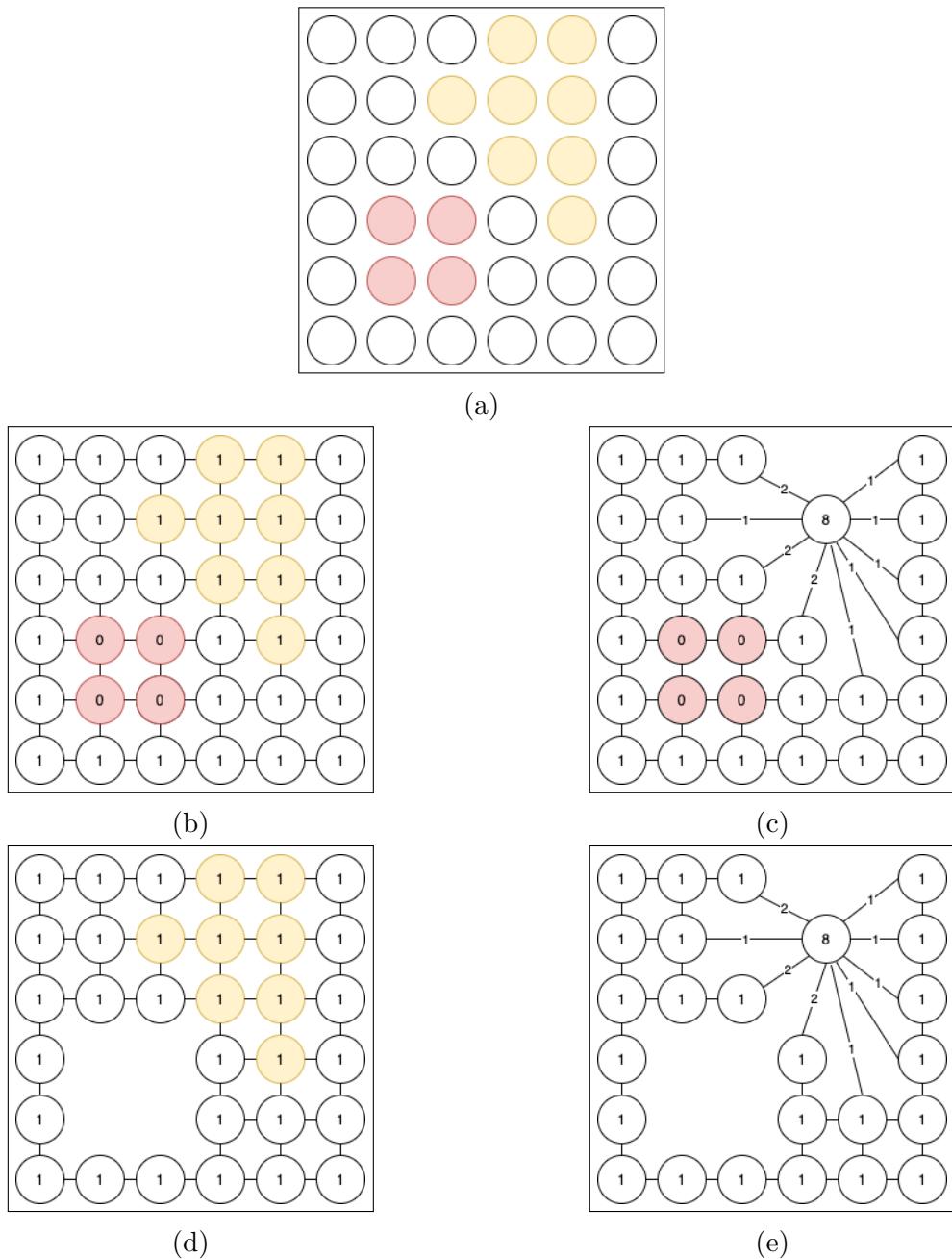
Rysunek 8: Obrazek, który reprezentuje strukturę siatki do podziału. Żółte obszary to obszary niepodzielne, czerwone to te wyłączone z obliczeń, białe to zwykłe przez które przechodzić będą granice podziału.

Algorytm iteruje po pikselach obrazka wejściowego i na podstawie ich koloru tworzy wierzchołki w grafie oraz buduje zbiory obszarów niepodzielnych oraz wyłączonych z obliczeń. W zbiorach przechowywane są numery wierzchołków. Na początku każda krawędź pomiędzy wierzchołkami ma wagę 1. Zwykłe wierzchołki oraz wierzchołki obszarów niepodzielnych otrzymują wagę 1. Wierzchołki obszarów wyłączonych z obliczeń mogą mieć przyporządkowaną wagę 0 lub nie być mapowane na wierzchołki w grafie, tworząc puste przestrzenie między wierzchołkami. Każdy wierzchołek w grafie ma parametr, który określa jakim typem obszaru jest. Kolejnym etapem jest redukcja obszarów niepodzielnych do pojedynczych wierzchołków. Każdy obszar niepodzielnny zamieniany jest na wierzchołek o wadze równej sumie wag wierzchołków tego obszaru. Od teraz wierzchołki, które reprezentują obszary niepodzielne, nie są więcej rozróżniane jako obszary niepodzielne - stają się zwykłymi wierzchołkami. Ten proces przedstawiony jest na rysunku 10.

W dalszych częściach algorytmu następuje partycjonowanie oraz przemieszczanie wierzchołków między partycjami. Wszystkie te operacje będą następowały na grafie z przynajmniej zredukowanymi obszarami niepodzielonymi. Do tych operacji graf może być zredukowany bardziej, nigdy mniej. W ten sposób obszary niepodzielne zawsze traktowane są jako całość, nigdy nie zostaną odłączone od nich żadne pojedyncze wierzchołki. Wierzchołki wyłączone z obliczeń mają wagę 0, ponieważ później wykorzystywane algorytmy do partycjonowania grafu operują głównie na parametrze wagi wierzchołków. Waga wierzchołka w zredukowanym grafie symbolizuje ile wierzchołków z grafu początkowego reprezentuje, a to ma wpływ na balansowanie pól obszarów. Chcemy, aby partie były równe pod względem wierzchołków, na których będą występować obliczenia. Ustawianie wagi na 0 oznacza, że taki wierzchołek nie jest brany pod uwagę w wyrównywaniu pól obszarów, jest bez znaczenia dla algorytmu, może być dowolnie przemieszczany pomiędzy partycjami.



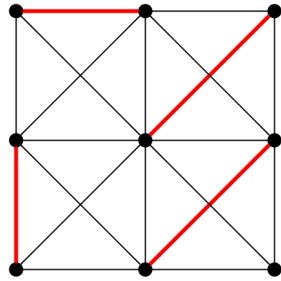
Rysunek 9: Obrazek (a) przedstawia obrazek wejściowy w rzeczywistym rozmiarze. Obrazki (b) oraz (c) przedstawiają powstały graf. Obrazek (b) przedstawia sposób podejścia do obszarów wyłączonych z obliczeń, gdzie nie tworzone są odwzorowujące je wierzchołki, obrazek (c) pokazuje podejście gdzie w ich miejsce tworzone są wierzchołki z wagą 0. Dla czytelności wierzchołki zwykłe zostały oznaczone kolorem szarym.



Rysunek 10: Obrazek (a) to wejściowa siatka. Obszary niepodzielne są żółte, natomiast wyłączona z obliczeń czerwone. Obrazek (b) oraz (d) pokazują siatkę tuż po konwersji na graf wedle dwóch sposobów. Sposób (b) nadaje wierzchołkom na obszarach wyłączonych z obliczeń wagę 0, natomiast sposób (d) usuwa wierzchołki obszarów wyłączonych z obliczeń. Na wierzchołkach zaznaczona jest waga. Można zaobserwować wagę 1 dla wierzchołków zwykłych i tych budujących obszary niepodzielne. Na tym etapie wszystkie krawędzie mają wagę 1. Obrazek (c) oraz (e) przedstawiają ten sam graf po redukcji obszarów niepodzielnych, odpowiednio z kroku (b) oraz (d). Wierzchołek, do którego zostało zredukowany obszar niepodzielnego otrzymuje powiększoną wagę, równą sumie wag wierzchołków, które redukuje. Niektóre krawędzie, które zastąpiły dwie krawędzie, zyskują sumę wag tych krawędzi równą 2.

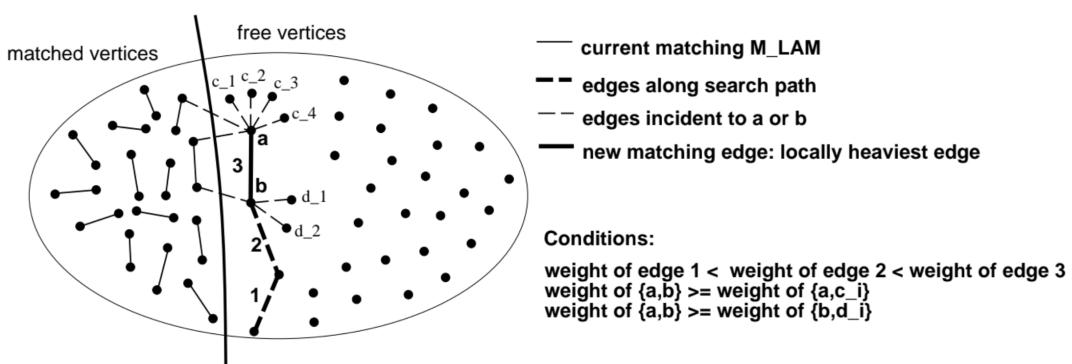
3.1.2. Zmniejszanie i partycjonowanie grafu za pomocą algorytmu LAM

Aby stworzyć mniejszy odpowiednik wejściowego grafu aplikowany jest algorytm tworzący skojarzenia (ang. matching). Skojarzenie to podzbiór krawędzi grafu (ozn. M) o tej własności, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej krawędzi z M . Pary wierzchołków połączone bezpośrednio krawędzią należącą do M są skojarzone przez M [34].



Rysunek 11: Skojarzenie największe, którego liczba krawędzi wynosi 4. Źródło: [34].

W celu zmniejszenia grafu aplikowana jest heurystyka, która bazuje na metodzie [28]. Algorytm ten oblicza 2-approximation dla problemu maximum weighted matching w czasie liniowym. Algorytm ten startuje od arbitralnej krawędzi i sprawdza sąsiednie krawędzie. Tak, jak długo jest w stanie znaleźć sąsiednią krawędź z wyższą wagą, algorytm wywołuje się na niej i powtarza tę procedurę aż znajdzie krawędź z lokalnie najwyższą wagą. Ta krawędź łączy dwa wierzchołki, które zostaną skojarzone. W ten sposób skonstruowany algorytm dąży do budowania obszarów, które są możliwe "zwarte", innymi słowy oznacza to, że granice między obszarami są możliwe krótkie oraz niepostrzępione. Krawędzie z wysokimi wagami to krawędzie między wierzchołkami, które reprezentują zbiory wierzchołków, które w początkowym grafie miały między sobą długą granicę. Proces działania algorytmu pokazany jest na rysunku 15.



Rysunek 12: Fragment przebiegu algorytmu LAM. Startując z wybranej arbitralnie krawędzi numer 1, ścieżka buduje się przez krawędzie z lokalnie wyższymi wagami - krawędź numer 2 oraz 3 - aż do znalezienia krawędzi $\{a, b\}$ z lokalnie największą wagą. (Pokazywane są tylko krawędzie z aktualnego wywołania algorytmu LAM, krawędzi znajdujące się na ścieżce oraz krawędzi sąsiadujące do $\{a, b\}$). Źródło: [28].

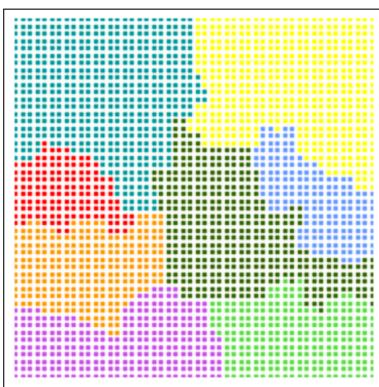
```

1 PROCEDURE shrink graph ( $G$ )
2    $t = 0$  /* number of episodes */
3   WHILE  $|V_G| \neq$  number of partitions we want to achieve
4     matched_vertices = run LAM-Algorithm on  $G$ 
5     shrink  $G$  based on the matched_vertices
6      $t = t + 1$ 
7   ENDWHILE
8
9
10 LAM-Algorithm
11    $M_{LAM} := \emptyset$ ; /* empty matching at the start */
12    $U := E$ ; /* all edges are unchecked at the start */
13   WHILE ( $U \neq \emptyset$ )
14     take arbitrary edge  $\{a, b\} \in U$ ;
15     try match ( $\{a, b\}$ );
16   ENDWHILE
17
18
19 PROCEDURE try match ( $\{a, b\}$ )
20    $C_{\{a,b\}}(a) := \emptyset$ ;  $C_{\{a,b\}}(b) := \emptyset$ ; /* empty local sets of checked edges at the
      start */
21   WHILE ( $a$  is free AND  $b$  is free AND ( $\exists \{a, c\} \in U$  OR  $\exists \{b, d\} \in U$ ))
22     IF ( $a$  is free AND  $\exists \{a, c\} \in U$ )
23       move  $\{a, c\}$  from  $U$  to  $C_{\{a,b\}}(a)$ ; /* move from  $U$  to  $C$  */
24       IF ( $w(\{a, c\}) > w(\{a, b\})$ )
25         try match ( $\{a, c\}$ ); /* call heavier edge */
26       ENDIF
27     ENDIF
28     IF ( $b$  is free AND  $\exists \{b, d\} \in U$ )
29       move  $\{b, d\}$  from  $U$  to  $C_{\{a,b\}}(b)$ ; /* move from  $U$  to  $C$  */
30       IF ( $w(\{b, d\}) > w(\{a, b\})$ )
31         try match ( $\{b, d\}$ ); /* call heavier edge */
32       ENDIF
33     ENDIF
34   ENDWHILE
35   IF ( $a$  is free AND  $b$  is free AND  $\{a, b\}$  can be matched)
36     add  $\{a, b\}$  to  $M_{LAM}$  /* new matching edge  $\{a, b\}$  */
37   ELSE IF ( $a$  is matched AND  $b$  is free)
38     move edges  $\{\{b, d\} \in C_{\{a,b\}}(b) \mid d$  is free $\}$  back to  $U$ ;
39   ELSE IF ( $b$  is matched AND  $a$  is free)
40     move edges  $\{\{a, c\} \in C_{\{a,b\}}(a) \mid c$  is free $\}$  back to  $U$ ;
41   ENDIF

```

Algorytm 1: Kod przedstawiający ulepszony algorytm LAM. Wprowadzone przeze mnie zmiany dotyczyły warunku skojarzenia wierzchołków oraz końcowych instrukcji warunkowych, które mogły zostać uproszczone z racji na brak potrzeby tworzenia zbioru krawędzi do usunięcia - R . Niezmodyfikowany kod algorytmu można znaleźć w artykule [28].

Algorytm 1 przedstawia procedury służące do zmniejszania grafu. Jest to algorytm opisany w [28]. Końcowe efekty jego działania można obserwować na rysunku 13 oraz 14. Został ulepszony o bardziej rozbudowany warunek na łączenie wierzchołków oraz uproszczony o zbiór R , odpowiedzialny za przechowywanie krawędzi do usunięcia. Startuje z pustym zbiorem skojarzeń M_{LAM} . Zbiór U przechowuje nieodwiedzone krawędzie ($U = E$ na starcie). Główną częścią algorytmu jest pętla WHILE (linia numer 13), która wywołuje procedurę 'try match' z arbitralnie wybraną, nieodwiedzoną krawędzią $\{a, b\}$. Ta krawędź nie jest dodawana do zbioru skojarzeń dopóki wszystkie sąsiednie krawędzie prowadzące do wolnych wierzchołków (ang. free vertices) nie są sprawdzone w poszukiwaniu nowej krawędzi z wyższą wagą - następuje to w pętli WHILE w linii numer 21. Każde wywołanie procedury 'try match' ($\{a, b\}$) przechowuje swoje własne zbiory lokalnie odwiedzonych krawędzi $C_{\{a,b\}}(a)$ oraz $C_{\{a,b\}}(b)$, w zależności od tego czy nieodwiedzone krawędzie są sąsiadujące z wierzchołkiem a czy b . Jeśli wierzchołki a i b są wolne oraz co najmniej jeden z nich jest wierzchołkiem należącym do jednej z nieodwiedzonych krawędzi, nieodwiedzona krawędź jest sprawdzana dalszymi instrukcjami. Jeśli ma wyższą wagę od krawędzi $\{a, b\}$, 'try match' wywołuje się na niej rekursywnie. Rekursywne wywołania są powtarzane aż do znalezienia krawędzi z lokalnie najwyższą wagą. Następnie krawędź dodawana jest do M_{LAM} , a algorytm zakończa aktualne wywołanie 'try match' i kontynuuje pętlę WHILE sprawdzając kolejne sąsiadujące krawędzie. Pętla WHILE zakończa się wtedy, gdy a oraz/lub b zostaną skojarzone w rekursywnym wywołaniu lub jeśli nie mają więcej sąsiednich, nieodwiedzonych krawędzi. Następnie w końcowej części składającej się z instrukcji warunkowych następuje sprawdzenie czy a oraz b są wolne. Jeśli tak, to $\{a, b\}$ jest dodawane do M_{LAM} . W tej części, w oryginalnym algorytmie uzupełniany jest zbiór wierzchołków do usunięcia [28] - R . Ponadto jeśli a lub b są wolne to wszystkie krawędzie, które zostały odwiedzone w aktualnym wywołaniu, zawierające w sobie wierzchołek a lub b , zostają oznaczone jako nieodwiedzone - są przenoszone do zbioru U .



(a) partycjonowanie 1

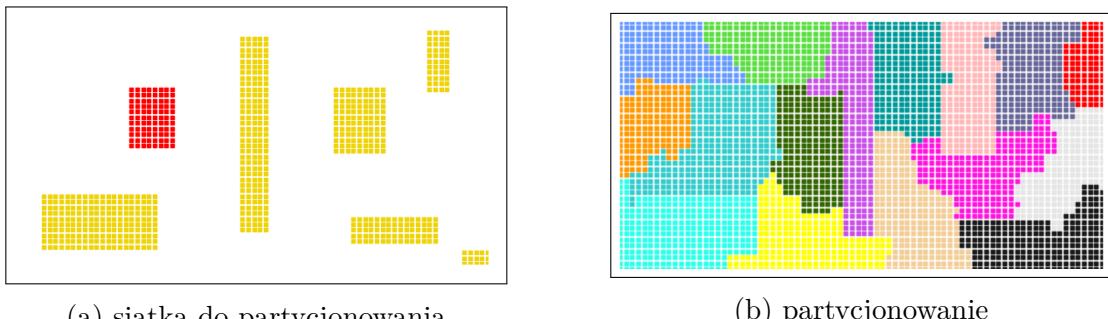


(b) partycjonowanie 2

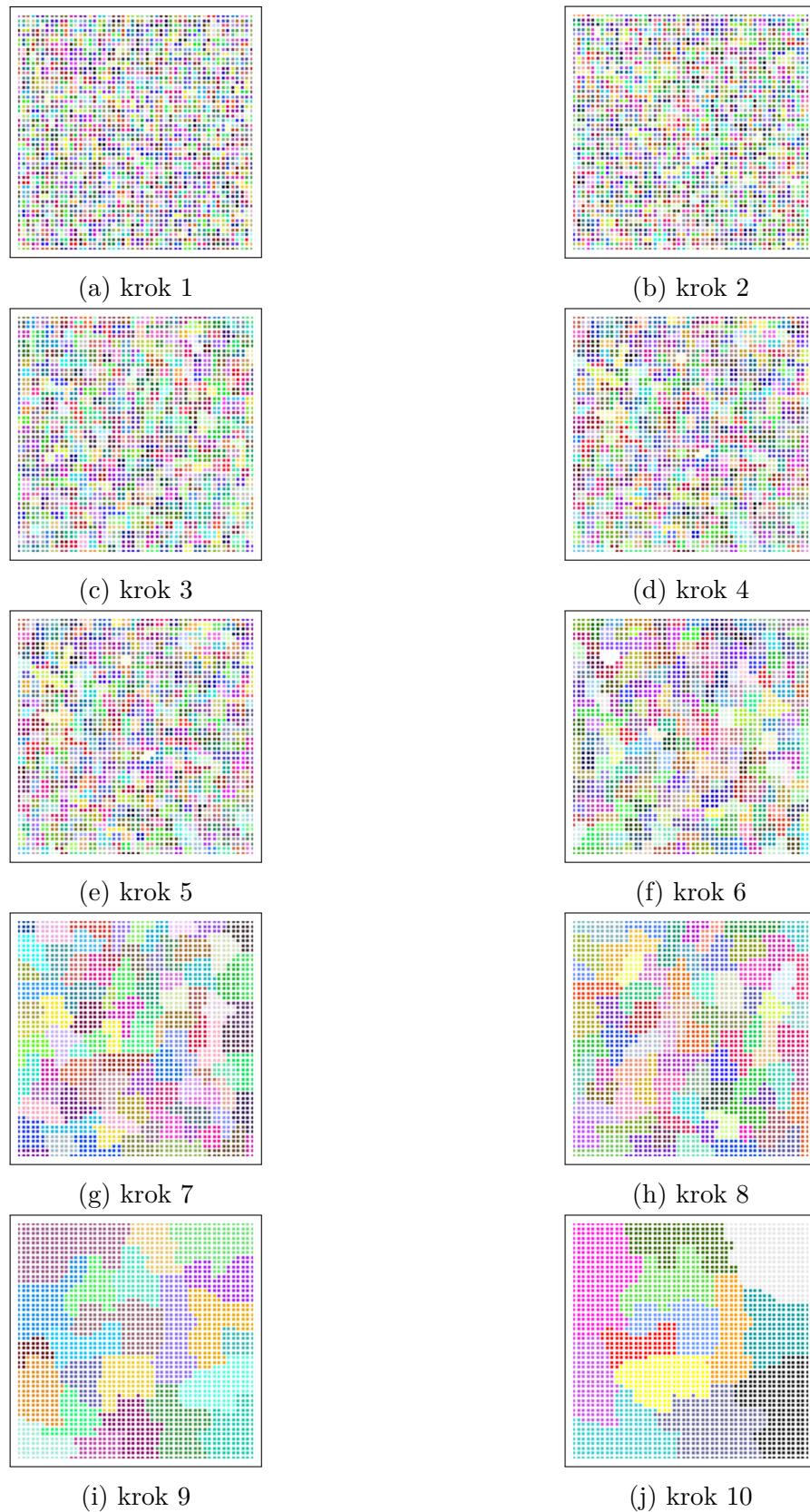
Rysunek 13: Dwa losowo wybrane partycjonowania siatki 50x50 na 8 obszarów za pomocą samego algorytmu LAM - bez fazy ulepszania podziału. Granice podziałów nie są optymalne, pola obszarów nie są równe - podział jest jednak bliski bycia równym w kwestii pól co jest oczekiwana i dobrą bazą do dalszych operacji. Algorytm ma charakterystykę losową, to znaczy, że każde wywołanie będzie dawać inny rezultat. Zawsze jednak zachowane będzie dążenie do równych i zwartych obszarów.

Pętla WHILE w 21 linii sprawdza krawędzie sąsiadujące z wierzchołkiem a oraz b tylko jeśli obydwa wierzchołki są wolne. Ta cecha jest używana przez autorów artykułu do udowodnienia liniowej złożoności algorytmu.

Nieodwiedzone krawędzie zawarte w U mają taką właściwość, że obydwa należące do nich wierzchołki są wolne. Nowe krawędzie są przenoszone ponownie do U w końcowej części z instrukcjami warunkowymi, ale tylko jeśli obydwa ich wierzchołki są wolne. Tak skonstruowany algorytm jest uruchamiany wielokrotnie przez procedurę 'shrink graph', aż do kiedy liczba wierzchołków w grafie nie osiągnie liczby partycji, na które chcemy podzielić wejściową siatkę. Po każdym wywołaniu algorytmu LAM uruchamiana jest procedura, która zamienia skojarzone pary wierzchołków na pojedyncze wierzchołki wraz ze zmianą wagi. Wyjątkiem jest ostatnie wywołanie, kiedy liczba wierzchołków w grafie osiąga wartość docelową. Wtedy łączonych jest pierwsze n par wierzchołków, tak by otrzymać wymaganą liczbę wierzchołków. Waga wierzchołka powstałego ze skojarzenia jest sumą wag wierzchołków kojarzonych. Jeśli na skutek skojarzenia powstaje krawędź, która zastępuje kilka krawędzi to jej waga jest sumą wag tych krawędzi. Następnie do wierzchołków przyporządkowywane są numery partycji. Zwykle jedno wywołanie algorytmu LAM tworzy liczbę skojarzeń niewiele mniejszą niż połowa liczby wierzchołków w grafie. W ten sposób graf, szczególnie w początkowych wywołaniach, zmniejszany jest o około połowę po każdym wywołaniu algorytmu LAM.



Rysunek 14: Obrazek (b) przedstawia partycjonowanie siatki (a) samym algorytmem LAM. Widoczne jest uwzględnianie obszarów niepodzielnych, które na siatce (a) zaznaczone są jako obszary żółte.



Rysunek 15: Obrazki przedstawiają wybrane, kolejne kroki algorytmu LAM aż do otrzymania podziału siatki 50×50 na 13 obszarów. Nie są to wszystkie kroki. Rysowane było co siódme wywołanie algorytmu oraz efekt końcowy. Widoczne jest równomierne łączenie obszarów.

3.1.3. Szczegóły modyfikacji algorytmu LAM

Algorytm ten bez dodatkowego warunku na skojarzenie wierzchołków (linia 35) zwykle tworzyłby grafy typu gwiazda, co oznacza, że powstawałaby część wierzchołków o bardzo wysokim stopniu. To powodowałoby, że zmniejszony graf nie przypominałby początkowego grafu. Warunek ten został dodany przez autorów artykułu [28] i mówi, że skojarzenie wierzchołka a z wierzchołkiem b może zaistnieć tylko wtedy, jeśli ich sumaryczna waga nie przekracza dwukrotności najmniejszej wagi wierzchołka w grafie zsumowanej z największą wagą wierzchołka w grafie.

$$w_a + w_b \leq w_{\text{highest}} + 2 \cdot w_{\text{lowest}} \quad (1)$$

Warunek 1 powoduje, że nawet jeśli rozpatrujemy skojarzenie wierzchołka o relatywnie wysokiej wadze, to ma on szansę zostać skojarzony jedynie z wierzchołkiem o wadze niskiej, co prowadzi do równiejszych wag w grafie. Przy dalszych etapach zmniejszania grafu trudniej spełnić warunek na skojarzenie wierzchołków - pojawia się więcej różnorodności w kwestii wag wierzchołków grafu, spada więc liczba udanych skojarzeń przypadających na wywołanie. W momencie, kiedy zbyt mało par jest kojarzonych podczas pojedynczego wywołania, warunek ten jest osłabiany poprzez zwiększenie dopuszczalnej sumarycznej wagi wierzchołka a oraz b .

Warunek stworzony przez autorów artykułu [28] okazał się nie działać w kontekście obszarów niepodzielnych. W tym celu stworzony został nowy, zmodyfikowany warunek 3, który jest warunkiem 1 rozszerzonym o *discount* (wzór 2).

$$\text{discount} = \frac{t}{T \cdot \frac{w_{\text{highest}}}{w_{\text{lowest}} + 1} \cdot \log(\text{number_of_partitions})} \quad (2)$$

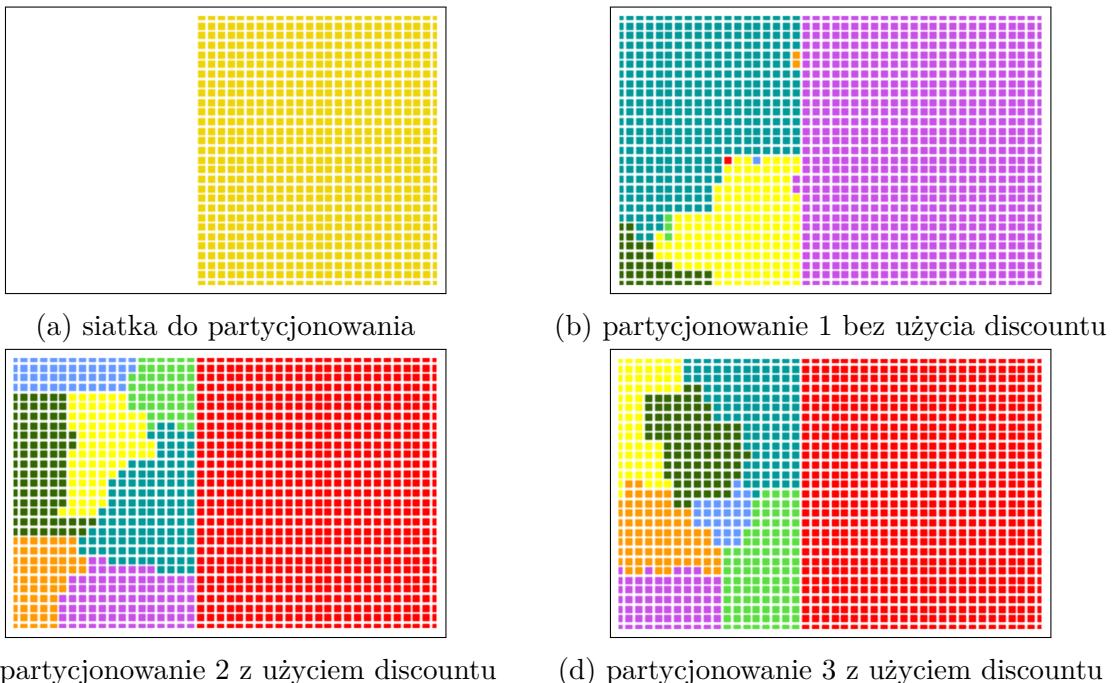
Jeśli $\text{discount} > 1$ wtedy przypisywaną ma wartość 1. T to przewidywana liczba wywołań algorytmu LAM. Obliczana jest jako liczba dzieliń liczby wierzchołków grafu przez liczbę dwa, potrzebną do uzyskania liczby wierzchołków mniejszej lub równej docelowej liczby partycji. t to licznik wywołań algorytmu LAM (linia 2). Z użyciem *discountu* powstał zmodyfikowany przeze mnie warunek na skojarzenie wierzchołków a i b :

$$w_a + w_b \leq \text{discount} \cdot (w_{\text{highest}} + 2 \cdot w_{\text{lowest}}) \quad (3)$$

Niedziałanie poprzedniego warunku, jest spowodowane faktem, że w początkowej fazie algorytmu, tuż po zamianie wejściowej siatki na graf, wszystkie obszary niepodzielne zamieniane są na pojedyncze wierzchołki. Waga dla wierzchołków reprezentujących obszary niepodzielne jest równa sumie wag wierzchołków, które do nich należą. Oryginalny algorytm LAM został zaprojektowany z założeniem o równomiernym budowaniu skojarzeń ze względu na wagę wierzchołków w grafie od samego początku. W warunku na skojarzenie wierzchołków bierze pod uwagę wierzchołek z aktualnie największą wagą oraz aktualnie najmniejszą wagą w grafie. Warunek ten funkcjonuje poprawnie, jeśli graf jest wedle niego zmniejszany równomiernie od samego początku, kiedy wagi wszystkich wierzchołków w grafie mają taką samą wartość lub niemal taką samą wartość. W momencie, w którym na samym początku pojawiają się wierzchołki o dużych wagach (z powodu zamiany wierz-

chołków należących do obszarów niepodzielnych na pojedyncze wierzchołki o wyższych wagach) warunek 1 zaczyna działać niepoprawnie. W szczególnym przypadku, jeśli taki obszar zajmuje więcej niż połowę całej siatki (rysunek 16) niemal każde skojarzenie dwóch wierzchołków, z których żaden z nich nie jest wierzchołkiem reprezentującym obszar niepodzielny, będzie dozwolone. Każdy z takich wierzchołków ma bowiem wagę mniejszą niż suma podwojonej najmniejszej wagi wierzchołka w grafie oraz największej wagi wierzchołka w grafie. Warunek 1 jest więc niemal zawsze spełniony. W tego typu przypadkach realny podział odbywa się tak naprawdę poza obszarem niepodzielnym, ponieważ wiemy, że obszar niepodzielny będzie na końcu jedną partycją, a jako że jest największym wierzchołkiem w grafie - nie będzie mógł tworzyć wielu skojarzeń. Prowadzi to do tego, że obszary kojarzone są w sposób niezachowujący równomiernych pól jak na rysunku 16(b). W efekcie w skład wielu partycji wchodzi tylko jeden wierzchołek.

Zaproponowana przeze mnie modyfikacja (wzór 2), polegająca na dodaniu *discountu*, wzmacnia warunek i powoduje bardziej równomierne (ze względu na wagi) łączenie się wierzchołków. *discount* zależny jest od liczby iteracji - osłabia się w czasie. Im późniejsza iteracja tym bliższy jest wartości 1, a więc zmierza do oryginalnego warunku 1. Ważne jest jednak, że w kluczowych, początkowych wywołaniach algorytmu LAM pozwala na równomierne skojarzenia. Efekt działania warunku widoczny jest na rysunku 16.



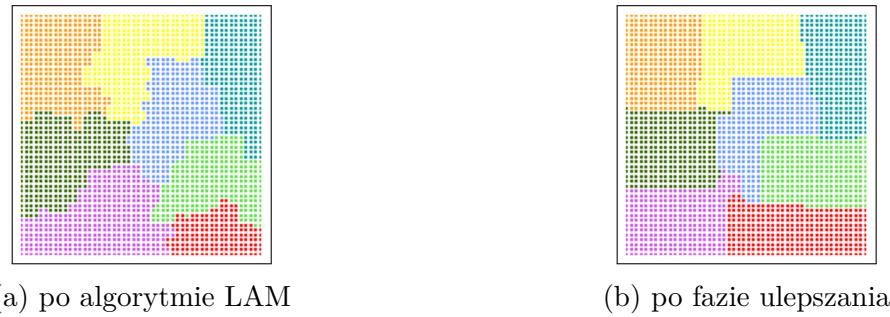
Rysunek 16: Obrazek (a) przedstawia siatkę wejściową, której więcej niż połowę zajmuje oznaczony kolorem żółtym obszar niepodzielny. Obrazek (a), (b) oraz (c) przedstawia partycjonowanie siatki na 8 części wykonane algorytmem LAM bez fazy ulepszania podziału. Obrazek (b) pokazuje partycjonowanie wykonane z użyciem warunku 1 na skojarzenie wierzchołków. Obraz (c) oraz (d) prezentują partycjonowanie wykonane z użyciem warunku 3.

Negatywnym efektem stosowania *discountu* jest większa liczba wywołań algorytmu LAM - czasami zmienna t musi urosnąć do konkretnej wartości, umożliwiającej dokonanie kolejnych, blokowanych obecnie skojarzeń, a żadne inne skojarzenia, które spełniałyby warunek nie są w danej chwili możliwe. Rysunek 16 pokazuje pozytywne działanie modyfikacji na jakość podziału, wraz z porównaniem do poprzedniej wersji warunku.

Skonstruowanie *discountu* polegało na odpowiednim dobraniu jego wartości względem parametrów dzielonej siatki, tak by nie działał zbyt agresywnie, nadmiernie przez to przedłużając obliczenia, ale jednocześnie był na tyle agresywny, aby pozwalał tylko na kojarzenie wierzchołków prowadzące do możliwie równych podziałów. Został skonstruowany na bazie podstawowego współczynnika $\frac{t}{T}$, który na podstawie wielu prób dostosowałem dodatkowymi zmiennymi w poszukiwaniu wcześniej określonego balansu. W momencie, w którym partycjonujemy obszar, w którym nie ma dużych obszarów niepodzielnych nie musimy stosować *discountu*. W takim wypadku jedynym jego efektem, będzie większa liczba wywołań algorytmu LAM.

3.1.4. Przywracanie grafu do początkowego rozmiaru wraz z ulepszeniem podziału

Kolejną częścią algorytmu jest faza przywracania grafu do początkowej wielkości. Tej fazie towarzyszy poprawianie podziału, które polega na zmniejszaniu długości granic oraz na wyrównywaniu wielkości pól pomiędzy obszarami. Ten etap nadaje podziałowi ostateczny kształt. W tym celu zaimplementowana została zmodyfikowana heurystyka Helpful Sets (HS) [30]. Efekt jej działania widoczny jest na rysunku 17.



Rysunek 17: Obrazek (a) przedstawia partycjonowanie siatki (a) samym algorytmem LAM. Obrazek (b) przedstawia ulepszenie podziału z obrazka (a). Zmniejszona została długość granic oraz wyrównane zostały pola.

Etap pierwszy to heurystyka HS do poprawiania podziału. Jest oparta na wyszukiwaniu lokalnym - próbuje poprawić aktualny podział poprzez wielokrotne wprowadzanie lokalnych zmian. Wierzchołki klasyfikowane są pod kątem liczby krawędzi z wierzchołkami obszaru do którego należą (ang. internal edges) oraz z wierzchołkami pozostałych obszarów (ang. external edges). Wedle tej klasyfikacji wierzchołki przy granicach wymieniane są między obszarami. Niech A i B będą partycjami na siatce. Algorytm dzieli się na dwie fazy. Pierwsza buduje zbiór wierzchołków C na wierzchołkach partycji A , a następnie przenosi go z partycji A do partycji B . Wierzchołki są dobierane tak, aby zmniejszyć długość granicy między obszarami. Druga faza to faza szukania zbioru balansującego D . Jest budowany na zbiorze B . Jego celem jest zwrócenie zbioru wierzchołków z partycji B do partycji A o tej samej wielkości jak zbiór C z jednoczesnym możliwie utrzymanym ulepszeniem w długości granicy po wcześniejszej fazie. Zbiór C nazywamy **k-helpful set**, natomiast zbiór D nazywamy **balancing set**. Po etapie ulepszenia granicy następuje etap drugi mający na celu wyrównywanie pól. Używając tej samej klasyfikacji wierzchołki przy granicach przenoszone są z obszarów mniejszych do większych. Te dwa etapy powtarzane są co jakiś czas podczas przywracania grafu do początkowej wielkości. Najpierw więc pracują na grafie o mniejszej liczbie wierzchołków gdzie każdy wierzchołek reprezentuje zbiór wierzchołków. W ten sposób w formie pojedynczych wierzchołków o dużych wagach efektywnie przenoszone są duże obszary. Im dalej w procesie przywracania grafu tym algorytm pracuje na większym grafie z wierzchołkami o mniejszych wagach. Podział jest już ulepszony w poprzednich wywołaniach więc może skupić się na bardziej lokalnych poprawkach.

```

1 PROCEDURE RestoreGraphWithPartitionsImprovements
2   number_of_restoration_steps_done ← 0
3   number_of_all_reductions ← reductions.length
4   WHILE number_of_all_reductions – number_of_restoration_steps_done > 0
5     reduction = reductions.pop()
6     RestoreReduction(reduction)
7     number_of_restoration_steps_done ← number_of_restoration_steps_done + 1
8     IF number_of_restoration_steps_done / number_of_all_reductions > 0.9 AND
9       floor(number_of_all_reductions mod (number_of_all_reductions · 0.03)) == 0
10    ImprovePartitioning
11  ENDIF
12 ENDWHILE
13 ImprovePartitioning
14 WHILE there are any indivisible areas:
15   area ← pop one of them
16   RestoreReduction(area)
17 ENDWHILE

```

Algorytm 2: Algorytm przedstawia główną procedurę optymalizującą długość granic.

Na algorytmie 2 przedstawiona jest główna procedura odpowiedzialna za przywrócenie grafu do początkowej wielkości wraz z wprowadzaniem optymalizacji granic. Autorzy artykułu [24], na podstawie którego stworzona została niniejsza praca, wyspecyfikowali, że do optymalizacji granic używany jest algorytm HelpfulSets, który wywoływany jest wielokrotnie na różnych etapach przywracania grafu. Nie było natomiast informacji na temat tego, jak często ten algorytm jest wywoływany oraz w jakich stadiach przywracania grafu. W związku z powyższym zaproponowałem wyżej wymienione rozwiązanie. Dodatkową modyfikacją algorytmu przywracania grafu było również wzięcie pod uwagę obszarów niepodzielnych. Pierwsza pętla WHILE (linia 4) odpowiedzialna jest za przywrócenie zwykłych redukcji, to znaczy tych, które zostały stworzone przez algorytm LAM oraz wprowadzenie ulepszeń. Inne redukcje to te, które wykonywane są na obszarach niepodzielnych zaraz po algorytmie, który zamienia obrazek przedstawiający siatkę na graf - te przywracane są na samym końcu po przeprowadzeniu optymalizacji granic.

Procedura **ImprovePartitioning** za każdym razem aktualizuje informacje o sąsiadujących obszarach, ponieważ te mogą ulec zmianie na skutek kolejnych wywołań algorytmu, a następnie iteruje po wszystkich parach sąsiadujących obszarów i wywołuje dla nich procedurę **HelpfulSet**. Pseudokod procedury **HelpfulSet** został przedstawiony na algorytmie 3. Jak wynika z kodu (linia 8) proces optymalizacji długości granic oraz pól obszarów zaczyna się dopiero, gdy graf przywrócony jest przynajmniej w 90%. Tą wartością można manipulować dowolnie, jednak powinna być ona wysoka. W momencie, kiedy pozwolimy algorytmowi optymalizować bardzo zredukowane grafy, to przesuwane na raz są bardzo duże pule wierzchołków. Algorytm do optymalizacji granic stworzony został raczej, żeby wprowadzać małe lokalne zmiany, niż przesuwać duże obszary, szybko więc w takiej sytuacji niszczyc podział zamiast go poprawiać. Efektem takiego niszczenia są obszary, które podzielone są na dwie części. Zjawisko to przedstawione jest na rysunku 28 i będzie dokładnej opisany w dalszych częściach pracy. W linii 9 widzimy także, że optymalizacja

przeprowadzana jest co pewną liczbę przywróconych redukcji. Przywrócenie jednej redukcji bowiem, to zamiana jednego wierzchołka na dwa wierzchołki, które zastąpiła, a więc jest to za mała zmiana, żeby ponowniełączyć optymalizację na całym grafie. Na podstawie doświadczenia mogę stwierdzić, że współczynniki winny być ustawione tak, aby wywoływać algorytm optymalizacji granic 5-10 razy podczas przywracania grafu. Takie wartości gwarantują dobry wynik przy niezbyt długim czasie wykonania. Więcej wywołań niekoniecznie da nam lepszy rezultat. Ta funkcjonalność została zaimplementowana przez użyciu operacji wyliczania reszty z dzielenia. W linii 13 następuje ostatnie wywołanie algorytmu optymalizacji granic już na niemal całkowicie przywróconym grafie (nie licząc obszarów niepodzielnych). Ostatnim krokiem jest przywrócenie obszarów niepodzielnych, co dzieje się w drugiej pętli WHILE w linii 14.

3.1.5. Używanie Helpful Sets w celu zmniejszenia długości granic

Heurystyka Helpful Sets startuje od początkowego podziału i za pomocą lokalnie wprowadzanych zmian zmniejsza długość granic. Algorytm startuje od poszukiwania zbioru **k-helpful**, to jest podzbioru wierzchołków ze zbioru V_1 lub V_2 , który zmniejsza długość granicy o k jeśli zostanie przeniesiony do drugiej partycji. Jeśli taki zbiór zostaje znaleziony w jednej z dwóch partycji, powiedzmy że w V_1 , to jest przenoszony do V_2 . Następnie algorytm zaczyna szukać w części V_2 , która jest aktualnie wystarczająco duża, aby zbalansować podział i zwiększyć długość granicy o maksymalnie ($k - 1$) krawędzi. Jeśli taki **balancing set** zostaje znaleziony to przenoszony jest do zbioru V_1 i proces zaczyna się od początku. Działanie algorytmu dobrze widać na rysunku 19 oraz 20. Zanim algorytm zostanie opisany dokładniej, potrzebne są definicje zbiorów helpful oraz balancing:

Definicja 1 (*diff-value wierzchołka*)

Dla wierzchołka $v \in V$ wartość *diff-value* definiujemy jako $diff(v) = ext(v) - int(v)$.

Definicja 2 (*Helpful Set*)

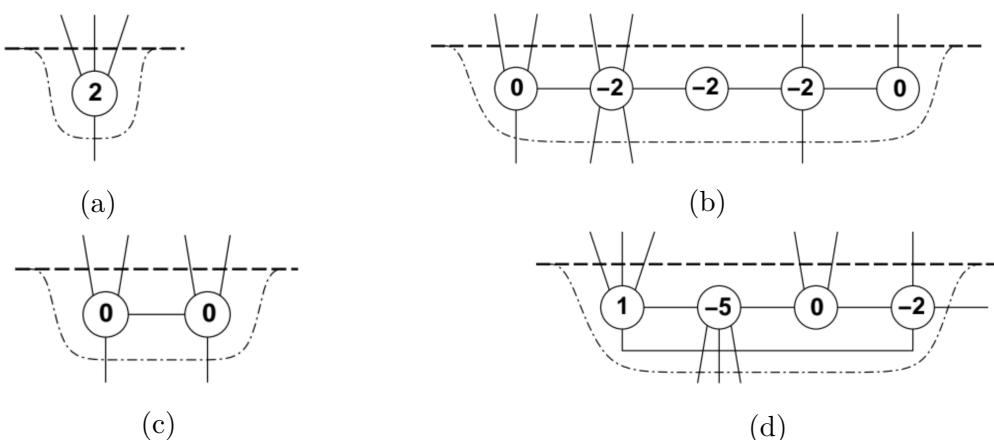
Niech $S \subset V_i, i \in \{1, 2\}$ będzie podzioborem wierzchołków partycji. Dla każdego $v \in S$ definiujemy $int_s(v) = |\{w \in S; \{v, w\} \in E\}|$ - zbiór krawędzi wewnętrznych S .

$$H(S) = \sum_{v \in S} (ext(v) - int(v) + int_s(v)) \quad (4)$$

to **helpfulness** zbioru S . Zbiór S nazywany jest $H(S)$ -**helpful**.

Przeniesienie zbioru S do drugiej partycji zmniejsza długość granicy o $H(S)$. Przykłady zbiorów 2-helpful pokazane są na rysunku 18.

Autorzy artykułu [6] zamienne używają pojęć diff-value oraz helpfulness. Postanowiłem, że będę trzymać się nazwy helpfulness zarówno dla wierzchołków, jak i dla zbiorów.

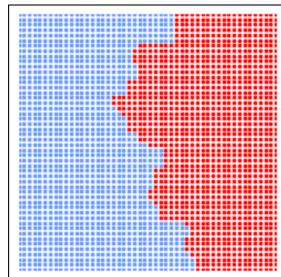


Rysunek 18: Zbiory 2-helpful. Na górze każdego z 4 przykładów jest zbiór zewnętrzny (ang. external set). Wyliczanie wartości helpfulness na podstawie wzoru 4: (a): $3 - 1 + 0 = 2$, (b): $6 - 8 + 4 = 2$, (c): $4 - 3 + 1 = 2$ oraz (d): $6 - 8 + 4 = 2$. Na każdym wierzchołku zaznaczona jest jego wartość helpfulness. Źródło: [6].

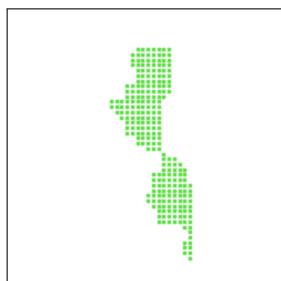
Definicja 3 (Balancing Set)

Niech $S \in V_i$ będzie zbiorem k -helpful. Zbiór $\bar{S} \subset V_j \cup S$, $J \neq i$ nazywany jest **balancing set** zbioru S jeśli $|\bar{S}| = |S|$ and \bar{S} jest przynajmniej $(-k+1)$ -helpful.

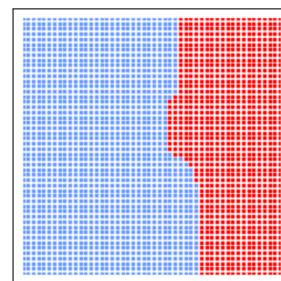
Jedną z cech algorytmu jest, że długość granicy zwiększa się o nie więcej niż $(k - 1)$ jeśli zbiór \bar{S} przenoszony jest z jednej partycji do drugiej.



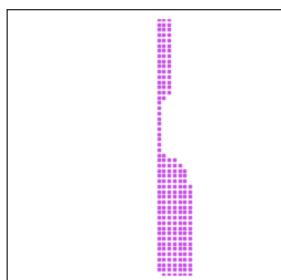
(a) początkowy podział



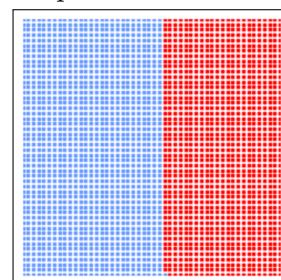
(b) krok 1 - budowanie zbioru helpful



(c) krok 2 - przeniesienie zbioru helpful



(d) krok 3 - budowanie zbioru balancing



(e) krok 4 - przeniesienie zbioru balancing

Rysunek 19: Obrazki pokazują początkowy podział, następnie jedno wywołanie algorytmu Helpful Sets. Rozmiar partycji pozostaje niemal identyczny, zmniejsza się długość granicy.

```

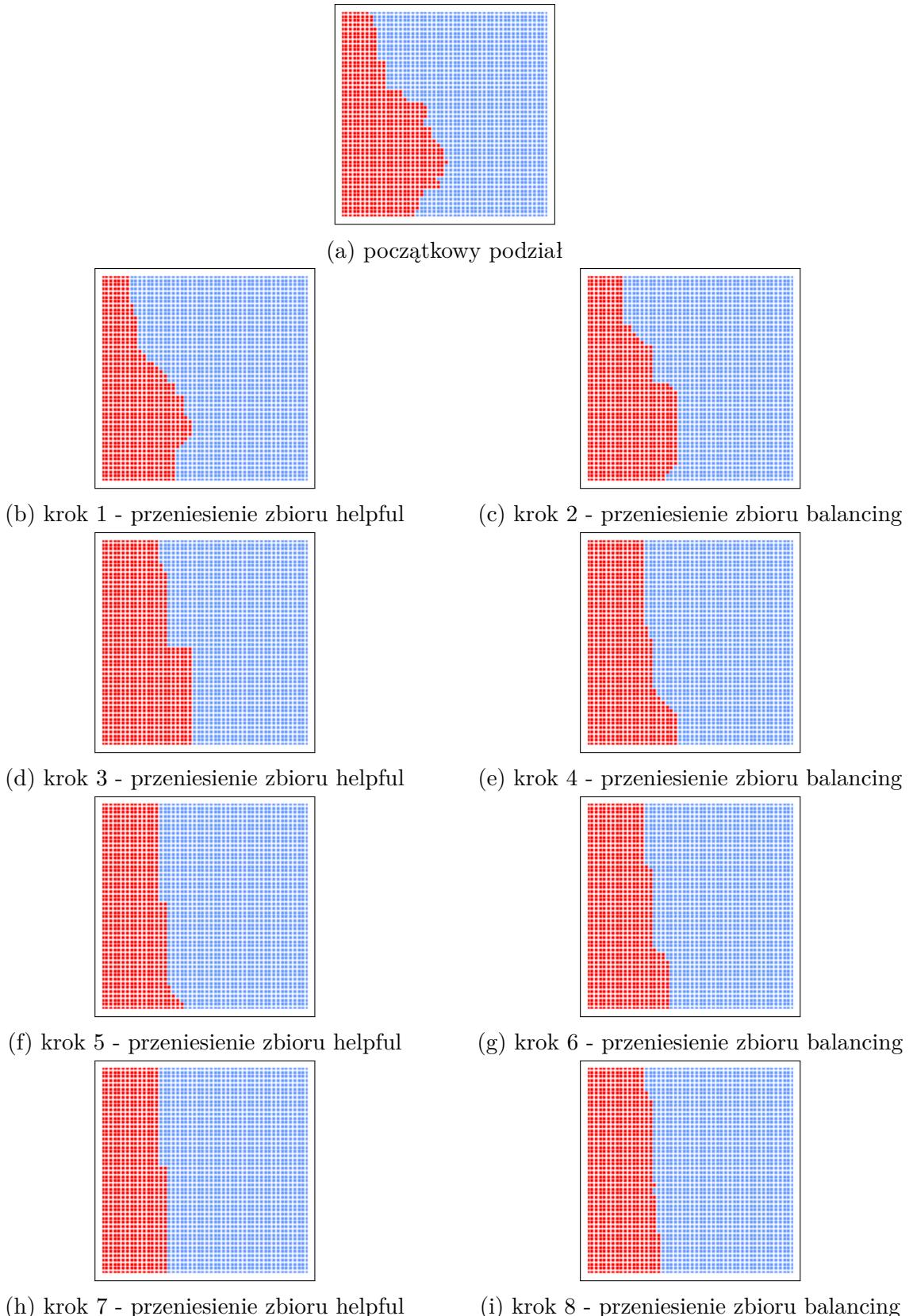
1 HelpfulSet( $A, B$ )
2   IF  $\text{cut\_size}_{A-B} < 0$ 
3     RETURN;
4   ENDIF
5    $l_A \leftarrow l_B \leftarrow \text{cut}/2$ ; /* Initialize the limits */
6    $s_{\max} = (|A| + |B|)/2 \cdot 0.2$ ; /* Initialize max size of HS */
7   WHILE  $l_A + l_B \geq 1$ 
8     IF  $l_A = 0$  OR  $2 \cdot l_A \leq l_B$  /* Choose the more promising partition */
9       Swap( $A, B$ );
10       $S_A = \text{BuildHS}(A, l_A, s_{\max})$ ;
11    ENDIF
12    IF  $h(S_A) \leq l_A$  /* If the helpfulness of  $S_A$  is smaller than wanted ... */
13       $l_A \leftarrow b(S_A)$ ; ... adjust the limit for the next search */
14      IF  $l_B > h(S_A)$ 
15         $S_B = \text{BuildHS}(B, l_B, s_{\max})$ ;
16        IF  $h(S_B) \geq h(S_A)$  /* Name the partition with the better set A ...
17          Swap( $A, B$ );
18        ELSE
19           $l_B \leftarrow b(S_B)$ ; ... and reduce the limit of the other partition */
20        ENDIF
21      ENDIF
22      UndoBuild( $S_B$ );
23    ENDIF
24    IF  $\text{len}(S_A) == 0$ 
25       $l_A = 0$ ;
26      CONTINUE;
27    ENDIF
28     $l_A \leftarrow \min(l_A, h(S_A))$ ; /* Adjust the limit for the next search */
29    MoveSet( $S_A$ ) /* Move the helpful set */
30     $\min, \max \leftarrow \text{DetermineMaxAndMin}(w(S_A))$ ;
31     $S_B = \text{BuildBS}(B, 1 - h(S_A), \min, \max)$ ;
32    IF  $w_l \leq w(S_B) \leq w_h$  AND  $h(S_B) > -h(S_A)$  /* Check, if the BS is ok */
33      MoveSet( $S_B$ ); /* Yes: Move the BS */
34       $l_A \leftarrow l_A + \log(l_A)$ ; /* Increase the limits */
35       $l_B \leftarrow l_B + 1$ ;
36    ELSE
37      UndoBuild( $S_B$ ); /* No: Undo the build operation and
38      UndoMove( $S_A$ ); the movement of the helpful set */
39       $l_A \leftarrow l_A/4$ ; /* Reduce the limits */
40       $l_B \leftarrow l_B/2$ ;
41    ENDIF
42  ENDWHILE
43  IF  $\text{cut\_size}_{A-B} > 0.1 \cdot \text{longer\_edge\_of\_a\_grid}$ 
44    Balance( $A, B$ );
45  ENDIF

```

Algorytm 3: Kod przedstawiający zmodyfikowany przeze mnie algorytm Helpful-Set 2-partitioning.

Kluczowym elementem algorytmu jest ustalenie wartości $helpfulness l$ zbiorów, których szukamy. Jeśli l jest ustawione na zbyt małe to obiecujące zbiory są przeoczane, natomiast jeśli l jest za duże to czas wykonywania algorytmu jest dłuższy, natomiast znalezione przy tym zbiory wcale nie są lepsze. W celu uzyskania l Party używa techniki zwanej **adaptive limitation** [6]. Początkowe l ustawiane jest na wartość $cut/2$. Wartość l jest zmniejszana o połowę albo ustawiana na najlepszą znalezioną $helpfulness$, jeśli zbiór l -helpful nie może zostać znaleziony w żadnym z dwóch optymalizowanych zbiorów oraz podwajany, jeśli poszukiwanie zakończy się sukcesem. Autorzy [24] zaproponowali kilka modyfikacji do algorytmu. Po pierwsze, zamiast używać pojedynczego limitu l użyto dwóch oddzielnych limitów dla zbioru A oraz zbioru B . Po drugie, dopuszczone do pojawiania się małych nierówności w kwestii wielkości obszarów. Jest to szczególnie ważne, kiedy podział optymalizowany jest wielokrotnie, na niecałkowicie przywróconym do początkowego rozmiaru grafie. Przenoszone wówczas wierzchołki mają często wagi ≥ 1 , ponadto istnieją różnice pomiędzy wagami wierzchołków, co przekłada się na to, że ciężko idealnie zbalansować optymalizowane obszary. To podejście zostało również zaimplementowane w bibliotekach Jostle and Metis. Udowodniono, że pozytywnie wpływa ona na optymalizację długości granic, ponieważ małe nierówności w postaci pól pozwalają zwykle na lepsze zoptymalizowanie długości granic. Po trzecie algorytm balansowania obszarów, który zachłannie wyrównuje pola obszarów został przeniesiony na koniec.

Algorytm 3 przedstawia zmodyfikowaną przez mnie procedure. Pierwszą moją modyfikacją jest sprawdzanie, czy balansowane obszary mają wciąż ze sobą granice (linia 2). Może się zdarzyć, że na skutek balansowania innych obszarów granica ta zostanie przerwana. Jak w poprzedniej implementacji limity l_A oraz l_B ustawiane są na połowę aktualnej długości granicy pomiędzy obszarami A i B (linia 5). W rozwiązaniu zaproponowanym przez autorów [24] podczas wyszukiwania zbiór helpful nie może stać się mniej niż $-d/2$ helpful, nie może również przekroczyć wagi s_{max} . Wartość d to średni stopień wierzchołka w grafie. Dla mojej implementacji mógłbym założyć, że d jest zawsze równe 4 - wynika to ze sposobu, w jaki buduje graf z wejściowej siatki (rysunek 10). Jednak ta zasada się nie sprawdzała. Algorytm budowania zbioru helpful jest bowiem zachłanny i często budował zbiory, który spełniały kryterium nieprzekraczania wagi s_{max} oraz miały ujemną wartość helpful, większą niż -2 . Jednak później w kodzie oryginalnego algorytmu sprawdzane było, czy zbiór nie ma ujemnej wartości helpful i jeśli miał to budowanie zaczynało się od początku. Przez to algorytm wywoływał się wielokrotnie bez zakończenia się sukcesem. Moim rozwiązaniem była zmiana tej instrukcji na warunek na wielkość zbioru S_A (linia 25) oraz na pozwolenie na budowanie zbiorów o wartości helpful większej bądź równej 0 (linia 11 oraz 16). s_{max} z kolei, autorzy [6] ustawiali na wartość 128. Ja uzależniłem s_{max} od rozmiaru optymalizowanych partycji (linia 6). Użyty do tego współczynnik 0.2 może zostać dowolnie zmieniony. Jednak wedle mojego doświadczenia powinien być on raczej mniejszy niż 0.4, aby zbiór helpful nie był zbyt duży. Zwiększa to czas partycjonowania, ale nie poprawia wyników. Lepiej by był on nieco za mały niż za duży, ponieważ po udanych znalezieniu małego zbioru helpful oraz zbioru balancing limit i tak zostanie zwiększony, a zaczynanie od bardzo dużego zbioru helpful często kończy się nieudanym poszukiwaniem zbioru balancing i powrotem do początkowego podziału. Poszukiwanie dużego zbioru jest bardziej kosztowne.



Rysunek 20: Obrazki przedstawiają kolejne kroki działania algorytmu Helpful Sets na siatce 50x50 podzielonej na 2 obszary przez algorytm LAM. W pierwszym kroku tworzony jest stosunkowo mały zbiór helpful, a w kolejnym kroku odpowiednio mały zbiór balancing. W momencie kiedy to się udaje algorytm zwiększa limit liczby wierzchołków, dlatego kolejne kroki wnoszą więcej zmian. Po 4 cyklach budowania i przenoszenia zbioru helpful oraz zbioru balancing granica między obszarami jest znacznie mniejsza, a wielkość obszarów zachowana. Na potrzeby przykładu balansowanie pól jest wyłączone.

Pętla WHILE, która znajduje się między liniami 7 i 42 jest wykonywana, dopóki suma limitów jest większa od 1. W oryginalnej implementacji było to 0, jednak wedle mojego doświadczenia algorytm wywoływał się wtedy bardzo długo, niekoniecznie zwiększąc jakość partycjonowania. Jeśli zbiór l_A -helpful (S_A) (z wagą $w(S_A)$ oraz wartością helpfulness wynoszącą $h(S_A)$) nie może zostać znaleziony (linia 12), limit jest redukowany to najlepszej znalezionej wartości helpfulness ($b(S_A)$). Dalej podejmowana jest decyzja czy nastąpi wyszukiwanie w partycji B (linia 14). Jeśli limit l_A jest dużo mniejszy od limitu l_B zbiory A i B są ze sobą zamieniane. Ten warunek powoduje, że zbiór helpful szukany jest najpierw w bardziej obiecującej partycji. Jeśli tak, to ustalany jest zbiór S_B (linia 15). Dalej zbiór z większą wartością helpfulness jest nazywany S_A (linia 17) lub limit drugiej partycji jest redukowany (linia 19), a zbiór S_B usuwany (linia 22). Jeśli wielkość zbioru helpful jest równa 0, to limit ustawiany jest na 0 (linia 25), a algorytm powtarzany. W przeciwnym wypadku do l_A przypisywana jest nowa wartość (linia 28), S_A przenoszone jest do B (linia 29), a wywołanie wkracza w fazę szukania zbioru balancing. W tym celu obliczany jest przedział $[min, max]$ dla zbioru balancing (linia 30). W implementacji zaproponowanej w [24] wartości min oraz max były obliczane w następujący sposób:

```

1 min ← (w(B) - wmax(B) - grace)+
2 max ← (w(B) - wmin(B) + grace)+
```

Algorytm 4

gdzie $grace$ jest połową wagi najczęstszego wierzchołka. Jednak ten sposób wyznaczania wartości min oraz max nie sprawdzał się w moich testach. max i min pozwalają na budowanie zbioru balancing o przedziale wag $[min, max]$. Rzadko jednak algorytm nie był w stanie osiągnąć wartości max . Najczęściej była to wartość bliska lub równa max . Ponadto na początku algorytmu znajduje się kod odpowiedzialny za wybieranie lepszego zbioru do budowania zbioru helpful. Testy pokazały, że podczas wielokrotnych wywołań, pomimo ciągłych wymian wierzchołków między obszarami, zwykle to ten sam obszar jest wybierany jako ten lepszy do budowania zbioru helpful. W efekcie jeśli zbiór balancing był za każdym razem bliski max (czyli był nieco większy od zbioru helpful) oraz był on budowany na tym samym obszarze, to jeden obszar sukcesywnie rósł kosztem drugiego. W związku z tym zaproponowałem poniższe rozwiązańe, które losowo decyduje, czy wartość max ma być trochę mniejsza, czy trochę większa od zbioru helpful:

```

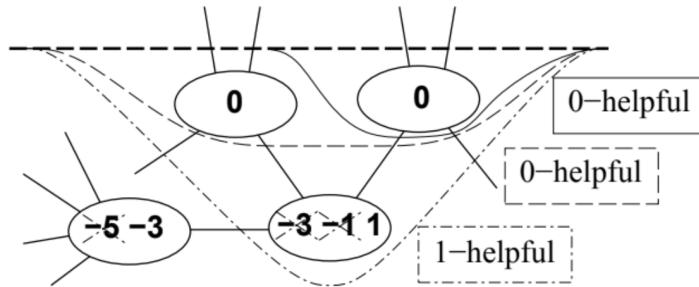
1 DetermineMaxAndMin(w(SA))
2 rand = RandValue(0,1)      /* draws either 0 or 1 */
3 IF rand == 1
4     min = |w(SA) - 0.1 · w(SA)|
5     max = |w(SA) + 0.1 · w(SA)|
6 ELSE
7     min = |w(SA) - 0.2 · w(SA)|
8     max = |w(SA) - 0.1 · w(SA)|
9 ENDIF
10 RETURN min, max
```

Algorytm 5

Z pomocą tych granic algorytm wyszukuje zbiór balancing S_B , który nie zwiększy długości granicy pomiędzy A i B o więcej niż $1 - h(S_A)$ (linia 31). Jeśli szukanie takiego zbioru zakończy się sukcesem, to jest on przenoszony do zbioru A i limity dla obydwu zbiorów (l_A oraz l_B) są zwiększane (linie 33-35). W przeciwnym wypadku S_B jest usuwany, S_A przenoszone z powrotem do A , a limity l_A oraz l_B zmniejszane (linie 37-40). Jeśli algorytm nie może już poprawiać więcej partycjonowania sprawdzany i w razie potrzeby poprawiany jest balans pól (linia 43). Dodatkową modyfikacją wprowadzoną przeze mnie był warunek na uruchomienie procedury 'Balance', który jest omawiany dokładniej w dalszych częściach pracy. Jego celem jest uniemożliwienie balansowania pól między obszarami o bardzo krótkiej granicy.

3.1.6. Szczegóły budowania zbioru helpful

Główna funkcja tej heurystyki działa podobnie do algorytmu Kruskala do wyliczania najmniejszego drzewa rozpinającego [31]. Startuje od pustego zbioru (o wartości helpfulness równej 0) i buduje go za pomocą wierzchołków z jednej strony granicy. W każdym kroku wybiera wierzchołek z wartością helpfulness z pewnego przedziału, przenosi go do zbioru (helpfulness zbioru zwiększa się wtedy o helpfulness wierzchołka), następnie zwiększa wartość helpfulness wierzchołków sąsiednich do przeniesionego wierzchołka, które są w tej samej partycji. Te wierzchołki zyskują jedną krawędź zewnętrzną kosztem jednej krawędzi wewnętrznej, w związku z powyższym ich wartość helpfulness rośnie o 2.

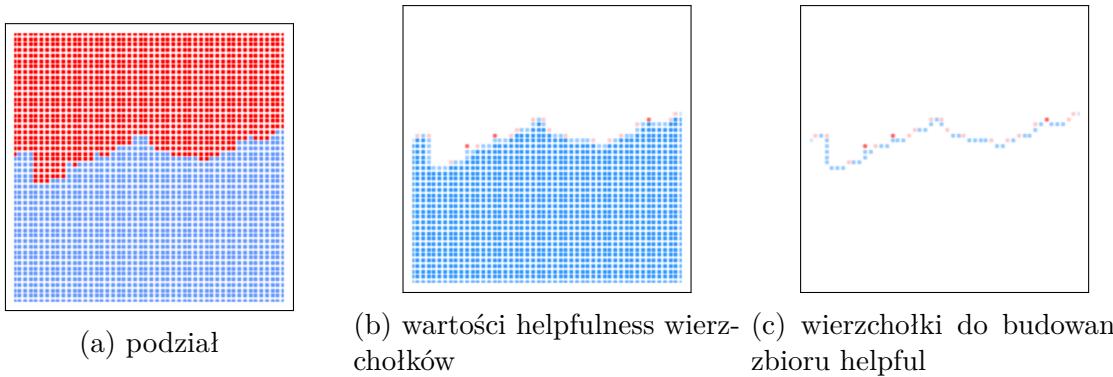


Rysunek 21: Zmiana wartości helpful dla sąsiadów. Źródło: [6].

Branie pod uwagę tylko wierzchołków z jednej strony granicy pozwala na budowanie zbioru z dwóch stron podziału jednocześnie. Jeśli znaleziony zbiór wierzchołków jest przemieszczany między partycjami to wartości helpfulness dla wierzchołków docelowej partycji muszą również ulec zaktualizowaniu. Podczas budowania zbioru jego wielkość zwiększa się w każdym kroku. Zbiór helpful przestaje być budowany w następujących przypadkach:

- Wartość helpfulness dla zbioru osiągnie wartość limitu.
- Tylko wierzchołki o pewnej wartości helpfulness sąbrane pod uwagę, a te się skończą.
- Wielkość zbioru osiągnie wartość limitu.

Ważną obserwacją jest fakt, że jeślibrane pod uwagę są jedynie wierzchołki z wartością helpfulness ≥ 0 , to helpfulness zbioru albo zachowuje tę samą wartość, albo rośnie, ale nigdy nie maleje. Podobieństwo tego algorytmu do algorytmu BFS objawia się w sposobie, w jakim wierzchołki są przypisywane do zbioru. Wierzchołek może zostać wybrany, jeśli jego wartość helpfulness jest większa od ustalonej wartości. To następuje albo jeśli wierzchołek ma od początku odpowiednią wartość helpfulness lub jeśli urosnie ona do odpowiedniej wartości podczas budowania zbioru (poprzez dodanie do zbioru jego sąsiadów).



Rysunek 22: Obrazki przedstawiają jak wygląda zbiór wierzchołków, na bazie którego budowany jest zbiór helpful. Obrazek (a) przedstawia partycjonowanie. Zbiór helpful będzie budowany na niebieskiej partycji. Obrazek (b) przedstawia wszystkie wierzchołki zbioru (a), gdzie kolor oznacza wartość helpful. Skala jest od ciemnego niebieskiego dla wierzchołków z wartością helpfulness wynoszącą -4 do czerwonego dla wierzchołków z wartością helpfulness 4 . Widoczna jest większa wartość helpfulness dla wierzchołków przy granicy. Obrazek (c) przedstawia wierzchołki, które brane są pod uwagę przez algorytm. Są one filtrowanie na etapie budowania zbioru, tak by zawsze wybierane były wierzchołki znajdujące się na granicy.

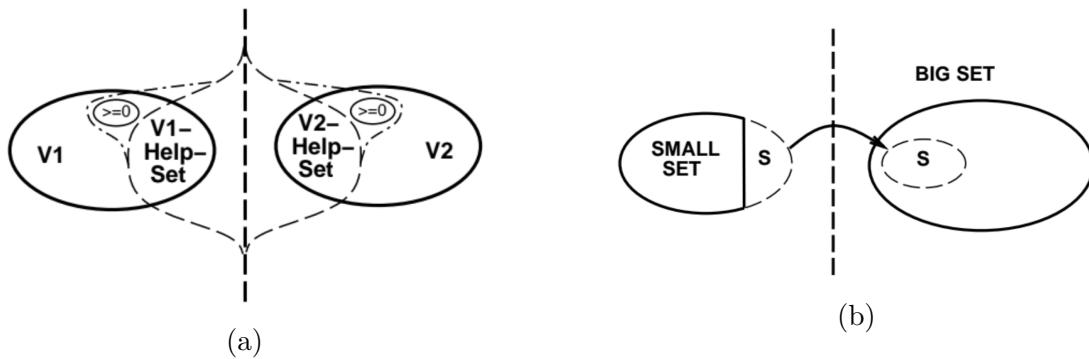
Dodatkową modyfikacją, którą wprowadziłem, było filtrowanie wierzchołków, tak by algorytm wybierał wierzchołek z największą wartością helpfulness tylko spośród wierzchołków granicznych. Została ona zaimplementowana w związku z powstającymi obszarami podwójnymi (to negatywne zjawisko opisuje w późniejszych częściach pracy). Chciałem aby istniała pewność, że wybierany wierzchołek jest zawsze wierzchołkiem granicznym. Rysunek 22 przedstawia moje rozwiążanie.

3.1.7. Szukanie zbioru k -helpful gdzie $k \geq \text{limit}$

Proces budowania zbiorów helpful pokazany jest na rysunku 23(a). Te zbiory nazywane są zbiorami Help. Kardynalność tych zbiorów rośnie dynamicznie podczas szukania. Dzięki temu, że podczas budowania zbioru Help aktualizujemy tylko wartości helpfulness wierzchołków z tej samej partycji, obydwa zbiory Help mogą być budowane niezależnie i równolegle. Jednak w mojej implementacji (rysunek 3) budowane są one jeden po drugim (jeśli warunek pozwoli na zbudowanie drugiego).

Podczas tego procesu brane pod uwagę są tylko wierzchołki z wartością helpfulness ≥ 0 . Może to prowadzić do przedwczesnego zakończenia wywołania algorytmu, jeśli żadne wierzchołki z taką wartością helpfulness nie będą już dostępne, ale to także gwarantuje, że wartość helpfulness dla zbioru Help nigdy nie będzie maleć. Wyszukiwanie zbioru Help kończy się, gdy jego wartość helpfulness osiąga limit lub jeśli nie ma więcej wierzchołków z wartością helpfulness ≥ 0 .

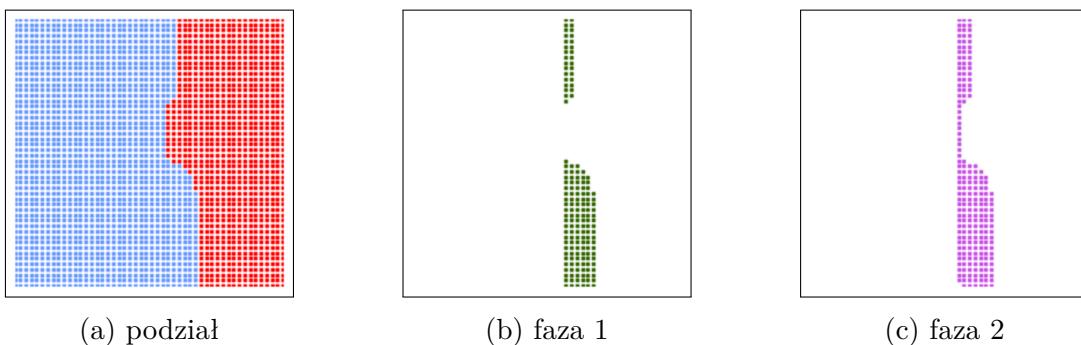
Po udanym wywołaniu, zbiór S , który jest zbiorem Help z większą wartością helpfulness, przenoszony jest na drugą stronę podziału. Drugi zbiór Help jest usuwany i nie jest więcej brany pod uwagę. Na rysunku 23(b) BIG SET reprezentuje V_1 lub V_2 połączone z S . SMALL SET to pozostała część, która została zredukowana o S .



Rysunek 23: Szukanie zbioru k -helpful poprzez przenoszenie wierzchołków z wartością helpfulness ≥ 0 do zbiorów Help (a). (b) to przenoszenie zbioru S na drugą stronę podziału. Źródło: [6].

3.1.8. Szczegóły budowania zbioru balancing

Znalezienie zbioru balancing jest trudniejsze, z racji na dodatkowe obostrzenia związane z jego rozmiarem oraz wartością helpfulness. Zbiór \bar{S} musi mieć ten sam rozmiar co zbiór S oraz jego wartość helpfulless musi być tak duża jak to możliwe, ale nie mniej niż $-k + 1$ -helpful jeśli S był k -helpful. Idea budowania zbioru balancing polega na rozpoczęciu od pustego zbioru \bar{S} i wybraniu podzbioru ze zbioru BIG SET, który zwiększy jego rozmiar tak bardzo jak to możliwe oraz jednocześnie zmniejszy jego wartość helpfulness tak mało jak to możliwe. Algorytm podzielony jest na trzy fazy. Pierwsza faza dodaje do zbioru wierzchołki, których wartości helpfulness są ≥ 0 . Druga faza próbuje znaleźć podzbiory wierzchołków, które dodane do \bar{S} , pozostawią jego helpfulness na jednym poziomie - szuka zbiorów 0-helpful. Każda z tych faz zakończa swoje wywołanie jeśli \bar{S} jest wystarczająco duży. Jeśli dwie pierwsze fazy są niewystarczające, używana jest trzecia faza, która oparta jest na zachłannym dobieraniu wierzchołków w celu dokończenia budowania zbioru balancing.



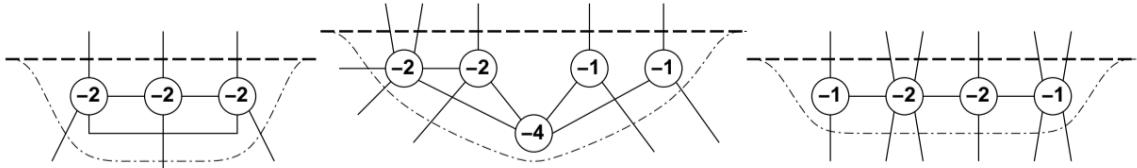
Rysunek 24: Obrazki przedstawiają fazę pierwszą oraz fazę drugą budowania zbioru balancing. Ten sam przypadek podziału można znaleźć na rysunku 19.

Faza 1

Pierwsza faza jest najmniej skomplikowana. Dopóki w zbiorze BIG SET są wierzchołki z wartościami helpfulness ≥ 0 , wierzchołek z największą wartością helpfulness dodawany jest do zbioru \bar{S} . Te wierzchołki uznawane są jako wierzchołki, które należą już do drugiej partycji, więc wartości helpfulness ich sąsiadów z poprzedniej partycji muszą wzrosnąć o 2. Podczas tej fazy wielkość \bar{S} powiększa się a wartość $H(\bar{S})$ pozostaje taka sama lub się powiększa. Faza pierwsza kończy się jeśli utworzony zostanie zakładany zbiór balancing lub nie ma więcej wierzchołków w zbiorze BIG SET, których wartości helpfulness są przynajmniej równe 0.

Faza 2

Ta faza próbuje znaleźć zbiory 0-helpful, to znaczy podzbiory zbioru BIG SET, które przeniesione do \bar{S} , nie zmniejszą jego wartości helpfulness. Koncepcja na tę fazę polega na przeprowadzeniu kilku wyszukiwań, rozpoczynając od pojedynczego wierzchołka -1 -helpful lub -2 -helpful. Każde z wyszukiwań próbuje dopełnić swój podzbiór wierzchołków do zbioru 0-helpful. Ważną obserwacją jest, że na początku tego etapu BIG SET nie zawiera żadnych wierzchołków z wartością helpfulness większą bądź równą zero.



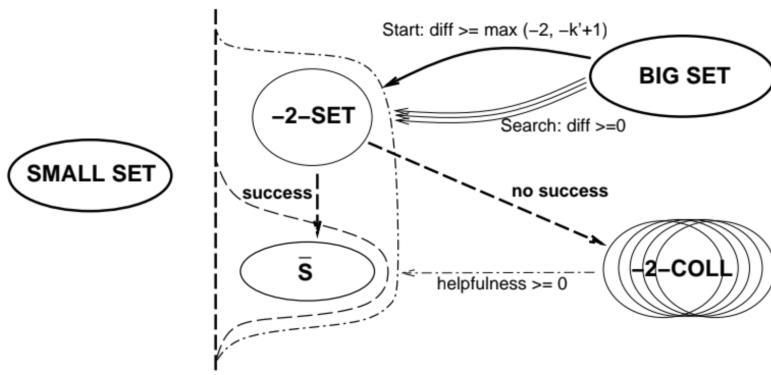
Rysunek 25: Przykłady zbiorów 0-helpful. Źródło: [6].

Rysunek 25 pokazuje przykładowe zbiory 0-helpful. Nie ma jednego przepisu na zbiór 0-helpful, mogą być to różne konstrukcje wierzchołków, a intencją fazy drugiej jest znalezienie jak największej tego typu zbiorów.

Rysunek 26 pokazuje drugą fazę. Tak jak w fazie pierwszej, wykorzystywana jest ta sama metoda budowania zbioru (sekcja 3.1.6). Jednak zamiast przenosić wierzchołki bezpośrednio do \bar{S} , są one przechowywane w zbiorze o nazwie -2-SET . -2-SET zawiera aktualny podzbiór wierzchołków, który faza druga próbuje dopełnić do zbioru 0-helpful. Niech $k' = k + H(\bar{S})$ będzie poprawą długości granicy spowodowaną przez przeniesienie S i \bar{S} , każdy na odpowiednią stronę podziału. Na początku każdego poszukiwania zbioru -2-SET rozpatrywane są jedynie wierzchołki z wartością helpfulness wynoszącą $\max(-2, -k' + 1)$. Następnie tylko wierzchołki, które są przynajmniej 0-helpful mogą być umieszczone w zbiorze -2-SET . To gwarantuje, że dowolny -2-SET może zostać przeniesiony do \bar{S} na każdym etapie algorytmu bez znaczącego zmniejszania jego wartości helpfulness. Jest to szczególnie istotne, jeśli -2-SET jest wystarczająco duży, aby zakończyć balansowanie. Podsumowując:

- tylko wierzchołki -1-helpful oraz -2-helpful ze zbioru BIG SET są rozważane na początku budowy -2-SET ,
- wartość helpfulness zbioru -2-SET jest co najmniej równa -2 i nigdy nie maleje,
- jeśli k' wynosi 2, tylko wierzchołki -1-helpful mogą zostać wybrane oraz
- jeśli k' wynosi 1, faza druga w ogóle się nie rozpoczyna.

Jeśli wyszukiwanie zbioru -2-SET zakończy się i jego wartość helpfulness jest mniejsza od 0 to jest przechowywany do dalszego użycia.



Rysunek 26: Obrazek przedstawiający fazę 2. Źródło: [6].

```

1 PROCEDURE Phase_2
2   WHILE ( $|\bar{S}| < |S|$ ) AND BIG SET contains nodes with helpfulness  $\geq$ 
3      $\max(-2, -k + 1 - H(\bar{S})$ 
4     start building a -2-SET with the max. helpful node;
5
6   WHILE  $H(-2\text{-SET}) < 0$  AND ( $| -2\text{-SET}| + |\bar{S}| < |S|$ ) AND
7     BIG SET has node with helpfulness  $\geq 0$ 
8     move node with the highest helpfulness to -2-SET;
9   ENDWHILE
10
11  IF  $H(-2\text{-SET}) \geq 0$ 
12    move -2-SET to  $\bar{S}$ ;
13    WHILE ( $|\bar{S}| < |S|$ ) AND -2-COLL contains sets  $S'$  with  $H(S') \geq 0$ 
14      take set  $S' \in -2\text{-COLL}$  with max. helpfulness;
15      IF  $|S'| + |\bar{S}| < |S|$ 
16        move  $S'$  to  $\bar{S}$ ;
17      ELSE
18        reduce  $S'$  to  $|S| - |\bar{S}|$  and move it to  $|\bar{S}|$ ;
19      ENDIF
20    ELSE IF  $| -2\text{-SET}| + |\bar{S}| = |S|$ 
21      move -2-SET to  $\bar{S}$ ;
22    ELSE
23      move -2-SET to -2-COLL;
24    ENDIF
ENDWHILE

```

Algorytm 6: Algorytm przedstawiający fazę drugą. Źródło: [6].

Kolekcja zbiorów -2-SET jest nazywana -2-COLL. Zawiera on podzbiory wierzchołków, które są przynajmniej -2-helpful. Wiele z nich może zostać zbiorami 0-helpful, jeśli inne zbiory -2-SET zostaną przeniesione do \bar{S} . Aktualizacja wartości helpfulness sąsiadów podczas budowania zbioru -2-SET następuje tylko dla wierzchołków, które są częścią zbioru BIG SET. Zbiory -2-SET będące w zbiorze -2-COLL nie są uznawane jako zbiory, które zmieniły stronę partycjonowania. W związku z tym, jeśli -2-SET nie może zostać uzupełniony wierzchołkami, aby być 0-helpful i jest przenoszony do zbioru -2-COLL, to wartości helpfulness wierzchołków w zbiorze BIG SET, które były jego sąsiadami są przywracane do poprzednich wartości. Na tym etapie algorytmu podczas budowania zbioru -2-SET wartości helpfulness sąsiednich wierzchołków w zbiorze -2-COLL nie są zmieniane, ponieważ wierzchołki w zbiorze -2-COLL nie są brane pod uwagę przy budowaniu zbiorów -2-SET. Tylko jeśli zbiór -2-SET zostanie 0-helpful i jest przenoszony do \bar{S} to aktualizowane są wartości helpfulness jego sąsiadów będących w zbiorze -2-COLL.

Algorytm 6 przedstawia fazę drugą. Szukanie zbioru -2-SET kończy się w następujących przypadkach:

1. Wartość helpfulness zbioru -2-SET staje się większa bądź równa 0. W tym przypadku cały zbiór -2-SET przenoszony jest do zbioru \bar{S} . Wartości helpfulness sąsiednich wierzchołków znajdujących się w zbiorze -2-COLL są aktualizowane. Każda taka aktualizacja wartości helpfulness dla wierzchołka w zbiorze -2-COLL skutkuje

tym, że wartość helpfulness jednego znajdującego się tam zbioru -2-SET podnosi się o 2. W związku z tym wiele z nich może zostać co najmniej 0-helpful, a następnie zostać przeniesionym do \bar{S} . Algorytm wybiera zawsze zbiór -2-SET z największą wartością helpfulness i przenosi go do \bar{S} , tak długo jak są takie zbiory w -2-COLL . Jeśli, któryś z tych zbiorów jest większy niż $|S| - |\bar{S}|$ to jest redukowany do odpowiedniego rozmiaru poprzez usuwanie ostatnio dodanych elementów. Rezultatem takiej redukcji jest $|\bar{S}| = |S|$ oraz zakończenie wykonania procedury.

2. Partycja osiąga odpowiedni rozmiar, to znaczy $|-2\text{-SET}| + |\bar{S}| = |S|$. W tym przypadku wartość helpfulness zbioru -2-SET wciąż wynosi co najmniej $\max(-2, -k' + 1)$ (co jest zagwarantowane procesem jego budowania) i może zostać przeniesiony do zbioru \bar{S} . Partycja osiąga w tym wypadku odpowiedni rozmiar i następuje zakończenie procedury.
3. Nie ma więcej wierzchołków w zbiorze BIG SET z wartością helpfulness większą bądź równą 0. W tym wypadku aktualnie budowany -2-SET nie może zostać powiększony o kolejne wierzchołki, w związku z tym jest przenoszony do zbioru -2-COLL , gdzie oczekuje na późniejsze wykorzystanie.

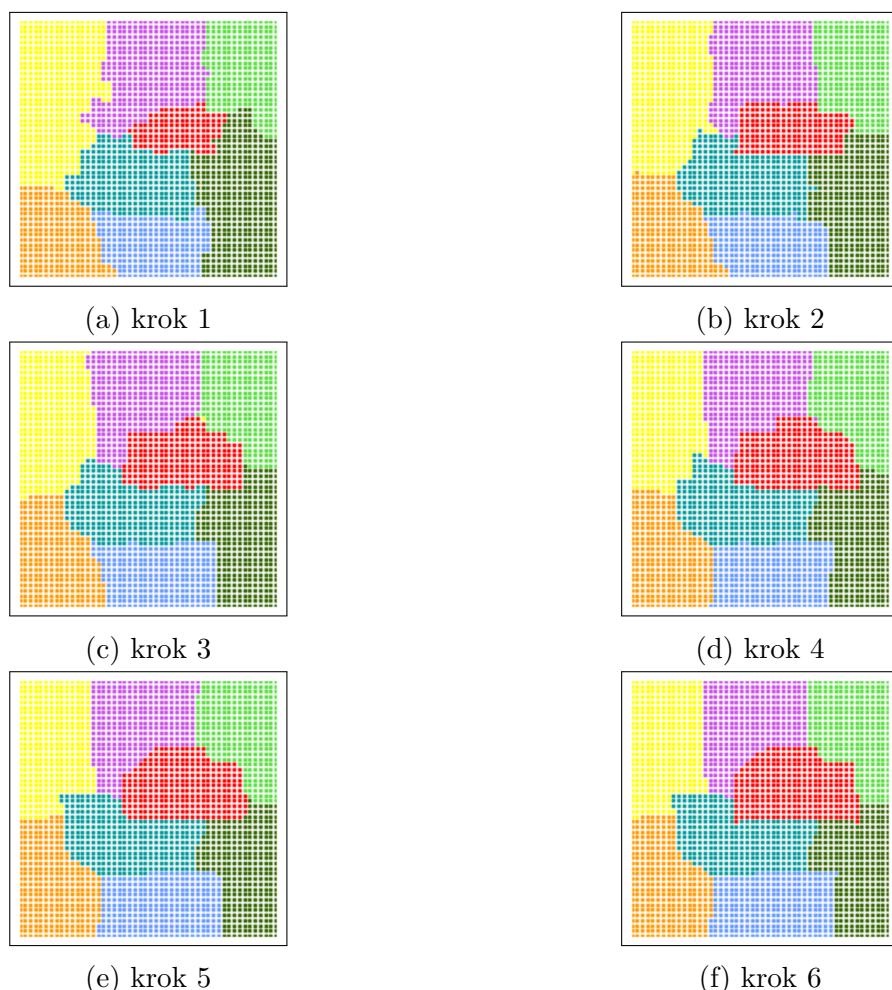
Faza 3

Ta faza wybiera wierzchołki ze zbioru BIG SET oraz zbiory -2-SET ze zbioru -2-COLL w celu przeniesienia do \bar{S} . Wybiera wierzchołek/zbiór z największą wartością helpfulness tak dugo aż przeniesienie go nie obniży wartości helpfulness zbioru \bar{S} poniżej wartości $-k + 1$. Jeśli jakiś zbiór -2-SET ze zbioru -2-COLL jest użyteczny, ale jego rozmiar jest większy niż $|S| - |\bar{S}|$ to jego rozmiar jest redukowany. Faza 3 zakończa swoje wywołanie, jeśli przeniesienie jakiekolwiek zbioru -2-SET lub wierzchołka spowoduje obniżenie wartości helpfulness zbioru \bar{S} poniżej $-k + 1$ lub jeśli uda się wypełnić zbiór \bar{S} do rozmiaru zbioru S .

3.1.9. Balansowanie rozmiarów obszarów

Ten etap algorytmu wywoływany jest zawsze po procedurze optymalizacji długości granic. Odpowiedzialny jest za wyrównanie wielkości pól, które nie są idealnie równe po wywołaniu algorytmu LAM. Przez autorów artykułu [24] został opisany, jako algorytm zachłanny, natomiast nie było podanych więcej szczegółów na jego temat.

W związku z powyższym zaimplementowałem poniższe rozwiązanie. Algorytm również korzysta z mechanizmu do budowania zbiorów helpful i balancing, to jest z obliczania wartości helpfulness dla wierzchołków. Zachłannie wybierane są wierzchołki z największą wartością helpfulness, dopóki pola obszarów nie zostaną zbalansowane do oczekiwanej wartości różnicy pól. Obszary balansują się zabierając wierzchołki obszarów sąsiednich. Oznacza to, że jeśli wywoływany jest algorytm optymalizacji granic między obszarami A oraz B , gdzie obszar A jest większy od obszaru B , to po wyrównaniu granicy pomiędzy nimi obszar A odda część wierzchołków obszarowi B .



Rysunek 27: Obrazki pokazują działania algorytmu optymalizacji granic oraz balansowania rozmiarów pól. Jak widać z wywołania na wywołanie czerwony obszar, który był na początku najmniejszy, stopniowo rośnie odbierając wierzchołki sąsiednim obszarom. p wynosi 0.1.

Dla działania algorytmu ustalany jest współczynnik p , który decyduje o tym ile wierzchołków zostanie wymienionych. p osiąga wartości od 0 do 0.5 i oznacza jaka część różnicę pól balansowanych obszarów będzie przeniesiona do obszaru mniejszego. V_b to wierzchołki wytypowane przez algorytm balansowania pól, które zostaną przeniesione do mniejszego obszaru.

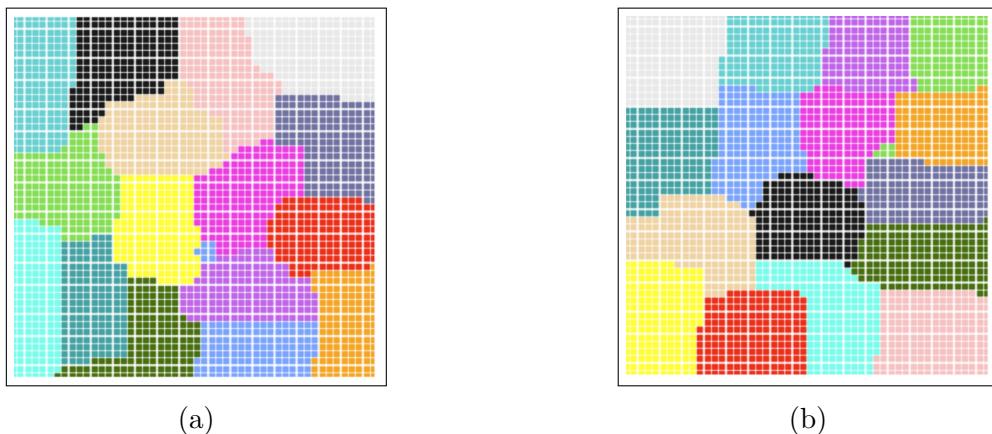
$$|V_b| = p \cdot |A| - |B| \quad (5)$$

Im p będzie mniejsze tym małe obszary będą rosły wolniej, stopniowo rozbudowując się w kierunku wszystkich sąsiadów. Im p będzie większe tym proces będzie bardziej gwałtowny, co może bardziej naruszyć podział, na przykład przemieszczając obszar w jakimś kierunku. Im p mniejsze, tym więcej wywołań algorytmu optymalizacji potrzebne, aby zrównać wielkość pól obszarów. Wedle mojego doświadczenia, dla wcześniej użytych współczynników decydujących o częstotliwości wywołań algorytmu do optymalizacji granic (rysunek 2), dobrze sprawdza się p wynoszące około 0.1, co widać też na rysunku 27, gdzie pokazane są wszystkie faktyczne fazy balansowania. Ze współczynnikiem 0.1 algorytm miał wystarczająco czasu, aby wyrównać pola.

Dodatkową modyfikacją wprowadzoną przeze mnie był warunek uruchamiania tej części algorytmu, który nie jest obowiązkowy, ale pełni ważną rolę, kiedy pojawiają się obszary niepodzielne. Czasami zdarza się, że balansowane obszary ze względu na szczegółowe ułożenie obszarów niepodzielnych na siatce mają ze sobą bardzo krótką granicę. Ta sama sytuacja może pojawić się, gdy rozpatrywany jest klasyczny przypadek bez obszarów niepodzielnych, ale jest on wtedy znacznie rzadziej spotykany. W takim przypadku, dodatkowo jeśli p oraz różnica pól balansowanych obszarów jest stosunkowo duża, może dojść do niekorzystnego balansowania, w którym obszar mniejszy zwiększa swoje pole o dużą liczbę wierzchołków poprzez stosunkowo krótką granicę. Aby nie dopuścić do takiego przypadku, stosowany jest prosty warunek, który nie dopuszcza do balansowania między obszarami, jeśli długość ich granicy przekracza 0.1 długości dłuższego boku siatki.

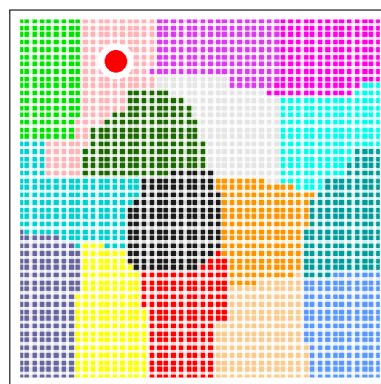
3.1.10. Usuwanie obszarów rozproszonych

Występowanie obszarów rozproszonych w kontekście partycjonowania oznacza, że na podzielonej siatce ten sam obszar występuje w dwóch, lub większej liczbie oddzielnych części. Problem ten wystąpił, pomimo że autorzy biblioteki Party nie wspominali o takiej możliwości. Przykłady obszarów rozproszonych przedstawione są na rysunku 28.



Rysunek 28: Na rysunku (a) widać, że niebieski obszar jest w dwóch miejscach - na dole oraz w postaci bardzo małego obszaru na środku. Ten sam efekt występuje dla obszaru zielonego na obrazku (b).

Problem spowodowany jest etapem optymalizacji podziału. Dzieje się tak, ponieważ obszary handlują ze sobą granicznymi wierzchołkami w celu wyrównania granic. Przykład podziału, na którym taki problem może się pojawić jest rysunek 29. W lewym rogu widać obszar zaznaczony czerwonym kółkiem, znajdujący się pomiędzy dwoma zielonymi obszarami. Wąska, dolna odnoga tego obszaru jest potencjalnym miejscem, gdzie może nastąpić odcięcie i przez to przedzielenie tego obszaru na dwie części.



Rysunek 29: Na rysunku widać obraz siatki podatnej na pojawienie się obszarów rozproszych. Czerwoną kropką zaznaczony jest obszar podatny na podzielenie na dwie części.

Algorytm optymalizacji granic jest szczególnie narażony na tego typu zachowania w swoich początkowych fazach, kiedy graf jest zredukowany i pod pojedynczymi wierzchołkami przenoszone są tak naprawdę całe ich zbiory. Wtedy często wystarczy przenieść jeden wierzchołek, aby przedzielić inny obszar na dwie części. Dlatego też algorytm optyma-

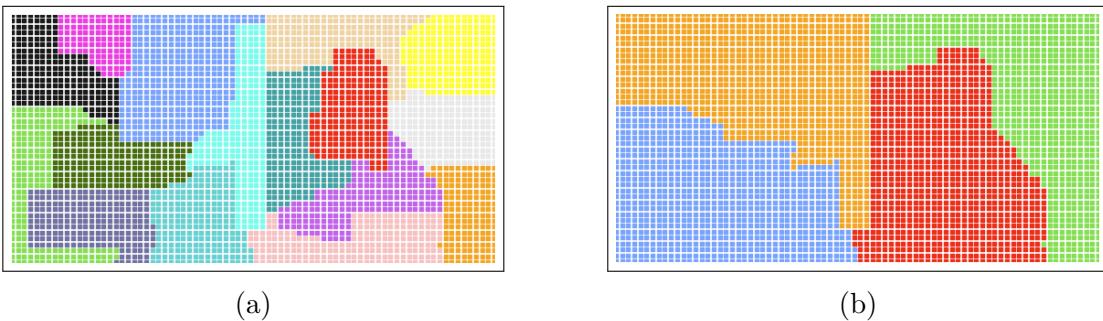
lizacji podziału aktywowany jest dopiero na grafie przywróconym w 85 – 90% do pierwotnego rozmiaru - wtedy szansa na powstanie obszarów rozproszonych znacznie spada. Kolejnym czynnikiem ryzyka są obszary niepodzielne. Reprezentują je wierzchołki, które zostają zastąpione początkowym zbiorem wierzchołków dopiero po zakończeniu optymalizacji. Przeniesienie takiego obszaru do innej partycji w fazie optymalizacji, tak samo jak w poprzednim przypadku, może skutkować powstaniem obszarów rozproszonych. Bardzo często również obszary rozproszone pojawiają się w początkowych wywołaniach optymalizacji granic, ale są niwelowane przez kolejne wywołania algorytmu optymalizacji. Ważnym faktem jest, że algorytm LAM ze względu na swoją charakterystykę dąży do budowania obszarów równych pod względem pola oraz "zbitych", więc taka sytuacja nie zdarza się często. Ponadto, jak wynika z moich obserwacji, pojawiające się obszary rozproszone są zawsze bardzo małe w porównaniu do pozostałych obszarów.

Rozwiążanie dla tego problemu, które prezentuję w niniejszej pracy polega na pojedynczym przeiterowaniu po grafie w celu znalezienia takich obszarów, następnie na przyporządkowaniu wszystkich obszarów rozproszonych do jednego z przylegających do nich obszarów. Algorytm usuwania obszarów rozproszonych jest wywoływany raz na grafie przywróconym do początkowych rozmiarów, po wszystkich wywołaniach algorytmu optymalizacji granic i wielkości pól.

Zdecydowałem się na tego typu, proste rozwiązanie z racji na rzadkość występowania tego problemu oraz tego, że zwykle powstałe obszary rozproszone są bardzo małe. Według mnie takie rozwiązanie jest dużo tańsze obliczeniowo i rozsądniejsze przy skali tego zjawiska niż obwarzowywanie wystąpienia tego typu sytuacji dodatkowymi instrukcjami warunkowymi.

3.2. Podział siatki na m obszarów

Z racji na to, że korzystamy z m węzłów obliczeniowych typu homogenicznego, gdzie każdy węzeł posiada k rdzeni, siatkę podzieloną na $m \cdot k$ części należy podzielić na m obszarów, każdy składający się z k podobszarów. Bardzo ważną obserwacją jest, że w przeciwieństwie do poprzedniej części partycjonowania grafu na $m \cdot k$ części, gdzie dopuszczalne były nierówności w kwestii pól pomiędzy obszarami, tutaj bardzo ważne jest aby każdy obszar składał się z takiej samej liczby podobszarów. Jest to poważne utrudnienie tego problemu.



Rysunek 30: Obrazek (a) podział na $m \cdot k$ obszarów. Obrazek (b) przedstawia podział $m \cdot k$ obszarów na m obszarów po k podobszarów. $m = 4$ oraz $k = 4$.

Ta część algorytmu jest realizowana przez algorytm weighted matching z dodatkiem części zachłannej. Daną wejściową do algorytmu jest siatka z podziałem na $m \cdot k$ obszarów, jak na rysunku 30(a). Najpierw wszystkie partycje redukowane są do pojedynczych wierzchołków. Oznacza to, że mamy $m \cdot k$ wierzchołków. Następnie graf składający się z $m \cdot k$ wierzchołków redukowany jest do m wierzchołków za pomocą algorytmu weighted matching, identycznego jak na rysunku 1. Po zredukowaniu do m wierzchołków, do każdego wierzchołka przypisywana jest inna partycja. Następnie graf jest odtwarzany z powrotem do rozmiaru $m \cdot k$ z zachowaniem nowych partycji. W tym momencie otrzymujemy podział $m \cdot k$ wierzchołków na m obszarów.

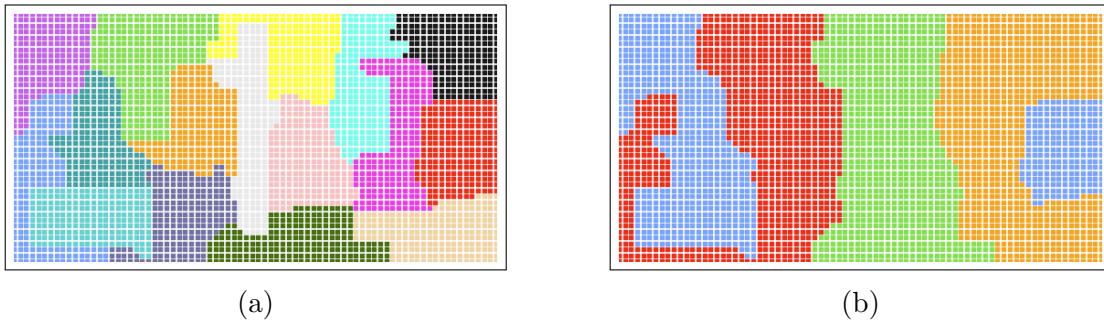
Charakterystyką algorytmu weighted matching jest to, że od idealnie równych podziałów bardziej ceni sobie obszary "zbite", czyli takie, które mają możliwie krótkie granice między sobą. Jest to wpisane w jego charakterystykę na tyle mocno, że nie sposób tego zmienić. W związku z powyższym w większości podziałów nie kończymy z podziałem m obszarów po k podobszarów każdy, tylko z czymś gorzej podzielonym, natomiast całkiem bliskim podziałowi m obszarów po k podobszarów, bo choć LAM nie gwarantuje nam podziałów idealnie równych, to gwarantuje nam obszary o zbliżonej liczbie wierzchołków.

Czasami na tym etapie mamy już m obszarów po k podobszarów każdy. Jeśli tak nie jest, to uruchamiana jest zachłanna część algorytmu, która wyrównuje liczbę podobszarów pomiędzy obszarami. Składa się ona z dwóch części. Najpierw algorytm sprawdza jakie obszary leżą obok siebie i wyrównuje pola sąsiadów. Przykładowo, jeśli leżą obok siebie dwa obszary A oraz B , z czego A zawiera $k - 1$ podobszarów, natomiast B $k + 1$ podobszarów, to jeden z podobszarów granicznych przenoszony jest z B do A w celu wyrownania liczby podobszarów do k dla każdego z nich. Jeśli B zawierałby $k + 3$ obszary, natomiast A $k - 1$, to z B przeniesiony zostaną dwa obszary do A . W ten sposób podobszary z dużych obszarów mają sposobność "rozproszyć" się po siatce. W kolejnej turze

nadmiarowe obszary z A mają szansę zostać przeniesione gdzie indziej. Ta część algorytmu wywoływana jest dopóki nie przestanie przynosić nowych zmian. Ponieważ operujemy na wierzchołkach, które mają duże wagi to już na tym etapie przesunięcia obszarów powodują często tworzenie się obszarów dwuczęściowych.

Jeśli po tym etapie nadal nie mamy równych obszarów następuje ostatni etap algorytmu. Ten etap działa dopóki wszystkie obszary nie będą miały takiej samej liczby wierzchołków. Wybierany jest zawsze obszar o największej i najmniejszej liczbie podobszarów. Następnie z obszaru o większej liczbie podobszarów losowne są podobszary, a następnie przenoszone do obszaru o mniejszej liczbie podobszarów dopóki wybrana para obszarów nie będzie miała równego rozmiaru.

Zaletą tego algorytmu jest niski koszt obliczeniowy oraz prostota, im bardziej udany podział z algorytmu weighted matching tym większa szansa na dobry podział końcowy. Liczby wierzchołków, na których operuje algorytm są bardzo małe więc można nawet wielokrotnie wywoływać cały algorytm w poszukiwaniu najlepszego rezultatu. Zaleta jest jednocześnie jego wadą, prostota algorytmu oraz jego zachłanna charakterystyka sprawia, że jakość podziałów pod względem kryterium długości granic nie jest najwyższa - rysunek 31.



Rysunek 31: Obrazek (a) podział na $m \cdot k$ obszarów. Obrazek (b) przedstawia podział $m \cdot k$ obszarów na m obszarów po k podobszarów. $m = 4$ oraz $k = 4$.

4. Wyniki

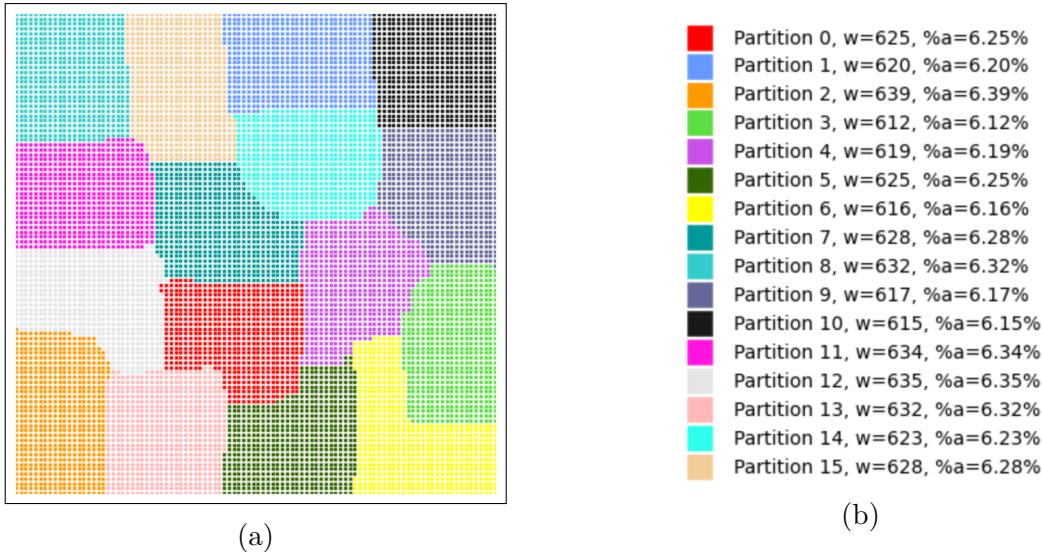
Rezultaty obliczeń były otrzymywane w taki sam sposób jak w artykule [24]. Algorytm wywoływany był 100 razy, na końcu wybierany był najlepszy podział. O ile w artykule [24] wybór najlepszego wyniku odbywało się poprzez liczenie długości granic między obszarami, tak w moim wypadku nie było to oczywiste. Autorzy [24] mogli tak zaprojektować wybór najlepszego podziału, ponieważ nie występowały u nich obszary niepodzielne, przez które znacznie ciężej zdefiniować najlepszy podział. W implementacji bez obszarów niepodzielnych to, co jest niezmienne to równe pola obszarów. Jeśli założymy, że nasza implementacja zawsze będzie w stanie zwrócić podział równy pod względem pól, co da się zagwarantować na siatce bez obszarów niepodzielnych, to pozostaje nam minimalizować sumaryczną długość granic. Obszary niepodzielne sprawiają, że często pola partycji nie mogą być równe, a minimalizacja długości granic może prowadzić do dużych nierówności w kwestii pól partycji co pokaże na dalszych przykładach. Kryterium wyłaniania najlepszego podziału było więc wybierane często wedle mojej, subiektywnej oceny. Przykładowo, kiedy obszary niepodzielne w znaczny sposób utrudniały podział były to maksymalnie równe pola, kiedy dowolność ułożenia była duża z racji na małe obszary niepodzielne, kryterium była długość granic. Kryterium równych pól może być liczone za pomocą odchylenia standardowego bądź w mniej skomplikowanych przypadkach za pomocą różnicy między największym i najmniejszym obszarem.

4.1. Wyniki dla podziału na $m \cdot k$ obszarów

Ten podrozdział opisuje wyniki podziału siatki dla m node'ów, każdy z nich zawierający k rdzeni. Celem jest otrzymanie $m \cdot k$ maksymalnie równych pod względem pola partycji oraz minimalizacja długości granic między nimi.

4.1.1. Wyniki dla podziału siatek bez obszarów niepodzielnych i wyłączonych z obliczeń

Dla tej kategorii kryterium zawsze była długość granic. Na rysunku 32 widzimy partycjonowanie siatki 100x100 bez obszarów wyłączonych z obliczeń oraz niepodzielnych. Rezultat w kwestii długości granic jest bardzo dobry w porównaniu do innych bibliotek, które znajduje się na rysunku 7. Wszystkie te biblioteki traktowane są przez literaturę jako biblioteki dające wyniki state-of-the-art. Z wynikiem 686 metoda przedstawiona w tej pracy plasuje się blisko biblioteki Jostle i Metis, które otrzymały odpowiednio 695 oraz 688. Metoda zaprezentowana w niniejszej pracy bazuje na metodzie używanej przez bibliotekę Party, która dla tego problemu otrzymuje wynik 615. Jest to wynik niemal idealny. Wynikiem idealnym dla długości granic byłby wynik 600. Charakterystyką tego podziału jest to, że ze względu na brak obszarów niepodzielnych, które mogą utrudniać wymianę granicznych wierzchołków udało się otrzymać niemal idealnie równe pola. Ciężko powiedzieć, czemu jest aż tak duża różnica w stosunku do biblioteki Party. Być może przesądziły o tym różnice w implementacji, które najprawdopodobniej wyniknęły z nie dość szczegółowo opisanego algorytmu w artykule dotyczącym biblioteki Party [24]. Przygląda-

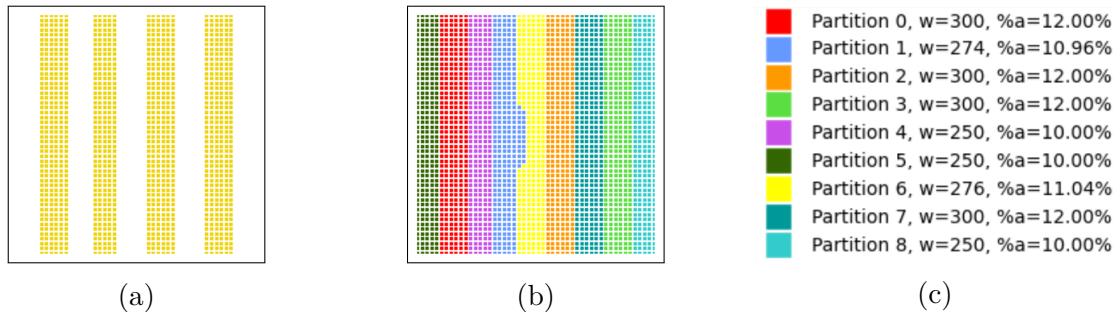


Rysunek 32: Siatka 100x100. Podział na 16 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 686. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.

jąc się mojemu rezultatowi, można zaproponować kilka pomniejszych usprawnień, które mogłyby jeszcze trochę polepszyć wynik. Można by przykładowo kosztem wielkości pól, zmusić algorytm do tworzenia prostych granic między obszarami. Ciężko mi jednak wyobrazić sobie modyfikację, która sprawiałaby, że obszary ustawiałyby się tak jakby siatka dzielona była pionowymi i poziomymi separatorami w algorytmie, który ma charakterystykę losową. Musi wydarzyć się naprawdę duży zbieg okoliczności, aby nastąpił taki podział. W jakiś sposób jest to możliwe dla biblioteki [24]. W związku powyższym wnioskuję, że w algorytmie biblioteki Party [24] muszą być jeszcze jakieś dodatkowe różnice względem rozwiązań opisanych w artykule. Kolejną różnicą jest czas wykonania partycjonowania, który dla sprzętu wyposażonego w Pentium III 933 MHz dual processor wraz z 1 GB pamięci operacyjnej dla Party wyniósł 0.03s. Dla mojego sprzętu wyposażonego w 2.3 GHz Quad-Core Intel Core i5 z 2018 roku wraz z 8 GB pamięci operacyjnej czas ten wyniósł 18s. Jest to o tyle dziwne, że algorytm do zmniejszania grafu, zwany weighted matching nie jest wcale algorymem bardzo skomplikowanym. Jest więc to zaskakujące, ponieważ w mojej implementacji sama część odpowiedzialna za zmniejszanie grafu, to jest algorytm LAM, potrzebuje około 5s aby zmniejszyć graf siatki 100x100 do potrzebnej wielkości. To wciąż 160 razy gorszy wynik dla jednej części mojej implementacji w porównaniu do całego algorytmu biblioteki Party. Nie jest to algorytm o skomplikowanym kodzie, jest on również bardzo dobrze udokumentowany. Wszędzie gdzie miałem możliwość wybierałem większe zużycie pamięci, kosztem krótszych obliczeń, starałem się również zawsze wybierać struktury danych ze stałym dostępem do danych. Różnica ta jest ogromna. Operacje umieszczone w algorytmie ze względu na obszary niepodzielne oraz wyłączone z obliczeń nie wprowadzają modyfikacji, które mogłyby w aż tak znacznym stopniu wpływać na złożoność obliczeniową. Być może jest to też kwestia kosztownych operacji na grafach dostarczonych przez bibliotekę NetworkX, z których korzystałem nie będąc w pełni świadomym ich złożoności obliczeniowej.

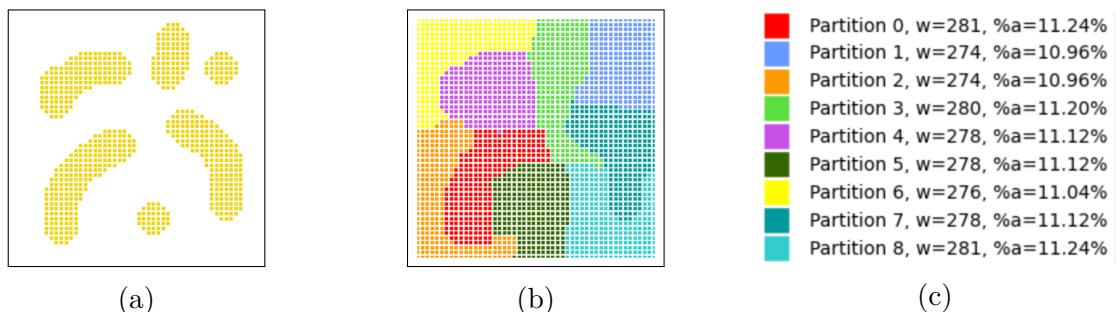
4.1.2. Wyniki dla podziału siatek z obszarami niepodzielnymi i wyłączonymi z obliczeń

W tym podrozdziale przedstawione są wyniki dla siatek z obszarami niepodzielnymi i wyłączonymi z obliczeń. Przykłady są celowo dobrane tak, aby były problematyczne dla algorytmu.



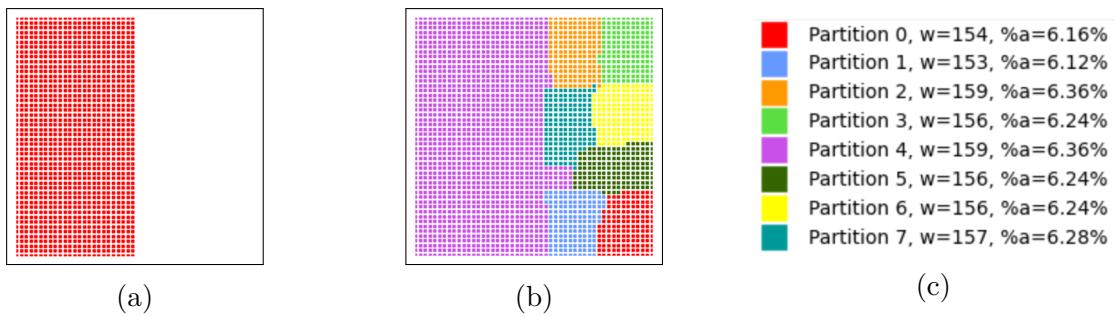
Rysunek 33: Siatka 50x50. Podział na 9 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 402. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsza różnica pomiędzy polem największej i najmniejszej partycji.

Siatka przedstawiona na rysunku 33 jest trudnym przypadkiem, ponieważ nie daje znacznych możliwości na wyrównanie pól w dalszych częściach algorytmu. Wynik jest więc zależny od algorytmu LAM. Aby otrzymać najlepszy rezultat musi on dobrze ustawić partycje od samego początku. Dla tego przypadku nie da się otrzymać idealnie równego podziału, ale najlepszym rezultatem będzie, gdy każda partycja będzie w osobnym pionowym pasku. Drugi obszar niepodzielny jest o jeden piksel węższy od pozostałych, dlatego w rezultacie partycjonowania pomiędzy partycją 6 a 1 następuje wyrównanie pola. Otrzymany rezultat jest najlepszym lub niemal najlepszym jaki można otrzymać.

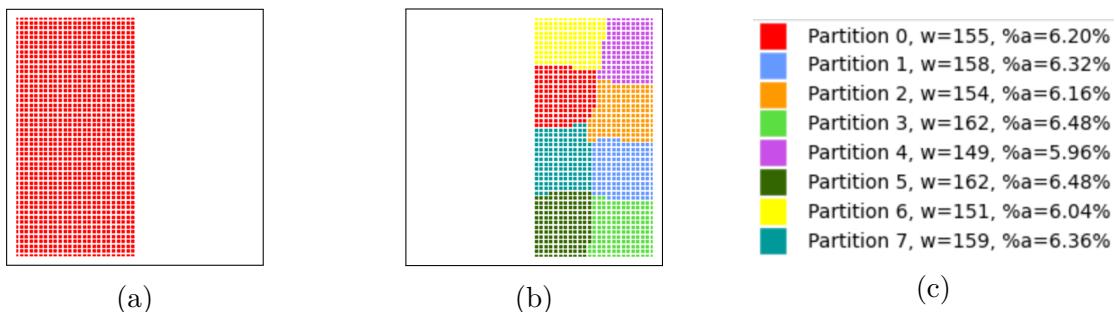


Rysunek 34: Siatka 50x50. Podział na 8 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 313. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.

Siatka partycjonowania na rysunku 34 daje możliwość wymieniania się przez obszary wierzchołkami granicznymi, jest to jednak znacznie utrudnione przez obszary niepodzielne. Wyniki wybierane wedle kryterium najkrótszej długości granic dawały rezultaty z dużymi różnicami w kwestii pól partycji. Rezultat daje niemal idealnie równe pola partycji, obszary są raczej zwarte. Jest to dobry wynik.

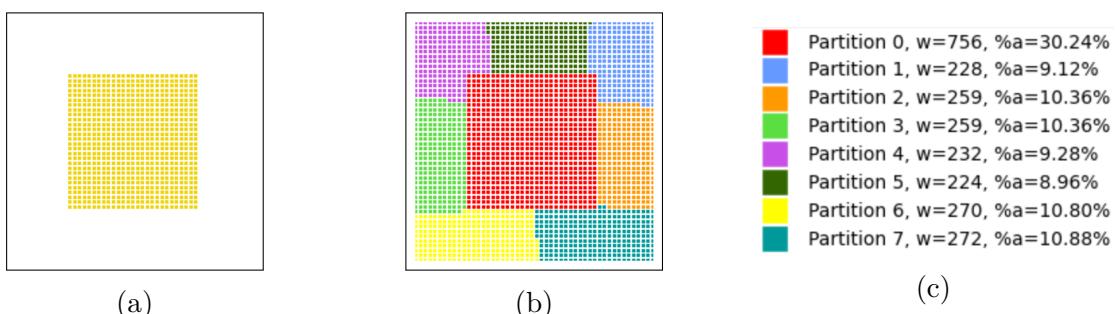


Rysunek 35: Siatka 50x50. Podział na 8 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń mapowane na wierzchołki z wagą 0. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 177. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.



Rysunek 36: Siatka 50x50. Podział na 8 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń nie są mapowane na wierzchołki. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 137. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.

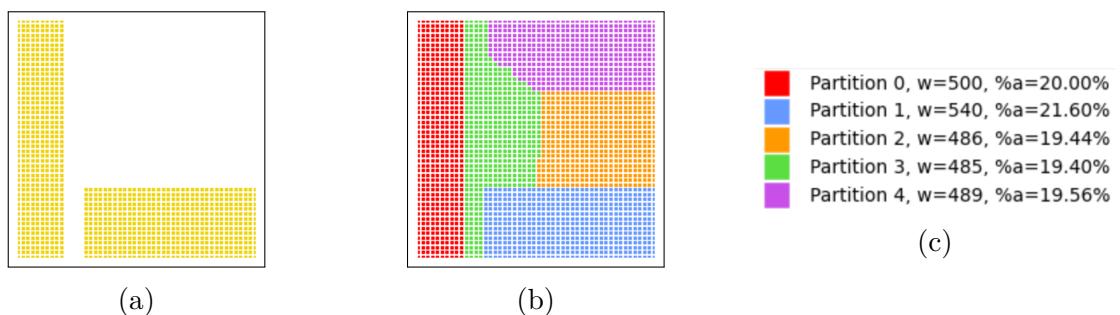
Dla siatki przedstawionej na rysunku 35 sprawdzane jest, czy algorytm bierze pod uwagę obszary wyłączone z obliczeń. Na rezultacie widać, że wszystkie pola są niemal identyczne pod względem wagi. Pole żółte urosło do dużych rozmiarów, jednak mimo to ma taką samą wagę jak pozostałe pola. Algorytm poprawnie bierze pod uwagę obszary wyłączone z obliczeń. Na rysunku 36 przedstawiono partycjonowanie tej samej siatki, ale dla tego przypadku obszary wyłączone z obliczeń nie są mapowane na wierzchołki w grafie. W efekcie partycjonowanie trwa krócej, a długość granic jest znacznie mniejsza.



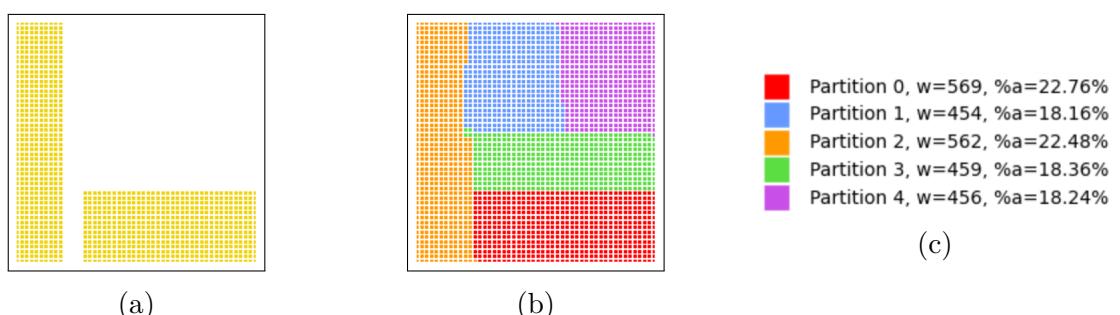
Rysunek 37: Siatka 50x50. Podział na 8 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 196. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.

Dla siatki przedstawionej na rysunku 37 sprawdzane jest działanie *discount* dla algorytmu LAM. Tego typu podziały są trudne dla algorytmu. W rezultacie otrzymujemy podział, gdzie wszystkie obszary dookoła obszaru czerwonego mają niemal równe pola, co jest najlepszym możliwym rezultatem dla tej siatki. Nie są one idealnie równe, ponieważ podział był wybierany wedle kryterium długości granic. Uznałem, że jest to lepsze kryterium, ponieważ wciąż algorytm ma całkiem dużą swobodę w kwestii optymalizacji granic i pól partycji.

Rysunek 38 oraz 39 przedstawia partycjonowanie tej samej siatki. Dla rysunku 38 najlepszy rezultat został wybrany poprzez kryterium najmniejszego odchylenia standardowego dla pól partycji, natomiast dla rysunku 39 poprzez kryterium najmniejszej długości granic. Widać jak różne podziały może tworzyć ten sam algorytm w zależności od początkowego ustalenia obszarów. Dla rysunku 38 otrzymaliśmy równiejsze pola, kosztem gorszej długości granic pomiędzy obszarami. Na rysunku 39 otrzymaliśmy krótsze granice, kosztem równości pól.



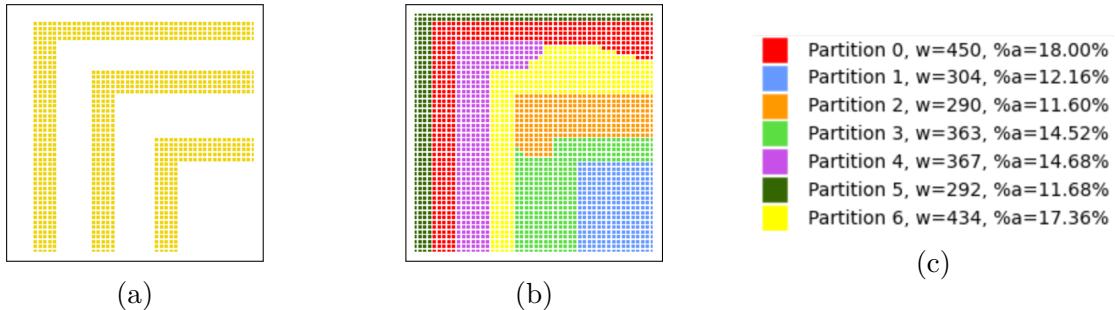
Rysunek 38: Siatka 50x50. Podział na 5 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 172. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.



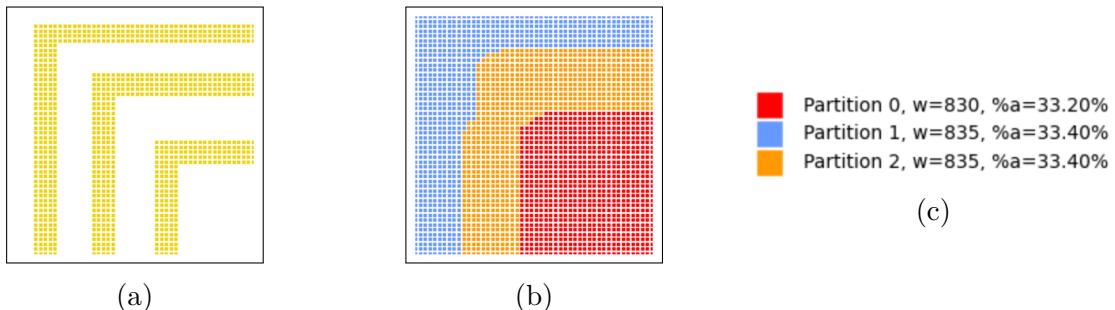
Rysunek 39: Siatka 50x50. Podział na 5 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 159. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.

Rysunek 40, 41 oraz 42 przedstawia partycjonowanie tej samej siatki, odpowiednio na 7, 3 oraz 10 części. Jest to bardzo trudna siatka do partycjonowania, ponieważ z racji na ułożenie obszarów niepodzielnych nie pozwala na zbytnie minimalizowanie granic pomiędzy obszarami, a także wpływa na wielkość obszarów, ponieważ niektóre obszary niepodzielne będą wymuszać większe partycje, niż powinny wyniknąć z podziału na zwykłej siatce tego samego rozmiaru. Pierwszy podział jest na 7 części, ponieważ tyle jest białych i żółtych

sfer na rysunku. Algorytm próbuje wyrównywać pola na tyle, na ile jest to możliwe. Widac, że partie, które ze sobą sąsiadowały i miały możliwość wyrównania obszarów są w miarę tej samej wielkości. Jest to na przykład partycja 6 oraz 0.



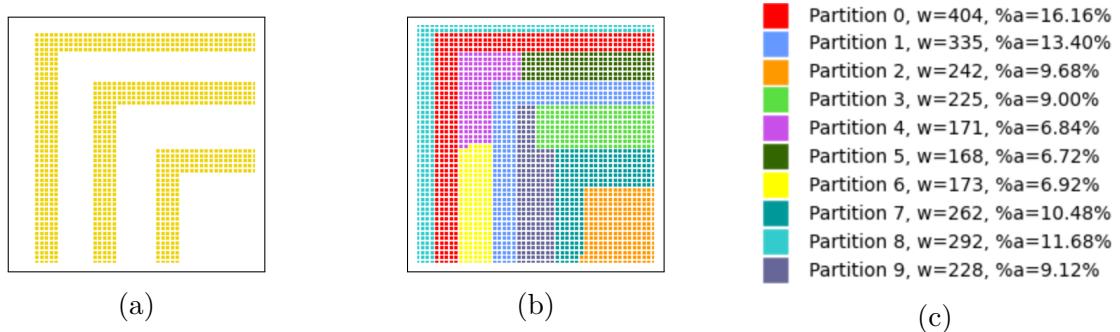
Rysunek 40: Siatka 50x50. Podział na 7 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 369. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.



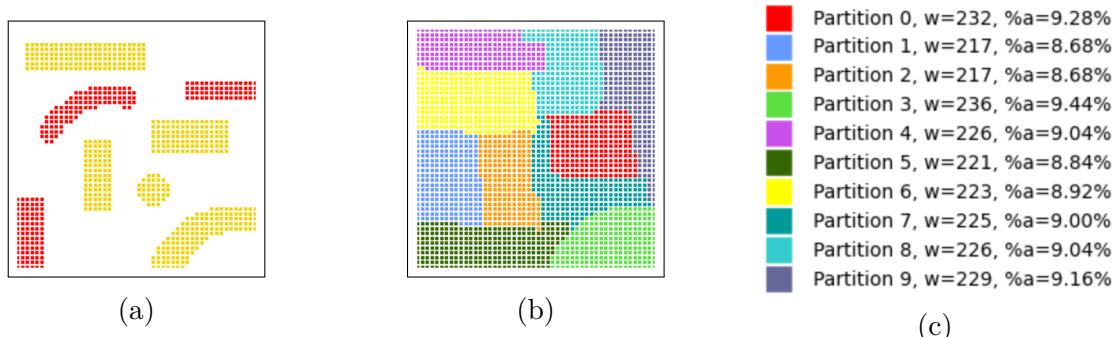
Rysunek 41: Siatka 50x50. Podział na 3 partycje. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 141. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.

Widac, że partycjonowanie na 3 części na rysunku 41 daje znacznie więcej swobody, w rezultacie partie są niemal identycznej wielkości. Ustawienie obszarów niepodzielnych motywuje nadal ułożenie partycji i zwiększa długość granic. Partycjonowanie przedstawione na rysunku 42 to bardziej ekstremalna wersja partycjonowania na rysunku 40. Partycje, które miały możliwość wyrównania pola między sobą, jak partie 6, 4 oraz 5, mają praktycznie identyczne pola. Analizując ten rysunek trudno jest zaproponować lepsze początkowe ułożenie obszarów w celu późniejszej, lepszej optymalizacji pól obszarów. Algorytm bardzo dobrze radzi sobie z tym trudnym przypadkiem.

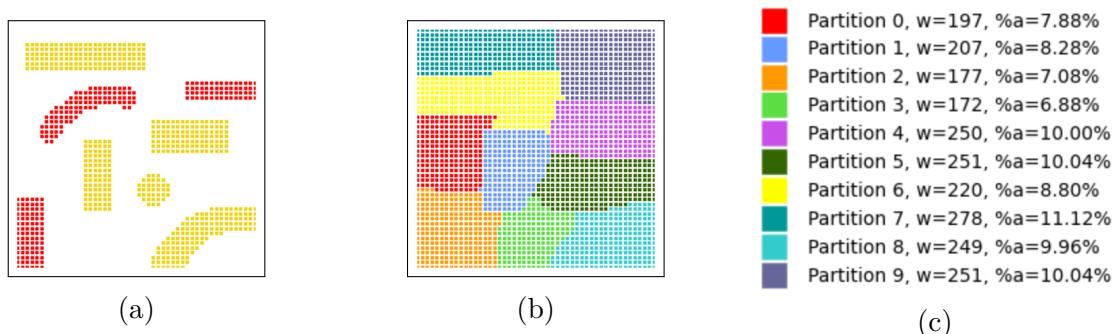
Rysunek 43 oraz 44 pokazuje bardzo podobną sytuację jak dla rysunku 38 oraz 39. Dla rysunku 43 otrzymaliśmy równiejsze pola, kosztem gorszej długości granic pomiędzy obszarami. Na rysunku 44 otrzymaliśmy krótsze granice, kosztem równości pól. Różnicą w tym wypadku jest to, że na raz na siatce pojawiają się zarówno obszary wyłączone z obliczeń jak i obszary niepodzielne. Algorytm bardzo dobrze radzi sobie z uwzględnieniem obydwu, otrzymuje krótkie granice oraz niemal równe obszary.



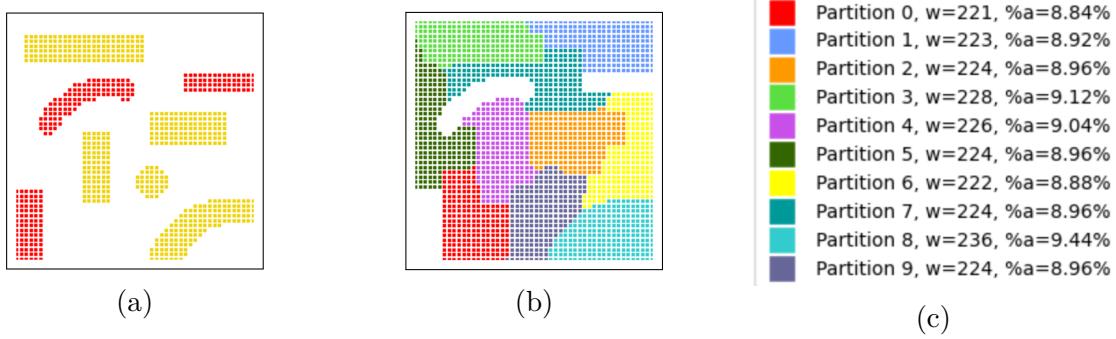
Rysunek 42: Siatka 50x50. Podział na 10 partycji. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 417. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.



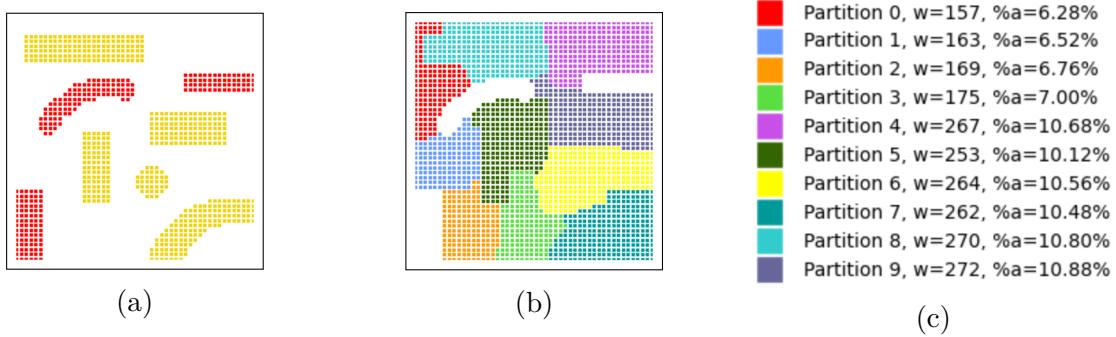
Rysunek 43: Siatka 50x50. Podział na 10 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń mapowane na wierzchołki z wagą 0. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 295. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.



Rysunek 44: Siatka 50x50. Podział na 10 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń mapowane na wierzchołki z wagą 0. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 261. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.



Rysunek 45: Siatka 50x50. Podział na 10 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń nie są mapowane na wierzchołki. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 252. Kryterium wyboru najlepszego rezultatu to najmniejsze odchylenie standardowe dla pól partycji.



Rysunek 46: Siatka 50x50. Podział na 10 partycji. Obszary wyłączone z obliczeń nie są mapowane na wierzchołki. Sumaryczna długość granic dla tego wyniku wynosi 221. Wybór najlepszego rezultatu wedle kryterium najmniejszej długości granic.

Rysunek 46 oraz 45 prezentują partycjonowanie tej samej siatki, ale z użyciem wariantu algorytmu gdzie obszary wyłączone z obliczeń nie są mapowane na wierzchołki. W efekcie dla obydwu kryteriów wyboru najlepszego partycjonowania otrzymujemy mniejszą długość granic. Do tej pory dla wszystkich przykładów nietworzenie wierzchołków w miejscach obszarów wyłączeniowych z obliczeń zwracało lepsze rezultaty i ten trend utrzyma się do samego końca. Dodatkowo dalej pokażę, że jeśli są one duże i nie są skupione w jednych miejscach siatki to są bardzo problematyczne dla algorytmu LAM, a także znaczenie wydłużają czas partycjonowania. Zawsze szybszym, efektywniejszym wyjściem jest skorzystanie z opcji usunięcia ich z siatki.

4.2. Wyniki dla podziału na m obszarów

Materiały źródłowe

- [1] S. Barnard and H. Simon. A fast multilevel implementation of recursive spectral bisection for partitioning unstructured problems. pages 711–718, 01 1993.
- [2] M. Berger and S. Bokhari. A partitioning strategy for nonuniform problems on multiprocessors. *IEEE Transactions on Computers*, C-36, 06 1987.
- [3] T. N. Bui and C. Jones. A heuristic for reducing fill-in in sparse matrix factorization. In *PPSC*, 1993.
- [4] T. F. Chan, J. R. Gilbert, and S.-H. Teng. Geometric spectral partitioning. Technical report, 1995.
- [5] C.-K. Cheng and Y.-C. Wei. An improved two-way partitioning algorithm with stable performance (vlsi). *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 10(12):1502–1511, 1991.
- [6] R. Diekmann and B. Monien. Using helpful sets to improve graph bisections. 08 1994.
- [7] C. M. Fiduccia and R. M. Mattheyses. A linear-time heuristic for improving network partitions. In *Proceedings of the 19th Design Automation Conference*, DAC '82, page 175–181. IEEE Press, 1982.
- [8] J. Garbers, H. Promel, and A. Steger. Finding clusters in vlsi circuits. In *1990 IEEE International Conference on Computer-Aided Design. Digest of Technical Papers*, pages 520–523, 1990.
- [9] Hagen and Kahng. A new approach to effective circuit clustering. In *1992 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, pages 422–427, 1992.
- [10] L. Hagen and A. Kahng. Fast spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. In *1991 IEEE International Conference on Computer-Aided Design Digest of Technical Papers*, pages 10–13, 1991.
- [11] B. Hendrickson and R. Leland. A multi-level algorithm for partitioning graphs. pages 28– 28, 02 1995.
- [12] J. Hromkovič and B. Monien. The bisection problem for graphs of degree 4 (configuring transputer systems). In A. Tarlecki, editor, *Mathematical Foundations of Computer Science 1991*, pages 211–220, Berlin, Heidelberg, 1991. Springer Berlin Heidelberg.
- [13] G. Karypis and V. Kumar. Analysis of multilevel graph partitioning. pages 29– 29, 02 1995.
- [14] G. Karypis and V. Kumar. Multilevelk-way partitioning scheme for irregular graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 48(1):96–129, 1998.

- [15] G. Karypis and V. Kumar. A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 48(1):71–95, 1998.
- [16] G. Karypis and V. Kumar. Kumar, v.: A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *siam journal on scientific computing* 20(1), 359-392. *Siam Journal on Scientific Computing*, 20, 01 1999.
- [17] B. W. Kernighan and S. Lin. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *The Bell System Technical Journal*, 49(2):291–307, 1970.
- [18] R. Leland and B. Hendrickson. An improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations. 16, 09 1992.
- [19] N. Mansour, R. Ponnusamy, A. Choudhary, and G. C. Fox. Graph contraction for physical optimization methods: A quality-cost tradeoff for mapping data on parallel computers. In *Proceedings of the 7th International Conference on Supercomputing*, ICS ’93, page 1–10, New York, NY, USA, 1993. Association for Computing Machinery.
- [20] G. Miller, S. Teng, and W. Thurston. A cartesian parallel nested dissection algorithm. 1994.
- [21] G. Miller, S.-H. Teng, and S. Vavasis. A unified geometric approach to graph separators. In *[1991] Proceedings 32nd Annual Symposium of Foundations of Computer Science*, pages 538–547, 1991.
- [22] G. L. Miller, S. Teng, W. Thurston, and S. A. Vavasis. Automatic mesh partitioning. In A. George, J. Gilbert, and J. Liu, editors, *Graphs Theory and Sparse Matrix Computation*, The IMA Volumes in Mathematics and its Application, pages 57–84. Springer-Verlag, 1993. Vol 56.
- [23] B. Monien and R. Preis. Upper bounds on the bisection width of 3- and 4-regular graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 4(3):475–498, 2006. Special issue in honour of Giorgio Ausiello.
- [24] B. Monien and S. Schamberger. Graph partitioning with the party library: helpful-sets in practice. In *16th Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing*, pages 198–205, 2004.
- [25] B. Nour-Omid, A. Raefsky, and G. Lyzenga. Solving finite element equations on concurrent computers. 1987.
- [26] A. Pothen, H. D. Simon, and K.-P. Liou. Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11(3):430–452, May 1990.
- [27] A. Pothen, H. D. Simon, L. Wang, and S. T. Barnard. Towards a fast implementation of spectral nested dissection. In *Proceedings of the 1992 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*, Supercomputing ’92, page 42–51, Washington, DC, USA, 1992. IEEE Computer Society Press.

- [28] R. Preis. Linear time $1/2$ -approximation algorithm for maximum weighted matching in general graphs. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Theoretical Aspects of Computer Science*, STACS'99, page 259–269, Berlin, Heidelberg, 1999. Springer-Verlag.
- [29] P. Raghavan. Line and plane separators. Technical report, LAPACK WORKING NOTE 63 (UT CS-93-202), 1993.
- [30] S. Schamberger. Improvements to the helpful-set algorithm and a new evaluation scheme for graph-partitioners. In V. Kumar, M. L. Gavrilova, C. J. K. Tan, and P. L'Ecuyer, editors, *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2003*, pages 49–53, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg.
- [31] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms, 4th Edition*. Addison-Wesley, 2011.
- [32] C. Walshaw and M. Cross. Mesh partitioning: A multilevel balancing and refinement algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22, 07 2004.
- [33] Wikipedia. Graph embedding — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Graph%20embedding&oldid=1019397582>, 2021. [Online; accessed 28-June-2021].
- [34] Wikipedia. Skojarzenie (teoria grafów) — Wikipedia, the free encyclopedia. [http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Skojarzenie%20\(teoria%20graf%C3%B3w\)&oldid=56877732](http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Skojarzenie%20(teoria%20graf%C3%B3w)&oldid=56877732), 2021. [Online; accessed 30-June-2021].